

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

Con el incremento de la complejidad de procesos a ser analizados, el ingeniero de control moderno, frecuentemente necesita un modelo del sistema a ser controlado. Payter [56] presentó en 1961 la Teoría de *Bond Graph* como una metodología abstracta general para modelar sistemas físicos. El marco de referencia de esta teoría se denomina *dominio físico* [57]. Bond Graph es una poderosa herramienta de representación de sistemas en el dominio físico, de la cual una variedad de modelos matemáticos pueden ser derivados [58]. La Teoría de Bond Graph es una teoría relativamente nueva en el modelado de sistemas, la cual ha tenido gran aceptación en la comunidad científica y ha logrado evolucionar de tal manera que cada dos años se presenta la Conferencia Internacional en Modelado y Simulación en Bond Graph (ICBGM).

Por otro lado, actualmente existe un incremento en el uso de controladores automáticos para mejorar el comportamiento de los sistemas dinámicos de control [19], gracias en parte a la revolución en la electrónica que ha propiciado el uso de controladores numéricos inteligentes aplicados a todo tipo de sistemas de ingeniería [50]. Además, con la aparición del trabajo multidisciplinario el desarrollo de sistemas automáticos recibió un gran ímpetu, dado que los sistemas típicamente son una mezcla de sistemas eléctricos, hidráulicos, neumáticos y mecánicos.

El incremento en el uso de controladores pone de manifiesto la fuerte relación que existe entre el modelado y control de sistemas. La Teoría de Bond Graph se ha aplicado al control de sistemas en el dominio físico [3, 22, 57]. Las principales ventajas de estas propuestas son desarrollar el modelo y el controlador en el dominio físico, garantizar que el controlador sea realizable y encontrar importantes características como causalidad, controlabilidad, observabilidad, pasividad y estabilidad. Esto se logra gracias a que el modelo de Bond Graph y las técnicas de análisis preservan información y características del sistema físico utilizando una cantidad

mínima símbolos [29].

Actualmente se han desarrollado importantes trabajos basados en Bond Graph, por ejemplo, en Análisis de Sistemas Lineales [5, 18, 29], en Perturbaciones Singulares [6, 30], en Diseño de Observadores [7, 8, 22], Reducción de Modelos [73], en Aplicación del Segundo Método de Lyapunov [67] y Desacoplamiento entrada/salida [29].

En la siguiente sección se presenta la motivación para desarrollar este trabajo de tesis y contribuciones de la misma.

1.2 Motivación y Contribución de esta Tesis

La motivación para el desarrollo de este trabajo de tesis se presenta a continuación. Así mismo, se presentan las contribuciones de la tesis.

1.2.1 Motivación para Desarrollar esta Tesis.

La búsqueda de herramientas nuevas y útiles para el modelado y control de sistemas físicos es la principal motivación de este trabajo de investigación.

Así, se presenta este trabajo de tesis, con la finalidad de aportar algunas herramientas de control utilizando la Teoría de Bond Graph y el apoyo de Teoría de Grafos para despertar el interés en esta área de investigación en México.

1.2.2 Contribuciones de esta Tesis

La contribución principal de esta tesis es Presentar Herramientas Gráficas para Análisis de Sistemas Físicos Lineales Invariantes (LTI) Multi-Entrada Multi-Salida (MIMO), basadas en la Teoría de Bond Graph y la Teoría de Grafos [69].

En el diagrama a bloques de la figura 1.1, se muestran los diferentes estudios realizados en esta tesis, partiendo de un sistema físico LTI MIMO. A continuación se dan los principales alcances de este trabajo de investigación basados en la figura 1.1:

- Obtención de una realización en espacio de estado del sistema utilizando la interconexión de los elementos dados en el grafo correspondiente al sistema.
- Determinación de las condiciones de estabilidad a partir de los grafos propuestos.
- Obtención de un control por retroalimentación de estados estimados utilizando Bond Graph.

- Obtención de los valores en estado estacionario.
- Obtención del error en estado estacionario retroalimentando la salida por medio de un control proporcional.
- Para una clase de sistemas no lineales modelado en Bond Graph se presenta un procedimiento de linealización en Bond Graph. Los resultados encontrados en esta tesis pueden aplicarse al sistema linealizado.

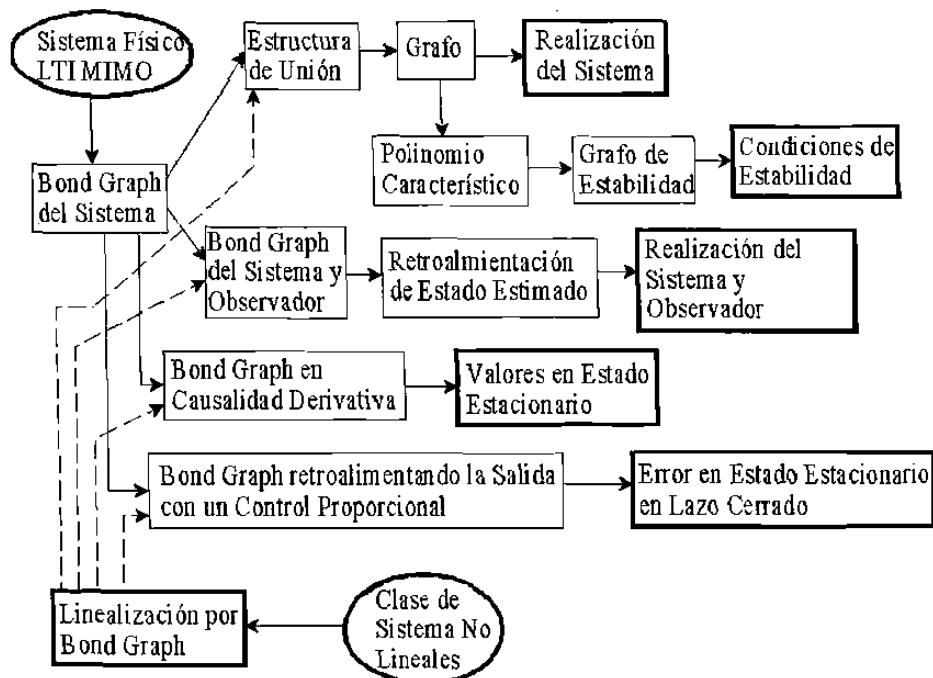


Figura 1.1 Diagrama a bloques de la estructura de la tesis.

Los resultados presentados en esta tesis se obtuvieron con la finalidad de presentar herramientas gráficas para encontrar una realización de estado, condiciones de estabilidad, retroalimentación de estado estimado y valores y error en estado estacionario de un sistema LTI MIMO modelado en Bond Graph.

Las estructuras propuestas y grafos propuestos están basados en la Estructura de Unión [5] de un Bond Graph y del grafo de Coates [69] de la Teoría de Grafos. Los resultados gráficos de la figura 1.1 son directos en el sentido de que no requieren las técnicas algebraicas de sistemas lineales. Así mismo, las ventajas principales de estos resultados son: se trabaja en un sólo marco de referencia (Bond Graph) mediante el cual se puede representar sistemas de diferentes tipos de energía (eléctrico, mecánico, hidráulico, térmico y magnético) [18], la inversión algebraica de la matriz A_p se puede evitar al obtener el Bond Graph en causalidad derivativa del sistema [6, 30]. Las propiedades estructurales de un sistema se preservan en el modelado en Bond Graph [29]. Además, al obtener un control en un modelo representado en Bond Graph garantiza que

sea realizable [57]. Las variables de estado controlables u observables pueden ser determinadas utilizando trayectorias causales en un Bond Graph [29] y estas trayectorias se utilizan para linealizar una clase de sistemas no lineales.

En la siguiente sección, se presenta el objetivo general de la tesis, incluyendo los objetivos específicos.

1.3 Objetivo de la Tesis

Obtener herramientas y metodologías gráficas para el análisis y síntesis, de sistemas LTI MIMO en el dominio físico.

1.3.1 Metas

Las metas del presente trabajo de investigación son:

- Obtención gráfica de una realización en espacio de estado para un sistema LTI MIMO modelado en Bond Graph, utilizando grafos.
- Determinación de las condiciones de estabilidad mediante grafos para un sistema LTI MIMO modelado en Bond Graph
- Diseño de un control por retroalimentación de estado estimado para un sistema LTI MIMO en el dominio físico.
- Obtención de los valores de estado estacionario de un sistema LTI MIMO modelado en el dominio físico.
- Obtención de modelos simplificados en el dominio físico de una máquina síncrona.
- Obtención de las constantes de tiempo de una máquina síncrona modelada en el dominio físico.
- Linealización de una clase de sistemas no lineales en el dominio físico y su aplicación a la máquina síncrona.

1.4 Organización de la Tesis

El presente trabajo de investigación de tesis consta de 9 capítulos y está organizado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 , se introduce el modelado en el dominio físico, se estudia la representación de cada uno de sus elementos en Bond graph, la causalidad, se da un procedimiento general para el modelado de sistemas físicos y se describe la estructura de unión para determinar el modelado matemático en espacio de estado del sistema.
- El Capítulo 3 presenta una representación de un sistema físico en una grafo lineal a partir de su modelo en Bond Graph; con este grafo lineal se proponen procedimientos para obtener la realización (A_p, B_p, C_p, D_p) del sistema.
- El Capítulo 4 presenta un procedimiento para determinar las condiciones de estabilidad de un sistema modelado en Bond Graph.
- El Capítulo 5 presenta un control por retroalimentación de estado estimado de un sistema físico utilizando Bond Graph.
- El Capítulo 6 presenta la obtención de los valores de estado estacionario utilizando Bond Graph de un sistema en lazo abierto y de un sistema con retroalimentación proporcional de la salida.
- En el Capítulo 7, se presenta un esquema y un procedimiento para linealizar una clase de sistemas no lineales utilizando Bond Graph.
- En el Capítulo 8 se estudia un modelo de una máquina síncrona en Bond Graph, se proponen algunos modelos reducidos y se da un procedimiento para obtener las constantes de tiempo de una máquina síncrona.
- En el Capítulo 9 se aplican los resultados y procedimientos de los capítulos 2 al 7 a la máquina síncrona.
- En el capítulo 10 se presentan las conclusiones generales de la tesis y los trabajos futuros.

En la siguiente sección, se presentan los problemas a resolver en esta tesis y las condiciones que se deben satisfacer para que un sistema LTI MIMO, modelado en Bond Graph pueda ser utilizado en este trabajo.

1.5 Planteamiento del Problema

En esta tesis se presentan un conjunto de herramientas, estructuras y procedimientos para control de sistemas LTI MIMO en el dominio físico, basadas en la Estructura de Unión. Los problemas resueltos son:

- Control por retroalimentación de estado estimado.
- Valor de estado estacionario.
- Linealización de una clase de sistemas no lineales.

Los problemas resueltos con el apoyo de Teoría de Gráfos son:

- Obtención de las matrices A_p , B_p , C_p , D_p de la realización del sistema.
- Estabilidad del sistema en el sentido de Hurwitz.

Para ilustrar su aplicación estas herramientas son usadas al sistema de una máquina síncrona, incluyendo los siguientes resultados de la máquina síncrona modelada en Bond Graph:

- Modelos simplificados: sin devanados de amortiguamiento, a velocidad constante y ambas reducciones.
- Determinación de las Constantes de tiempo.

En el presente trabajo el sistema $\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t)$; $y(t) = C_p x(t) + D_p u(t)$ modelado en Bond Graph satisface lo siguiente:

- H1.- Las relaciones constitutivas de los elementos que forman los campos de almacenamiento F y disipación L son LTI.
- H2.- Las propiedades P1 y P2 de para la matriz de Estructura de Unión S se cumplen (ver sección 2.6.2) .
- H3.- La asignación de causalidad integral en el Bond Graph es causalmente correcta (ver sección 2.4.5) equivalentemente no existen conflictos de causalidad [5].

Además, para los capítulos 4, 6 y 7 se satisface:

- H4.- En un Bond Graph con una causalidad integral asignada, no existen elementos almacenadores de energía en causalidad derivativa, que implica $E = I$ (ver sección 2.6.2).

En el siguiente capítulo, se dan los elementos básicos de modelado utilizando Bond Graph.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Introducción

El primer paso en el análisis de un sistema dinámico, es obtener su modelo. Los modelos pueden tomar muchas formas distintas, según el sistema particular de que se trate y las circunstancias. Los modelos son normalmente contruidos para resolver un problema propuesto.

En particular el modelado en Bond Graph representa un enfoque unificado para el modelado y manipulación de sistemas dinámicos de ingeniería [55] que permite obtener sus ecuaciones de estado y conocer sus propiedades de observabilidad, controlabilidad y dependencia lineal de sus elementos [5], basado en una representación gráfica y la generalización de los conceptos de variable de flujo y esfuerzo.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: En primer lugar se da una breve descripción del modelado en Bond Graph, de sus fundamentos y los componentes que lo forman para construir un modelo en el dominio físico. Después se describe un procedimiento para el modelado de sistemas en Bond Graph el cual se ilustra a ejemplos de un sistema eléctrico, de un sistema mecánico y de un sistema hidráulico. Posteriormente se estudia una *metodología* para obtener el modelo matemático de un sistema en Bond Graph utilizando su estructura de unión y finalmente se plantean los problemas a resolver en este trabajo de investigación.

2.2 Modelado [18, 19, 31]

Los *Modelos* son simplificaciones de la realidad. Existen varios tipos de modelos y su forma depende de su aplicación, por ejemplo. *Modelos físicos* son frecuentemente usados en ingeniería cuando no es práctico usar sistemas reales. Una idea central que envuelve el estudio

de la dinámica de un sistema real es la de su modelo. Modelos son construcciones simplificadas y abstractas utilizadas para estudiar y determinar el comportamiento de sistemas.

Cuando la representación de la dinámica de un sistema se expresa en términos de operadores y variables se tiene otro tipo de modelo llamado *modelo matemático*. Este tipo de modelo es más abstracto que el modelo físico y tiene fuertes similitudes con el mismo. El modelo matemático representa solamente propiedades esenciales o primordiales de un fenómeno de interés.

A causa de que un modelo es una simplificación de la realidad, hay una gran cantidad de trabajo en la construcción de modelos. Un modelo excesivamente complejo y detallado puede contener parámetros “imposibles” de estimar y/o muy difíciles de analizar. Un modelo excesivamente simplificado no es capaz de exhibir características importantes.

En la siguiente sección, se da la definición de Bond Graph y una breve reseña histórica del modelado en Bond Graph.

2.3 ¿Qué es un Bond Graph?

La herramienta de Bond Graph definida por Paynter (1961) [56], formalizada por Karnopp (1983) [18], Rosenberg (1990) [19], Thoma (1991) [58] y Breedveld (1984) [59], está situada entre el sistema físico y los modelos matemáticos asociados. Debe ser señalado que esta técnica no tiene la pretensión de ser universal. Sin embargo, ha mostrado su eficiencia en gran número de aplicaciones, para el diseño de sistemas, simulación y determinación de las leyes de control, y de esta manera puede ser ubicada entre los métodos necesarios para la construcción de modelos [24].

Un *Bond Graph* es una representación gráfica de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Estos componentes colocados en el sistema describe cómo fluye la potencia a través del sistema [55].

Bond Graph es un enfoque general que permite construir modelos de sistemas eléctricos, magnéticos, mecánicos, hidráulicos, neumáticos y térmicos utilizando solamente un pequeño conjunto de elementos ideales. Técnicas estándares expresan los modelos en ecuaciones diferenciales o en esquemas de simulación por computadora.

A continuación, se definen los elementos básicos que componen a un modelo representado en Bond Graph.

2.4 Componentes Básicos de un Bond Graph [18, 31, 55]

El componente fundamental de un Bond Graph es el *bond* de energía utilizado para acoplar los puertos de energía de los componentes del sistema.

El bond es representado por una semiflecha indicando en la dirección de ésta cómo fluye la energía entre los puertos al cual está conectado, como se muestra en la figura 2.1.

