

## Capítulo 5

# Control Directo en Bond Graph por Retroalimentación de Estado Estimado para Sistemas LTI MIMO

### 5.1 Introducción

En la Teoría de control moderna, algunos diseños están basados en la hipótesis de que el vector de estado del sistema a ser controlado está disponible para su medición en el caso de retroalimentación de estados[14]. En muchas situaciones prácticas sólo algunas variables de estado son medibles, en estos casos, el vector de estado de un sistema LTI MIMO puede ser reconstruido a partir de las mediciones de las entradas y salidas del sistema, por medio de un *observador de estados*, si el sistema es observable [16].

El objetivo de control del presente trabajo es obtener un controlador realizable y considerando las características físicas del sistema bajo control. En este capítulo, se presenta un control por retroalimentación de estados estimados, así, la extensión de Bond Graph para técnicas de control, no sólo para modelado, permite diseñar el controlador a partir del modelo físico, asegurando un controlador realizable [57]. En el Apéndice C, sección C.3, se da un artículo publicado con los resultados presentados en este capítulo [34].

Nuestra propuesta presenta un control directo por retroalimentación de estado estimado para sistemas LTI MIMO en el dominio físico, lo cual implica el diseño de un observador de estados en Bond Graph. Entendemos aquí, un *Control Directo* como la aplicación de una ley de control en el dominio físico sin requerir el modelo matemático del sistema en lazo abierto.

En [20] se muestra un resultado de un observador de estados y una retroalimentación

de estado estimado en Bond Graph. Sin embargo, no se tiene en un enfoque de la matriz de Estructura de Unión y no se realiza ningún estudio del problema de asignación de polos del controlador y del observador.

El presente capítulo, está organizado en cuatro partes fundamentales: en la primera, se estudia el observador de Luenberger en lazo abierto y cerrado; después, se presenta un esquema de control por retroalimentación de estados estimados en el dominio físico; en la tercer parte, se proponen procedimientos y lemas para obtener las estructuras del sistema y del observador en lazo cerrado. Finalmente, se aplica la metodología propuesta de control a dos ejemplos de sistemas físicos.

## 5.2 Antecedentes de la ley de control

Frecuentemente, en el diseño de sistemas de control es necesario construir observadores de las variables de estado. Si un sistema es lineal, su vector de estado puede ser reconstruido por las entradas y salidas disponibles del sistema original [14], mediante un *observador*. Si el sistema es observable, un observador produce un estimado del vector de estado o de una combinación lineal del vector de estado.

Una vez que un *observador* ha sido construido para un sistema lineal, es importante considerar el efecto inducido de usar este observador del estado en lugar del llamado valor verdadero del estado para una ley de control [14, 57].

En la siguiente sección, se explica la teoría general del *observador de Luenberger*, indicando las propiedades del observador de estado en lazo abierto y del asintótico de estado.

### 5.2.1 Observador Asintótico de Luenberger [12, 14, 47, 68]

El dispositivo que construye una aproximación del vector de estado a partir de la salida es llamado un *observador de estado*.

Considere el sistema LTI MIMO dado en (2.28), suponemos que las variables de estado no son medibles y  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  y  $D_p$  son completamente conocidas. Entonces, el problema es estimar o generar  $x(t)$  a partir del conocimiento de la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$ .

Si el sistema es observable y conocemos las matrices  $A_p$  y  $B_p$ , podemos duplicar el sistema original y obtenemos el llamado *observador en lazo abierto* mostrado en la figura 5.1.

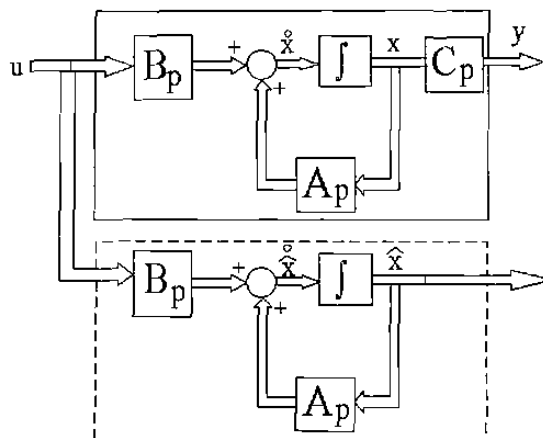


Figura 5.1 Observador de estado en lazo abierto.

Ahora bien, si el sistema original de la ecuación (2.28) y el observador tienen el mismo estado inicial y la misma entrada, la salida  $\hat{x}(t)$  del estimador será igual a  $x(t)$  para todo  $t$ .

Así, la pregunta restante es como encontrar el estado inicial  $x_0$  del sistema y usarlo en el observador. Este problema es resuelto, si el sistema de la figura 5.1 es *observable*, es decir, si el sistema (2.28) es observable en  $t_0$ . Un sistema es observable en  $t_0$ , si existe un tiempo finito  $t_1 > t_0$ , tal que para cualquier estado  $x_0$  en el tiempo  $t_0$ , el conocimiento de la entrada  $u_{[t_0, t_1]}$  y la salida  $y_{[t_0, t_1]}$  sobre el intervalo de tiempo  $[t_0, t_1]$  es suficiente para determinar el estado  $x_0$  [12].

Consecuentemente, si el sistema (2.28) es observable, un *observador en lazo abierto* puede ser utilizado para generar el  $x(t)$ .

Si se utiliza un observador en lazo abierto el estado inicial debe ser calculado cada vez que se use el observador. Así, un estimador en lazo abierto es, en general, no satisfactorio.

Es importante notar que a pesar de que  $u(t)$  y  $y(t)$  del sistema (2.28) están disponibles, utilizamos solamente  $u(t)$  en el observador en lazo abierto, de tal manera que si ambas  $u(t)$  y  $y(t)$  son utilizadas, el comportamiento del observador puede ser mejorado, tal como se muestra el llamado *observador asintótico de estado* de la figura 5.2.

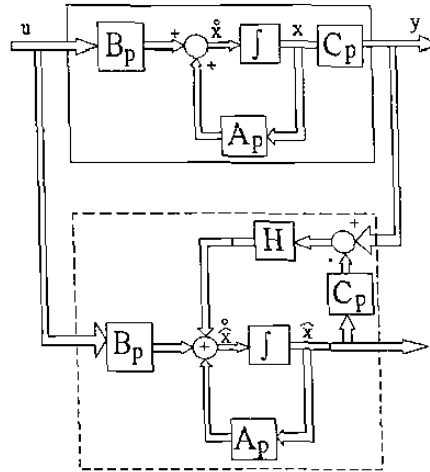


Figura 5.2 Observador asintótico de estado.

La salida del sistema  $y(t) = C_p x(t) - D_p u(t)$  es comparada con  $\hat{y}(t) = C_p \hat{x}(t) - D_p u(t)$  y su diferencia multiplicada por la *ganancia del observador*,  $H \in \mathbb{R}^{n \times q}$ , lo cual es un término de corrección.

El observador de estado asintótico está dado por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A_p - HC_p) \hat{x}(t) + Hy(t) + B_p u(t) \quad (5.1)$$

De (2.28) y (5.1) obtenemos,

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A_p - HC_p) \tilde{x}(t) \quad (5.2)$$

donde

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t) \quad (5.3)$$

dado que los eigenvalores de  $(A_p - HC_p)$  pueden ser seleccionados para tener la convergencia del estado estimado al estado real, entonces se controla la dinámica de  $\tilde{x}(t)$ .

En la siguiente sección, se muestra que si una ley de control LTI es realizada con un observador, entonces los polos resultantes del sistema no son modificados por el observador.

### 5.2.2 Control por retroalimentación de estado estimado [51]

La construcción de un observador permite que un estado observado  $\hat{x}(t)$  pueda ser retroalimentado a la entrada. Evidentemente, la retroalimentación de  $\hat{x}(t)$ , no es igual a la retroalimentación del estado verdadero  $x(t)$ . Así, es importante considerar si la interacción del observador con la retroalimentación, producen los resultados esperados.

Considerese el sistema LTI MIMO (2.28). La retroalimentación de  $x(t)$  estados

$$u(t) = w(t) - Kx(t) \quad (5.4)$$

donde  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  puede ubicar los eigenvalores de  $(A_p + B_p K)$  en una posición deseada si  $\{A_p, B_p\}$  es *controlable* [68].

Así mismo, un observador de estados con eigenvalores arbitrarios puede ser construido, utilizando  $u(t)$  y  $y(t)$  como entradas si  $\{A_p, C_p\}$  es *observable* [68].

Si el estado actual  $x(t)$  no está disponible para retroalimentación, una posible solución es natural aplicar la ganancia de retroalimentación  $K$  a  $\hat{x}(t)$ , ésto es,

$$u(t) = w(t) - K\hat{x}(t) \quad (5.5)$$

lo cual se muestra en la figura 5.3.

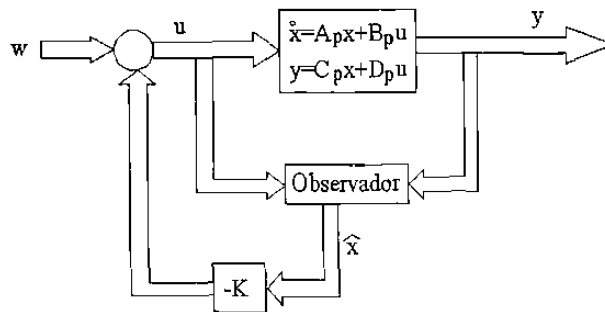


Figura 5.3 Retroalimentación de estado estimado.

Sustituyendo (5.5) en (2.28), tenemos el sistema en lazo cerrado,

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) - \widetilde{A}_p \hat{x}(t) + B_p w(t) \quad (5.6)$$

$$y(t) = C_p x(t) - \widetilde{C}_p \hat{x}(t) + D_p w(t)$$

donde:

$$\widetilde{A}_p \triangleq B_p K \quad (5.7)$$

$$\widetilde{C}_p \triangleq D_p K \quad (5.8)$$

De (5.1) y (5.5), el *observador asintótico de Luenberger* es [14, 68]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \widehat{A}_p \hat{x}(t) + \widehat{B}_p w(t) + \overline{A}_p x(t) \quad (5.9)$$

$$\widehat{y}(t) = \widehat{C}_p \hat{x}(t) + \widehat{D}_p w(t)$$

donde:

$$\widehat{A}_p \triangleq A_p - B_p K - H C_p \quad (5.10)$$

$$\overline{A}_p \triangleq H C_p \quad (5.11)$$

$$\widehat{C}_p \triangleq C_p - \widetilde{C}_p \quad (5.12)$$

$$\widehat{B}_p \triangleq B_p; \quad \widehat{D}_p \triangleq D_p \quad (5.13)$$

Si el sistema es observable y controlable, los dos sistemas (5.6) y (5.9) pueden ser escritos en la siguiente forma de espacio de estado aumentada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & -B_p K \\ H C_p & A_p - H C_p - B_p K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ B_p \end{bmatrix} w(t) \quad (5.14)$$

para determinar la ubicación de los eigenvalores de este sistema compuesto, debemos determinar las raíces del polinomio característico, el cual, como se muestra en [47], puede ser expresado como:

$$\det[\lambda I_{n \times n} - A_p + H C_p] \cdot \det[\lambda I_{n \times n} - A_p + B_p K] = 0 \quad (5.15)$$

La ecuación (5.15) indica que los eigenvalores del sistema compuesto son la unión de los eigenvalores de un sistema con una matriz  $A_p - H C_p$  y de otro sistema con una matriz  $A_p - B_p K$ . Como consecuencia, el observador y el controlador no necesitan ser diseñados simultáneamente; la ganancia del controlador  $K$  puede ser calculada independientemente de la ganancia del observador, este resultado es conocido como el *Principio de Separación* [47].

En la próxima sección, se presenta un análisis de la retroalimentación de estado estimado  $\hat{x}(t)$ , de un sistema físico, utilizando el observador de Luenberger en un enfoque de Bond Graph. En el Apéndice C, sección C.3, se da un artículo publicado con los resultados presentados en este capítulo.

### 5.3 Control Directo en Bond Graph

Considerando un sistema LTI MIMO que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5. Además, el sistema es *estructuralmente controlable* y *observable* de acuerdo a la propiedad A.3 del Apéndice A, sección A.4, se presenta una técnica gráfica directa para un modelo en lazo abierto representado en Bond Graph. Se obtiene el modelo del observador y el modelo en lazo cerrado en Bond Graph directamente, a partir del *modelo en lazo abierto*. Suponemos, que todos los elementos tienen relaciones constitutivas lineales.

La figura 5.4 muestra la estructura general propuesta del control por retroalimentación de estado estimado en Bond Graph.

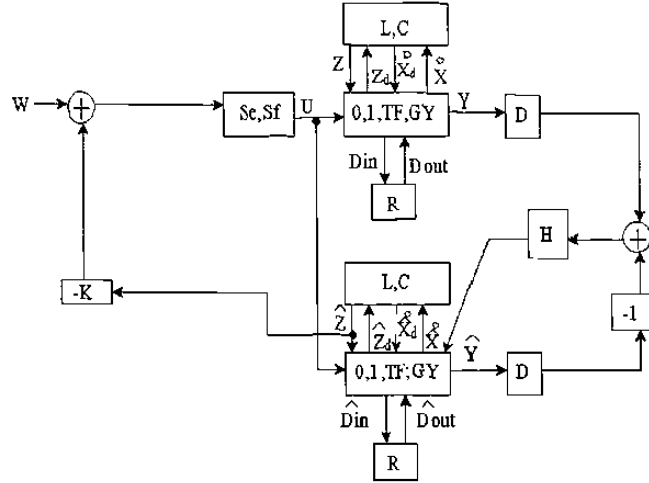


Figura 5.4 Lazo cerrado con observador en diagrama a bloques.

El objetivo de representar el modelo y el observador en diagramas a bloques es obtener el modelo del sistema retroalimentado en términos de la matriz de Estructura de Unión  $S$  dada por (2.27). Esto nos permite conocer, el cambio de la matriz  $S$  debido al observador y a la retroalimentación de estado, con el propósito de asignar la ubicación de los polos en el dominio físico del sistema de acuerdo a la ganancia del control.

Los próximos Lemas 5.1 y 5.2 muestran que  $\widetilde{A}_p$ ,  $\widetilde{C}_p$ ,  $\widehat{A}_p$ ,  $\overline{A}_p$  y  $\widehat{C}_p$  del sistema de lazo cerrado puede ser obtenidas a partir de las ecuaciones (2.29) a (2.32) utilizando  $S$ .

Se tienen dos casos posibles debido a la ubicación de los elementos en el Bond Graph. El primer caso cuando el campo de disipación ( $R$ ) está localizado antes que el campo de almacenamiento ( $L, C$ ), y el segundo, en caso contrario.

### Lema 5.1

Considere el esquema de control de la figura 5.4 y que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5. Sea la estructura del sistema en lazo cerrado dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ w(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} - \widehat{S} \begin{bmatrix} \widehat{z}(t) \\ \widehat{D}_{out}(t) \\ w(t) \\ \widehat{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

donde la estructura de unión del observador reflejada al sistema es:

$$\widehat{S} = \begin{bmatrix} \widehat{S}_{11} \\ \widehat{S}_{21} \\ \widehat{S}_{31} \end{bmatrix} 0_{3(n+r+g) \times 3(n+r+p+m)} \quad (5.17)$$

Entonces,

1) Si el campo de disipación ( $R$ ) está localizado antes que el campo de almacenamiento ( $L, C$ ), es decir, si  $\widehat{S}_{21} = 0$ ,  $\widehat{S}_{11} \neq 0$  y/o  $\widehat{S}_{31} \neq 0$ , tenemos,

$$\widetilde{A}_p = E^{-1} \widehat{S}_{11} F \quad (5.18)$$

$$\widetilde{C}_p = \widehat{S}_{31} F \quad (5.19)$$

2) En caso contrario, si  $\widehat{S}_{11} = \widehat{S}_{31} = 0$  y  $\widehat{S}_{21} \neq 0$ , tenemos:

$$\widetilde{A}_p = E^{-1} S_{12} M \widehat{S}_{21} F \quad (5.20)$$

$$\widetilde{C}_p = S_{32} M \widehat{S}_{21} F \quad (5.21)$$

siendo,

$$E = I + S_{14} F_d^{-1} S_{14}^T F \quad (5.22)$$

$$M = L(I - S_{22} L)^{-1} \quad (5.23)$$

**Prueba.** Para sistemas LTI, sustituyendo (2.22), (2.23) y (2.26) en la primer línea de (5.16), tenemos:

$$\dot{x}(t) = E^{-1} \left( S_{11} z(t) + S_{12} D_{out}(t) + S_{13} w(t) - \hat{S}_{11} \hat{z}(t) \right) \quad (5.24)$$

de (2.24) y la segunda línea de (5.16) se obtiene:

$$D_{in}(t) = (I - S_{22} L)^{-1} \left( S_{21} z(t) + S_{23} w(t) - \hat{S}_{21} \hat{z}(t) \right) \quad (5.25)$$

Tomando (2.22), (2.24), (2.34) y (5.25) en (5.24),

$$\dot{x}(t) = E^{-1} [(S_{11} + S_{12} M S_{21}) F x(t) + (S_{13} + S_{12} M S_{23}) w(t)] - E^{-1} \left( \widehat{S}_{11} + S_{12} M \widehat{S}_{21} \right) F \hat{x}(t) \quad (5.26)$$

Comparando (5.6) con (5.26),

$$\widetilde{A}_p = E^{-1} \left( \widehat{S}_{11} + S_{12} M \widehat{S}_{21} \right) F \quad (5.27)$$

La ecuación (5.27) prueba ambos casos (5.18) y (5.20). Para obtener (5.19) y (5.21), tomando (2.22), (2.24), (5.22) y (5.25) reemplazando en la tercer línea de (5.16) tenemos:

$$y(t) = (S_{31} + S_{32} M S_{21}) F x(t) + (S_{33} + S_{32} M S_{23}) w(t) - \left( \widehat{S}_{31} + S_{32} M \widehat{S}_{21} \right) F \hat{x}(t) \quad (5.28)$$

comparando (5.6) con (5.28),

$$\widetilde{C}_p = \left( \widehat{S}_{31} + S_{32} M \widehat{S}_{21} \right) F \quad (5.29)$$



la ecuación (5.29) prueba ambos casos (5.19) y (5.21).  $\blacksquare$

Note que (5.26) y (5.28) muestran que  $\widetilde{A}_p$  de (5.27) y  $\widetilde{C}_p$  de (5.29) son las matrices que mapean el observador en el sistema.

