

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
PROGRAMA DOCTORAL EN INGENIERÍA ELÉCTRICA



**MODELOS AVANZADOS DE ELEMENTOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO DE
POTENCIA EN COORDENADAS DE FASE PARA ESTUDIOS DE ESTABILIDAD
DINÁMICA**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA:

CARLOS PÉREZ ROJAS

Monterrey, N. L., Abril de 2004

MODELOS AVANZADOS DE ELEMENTOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO DE
POTENCIA EN COORDENADAS DE FASE PARA ESTUDIOS DE ESTABILIDAD
DINÁMICA

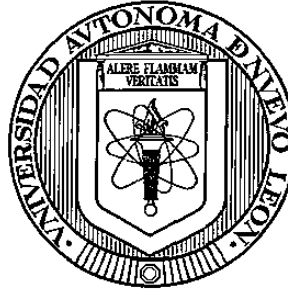
TD
Z5853
.M2
FIME
2004
.P4



1020131317



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
PROGRAMA DOCTORAL EN INGENIERÍA ELÉCTRICA



**MODELOS AVANZADOS DE ELEMENTOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO DE
POTENCIA EN COORDENADAS DE FASE PARA ESTUDIOS DE ESTABILIDAD
DINÁMICA**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA:

CARLOS PÉREZ ROJAS

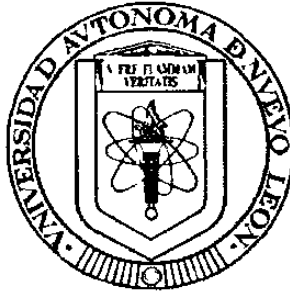
Monterrey, N. L., Abril de 2004

980091

TD
Z5853
.M2
FINE
2004
.P4



FONDO
TESI



**MODELOS AVANZADOS DE ELEMENTOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO DE
POTENCIA EN COORDENADAS DE FASE PARA ESTUDIOS DE ESTABILIDAD
DINÁMICA**

Los miembros del Comité aprueban la Tesis
de Doctorado del C. Carlos Pérez Rojas

Dr. Francisco de la Rosa Costilla
Asesor

Dr. Emilio Barocio Espejo
Secretario

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo
Vocal

Juan Manuel Ramírez Arredondo

Dr. Efraín Alcorta García
Vocal

Efraín Alcorta García

Dr. Rogelio Ramírez Barradas
Vocal

Vo. Bo.

Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodriguez
Subdirector de Postgrado



Con amor y respeto para:

Sigridt García Martínez, mi Esposa

Juventina Rojas Quintero, mi Madre

Angel Pérez Padilla, mi Padre

Mis hermanos: *Graciela, Ma. Elena, Guillermina, Rosa María,
José, Martín Javier, Silvia Patricia y Juan Luis.*

Y con *gratitud*:

A todos mis amigos, compañeros y profesores que de una u otra forma intervinieron en la preparación y elaboración de este trabajo.

Abril, 23 de 2004.

Agradecimientos

Al Dr. Francisco de la Rosa Costilla, por su comprensión y empeño en la asesoría de esta tesis.

Al Dr. Héctor Jorge Altuve Ferrer, quien siempre me motivó a culminar este trabajo.

Al Dr. Ernesto Vázquez Martínez, cuya ayuda fue invaluable.

Al Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo, gran profesionista y mejor amigo.

Al Dr. Efraín Alcorta García, por su sencillez y amistad.

Al Dr. Rogelio Ramírez Barradas, cuya constancia siempre he admirado.

Al Dr. Emilio Barocio Espejo, por su profesionalismo y dedicación.

A la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la U.M.S.N.H.

A la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Al Consejo de Ciencia y Tecnología.

Resumen

Se plantean dos modelos para la máquina síncrona en coordenadas de fase **abc**, el primero es el más completo y requiere parámetros primitivos, tanto eléctricos como magnéticos. Las ventajas que se logran son las de conseguir información de los elementos de la máquina tanto externos como internos, eléctricos y magnéticos, resultados que normalmente se obtienen mediante la aplicación de técnicas como el elemento finito, pero la ventaja es que este modelo no requiere tanto consumo en memoria y tiempo de cálculo. La segunda opción consiste en un modelo reducido, con respecto al anterior y solo requiere los parámetros estándar en **dq0**, que son proporcionados por el fabricante. La bondad que presenta este modelo es que se puede indicar la cantidad de armónicos, con su respectiva magnitud, que se desea inyecte el generador al sistema, esto es muy útil para análisis de penetración de armónicos en los sistemas de potencia.