Para modelar un sistema, es necesario dividir un sistema en partes más pequeñas que puedan ser modeladas y estudiadas experimentalmente, y después ensamblarlas al modelo del sistema. Así, las partes principales de un sistema son llamadas *subsistemas* y las partes no reducibles son llamadas *componentes* y básicamente, un subsistema es una parte de un sistema que es modelado como un sistema en sí mismo, donde un componente es modelado como una entidad.

Los lugares en los cuales los subsistemas pueden ser interconectados, son lugares en los cuales la energía puede fluir, tales lugares son llamados *puertos*. Los sistemas con un puerto sencillo es denotado *puerto-1*, un sistema con dos puertos es llamado *puerto-2*. Los sistemas multipuertos son denotados por *puertos-n*, donde n es el número de puertos.

Las variables que describen la unión de dos multipuertos que son conectados son llamadas *variables de potencia* a causa de que el producto de las variables consideradas como funciones del tiempo es la potencia instantánea fluyendo entre los dos multipuertos.

Dado que existen interacciones de potencia cuando dos puertos son conectados, es útil clasificar la variedad de variables de potencia en un esquema universal y describir todos los tipos de multipuerto en un lenguaje común. Las variables de potencia son llamadas *esfuerzo* $e(t)$ y *flujo* $f(t)$. Estas variables son llamadas *variables de bond generalizadas* debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía. En la figura 2.1 se muestra la representación de un bond con las variables de potencia asociadas.

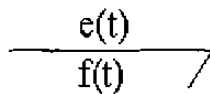


Figura 2.1 Bond con sus variables de potencia.

Ejemplos de estos pares de variables son voltaje y corriente para un sistema eléctrico, y fuerza y velocidad para un sistema mecánico. La relación de ambas variables está dada por:

$$P(t) \triangleq e(t)f(t) \quad (2.1)$$

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el es-

tado del sistema llamadas *variables de energía* denominadas *momento* $p(t)$ o *esfuerzo acumulado* $e_a(t)$ y *desplazamiento* $q(t)$ o *flujo acumulado* $f_a(t)$, están dadas por:

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int^t e(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int^t f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

La tabla 2.1 muestra las variables generalizadas para sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales y la tabla 2.2 para sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos, utilizadas en el modelado mediante Bond Graph.

Variables	General	Eléctrico	Mecánico Traslacional
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ Voltaje	$F(t)$ Fuerza
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$V(t)$ Velocidad
Momento	$p(t) = \int e(t) dt$	$\lambda(t)$ Enlace de Flujo	$P_R(t)$ Momento Rotacional
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t) dt$	$q(t)$ Carga	$x(t)$ Distancia
Potencia	$P(t) = e(t) f(t)$	$v(t)i(t)$	$F(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p) dp$ $E(q) = \int e(q) dq$	$\int i(\lambda) d\lambda$ $\int edq$	$\int V(P_R) dP_R$ $\int F(x) dx$

Tabla 2.1 Variables generalizadas de sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales.

Variables	Mecánico Rotacional	Hidráulico
Esfuerzo	$\tau(t)$ Par	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$\omega(t)$ Velocidad angular	$Q(t)$ Caudal
Momento	$H(t)$ Momento angular	$P_p(t)$ Integral de presión
Desplazamiento	$\theta(t)$ Angulo	$V(t)$ Volumen
Potencia	$\tau(t)\omega(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$\int \omega(H) dH$ $\int \tau(\theta) d\theta$	$\int Q(P_p) dP_p$ $\int P_e(V) dV$

Tabla 2.2 Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos.

2.4.1 Puertos-1 Pasivos

Consideramos elementos ideales, los cuales representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía; llamamos a éstos *elementos pasivos*. Se denominan Puertos-1

Pasivos a aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo. Las tablas 2.3, 2.4 y 2.5 muestran los elementos de disipación R , de almacenamiento de flujo C y de almacenamiento de esfuerzo I , para sistemas eléctricos, sistemas mecánicos y sistemas hidráulicos.

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
No-Lineal	$v = \varphi(i)$	$F = \varphi(V)$	$\Delta P = \varphi(Q)$

Tabla 2.3 Elemento- R .

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int idt$	$F(t) = k \int Vdt$	$P_r(t) = C \int \Delta Q dt$
No-Lineal	$v(t) = \varphi(q)$	$F(t) = \varphi(x)$	$P_r(t) = \varphi(V)$

Tabla 2.4 Elemento- C .

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int vdt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int Fdt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
No-Lineal	$i(t) = \varphi(\lambda)$	$V(t) = \varphi(P)$	$Q(t) = \varphi(P_p)$

Tabla 2.5 Elemento- I .

En la figura 2.2, se muestra el esquema mnemónico llamado *tetrahedro de estado*, en el cual se observa como se relacionan las variables generalizadas por tres puertos-1 pasivos R , C y I .

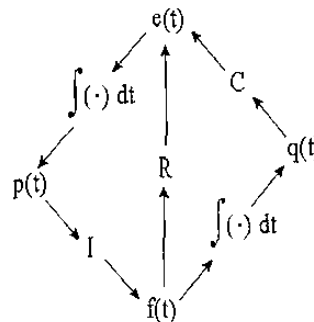


Figura 2.2 Tetrahedro de estado.

2.4.2 Puertos-1 Activos o Fuentes

Los elementos que introducen energía al sistema son llamados *fuentes*. Existen dos tipos de fuentes, *fuerza de esfuerzo* (voltaje, fuerza o presión) y *fuerza de flujo* (corriente, velocidad o caudal) denotadas MS_e y MS_f respectivamente, cuya representación se muestra en la figura 2.3, en donde una fuente es un elemento activo sencillo llamado Puerto-1 Activo.



Figura 2.3 Puertos-1 activos.

2.4.3 Los Elementos Ideales de Puerto-2

Consideramos ahora dos elementos ideales puerto-2, llamados *transformador* (TF) y *girador* (GY), que son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo. Caracterizándose por tener dos puertos, y una relación lineal entre esfuerzos y flujos.

Los bonds que representan a un transformador TF y a un girador, GY se muestran en la figura 2.4, donde n y r son los *módulos* del transformador y del girador, respectivamente

$$\frac{e_1(t)}{f_1(t)} \nearrow TF \frac{e_2(t)}{f_2(t)} \quad \frac{e_1(t)}{f_1(t)} \nearrow GY \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$$

Figura 2.4 Bond Graph de un transformador y de un girador.

Las relaciones de las variables de bond generalizadas para el transformador, TF , están dadas por:

$$e_1(t) = ne_2(t) \quad (2.4)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{n}f_2(t) \quad (2.5)$$

y para el girador, GY , son:

$$e_1(t) = rf_2(t) \quad (2.6)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r}e_2(t) \quad (2.7)$$

Estos elementos juegan un papel muy importante para el modelado de la conversión de potencia de un dominio físico a otro.

2.4.4 Los Elementos de Unión, Puertos-3

Estos *puertos-3* son llamados *uniones* dado que ellos sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema. Estos puertos-3 representan una de las ideas fundamentales del formalismo de Bond Graph, representan en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones en serie y en paralelo.

Considerar la *unión de flujo*, *unión-0* o *unión de esfuerzo común* para la conexión en paralelo. En la figura 2.5 se muestra la representación de esta unión.

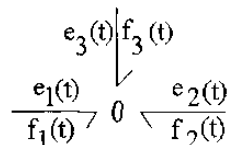


Figura 2.5 Unión-0.

Las relaciones de interconexión que describen una unión de flujo están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.8)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.9)$$

Estas ecuaciones especifican que en una unión-0, los esfuerzos en todos los bonds son siempre iguales y la suma algebraica de los flujos es cero.

El otro elemento de puerto-3, es la *unión de esfuerzo*, *unión-1* o de *flujo común* para la conexión en serie, su representación se muestra en la figura 2.6.

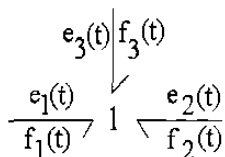


Figura 2.6 Unión-1.

Las relaciones de interconexión para este elemento son:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.10)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.11)$$

Observese a diferencia de la unión de flujo, la unión de esfuerzo tiene un flujo común en los bonds que inciden en la unión y la suma de las variables de esfuerzo en los bonds es cero.

Los puertos de conexión de esfuerzo y flujo pueden extenderse a puertos de 3 o más puertos.

2.4.5 Causalidad para los Multipuertos Básicos

Para organizar las leyes constitutivas de componentes en conjuntos de ecuaciones diferenciales necesitamos definir relaciones de causa y efecto. Las relaciones de causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. Una marca en un bond, llamada *trazo causal*, indica como $e(t)$ y $f(t)$ simultáneamente son determinados causalmente en un bond. Cuatro ejemplos de causalidad se muestran en la figura 2.7.

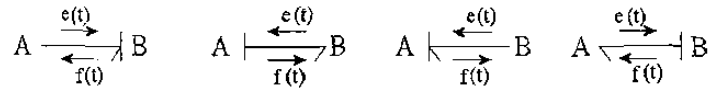


Figura 2.7 Causalidad para un bond.

El trazo causal indica un sentido de entrada-salida para $e(t)$ y $f(t)$ en cada puerto de los dos componentes juntos. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal.

Las reglas que se presentan en la Tabla 2.6 se deben cumplir.

Causalidad Necesaria	MS_e —	MS_f —	
	— TF — — GY —	—TF — —GY —	
Causalidad Restrictiva	— 0 —	—0 —	—0 —
	—1 —	— 1 —	— 1 —
Causalidad Integral	— I	—C	
Causalidad Derivativa	—I	— C	
Causalidad Arbitraria	— R	—R	

Tabla 2.6 Consideraciones causales para los multipuertos básicos.

Consideremos dos ejemplos para explicar la importancia de la causalidad. Un modelo para la unión-0 sin causalidad se muestra en la figura 2.8.

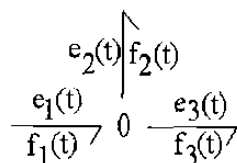


Figura 2.8 Ejemplo de unión-0 sin causalidad.

De la figura 2.8, obtenemos:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.12)$$

$$f_1(t) - f_2(t) - f_3(t) = 0 \quad (2.13)$$

Ahora, con el trazo causal, como se muestra en la figura 2.9, significa que $e_1(t)$, entra en la unión y $e_2(t)$ y $e_3(t)$ son salidas de la unión, efectos de $e_1(t)$, así $f_1(t)$ está en el sentido opuesto y va fuera de la unión, es una salida, y $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son entradas a la unión.

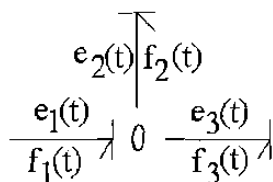


Figura 2.9 Ejemplo de unión-0 con causalidad.

Esto se representa con las ecuaciones de interconexión:

$$e_2(t) = e_1(t) \quad (2.14)$$

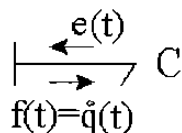
$$e_3(t) = e_1(t) \quad (2.15)$$

$$f_1(t) = f_2(t) + f_3(t) \quad (2.16)$$

en una forma bien adaptada para el cálculo numérico.

Considere ahora al *elemento-C*. La relación constitutiva es de $f(t)$ a $e(t)$ y almacena flujo, es decir, relaciona $e(t)$ a una variable de flujo acumulada $q(t) = \int f(t) dt$. Esto es, si $f(t)$ es la entrada a un elemento- C como se muestra en la figura 2.10, se integra primero para encontrar $q(t)$ y entonces $e(t)$ es una salida relacionada a $q(t)$, a esta causalidad en un elemento de almacenamiento se le llama *causalidad integral*, debido a que la integral de la entrada $f(t)$ se relaciona con la salida $e(t)$, esto es,

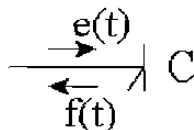
$$e(t) \triangleq \frac{1}{C} \int f(t) dt \quad (2.17)$$

Figura 2.10 Elemento- C en causalidad integral.

Invirtiendo la causalidad, mostrada en la figura 2.10, se obtiene la misma relación (2.17) pero escrita con derivadas:

$$f(t) \triangleq C \frac{de(t)}{dt} \quad (2.18)$$

a esta causalidad se le llama *causalidad derivativa* de un elemento de almacenamiento.

Figura 2.11 Elemento- C en causalidad derivativa.

En la tabla 2.7 se muestran los Puertos 1 con la causalidad correspondiente a cada elemento considerado.

Elemento	Forma Causal	Relación Causal
Fuente de Esfuerzo	$MS_e \text{---} \nearrow$	$e(t) = E(t)$
Fuente de Flujo	$MS_f \text{---} \longleftarrow$	$f(t) = F(t)$
Resistencia	$\text{---} \longleftarrow R$	$e(t) = \Phi_R[f(t)]$
	$\text{---} \nearrow R$	$f(t) = \Phi_R^{-1}[e(t)]$
Capacitancia	$\text{---} \longleftarrow C$	$e(t) = \Phi_C^{-1}[\int f(t) dt]$
	$\text{---} \nearrow C$	$f(t) = \frac{d}{dt}[\Phi_C e(t)]$
Inductancia	$\text{---} \longleftarrow I$	$f(t) = \Phi_I^{-1}[\int e(t) dt]$
	$\text{---} \nearrow I$	$e(t) = \frac{d}{dt}[\Phi_I f(t)]$

Tabla 2.7 Formas Causales para Puertos 1.

Para poder obtener las ecuaciones diferenciales cumpliendo con las reglas de causalidad de la Tabla 2.6, el siguiente procedimiento debe ser seguido en orden estricto.

Procedimiento 2.1 Asignación de Causalidad en un multipuerto

1. Considerar cualquier MS_e o MS_f y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando las restricciones de 0, 1, TF , y GY . (Ver Tabla 2.6)
2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando las restricciones de la Tabla 2.6.
3. Escoger cualquier R que no este asignado y dar una causalidad arbitraria a R . Extender las implicaciones usando 0, 1, TF y GY . (Ver Tabla 2.6)

Se dice que un Bond Graph es *Causalmente Correcto*, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones.

En particular debe observarse que la causalidad derivativa de un elemento almacenador de energía proporciona propiedades importantes que se explican en la siguiente sección.

2.4.6 La Causalidad Derivativa en un Bond Graph.

La causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en un asignación de causalidad integral predefinida. Esto se presenta por ejemplo, cuando en un sistema eléctrico, se encuentran dos capacitores en paralelo como se ilustra en la figura 2.12.

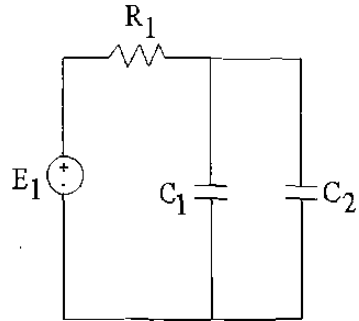


Figura 2.12 Ejemplo de un circuito eléctrico en causalidad derivativa.

Se tienen dos posibles esquemas de Bond Graph dependiendo si C_1 se le asigna una causalidad integral entonces C_2 tendrá una causalidad derivativa o viceversa, ambos esquemas se muestran en la figura 2.13.

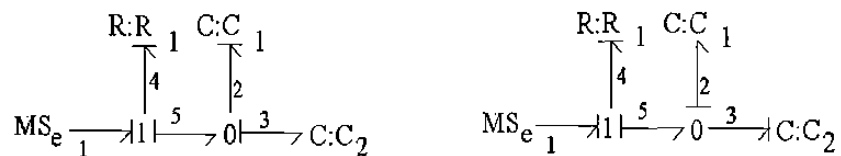


Figura 2.13 Bond Graph en causalidad derivativa de la figura 2.12.

El número de elementos que almacenan energía en causalidad integral es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes y el número de elementos almacenadores en causalidad derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes [29].

2.4.7 Bond Activo

Un bond normal tiene dos señales, esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. A diferencia, un *bond activo* comunica una de las dos señales posibles en una sola dirección [19].

Un *bond activo* se representa por una flecha completa, como se muestra en la figura 2.14, indicando un flujo de señal de potencia cero [18].

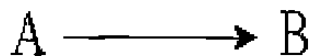


Figura 2.14 Bond activo.

Un bond activo se utiliza como una señal en un diagrama a bloques, la cual conecta un bloque a otro sin consumir energía [19] como se ilustra en la figura 2.15.