### Lema 5.2

Considerar el esquema de control de la figura 5.4 y que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5. Sea la estructura del observador en lazo cerrado dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\widehat{x}}(t) \\ \widehat{D}_{in}(t) \\ \widehat{y}(t) \end{bmatrix} = \widehat{S}' \begin{bmatrix} \widehat{z}(t) \\ \widehat{D}_{out}(t) \\ w(t) \\ \dot{\widehat{x}}_d(t) \end{bmatrix} + S' \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ w(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

donde la estructura de unión del sistema reflejada al observador es:

$$S' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2(r+q) \times 4(n+r+p+m)} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Entonces, el modelo del observador en lazo cerrado es:

$$\widehat{A}_p = \widehat{E}^{-1} \left( \widehat{S}_{11}' + \widehat{S}_{12}' M' \widehat{S}_{21}' - S'_{21} M \widehat{S}_{21} \right) F \quad (5.32)$$

$$\widehat{B}_p = \widehat{E}^{-1} \left( \widehat{S}_{13}' + \widehat{S}_{12}' M' \widehat{S}_{231}' - S'_{21} M \widehat{S}_{23} \right) \quad (5.33)$$

$$\overline{A}_p = \widehat{E}^{-1} \left( S'_{11} + S'_{12} M S_{21} \right) F \quad (5.34)$$

$$\widehat{C}_p = \left( \widehat{S}_{31}' + \widehat{S}_{32}' M' \widehat{S}_{21}' \right) F \quad (5.35)$$

$$\widehat{D}_p = \widehat{S}_{33}' + \widehat{S}_{32}' M' \widehat{S}_{21}' \quad (5.36)$$

donde:

$$\widehat{E} = I + \widehat{S}_{14}' F_d^{-1} \left( \widehat{S}_{14}' \right)^T F \quad (5.37)$$

$$M' = L \left( I - \widehat{S}_{22}' L \right)^{-1} \quad (5.38)$$

**Prueba.** Sustituyendo (2.22), (2.23) y (2.26) en la primer línea de (5.30) da

$$\dot{\widehat{x}}(t) = \widehat{E}^{-1} \left[ \widehat{S}_{11}' \widehat{z}(t) + \widehat{S}_{12}' \widehat{D}_{out}(t) + S'_{11} z(t) + S'_{12} D_{out}(t) + \left( \widehat{S}_{13}' w(t) + S'_{13} \right) w(t) \right] \quad (5.39)$$

tomando el estimado de (2.24) en (5.30), tenemos:

$$\widehat{D}_{in}(t) = \left( I - \widehat{S}_{22}' L \right)^{-1} \left( \widehat{S}_{21}' F \widehat{x}(t) + \widehat{S}_{23}' w(t) \right) \quad (5.40)$$

sustituyendo el estimado de (2.22), (2.24), (5.24) y (5.40) en (5.39),

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}}(t) &= \widehat{E}^{-1} \left( \widehat{S}_{11}' + \widehat{S}_{12}' M' \widehat{S}_{21}' - S'_{12} M \widehat{S}_{21} \right) F \widehat{x}(t) + \\ &\quad \widehat{E}^{-1} \left( \widehat{S}_{13}' + \widehat{S}_{12}' M' \widehat{S}_{231}' + S'_{12} M S_{23} \right) w(t) + \widehat{E}^{-1} \left( S'_{11} + S'_{12} M' S_{21} \right) F x(t) \end{aligned} \quad (5.41)$$

comparando (5.9) y (5.41) tenemos (5.32), (5.33) y (5.34).

Para obtener (5.35) y (5.36), sustituyendo (2.22), (2.24) y (5.40) en la tercer línea de (5.30), obtenemos:

$$\widehat{y}(t) = \left( \widehat{S}_{31}' + \widehat{S}_{32}' M' \widehat{S}_{21}' \right) F \widehat{x}(t) + \left( \widehat{S}_{33}' + \widehat{S}_{32}' M' \widehat{S}_{23}' \right) w(t) \quad (5.42)$$

comparando (5.11) y (5.42) tenemos (5.35) y (5.36). ■

Notar que las matrices  $\widehat{B}_p$  y  $\widehat{D}_p$  pueden calcularse directamente de (5.12), si se conoce  $B_p$  y  $D_p$ .

A continuación, se presentan expresiones para las ganancias del controlador y del observador.

### Teorema 5.1

Sea un sistema LIT MEMS que satisface H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5 y el esquema de la figura 5.4.

1) Si el campo de disipación ( $R$ ) está localizado antes que el campo de almacenamiento ( $L, C$ ), es decir, si  $\widehat{S}_{21} = 0$ ,  $\widehat{S}_{11} \neq 0$  y/o  $\widehat{S}_{31} \neq 0$ , entonces, la ganancia gráfica directa para el controlador en el Bond Graph es:

$$\widehat{S}_{11} = EB_p K F^{-1} \quad (5.43)$$

2) En caso contrario, si  $\widehat{S}_{11} = \widehat{S}_{31} = 0$  y  $\widehat{S}_{21} \neq 0$ , entonces, la ganancia gráfica directa para el controlador  $\widehat{S}_{21}$  es obtenida igualando los elementos de:

$$S_{12} M \widehat{S}_{21} = EB_p K F^{-1} \quad (5.44)$$

siendo  $E = I + S_{14} F_d^{-1} S_{14}^T$ .

Más aún, la ganancia gráfica directa para el observador  $\widehat{S}_{11}$  y/o  $\widehat{S}_{31}$  es:

$$\widehat{E}^{-1} (S'_{11} + S'_{12} M S_{21}) F = H C \quad (5.45)$$

siendo  $\widehat{E} = I + \widehat{S}'_{14} F_d^{-1} (\widehat{S}_{14}')^T F$  y  $M = L(I - S_{22} L)^{-1}$ .

**Prueba.** Las ganancias del control y del observador  $K$  y  $H$  respectivamente puede ser determinadas utilizando el Principio de Separación [47]. La ecuación característica del controlador está dada por:

$$\det(sI - A_p - B_p K) = 0 \quad (5.46)$$

Para el primer caso, de (5.7), (5.18) del Lema 5.1 y (5.46) obtenemos

$$\det(sI - A_p - E^{-1} \widehat{S}_{11} F) = 0 \quad (5.47)$$

comparando (5.46) y (5.47) se prueba (5.43). Para el segundo caso, de (5.7), (5.20) del Lema 5.1 y de la ec. (5.46), tenemos

$$\det \left( sI - A_p - E^{-1} S_{12} M \widehat{S}_{21} F \right) = 0 \quad (5.48)$$

Comparando (5.46) y (5.48) se prueba (5.44). Por otro lado la ecuación característica del observador está dado por:

$$\det (sI - A_p + HC) = 0 \quad (5.49)$$

de (5.11), (5.37) del Lema 5.2 y (5.49)

$$\det \left[ sI - A_p + \widehat{E}^{-1} (S'_{11} + S'_{12} M S_{21}) F \right] = 0 \quad (5.50)$$

comparando (5.49) y (5.50) se prueba (5.45). ■

A continuación, se presentan dos procedimientos para encontrar en un enfoque gráfico el observador y la retroalimentación de estados estimados, a partir del modelo en Bond Graph del sistema físico en lazo abierto.

### Procedimiento 5.1

A través de este procedimiento se encuentra el observador de estados, considerando que se tiene el Bond graph del sistema en lazo abierto.

1. Se obtiene el observador de estados en Bond Graph, que es una copia del sistema en lazo abierto en Bond Graph.
2. Identificar la(s) salida(s) del sistema y del observador:
  - Si la salida es de esfuerzo, agregar un bond activo de esta salida a un detector de esfuerzo, que se conecta a una fuente modulada de esfuerzo mediante otro bond activo.
  - Si la salida es de flujo, agregar un bond activo de esta salida a un detector de flujo, que se conecta a una fuente modulada de flujo mediante otro bond activo.
3. La salida del observador debe ser negativa, así, la salida de la fuente del paso 2, llega a una unión-1 para una fuente de flujo y 0 para el caso contrario y después se conecta un bond que entra también a esa unión.
4. La fuente modulada de la salida del sistema del paso 2 y el bond adicional de la salida del observador del paso 3 se unen a través de bonds en una unión-0 para fuentes de flujo y en una unión-1 para fuentes de esfuerzo.

5. El número de bonds de salida de la unión del paso 4 es igual al número de variables de estado, las cuales son los elementos que almacenan energía en causalidad integral.
6. Conectar un transformador y/o girador entre el bond de salida del paso 5 y la variable de estado respectiva del observador.
7. Se utiliza un transformador para el paso 7 si la salida del sistema y observador es del mismo tipo (esfuerzo o flujo) a la de la variable de estado, y en caso contrario se utiliza un girador.
8. Asignar la causalidad a cada uno de los bonds, de acuerdo al Procedimiento de la sección 2.4.5, capítulo 2, debiéndose lograr una causalidad correcta en las uniones y no cambiando la causalidad en el resto de los elementos que ya tienen asignada una causalidad.
9. La ganancia gráfica directa del observador está dada por el o los módulos del transformador y/o girador y son calculadas por el Teorema 5.1.

A continuación, se presenta el Procedimiento 5.2 para la obtención de la retroalimentación de estado estimado en un enfoque gráfico.

### Procedimiento 5.2

Este procedimiento da la retroalimentación de estado estimado en el dominio físico, dado el modelo del sistema físico en lazo abierto y de su observador en lazo abierto por el Procedimiento 5.1.

1. Si la entrada al sistema y observador está determinada por la señal de salida de un sistema previo, la conexión de ambos sistemas se debe realizar de acuerdo a la figura 5.5, en caso contrario, se tiene únicamente el bloque de línea punteada de la figura 5.5.

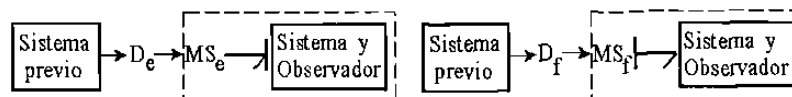


Figura 5.5 Conexión de la entrada al sistema y observador.

2. La fuente de entrada al sistema físico y al observador es uno de los dos esquemas de la figura 5.6, dependiendo del tipo de fuente de entrada a través de la cual se realiza la retroalimentación.

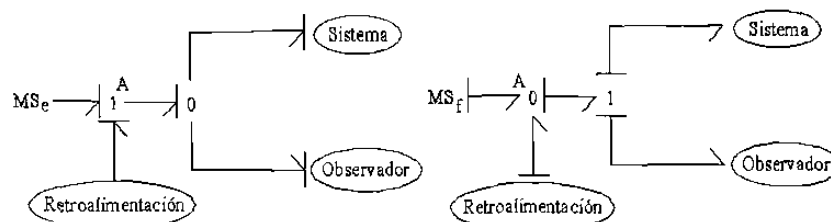


Figura 5.6 Esquemas de retroalimentación de estado estimado.

3. La retroalimentación se realiza con transformadore(s) y/o giradore(s), en lo(s) cual(es) su(s) módulo(s) es(son) la(s) ganancia(s) gráfica(s) directa(s) calculada(s) por el Teorema 5.1.
4. Las entradas de los transformadores y/o giradores del paso 2, están conectadas con un bond a la unión A de la figura 5.6 y cada salida a una fuente modulada de flujo para una variable de estado,  $q$  de un elemento de almacenamiento  $I$ , o de esfuerzo para una variable de estado,  $p$  de un elemento  $C$ .
5. La fuente del paso 4 se modula utilizando un bond activo que conecta al detector, la fuente y el detector debe ser del mismo tipo y este detector se conecta al elemento de almacenamiento de energía en causalidad integral del observador de estados.

En la siguiente sección, se aplican los resultados obtenidos en las secciones previas a dos ejemplos, mostrando que el observador y controlador se diseñan directamente en el dominio físico.

## 5.4 Ejemplos

A continuación se aplican los Lemas y Teoremas presentados, en dos ejemplos, así como la obtención del observador de estados y de la retroalimentación de estados estimados para cada uno de ellos.

### 5.4.1 Sistema Electromecánico

Considerar el esquema de motor de CD y su Bond Graph de la figura 5.7.

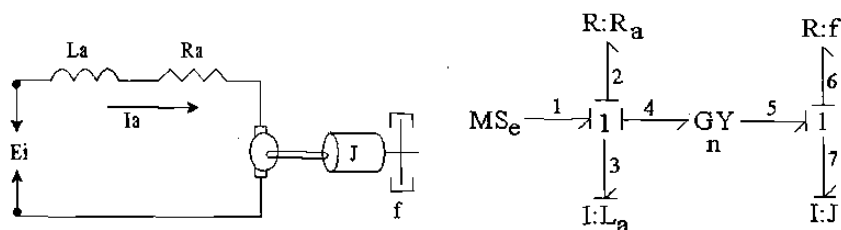


Figura 5.7 Esquema de un motor de CD y su Bond Graph.

Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix};$$

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \end{bmatrix}; y(t) = f_6(t)$$

$$u(t) = e_1(t)$$

donde  $e_2(t)$  y  $e_3(t)$  denotan voltajes;  $f_2(t)$  y  $f_3(t)$  corrientes en  $R_a$  y  $L_a$ , respectivamente;  $e_6(t)$  y  $e_7(t)$  torques;  $f_6(t)$  y  $f_7(t)$  velocidades en  $f$  y  $J$ , respectivamente;  $p_3(t)$  enlace de flujo en  $L_a$ ; y  $p_7(t)$  momento rotacional en  $J$ .

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_a}, \frac{1}{J} \right\} \quad (5.51)$$

$$L = \text{diag} \{ R_a, f \} \quad (5.52)$$

$$F_d = 0 \quad (5.53)$$

La relación entrada-salida para el girador es:

$$\begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Aplicando la propiedad A.3 del Apéndice A, sección A.4, del Bond Graph de la figura 5.7 las trayectorias causales:

- Para que los estados sean estructuralmente controlables son:

$$I : L_a \rightarrow \{1 - 3\}$$

$$I : J \rightarrow \{1 - 3 - 3 - 4 - 5 - 7\}$$

- Para que los estados sean estructuralmente observables son:

$$I : L_a \rightarrow \{6 - 7 - 7 - 5 - 4 - 3\}$$

$$I : J \rightarrow \{6 - 7\}$$

El Bond Graph en causalidad derivativa para el motor de CD se muestra en la figura 5.8.

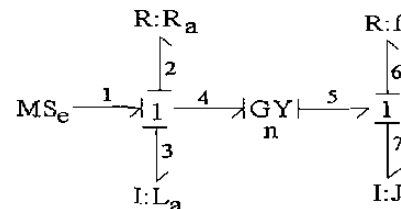


Figura 5.8 Bond Graph en causalidad derivativa de un motor de CD.

Como los elementos  $I:L_a$  e  $I:J$  admiten una causalidad derivativa y el Bond Graph de la figura 5.8 es causalmente correcto. Se concluye, que los estados  $I:L_a$  e  $I:J$  son estructuralmente controlables y observables.

Aplicando los Procedimientos 5.1 y 5.2 obtenemos el observador y la retroalimentación de estado estimado mostrados en la figura 5.9 para el motor C.D.

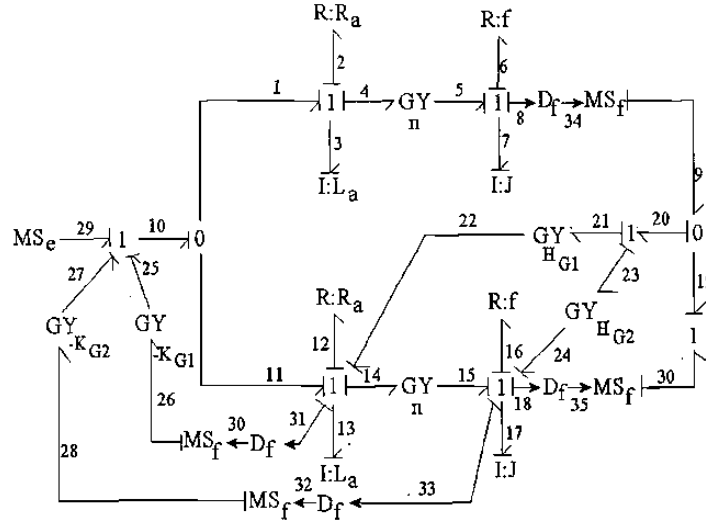


Figura 5.9 Observador y retroalimentación de estados para el motor de CD.

En la figura 5.9,  $H_{G1}$  y  $H_{G2}$  son las ganancias gráficas para el observador y  $K_{G1}$  y  $K_{G2}$  son las ganancias gráficas para el controlador.

La estructura de unión para el sistema está dada por (5.16), donde:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \widehat{S}_{11} = \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \quad \quad \quad S_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 S_{12} &= -I_{2 \times 2}; \quad S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = \widehat{S}_{21} = \widehat{S}_{31} = 0
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

La estructura de unión propuesta para el observador está dada por (5.30), donde:

$$\begin{aligned}
 \widehat{S}_{11}' &= \begin{bmatrix} -K_{G1} & -K_{G2} - H_{G1} - n \\ n & -H_{G2} \end{bmatrix}; \quad S_{11}' = \begin{bmatrix} 0 & H_{G1} \\ 0 & H_{G2} \end{bmatrix} \\
 \widehat{S}_{12}' &= -I_{2 \times 2}; \quad \widehat{S}_{31}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \widehat{S}_{22}' = \widehat{S}_{23}' = \widehat{S}_{32}' = \widehat{S}_{33}' = S_{12}' = 0
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

De (5.53)  $E = \widehat{E} = I_{2 \times 2}$ .

Utilizando el primer caso del Lema 5.1, (5.18), (5.51) y (5.55)

$$\widetilde{A}_p = \begin{bmatrix} \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{K_{G2}}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

también, dado que  $\widehat{S}_{31} = 0$  a partir de (5.19) tenemos:

$$\widetilde{C}_p = 0 \quad (5.58)$$

Sustituyendo (5.51), (5.52) y (5.54) en (2.29) hasta (2.32), obtenemos la siguiente realización del sistema físico en lazo cerrado:

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix}; \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}; \quad D_p = 0 \quad (5.60)$$

De (5.57) a (5.60), se obtiene el sistema completo en lazo cerrado,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_{29}(t) - \begin{bmatrix} \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{K_{G2}}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_3(t) \\ \widehat{p}_7(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.61)$$

De (5.51), (5.59) y (5.43) la ganancia gráfica directa es:

$$\widehat{S}_{11} = \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 L_a & K_2 J \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Utilizando el Lema 5.2, de (5.32), (5.51) y (5.56), obtenemos:

$$\widehat{A}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} - \frac{K_{G1}}{L_a} & -\frac{n}{J} - \frac{K_{G2}}{J} - \frac{H_{G1}}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} - \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

De (5.34), (5.55) y (5.56) tenemos:

$$\overline{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$



Tomando (5.60) y (5.63) en (5.12) da

$$\widehat{C}_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

de (5.9), (5.63), (5.64) y (5.65) obtenemos el modelo del observador

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{e}_3(t) \\ \widehat{e}_7(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} - \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{-n}{J} - \frac{K_{G2}}{J} - \frac{H_{G1}}{J} \\ \frac{n}{L_a} & \frac{-f}{J} - \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_3(t) \\ \widehat{p}_7(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_{29}(t) \\ \widehat{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_3(t) \\ \widehat{p}_7(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.66)$$

De las ecs. (5.45), (5.52), (5.56) y (5.60) la ganancia gráfica directa para el observador es:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_1}{J} \\ 0 & \frac{H_2}{J} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Notar que utilizando la metodología propuesta en los Lemas 5.1 y 5.2 obtenemos el modelo en lazo cerrado directamente a partir del Bond Graph de lazo abierto incluyendo control y observador.

Las siguientes simulaciones fueron hechas en SIMNON. Los parámetros del modelo son  $L_a = 0.1$ ,  $f = 0.1$ ,  $R_a = 0.5$ ,  $J = 1.5$ ,  $n = 3$  y  $e_1 = 10$ . Las ganancias del control para tener un coeficiente de amortiguamiento de 0.5 son  $K_1 = 5.94$  y  $K_2 = 2$ .

Sustituyendo los valores numéricos en (5.62), la ganancia gráfica directa para el controlador es:

$$\widehat{S}_{11} = \begin{bmatrix} 0.594 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Los polos de lazo cerrado debido al observador son colocados en  $p_{1,2} = -9.1683 \pm j5.2549$ , de (5.53) tenemos  $H_1 = 13.33$  y  $H_2 = 13.33$ . Sustituyendo los valores numéricos en (5.67), la ganancia gráfica directa para el observador es:

$$S'_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 13.33 \\ 0 & 13.33 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Las figuras 5.10 y 5.11 muestran la simulación para este ejemplo.

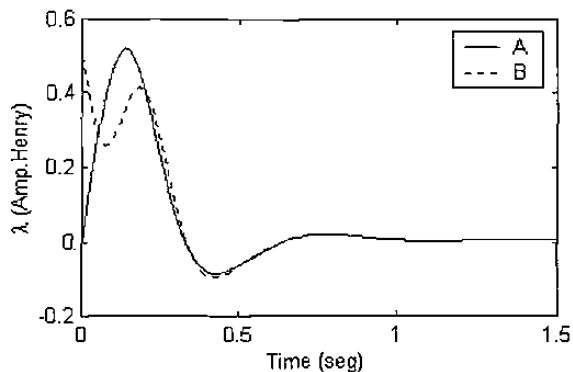


Figura 5.10 Gráfica del comportamiento de los enlaces de flujo donde: A) Estado del sistema; B) Estado estimado.