Se prueba e implementa un modelo para el transformador trifásico de cinco columnas partiendo desde sus parámetros primitivos, se analiza en forma individual y posteriormente, lo más importante, la interconexión con los demás elementos del sistema eléctrico de potencia. Se presentan resultados del comportamiento magnético de los elementos internos del transformador, ante diferentes disturbios a los que se somete el sistema. Se considera la saturación del material magnético del transformador, representando su característica mediante un nuevo método propuesto y desarrollado en este trabajo que se basa en la función arcotangente.

Se lleva a cabo una revisión de los métodos numéricos más utilizados en el análisis de los sistemas eléctricos, haciendo énfasis en la solución de ecuaciones diferencio-algebraicas, corroborándose que la Regla Trapezoidal para el estudio de la estabilidad en el dominio del tiempo es el método más eficaz .

Una alternativa interesante es incluida en el análisis de la estabilidad transitoria, consiste en analizar un transitorio el tiempo deseado y posteriormente acelerar la solución para obtener el estado estable del sistema, si éste lo tiene, de lo contrario el proceso de aceleración no converge. Este proceso es una técnica tipo Newton, depende de la evaluación numérica del Jacobiano, lo cual nos permite hacer un estudio de sensibilidad en cualquier instante. Es importante resaltar que en un sistema multimáquina el análisis de estabilidad en el dominio del tiempo, se puede realizar sin tener una referencia durante los cálculos, pero si se desea incluir el proceso de aceleración al estado estable a este sistema el proceso no converge, éste si requiere al menos una referencia angular fija.

Los resultados obtenidos con los modelos propuestos y resolviéndolos por diferentes métodos numéricos son excelentes y permiten al analista tener un conocimiento más amplio de lo que sucede en los elementos internos de generadores y transformadores, principalmente, ante disturbios externos. Y más aun permiten evaluar los efectos de las no linealidades de los elementos internos hacia el exterior.

Se realiza una comparación del sistema de prueba en coordenadas **abc** propuesto en esta tesis, con el sistema MatLab-Simulink® aplicando el SimPowerSystems, que utiliza el sistema de referencia **dq0**, los resultados obtenidos demuestran que los modelos propuestos son correctos, además de que proporcionan una mayor cantidad de variables que auxilian en el análisis de los SEP's. También se analiza la simulación del generador con neutro aterrizado y con el neutro flotando comparándolo con mediciones de laboratorio y cuyos resultados son cualitativamente iguales.

Índice

<i>Resumen</i>	v
<i>Lista de figuras</i>	xiii
<i>Lista de símbolos</i>	xix
Capítulo 1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Estabilidad en SEP's	2
1.3 Estabilidad transitoria	3
1.3.1 Simulación de estabilidad transitoria en SEP's	3
1.3.2 Técnicas para acelerar las simulaciones de estabilidad transitoria	4
1.4 Importancia del tema	5
1.5 Estado del problema	7
1.6 Planteamiento de la investigación	7
1.7 Objetivo y contribuciones de la Tesis	9
1.8 Estructura de la tesis	11

Capítulo 2 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES

DIFERENCIALES ORDINARIAS Y ECUACIONES

DIFERENCIO-ALGEBRAICAS **13**

2.1	Introducción	13
2.2	Ecuaciones diferenciales ordinarias	14
2.3	Solución de ecuaciones no lineales	16
2.3.1	Método de Newton	17
2.3.2	Iteración funcional	18
2.3.3	Iteración Newton	18
2.3.4	Aproximación de la Matriz Jacobiana	19
2.4	Sistemas de ecuaciones rígidos	20
2.5	Ecuaciones diferencio-algebraicas	21
2.6	Métodos numéricos para ecuaciones diferencio-algebraicas	22
2.7	Ecuaciones diferencio-algebraicas en sistemas eléctricos de potencia	23
2.7.1	Simuladores de estabilidad transitoria	25
2.8	Aceleración de la solución al estado estable	26
2.9	Conclusiones	29