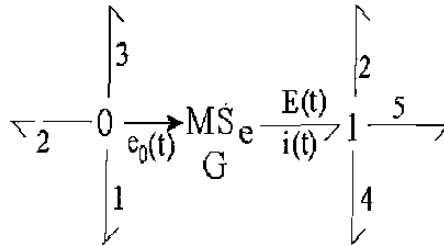


Figura 2.15 Bond Graph con un bond activo.

El bond activo que entra a MS_e indica que $E(t)$ es modulada por $e_0(t)$, así, $E(t) = Ge_0(t)$, donde G es la ganancia de voltaje.

El bond activo viene de una unión-0, el voltaje $e_0(t)$ es el mismo que e_1 , e_2 y e_3 . Además, el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que la corriente correspondiente a $e_0(t)$ es despreciable. La suma de corrientes en la unión-0, se debe únicamente a i_1 , i_2 e i_3 .

Los componentes básicos para el modelado de sistemas físicos han sido estudiados en esta sección, así, a continuación se proporciona un procedimiento para modelar sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos, el cuál se puede extender a otro tipo de sistemas físicos.

2.5 Procedimiento para el Modelado de Sistemas [58]

En esta sección, se explica como representar sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos en Bond Graph utilizando un procedimiento de modelado simple y directo.

Procedimiento 2.2 [58]

1. Dibujar una unión-0 para cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.
2. Dibujar una unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y elementos disipadores.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Remover la unión-0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a esta unión.
5. Simplificar la gráfica de acuerdo a las siguientes reglas:

$$\longrightarrow 1 \longrightarrow = \longrightarrow \qquad \longrightarrow 0 \longrightarrow = \longrightarrow$$

A continuación, el Procedimiento 2.2 se aplica al modelado de sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

2.5.1 Sistemas Eléctricos

El Procedimiento 2.2, es un procedimiento general para obtener el Bond Graph de un sistema. En el caso de sistemas eléctricos, se realizan las siguientes observaciones:

- En el paso 1, a cada voltaje distinto en el circuito le corresponde una unión-0.
- En el paso 4, el punto de referencia es el nodo de tierra, el cual tiene un voltaje de cero.

A continuación, se ilustra el procedimiento anterior con un ejemplo de un circuito eléctrico, mostrado en la figura 2.16.

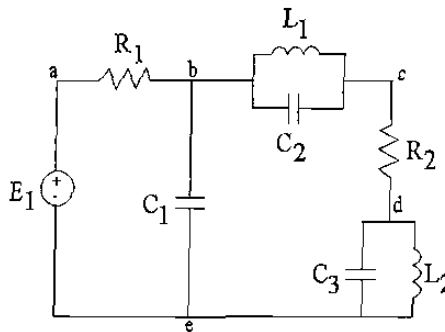


Figura 2.16 Ejemplo de un circuito eléctrico.

Los pasos 1, 2, 3 y 4 del Procedimiento 2.2 se ilustran en la figura 2.17.

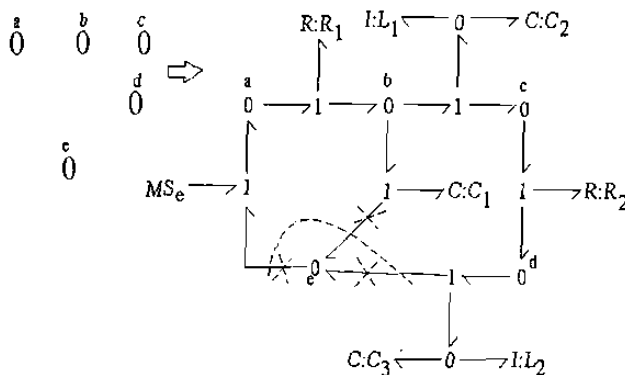


Figura 2.17 Procedimiento para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico.

Finalmente, reduciendo, es decir, utilizando el paso 5 del Procedimiento 2.2 y aplicando la asignación de causalidad del Procedimiento 2.1 se obtiene el Bond Graph mostrado en la figura 2.18.

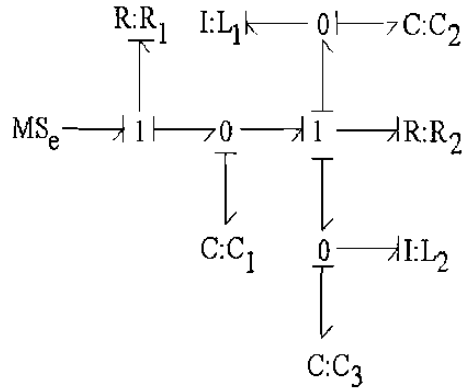


Figura 2.18 Bond Graph del ejemplo de un sistema eléctrico.

2.5.2 Sistemas Mecánicos

El procedimiento de modelado para traslación mecánica es similar al método de construcción para redes eléctricas en muchos aspectos. Por lo tanto, el método de construcción está basado por el Procedimiento 2.2 realizándose los siguientes cambios:

- En el paso 1, para cada velocidad distinta establecer una unión-1.
- En el paso 2, insertar los elementos de generación de fuerza de puerto-1 entre el par apropiado de uniones-1 usando uniones-0. También, añadir inercias a sus respectivas uniones-1.
- En el paso 4, el nodo particular de tierra es cualquier velocidad cero.

Es importante señalar que gracias a la simetría entre las variables de flujo y de esfuerzo se tienen dos formas de asignar las variables generalizadas, a variables de un sistema mecánico las cuales son [55]:

- Analogía Clásica $\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad } V(t) \text{ o } \omega(t), \text{ es análoga al flujo } f(t) \\ \text{Fuerza } F(t) \text{ o } \tau(t), \text{ es análoga al esfuerzo } e(t) \end{array} \right.$
- Analogía de Movilidad $\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad } V(t) \text{ o } \omega(t), \text{ es análoga al esfuerzo } e(t) \\ \text{Fuerza } F(t) \text{ o } \tau(t), \text{ es análoga al flujo } f(t) \end{array} \right.$

Históricamente, la analogía clásica precede a la analogía de movilidad y es la que se ha adoptado en esta tesis, por ser gráficamente semejante a sus equivalentes eléctricos y por ser la más utilizada en la bibliografía de Bond Graph [18, 24, 29, 27, 55, 58].

A continuación, se aplica el Procedimiento 2.2 con los cambios descritos, para encontrar el Bond Graph mostrado en la figura 2.19 [55].

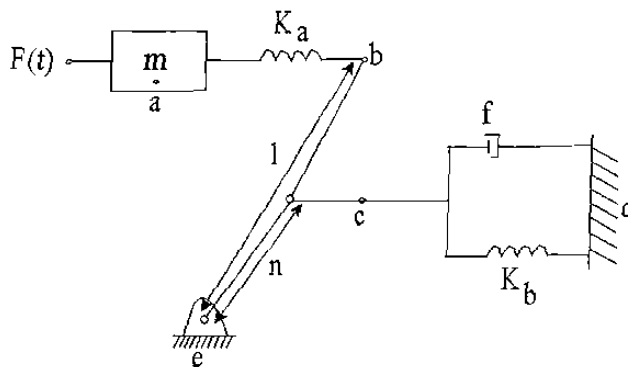


Figura 2.19 Ejemplo de un Sistema mecánico.

Aplicando los pasos 1, 2, 3, 4 del Procedimiento 2.2, obtenemos la figura 2.20.

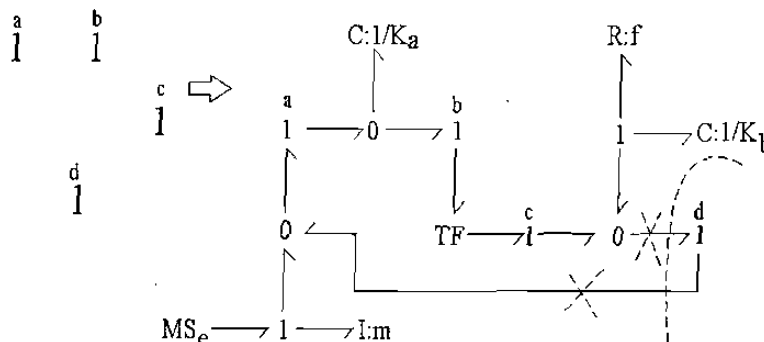


Figura 2.20 Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema mecánico.

Reduciendo la gráfica de la figura 2.20, obtenemos el Bond Graph mostrado en la figura 2.21, con la causalidad aplicada.

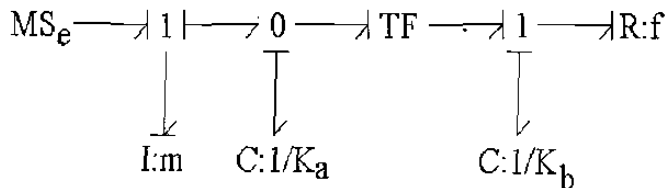


Figura 2.21 Bond Graph de un sistema mecánico.

2.5.3 Sistemas Hidráulicos.

Sistemas hidráulicos están caracterizados por alta presión, baja velocidad de fluido y los modelos se basan en la hipótesis de que toda la potencia del fluido de interés es el producto de la presión por el del fluido [55].

Cuando el flujo de volumen es conservativo y el fluido es cercanamente incomprensible, los sistemas hidráulicos pueden ser tratados como circuitos, por lo que para obtener el Bond Graph correspondiente se tiene el Procedimiento 2.2 con los siguientes cambios:

- En el paso 1, para cada presión distinta establecer una unión-0.
- En el paso 2, insertar cada elemento entre el pares de uniones-0 apropiadas usando uniones-1, añadir fuentes de presión y de flujo.
- En el paso 4, definir todas las presiones relativas a una presión de referencia (usualmente la atmosférica), eliminar la unión-0 de referencia y sus bonds.

En la figura 2.22 se muestra un sistema hidráulico, del cual se obtendrá su Bond Graph correspondiente aplicando el Procedimiento 2.2.

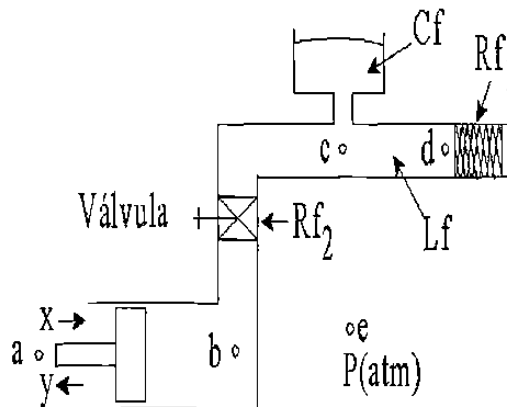


Figura 2.22 Ejemplo de un sistema hidráulico.

Aplicando los pasos 1, 2, 3 y 4 del Procedimiento 2.2, obtenemos la figura 2.23.

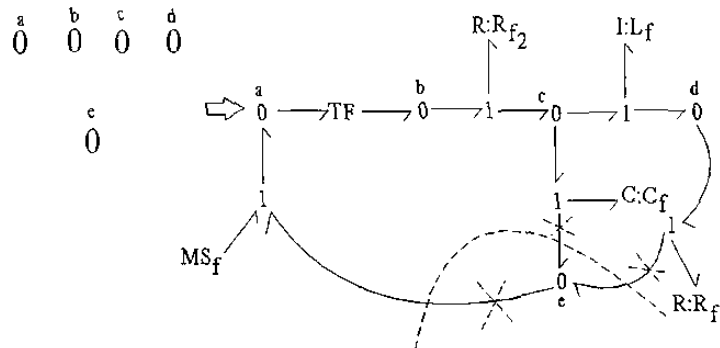


Figura 2.23 Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema hidráulico.

Reduciendo el Bond Graph de la figura 2.23 y aplicando el análisis de causalidad del Procedimiento 2.1, se obtiene el Bond Graph que se muestra en la figura 2.24.

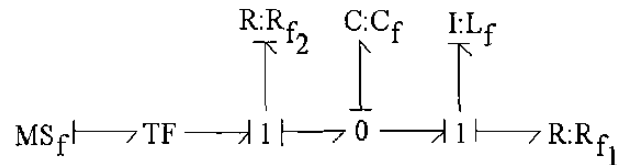


Figura 2.24 Bond Graph de un sistema hidráulico.

A partir del modelado de Bond Graph de un sistema físico, se pueden conocer las relaciones entre los diferentes elementos que forman el sistema, para obtener de una manera sistemática el modelo matemático del mismo, lo cual se describe en la siguiente sección.

2.6 Estructuras de Unión en Sistemas Multipuerto [5, 31]

Considerar algunos tipos de sistemas grandes como campos interconectados, nos da una estructura dinámica y entonces la generación, manipulación y reducción de muchas ecuaciones es hecha sistemáticamente para una implementación exitosa [18].

2.6.1 Vectores Clave o Vectores Significativos

En un Bond Graph en forma convencional, todos los bonds pueden ser clasificados en *bonds externos*, que conectan a los elementos o puertos R , C , I , MS_e y MS_f , y en *bonds internos* que conectan a 0 , 1 , TF y GY . Así mismo, los bonds externos pueden ser clasificados de acuerdo a su forma de manifestación de energía. En la figura 2.25 se muestra el diagrama a bloques de la *Estructura de Unión* de un Bond Graph.

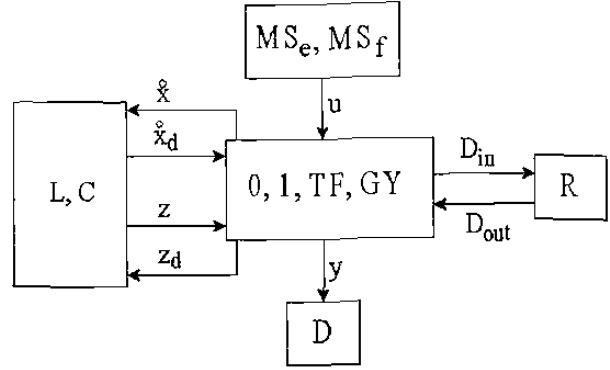


Figura 2.25 Digrama a bloques de la Estructura de Unión de un Bond Graph.

En la figura 2.25, las variables (MS_e, MS_f) , (L, C) y (R) denotan los *campos de fuente*, de *almacenamiento* y de *disipación* respectivamente, (D) el detector y $(0, 1, TF, GY)$ la estructura de unión con transformadores, TF , giradores, GY , uniones-0 y uniones-1.

Los vectores que representan al sistema llamados *vectores clave* están representados en la figura 2.25, donde $u(t) \in \mathbb{R}^p$ contiene las variables de potencia o los esfuerzos y flujos impuestos por los elementos de las fuentes en la Estructura de Unión. Los estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $x_d(t) \in \mathbb{R}^m$ están compuestos de variables de energía, momento generalizado $p(t)$ en elementos I y desplazamiento generalizado $q(t)$ en elementos C en causalidad integral y derivativa respectivamente; $z(t) \in \mathbb{R}^n$ y $z_d(t) \in \mathbb{R}^m$ son variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ y $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ son una mezcla de esfuerzos y flujos que muestran los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la Estructura de Unión.

2.6.2 Relaciones de Campo y Ecuación de Estado.

Las relaciones de campo no lineales de la figura 2.25 de almacenamiento y de disipación son:

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.19)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d) \quad (2.20)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.21)$$

donde:

Φ_F denota una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{Fd} denota una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$.

Φ_L denota una función que relaciona cada D_{outi} con D_{ini} para $i = 1, \dots, \mathcal{M}$ 24

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual es

llamada como su *relación constitutiva*. Si las relaciones constitutivas son lineales tenemos:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.22)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.23)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (2.24)$$

donde L , F y F_d son matrices reales de dimensión $r \times r$, $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.26)$$

donde la estructura de unión está formada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Los elementos de S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son los módulos del transformador y girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- P1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.
- P2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades P1 y P2 están basadas en el principio de conservación de energía [19].