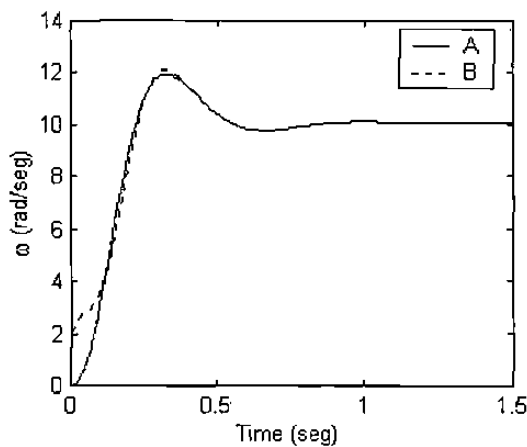


Figura 5.11 Gráfica del comportamiento de la salida, donde A) Estado del sistema; B) Estado estimado.

Podemos observar en ambas figuras 5.10 y 5.11 que se satisfacen las condiciones previas de diseño para el controlador y observador.

En el siguiente ejemplo, se considera un sistema hidráulico en el cual, su Bond Graph en lazo abierto presenta un elemento almacenador de energía en causalidad derivativa, así mismo, su estructura en lazo cerrado requiere la utilización del segundo caso del Lema 5.1 y Teorema 5.1.

#### 5.4.2 Sistema Hidráulico

El siguiente sistema hidráulico es mostrado en la figura 5.12, el cual considera el segundo caso de los Lemas.

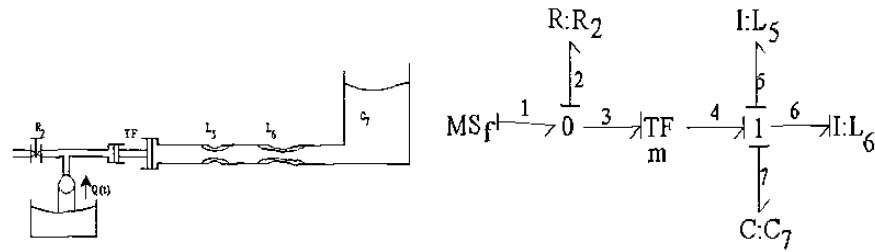


Figura 5.12 Sistema hidráulico y su Bond Graph.

Los vectores clave son

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_6(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_6(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_6(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix}$$

$$D_{out}(t) = e_2(t); \quad y(t) = e_1(t); \quad x_d(t) = p_5(t)$$

$$D_{in}(t) = f_2(t); \quad u(t) = f_1(t); \quad \dot{x}_d(t) = e_5(t)$$

$$z_d(t) = f_5(t)$$

donde  $e_k(t)$ ,  $f_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 7$  son presiones y flujos respectivamente;  $e_{a5}(t)$  y  $e_{a6}(t)$  son momentos de presiones en  $L_5$  y  $L_6$  respectivamente y  $f_{a7}(t)$  es el flujo de volumen en  $C_7$ .

Las relaciones constitutivas de los elementos son

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_6}, \frac{1}{C_7} \right\} \quad (5.70)$$

$$L = R_2 \quad (5.71)$$

$$F_d = \frac{1}{L_5} \quad (5.72)$$

La relación entrada-salida del girador es

$$\begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Aplicando la propiedad A.3 del Apéndice A, sección A.4, del Bond Graph de la figura 5.12 las trayectorias causales:

- Para que los estados sean estructuralmente controlables son:

$$I : L_a \rightarrow \{1 - 2 - 2 - 3 - 4 - 6\}$$

$$I : J \rightarrow \{1 - 2 - 3 - 4 - 6 - 6 - 7\}$$

- Para que los estados sean estructuralmente observables son:

$$I : L_a \rightarrow \{1 - 2 - 2 - 3 - 4 - 6\}$$

$$I : J \rightarrow \{1 - 2 - 2 - 3 - 4 - 6 - 6 - 7\}$$

El Bond Graph en causalidad derivativa del Bond Graph de la figura 5.12 se muestra en la figura 5.13.

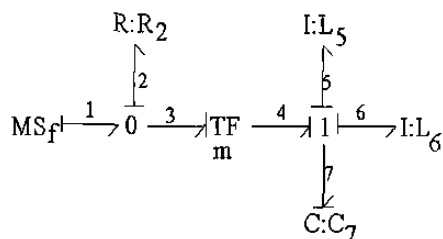


Figura 5.13 Bond Graph en causalidad derivativa de la figura 5.11.

Como los elementos  $I:L_6$  e  $C:C_7$  admiten una causalidad derivativa y el Bond Graph de la figura 5.13 es causalmente correcto. Se concluye, que los estados  $I:L_6$  e  $C:C_7$  son estructuralmente controlables y observables.

Aplicando los Procedimientos 5.1 y 5.2 al Bond Graph del sistema de la figura 5.12 se obtiene el Bond Graph con retroalimentación de estado estimado de la figura 5.14.

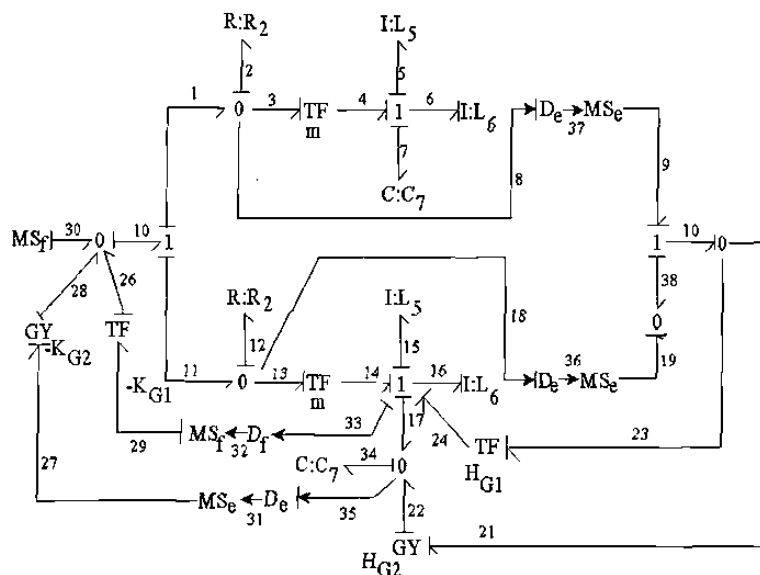


Figura 5.14 Observador y retroalimentación de estado para el sistema hidráulico.

La estructura de unión para el sistema está dado por (5.19), donde

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; & S_{21} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} & 0 \\ K_{G1} & K_{G2} \end{bmatrix}; & S_{14} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 S_{13} &= S_{22} = S_{31} = S_{33} = \widehat{S}_{11} = \widehat{S}_{31} = 0; & S_{23} &= S_{32} = 1
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

La estructura de unión para el observador está dada por (5.30), donde

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{11}' &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \widehat{S}_{12}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & -H_{G1} \\ & -H_{G2} \end{bmatrix}; \widehat{S}_{14}' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; S'_{21} \approx \begin{bmatrix} H_{G1} \\ H_{G2} \end{bmatrix} \\ \widehat{S}_{21}' &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} - K_{G1} & -K_{G2} \end{bmatrix}; \widehat{S}_{13}' = \widehat{S}_{22}' = \widehat{S}_{31}' = \widehat{S}_{33}' = S'_{11} \approx 0; \widehat{S}_{23}' = \widehat{S}_{32}' = 1 \end{aligned} \quad (5.75)$$

De (2.33) tenemos

$$E = \widehat{E} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

donde

$$\Delta \triangleq \frac{L_5 + L_6}{L_6}$$

Utilizando el segundo caso del Lema 5.1, de (5.68) a (5.76) y (5.20),  $\widetilde{A}$  está dada por

$$\widetilde{A}_p = \begin{bmatrix} \frac{R_2 K_{G1}}{m \Delta L_6} & \frac{R_2 K_{G2}}{m \Delta C_7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.77)$$

sabemos que  $\widehat{S}_{31} = 0$ , así, a partir de (5.21) tenemos

$$\widetilde{C}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 K_{G1}}{L_6} & \frac{R_2 K_{G2}}{C_7} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Sustituyendo (5.70) a (5.76) en (2.29) a (2.32) obtenemos

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m^2 \Delta L_6} & -\frac{1}{\Delta C_7} \\ \frac{1}{L_6} & 0 \end{bmatrix}; B_p = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{m \Delta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m L_6} & 0 \end{bmatrix}; D_p = R_2 \quad (5.80)$$

Tomando (5.77) a (5.80) en (5.6), obtenemos el sistema físico de control por retroalimentación de estado estimado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_6(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m^2 \Delta L_6} & -\frac{1}{\Delta C_7} \\ \frac{1}{L_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_6(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{m \Delta} \\ 0 \end{bmatrix} f_{30}(t) \\ &\quad - \begin{bmatrix} \frac{R_2 K_{G1}}{m \Delta L_6} & \frac{R_2 K_{G2}}{m \Delta C_7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_6(t) \\ \widehat{q}_7(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m L_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_6(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} + R_2 f_{30}(t) - \begin{bmatrix} \frac{R_2 K_{G1}}{L_6} & \frac{R_2 K_{G2}}{C_7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_6(t) \\ \widehat{q}_7(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.81)$$

De (5.44), (5.70), (5.71), (5.74), (5.76) y (5.79) la ganancia gráfica directa para el controlador es:

$$\begin{bmatrix} \frac{K_{G1}R_2}{m} & \frac{K_{G2}R_2}{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_1R_2L_6}{m} & \frac{K_2R_2C_7}{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Utilizando el segundo caso del Lema 5.2, desde (5.70) hasta (5.76) y (5.32) da

$$\widehat{A}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m^2\Delta L_6} - \frac{R_2K_{G1}}{m\Delta L_6} + \frac{R_2H_{G1}}{mL_6} & -\frac{1}{\Delta C_7} - \frac{R_2K_{G2}}{m\Delta C_7} \\ \frac{1}{L_6} + \frac{R_2H_{G2}}{mL_6} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

A partir de (5.34), desde (5.70) hasta (5.73) y (5.75) tenemos

$$\overline{A}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2H_{G1}}{mL_6} & 0 \\ \frac{R_2H_{G2}}{L_6} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

De la ec. (5.35), desde (5.70) hasta (5.73) y (5.75)

$$\widehat{C}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{mL_6} - \frac{R_2K_{G1}}{L_6} & -\frac{R_2K_{G2}}{C_7} \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

Sustituyendo (5.83), (5.84) y (5.85) en (5.9), obtenemos el modelo del observador

$$\begin{bmatrix} \widehat{e}_6(t) \\ \widehat{f}_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{m\Delta L_6} - \frac{R_2K_{G1}}{m\Delta L_6} - \frac{R_2H_{G1}}{mL_6} & -\frac{1}{\Delta C_7} - \frac{R_2K_{G2}}{m\Delta C_7} \\ \frac{1}{L_6} + \frac{R_2H_{G2}}{mL_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_6(t) \\ \widehat{q}_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2H_{G1}}{mL_6} & 0 \\ \frac{R_2H_{G2}}{mL_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_6(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{m\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} f_{30}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{mL_6} - \frac{R_2K_1}{L_6} & -\frac{R_2K_2}{C_7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_6(t) \\ \widehat{q}_7(t) \end{bmatrix} + R_2 f_{30}(t)$$

De (5.45), (5.70), (5.74), (5.75), (5.76) y (5.80), la ganancia gráfica directa para el observador es

$$H_{G1} = \Delta H_1 \quad (5.87)$$

$$H_{G2} = H_2$$

Los parámetros del modelo son  $R_2 = 5$ ,  $C_7 = 0.5$ ,  $L_6 = 0.1$ ,  $L_6 = 0.01$ ,  $m = 2$  y  $f_1 = 10$ . Para tener un coeficiente de amortiguamiento de 0.5,  $K_1 = 1.89$  y  $K_2 = 10$ , la ganancia gráfica para el controlador se obtiene de (5.82),

$$\widehat{S}_{21} = \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.189 & 5 \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

Los polos de lazo cerrado debido al observador son colocados en  $p_{1,2} = -4.4318 \pm j1.7565$  de (5.52) tenemos  $H_1 = 0.1$  y  $H_2 = 0.1$ . Sustituyendo los valores numéricos en (5.87), la ganancia grafica directa para el observador es:

$$S'_{12} = \begin{bmatrix} 0.011 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

Note que, podemos obtener el modelo de lazo cerrado, sin calcular las matrices  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  y  $D_p$  de lazo abierto. Las figuras 5.15 y 5.16 muestran los resultados de la simulación numérica para este ejemplo.

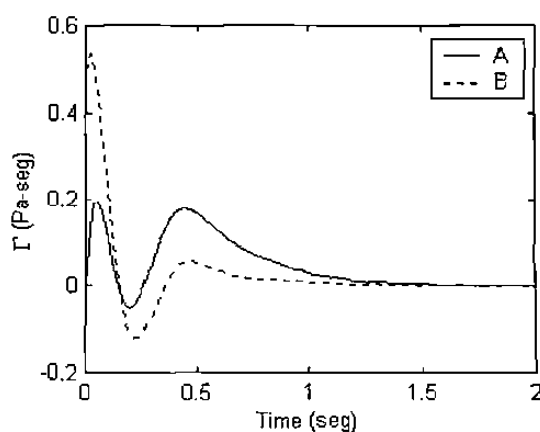


Figura 5.15 Gráfica del comportamiento de la presión, donde: A) Estado del sistema; B) Estado estimado.

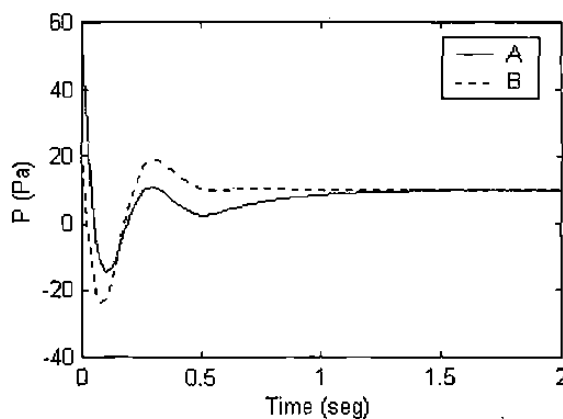


Figura 5.16 Gráfica del comportamiento de la salida, donde: A) Salida del sistema; B) Salida estimada.

Podemos observar que en ambas figuras 5.15 y 5.16 las condiciones de diseño dadas anteriormente para el controlador y el observador son satisfechas.

Continuando con el estudio de las propiedades de un sistema físico, se observa que no sólo es útil conocer el comportamiento dinámico sino también su caracterización de estado estacionario.

Así, se presenta en el siguiente capítulo los valores de estado estacionario para un sistema físico en un enfoque de Bond Graph y la determinación gráfica directa del error de estado estacionario utilizando retroalimentación de la salida y un control proporcional.

## 5.5 Conclusiones

Se presentó una retroalimentación de estado estimado para sistemas LIT MEMS.

Se propuso una metodología para obtener el sistema completo en lazo cerrado incluyendo observador y retroalimentación, directamente a partir del Bond Graph en lazo abierto y de las estructuras propuestas.

La metodología permite considerar diferentes tipos de energía.

El controlador encontrado es realizable debido al hecho de que se utiliza el dominio físico. También, se resolvió el problema de la asignación de dinámica garantizando estabilidad y asegurando regulación.



## Capítulo 6

# Valores de Estado Estacionario para un Sistema Físico LTI MIMO utilizando Bond Graph

### 6.1 Introducción

Cualquier sistema de control lineal físico sufre inherentemente un *error estacionario* en respuesta a ciertos tipos de entradas [50]. Un sistema puede no tener error estacionario a una entrada escalón, pero el mismo sistema puede presentar error estacionario no nulo a una entrada rampa (el único modo en que se puede eliminar éste error es modificando la estructura del sistema) [51]. Si un sistema dado ha de presentar o no error estacionario ante determinado tipo de entrada, depende del tipo de función del sistema [51].

Garantizando *estabilidad absoluta*, comportamientos importantes del sistema a los cuales hay que dar cuidadosa consideración es la *estabilidad relativa* y el error estacionario [4].

Dado que un sistema físico de control involucra almacenamiento de energía, la salida del sistema relacionada con una entrada, no puede seguir a ésta inmediatamente sino que presenta una respuesta transitoria antes de poder alcanzar un estado estacionario [51]. La respuesta transitoria de un sistema de control frecuentemente presenta oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar un estado de equilibrio [47]. Si la salida de un sistema en *estado estacionario* no coincide exactamente con la entrada de referencia, se dice que el sistema tiene un *error estacionario* [4]. Este error indica la exactitud del sistema. Al analizar un sistema de control, es importante examinar el comportamiento de la respuesta transitoria, tal como el tiempo requerido para

alcanzar un nuevo estado estacionario y el valor del error al seguir una señal de entrada, así como el comportamiento estacionario [33].

En este capítulo, se presenta un procedimiento gráfico sencillo y directo para obtener el valor de estado estacionario de un sistema físico representado en Bond Graph. Para conseguir este objetivo, se requiere calcular e invertir la matriz  $A_p$ , de una representación en espacio de estado, la cual es invertible para un sistema físico, si satisface las hipótesis H1, H2 y H3, del Capítulo 1, sección 1.5. Se muestra que utilizando la estructura de unión del Bond Graph en causalidad derivativa, no es necesario calcular e invertir la matriz  $A_p$ . Así mismo, la matriz inversa de  $A_p$  se puede obtener directamente a partir del *Bond Graph Recíproco* del sistema [6].

En la referencia [59] se tiene la determinación de un conjunto de equilibrio (estado estacionario), donde se propone reemplazar los elementos  $I$ 's por fuentes de esfuerzo nulo y los elementos  $C$ 's por fuentes de flujo nulo (lo cual es equivalente a colocarlos en causalidad derivativa).

En el Apéndice C, sección C.4, se da un artículo publicado con los resultados de Valor de Estado Estacionario, siendo la contribución la determinación simbólica del equilibrio (estado estacionario) a partir de la Estructura de Unión que se presentan en este capítulo [37]. Además, en la sección C.6 se da un artículo aceptado sobre error de estado estacionario para un sistema físico con un enfoque de Bond Graph que se propone en este mismo capítulo [39].

El capítulo, está formado por cuatro secciones principalmente: en la primera, se estudia el estado estacionario en variables de estado y en función de transferencia. Después, se propone un procedimiento para encontrar los valores de estado estacionario de las variables de estado y de la salida en un enfoque de Bond Graph y su aplicación a dos ejemplos. La tercera sección, presenta un Lema y un procedimiento para determinar en un Bond Graph la diferencia de la salida respecto a la entrada de referencia en estado estacionario aplicandolo a un ejemplo y finalmente, se propone un procedimiento en el dominio físico para calcular el error en estado estacionario de un sistema físico con retroalimentación de salida y con un control proporcional, con su respectivo ejemplo.

En la siguiente sección, se resume el estudio de estado estacionario en función de transferencia y en variables de estado.

## 6.2 Antecedentes de estado estacionario

El comportamiento de estado estacionario es una importante característica de un sistema cuando su respuesta transitorio dinámico ha terminado [4]. Actualmente, algunos equipos como, máquinas eléctricas en sistemas eléctricos de potencia requieren conocer los valores de

estado estacionario para calibración y ajuste de protecciones, etc.

A continuación, se estudia la determinación de los valores de estado estacionario del modelo, así como el error de estado estacionario para un sistema retroalimentado.

### 6.2.1 Estado Estacionario

La respuesta de estado estacionario es útil para conocer el valor que alcanza cada variable de estado de un sistema físico en una representación en espacio de estado cuando el periodo dinámico ha terminado. Aplicando el Teorema de Valor Final [51] podemos determinar el valor de estado de estacionario de la respuesta de un sistema. Así, el error en estado estacionario queda determinado,

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot e(s)] \quad (6.1)$$

Aplicando (6.1) a (2.28) tenemos:

$$x_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)] = -A_p^{-1} B_p u_{ss} \quad (6.2)$$

$$y_{ss} = (D_p - C_p A_p^{-1} B_p) u_{ss} \quad (6.3)$$

donde:

$$u_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot u(s)] \quad (6.4)$$

De esta manera, utilizando (6.2) y (6.3) podemos calcular el estado estacionario, pero necesitaríamos calcular  $A_p^{-1}$ , lo cual es laborioso para sistemas de alto orden.