Capítulo 3 DESARROLLO DEL MODELO DE LA MÁQUINA SÍNCRONAINCLUYENDO ARMÓNICOS **31**

3.1	Introducción	31
3.2	Modelo del generador en coordenadas de fase abc	34
3.2.1	Ecuación de oscilación	36
3.3	Inductancias de la máquina síncrona	37
3.3.1	Fuerza magnetomotriz, FMM	38
3.3.2	Inducción magnética	46
3.3.3	Enlaces de flujo	51

3.4	Inclusión de la saturación	61
3.5	Armónicos en la máquina síncrona	67
3.6	Conclusiones	68

Capítulo 4 MODELO DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DE
CINCO COLUMNAS PARA ESTUDIOS TRANSITORIOS
DE BAJA FRECUENCIA

70

4.1	Introducción	70
4.2	Modelo del transformador trifásico de cinco columnas con n devanados por fase	72
4.3	Representación de la saturación e histéresis, aproximando mediante la función arcotangente	79
4.3.1	Característica de saturación	80
4.3.2	Histéresis	84
4.4	Simulación y resultados	84
4.5	Conclusiones	89

Capítulo 5 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD A BARRA INFINITA

DEL GENERADOR SÍNCRONO

91

5.1	Introducción	91
5.2	Solución del sistema	92
5.3	Análisis de la Estabilidad del Generador Síncrono No Regulado con Armónicos a Barra Infinita Utilizando Aceleración al Estado Estacionario	94
5.3.1	Casos de estudio	95

5.3.1.1	Generador sin aceleración numérica vs generador con aceleración	95
5.3.1.2	Generador sin armónicos vs generador con armónicos	98
5.3.1.3	Solución usando Runge-Kutta vs Regla Trapezoidal	100
5.4	Análisis de la Estabilidad del Generador Síncrono Regulado con Armónicos a Barra Infinita Utilizando Aceleración al Estado Estacionario	100
5.4.1	Casos de estudio	101
5.4.1.1	Generador sin controles vs generador con controles	102
5.4.1.2	Generador con controles vs generador con controles más armónicos	104
5.4.1.3	Generador sin controles, con controles y con controles más armónicos	106
5.5	Comparación de los métodos de integración Runge-Kutta de cuarto orden, Regla Trapezoidal y Newton	108
5.6	Análisis de la Estabilidad del Sistema Generador Regulado-Transformador- Línea-Barra Infinita, Utilizando Aceleración al Estado Estacionario	111
5.6.1	Casos de estudio	111
5.6.1.1	Sistema Máquina-Transformador-Línea-Barra Infinita, con el Transformador en conexión delta-estrella aterrizada	112
5.6.1.2	Sistema Máquina-Transformador-Línea-Barra Infinita, con el Transformador en conexión estrella aterrizada -estrella aterrizada	115
5.7	Conclusiones	117

Capítulo 6 ANÁLISIS DINÁMICO DE UN SISTEMA MULTIMÁQUINA

	EN COORDENADAS ABC	119
6.1	Introducción	119

6.2	Modelado de la Red	120
6.2.1	Generadores	120
6.2.2	Transformadores	121
6.2.3	Líneas	122
6.2.4	Cargas	124
6.3	Sistema de Prueba	125
6.4	Formulación de las Ecuaciones de Equilibrio para Estudios Transitorios y de estado estable	126
6.5	Formulación Matemática para la Red de Prueba	128
6.6	SMM con Generadores en Paralelo	137
6.7	Simulación del Sistema de Prueba	138
6.7.1	SMM sin referencia	139
6.7.2	SMM con Referencia	141
6.7.3	SMM con Falla Monofásica a Tierra en el Nodo de Carga	143
6.7.4	SMM con Cambio de Impedancia en la Carga	147
6.8	Conclusiones	150

Capítulo 7 COMPARACIÓN DEL SMM IMPLEMENTADO EN

COORDENADAS ABC vs MODELOS CONVENCIONALES 152

7.1	Introducción	152
7.2	Utilerías de sistemas de potencia en MatLab-SIMULINK®	153
7.3	Caso de estudio modelado en SPS-SIMULINK®	154
7.4	Comparación del SMM resuelto con la metodología abc y con SPS-SIMULINK®	156
7.5	Validación del SMM modelado en abc	161
7.6	Conclusiones	165