Un sistema LIT MEMS está representado en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.28)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t)$$

Relacionando (2.25) y (2.26) con (2.28) obtenemos:

$$A_p = E^{-1} (S_{11} + S_{12} M S_{21}) F \quad (2.29)$$

$$B_p = E^{-1} (S_{13} + S_{12} M S_{23}) \quad (2.30)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32} M S_{21}) F \quad (2.31)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32} M S_{23} \quad (2.32)$$

siendo,

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.33)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1} L \quad (2.34)$$

Las expresiones (2.28) a (2.34) permiten la obtención directa del modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación de Bond Graph.

Es importante notar que un sistema representado en Bond Graph contiene relaciones causales que determinan propiedades estructurales, como controlabilidad u observabilidad, las cuales se dan en el Apéndice A.

En el siguiente capítulo, se presenta la representación de un sistema físico en una gráfica lineal a partir de su Bond Graph, así mismo, se proponen procedimientos para obtener la representación en variables de estado del sistema basándose en su gráfica lineal y en propiedades de Teoría de Gráfos.

2.7 Conclusiones

En el presente capítulo, se estudiaron los elementos básicos para modelar un sistema físico en Bond Graph.

Los procedimientos dados permiten obtener el Bond Graph para un sistema eléctrico, un sistema hidráulico o un sistema mecánico traslacional o rotacional.

Así mismo, se estudiaron las diferentes variables, componentes y aplicación correcta de la causalidad a los elementos que forman el sistema para tener la Estructura de Unión en Bond Graph y obtener la representación en espacio de estado.

Capítulo 3

Obtención de la Realización LTI MIMO Utilizando un Grafo Lineal a partir de su Bond Graph

3.1 Introducción

El análisis de un sistema lineal se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas. Como una alternativa a los métodos convencionales algebraicos de solución, es posible obtener una solución considerando las propiedades de ciertos grafos dirigidos asociados con el sistema, donde, las variables de las ecuaciones corresponden a los nodos del grafo, mientras que las relaciones entre ellas aparecen en la forma de conexión de las ramas dirigidas [69]. Especialmente problemas lineales, dado que en muchos casos los grafos dirigidos asociados pueden ser obtenidos directamente por inspección del sistema físico sin la necesidad de formular las ecuaciones asociadas [69]. Los grafos dirigidos ofrecen una estructura visual que permite obtener y compara las relaciones causales entre algunas variables [69].

La idea básica de asociar un grafo dirigido con un sistema de ecuaciones lineales fue introducida por Mason en 1953, y el grafo es llamado grafo de *señal-flujo* [69]. Una representación alternativa de las ecuaciones como un grafo dirigido, llamado un *grafo de flujo*, ha sido descrito por Coates en 1959 [69].

Un sistema físico LTI MIMO formado por una diferentes tipos de energía, puede ser modelado gráficamente en Bond Graph. Alternativamente, en este capítulo se presenta un procedimiento para obtener un grafo lineal del sistema físico. Así mismo, se presentan procedimientos basados en la Teoría de gráficos para la obtención de las matrices A_p , B_p , C_p , y D_p de

una representación en variables de estado del sistema modelado en Bond Graph. En el Apéndice C, sección C.1, se da un artículo publicado con los resultados presentados en éste capítulo [35].

La Teoría de grafos lineales ha sido utilizada para encontrar la matriz Coates, su determinante y polinomio característico [69]. La aplicación más importante de Teoría de grafos en la ciencia física, es su uso en la formulación y solución del problema de redes eléctricas planteado por Kirchoff en 1847 [69].

El presente capítulo está dividido principalmente en cuatro partes: inicialmente, se estudian un conjunto de definiciones y propiedades de los grafos lineales; después se presenta la representación en un grafo lineal de un sistema físico modelado en Bond Graph. La tercera parte de éste capítulo, consiste en proponer procedimientos para obtener la realización en espacio de estado a partir un grafo lineal del sistema; y posteriormente se aplican en dos ejemplos los resultados presentados.

3.2 Antecedentes [69]

A continuación se da una lista de definiciones de los grafos lineales útiles para entender el contenido de este trabajo.

3.2.1 Conceptos Básicos de Grafos Abstractos

Un *Grafo Abstracto* $G(V, E)$, o simplemente un grafo G , consiste de un conjunto V de elementos llamados *nodos* junto con un conjunto E de pares no ordenados de la forma (i, j) o (j, i) , $i \in V$ y $j \in V$, llamados *Ramas* de G . Los nodos i y j son llamados los *Puntos Finales* de (i, j) .

Se dice que la rama (i, j) está conectada entre los nodos i y j , y que (i, j) es incidente con los nodos i y j . Usualmente, un grafo es representado equivalentemente por un diagrama, en el cual, los nodos son indicados por pequeños círculos o puntos. La rama (i, j) es una curva continua o una línea directa, si (i, j) está en E .

Se extiende el concepto de grafo permitiendo la conexión de un par de nodos por un conjunto de ramas distintas, indicadas por los símbolos $(i, j)_1, (i, j)_2, \dots, (i, j)_k$; llamadas *Ramas Paralelas* de G si $k \geq 2$.

Se admiten ramas para las cuales sus puntos finales son idénticos, tal rama (i, i) es llamada *Lazo-Propio*. Si hay dos o más lazos-propios en un nodo de G , ellos también son designados como ramas paralelas de G .

Un grafo $G(V, E)$ se dice ser finito si ambos V y E son finitos.

Un *Subgrafo* de un grafo $G(V, E)$ es un grafo $G_s(V_s, E_s)$ en el cual V_s y E_s son subconjuntos de V y E , respectivamente. Si V_s y E_s es un subconjunto propio, el subgrafo es llamado un *Subgrafo Propio* de G . Si $V_s = V$, el subgrafo es denominado *Subgrafo Completo* de G . Si V_s ó E_s es vacío, el subgrafo es llamado *Grafo Nulo*.

Un nodo no incidente con cualquier rama es llamado un *Nodo Aislado*.

Dos subgrafos son llamadas de *Ramas Disjuntas* si no tienen ramas en común y de *Nodos Disjuntos* si no tienen nodos en común.

Un grafo es *Etiquetado* si sus nodos son etiquetados o sus ramas son etiquetadas. Un *Grafo Pesado* es un grafo en la cual a todas sus ramas les ha sido asignado un peso.

Una *Secuencia de Ramas* de *Longitud* $k - 1$ en un grafo G es una secuencia finita de ramas en G de la forma:

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k) \quad (3.1)$$

$k \geq 2$.

La secuencia de ramas se dice ser *Cerrada* si $i_1 = i_k$, y *Abierta* en cualquier otro caso. En una secuencia de ramas abierta, el nodo i_1 es llamada el *Nodo Inicial* y el nodo i_k el *Nodo Terminal*.

La secuencia de ramas (3.1) es conectada entre sus nodos inicial y terminal o entre los nodos i_1 e i_k , si para $k > 2$, (i_{x-1}, i_x) y (i_x, i_{x+1}) , $1 < x < k$, son ramas sucesivas en la secuencia de rama.

Si todas las ramas que aparecen en una secuencia de ramas son distintas, la secuencia de ramas es llamada *Tren de Rama*. Un tren de rama abierta, como el mostrado en la ecuación (3.1), en el cual todos los nodos i_1, i_2, \dots, i_k son distintos es llamado una *Ruta* o *Trayectoria* de longitud $k - 1$. Un nodo aislado es considerado una trayectoria de longitud cero.

Un tren de ramas cerrado, como el mostrado en la ecuación (3.1), en el cual todos los nodos i_1, i_2, \dots, i_{k-1} son distintos e $i_1 = i_k$, es llamado un *Circuito* de longitud $k - 1$. Así, un lazo cerrado con un nodo es un circuito de longitud 1.

Un grafo se dice ser un *Grafo Conectado* si cada par de sus nodos es conectado por una trayectoria.

El *Grado* de un nodo i de un grafo, denotado por $d(i)$ es el número de ramas incidentes es el nodo i . Así, un nodo aislado es un nodo de grado cero.

Un grafo es *Grafo Regular* de grado k si $d(i) = k$ para cada nodo i .

Un grafo regular de grado 0 es un grafo que consiste de un conjunto de nodos aislados.

En la siguiente sección, se introducen algunas de las operaciones válidas en la teoría de grafos.

3.2.2 Operaciones en Grafos

Operaciones definidas en grafos son útiles para expresar la estructura de un grafo en términos de un conjunto de grafos más pequeños o más simples.

La *Remoción de un Nodo i* a partir de un grafo G es la operación que resulta en una subgrafo, que consiste de todos los nodos de G excepto i y todas las ramas que no inciden en i . Similarmente, la *Remoción de una Rama (i, j)* de G produce el subgrafo que contiene todos los nodos y ramas de G excepto la rama (i, j) .

Si $G_1 (V_1, E_1)$ y $G_2 (V_2, E_2)$ son dos subgrafos de un grafo $G (V, E)$, entonces $G_1 \cup G_2$ representa el subgrafo de G , llamado *Grafo de Suma*, consistente de un conjunto de nodo $V_1 \cup V_2$ y un conjunto de rama $E_1 \cup E_2$.

El *Grafo Intersección* $G_1 \cap G_2$ de los subgrafos G_1 y G_2 es el subgrafo de G con el conjunto de nodo $V_1 \cap V_2$ y el conjunto de rama $E_1 \cap E_2$.

Sea V_s un subconjunto de un conjunto de nodo V de una subgrafo G . El *Subgrafo Seccional* definida por V_s y denotado por $G[V_s]$ de G , es el subgrafo cuyo conjunto de nodo es V_s y cuyo conjunto de rama consiste de todas las ramas de G conectando dos nodos de V_s .

En otras palabras, $G[V_s]$ es el subgrafo obtenido de G por la remoción de todos los nodos que no están en V_s .

Un *Grafo Planar* es aquella cuyo diagrama puede ser dibujado en un plano tal que dos ramas no tienen otra intersección que no sea un nodo.

Si existe un subgrafo no nulo propio G_s , en un grafo conectado G , tal que G_s y su complemento tienen solamente un nodo i en común, entonces el nodo i es llamado *Punto de Corte* de G .

Un *Grafo No-Separable* es un grafo no-nulo que no contiene puntos de corte. Todos los otros grafos no nulos son considerados como separables.

Para un grafo conectado G , la *Distancia* entre dos nodos i y j de G , denotada por $d(i, j)$, está definida como la longitud de la trayectoria más corta que los conecta.

Hasta el momento, se han considerado grafos formados por ramas que no tienen dirección. En la siguiente sección se dan las definiciones de grafos dirigidos, que son más cercanas a

la relación de un Bond Graph y un grafo lineal.

3.2.3 Grafos Dirigidos

En muchas aplicaciones, es necesario asociar con cada rama de un grafo una orientación o dirección. En algunas situaciones, la orientación de las ramas es una orientación “verdadera” en el sentido de que el sistema representado por el grafo exhibe algunas propiedades unilaterales. En otras situaciones, la orientación utilizada es una “pseudo”-orientación utilizada en lugar de un sistema de referencia elaborado. Por ejemplo, en la Teoría de redes eléctricas las ramas de un grafo son asignadas a orientaciones arbitrarias para representar las referencias de las corrientes de ramas y voltajes.

Una *Grafo Dirigido Abstracto* $G_d(V, E)$ o simplemente una *Grafo Dirigido* G_d , consiste de un conjunto V de elementos llamados nodos junto con un conjunto E de pares ordenados de la forma (i, j) , llamados las *ramas dirigidas* de G_d ; i es llamado *Nodo Inicial* y j el *Nodo Terminal*.

En un grafo dirigido se permite tener varias ramas distintas con los mismos nodos iniciales y terminales. Ellas son llamadas *Ramas Paralelas* de G_d . Las ramas paralelas dirigidas del nodo i al nodo j son denotadas por los símbolos $(i, j)_1, (i, j)_2, \dots, (i, j)_k$, $k \geq 2$. También, se admiten ramas con los mismos puntos finales; los cuales son llamados *Lazos Propios* de G_d .

Los términos subgrafo, grafo seccional, rango, nulidad, el complemento de una subgrafo y otras operaciones gráficas pueden ser definidos para los grafos dirigidos de manera similar que para los grafos no dirigidos. Esto es posible debido a que para todo grafo dirigido G_d , existe un *Grafo no Dirigido Asociado* G_u cuyos conjuntos de nodo y de rama son los mismos que en G_d , excepto que las direcciones de las ramas de G_d son removidas.

Para un grafo dirigido G_d , una *Secuencia de Rama-Dirigida* de longitud $k - 1$ en G_d es una secuencia de rama en la cual las ramas a lo largo de la secuencia de rama son de la forma:

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k), \quad k \geq 2 \quad (3.2)$$

La secuencia de rama dirigida se dice ser *cerrada* si $i_1 = i_k$, y *abierta* en cualquier otro caso. En una secuencia de rama-dirigida abierta, i_1 , es llamado su nodo inicial e i_k el nodo terminal.

Un tren de rama-dirigida, dado por la ecuación (3.2) en el cual todos los nodos i_1, i_2, \dots, i_k son distintos es llamado una *Trayectoria o Ruta Dirigida* de longitud $k - 1$.

Un tren de rama dirigido cerrado como el dado en (3.2) en el cual todos los nodos i_1, i_2, \dots, i_{k-1} son distintos e $i_1 = i_k$, es llamado un *Circuito Dirigido* de longitud $k - 1$.

Para un grafo dirigido G_d el número $d^+(i)$ de ramas de G_d teniendo como nodo inicial

a i es llamado el *Grado de Salida* del nodo i en G_d , y el número $d^-(i)$ de ramas de G_d teniendo como nodo terminal a i es llamado *Grado de Llegada* del nodo i en G_d .

Si $d(i)$ denota el número de ramas de G_d que inciden en el nodo i , entonces

$$d(i) \triangleq d^+(i) + d^-(i) \quad (3.3)$$

Un grafo dirigido es una *Grafo Regular dirigido* de grado k si $d^+(i) = d^-(i) = k$ para cada nodo i .

Un grafo dirigido es *Fuertemente Conectado* si, para todo par de nodos distintos i y j , existe una trayectoria dirigida de i a j así como de j a i .

3.2.4 Propiedades de los Grafos Dirigidos

Un *Grafo Dirigido Pesado* G es un grafo dirigido en el cual a cada rama le ha sido asignado un peso. Denotamos por $f(i, j)$ al peso asociado con la rama (i, j) de G . Si G_s es un subgrafo de G , por $f(G_s)$ entendemos que:

$$f(G_s) \triangleq \prod_{k=1}^n f(i, j) \quad (3.4)$$

donde n es el número de ramas de G_s .

Para una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n , el *Grafo de Coates* asociado, denotado por el símbolo $G_c(A)$ o simplemente G_c , es un grafo dirigido, etiquetado y pesado de n -nodos. Los nodos son etiquetados por enteros de 1 a n tal que si $a_{ij} \neq 0$ existe una rama dirigida del nodo j al nodo i con un peso asociado a_{ij} para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Las propiedades establecidas en esta sección, son utilizadas en la siguiente sección para proponer un grafo lineal de un sistema representado en Bond Graph con sus vectores clave.

3.3 Obtención de un Grafo Lineal a partir de su Bond Graph

Un *Grafo Lineal* es un conjunto de líneas conectadas, que representan simbólicamente los elementos del sistema [55]. Así, la base en la construcción de un grafo lineal de un sistema, está basado en la selección de una convención con la cual elementos de un puerto y dos puertos pueden ser dibujados como segmentos de líneas simples.

Por otra parte, sabemos que un Bond Graph es un modelo gráfico de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía [24]. Esto es, un Bond Graph consiste de subsistemas enlazados por líneas que muestran

las conexiones energéticas, permitiendo a través de sus vectores clave obtener información para su representación en un grafo lineal [29].

A continuación, se presenta un procedimiento para obtener una representación de un grafo lineal obtenida a partir de su Bond Graph. Para lograr un grafo lineal que conserva las propiedades energéticas y que permite utilizar herramientas de Teoría de Gráfos.