Si el sistema está representado en función de transferencia, tenemos:

$$Y(s) = G(s) U(s) \quad (6.5)$$

Utilizando el Teorema de Valor Final, obtenemos el valor de estado estacionario de la salida dada por:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s) u(s)] \quad (6.6)$$

En la siguiente sección se estudia el error de estado estacionario de un sistema de lazo cerrado.

### 6.2.2 Sistema en Lazo Cerrado

En un sistema de control, la señal de error, la cual es la diferencia entre la señal de entrada y la señal retroalimentada. En esta sección, se introduce al controlador de modo que reduzca esta señal de error y lleve la salida del sistema a un valor deseado.

Considerando el esquema en lazo cerrado de la figura 6.1.

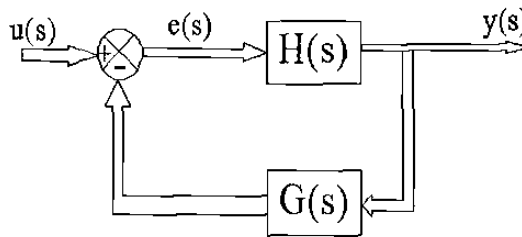


Figura 6.1 Sistema en lazo cerrado.

La relación entre la salida  $Y(s)$  y la entrada  $U(s)$  está dada por

$$Y(s) = H(s) [I + G(s) H(s)]^{-1} U(s) \quad (6.7)$$

la relación entre el error  $E(s)$  y la entrada es:

$$E(s) = [I + G(s) H(s)]^{-1} U(s) \quad (6.8)$$

El uso de (6.8) requiere el modelo del sistema  $G(s)$  y de la retroalimentación  $H(s)$ .

En la siguiente sección se presenta un enfoque gráfico para determinar el estado estacionario de un sistema físico, modelado en Bond Graph.

## 6.3 Estado Estacionario de las Variables de Estado y de la Salida del Sistema en Bond Graph

Se puede resolver directamente el problema de obtener  $A_p^{-1}$  de (6.2) utilizando el modelo en Bond Graph en causalidad derivativa del sistema físico.

Una vez que se tiene el modelo de un sistema físico en Bond Graph en causalidad integral, se cambia la causalidad de los elementos almacenadores de energía, a causalidad derivativa y se ajusta la causalidad de los elementos que disipan energía para que las uniones cumplan con las reglas de causalidad dadas en el capítulo 1, a éste procedimiento se le llama *asignación de causalidad derivativa predefinida* o simplemente *Bond Graph en causalidad derivativa* [29].

Suponer que  $A_p$  es invertible y se tiene un asignación de causalidad derivativa en el modelo de Bond Graph. A partir de (2.25) la estructura de unión está dada por [29, 30]:

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ D_{ind}(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{outd}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$D_{outd}(t) = L_d D_{ind}(t) \quad (6.10)$$

de las ecs. (2.28) a (2.34) (6.9) y (6.10) obtenemos:

$$z(t) = A_p^* \dot{x}(t) + B_p^* u(t) \quad (6.11)$$

$$y_d(t) = C_p^* \dot{x}(t) + D_p^* u(t) \quad (6.12)$$

donde:

$$A_p^* = J_{11} + J_{12} N J_{21} \quad (6.13)$$

$$B_p^* = J_{13} + J_{12} N J_{23} \quad (6.14)$$

$$C_p^* = J_{31} + J_{32} N J_{21} \quad (6.15)$$

$$D_p^* = J_{33} + J_{32} N J_{23} \quad (6.16)$$

Siendo,

$$N = (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \quad (6.17)$$

Las ecuaciones de estado de éste sistema en causalidad integral están dadas por (2.28). Entonces, de (2.22), (2.28) (6.11) y (6.12) tenemos:

$$A_p^* = F A_p^{-1} \quad (6.18)$$

$$B_p^* = -F A_p^{-1} B_p \quad (6.19)$$

$$C_p^* = C_p A_p^{-1} \quad (6.20)$$

$$D_p^* = D_p - C_p A_p^{-1} B_p \quad (6.21)$$

las expresiones previas nos indican la relación existente entre las variables de estado del sistema representado en Bond Graph en causalidad integral y en causalidad derivativa.

A partir de (6.2), (6.3), (6.19) y (6.21) obtenemos el estado estacionario dado por:

$$x_{ss} = F^{-1} B_p^* u_{ss} \quad (6.22)$$

$$y_{ss} = D_p^* u_{ss} \quad (6.23)$$

A continuación, se aplican estos resultados de estado estacionario en el dominio físico a dos ejemplos.

### 6.3.1 Ejemplo de un Sistema Mecánico

Considerar el sistema mecánico de la figura 3.5, cuyo Bond Graph en causalidad integral se muestra en la figura 3.6, así como los vectores clave y relaciones constitutivas se dan en la sección 3.6.1.

El Bond Graph en causalidad derivativa se muestra en la figura 6.2.

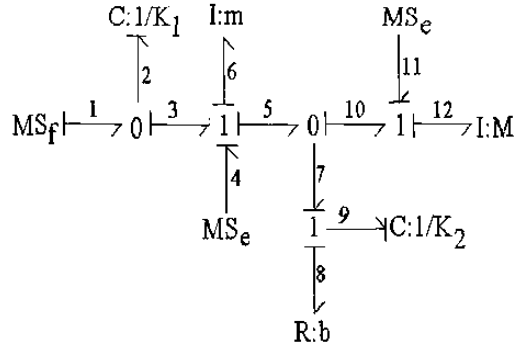


Figura 6.2 Bond graph en causalidad derivativa de la figura 3.5

A partir de (6.8) la Estructura de Unión para el Bond Graph de la figura 6.2 está dada por:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad J_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$J_{21} = -J_{12}^T; \quad J_{22} = J_{23} = J_{32} = J_{33} = 0$$

para este ejemplo  $D_{ind}(t) = D_{in}(t)$  y  $D_{outd}(t) = D_{out}(t)$  Así, de (6.19),  $B_p^*$  está dada por:

$$B_p^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Finalmente, los valores de estado estacionario de las variables de estado se obtienen de (6.22)

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_2} \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{ss} \quad (6.26)$$

Podemos observar que, éste es el procedimiento anterior es un procedimiento sencillo y directo y no es necesario calcular  $A_p$ ,  $A_p^{-1}$  y  $B_p$ .

A continuación, se encuentra el modelo dinámico del sistema del ejemplo anterior, con el objetivo de verificar en simulación el valor de estado estacionario de (6.26).

El modelo dinámico de este ejemplo se obtiene de (2.27), donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$S_{21} = -S_{12}^T; S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0$$

así, el modelo está dado por (2.28)

$$\begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_6(t) \\ f_9(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & \frac{-b}{m} & -k_2 & \frac{b}{m} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & \frac{M}{m} \\ 0 & \frac{m}{b} & k_2 & \frac{M}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2(t) \\ p_6(t) \\ q_9(t) \\ p_{12}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ e_4(t) \\ e_{11}(t) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Las siguientes simulaciones fueron hechas en SIMNON. Los parámetros del sistema son  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 10$ ,  $m = 3$ ,  $M = 6$  y  $b = 10$ . Las entradas de referencia son  $f_1 = 1$ ,  $e_4 = 1$  y  $e_{11} = 1$ . Las figuras 6.3 y 6.4, muestran la respuesta estacionaria de las variables de estado del sistema.

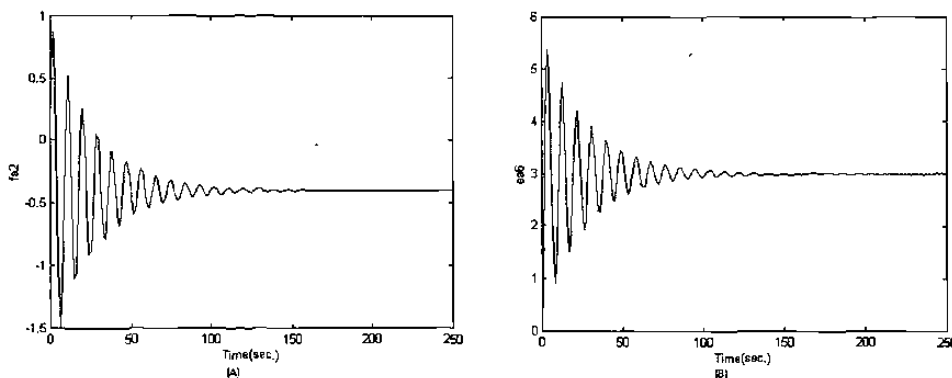


Figura 6.3 Variables de estado: (A)  $q_2(t)$ ; (B)  $p_6(t)$ .

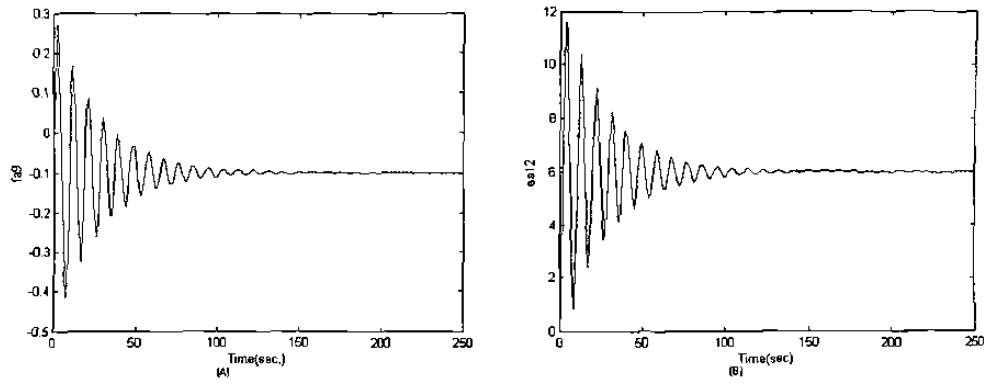


Figura 6.4 Variables de estado: (A)  $q_9(t)$ ; (B)  $p_{12}(t)$ .

Como se esperaba, los valores de estado estacionario son:  $(q_2)_{ss} = -0.4$ ,  $(p_6)_{ss} = 3$ ,  $(q_9)_{ss} = -0.1$  y  $(p_{12})_{ss} = 6$ .

Notar que este procedimiento para obtener el estado estacionario de las variables de estado es una herramienta sencilla para análisis.

### 6.3.2 Ejemplo de un Sistema Eléctrico

Considere el sistema eléctrico de la figura 6.5.

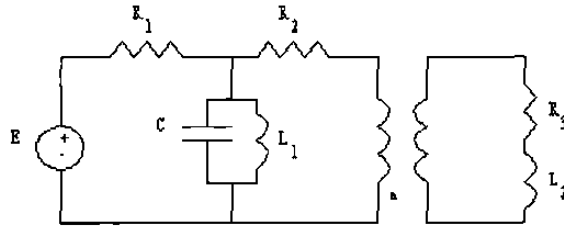


Figura 6.5 Ejemplo de un sistema eléctrico.

El Bond Graph en causalidad integral se muestra en la figura 6.6.

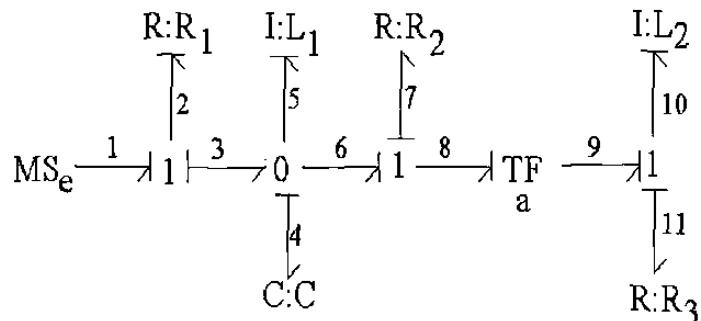


Figura 6.6 Bond Graph en causalidad integral.



Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_4(t) \\ p_5(t) \\ p_{10}(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ e_5(t) \\ e_{10}(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \end{bmatrix};$$

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_7(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_7(t) \\ e_{11}(t) \end{bmatrix}; \begin{matrix} u(t) = e_1(t) \\ y(t) = f_{11}(t) \end{matrix}$$

donde  $e(t)$  es voltaje,  $f(t)$  es la corriente en cada elemento del sistema eléctrico;  $f_{a4}(t)$  es la carga del capacitor en  $C$ , y  $e_{a5}(t)$  y  $e_{a10}(t)$  son los enlaces de flujo en  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente.

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C}, \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2} \right\}$$

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, R_2, R_3 \right\}$$

$$\begin{bmatrix} e_8(t) \\ f_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_9(t) \\ f_9(t) \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

El Bond Graph en causalidad derivativa se muestra en la figura 6.7.

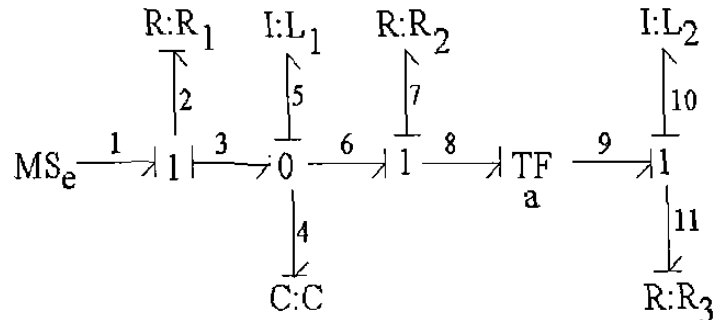


Figure 6.7 Bond Graph en causalidad derivativa.

Los vectores clave  $D_{ind}$  y  $D_{outd}$  en causalidad derivativa son:

$$D_{ind}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) & f_7(t) & e_{11}(t) \end{bmatrix}^T; D_{outd}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) & e_7(t) & f_{11}(t) \end{bmatrix}^T$$

de tal manera que,

$$L_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, R_2, \frac{1}{R_3} \right\} \quad (6.30)$$

La estructura de unión de la figura 6.6 es,

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 J_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{-1}{a} & 0 \end{bmatrix}; J_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; J_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
 J_{21} &= -J_{12}^T; J_{13} = 0; J_{33} = 1
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

El vector  $B_p^*$  está dado por:

$$B_p^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{6.32}$$

de (6.21), el valor de estado estacionario de la variable de estado es:

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_1}{R_1} & 0 \end{bmatrix}^T (e_1)_{ss} \tag{6.33}$$

A continuación, se encuentra el modelo dinámico del sistema del ejemplo anterior, con el objetivo de verificar en simulación el valor de estado estacionario de (6.33).

De (2.27) la estructura de unión en causalidad integral es utilizada para obtener el siguiente modelo dinámico:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{-1}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 S_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; S_{13} = S_{22} = S_{32} = S_{33} = 0
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

El modelo dinámico está dado por:

$$\begin{bmatrix} f_4(t) \\ e_5(t) \\ e_{10}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{a L_2} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a C} & 0 & \frac{-R_2}{a^2 L_2} - \frac{R_3}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4(t) \\ p_5(t) \\ p_{10}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_1(t) \tag{6.35}$$

Los parámetros del sistema son  $R_1 = 10$ ,  $R_2 = 5$ ,  $R_3 = 2$ ,  $L_1 = 0.1$ ,  $L_2 = 0.2$ ,  $C = 0.01$  y  $a = 10$ . El parámetro de control es  $e_1 = 1$ . Las figuras 6.8 y 6.9 muestran la respuesta de las variables de estado del sistema.

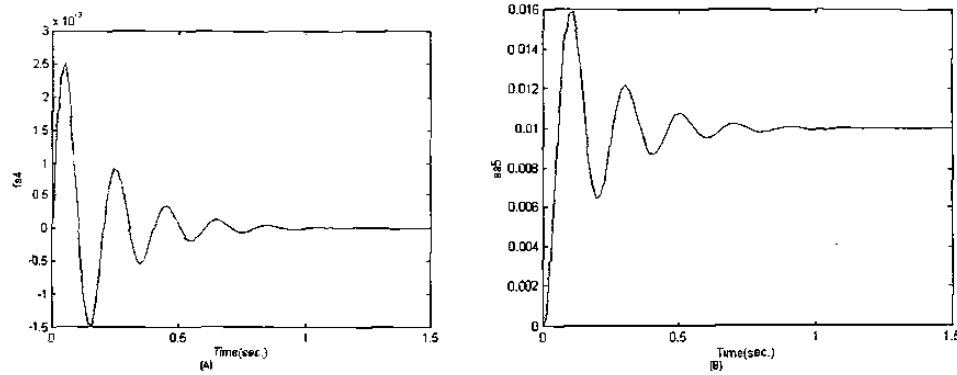


Figura 6.8 Variables de estado: (A)  $q_4(t)$ ; (B)  $p_5(t)$ .

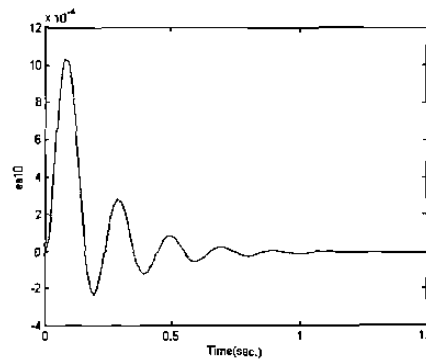


Figura 6.9 Variable de estado  $q_{10}(t)$ .

Como se esperaba, los valores de estado estacionario son:  $(q_4)_{ss} = 0$ ,  $(p_6)_{ss} = 0.01$  y  $(p_{10})_{ss} = 0$ .

El procedimiento gráfico de la sección anterior, se puede extender para la determinación del error de estado estacionario en un esquema control en lazo cerrado, lo cual se propone en la siguiente sección. En el Apéndice C, sección C.6, se da un artículo sometido con estos resultados.

## 6.4 Error en Estado Estacionario del Sistema Retroalimentado con un Control Proporcional en Bond Graph

La respuesta de estado estacionario es la parte de la respuesta total que permanece después que el transitorio ha terminado. La respuesta de estado estacionario puede variar en forma regular, tal como una onda senoidal o una función rampa que se incrementa con el tiempo. También, la respuesta en estado estacionario puede cambiar si la configuración del sistema se ha modificado, por ejemplo de lazo abierto a lazo cerrado. En la figura 6.10 se muestra un sistema en lazo cerrado utilizando un control proporcional.

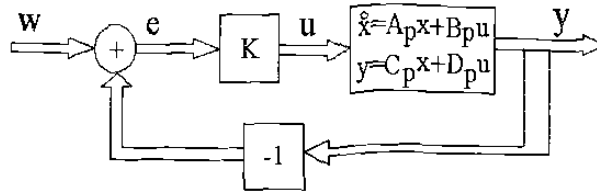


Figura 6.10 Sistema en lazo cerrado con un control proporcional.

De acuerdo a la figura 6.10 y utilizando (6.2) y (6.43) el error en estado estacionario en un sistema en lazo cerrado es:

$$e_{ss} = (I - D_{pc} + C_{pc}A_{pc}^{-1}B_{pc}) w_{ss} \quad (6.47)$$

donde  $A_{pc}$ ,  $B_{pc}$ ,  $C_{pc}$  y  $D_{pc}$  denotan las matrices  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  y  $D_p$  en lazo cerrado de la figura 6.10, siendo:

$$A_{pc} = A_p - B_p K (I + D_p K)^{-1} C_p \quad (6.48)$$

$$B_{pc} = B_p K \left[ I - (I + D_p K)^{-1} D_p K \right] \quad (6.49)$$

$$C_{pc} = (I + D_p K)^{-1} C_p \quad (6.50)$$

$$D_{pc} = (I + D_p K)^{-1} D_p K \quad (6.51)$$

Por otro lado, obteniendo la Estructura de Unión (6.9) del Bond Graph en causalidad derivativa que representa el sistema en lazo cerrado de la figura 6.10, tenemos:

$$\begin{bmatrix} z_c(t) \\ D_{indc}(t) \\ y_{dc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^c & J_{12}^c & J_{13}^c \\ J_{21}^c & J_{22}^c & J_{23}^c \\ J_{31}^c & J_{32}^c & J_{33}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ D_{outdc}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

$$D_{outdc}(t) = L_d D_{indc}(t) \quad (6.53)$$

Seleccionando como salida al error:

$$y_{dc}(t) = e(t) \quad (6.54)$$

De (6.12), (6.16), (6.17), (6.52), (6.53) y (6.54) tenemos:

$$e(t) = C_{pc}^* \dot{x}_c(t) + D_{pc}^* w(t) \quad (6.55)$$

donde:

$$C_{pc}^* = J_{31}^c + J_{32}^c N^c J_{21}^c \quad (6.56)$$

$$D_{pc}^* = J_{33}^c + J_{32}^c N^c J_{23}^c \quad (6.57)$$

siendo

$$N^c = (I - L_d J_{22}^c) L_d \quad (6.58)$$

Aplicando el Teorema del Valor Final [51], el error en estado estacionario es:

$$e_{ss} = D_{pc}^* w_{ss} \quad (6.59)$$

Se presenta a continuación un procedimiento para obtener el error de estado estacionario de la salida con un control proporcional conectado en cascada con la planta. Este procedimiento gráfico se muestra en un diagrama a bloques en la figura 6.11.