Capítulo 8 CONCLUSIONES	166
8.1 Introducción	166
8.2 Resumen de resultados	167
8.3 Trabajos futuros	168
Referencias	171
Apéndice A	183
A.1 Introducción	183
A.2 Sistema de excitación. Control Automático de Voltaje	184
A.2.1 Amplificador	184
A.2.2 Excitador	185
A.2.3 Estabilizador	185
A.2.4 Sensor de medición	185
A.2.5 Ecuaciones del sistema de excitación en variables de estado	186
A.3 Sistema en <i>p.u.</i>	186
A.4 Primo-motores, Control Automático de Generación	187
A.5 Circuito convertidor	190
Apéndice B	193

Lista de figuras

No. de Figura	Descripción	Página
1.1	Clasificación de la estabilidad en SEP's	2
1.2	Modelo para simular el sistema de potencia en coordenadas de fase	9
3.1	Diagrama esquemático de la máquina síncrona de p polos	34
3.2	Distribución del devanado de la fase a en una máquina síncrona de p polos	39
3.3	FMM de la distribución del devanado en la fase a	42
3.4	Distribución de la FMM del devanado de la fase a	43
3.5	Diagrama esquemático de los devanados en el rotor	44
3.6	Trayectoria del flujo magnético en la máquina	46
3.7	Aproximación de polos y ranuras del troquel de la máquina	47
3.8	Propiedad de la continuidad del flujo magnético	49
3.9	Característica magnética del material	61
4.1	Transformador trifásico de cinco columnas	73
4.2	Circuito equivalente eléctrico del transformador trifásico de cinco columnas	73
4.3	Circuito equivalente magnético del transformador trifásico de cinco columnas	75
4.4	Curva de saturación real y aproximada	80

4.5	Movimiento relativo variando m	81
4.6	Movimiento relativo, variando λ_n	82
4.7	Movimiento relativo, variando $\Delta\lambda$	82
4.8	Característica $i_m = f(\lambda_m)$	83
4.9	Circuito para simular la histéresis	84
4.10	Dimensiones físicas del núcleo magnético para el transformador trifásico de cinco columnas	85
4.11	Energización del transformador con $R_L = 20 p.u.$	87
4.12	Energización del transformador con $R_L = 1 p.u.$	87
4.13	Saturación durante la energización del transformador con $R_L = 20 p.u.$	88
4.14	Saturación durante la energización del transformador con $R_L = 1 p.u.$	89
5.1	Diagrama de flujo para la solución del sistema de EDA's, con aceleración al estado estable	93
5.2	Diagrama de flujo para la evaluación de un ciclo del sistema de EDA's	94
5.3	Corrientes en el estator	96
5.4	Variables mecánicas del sistema	97
5.5	Corrientes en el estator	98
5.6	Corriente en los devanados de rotor	99
5.7	Contenido armónico de las corrientes del estator	99
5.8	Desplazamiento angular	100
5.9	Corrientes en el estator	103
5.10	Variables mecánicas del sistema	104
5.11	Corrientes en el estator	105
5.12	Variables mecánicas del sistema	106
5.13	Corrientes en los devanados del rotor	107
5.14	Corrientes del rotor con referencia a la corriente de la fase a del estator	108
5.15	Corrientes en la máquina con los tres métodos de análisis con $h=3.255 \times 10^{-5}$	109
5.16	Variable mecánicas y par eléctrico, con los tres métodos de análisis con $h=3.255 \times 10^{-5}$	109
5.17	Corrientes en la máquina con los tres métodos de análisis con $h=0.001s$ para el Newton	109