Considerando un sistema LTI MIMO que satisface las hipótesis H1, H2 y H3, del (Capítulo 1, sección 1.5), y las ecuaciones (2.22) a (2.27), se obtiene la siguiente estructura de la unión, en la cual las relaciones constitutivas y la interconexión de los elementos están definidos por S' :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S' \begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

donde

$$S' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S'_{21} & S'_{22} & S_{23} & 0 \\ S'_{31} & S'_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$x_d(t) = -(S'_{14}) x(t) \quad (3.7)$$

con

$$\begin{aligned} S'_{11} &\triangleq S_{11}F; & S'_{21} &\triangleq S_{21}F; & S'_{31} &\triangleq S_{31}F & S'_{12} &\triangleq S_{12}L; \\ S'_{22} &\triangleq S_{22}L; & S'_{32} &\triangleq S_{32}L; & S'_{14} &\triangleq F_d^{-1}S_{14}^T F \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, suponemos que S' en (3.6) es una matriz de Coates, la cual se muestra en la figura 3.1.

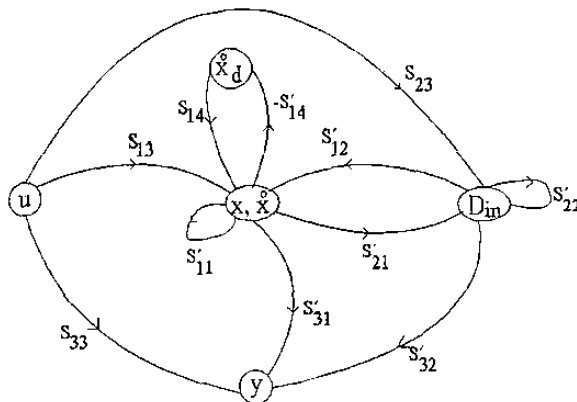


Figura 3.1 Grafo del sistema planar.

El grafo lineal de la figura 3.1, representa un grafo dirigido pesado, en la cual se observa lo siguiente:

- S_{14} y S'_{14} son las relaciones entre los elementos almacenadores de energía linealmente dependientes $\dot{x}_d(t)$ con los elementos linealmente independientes $x(t)$, $\dot{x}(t)$.
- La relación entre $x(t)$ y $\dot{x}(t)$, elementos del campo de almacenamiento está dada por S'_{11} y entre $D_{in}(t)$, elementos del campo de disipación por S'_{22} y la relación entre los éstos dos campos por S'_{12} y S'_{21} .
- Se conoce la influencia de la entrada $u(t)$ en el campo de almacenamiento mediante S_{13} y/o de disipación mediante S_{23} o en la salida $y(t)$ de una manera directa.
- Se determina que campos y por lo tanto que elementos intervienen en la salida del sistema.

En resumen, se tiene un grafo lineal con importantes propiedades de conectividad de sus elementos.

También, de (2.33) y (3.8) obtenemos

$$E^{-1} = (I + S_{14}S'_{14})^{-1} \quad (3.9)$$

Ahora, reduciendo el grafo de la figura 3.1 y utilizando (3.9), obtenemos el grafo que se muestra en la figura 3.2, donde

$$\overline{S}_{11} \triangleq E^{-1}S'_{11}; \quad \overline{S}_{12} \triangleq E^{-1}S'_{12}; \quad \overline{S}_{13} \triangleq E^{-1}S'_{13} \quad (3.10)$$

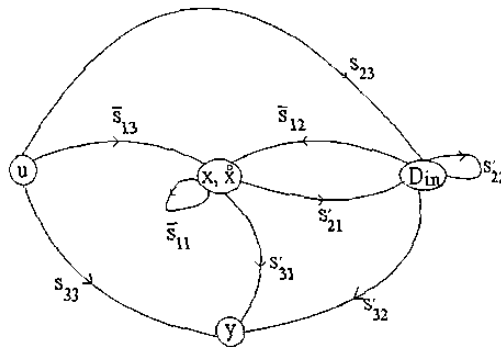


Figura 3.2 Grafo de Coates modificado.

Notar que en el grafo de la figura 3.2, \overline{S}_{11} , \overline{S}_{12} y \overline{S}_{13} incluyen la interconexión y relaciones constitutivas de los elementos $z(t)$ y $D_{out}(t)$ y la influencia de $x_d(t)$ en $\dot{x}(t)$ y $x(t)$ a través de E^{-1} .

La matriz de Coates del grafo de la figura 3.2, está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S_{11}} & \overline{S_{12}} & \overline{S_{13}} \\ S'_{21} & S'_{22} & S_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

La representación (3.11) es una estructura más compacta del sistema físico, en la cual, el término $\dot{x}(t) \triangleq \frac{dx(t)}{dt}$, para sistemas LTI no afecta la interconexión de los elementos. Podemos reescribir la ecuación (3.11) de la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \widehat{S} \begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La matriz \widehat{S} representa una matriz de Coates modificada, donde la submatriz formada por $\dot{x}(t)$ y $x(t)$ es diferente a la submatriz de $\dot{x}(t)$ y $\dot{x}(t)$ por un factor $\frac{1}{s}$, donde s es el operador de Laplace, el cual omitimos con el objetivo de obtener directamente las matrices A_p y C_p de (2.28) en la siguiente sección.

Algunas características importantes del grafo de la figura 3.2 son:

- Es un grafo lineal dirigido que representa la ecuación matricial (3.11).
- Es un grafo dirigido, etiquetado y pesado.
- Los nodos matriciales $x(t)$, $\dot{x}(t)$ y $D_{in}(t)$ tienen como lazos propios $\overline{S_{11}}$ y $\overline{S_{22}}$ respectivamente.
- El nodo u del grafo dirigido, debe tener un grado de llegada cero, $d^-(u(t)) = 0$.
- El nodo y del grafo dirigido debe tener un grado de salida cero, $d^+(y(t)) = 0$.

Las definiciones de trayectoria dirigida, circuito dirigido, grafo regular dirigido dadas en la sección 3.2.3 y secuencia de rama dirigida se aplican en las secciones posteriores para los procedimientos de obtención de las matrices A_p , B_p , C_p y D_p , que son una realización de un sistema físico LTI.

En la siguiente sección, se presenta un esquema de la representación de un sistema físico LTI MIMO en sus vectores clave, que permite la obtención simplificada de un grafo lineal compuesto de dos nodos y de todas las posibles combinaciones de sus campos.

3.4 Representación de un Sistema LTI MIMO

En esta sección, se presenta un análisis de la representación gráfica de un sistema LTI MIMO. En la figura 3.2, se tiene una representación de un sistema físico en un grafo lineal a partir de su Bond Graph y de su matriz de la estructura de unión. A continuación, se introduce una forma general de la representación de un sistema físico en Bond Graph para estudiar las propiedades de interconexión, como se muestra en la figura 3.3.

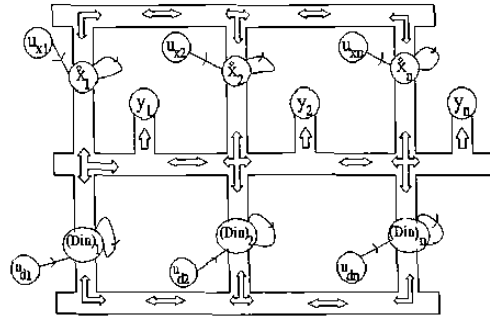


Figura 3.3 Representación de un sistema multivariable.

Considere el esquema de la figura 3.2 y note que el nodo $\hat{x}(t)$ es un vector de estados en la figura 3.2, lo mismo es cierto para $u(t)$, $y(t)$ y $D_{in}(t)$, lo cual se resalta en la figura 3.3. Así, el esquema de la figura 3.3 es una representación individual de los nodos del grafo lineal de la figura 3.2.

La interconexión de los nodos en la figura 3.3 es representada por \Leftrightarrow indicando un conjunto de ramas que pueden tener doble sentido.

La figura 3.4 representa, la interconexión de dos nodos i y j de la figura 3.3 con todas las posibles combinaciones, donde:

$$P \triangleq (I - S'_{22})^{-1} \quad (3.13)$$

La submatriz P tiene dos casos: $S'_{22} = 0$ o $S'_{22} \neq 0$, dependiendo del orden en que se encuentran los elementos de almacenamiento y disipación con respecto a la entrada, es decir, si a partir de la entrada los elementos de almacenamiento están antes de los elementos de disipación entonces $S'_{22} = 0$, en caso contrario $S'_{22} \neq 0$.

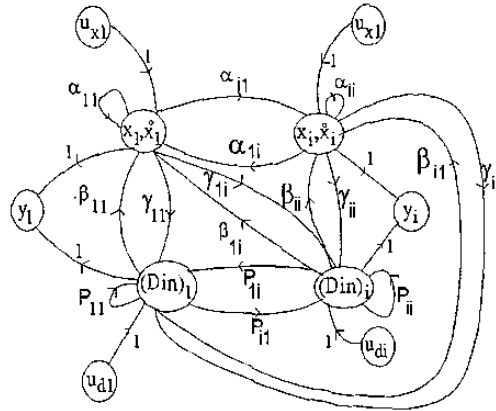


Figura 3.4 Sistema multivariable de dos nodos.

Sean $j \triangleq 1, i$ y $k \triangleq 1, i$, entonces en el grafo de la figura 3.4, se tienen las siguientes transmitancias:

- α_{11} que es la relación entre los elementos de las variables de estado x_1, \dot{x}_1 .
- γ_{11} que es la relación del campo de disipación $(D_{in})_1$ al campo de almacenamiento x_1, \dot{x}_1 .
- β_{jk} que es la relación del campo de almacenamiento x_1, \dot{x}_1 al campo de disipación $(D_{in})_1$.
- P_{jk} que es la relación entre los elementos del campo disipativo $(D_{in})_1$.

Las interconexiones de los nodos que se muestran en la figura 3.4, son la información necesaria para proponer, en la siguiente sección, los procedimientos para la obtención de una realización de un sistema físico.

3.5 Obtención gráfica de las Matrices A_p , B_p , C_p y D_p

Recuerde al sistema mostrado en la figura 3.2 corresponde a un sistema físico de n estados, r elementos disipativos, con p entradas y q salidas. A continuación, se presenta un procedimiento para el cálculo directo de las matrices A_p , B_p , C_p y D_p , que son la realización de un sistema LTI MIMO.

Este método es obtenido a partir del grafo reducido de la figura 3.4, cuya generalización es el esquema de la figura 3.3 y su representación matricial la figura 3.2.

3.5.1 Obtención de la Matriz A_p a partir de un grafo

Se encontrará la matriz A_p considerando solamente las ramas de salida y llegada a los nodos $x(t)$, $\dot{x}(t)$, haciendo circuitos dirigidos para los elementos de la diagonal y trayectorias

dirigidas para los elementos fuera de la diagonal. El procedimiento para encontrar la matriz A_p es el siguiente:

Procedimiento 3.1

1. Descomponer A_p en la suma de dos componentes:

$$A_p = A_{px} + A_{pd} \quad (3.14)$$

- La primer componente, A_{px} está formada por las transmitancias de las ramas de los nodos $x(t)$, $\dot{x}(t)$ dando sus elementos fuera de la diagonal y las transmitancias de los lazos propios de estos nodos, formando sus elementos de la diagonal. Por ejemplo, para la figura 3.4 tenemos:

$$A_{px} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1i} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

- La segunda componente, A_{pd} está formada por las transmitancias de las ramas entre nodos de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ y nodos de $D_{in}(t)$ y está dada por:

$$A_{pd} = \begin{bmatrix} (A_{pd})_{11} & (A_{pd})_{1i} \\ (A_{pd})_{i1} & (A_{pd})_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde $(A_{pd})_{11}$, $(A_{pd})_{1i}$, $(A_{pd})_{i1}$ y $(A_{pd})_{ii}$.

2. Encontrar los elementos de la diagonal a través de:

- Empezar en los nodos $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ y $(D_{in}(t))_1$. Fijar la rama que llega a $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ de $(D_{in}(t))_1$. Construir todas las posibles combinaciones de circuitos dirigidos a través de la rama fijada, empezando y terminando en $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, y satisfaciendo que:

Un circuito debe tener solamente una rama de $D_{in}(t)$. Si el circuito está formado por una rama de entrada y de salida del mismo nodo de $D_{in}(t)$, tendrá el lazo propio de $D_{in}(t)$.

Continuar con la siguiente rama que llega al nodo $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ respecto a $D_{in}(t)$ y así sucesivamente, hasta considerar la última rama que llega a $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, respecto a $D_{in}(t)$.

- Utilizar el procedimiento previo para los próximos nodos de $\dot{x}(t)$ pero las ramas de entrada y salida debe ser del nodo actual.
- Cada término de cada elemento de A_{pd} está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Término del elemento } (A_{pd})_{hk} &= (\delta_1)(\delta_2)(\delta_3) \\ h &= 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde:

- $\delta_1 =$ Transmitancia de la rama h , la cual llega a $x_h(t)$, $\dot{x}_h(t)$.
- $\delta_2 =$ Transmitancia del lazo propio de $(D_{in}(t))_k$ o transmitancia de la rama $(D_{in}(t))_k$, la cual conecta $(D_{in}(t))_k$ con $(D_{in}(t))_{k+1}$.
- $\delta_3 =$ Transmitancia de la rama k la cual sale de $x_k(t)$, $\dot{x}_k(t)$.

Para la figura 3.4, tenemos

$$\begin{aligned} (A_{pd})_{11} &= \beta_{11}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}P_{1i}\gamma_{1i} + \beta_{1i}P_{ii}\gamma_{1i} + \beta_{1i}P_{i1}\gamma_{11} \\ (A_{pd})_{ii} &= \beta_{i1}P_{11}\gamma_{i1} + \beta_{i1}P_{1i}\gamma_{ii} + \beta_{ii}P_{i1}\gamma_{i1} + \beta_{ii}P_{ii}\gamma_{ii} \end{aligned} \quad (3.18)$$

3. Encontrar los elementos fuera de la diagonal de la matriz A_{pd} , utilizando el procedimiento dado en el paso 2, considerando que los términos de los elementos $(A_{pd})_{hk}$ ($h \neq k$), deben estar formados por trayectorias dirigidas del nodo $x_h(t)$, $\dot{x}_h(t)$ al nodo $x_k(t)$, $\dot{x}_k(t)$.

Para la figura 3.4,

$$\begin{aligned} (A_{pd})_{1i} &= \beta_{11}P_{11}\gamma_{i1} + \beta_{11}P_{1i}\gamma_{ii} + \beta_{1i}P_{i1}\gamma_{i1} + \beta_{1i}P_{ii}\gamma_{ii} \\ (A_{pd})_{i1} &= \beta_{i1}P_{11}\gamma_{11} + \beta_{i1}P_{1i}\gamma_{1i} + \beta_{ii}P_{i1}\gamma_{11} + \beta_{ii}P_{ii}\gamma_{1i} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Notar que si la submatriz $S'_{22} = 0$, entonces de (3.13) $P = I$.

3.5.2 Obtención de la Matriz B_p a partir de un grafo

Las transmitancias de las ramas de los nodos de $u(t)$ son consideradas en B_p . El Procedimiento para encontrar B_p es:

Procedimiento 3.2

1. Descomponer B_p en dos componentes,

$$B_p = \begin{bmatrix} B_{px} & B_{pd} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

- La primer componente, B_{px} está formada por la transmitancia de la rama, la cual conecta un nodo $u(t)$ con un nodo de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ directamente. Por ejemplo, tenemos para la figura 3.4,

$$B_{px} = I_{2 \times 2} \quad (3.21)$$

- La segunda componente, B_{pd} está formada por las transmitancias de las ramas las cuales conectan un nodo de u con un nodo de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ a través del nodo $D_{in}(t)$. Para la figura 3.4 tenemos,

$$B_{pd} = \begin{bmatrix} (B_{pd})_{11} & (B_{pd})_{1i} \\ (B_{pd})_{i1} & (B_{pd})_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

donde $(B_{pd})_{11}$, $(B_{pd})_{1i}$, $(B_{pd})_{i1}$ y $(B_{pd})_{ii}$.