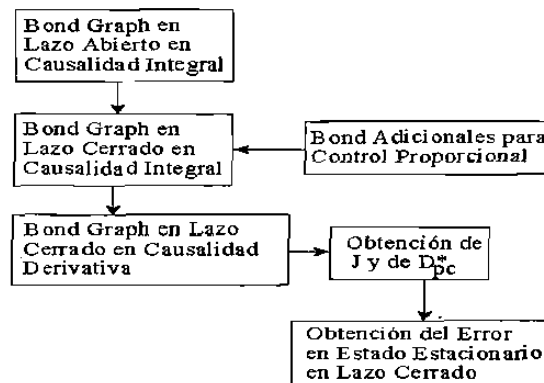


Figura 6.11 Procedimiento gráfico para la obtención del error en estado estacionario en un enfoque de Bond Graph.

A continuación se describe el procedimiento de la figura 6.11.

### Procedimiento 6.1

1. Obtener el Bond Graph en lazo abierto del sistema físico en causalidad integral.
2. Añadir la retroalimentación de salida, utilizando un bond activo que conecta la unión correspondiente a la salida y un detector de esfuerzo para una salida de esfuerzo, en caso contrario es un detector de flujo.
3. El detector de la salida del paso 2 modula a una fuente del mismo tipo de la entrada del sistema a través de un bond activo.
4. La fuente modulada se conecta a través de un bond a una unión-1, si es una fuente de flujo, en caso contrario a una unión-0.
5. Las variables de entrada del sistema y de la unión del paso 4 fuente modulada del paso 3 se unen en una unión-1 si son de esfuerzo o en una unión-0 si son de flujo. La dirección del bond correspondiente a la unión del paso 4 debe salir de esta nueva unión.

6. Del paso 5 se tiene un bond de salida de la unión que entra a un transformador,  $TF$ , su módulo es la ganancia de la retroalimentación de salida.
7. El bond de salida del  $TF$  llega a una unión-0 para variables de esfuerzo del paso 5, en caso contrario es una unión-1. A partir de esta unión, mediante un bond activo se conecta a un detector que es del mismo tipo a la entrada del sistema, este detector modula a la entrada del sistema a través de un bond activo.
8. Se aplican las reglas de causalidad dadas en la sección 2.4.5 a los bonds adicionales, no debiendo cambiar la causalidad del Bond Graph del paso 1, el Bond Graph completo debe ser causalmente correcto. Si existen conflictos de causalidad, esto se resuelve cambiando el transformador,  $TF$ , por un girador,  $GY$ , en el paso 6.
9. Obtener el Bond Graph en causalidad derivativa en lazo cerrado del sistema.
10. Encontrar la Estructura de Unión (6.52) para el Bond Graph del paso 9.
11. El error en estado estacionario del sistema en lazo cerrado está dado por (6.59).

Es importante señalar que a partir del Bond Graph del sistema en lazo abierto se puede obtener la realización  $(A_p, B_p, C_p, D_p)$  del sistema. A partir de este Bond Graph y del Procedimiento 6.1 se obtiene un Bond Graph en causalidad integral en lazo cerrado que determina directamente la realización  $(A_{pc}, B_{pc}, C_{pc}, D_{pc})$ . Alternativamente, se puede calcular algebraicamente la realización  $(A_{pc}, B_{pc}, C_{pc}, D_{pc})$  utilizando (6.48) a (6.51), a partir de la realización en lazo abierto. Nótese que el segundo procedimiento involucra más operaciones algebraicas que el primero y la inversa del término  $(I + D_p K)$  no se calcula algebraicamente. Así mismo, obteniendo el Bond Graph en causalidad derivativa en lazo cerrado, se determinan las condiciones de estado estacionario en lazo cerrado del sistema. Este procedimiento no requiere la inversión algebraica de  $A_p$ . Por lo tanto, se demuestra el amplio potencial de la técnica de Bond Graph en sistemas para control.

En la siguiente sección, se aplica el Procedimiento 6.2 a un ejemplo para encontrar el error en estado estacionario de un sistema en lazo cerrado.

#### 6.4.1 Ejemplo de un Motor de CD

Considere el Bond Graph en causalidad integral en lazo abierto de un motor de C.D., el cual se muestra en la figura 5.6. Los vectores clave se dan en la sección 5.4.1.

Aplicando el Procedimiento 6.2 para una retroalimentación de salida con un control proporcional, el cual se muestra en la figura 6.12.

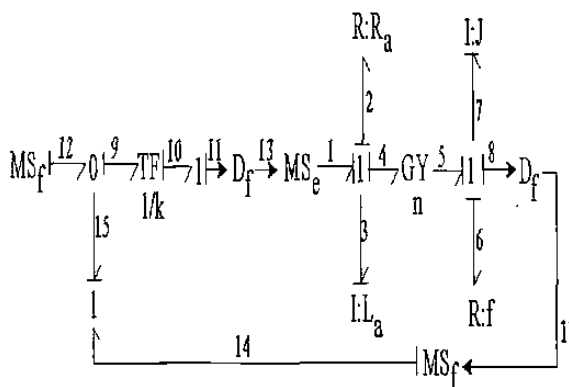


Figura 6.12 Bond Graph en lazo cerrado en causalidad integral un motor de CD.

Obteniendo el Bond Graph correspondiente en causalidad derivativa, se muestra la figura 6.13.

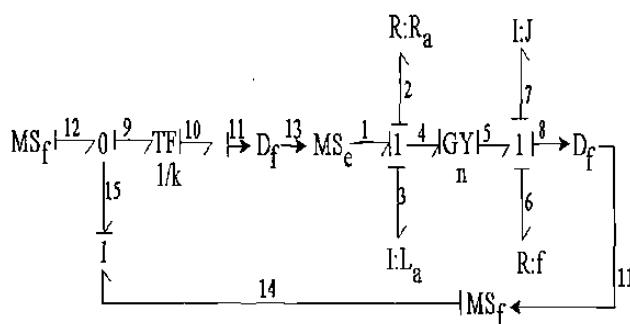


Figura 6.13 Bond Graph en lazo cerrado modificado en causalidad derivativa de un motor de CD.

Otra opción del Bond Graph en lazo cerrado en causalidad derivativa dado en la figura 6.13 para el motor de CD de la figura 6.12, se muestra en figura 6.14, en la cual, la retroalimentación, comparación entrada y salida retroalimentada, y la ganancia del controlador se realizan por medio de diagramas de bloques en combinación con el modelado del motor de CD en Bond Graph.

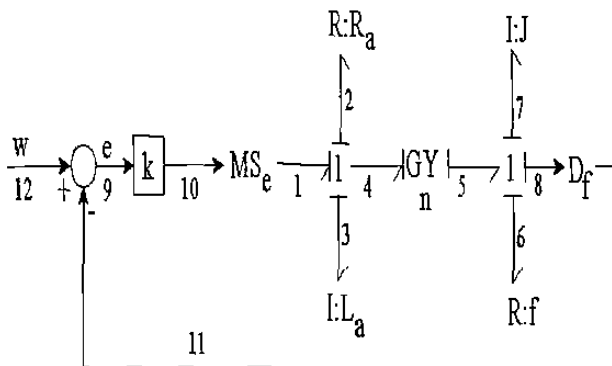


Figura 6.14 Bond Graph en lazo cerrado en combinación con diagramas a bloques.

La figura 6.13 tiene la característica de representar todos los elementos en el dominio físico a diferencia de la figura 6.14, en donde algunos elementos están representados en diagrama a bloques y otros en Bond Graph.

Los vectores clave para el Bond Graph de la figura 6.13 están dados en la sección 5.4.1 y la matriz de Estructura de Unión con salida (6.54) es:

$$J_{11}^c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ -1 & 0 \\ n+k & 0 \end{bmatrix}; J_{13}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ n+k \end{bmatrix}; J_{31}^c = \begin{bmatrix} 1 \\ n+k \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.60)$$

$$J_{12}^c = J_{21}^c = J_{22}^c = J_{11}^c; J_{23}^c = J_{13}^c; J_{32}^c = J_{31}^c; J_{33}^c = -\frac{k}{n+k}$$

de (6.57) y (6.58) tenemos que,

$$D_{pc}^* = \frac{n^2 + R_a f}{n^2 + nk + R_a f} \quad (6.61)$$

por lo que el error en estado estacionario de (6.59) es:

$$e_{ss} = \frac{n^2 + R_a f}{n^2 + nk + R_a f} w_{ss} \quad (6.62)$$

Se puede observar que en (6.62) se conoce la influencia de los parámetros, así como de la ganancia del control en el error en estado estacionario del sistema físico.

Por lo tanto, se presenta un procedimiento gráfico a través de la Teoría de Bond Graph, para la obtención del error en estado estacionario de la salida, en el cual no se requiere conocer el modelo del sistema en variables de estado o en función de transferencia. Así mismo, se puede observar que es posible determinar la influencia de los parámetros del sistema en el error.

En el siguiente capítulo, se presenta un esquema de linealización para una clase de sistemas no lineales modelados en Bond Graph.

## 6.5 Conclusiones

Se presentó un procedimiento gráfico directo para obtener los valores de estado estacionario de un sistema físico, con una retroalimentación de salida en Bond Graph.

Se mostró que a partir del Bond Graph en causalidad derivativa se puede obtener  $A_p^{-1}$  de manera gráfica.

Para la obtención de los valores y del error de estado estacionario se mostró que no se requiere conocer la función de transferencia o la realización  $(A_p, B_p, C_p, D_p)$ .



## Capítulo 7

# Linealización por Bond Graph

### 7.1 Introducción

Un sistema linealizado es útil para conocer el comportamiento del sistema cuando es perturbado, tal que el nuevo y viejo puntos de equilibrio son cercanamente iguales [47]. Las ecuaciones del sistema están linealizadas alrededor de puntos de operación [52]. Las nuevas ecuaciones lineales así obtenidas son supuestas a ser válidas en una región cercana al punto de equilibrio [53].

Una propiedad importante de la Teoría de Bond Graph es la trayectoria causal [32], así, podemos determinar propiedades como observabilidad, controlabilidad o relaciones entre las variables de estado [29]. La trayectoria causal es utilizada en este capítulo para determinar las relaciones no lineales entre las variables de estado, con el fin de linealizar una clase de sistemas no lineales llamada aquí sistema no lineal de productos de estados. Esta clase de sistemas no lineales puede ser representada en Bond Graph [29]. En el Apéndice C, sección C.5, se da un artículo sometido con los resultados que se presentan en este capítulo [38].

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: primeramente, se estudia la linealización alebráica de sistemas no lineales; despues se presenta un esquema linealizado en Bond Graph que utiliza la estructura de unión; posteriormente, se propone un procedimiento para obtener la linealización a partir del Bond Graph dado y los resultados se aplican a un ejemplo.

## 7.2 Antecedentes [70]

Los fenómenos que ocurren son en general de naturaleza no lineal, sin embargo, para perturbaciones sobre el estado nominal o estado de equilibrio, algunos de los sistemas no lineales pueden ser considerados a ser lineales en un rango de operación [27].

En esta sección, se estudia la linealización convencional de un sistema no lineal al que puede ser aplicado la expansión en series de Taylor.

### 7.2.1 Linealización Algebraica [70]

Una ecuación de estado lineal es útil como una aproximación de una ecuación de estado no lineal, en el siguiente sentido. Considere las funciones,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); \quad x(t_0) = x_0 \quad (7.1)$$

Donde los estados  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y la entrada  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ .

Sea (7.1) resuelta para una señal de entrada particular llamada entrada nominal  $\tilde{u}(t)$  y un estado inicial particular llamado estado inicial nominal  $\tilde{x}_0$ . Esta solución única nominal es llamada frecuentemente trayectoria nominal  $\tilde{x}(t)$ .

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \quad (7.2)$$

Considere señales alrededor de los valores nominales

$$u(t) = \tilde{u}(t) + u_\delta(t); \quad x_0 = \tilde{x}_0 + x_{0\delta} \quad (7.3)$$

donde  $\|x_{0\delta}(t)\|$  y  $\|u_\delta(t)\|$  son apropiadamente pequeños para  $t \geq t_0$ .

Suponemos que la solución correspondiente permanece próxima a  $\tilde{x}(t)$ , en cada  $t$ , y está dada por:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + x_\delta(t) \quad (7.4)$$

Sustituyendo ecs. (7.3) y (7.4) en (7.1) tenemos:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) + \frac{d}{dt}x_\delta(t) = f(\tilde{x}(t) + x_\delta(t), \tilde{u}(t) + u_\delta(t)), \quad \tilde{x}(t_0) + x_\delta(t_0) = \tilde{x}_0 + x_{0\delta} \quad (7.5)$$

Suponiendo que las derivadas de  $f(x(t), u(t))$  existen, podemos expandir el lado derecho de (7.5) utilizando series de Taylor alrededor de  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{u}(t)$ , y mantener solamente los

términos de orden 1. Esta es una aproximación razonable dado que  $\|u_\delta(t)\|$  y  $\|x_\delta(t)\|$  son supuestas pequeñas para toda  $t$ .

En forma vectorial se tiene:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) + \frac{d}{dt}x_\delta(t) \cong f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))x_\delta(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))u_\delta(t) \quad (7.7)$$

donde  $\frac{\partial f}{\partial x}$  denota el Jacobiano, con valores,  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$   $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, n$ .

Considerando (7.2), la relación entre  $x_\delta$  y  $u_\delta$  es descrita aproximadamente por una ecuación de estado LIT de la forma:

$$\dot{x}_\delta(t) = A_{p\delta}(t)x_\delta(t) + B_{p\delta}(t)u_\delta(t) \quad (7.8)$$

donde  $A_\delta(t)$  y  $B_\delta(t)$  son las matrices de derivadas parciales evaluadas en la trayectoria nominal las cuales son:

$$A_{p\delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.9)$$

$$B_{p\delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.10)$$

Para la ecuación de salida no lineal, a la forma

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (7.11)$$

La función  $h(x(t), u(t))$  puede ser expandida en series de Taylor sobre la trayectoria nominal, donde la descripción aproximada es de la forma:

$$y_\delta(t) = C_{p\delta}(t)x_\delta(t) + D_{p\delta}(t)u_\delta(t) \quad (7.12)$$

Aquí la desviación de la salida está dada por:

$$y_\delta(t) = y(t) - \tilde{y}(t); \quad \tilde{y}(t) = h(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.13)$$

donde:

$$C_{p\delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.14)$$

$$D_{p\delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7.15)$$

En la siguiente sección, se presenta un esquema para realizar la linealización de una clase de sistemas no lineales en el dominio físico. En el Apéndice C, sección C.5, se da un artículo sometido con los resultados que se presentan en este capítulo.

### 7.3 Linealización por Bond Graph

La información gráfica del Bond Graph puede ser utilizada para identificar las secciones no lineales de un sistema físico. Así, se presenta una técnica gráfica directa para obtener el Bond Graph linealizado.

Consideramos la linealización de (7.1), por Bond Graph de un sistema no lineal de productos de estados, donde la parte no lineal está formada por:

$$x_i(t)x_j(t), x_i(t)u_k(t); i \neq j; i, j = 1, \dots, n \text{ y } k = 1, \dots, p \quad (7.16)$$

Primero se considera la estructura general de un sistema linealizado mostrada en la figura 7.1, y posteriormente se da un procedimiento para obtener la linealización de (7.1) restringido a (7.16), utilizando Bond Graph.

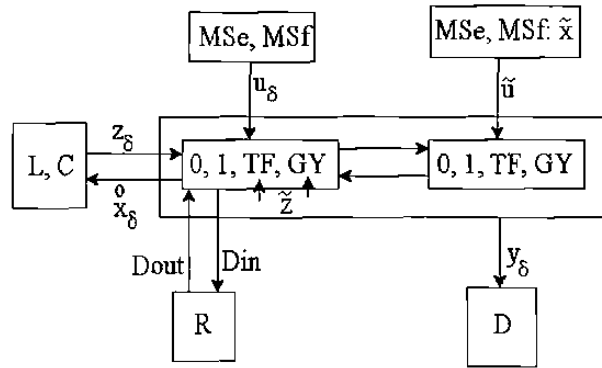


Figura 7.1 Estructura general de un sistema linealizado.

El objetivo de representar un sistema linealizado de acuerdo a la figura 7.1 es obtener relaciones simples para la estructura de unión modificada, denotada por  $\tilde{S}$ . Esto nos permite conocer, el cambio de  $S$  debido a la linealización. En el Lema siguiente se muestra como encontrar las matrices  $(A_{p\delta}, B_{p\delta}, C_{p\delta}, D_{p\delta})$  del sistema linealizado a partir de  $\tilde{S}$ .

#### Lema 7.1

Considere el esquema linealizado de la figura 7.1. La estructura del sistema está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta(t) \\ D_{in}(t) \\ y_\delta(t) \end{bmatrix} = \tilde{S} \begin{bmatrix} z_\delta(t) \\ D_{out}(t) \\ u_\delta(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

donde

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{11}^x + S_{11}^0 & S_{12} & S_{13}^x & S_{13}^0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31}^x + S_{31}^0 & S_{32} & S_{33}^x & S_{33}^0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Los valores de  $S_{11}^x$ ,  $S_{13}^x$ ,  $S_{31}^x$  y  $S_{33}^x$  son la interconexión de los elementos que no participan en la trayectoria nominal del sistema, y los valores de  $S_{11}^0$ ,  $S_{13}^0$ ,  $S_{31}^0$  y  $S_{33}^0$  son la trayectoria nominal;  $u_\delta(t)$  es la entrada del sistema y  $\tilde{u}(t)$  es la entrada nominal.

La representación del sistema en variables de estado está dada por:

$$A_{p\delta} = (S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21})F + S_{13}^1 \quad (7.19)$$

$$B_{p\delta} = S_{13}^x + S_{12}MS_{23} \quad (7.20)$$

$$C_{p\delta} = (S_{31}^x + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21})F + S_{33}^1 \quad (7.21)$$

$$D_{p\delta} = S_{33}^x + S_{32}MS_{23} \quad (7.22)$$

donde

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (7.23)$$

y,  $S_{13}^1$  y  $S_{33}^1$  son tales que se satisface:

$$S_{13}^0\tilde{u}(t) = S_{13}^1x_\delta(t) \quad (7.24)$$

$$S_{33}^0\tilde{u}(t) = S_{33}^1x_\delta(t) \quad (7.25)$$

**Prueba.** Para el sistema linealizado de la figura 7.1, sustituyendo (2.22) en la primer línea de (7.17), tenemos:

$$\dot{x}_\delta(t) = (S_{11}^x + S_{11}^0)Fx_\delta(t) + S_{12}D_{out}(t) + S_{13}^x u_\delta(t) + S_{13}^0\tilde{u}(t) \quad (7.26)$$

De (2.22) y (2.24) la segunda línea de (7.17) se obtiene

$$D_{in}(t) = (I - S_{22}L)^{-1}[S_{21}Fx_\delta(t) + S_{23}u_\delta(t)] \quad (7.27)$$

Tomando (2.24), (2.34), (7.24) y (7.27) en (7.26):

$$\dot{x}_\delta(t) = [(S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21})F + S_{13}^1]x_\delta(t) + (S_{13}^x + S_{12}MS_{23})u_\delta(t) \quad (7.28)$$

Comparando (7.8) con (7.28) se verifica (7.19) y (7.20).