5.18	Variable mecánicas y par eléctrico, con los tres métodos de análisis con $h=0.001s$ para el Newton	109
5.19	Sistema Generador-Transformador-Línea-Barra Infinita	111
5.20	Corrientes en la máquina sin considerar armónicos y con el transformador delta-estrella aterrizada	112
5.21	Corrientes en la máquina considerando armónicos y con el transformador delta-estrella aterrizada	112
5.22	Variables mecánicas y par eléctrico sin considerar armónicos y con el transformador delta-estrella aterrizada	113
5.23	Variables mecánicas y par eléctrico considerando armónicos y con el transformador delta-estrella aterrizada	113
5.24	Plano de fase en el tiempo con el transformador delta-estrella aterrizada	113
5.25	Corrientes en el transformador delta-estrella aterrizada	113
5.26	Comportamiento magnético del transformador delta-estrella aterrizada	114
5.27	Corrientes en la máquina sin considerar armónicos y con el transformador estrella aterrizada-estrella aterrizada	115
5.28	Corrientes en la máquina considerando armónicos y con el transformador estrella aterrizada-estrella aterrizada	115
5.29	Variables mecánicas y par eléctrico sin considerar armónicos y con el transformador estrella aterrizada-estrella aterrizada	116
5.30	Variables mecánicas y par eléctrico considerando armónicos y con el transformador estrella aterrizada-estrella aterrizada	116
5.31	Plano de fase en el tiempo con el transformador estrella aterrizada-estrella aterrizada	116
5.32	Corrientes en el transformador estrella aterrizada-estrella aterrizada	116
5.33	Comportamiento magnético del transformador estrella aterrizada-estrella aterrizada	117
6.1	Generador en abc conectado a un nodo del sistema de potencia	121
6.2	Circuito eléctrico equivalente del transformador trifásico	122
6.3	Modelo de la línea trifásica con retorno por tierra	123
6.4	Circuito equivalente con parámetros concentrados de la línea de transmisión	123

6.5	Circuito equivalente de un banco de capacitores trifásico	124
6.6	Modelo de la carga trifásica conectada en estrella	125
6.7	Circuito seccionado del SMM base	126
6.8	Grafo correspondiente al circuito de la Figura 6.7	128
6.9	Árbol elegido para el grafo de la Figura 6.8	129
6.10	n generadores en paralelo en el nodo $_i$ de un SMM	137
6.11	Corrientes en el generador1 del SMM, análisis transitorio	139
6.12	Corrientes en el generador2 del SMM, análisis transitorio	139
6.13	Ángulo de carga de los generadores del SMM, análisis transitorio	139
6.14	Velocidad de los generadores del SMM, análisis transitorio	139
6.15	Plano de fase de los generadores del SMM, análisis transitorio	140
6.16	Par eléctrico en los generadores del SMM, análisis transitorio	140
6.17	Voltaje en el nodo de carga, análisis transitorio	140
6.18	Corriente en la carga RL , análisis transitorio	140
6.19	Corrientes en el generador1 del SMM, con aceleración al estado estable	141
6.20	Corrientes en el generador2 del SMM, con aceleración al estado estable	141
6.21	Ángulo de carga del generador 1 del SMM, con aceleración al estado estable	142
6.22	Velocidad de los generadores del SMM, con aceleración al estado estable	142
6.23	Plano de fase del generador 1 del SMM, con aceleración al estado estable	142
6.24	Par eléctrico en los generadores del SMM, con aceleración al estado estable	142
6.25	Voltaje en el nodo de carga, con aceleración al estado estable	143
6.26	Corriente en la carga RL , con aceleración al estado estable	143
6.27	Corrientes en el generador1 del SMM, con falla asimétrica	144
6.28	Corrientes en el generador2 del SMM, con falla asimétrica	144
6.29	Ángulo de carga del generador 1 del SMM, con falla asimétrica	145
6.30	Velocidad de los generadores del SMM, con falla asimétrica	145
6.31	Plano de fase del generador 1 del SMM, con falla asimétrica	145
6.32	Par eléctrico en los generadores del SMM, con falla asimétrica	145
6.33	Voltaje en el nodo de carga, con falla asimétrica	145
6.34	Corriente en la carga RL , con falla asimétrica	145