2. Obtener los términos de los elementos de la diagonal de B_{pd} , haciendo lo siguiente:

- Empezando en el nodo, $(u_d(t))_1$. Se construyen todas las trayectorias dirigidas de las posibles combinaciones de las ramas que conectan $u_{d_1}(t)$ con $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, a través de $(D_{in}(t))_1$. Una trayectoria debe tener solamente una rama de $D_{in}(t)$ y si se tiene sólo una rama entre $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ y $(D_{in}(t))_1$, se aplica el lazo propio de $(D_{in}(t))_1$, así cada término queda determinado por:

$$\begin{aligned} \text{Término del elemento } (B_{pd})_{hk} &= (\eta_1)(\eta_2)(\eta_3) \\ h &= 1, 2, \dots, r; \quad k = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \text{Transmitancia de la rama } h, \text{ la cual llega a } \dot{x}_h(t). \\ \eta_2 &= \text{Transmitancia del lazo propio de } (D_{in}(t))_k \text{ o transmitancia} \\ &\quad \text{de la rama } (D_{in}(t))_k, \text{ la cual conecta } (D_{in}(t))_k \text{ con } (D_{in}(t))_{k+1}. \\ \eta_3 &= \text{Transmitancia de la rama } k \text{ la cual sale de } u_{D_k}(t). \end{aligned}$$

Por ejemplo, de la figura 3.4, tenemos:

$$(B_{pd})_{11} = \beta_{11}P_{11} + \beta_{1i}P_{i1}; \quad (B_{pd})_{ii} = \beta_{i1}P_{1i} + \beta_{ii}P_{ii} \quad (3.24)$$

3. Obtener los términos de los elementos que están fuera de la diagonal de B_{pd} , en una forma similar a sus elementos de la diagonal, considerando que para los términos del elemento $(B_{pd})_{hk}$, tomar el nodo de llegada $x_k(t)$, $\dot{x}_k(t)$ y el nodo de salida $(u_d(t))_k$ y para el término del elemento $(B_{pd})_{kh}$ es lo contrario, lo anterior es resumido utilizando (3.23) para $h \neq k$.

Por ejemplo, en la figura 3.4,

$$(B_{pd})_{1i} = \beta_{11}P_{1i} + \beta_{1i}P_{ii}; \quad (B_{pd})_{i1} = \beta_{i1}P_{11} + \beta_{ii}P_{i1} \quad (3.25)$$

3.5.3 Obtención de la Matriz C_p a partir de un grafo

Para encontrar C_p , se consideran las transmitancias de las ramas que llegan a nodos de $y(t)$ y salen de nodos de $x(t)$, $\dot{x}(t)$.

Procedimiento 3.3

1. Descomponer C_p en dos componentes:

$$C_p = C_{px} + C_{pd} \quad (3.26)$$

- La primer componente, C_{px} está formada por las transmitancias de las ramas las cuales conectan un nodo de $y(t)$ con un nodo de $\dot{x}(t)$ directamente. Por ejemplo, en la figura 3.4,

$$C_{px} = I_{2 \times 2} \quad (3.27)$$

- La segunda componente, C_{pd} está formada por las transmitancias de las ramas que conectan un nodo de $y(t)$ con un nodo de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ a través del nodo de $D_{in}(t)$: Para la figura 3.4, tenemos:

$$C_{pd} = \begin{bmatrix} (C_{pd})_{11} & (C_{pd})_{1i} \\ (C_{pd})_{i1} & (C_{pd})_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

donde $(C_{pd})_{11}$, $(C_{pd})_{1i}$, $(C_{pd})_{i1}$ y $(C_{pd})_{ii}$.

2. Obtener los términos de los elementos de la diagonal de C_{pd} :

- Empezar por el nodo $y_1(t)$. Construir todas las trayectorias dirigidas de todas las posibles combinaciones de las transmitancias de ramas que conectan $y_1(t)$ con $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ a través $(D_{in}(t))_1$, satisfaciendo que una trayectoria debe tener solamente una rama de $D_{in}(t)$. Si sólo existe una rama entre $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ y $(D_{in}(t))_1$, se toma el lazo propio de $(D_{in}(t))_1$. Así, cada término está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Término del elemento } (C_{pd})_{hk} &= (\rho_1)(\rho_2)(\rho_3) \\ h &= 1, 2, \dots, q; \quad k = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde:

- ρ_1 = Transmitancia de la rama h , la cual llega a $y_h(t)$.
- ρ_2 = Transmitancia del lazo propio de $(D_{in}(t))_k$ o transmitancia de la rama $(D_{in}(t))_k$, la cual conecta $(D_{in}(t))_k$ con $(D_{in}(t))_{k+1}$
- ρ_3 = Transmitancia de la rama k la cual sale de $x_h(t)$, $\dot{x}_h(t)$

Por ejemplo de la figura 3.4

$$(C_{pd})_{11} = P_{11}\gamma_{11} + P_{1i}\gamma_{1i}; \quad (C_{pd})_{ii} = P_{ii}\gamma_{ii} + P_{i1}\gamma_{i1} \quad (3.30)$$

3. Los términos de los elementos fuera de la diagonal de C_{pd} son obtenidos en el paso 2, tomando la transmitancia de la rama que sale del nodo $x_h(t)$, $\dot{x}_h(t)$ y que llega del nodo $y_k(t)$ y los términos del elemento $(C_{pd})_{hk}$, para $h \neq k$. Así, cada término está dado por (3.29). Por ejemplo, de la figura 3.4,

$$(C_{pd})_{1i} = P_{1i}\gamma_{ii} + P_{11}\gamma_{i1}; \quad (C_{pd})_{i1} = P_{ii}\gamma_{1i} + P_{i1}\gamma_{11} \quad (3.31)$$

3.5.4 Obtención de la Matriz D_p a partir de un grafo

Las transmitancias de ramas que llegan a nodos de $y(t)$ y salen de nodos de $u(t)$ son consideradas en D_p . El procedimiento para encontrar D_p es:

Procedimiento 3.4

1. La matriz D_p está formada por dos componentes

$$D_p = \begin{bmatrix} D_{px} & D_{pd} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

- La primer componente, D_{px} consiste de la transmitancia de rama que conecta un nodo de $y(t)$ con un nodo de $u(t)$ directamente. Por ejemplo, en la figura 3.4, $D_{px} = 0$.
- La segunda componente, D_{pd} son las transmitancias de ramas que conectan un nodo de salida con un nodo de entrada a través de un nodo de $D_{in}(t)$. Para la figura 3.4, tenemos:

$$D_{pd} = \begin{bmatrix} (D_{pd})_{11} & (D_{pd})_{1i} \\ (D_{pd})_{i1} & (D_{pd})_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

donde $(D_{pd})_{11}$, $(D_{pd})_{1i}$, $(D_{pd})_{i1}$ y $(D_{pd})_{ii}$ se obtienen en el paso 2.

2. Para los términos de los elementos de la diagonal de D_{pd} :

Empezar por el nodo de salida $y_1(t)$. Construir todas las trayectorias dirigidas de todas las posibles combinaciones de la transmitancia de ramas entre $y_1(t)$ con $(u_d(t))_1$ a través de $(D_{in}(t))_1$ considerando el lazo propio de $(D_{in}(t))_1$, para el resto de las salidas utilizar el mismo procedimiento. Así, cada término está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Término del elemento } (D_{pd})_{hk} &= (\tau_1)(\tau_2)(\tau_3) \\ h &= 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde:

- $\tau_1 =$ Transmitancia de la rama h , la cual llega a $u_h(t)$
- $\tau_2 =$ Transmitancia del lazo propio de $(D_{in}(t))_k$ o transmitancia de la rama $(D_{in}(t))_k$, la cual conecta $(D_{in}(t))_k$ con $(D_{in}(t))_{k+1}$
- $\tau_3 =$ Transmitancia de la rama k la cual sale de $y_k(t)$

Por ejemplo, en la figura 3.4,

$$(D_{pd})_{11} = P_{11}; \quad (D_{pd})_{ii} = P_{ii}$$

3. Obtener los términos de los elementos fuera de la diagonal de D_{pd} , como se mostró en el paso 2, considerando que los términos del elemento $(D_{pd})_{hk}$, para $h \neq k$, es el producto de las transmitancias de $u_k(t)$ a $y_h(t)$, de esta forma, cada término está dado por (3.34). Por ejemplo, en la figura 3.4,

$$(D_{pd})_{1i} = P_{1i}; \quad (D_{pd})_{i1} = P_{i1}$$

Es importante notar que con un poco de experiencia y habilidad las matrices A_p , B_p , C_p y D_p son obtenidas directamente, de una manera simple y rápida a partir del grafo de Coates del sistema físico.

En la siguiente sección se aplican los procedimientos propuestos en dos ejemplos, a fin de obtener una realización del sistema físico.

3.6 Ejemplos

A continuación, se proporcionan dos ejemplos de aplicación de los procedimientos presentados en este capítulo.

3.6.1 Ejemplo de un Sistema Mecánico

Considere el sistema mecánico y su modelo en Bond Graph mostrados en la figura 3.5.

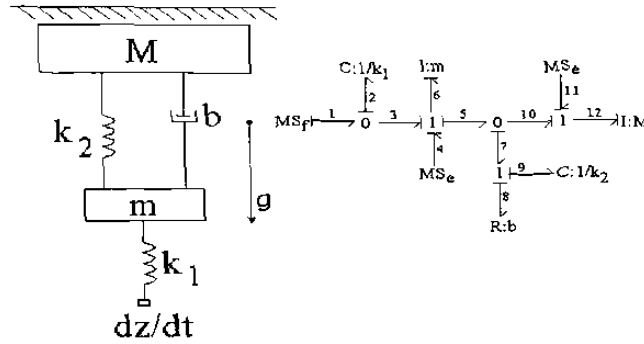


Figura 3.5 Sistema mecánico y su modelo en Bond Graph.

Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_2(t) \\ p_6(t) \\ q_9(t) \\ p_{12}(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_6(t) \\ f_9(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_6(t) \\ e_9(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ e_4(t) \\ e_{11}(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} y(t) = f_8(t) \\ D_{in}(t) = f_8(t) \\ D_{out}(t) = e_8(t) \end{array}$$

donde $f(t)$ denota la velocidad y $e(t)$ la fuerza en cada elemento del sistema mecánico; $q_2(t)$ y $q_9(t)$ los desplazamientos traslacionales en k_1 y k_2 , respectivamente; $p_6(t)$ y $p_{12}(t)$ los momentos traslacionales en m y M , respectivamente; $f_1(t)$ la velocidad de entrada, y $e_4(t)$ y $e_{11}(t)$ la fuerzas de gravedad de m y M , respectivamente.

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$\begin{aligned} F &= \text{diag} \left\{ k_1, \frac{1}{m}, k_2, \frac{1}{M} \right\} \\ L &= b \\ F_d &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

La representación del sistema está dada por (3.11) donde:

$$\begin{aligned} \overline{S}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{-1}{M} \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{S}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ b \end{bmatrix}; \quad \overline{S}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ S'_{21} &= S'_{31} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{-1}{M} \end{bmatrix}; \quad S'_{22} = S_{23} = S'_{32} = S_{33} = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

El grafo correspondiente a la ecuación (3.36) se muestra en la figura 3.6.

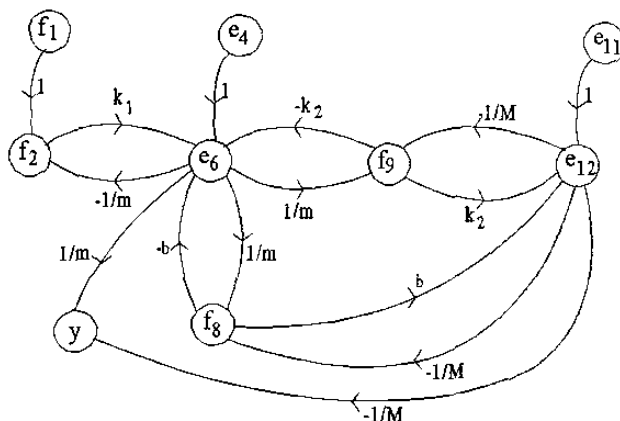


Figura 3.6 Grafo de Coates del sistema mecánico.

Para obtener el modelo dinámico en variables de estado dado por (2.28), utilizamos la sección 3.5, notando que de (3.36), $S'_{22} = 0$, dando $P = I$ de (3.13). Ahora, de (3.15), tenemos:

$$A_{px} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{-1}{M} \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

De (3.16) tenemos:

$$A_{pd} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (A_d)_{22} & 0 & (A_d)_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (A_d)_{42} & 0 & (A_d)_{44} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Para calcular $(A_{pd})_{22}$ y $(A_{pd})_{44}$ de (3.17) obtenemos:

$$(\delta_1)_{11} = -b \quad (\delta_2)_{11} = 1 \quad (\delta_3)_{11} = \frac{1}{m} \quad (3.39)$$

sustituyendo (3.39) en (3.17) se obtiene:

$$(A_{pd})_{22} = -\frac{b}{m} \quad (3.40)$$

Análogamente,

$$(\delta_1)_{44} = b \quad (\delta_2)_{44} = 1 \quad (\delta_3)_{44} = -\frac{1}{M} \quad (3.41)$$

sustituyendo (3.41) en (3.17) da:

$$(A_{pd})_{44} = -\frac{b}{M} \quad (3.42)$$

Ahora bien, para $(A_d)_{24}$ de (3.17) tenemos:

$$(\delta_1)_{24} = -b \quad (\delta_2)_{24} = 1 \quad (\delta_3)_{24} = -\frac{1}{M} \quad (3.43)$$

sustituyendo (3.43) en (3.17) se obtiene:

$$(A_{pd})_{24} = \frac{b}{M} \quad (3.44)$$

Para $(A_{pd})_{42}$ de (3.17) tenemos:

$$(\delta_1)_{42} = b \quad (\delta_2)_{42} = 1 \quad (\delta_3)_{42} = \frac{1}{m} \quad (3.45)$$

sustituyendo (3.45) en (3.17) se tiene:

$$(A_{pd})_{42} = \frac{b}{m} \quad (3.46)$$

Finalmente, sustituyendo las ecs. (3.40), (3.42), (3.44) y (3.46) en la ecuación (3.38), y las ecs. (3.37) y (3.38) en la ec. (3.14), la matriz A_p queda determinada por:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & \frac{-b}{m} & -k_2 & \frac{b}{M} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{M}{-b} \\ 0 & \frac{b}{m} & k_2 & \frac{M}{-b} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

La matriz B_p es obtenida de (3.20), notando que $B_{pd} = 0$ y $B_p = B_{px}$, la cual está dada por:

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

La matriz C_p está dada por (3.26), notando que $C_{pd} = 0$, es decir,

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Finalmente,

$$D_p = 0 \quad (3.50)$$

Notar que en este sistema prácticamente la mayoría de los elementos de las matrices son obtenidos directamente del grafo de Coates.

3.6.2 Ejemplo de un Sistema Eléctrico

Considere el sistema eléctrico y su modelo en Bond Graph mostrados en la figura 3.7.

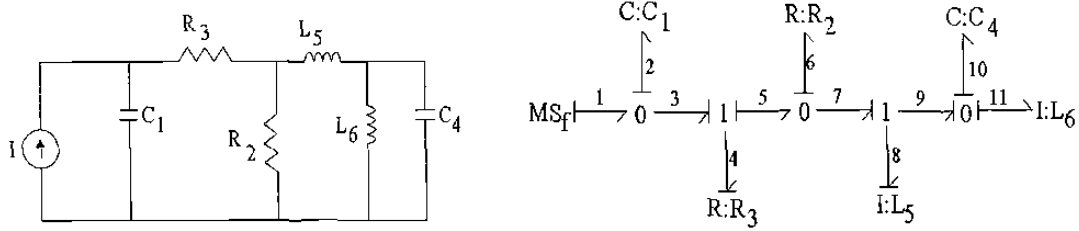


Figura 3.7 Sistema Eléctrico y su modelo en Bond Graph.

Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_2(t) \\ p_8(t) \\ q_{10}(t) \\ p_{11}(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_8(t) \\ f_{10}(t) \\ e_{11}(t) \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_8(t) \\ e_{10}(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} D_{in}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix} \\ D_{out}(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ e_6(t) \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} y(t) = e_4(t) \\ u(t) = f_1(t) \end{matrix}$$

donde $f(t)$ denota la corriente y $e(t)$ el voltaje en cada elemento, $q_2(t)$ y $q_{10}(t)$ las cargas eléctricas en C_1 y C_4 , respectivamente; $p_8(t)$ y $p_{11}(t)$ los enlaces de flujo en L_5 y L_6 , respectivamente; $f_1(t)$ la fuente de corriente y $y(t)$ la salida de voltaje en R_3 .