Por otra parte, tomando (2.22), (2.24), (7.25) y (7.27) en la tercer línea de (7.17) tenemos:

$$y_\delta(t) = [(S_{31}^x + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21} + S_{33}^1)F + S_{33}^1]x_\delta(t) + (S_{33}^x + S_{32}MS_{23})u_\delta(t) \quad (7.29)$$

Comparando (7.12) con (7.29), probamos (7.21) y (7.22). ■

En la siguiente sección, se propone un procedimiento para linealizar un sistema no lineal de productos de estados modelado en Bond Graph.

## 7.4 Procedimiento para obtener un Bond Graph linealizado

El siguiente procedimiento gráfico que sirve para construir el Bond Graph linealizado de la figura 7.1 a partir de un sistema físico no lineal de productos de estados (7.16).

### Procedimiento 7.1

Considere que el sistema satisface las hipótesis H1, H2, H3 y H4 del Capítulo 1, sección 1.5.

1. Obtener el Bond Graph no lineal del sistema físico.
2. Identificar el producto de dos variables de estado, mediante una trayectoria causal (ver Apéndice A, sección A5) que contenga un transformador  $TF$  o un girador  $GY$ , cuyo módulo es una variable de estado de energía o coenergía.
3. La trayectoria causal empieza a partir de una variable de estado pasando a través del  $TF$  o  $GY$  del paso 2 y termina en otra variable de estado, esta trayectoria causal debe de pasar sólo una vez por cada bond.
4. Dado que la linealización es alrededor de la trayectoria nominal  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ , el módulo de cada  $TF$  y/o  $GY$  del Bond Graph original del paso 1, se cambia por el valor de la trayectoria nominal de la variable de estado de coenergía respectiva.
5. Por cada trayectoria causal, se añaden bonds con los elementos que forman parte de la misma trayectoria. Los bonds añadidos forman otra trayectoria causal empieza con un elemento de puerto-1, el cual representa a la variable de estado del paso 2, se sustituye este elemento por una fuente de esfuerzo si el elemento de la variable de estado es  $C$  o por una fuente de flujo si el elemento es  $I$ . A continuación, se añaden bonds de la trayectoria causal respectiva, hasta llegar a la unión que conecta a la otra variable de estado de la trayectoria causal considerada. Así mismo, tomar en cuenta lo siguiente:
  - Si existen más de una trayectoria causal para cada variable de estado se unen el inicio de estas trayectorias y la fuente del paso 5 a una unión-1 si la fuente es de flujo, en caso contrario es una unión-0.

- El valor de la fuente del paso 5 es el de la trayectoria nominal de la variable de estado respectiva.
  - El módulo de los  $TF$  o  $GY$  de la trayectoria causal del paso 5 es el módulo de la trayectoria causal del paso 2 del Bond Graph original de la variable de estado de coenergía.
6. El modelo matemático que representa el Bond Graph linealizado, se obtiene utilizando el Lema 7.1.

## 7.5 Ejemplo de un Cuerpo Rígido

Considere el modelo en Bond Graph de un cuerpo rígido de tres dimensiones que se muestra en la figura 7.2. [58]

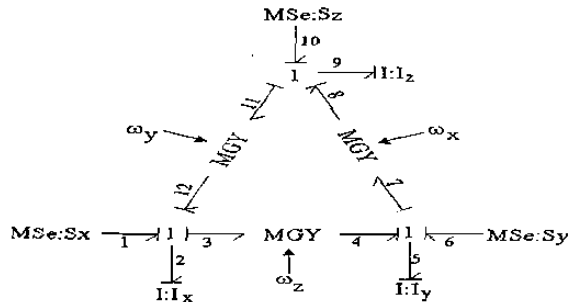


Figure 7.2 Bond Graph de un cuerpo rígido.

Los vectores clave son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_5(t) \\ p_9(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_5(t) \\ e_9(t) \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_5(t) \\ f_9(t) \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

donde  $f_2(t)$ ,  $f_5(t)$  y  $f_9(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_5(t)$  y  $e_9(t)$  son las velocidades angulares y los pares en un sistema de coordenadas  $xyz$  a lo largo de los ejes principales de un cuerpo rígido [58], respectivamente;  $p_2(t)$ ,  $p_5(t)$  y  $p_9(t)$  son los momentos rotacionales y  $e_1(t)$ ,  $e_6(t)$  y  $e_{10}(t)$  son los pares aplicados.

Utilizando el Procedimiento 7.1 tenemos:

- El Bond Graph de la figura 7.2 satisface las condiciones del Procedimiento 7.1.
- Los términos no lineales se identifican por las trayectorias causales que pasan a través de los  $MGY$  con variables de estado de coenergía  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$  y  $\omega_z(t)$  como módulos.

- Las trayectorias causales son:

$$\text{Para } I_x \begin{cases} 2 - 3 - 4 - 5 \\ 2 - 12 - 11 - 9 \end{cases}$$

$$\text{Para } I_y \begin{cases} 5 - 4 - 3 - 2 \\ 5 - 7 - 8 - 9 \end{cases}$$

$$\text{Para } I_z \begin{cases} 9 - 11 - 12 - 2 \\ 9 - 8 - 7 - 5 \end{cases}$$

- Linealizando alrededor de  $(\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0})$  y considerando únicamente la variable de estado de  $I_x$ , se aplican los pasos 4, 5, 6, 7 y 8 del Procedimiento 7.1. El Bond Graph resultante se muestra en la figura 7.3.

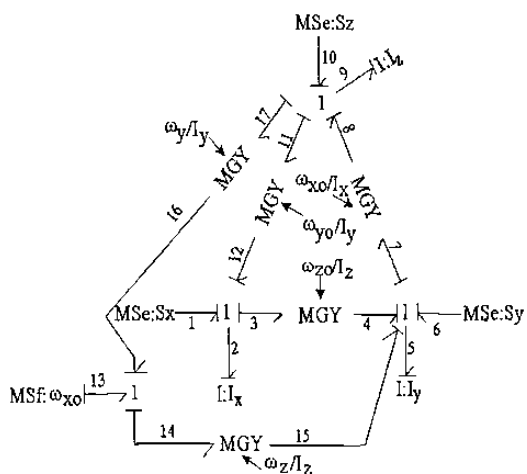


Figura 7.3 Bond Graph linealizado de la variable de estado de  $I_x$ .

Aplicando el Procedimiento 7.1, para las variables de estado de  $I_y$  e  $I_z$ , se obtiene el Bond Graph linealizado del sistema que se muestra en la figura 7.4.

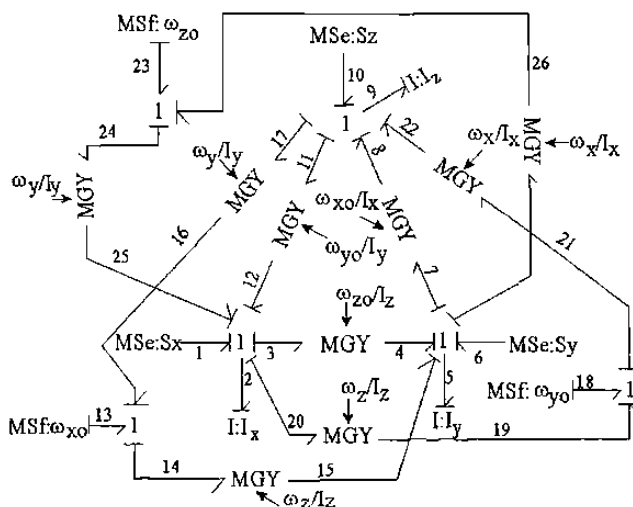


Figura 7.4 Bond Graph linealizado de un cuerpo rígido.



La relación constitutiva es

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{I_x}, \frac{1}{I_y}, \frac{1}{I_z} \right\} \quad (7.31)$$

Aplicando el Lema 7.1, la estructura de unión para el sistema está dada por:

$$\begin{aligned} S_{11}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\omega_{z0}}{I_z} & \frac{\omega_{y0}}{I_y} \\ \frac{\omega_{z0}}{I_z} & 0 & \frac{-\omega_{x0}}{I_x} \\ \frac{-\omega_{y0}}{I_y} & \frac{\omega_{x0}}{I_x} & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{13}^0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\omega_z}{I_z} & \frac{\omega_y}{I_y} \\ \frac{\omega_z}{I_z} & 0 & \frac{-\omega_x}{I_x} \\ \frac{-\omega_y}{I_y} & \frac{\omega_x}{I_x} & 0 \end{bmatrix} \\ S_{11}^x &= S_{12} = S_{22} = S_{23} = S_{21} = 0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

De (7.24),

$$S_{13}^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega_{z0}}{I_y} & \frac{-\omega_{y0}}{I_z} \\ \frac{-\omega_{z0}}{I_x} & 0 & \frac{\omega_{x0}}{I_z} \\ \frac{\omega_{y0}}{I_x} & \frac{-\omega_{x0}}{I_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Obteniendo la representación del sistema en la forma (7.8), de (7.19) tenemos:

$$A_{p\delta} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{z0} \left( \frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_z} \right) & \omega_{y0} \left( \frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_z} \right) \\ \omega_{z0} \left( \frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_z} \right) & 0 & \omega_{x0} \left( \frac{1}{I_z} - \frac{1}{I_x} \right) \\ \omega_{y0} \left( \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) & \omega_{x0} \left( \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) & 0 \end{bmatrix} F \quad (7.34)$$

y de (7.20),

$$B_{p\delta} = I_{3 \times 3} \quad (7.35)$$

Observar que, el Procedimiento 7.1 permite linealizar directamente en forma gráfica un sistema no lineal de productos de estados modelado en Bond Graph.

En el siguiente capítulo, se realiza un estudio detallado del modelado de la máquina síncrona presentada en [52, 53], se utiliza el modelo de la máquina en Bond Graph dado por [23], se modifica y obtener modelos simplificados y directos de la máquina en Bond Graph. Así mismo, se presenta un procedimiento basado en Bond Graph para determinar las constantes de tiempo de la máquina síncrona. Se seleccionó, este sistema físico, como una aplicación de cada uno de los resultados presentados en los capítulos previos de este trabajo de investigación.

## 7.6 Conclusiones

Se presentó un procedimiento gráfico utilizando Bond Graph para la linealización de sistemas no lineales de productos de estados.

El sistema y linealización son determinados en el dominio físico.

Esta metodología no requiere conocer las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

## Capítulo 8

# Modelado de la Máquina Síncrona en Bond Graph

### 8.1 Introducción

Los *Generadores síncronos* forman la principal fuente de energía eléctrica en sistemas de potencia. Grandes cargas eléctricas son manejadas por *motores síncronos*. Algunas veces *Condensadores síncronos* son utilizados como un medio de proveer compensación de potencia reactiva y control de voltaje. Estos dispositivos operan bajo el mismo principio y son colectivamente llamados *máquinas síncronas* [52].

El modelado y análisis de la máquina síncrona ha sido siempre un desafío. El problema ha sido tratado extensivamente desde 1920 y 1930 [53] y ha sido sujeto de algunas de las más recientes investigaciones [52]. En este capítulo se desarrolla un enfoque estructurado del modelado de una máquina síncrona utilizando Bond Graph y se incorpora un análisis para la obtención de algunos modelos reducidos de la máquina.

Se propone un procedimiento para obtener las constantes de tiempo de una máquina síncrona utilizando modelos simplificados de la máquina en el dominio físico.

El presente capítulo está organizado de la manera siguiente: se estudia la descripción matemática de la máquina síncrona. Después, se analiza y modifica el modelo de la máquina síncrona en Bond Graph dado por [23], con el objetivo de obtener el modelo matemático propuesto por [53]. La siguiente sección consiste en obtener modelos simplificados de la máquina en Bond Graph y, finalmente, se presenta un procedimiento para encontrar las constantes de tiempo de la máquina síncrona en Bond Graph.

## 8.2 Descripción Matemática de la Máquina Síncrona [52, 53]

En el desarrollo de las ecuaciones de una máquina síncrona se deben satisfacer las siguientes suposiciones:

- S1.- Los devanados del estator están sinusoidalmente distribuidos.
- S2.- Las ranuras del estator no causan variación apreciable de las inductancias del rotor con la posición del rotor.
- S3.- La máquina es de *polos salientes* en el rotor.
- S4.- Se analiza una máquina de dos polos.
- S5.- La *histéresis magnética* es despreciable.
- S6.- Los efectos de la *saturación magnética* son despreciables.

La figura 8.1 muestra una representación esquemática de una máquina síncrona.

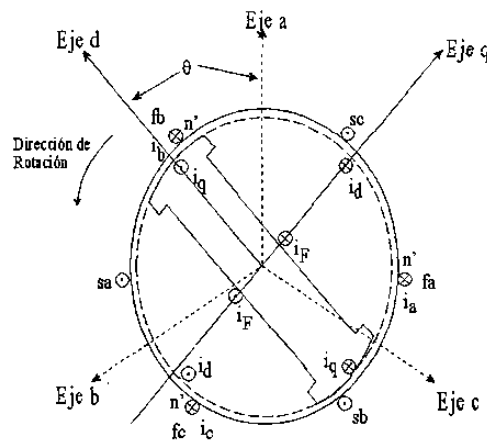


Figura 8.1 Representación esquemática de una máquina síncrona.

En la figura 8.1, los circuitos del estator consisten de un *devanado de armadura* trifásico  $sa - fa$ ,  $sb - fb$  y  $sc - fc$  que conducen corrientes alternantes  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ . Los circuitos del rotor comprenden devanados de campo  $F - F'$ , y de amortiguamiento  $D - D'$  y  $Q - Q'$ . El devanado de campo se conecta a una fuente de corriente directa. Para propósitos de análisis, las corrientes en el amortiguamiento se suponen fluyendo en dos conjuntos de circuitos cortocircuitados: un conjunto cuyo flujo esta en línea con el *eje-d* y otro conjunto cuyo flujo esta a lo largo del *eje-q*.

### 8.2.1 Ejes Directo y en Cuadratura

Con el propósito de identificar características de una máquina síncrona, se definen los dos ejes mostrados en la figura 8.1 :

- El *eje directo*,  $d$ , alineado al eje del polo norte magnético.
- El *eje de cuadratura*,  $q$ , se encuentra a 90 grados eléctricos del eje- $d$ .

### 8.2.2 Representación Esquemática de los Circuitos de una Máquina Síncrona

En la figura 8.2 se muestran los circuitos del estator y rotor de una máquina síncrona.

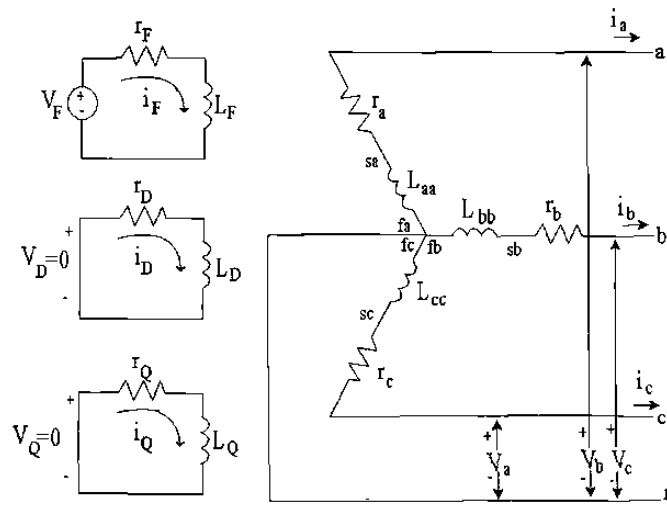


Figura 8.2 Diagrama esquemático de una máquina síncrona.

La notación de subíndices que se utiliza en las figuras 8.1 y 8.2 es:

- $a, b, c$  denotan devanados de fase de estator. Así,  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$ ,  $i_c(t)$  denotan corrientes de fase del estator,  $v_a(t)$ ,  $v_b(t)$ ,  $v_c(t)$  voltajes de fase del estator,  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$  resistencias de fase del estator, y  $L_{aa}$ ,  $L_{bb}$ ,  $L_{cc}$  inductancias propias de fase del estator.
- $F$  denota el devanado de campo. Así,  $i_F(t)$  denota corriente en  $F$ ,  $v_F(t)$ : voltaje en  $F$ ,  $r_F$  resistencia de  $F$  y  $L_F$  inductancia propia de  $F$ .
- $D$  denota el circuito de amortiguamiento en el eje- $d$ . Así,  $i_D(t)$  denota corriente en  $D$ ,  $v_D(t)$  voltaje en  $D$ ,  $r_D$  resistencia de  $D$  y  $L_D$  inductancia propia de  $D$ .
- $Q$  denota el circuito de amortiguamiento en el eje- $q$ . Así,  $i_Q(t)$  denota la corriente en  $Q$ ,  $v_Q(t)$  voltaje en  $Q$ ,  $r_Q$  resistencia de  $Q$  y  $L_Q$  inductancia propia de  $Q$ .

- $\theta(t)$  denota el ángulo para el cual el eje- $d$  adelanta al eje magnético del devanado de la fase  $a$ .
- $\omega_r(t)$  denota la velocidad angular del rotor en rad/seg.
- $\omega(t)$  denota la velocidad angular del campo magnético en rotación en rad/seg.

La máquina síncrona de la figura 8.2 está formada por 6 devanados magnéticamente acoplados. El acoplamiento magnético entre los devanados es una función de la posición del rotor  $\theta(t)$ . El voltaje instantáneo en terminales  $v(t)$  de cualquier devanado está dado por:

$$v(t) = \pm \sum r i(t) \pm \sum \frac{d\lambda(t)}{dt} \quad (8.1)$$

donde  $\lambda(t)$  es el enlace de flujo,  $r$  es la resistencia en los devanados e  $i(t)$  es la corriente en los devanados, con direcciones positivas de las corrientes del estator fluyendo hacia afuera de las terminales si opera como generador síncrono.

### 8.2.3 Transformación de Park [52]

Usualmente, una gran simplificación en la descripción matemática de la máquina síncrona se obtiene mediante la transformación de variables, llamada *transformación de Park* [52, 11, 53]. Esta transformación expresa las variables del estator tales como corrientes, voltajes o enlaces de flujo en términos de un nuevo conjunto de variables. Las nuevas cantidades son obtenidas a partir de la proyección de las variables actuales en los tres ejes; una a lo largo del eje- $d$ , una segunda a lo largo del eje- $q$ , y una tercera en un eje estacionario.

El efecto de la transformación de Park es simplemente transformar todas las cantidades del estator a partir de las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  en otras variables de referencia, las cuales se mueven con el rotor. Si tenemos tres variables  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$  y  $i_c(t)$ , necesitamos tres nuevas variables de la transformación de Park, dos para los ejes  $d$  y  $q$ , las cuales son proporcionales a la corriente de secuencia cero. Un multiplicador es utilizado para simplificar los cálculos numéricos. Así, por definición

$$i_{0dq}(t) \triangleq P i_{abc}(t) \quad (8.2)$$

donde,

$$i_{0dq}(t) = \begin{bmatrix} i_0(t) \\ i_d(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} \quad i_{abc}(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

y donde la transformación de Park  $P$ , está definida por:

$$P = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos \theta(t) & \cos[\theta(t) - 2\pi/3] & \cos[\theta(t) + 2\pi/3] \\ \sin \theta(t) & \sin[\theta(t) - 2\pi/3] & \sin[\theta(t) + 2\pi/3] \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

En  $t = 0$ , el eje  $q$  está localizado en un ángulo  $\delta(t)$ , y el eje  $d$  está localizado en  $\theta(t) = \delta(t) + \pi/2$ . En  $t > 0$ , el eje de referencia está localizado en un ángulo  $\omega_r(t)t$  con respecto al eje de la fase  $a$ . El eje  $d$  del rotor está por lo tanto localizado en:

$$\theta(t) = \omega_r(t)t + \delta(t) + \pi/2 \quad (8.5)$$

donde  $\delta(t)$  es el ángulo de par síncrono en radianes eléctricos.