6.35	Corrientes en el transformador 1 del SMM, con falla asimétrica	146
6.36	Comportamiento magnético del transformador 1 del SMM, con falla asimétrica	146
6.37	Corrientes en el transformador 3 del SMM, con falla asimétrica	146
6.38	Comportamiento magnético del transformador 3 del SMM, con falla asimétrica	146
6.39	Corrientes en el generador1 del SMM, con cambio en la carga	148
6.40	Corrientes en el generador2 del SMM, con cambio en la carga	148
6.41	Ángulo de carga del generador 1 del SMM, con cambio en la carga	148
6.42	Velocidad de los generadores del SMM, con cambio en la carga	148
6.43	Plano de fase del generador 1 del SMM, con cambio en la carga	148
6.44	Par eléctrico en los generadores del SMM, con cambio en la carga	148
6.45	Voltaje en el nodo de carga, con cambio en la carga	145
6.46	Corriente en la carga RL , con cambio en la carga	145
6.47	Corrientes en el transformador 1 del SMM, con cambio en la carga	150
6.48	Comportamiento magnético del transformador 1 del SMM, con cambio en la carga	150
6.49	Corrientes en el transformador 3 del SMM, con cambio en la carga	150
6.50	Comportamiento magnético del transformador 3 del SMM, con cambio en la carga	150
7.1	Sistema de prueba en SPS-SIMULINK®	155
7.2	Corrientes en el generador 1 del SMM en abc	156
7.3	Corrientes en el generador 1 del SMM en dq0 con SPS-SIMULINK®	156
7.4	Ángulo de carga del generador 1 del SMM en abc	156
7.5	Ángulo de carga del generador 1 del SMM en dq0 con SPS-SIMULINK®	156
7.6	Velocidad de los generadores del SMM en abc	157
7.7	Velocidad de los generadores del SMM en dq0 con SPS-SIMULINK®	157
7.8	Par eléctrico en los generadores del SMM en abc	158
7.9	Par eléctrico en los generadores del SMM en dq0 con SPS-SIMULINK®	158
7.10	Corriente en el nodo de carga del SMM en abc	158
7.11	Corriente en el nodo de carga del SMM en dq0 con SPS-SIMULINK®	158
7.12	Voltaje en el nodo de carga, con falla asimétrica del SMM en abc	159
7.13	Voltaje en el nodo de carga, con falla asimétrica del SMM en dq0 con SPS-SIMULINK®	159

7.14	Corrientes en el transformador 1 del SMM en abc	159
7.15	Corrientes en el transformador 1 del SMM en dq0 con SPS-SIMULINK®	159
7.16	Comportamiento magnético del transformador 1 del SMM en abc	160
7.17	Comportamiento magnético del transformador 1 del SMM en dq0 con SPS-SIMULINK®	160
7.18	Sistema generador-carga	161
7.19	Corriente medida en el generador con falla asimétrica, con neutro aterrizado	162
7.20	Voltaje medido en el generador con falla asimétrica, con neutro aterrizado	162
7.21	Voltaje en el generador con falla asimétrica usando el modelo en abc, con neutro aterrizado	162
7.22	Corrientes en el generador con falla asimétrica usando el modelo en abc, con neutro aterrizado	162
7.23	Voltaje medido en el generador con falla asimétrica, con neutro flotando	163
7.24	Corriente medida en el generador con falla asimétrica, con neutro flotando	162
7.25	Voltaje en el generador con falla asimétrica usando el modelo en abc, con el neutro flotando	164
7.26	Corrientes en el generador con falla asimétrica usando el modelo abc, con el neutro flotando	164
7.27	Voltaje en el generador con falla asimétrica usando el SPS-SIMULINK®, con neutro flotando	164
7.28	Corriente en el generador con falla asimétrica usando el SPS-SIMULINK®, con neutro flotando	164
A.1	Generador con sus controles	183
A.2	Sistema de excitación típico compensado	184
A.3	Conversión del sistema en <i>p.u.</i> entre la interfase del excitador y generador	187
A.4	Modelo simplificado para el control de la frecuencia-carga	188
A.5	Control de carga de un hidrogenerador	189
A.6	Puente convertidor de 6 pulsos	190
A.7	Secuencia de conmutación de los diodos del convertidor	191
A.8	Diagrama de flujo de voltaje de corriente continua para cada instante de tiempo	191

Lista de Símbolos

V	Vector de voltajes
I	Vector de corrientes
λ	Vector de enlaces de flujo
R	Matriz de resistencias de los devanados
Z	Impedancia
Y	Admitancia
X	Reactancia
S	Potencia aparente
P	Potencia real
Q	Potencia reactiva
L	Matriz de inductancias
G	Matriz de coeficientes rotacionales
C	Capacitancia
ω_r	Velocidad del rotor
ω_B	Velocidad base
ω_s	Velocidad síncrona
t	Tiempo [s]
p	Número de pares de polos