Las relaciones constitutivas para los elementos son

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_5}, \frac{1}{C_4}, \frac{1}{L_6} \right\} \quad (3.51)$$

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_3}, R_2 \right\} \quad (3.52)$$

La estructura de unión del sistema está dada por (3.11), donde:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{C_4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_5} & 0 & \frac{-1}{L_6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_3} & 0 \\ 0 & R_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ S'_{21} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L_5} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S'_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -R_2 \\ \frac{1}{R_3} & 0 \end{bmatrix}; \quad S'_{31} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ S'_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & -R_2 \end{bmatrix}; \quad S_{23} = S_{33} = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

El grafo respectivo al sistema eléctrico se muestra en la figura 3.8.

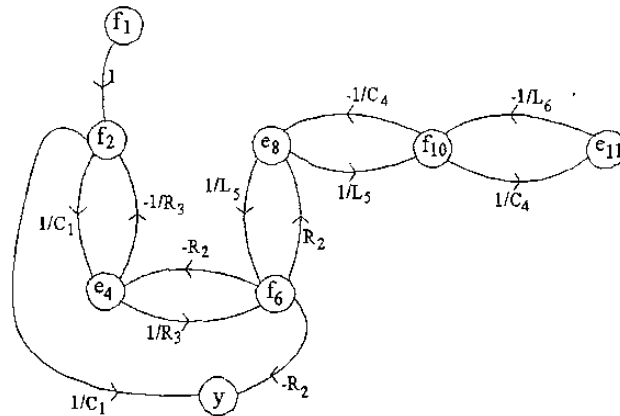


Figura 3.8 Grafo de Coates de un sistema eléctrico.

Para este caso $S'_{22} \neq 0$, aplicando el Procedimiento dado en la sección 3.5 se obtiene el grafo que se muestra en la figura 3.9.

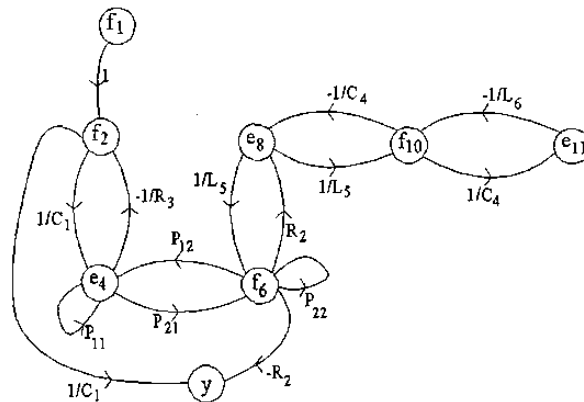


Figura 3.9 Grafo de Coates modificado de un sistema eléctrico.

De la ecuación, (3.13) obtenemos:

$$P_{11} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}; P_{12} = \frac{-R_2 R_3}{R_2 + R_3}; P_{21} = \frac{1}{R_2 + R_3}; P_{22} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (3.54)$$

Ahora bien, de la ec. (3.15) tenemos:

$$A_{px} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{C_4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_5} & 0 & \frac{-1}{L_6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

También, de (3.16) tenemos:

$$A_{pd} = \begin{bmatrix} (A_d)_{11} & (A_d)_{12} & 0 & 0 \\ (A_d)_{21} & (A_d)_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Para calcular A_{pd} de (3.17), tenemos:

$$(\delta_1)_{11} = \frac{-1}{R_3}, \quad (\delta_2)_{11} = P_{11}, \quad (\delta_3)_{11} = \frac{1}{C_2}. \quad (3.57)$$

Sustituyendo la ec. (3.57) en (3.17),

$$(A_{pd})_{11} = \frac{-1}{C_2(R_2 + R_3)} \quad (3.58)$$

Para el elemento $(A_{pd})_{12}$ tenemos:

$$(\delta_1)_{12} = \frac{-1}{R_3}, \quad (\delta_2)_{12} = P_{12}, \quad (\delta_3)_{12} = \frac{1}{L_5}. \quad (3.59)$$

Sustituyendo (3.59) en (3.17) se obtiene:

$$(A_{pd})_{12} = \frac{-R_2}{L_5(R_2 + R_3)} \quad (3.60)$$

Para el elemento $(A_d)_{21}$ tenemos:

$$(\delta_1)_{21} = R_2, \quad (\delta_2)_{21} = P_{21}, \quad (\delta_3)_{21} = \frac{1}{C_1}. \quad (3.61)$$

Remplazando (3.61) en (3.17) da:

$$(A_{pd})_{21} = \frac{R_2}{C_1(R_2 + R_3)} \quad (3.62)$$

De una manera similar para el elemento $(A_{pd})_{22}$ tenemos:

$$(\delta_1)_{22} = R_2, \quad (\delta_2)_{22} = P_{22}, \quad (\delta_3)_{22} = \frac{1}{L_5}. \quad (3.63)$$

y sustituyendo (3.63) en (3.17) da:

$$(A_{pd})_{22} = \frac{R_2 R_3}{L_5(R_2 + R_3)}. \quad (3.64)$$

Finalmente, sustituyendo las ecs. (3.58), (3.60), (3.62) y (3.64) en (3.56), y (3.56) en (3.14), la matriz A_p está dada por:

$$A_p = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_2(R_2 + R_3)} & \frac{-R_2}{L_5(R_2 + R_3)} & 0 & 0 \\ \frac{R_2}{C_2(R_2 + R_3)} & \frac{-R_2 R_3}{L_5(R_2 + R_3)} & \frac{-1}{C_4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_5} & 0 & \frac{-1}{L_6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

La matriz B_p se obtiene de (3.20), notando que $B_{pd} = 0$ y $B_p = B_{px}$, es decir:

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

La matriz C_p está dada por (3.26), donde C_{px} es

$$C_{px} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

La matriz C_{pd} está dada por:

$$C_{pd} = \begin{bmatrix} (C_d)_{11} & (C_d)_{12} & (C_d)_{13} & (C_d)_{14} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Los elementos de la matriz C_{pd} se calculan de (3.29), donde:

$$(\rho_1)_{11} = -R_2, \quad (\rho_2)_{11} = P_{21}, \quad (\rho_3)_{11} = \frac{1}{C_1}. \quad (3.69)$$

Sustituyendo la ec. (3.69) en la ec. (3.29) se obtiene:

$$(C_{pd})_{11} = \frac{-R_2}{C_1(R_2 + R_3)} \quad (3.70)$$

Para el elemento $(C_{pd})_{12}$ obtenemos:

$$(\rho_1)_{12} = -R_2, \quad (\rho_2)_{12} = P_{22}, \quad (\rho_3)_{11} = \frac{1}{L_5}. \quad (3.71)$$

sustituyendo la ec. (3.71) en (3.29) da:

$$(C_{pd})_{12} = \frac{-R_2 R_3}{L_5(R_2 + R_3)} \quad (3.72)$$

Así mismo, tenemos que,

$$(C_{pd})_{13} = 0, \quad (C_{pd})_{14} = 0 \quad (3.73)$$

sustituyendo (3.70), (3.72) y (3.73) en (3.68), y (3.67) y (3.68) en (3.26), obtenemos:

$$C_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} - \frac{R_2}{C_1(R_2 + R_3)} & \frac{-R_2 R_3}{L_5(R_2 + R_3)} & 0_{1 \times 2} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Finalmente

$$D_p = 0 \quad (3.75)$$

Es importante notar que a través del grafo de Coates modificado se puede determinar el intercambio energético entre los elementos que forman el sistema físico. Así, se conoce visualmente como influyen las entradas en el sistema y que elementos intervienen en la salida. Por lo tanto, se tiene un grafo con una gran cantidad de información sobre los intercambios energéticos.

En el próximo capítulo, se presenta una forma diferente para determinar la estabilidad de un sistema LTI MIMO basado en el grafo de Coates. Su ventaja es la de no requerir el modelo matemático del sistema en espacio de estado o en función de transferencia.

3.7 Conclusiones

Se presentó un grafo de Coates modificado que representa un Bond Graph y por lo tanto un sistema físico LTI MIMO.

Es importante señalar que a través de esta representación gráfica es posible determinar otras propiedades del sistema físico, como observabilidad, controlabilidad y determinante.

Se presentó un procedimiento gráfico para obtener la representación de un modelo dinámico LTI MIMO.

Así, en éste capítulo se logró una conexión directa de Bond Graph con grafos lineales y se dan procedimientos para la determinación de las matrices A_p , B_p , C_p y D_p del sistema físico.

Capítulo 4

Condiciones de Estabilidad en el Sentido de Hurwitz para un Sistema LTI MIMO Utilizando Grafos Lineales a partir de su Bond Graph

4.1 Introducción

Uno de las propiedades de cualquier sistema de control es la *estabilidad*. Un sistema LTI MIMO es *estable* si todos los polos de su función de transferencia se localizan en el semiplano izquierdo del plano complejo [4] y gracias a las herramientas desarrolladas en el capítulo anterior dado un modelo en Bond Graph de un sistema, se pueden encontrar los coeficientes del polinomio característico usando trayectorias causales o una matriz de Coates [69].

Gracias a la representación matricial es posible obtener el polinomio característico y en este caso podemos aplicar el *Criterio de Hurwitz* para conocer la estabilidad del sistema [4]. Este criterio es un método algebraico tal que para sistemas grandes con muchos parámetros representa mucho trabajo. También, para objetivos de control es deseable una metodología próxima al sistema físico, es decir, control en el dominio físico.

Considerando los resultados del capítulo 3, en el cual se tiene representado el sistema físico en forma gráfica la determinación del polinomio característico se puede realizar desde el Bond Graph o desde el grafo lineal correspondiente.

En este capítulo, se presenta un procedimiento gráfico y sencillo para obtener las condiciones de estabilidad del sistema físico utilizando la Teoría de Gráfos. Esta metodología no

requiere conocer la función de transferencia del sistema o su realización (A_p, B_p, C_p, D_p) . En el Apéndice C, sección C.2, se da un artículo publicado con los resultados presentados en este capítulo [36].

El presente capítulo está organizado en cuatro partes: en la primera, se estudia el criterio de Hurwitz. Después se estudia la obtención del polinomio característico utilizando metodologías gráficas. En la tercera parte, se presenta una nueva forma para determinar las condiciones de estabilidad utilizando grafos lineales; y finalmente se aplican los procedimientos propuestos de estabilidad a un sistema físico en lazo abierto y en lazo cerrado.

4.2 Antecedentes de estabilidad en sistemas lineales

El concepto de *estabilidad* es extremadamente importante debido a que por lo general un sistema es diseñado para ser estable a pesar de incertidumbres y perturbaciones.

Los conceptos de *Estabilidad Externa* o *Estabilidad Entrada Acotada/Salida Acotada* (BIBO) y de *Estabilidad Interna* o *Estabilidad en el Sentido de Lyapunov* de sistemas LTI MIMO, se dan en el Apéndice B. A continuación, se introduce el *Criterio de Hurwitz*.

4.2.1 Criterio de Hurwitz [4, 12, 26]

Si la función de transferencia de un sistema es una función racional de s , donde s es el operador de Laplace, entonces, la estabilidad (BIBO) de un sistema está completamente determinada por los polos de $G(s)$.

Si $G(s)$ es *irreducible*, se llama *realización mínima*, ésto es, si no existe un factor común entre su denominador y su numerador, entonces, los polos de $G(s)$ son iguales a las raíces del polinomio del denominador de $G(s)$, también llamado *Polinomio Característico* [68]. La estabilidad BIBO de este sistema está determinada por las raíces del Polinomio Característico [68].

Un polinomio es llamado un *Polinomio Hurwitz* si todas sus raíces tienen parte real negativa. Entonces, un sistema es estable BIBO si y sólo si su Polinomio Característico es un Polinomio Hurwitz [26].

Sin embargo, si el grado del polinomio característico es 3 o mayor, el cálculo de las raíces no es sencillo, para polinomios característicos dados en forma *simbólica*. Además, el conocimiento de la ubicación exacta de sus raíces no es necesario para determinar su estabilidad.

Un método para determinar la estabilidad BIBO sin obtener las raíces es el *Criterio*

de Hurwitz es un método para determinar el plano de la ubicación de los polos de un polinomio con coeficientes constantes.

Considere el polinomio característico,

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \quad a_0 > 0 \quad (4.1)$$

donde los $a_i \in \mathfrak{R}$, $i = 0, \dots, n$.

Las condiciones necesarias para que el polinomio de la ec. (4.1) no tenga raíces con parte real positiva, son:

1. Todos los coeficientes del polinomio tienen el mismo signo.
2. Todos los coeficientes existen.

Criterio de Hurwitz

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación (4.1) estén en el semiplano izquierdo del plano s es que los *Determinantes de Hurwitz*, D_k , $k = 1, 2, \dots, n$ sean todos positivos.

Los *Determinantes de Hurwitz* de (4.1) están definidos por:

$$D_1 = a_1; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad (4.2)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

donde los coeficientes con índices mayores que n o con índices negativos son reemplazados con ceros

En un primer vistazo, la aplicación de los determinantes de Hurwitz parece ser un trabajo formidable para polinomios de alto orden, dado que se requiere una gran cantidad de trabajo en la evaluación de los determinantes. Afortunadamente, el proceso simplificado de Routh introduciendo un método tabular en lugar de n determinantes de Hurwitz, permite encontrar la solución de una manera más rápida.

En la siguiente sección, se da una forma de determinar el polinomio característico utilizando la Teoría de gráficos.

4.3 Obtención del Polinomio Característico

La estabilidad de un sistema puede ser determinada conociendo el polinomio característico. Este polinomio puede ser encontrado analíticamente o gráficamente utilizando Bond Graph o Grafo de Coates, dado en el Capítulo 3, sección 3.3.

Para continuar el análisis en grafos solamente en este capítulo, en el Apéndice A, sección A.5, se explica como obtener el polinomio característico basado en las trayectorias causales de un sistema modelado en Bond Graph.

4.3.1 Gráfica de Coates [69]

Para el análisis de estabilidad sin pérdida de generalidad, se obtiene una subgrafo seccional del grafo lineal de la figura 3.4 despreciando las entradas y salidas, la cual se muestra en la figura 4.1.

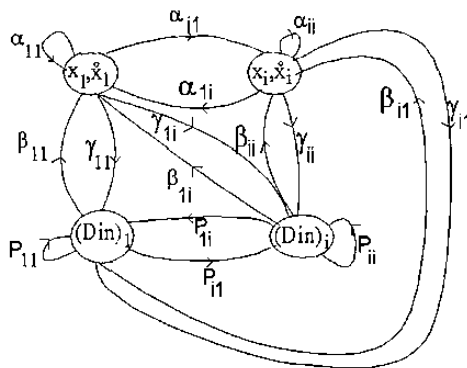


Figura 4.1 Subgrafo seccional de la matriz de Coates A_{pc} .

De este grafo lineal se obtiene la matriz del grafo de Coates A_{pc} y su determinante de valores propios está dado por:

$$\det(\lambda I - A_{pc}) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} \left[\sum_{A_{pc}[V_k]} \sum_u (-1)^{L_h} f(h_{uk}) \right] \quad (4.3)$$

donde h_{uk} son los u^{th} factores-1 en $A_{pc}[V_k]$, $A_{pc}[V_k]$ es un grafo seccional de k -nodos de A_{pc} y L_h es el número de circuitos dirigidos en h_{uk} .

En la próxima sección, se presentan procedimientos para la obtención de las condiciones de estabilidad utilizando grafos lineales en un sentido de Hurwitz; los cuales se publicaron en un artículo que se da en el Apéndice C, sección C2.

4.4 Obtención de las Condiciones de Estabilidad

Considerando un sistema LTI MIMO que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5, se presenta un procedimiento para obtener un grafo lineal, que representa el polinomio característico. Se utiliza para determinar las condiciones de estabilidad usando la matriz de Hurwitz, dada en la sección 4.2.1, en una forma gráfica.