Dado que la transformación (8.4) es única, una transformación inversa también existe dada por:

$$i_{abc}(t) = P^{-1}i_{0dq}(t) \quad (8.6)$$

donde:

$$P^{-1} = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ 1/\sqrt{2} & \cos[\theta(t) - 2\pi/3] & \sin[\theta(t) - 2\pi/3] \\ 1/\sqrt{2} & \cos[\theta(t) + 2\pi/3] & \sin[\theta(t) + 2\pi/3] \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Notamos que  $P^{-1} = P^T$  lo cual significa que la transformación  $P$  es ortogonal. Teniendo  $P$  ortogonal también significa que la transformación  $P$  es de potencia invariante, y entonces se tiene la misma expresión de potencia en términos de  $a - b - c$  ó  $o - d - q$ , es decir, se tiene

$$p(t) = v_{abc}^T(t) i_{abc}(t) = v_{0dq}^T(t) i_{0dq}(t) \quad (8.8)$$

El modelo en Bond Graph de la matriz de transformación de Park se da en [23], el cual se le denomina *transformador modulado de desplazamiento*.

#### 8.2.4 Ecuaciones de Enlace de Flujo [53]

Considerar la figura 8.1 la cual es una red que consiste de seis bobinas acopladas mutuamente. La ecuación de enlace de flujo para estos 6 circuitos es

$$\begin{bmatrix} \lambda_a(t) \\ \lambda_b(t) \\ \lambda_c(t) \\ \lambda_F(t) \\ \lambda_D(t) \\ \lambda_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_{FF} & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{DF} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{QF} & L_{QD} & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \\ i_F(t) \\ i_D(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Anderson [53], muestra que la mayoría de las inductancias en (8.9) son funciones de la posición angular del rotor  $\theta(t)$ . La descripción física de estas inductancias se da continuación:

### 1. Inductancias Propias del Estator

Las inductancias propias de cada devanado están dadas por:

$$\begin{aligned} L_{aa} &= L_s + L_m \cos 2\theta(t) \\ L_{bb} &= L_s + L_m \cos 2[\theta(t) - 2\pi/3] \\ L_{cc} &= L_s + L_m \cos 2[\theta(t) + 2\pi/3] \end{aligned} \quad (8.10)$$

donde  $L_s > L_m$  y ambos  $L_s$  y  $L_m$  son constantes.

### 2. Inductancias Propias del Rotor

Desde que la saturación y el efecto de ranura son despreciados, todas las inductancias propias del rotor son constantes, las cuales son:

$$L_{FF} = L_F \quad L_{DD} = L_D \quad L_{QQ} = L_Q \quad (8.11)$$

donde  $L_F$ ,  $L_D$  y  $L_Q$  son constantes.

### 3. Inductancias Mutuas del Estator

Las inductancias mutuas entre fases son funciones de  $\theta(t)$  y son simétricas,

$$\begin{aligned} L_{ab} &= L_{ba} = -M_s - L_m \cos 2[\theta(t) + \pi/6] \\ L_{bc} &= L_{cb} = -M_s - L_m \cos 2[\theta(t) - \pi/2] \\ L_{ca} &= L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2[\theta(t) + 5\pi/6] \end{aligned} \quad (8.12)$$

donde  $|M_s| > L_m$ .

### 4. Inductancias Mutuas del Rotor

La inductancia mutua entre devanados  $F$  y  $D$  es constante y todos los pares de devanados con desplazamiento de  $90^\circ$  tienen inductancia mutua igual a cero

$$L_{FD} = L_{DF} = M_R \quad L_{FQ} = L_{Qf} = 0 \quad L_{DQ} = L_{QD} = 0 \quad (8.13)$$

### 5. Inductancias Mutuas entre Estator y Rotor

Las inductancias mutuas entre estator y rotor, son funciones del ángulo del rotor  $\theta(t)$ . Del devanado de fase al devanado de campo se tiene:

$$\begin{aligned} L_{aF} &= L_{Fa} = M_f \cos \theta(t) \\ L_{bF} &= L_{Fb} = M_f \cos [\theta(t) - 2\pi/3] \\ L_{cF} &= L_{Fc} = M_f \cos [\theta(t) + 2\pi/3] \end{aligned} \quad (8.14)$$



similarmente, del devanado de fase al devanado de amortiguamiento  $D$ ,

$$\begin{aligned} L_{aD} &= L_{Da} = M_D \cos \theta(t) \\ L_{bD} &= L_{Db} = M_D \cos[\theta(t) - 2\pi/3] \\ L_{cD} &= L_{cb} = M_D \cos[\theta(t) + 2\pi/3] \end{aligned} \quad (8.15)$$

y finalmente, de los devanados de fase al devanado de amortiguamiento  $Q$ ,

$$\begin{aligned} L_{aQ} &= L_{Qa} = M_Q \sin \theta(t) \\ L_{bQ} &= L_{Qb} = M_Q \sin[\theta(t) - 2\pi/3] \\ L_{cQ} &= L_{Qc} = M_Q \sin[\theta(t) + 2\pi/3] \end{aligned} \quad (8.16)$$

## 6. Modelo de Inductancias Compacto

Utilizando una notación simplificada, (7.9) puede describirse en el modelo compacto

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abc}(t) \\ \lambda_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aR} \\ L_{Ra} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

donde:  $L_{aa}$  denota una matriz cuyos elementos son las inductancias estator-estator,  $L_{aR}$ ,  $L_{Ra}$  las inductancias estator-rotor y  $L_{RR}$  las inductancias rotor-rotor.

## 7. Transformación de Inductancias

Se observa que (8.9) con inductancias variantes en el tiempo puede ser simplificadas refiriendo todas las cantidades al marco de referencia del rotor a través de la transformación de Park (8.4) aplicada a la partición  $a - b - c$ .

Premultiplicando (8.9) por  $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$  donde  $P$  es la transformación de Park, tenemos

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{abc}(t) \\ \lambda_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aR} \\ L_{Ra} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

Efectuando la operación indicada en (8.18), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_d(t) \\ \lambda_q(t) \\ \lambda_F(t) \\ \lambda_D(t) \\ \lambda_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & M_{dF} & M_{dD} & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & M_{qQ} \\ 0 & M_{dF} & 0 & L_F & M_{DF} & 0 \\ 0 & M_{dD} & 0 & M_{DF} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & M_{qQ} & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0(t) \\ i_d(t) \\ i_q(t) \\ i_F(t) \\ i_D(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

donde

$$\begin{aligned} L_d &= L_s + M_s + (3/2) L_m; \quad M_{dF} = \sqrt{3/2} M_F; \quad M_{DF} = \sqrt{3/2} M_D \\ L_q &= L_s + M_s - (3/2) L_m; \quad L_0 = L_s - 2M_s; \quad M_{qQ} = \sqrt{3/2} M_Q \end{aligned}$$

En (8.19),  $\lambda_d(t)$  es el enlace de flujo en un circuito moviéndose con el rotor y centrado en el eje. Similarmente,  $\lambda_q(t)$  es centrado en el eje  $q$  y  $\lambda_0(t)$  es completamente un circuito que permite conocer si el sistema está desbalanceado.

También es importante observar que la matriz de inductancia (8.19) es una matriz de constantes. Así, la transformación de Park de potencia remueve los coeficientes variantes en el tiempo de la ecuación (8.9). También notamos que la matriz transformada (8.19) es simétrica y por lo tanto es físicamente realizable por un circuito equivalente.

### 8.2.5 Ecuaciones de Voltaje

Considerando los circuitos de una máquina síncrona que se muestra en la figura 8.2, para las condiciones indicadas por la figura 8.2, la ecuación matricial particionada está dada por:

$$\begin{bmatrix} v_{abc}(t) \\ v_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc}(t) \\ \dot{\lambda}_{FDQ}(t) \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

donde,

$$v_{FDQ}(t) = \begin{bmatrix} V_F(t) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} R_{abc} &= \text{diag} \{r_a, r_b, r_c\} \\ R_{FDQ} &= \text{diag} \{r_F, r_D, r_Q\} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Aplicando la transformación de Park a (8.20) tenemos:

$$\begin{bmatrix} V_{0dq}(t) \\ V_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{0dq}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{0dq}(t) \\ \dot{\lambda}_{FDQ}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq}(t) \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

donde

$$\dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(t)\lambda_q(t) & \omega(t)\lambda_d(t) \end{bmatrix}^T \quad (8.23)$$

Analizando para condiciones balanceadas, siendo la componente de secuencia cero igual a cero, (8.22) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} V_{dq}(t) \\ V_{FDQ}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dq} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{dq}(t) \\ i_{FDQ}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{dq}(t) \\ \dot{\lambda}_{FDQ}(t) \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

donde,

$$R_{dq} = \text{diag} \{r_d, r_q\}; \quad S(t) = \begin{bmatrix} -\omega(t)\lambda_q(t) & \omega(t)\lambda_d(t) \end{bmatrix}^T$$

### 8.2.6 Formulación de Ecuaciones en Espacio de Estado

Recordar que nuestro objetivo es derivar un conjunto de ecuaciones que describan la máquina síncrona en la forma

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (8.25)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  denota un vector de variables de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  las funciones de entrada del sistema y  $f[x(t), u(t), t]$  un conjunto de funciones no lineales, representadas por el producto de algunas variables de estado.

Si las ecuaciones que describen la máquina síncrona son lineales, se reduce a un sistema de la forma (2.28).

Sin embargo, (8.25) contiene enlaces de flujo y corriente como variables. Entonces, podemos obtener dos modelos:

- Un conjunto basado en corrientes como variables de estado;

$$x(t)^T = \begin{bmatrix} i_d(t) & i_D(t) & i_F(t) & i_Q(t) & i_q(t) \end{bmatrix}$$

- Un conjunto basado en enlaces de flujo como variables de estado

$$x(t)^T = \begin{bmatrix} \lambda_d(t) & \lambda_D(t) & \lambda_F(t) & \lambda_Q(t) & \lambda_q(t) \end{bmatrix}$$

### 8.2.7 Formulación de Corriente

Un modelo basado en corrientes como variables de estado tiene la ventaja de ofrecer relaciones simples entre los voltajes y las variables de estado. Podemos reemplazar los términos en  $\lambda(t)$  y  $\dot{\lambda}(t)$  por términos en  $i(t)$  y  $\frac{di(t)}{dt}$  utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\lambda_{dDF}(t) = (M_{dDF}) [i_{dDF}(t)] \quad (8.26)$$

$$\lambda_{Qq}(t) = (M_{Qq}) [i_{Qq}(t)] \quad (8.27)$$

donde:

$$M_{dDF} \triangleq \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} \\ M_{dD} & L_D & M_{DF} \\ M_{dF} & M_{DF} & L_F \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

$$M_{Qq} \triangleq \begin{bmatrix} L_Q & M_{qQ} \\ M_{qQ} & L_q \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

Rescribiendo (8.24), para sustituir (8.26) y (8.27) en (8.24), seleccionando las cantidades base para voltaje, corriente y tiempo en el sistema por unidad (*pu*) e incorporando todas las ecuaciones normalizadas en una expresión matricial y conservando la misma notación para las variables en *pu* que para las variables en la base original, dado que todos los valores son en *pu*, escribimos:

$$\begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_D = 0 \\ v_F(t) \\ v_Q = 0 \\ v_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{rDF} & T_2 \\ 0_{1 \times 3} & 0_{2 \times 2} \\ T_1 & R_{Qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{dDF} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} \quad \text{en } pu \quad (8.30)$$

donde

$$\begin{aligned} R_{dDF} &= \text{diag} \{r_d, r_D, r_F\} \\ R_{Qq} &= \text{diag} \{r_Q, r_q\} \\ T_1 &= \begin{bmatrix} -\omega(t) L_d & -\omega(t) M_{dF} & -\omega(t) M_{dD} \end{bmatrix} \\ T_2 &= \begin{bmatrix} \omega(t) M_{qQ} & \omega(t) L_q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 8.2.8 La Ecuación de Onda Normalizada

Hay muchas formas de escribir la ecuación de onda en la dinámica de un sistema de potencia, mientras que el par está casi siempre dado en *pu*, frecuentemente no es claro para  $\omega(t)$  y  $t$ .

Empezamos con  $\omega(t)$  en *rad/seg.*,  $t$  en *seg.* y  $T_a$  en *pu* tenemos:

$$\frac{2H}{\omega_B(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} = 2H \frac{d\omega(t)}{dt_u} = T_a(t) \quad (8.31)$$

donde:  $H$  denota la constante de inercia en *pu*,  $\omega_B(t)$  la velocidad angular base y  $T_a$  el par acelerante en *pu*. Siendo  $t_u = \omega_B(t) t$ ;

Si  $t$  y  $\omega(t)$  están en *pu*, entonces,

$$T_j \frac{d\omega(t)}{dt} = T_a(t) \quad (8.32)$$

donde

$$T_j = 2H\omega_B \quad (8.33)$$

Los pares aplicados a un rotor de una máquina síncrona se muestran en la figura 8.3.

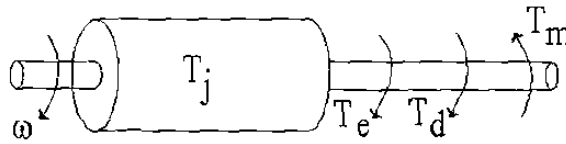


Figura 8.3 Pares aplicados al rotor de una máquina síncrona.

donde  $T_e(t)$  denota es el par electromagnético,  $T_d(t)$  es el par de amortiguamiento y  $T_m(t)$  es el par mecánico de la máquina síncrona.

De la figura 8.3, se tiene en *pu*:

$$T_a(t) = T_m(t) - T_e(t) - T_d(t) \quad (8.34)$$

donde:

$$T_e(t) = i_d(t) \lambda_d(t) - i_q(t) \lambda_q(t) \quad (8.35)$$

$$T_d(t) = D\omega(t) \quad (8.36)$$

siendo  $D$  la constante de amortiguamiento.

Sustituyendo (8.26), (8.27), (8.34) a (8.36) en (8.32), tenemos:

$$T_j \dot{\omega}(t) = T_m(t) + \begin{bmatrix} -L_d i_q(t) & -M_{Dd} i_q(t) & -M_{dF} i_q(t) & M_{qQ} i_d(t) & L_q i_d(t) & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

Finalmente, podemos obtener la formulación completa de corriente de la máquina síncrona incluyendo la ecuación angular de potencia la cual es

$$\dot{\delta}(t) = \omega(t) \quad (8.38)$$

Tomando (8.37), (8.38) y (8.30) el modelo completo está dado por:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_D = 0 \\ v_F(t) \\ v_Q = 0 \\ v_q(t) \\ T_m(t) \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_{dDF} & T_2 & & & & & \\ 0_{1 \times 3} & 0_{2 \times 2} & 0_{5 \times 1} & & & & \\ T_1 & R_{Qq} & D & & 0_{7 \times 1} & & \\ T_3 & T_4 & 1 & & & & \\ & 0_{1 \times 5} & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} M_{dDF} & 0_{3 \times 2} & & & & & \\ 0_{2 \times 3} & M_{Qq} & & & & & \\ & & 0_{5 \times 2} & & & & \\ & & & T_j & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 & \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \quad pu \quad (8.39)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 T_3 &= \begin{bmatrix} L_d i_q & M_{Dd} i_q & M_{dF} i_q \end{bmatrix} \\
 T_4 &= \begin{bmatrix} -M_{qQ} i_d & -L_q i_d \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Esta ecuación matricial está en la forma (8.25), es claro que el sistema es no lineal, donde la no linealidad se debe al producto de variables de estado.

En la siguiente sección, se introduce el modelado de la máquina síncrona representado en Bond Graph.

### 8.3 El Modelo de Bond Graph de la Dinámica de la Máquina Síncrona

En la presente sección, se analiza el Bond Graph de la máquina síncrona dado por [23], modificado para obtener el modelo (8.39).

Se considera el modelo  $d$ - $q$  de la máquina síncrona que se muestra en la figura 8.2 que satisface S1 a S6.

El Bond Graph de la figura 8.4, difiere respecto al presentado en [23] en la dirección de los bonds 14, 15, 17 y 19, y en el uso de una fuente de voltaje (esfuerzo) en el devanado de excitación.

Las principales características del modelo de la máquina síncrona en Bond Graph son:

- Se tiene en variables de energía todos los elementos que intervienen en la máquina.
- Los subsistemas eléctrico, magnético y mecánico se representan en un sólo Bond Graph.
- Modelos simplificados se obtienen a partir de la eliminación directa de bonds en el Bond Graph.
- La formulación de corriente o de enlace de flujo se obtiene a partir del mismo Bond Graph.

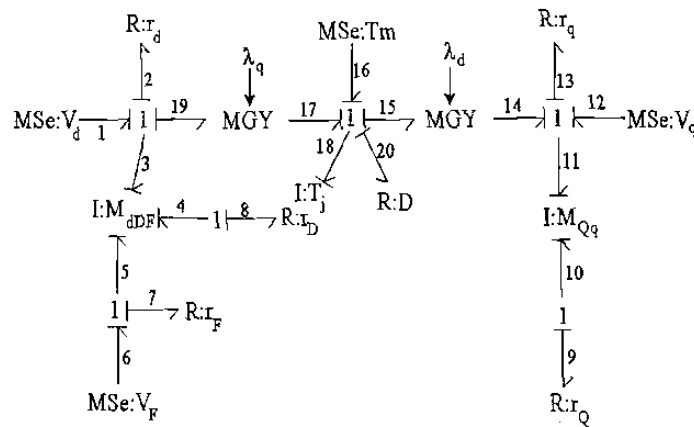


Figura 8.4 Bond Graph de la máquina síncrona.

En la figura 8.4,  $T_m$  es el par mecánico de entrada,  $T_j$  es la inercia definida en (8.33),  $D$  es el coeficiente de amortiguamiento dado por (8.36);  $I : M_{dDF}$  representa los acoplamientos propios y mutuos de los devanados en el eje  $d$  definidos en (8.28); y  $I : M_{Qq}$  son los acoplamientos magnéticos propios y mutuos de los devanados en el eje  $q$  definidos en (8.29). El devanado de amortiguamiento está representado por  $D$  en el eje  $d$  y por  $Q$  en el eje  $q$ , respectivamente; el devanado de excitación es  $F$ ; y  $d$  y  $q$  representan los devanados de conmutación en los ejes  $d$  y  $q$ , respectivamente.

Los vectores clave del Bond Graph de la figura 8.4 son:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_4(t) \\ p_5(t) \\ p_{10}(t) \\ p_{11}(t) \\ p_{18}(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_4(t) \\ e_5(t) \\ e_{10}(t) \\ e_{11}(t) \\ e_{18}(t) \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \\ f_{18}(t) \end{bmatrix}; \quad D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_7(t) \\ f_8(t) \\ f_9(t) \\ f_{13}(t) \\ f_{20}(t) \end{bmatrix} \\
 D_{out}(t) &= \begin{bmatrix} e_2(t) & e_7(t) & e_8(t) & e_9(t) & e_{13}(t) & e_{20}(t) \end{bmatrix}^T \\
 u(t) &= \begin{bmatrix} e_1(t) & e_6(t) & e_{12}(t) & e_{16}(t) \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

Las relaciones constitutivas están dadas por:

$$L = \text{diag}\{r_d, r_F, r_D, r_Q, r_q, D\} \quad (8.41)$$

$$F^{-1} = \text{diag}\{M_{dDF}, L_{Qq}, T_j\} \quad (8.42)$$

La matriz de estructura de unión está dada por de (2.25) donde:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & G(\lambda) \\ -G^T(\lambda) & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{12} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ S_{13} &= \begin{bmatrix} Q_2 & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 2} & Q_3 \end{bmatrix}; \quad S_{22} = S_{23} = 0 \end{aligned} \quad (8.43)$$

donde

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda_q(t) \\ 0_{3 \times 1} \\ \lambda_d(t) \end{bmatrix}; \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El modelo lineal de enlace de flujo está dado por (2.28) a (2.32). A continuación se da la formulación de corriente. Obteniendo la derivada de (2.22) y sustituyendo (2.22) en (2.28) se tiene el siguiente modelo no lineal en términos de co-energía dado por:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= f(z(t)) + \check{B}_p u(t) \\ y(t) &= \check{C}_p z(t) + D_p u(t) \end{aligned} \quad (8.44)$$

donde:

$$f(z(t)) = F[S_{11}(\lambda) + S_{12}MS_{21}]; \quad \check{B}_p = F(S_{13} + S_{12}MS_{23}); \quad \check{C}_p = S_{31} + S_{32}MS_{21} \quad (8.45)$$

Para el caso lineal, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \check{A}_p z(t) + \check{B}_p u(t) \\ y(t) &= \check{C}_p z(t) + D_p u(t) \end{aligned} \quad (8.46)$$

donde

$$\check{A}_p = F[S_{11} + S_{12}MS_{21}] \quad (8.47)$$

Multiplicando (8.44) por  $F^{-1}$  y utilizando (8.40) a (8.43), (8.45) y (2.34), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ 0 \\ e_6(t) \\ 0 \\ e_{12}(t) \\ e_{16}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{MS} & G(\lambda) \\ -G^T(\lambda) & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \\ f_{18}(t) \end{bmatrix} + M_{MS} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \\ f_{18}(t) \end{bmatrix} \quad (8.48)$$



donde

$$R_{MS} = \text{diag} \{R_{dDF}, R_{Qq}\}$$

$$M_{MS} = \text{diag} \{M_{dDF}, M_{Qq}, T_j, 1\}$$

Si se sustituyen las relaciones constitutivas de  $\lambda_d(t)$  y  $\lambda_q(t)$  dadas en (8.19), la ecuación (8.48) es igual a (8.39), excepto por la ecuación del ángulo  $\delta(t)$  que no se escribe.