El siguiente Procedimiento propone la construcción de un grafo lineal, denominado *Grafo de Estabilidad de Coates*, $G_c(D)$, que representa a la matriz de Hurwitz y al polinomio característico.

Procedimiento 4.1

1. Sea el polinomio característico,

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n\lambda^0 = 0 \quad (4.4)$$

con $a_0 = 1$.

2. El número de nodos del sistema correspondiente es igual al orden del polinomio. Cada nodo tiene un lazo propio como se muestra en la figura 4.2.

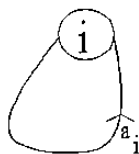


Figura 4.2 Lazo propio de un nodo.

3. Considerese ramas entre nodos diferentes utilizando las figuras 4.3 y 4.4.

Ramas a la derecha. Inicialmente $j = 1$, $h = 0$.

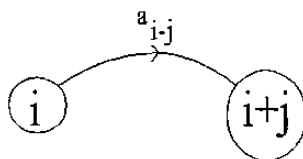


Figura 4.3 Ramas a la derecha.

Para $i = j, \dots, k$; donde $k = n - 2j + h + 1 \forall i \leq k$.

Si $i = k$ entonces $j \leftarrow j + 1$ y $h \leftarrow h + 1$ e incrementamos j mientras $j < k$, donde $x \leftarrow y$ denota que el valor de y es asignado a x .

Ramas a la izquierda. Inicialmente $j = 1, h = 0$.

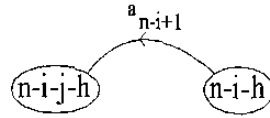


Figura 4.4 Ramas a la izquierda.

Para $i = 1, \dots, k$; donde $k = n - j - 1 - h, \forall i \leq k$.

Si $i = k$ entonces $j \leftarrow j + 1$ y $h \leftarrow h + 1$ e incrementamos j mientras $j < k$.

En la Tabla 4.1, se muestran algunos grafos de estabilidad de Coates, lo cual resume el procedimiento 2.1 para algunos casos, comprobando que se genera un grafo lineal con una estructura sencilla, como se ilustra a través de algunos ejemplos en la siguiente sección. Note que se puede extender gráficamente a más de cuatro nodos.

Polinomio Característico	Grafo de Estabilidad de Coates
$a_0 \lambda + a_1 = 0$	
$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$	
$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$	
$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$	

Tabla 4.1 Grafos de Estabilidad de Coates.

El grafo $G_c(D)$ representa un grafo de Coates de la matriz de Hurwitz. Así, se pueden dar las condiciones de estabilidad, usando el criterio de Hurwitz de la sección 4.2.1.

Así, de la Teoría de gráfos, el determinante de Hurwitz D_n está dado por:

$$\det D = D_n = (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h) \tag{4.5}$$

donde h es un factor-1 en $G_c(D)$ y L_h denota el número de circuitos dirigidos en h y $f(h)$ representa el producto de los pesos asociados con las ramas de h .

Para encontrar los n determinantes del criterio de Hurwitz, se propone el siguiente procedimiento:

Procedimiento 4.2

1. Calcular D_n de (4.5).
2. El determinante D_{n-1} es obtenido removiendo el nodo n del grafo $G_c(D)$, y usando (4.5) para este subgrafo de $G_c(D)$, que tiene $n - 1$ nodos.
3. Remover el nodo $n - 1$ del subgrafo de $G_c(D)$ del paso 2, y usando (4.5) calculamos D_{n-2} ; y así sucesivamente hasta obtener D_1 .

Los procedimientos presentados se aplican a continuación en dos ejemplos, mostrando lo sencillo y directo de los mismos.

4.5 Ejemplos

Se presentan ejemplos de aplicación para la obtención de las condiciones de estabilidad de un sistema mecánico en lazo abierto y posteriormente en lazo cerrado.

4.5.1 Sistema Mecánico en Lazo Abierto

Considerar el sistema mecánico y su Bond Graph de la figura 3.5, cuya grafo lineal se muestra en la figura 3.6.

De (4.3) el polinomio característico de la matriz A_{pc} está dado por:

$$\det(\lambda I - A_{pc}) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 \quad (4.6)$$

A continuación de (4.3) se obtienen los coeficientes de (4.6), utilizando el grafo lineal de la figura 3.7.

Para a_1 , los factores-1 se muestran en la figura 4.5.

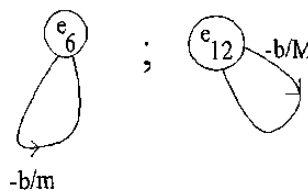


Figura 4.5 Grafo seccional de un nodo.

El coeficiente a_1 es:

$$a_1 = \frac{b}{m} + \frac{b}{M} \quad (4.7)$$

Para a_2 , se utiliza la figura 4.6.

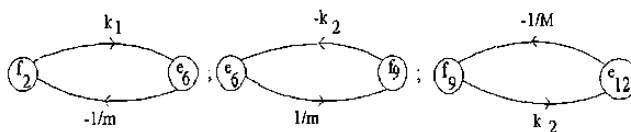


Figura 4.6 Subgrafo seccional de dos nodos.

El coeficiente a_2 es:

$$a_2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \frac{k_2}{M} \quad (4.8)$$

Para a_3 , de la figura 4.7.

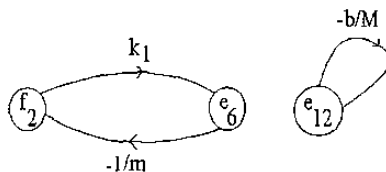


Figura 4.7 Subgrafo seccional de tres nodos.

El coeficiente a_3 es

$$a_3 = \frac{k_1 b}{m M} \quad (4.9)$$

Finalmente, para a_4 se utiliza la figura 4.8.

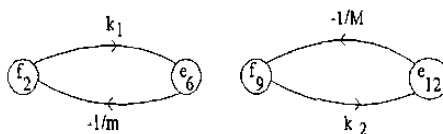


Figura 4.8 Subgrafo seccional de cuatro nodos.

El coeficiente a_4 es

$$a_4 = \frac{k_1 k_2}{m M} \quad (4.10)$$

Utilizando el Procedimiento 4.1 de la sección 4.3 se tiene el grafo de Coates de estabilidad, para este ejemplo, en la figura 4.9.

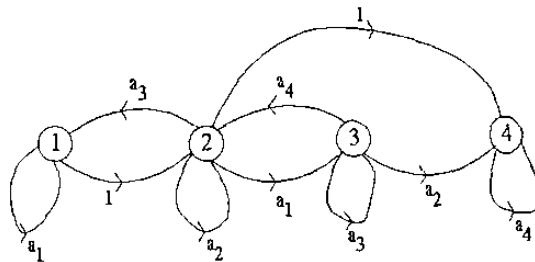


Figura 4.9 Grafo de Coates de estabilidad.

Encontrando los determinantes de Hurwitz por medio del Procedimiento 4.2 de la sección 4.3.

Considere la figura 4.10, D_4 está dado por

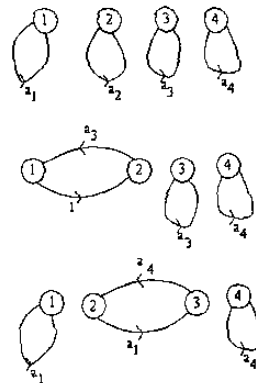


Figura 4.10 Subgrafo seccional de cuatro nodos.

$$D_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 \quad (4.11)$$

De la figura 4.11, D_3 es

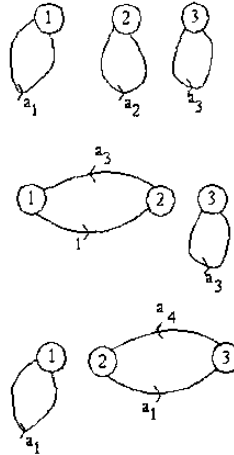


Figura 4.11 Subgrafo seccional de tres nodos.

$$D_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 \quad (4.12)$$

La figura 4.12, produce D_2 .

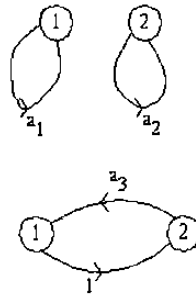


Figura 4.12 Subgrafo seccional de dos nodos.

$$D_2 = a_1 a_2 - a_3 \quad (4.13)$$

Finalmente, D_1 se obtiene de la figura 4.13.



Figura 4.13 Subgrafo seccional de un nodo.

$$D_1 = a_1 \quad (4.14)$$

Sustituyendo de (4.7) a (4.10) en (4.11) a (4.14), obtenemos las condiciones de estabilidad para el sistema físico

$$D_4 = \frac{b^2 k_1^3 k_2}{m^4 M^2} > 0 \quad (4.15)$$

$$D_3 = \frac{b^2 k_1^2}{m^3 M} > 0 \quad (4.16)$$

$$D_2 = \frac{b(k_1 + k_2)}{m^2} + \frac{2bk_2}{mM} + \frac{bk_2}{M^2} > 0 \quad (4.17)$$

$$D_1 = \frac{b}{m} + \frac{b}{M} > 0 \quad (4.18)$$

Este procedimiento gráfico, nos permite conocer el comportamiento del sistema en una forma sencilla a través del conocimiento de las condiciones de estabilidad y de los parámetros del sistema. Más aún, este procedimiento muestra como los parámetros del sistema son reflejados en el sistema físico.

4.5.2 Sistema Mecánico en Lazo Cerrado

Considere el sistema del ejemplo 4.5.1 con una retroalimentación de salida, donde k_c es la ganancia de retroalimentación. El grafo lineal de lazo cerrado se muestra en la figura 4.14.

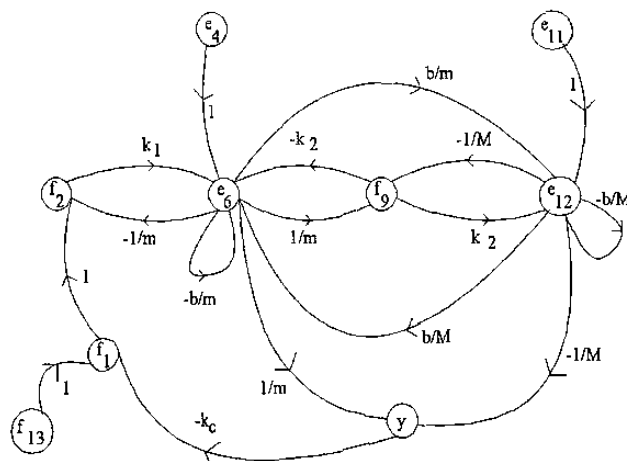


Figura 4.14 Grafo lineal del sistema en lazo cerrado.

Sin pérdida de generalidad, para el análisis de estabilidad mediante el procedimiento gráfico de este capítulo, se suprimen las entradas e_4 , e_{11} y f_3 ; y la retroalimentación de la salida se reduce formando trayectorias dirigidas de e_6 a f_2 y de e_{12} a f_2 ; la gráfica simplificada para la obtención del polinomio característico se muestra en la figura 4.15.

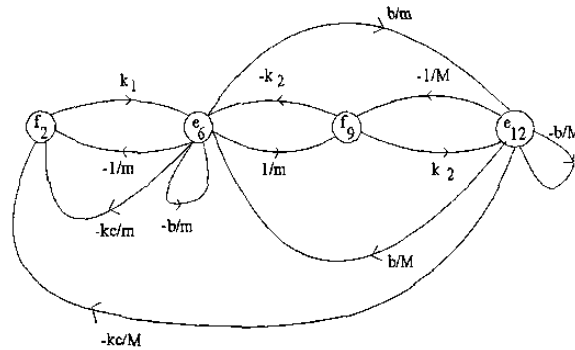


Figura 4.15 Grafo lineal reducido del sistema de lazo cerrado.

Considerando la figura 4.15, el polinomio característico, está dado por la expresión (4.18), el coeficiente a_1 está determinado por la figura 4.4 y por la ecuación (4.19). Sin embargo, el coeficiente a_2 se obtiene de la figura 4.16 :

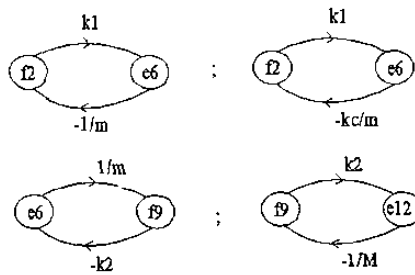


Figura 4.16 Subgrafo seccional de dos nodos.

Así, a_2 es:

$$a_2 = \frac{k_1 + k_2 + k_1 k_c}{m} + \frac{k_2}{M} \tag{4.19}$$

Utilizando la figura 4.17,

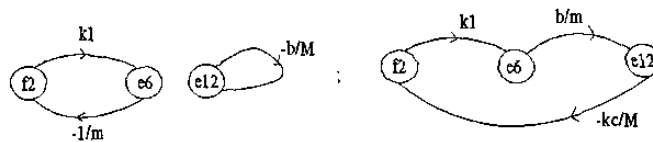


Figura 4.17 Sugrafo seccional de tres nodos.

el coeficiente a_3 está dado por:

$$a_3 = \frac{k_1 b + 2k_1 k_c b}{mM} \tag{4.20}$$

Utilizamos la figura 4.18,

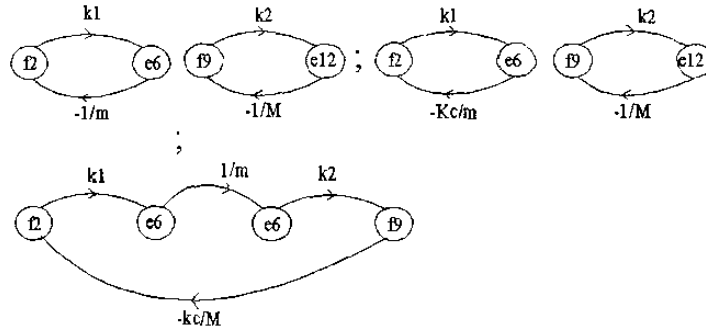


Figura 4.18 Subgrafo seccional de dos nodos.

se obtienen a_4 ,

$$a_4 = \frac{k_1 k_2 (1 + 2k_c)}{mM} \quad (4.21)$$

El grafo de Coates de estabilidad es la misma que para el ejemplo anterior, como es mostrada en la figura 4.9, por lo tanto las condiciones de estabilidad están dadas por las siguientes expresiones:

$$D_1 = b \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) > 0 \quad (4.22)$$

$$D_2 = b \left(\frac{k_1 (1 + k_c) + k_2}{m^2} + \frac{k_2}{M^2} + \frac{k_2 - k_1 k_c}{mM} \right) > 0 \quad (4.23)$$

$$D_3 = \frac{k_1^2 b^2}{m^2 M} \left(\frac{2k_c^2 + 3k_c + 1}{m} - \frac{2k_c^2 + k_c}{M} \right) > 0 \quad (4.24)$$

$$D_4 = \frac{b^2 k_1^3 k_2}{m^3 M^2} \left(\frac{4k_c^3 + 6k_c^2 + 7k_c + 1}{m} - \frac{6k_c^2 + 4k_c^3 + k_c}{M} \right) > 0 \quad (4.25)$$

Este ejemplo muestra que el procedimiento gráfico propuesto nos permite obtener condiciones para la ganancia del control, que garanticen la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Al observar que una retroalimentación de salida puede ser aplicada en un sistema en un grafo lineal, se descubre que existe un potencial de la Teoría de Bond Graph para sistemas retroalimentados, teniendo un significado físico.

Por lo que, en el próximo capítulo, se presenta un control directo por retroalimentación de estado estimado para sistemas LTI MIMO con un enfoque de Bond Graph, encontrando estructuras para el controlador y observador en el dominio físico.

4.6 Conclusiones

En este capítulo se propuso una gráfica que representa la matriz de Hurwitz de un sistema LTI MIMO.

Se presentó un procedimiento gráfico para determinar las condiciones de estabilidad en un sistema físico LTI MIMO. Esta metodología no requiere conocer la función de transferencia o su realización (A_p, B_p, C_p, D_p) .

Los resultados pueden ser aplicados a sistemas físicos en lazo abierto o lazo cerrado.