Es importante notar que se tiene una representación gráfica de la máquina síncrona, incluyendo inductancias propias y mutuas, y resistencias en cada uno de los devanados. Así mismo, la parte mecánica es considerada en el mismo Bond Graph, conociéndose el intercambio energético entre sus elementos y determinando el modelo matemático de acuerdo a la estructura de unión definida en el capítulo 2. Por otra parte, las herramientas presentadas en los capítulos 3 al 7 puede ser aplicadas al modelo encontrado de la máquina síncrona en el dominio físico.

En la siguiente sección, se presenta la obtención directa de modelos simplificados de la máquina síncrona en Bond Graph.

## 8.4 Modelos Simplificados de la Máquina Síncrona utilizando Bond Graph

Los modelos matemático y gráfico de la máquina síncrona se obtuvieron considerando los circuitos de estator, rotor y devanado de amortiguamiento en los ejes  $d$  y  $q$ . El modelo incluye las condiciones de la carga y el par mecánico. Las descripciones completas matemáticas de cada elemento de un sistema de potencia son excesivamente complejas y frecuentemente son utilizadas descripciones simplificadas en el modelado de sistemas.

En esta sección, se presentan algunos modelos reducidos de la máquina síncrona en Bond Graph y finalmente se obtiene el modelo matemático del sistema.

### 8.4.1 Sin devanados de amortiguamiento.

Los devanados de amortiguamiento de una máquina síncrona pueden ser despreciados si, su efecto en el transitorio bajo estudio es lo suficiente pequeño con respecto a la dinámica del sistema para ser despreciados. Esto es particularmente cierto en estudios donde el amortiguamiento entre máquinas acopladas no es de interés. El modelo de Bond Graph en el cual los devanados de amortiguamiento son despreciados, se logra eliminando los bonds 4 y 8 para  $D$ , y 9 y 10 para  $Q$  de la figura 8.3, el Bond Graph resultante se muestra en la figura 8.5.

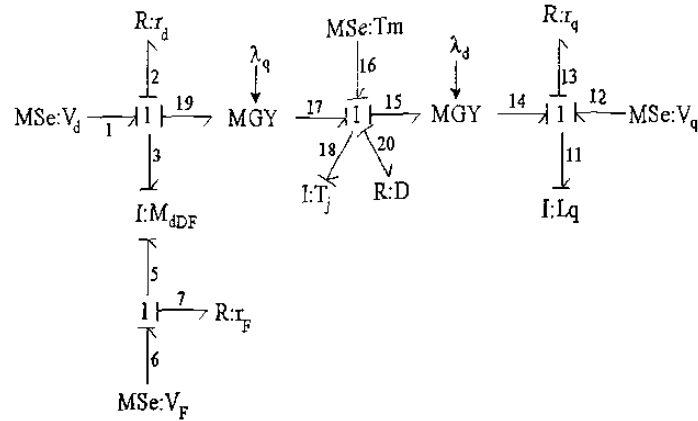


Figure 8.5 Modelo de Bond Graph máquina síncrona despreciando devanados de amortiguamiento.

Los vectores clave se obtienen eliminando  $p_4(t)$  y  $p_{10}(t)$  de (8.40) los cuales representan los devanados de amortiguamiento, siendo las relaciones constitutivas dadas por:

$$F^{-1} = \text{diag} \{L_{dF}, L_q, T_j\} \quad (8.49)$$

$$L = \text{diag} \{R_{dFq}, D\} \quad (8.50)$$

donde:

$$L_{dF} \triangleq \begin{bmatrix} L_d & M_{dF} \\ M_{dF} & L_F \end{bmatrix} \quad (8.51)$$

$$R_{dFq} \triangleq \text{diag} \{r_d, r_F, r_q\} \quad (8.52)$$

la estructura de unión para el Bond Graph de la figura 8.5 es:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & G_1(\lambda) \\ -G_1^T(\lambda) & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{12} = -I_{4 \times 4}; \quad S_{13} = I_{4 \times 4}; \quad S_{22} = S_{23} = 0 \quad (8.53)$$

donde

$$G_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda_q(t) & 0 & \lambda_d(t) \end{bmatrix}^T$$

sustituyendo de (8.49) a (8.53) en (8.44), (8.45) y utilizando (2.34) se tiene:

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_6(t) \\ e_{12}(t) \\ e_{16}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -R_{dFq} & G_1(\lambda) \\ -G_1^T(\lambda) & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_5(t) \\ f_{11}(t) \\ f_{18}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{dF} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & L_{qJ} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_5(t) \\ f_{11}(t) \\ f_{18}(t) \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

donde:

$$L_{qJ} = \text{diag} \{L_q, T_j\}$$

A partir del modelo simplificado dado por (8.54) y con reducciones algebraicas pertinentes es posible encontrar el modelo conocido  $E'_q$  [52].

### 8.4.2 A Velocidad Constante

La investigación del fenómeno eléctrico transitorio usualmente empieza con la simplificación de velocidad angular  $\omega_r(t)$  constante, esta reducción se logra aplicando una fuente de flujo mecánica denotada por  $S_f : \omega_0$  y eliminando los bonds 16 y 18 de la figura 8.4. Así. se obtiene el Bond Graph a velocidad constante que se muestra en la figura 8.6.

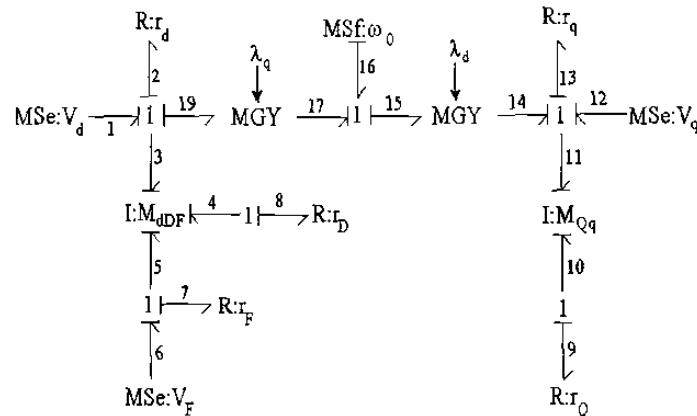


Figura 8.6 Bond Graph a velocidad constante de la máquina síncrona.

Los vectores clave del Bond Graph se obtienen eliminando  $p_{18}(t)$ ,  $e_{18}(t)$  y  $f_{18}(t)$  de (8.40), ya que el momento rotacional se considera constante, y el vector  $u(t)$  es incrementado por la fuente de flujo de flujo mecánica. Así, las relaciones constitutivas son:

$$L = \text{diag}\{r_d, r_F, r_D, r_Q, r_q\} \quad (8.55)$$

$$F^{-1} = \text{diag}\{M_{dDF}, L_{Qq}\} \quad (8.56)$$

La matriz de estructura de unión está dada por:

$$S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & & 0_{3 \times 2} \\ 0 & -1 & 0 & & \\ & & & 0_{2 \times 3} & -I_{2 \times 2} \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_q(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_d(t) \end{bmatrix} \quad (8.57)$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{23} = 0$$

El siguiente modelo de la máquina síncrona a velocidad constante se obtiene de sustituir (8.55) a (8.57) en (8.45) a (8.47) con (2.34):

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ 0 \\ e_6(t) \\ 0 \\ e_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & R_{dDF} & & & & & -M_{qQ}\omega_0 & -L_q\omega_0 \\ & & & & & & & 0_{2 \times 2} \\ & & 0_{1 \times 3} & & & & & \\ -L_d\omega_0 & -M_{dD}\omega_0 & -M_{dF}\omega_0 & & & & & R_{Qq} \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} M_{dDF} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

Es importante notar que el modelo de la máquina síncrona a velocidad constante es una manera sencilla de conocer el desempeño aproximado de la máquina, en un modelo que se caracteriza por ser lineal.

En la siguiente sección, se da un procedimiento para encontrar las constantes de tiempo de una máquina síncrona en el dominio físico.

## 8.5 Obtención de las Constantes de Tiempo en Bond Graph

Las características de la máquina síncrona de interés son las inductancias efectivas (o reactivas) vistas desde las terminales de la máquina y asociadas con las corrientes de frecuencia fundamental durante las condiciones de transitorio, subtransitorio y estado estacionario. Además, a estas inductancias, les corresponden constantes de tiempo las cuales determinan la relación de decaimiento de corrientes y voltajes a partir de los parámetros estándares de resistencias e inductancias utilizados en especificar las características eléctricas de la máquina síncrona [11].

Las constantes  $T'_{d_0}$  que denota la *constante de tiempo transitoria de circuito abierto en el eje d*,  $T''_{d_0}$  es la *constante de tiempo subtransitoria de circuito abierto en el eje d*,  $T'_d$  es la *constante de tiempo transitoria de corto circuito en el eje d* y  $T''_d$  es la *constante de tiempo subtransitoria de corto circuito en el eje d*, son las cuatro principales *constantes de tiempo en el eje d*, y  $T''_{q_0}$  denota la *constante de tiempo subtransitoria de circuito abierto en el eje q* y  $T'_q$  es la *constante de tiempo subtransitoria de corto circuito en el eje q* de la máquina [52].

Se puede determinar las expresiones algebraicas exactas para las constantes de tiempo. Sin embargo, tales expresiones son muy complejas. Expresiones más simples pueden ser

desarrolladas haciendo algunas aproximaciones razonables.

Ahora, se presenta un procedimiento en el dominio físico para obtener las constantes de tiempo en el eje  $d$  y  $q$  basado en el procedimiento dado en [53].

### Procedimiento 8.1

1. Empezamos con el circuito de estator en circuito abierto  $i_d(t) = 0$  [53].

Reduciendo el Bond Graph de la máquina síncrona de la figura 8.6 para considerar  $i_d(t) = 0$  [53], ésto se realiza eliminando el bond 3, quedando el Bond Graph en el eje  $d$  de la figura 8.7. En donde el campo  $I : M_{dDF}$  se reduce al campo  $I : M_{DF}$ .

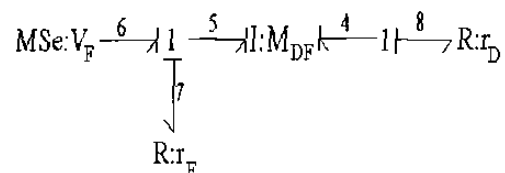


Figura 8.7 Bond Graph para la constante de tiempo subtransitoria de la máquina síncrona.

A partir del Bond Graph de la figura 8.7, obtenemos el modelo dinámico de éste sistema reducido.

Los vectores clave para el Bond Graph de la figura 8.7 son:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_5(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_5(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} \\ D_{in}(t) &= \begin{bmatrix} f_7(t) \\ f_8(t) \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_7(t) \\ e_8(t) \end{bmatrix}; u(t) = e_6(t) \end{aligned}$$

Las relaciones constitutivas son:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} L_D & M_{DF} \\ M_{DF} & L_F \end{bmatrix} \quad (8.59)$$

$$L = \text{diag}\{r_D, r_F\} \quad (8.60)$$

y la estructura de unión es:

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; S_{11} = S_{22} = S_{23} = 0 \quad (8.61)$$

de (8.59) a (8.61) y de (8.45) a (8.47) con (2.34), tenemos:

$$\begin{bmatrix} L_D & M_{DF} \\ M_{DF} & L_F \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_D & 0 \\ 0 & -r_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_6(t) \quad (8.62)$$

utilizando variables físicas se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D(t) \\ i_F(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{bmatrix} -r_D L_F & r_F M_{DF} \\ r_D M_{DF} & -r_F L_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D(t) \\ i_F(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_{DF} \\ L_D \end{bmatrix} V_F(t) \right\} \quad (8.63)$$

donde

$$\Delta = L_D L_F - M_{DF}^2$$

2. Necesitamos cambiar la estructura de (8.63), considerando que en  $t^+ = 0$  [53],

$$p_4(t) = \lambda_D(t) = 0 \quad (8.64)$$

Así, de (2.22), (8.59) y (8.64) tenemos:

$$\begin{bmatrix} i_D(t) \\ i_F(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -M_{DF} \\ L_D \end{bmatrix} \lambda_F(t) \quad (8.65)$$

por lo tanto

$$i_F(t) = \frac{-L_D}{M_{DF}} i_D(t) \quad (8.66)$$

3. Finalmente, sustituyendo (8.66) en (8.63) y reduciendo, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} i_D(t) + i_D(t) \left( \frac{r_D L_F + r_F L_D}{\Delta} \right) = \frac{-M_{DF} V_F(t)}{\Delta} \quad (8.67)$$

si  $r_D \gg r_F$  y  $L_D \approx L_F$  [53]

$$\frac{d}{dt} i_D(t) + i_D(t) \left( \frac{r_D}{L_D - \frac{M_{DF}^2}{L_F}} \right) = \frac{-\frac{M_{DF} V_F(t)}{L_F}}{L_D - \frac{M_{DF}^2}{L_F}} \quad (8.68)$$

La ecuación (8.68) muestra que  $i_D(t)$  decae con una constante de tiempo

$$T''_{d_0} = \frac{L_D - \frac{M_{DF}^2}{L_F}}{r_D} \quad (8.69)$$

ésta es la *constante de tiempo subtransitoria de circuito abierto en el eje d* [53].

4. Cuando un devanado de amortiguamiento no es considerado o después de decaer la corriente subtransitoria. Se puede mostrar que la corriente de campo es afectada sólomente por los parámetros del circuito de campo [53], tal como se muestra en la figura 8.8, el cuál se obtiene de la figura 8.7 eliminando los bonds 4 y 8, donde el campo  $I : M_{DF}$  se reduce a  $I : L_F$ .

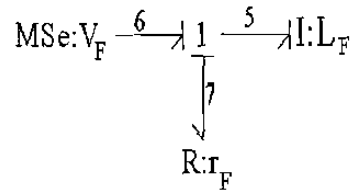


Figura 8.8 Bond Graph para la constante de tiempo transitorio en el eje  $d$ .

Los vectores clave para el Bond Graph de la figura 8.8 son:

$$\begin{aligned} x(t) &= p_5(t); \quad \dot{x}(t) = e_5(t); \quad z(t) = f_5(t) \\ D_{in}(t) &= f_7(t); \quad D_{out}(t) = e_7(t); \quad u(t) = e_6(t) \end{aligned} \quad (8.70)$$

Las relaciones constitutivas para este Bond Graph son:

$$L = r_F; \quad F = \frac{1}{L_F} \quad (8.71)$$

y la matriz de estructura de unión es

$$S_{12} = -S_{13} = -1; \quad S_{11} = S_{22} = S_{23} = 0 \quad (8.72)$$

de (8.70) a (8.72) y sustituyendo en (8.45) y (8.47) con (2.34), el modelo dinámico es:

$$\frac{d}{dt} f_5(t) = \left( -\frac{r_F}{L_F} \right) f_5(t) + \left( \frac{1}{L_F} \right) e_6(t) \quad (8.73)$$

La constante de tiempo de este transitorio es la *constante de tiempo transitoria de circuito abierto en el eje  $d$* ,  $\tau'_{d_0}$  [53] de (8.73):

$$\tau'_{d_0} = \frac{L_F}{r_F} \quad (8.74)$$

5. Se realiza un análisis similar del transitorio en el circuito del eje  $q$  de una máquina de polos salientes. Así, del Bond Graph de la figura 8.6, haciendo  $i_q(t) = 0$ , se elimina el bond 11 y considerando la parte restante en el eje  $q$ , obtenemos el modelo representado en la figura 8.9, en donde el campo  $I : M_{Qq}$  se reduce a  $I : L_q$ .

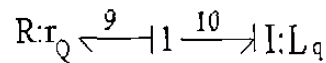


Figure 8.9 Bond Graph de la constante de tiempo subtransitoria en el eje  $q$ .

Los vectores clave del Bond Graph de la figura 8.9 son:

$$x = p_{10}; \quad \dot{x} = e_{10}; \quad z = f_{10}; \quad D_{in} = f_9; \quad D_{out} = e_9 \quad (8.75)$$

Las relaciones constitutivas son:

$$L = r_Q; \quad F = \frac{1}{L_q} \quad (8.76)$$

siendo la matriz de estructura de unión dada por

$$S_{12} = -1; S_{11} = S_{13} = S_{22} = S_{32} = 0 \quad (8.77)$$

De (8.75) a (8.77) y sustituyendo en (8.45) a (8.47) con (2.34) el modelo dinámico es:

$$\frac{d}{dt} f_{10}(t) = \frac{-r_Q}{L_q} f_{10}(t) \quad (8.78)$$

Así, la *constante de tiempo de circuito abierto en el eje q* está dada por [53]:

$$\tau_{q_0}'' = \frac{L_q}{r_Q} \quad (8.79)$$

A continuación, se dan expresiones para determinar las constantes de tiempo transitorias de corto circuito en el eje  $d$  y  $q$ .

En [53] muestran que cuando el estator está en corto circuito, la constante de tiempo correspondiente en el eje  $d$  está dada por

$$\tau_d'' = \tau_{d_0}'' \frac{L_d''}{L_d'} \quad (8.80)$$

$$\tau_d' = \tau_{d_0}' \frac{L_d'}{L_d} \quad (8.81)$$

donde  $L_d''$  y  $L_d'$  son las *inductancias subtransitorias y transitorias en el eje d* respectivamente dadas por:

$$L_d'' = L_d - \frac{M_{dF}^2 L_D + M_{dD}^2 L_F - 2M_{dF} M_{dD} M_{DF}}{\Delta} \quad (8.82)$$

$$L_d' = L_d - \frac{M_{dF}^2}{L_F} \quad (8.83)$$

para el eje  $q$ , tenemos:

$$\tau_q'' = \tau_{q_0}'' \frac{L_q''}{L_q} \quad (8.84)$$

donde  $L_q''$  es la *inductancia subtransitoria en el eje q*, la cual está dada por:

$$L_q'' = L_q - \frac{M_{qQ}^2}{L_Q} \quad (8.85)$$

El procedimiento anterior muestra la utilidad del modelo de la máquina síncrona representado en Bond Graph, en donde la determinación de las constantes de tiempo se reduce a la obtención de modelos simplificados.

En el siguiente capítulo, se aplican al modelo lineal de la máquina síncrona, las herramientas gráficas presentadas en los capítulos del 3 al 7.



## 8.6 Conclusiones

El modelo en Bond Graph de la máquina síncrona dado por [23] se analiza y modifica para obtener el modelo matemático de [53].

El modelo de la máquina síncrona en Bond Graph se muestra en un sólo marco de referencia, es decir, en el dominio físico.

Se obtienen de una manera sistemática y directa los modelos simplificados de la máquina síncrona en Bond Graph,

Se propone un procedimiento para obtener las constantes de tiempo de la máquina síncrona utilizando modelos simplificados de la máquina en el dominio físico.