f	Frecuencia
L_{ad}	Inductancia de reacción de armadura
L_{md}	Inductancia de magnetización del eje d
L_{mq}	Inductancia de magnetización del eje q
L_d	Inductancia síncrona del eje d
L_q	Inductancia síncrona del eje q
L_σ	Inductancia de dispersión
L_{aa1}	Coefficiente de la inductancia propia de armadura
L_{aa2}	Coefficiente de la inductancia mutua de armadura
L_{nz}	Inductancia mutua entre los elementos n y z donde n y z pueden ser
a, b, c	fases
f	campo
g, kd, kq	devanados de amortiguamiento
H	Constante de inercia
T_m	Par mecánico
T_e	Par eléctrico
δ	Ángulo de carga
θ_r	Ángulo de posición del rotor, respecto a la fase a
θ_e	Ángulo de fase del voltaje de la fase a
ϕ	Ángulo del factor de potencia
B	Densidad magnética
H	Intensidad magnética
μ_r	Permeabilidad magnética relativa del material
μ_0	Permeabilidad magnética del aire
FMM	Fuerza magnetomotriz
Ψ	Flujo magnético
h	Paso de integración
h	Número de armónico
N	Número de vueltas de un devanado

Z_f	Número de bobinas por fase
K_{ph}	Factor de paso de bobina para el h-ésimo armónico
K_{dh}	Factor de distribución del devanado para el h-ésimo armónico
K_{sh}	Factor de sesgo de las ranuras para el h-ésimo armónico
β	Ángulo de sesgo de las ranuras
q	Número de fases por polo
n	Número de ranuras por fase
m	Factor del ángulo de paso de bobina
l	Longitud
A	Área
d	distancia tangencial
\mathfrak{R}	Reluctancia
Γ	Inversa de L
k	Constante
T_R	Constante de tiempo del sensor
T_F	Constante de tiempo del estabilizador
T_A	Constante de tiempo del amplificador
T_E	Constante de tiempo del excitador
K_R	Ganancia del sensor
K_F	Ganancia del estabilizador
K_A	Ganancia del amplificador
K_E	Ganancia del excitador
T_g	Constante de tiempo del gobernador
T_t	Constante de tiempo de la turbina
R_h	Coefficiente de regulación

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

Los Sistema Eléctricos de Potencia (SEP), son en su forma original asimétricos y no lineales en su totalidad, sin embargo, hasta ahora por lo general han sido considerados como simétricos y lineales, con la finalidad de poder realizar estudios, investigaciones y desarrollos que permitan conocer el comportamiento del SEP. Con el gran avance que se ha logrado en hardware, software y las investigaciones sobre el análisis de sistemas no lineales, es posible realizar estudios y análisis en detalle de los SEP's en sus coordenadas originales **abc**, principalmente considerando las no simetrías de la red eléctrica, así como las no linealidades en sus fuentes generadoras.

Para llevar a cabo lo anterior se deben desarrollar herramientas de simulación digital que sean eficientes computacionalmente en lo que respecta a rapidez de cálculo y ahorro de memoria. Para lo cual es necesario aprovechar las características de gran dispersidad que poseen las matrices derivadas de los SEP's, mediante técnicas apropiadas de programación. Mediante estas herramientas es posible realizar estudios y simulaciones de fallas asimétricas y oscilaciones electromecánicas en forma directa y más cercana a la realidad, así como evaluar la precisión de los estudios que

consideran al SEP simétrico y linealizado. La investigación se enfoca al estudio de estabilidad dinámica en los SEP's, donde el mayor interés radica en la dinámica que presentan los rotores de los generadores. Se estudiará el efecto de los controles del generador, como son los de excitación y velocidad.

1.2 Estabilidad en SEP's

Los SEP's son grandes, complejos y altamente no lineales. El análisis de estabilidad se realiza con modelos simplificados, Kundur[1], Machowski *et al* [2], Anderson *et al* [3]. Dependiendo de la naturaleza de la inestabilidad, magnitud del disturbio y escalas de tiempo diferentes enfoques son usados para el modelo y análisis del sistema, lo cual conlleva a una clasificación de la estabilidad en los SEP's. Esta clasificación es bien conocida en el ámbito de los SEP's y puede encontrarse en varias referencias, además de las antes mencionadas, como: Bergen *et al* [4], Sauer *et al* [5], Grainger *et al* [6], Saadat [7], Barret *et al* [8], Elgerd [9], Ilić *et al* [10], Pavella *et al* [11], y otros como [12-17]. Es importante resaltar que en ninguna de estas referencias, de las cuales muchas son ya textos clásicos en estabilidad y control en SEP's, se realiza un análisis de estabilidad en el marco de las coordenadas *abc*. Una clasificación de la estabilidad en los SEP's, se indica en la Figura 1.1 [1].

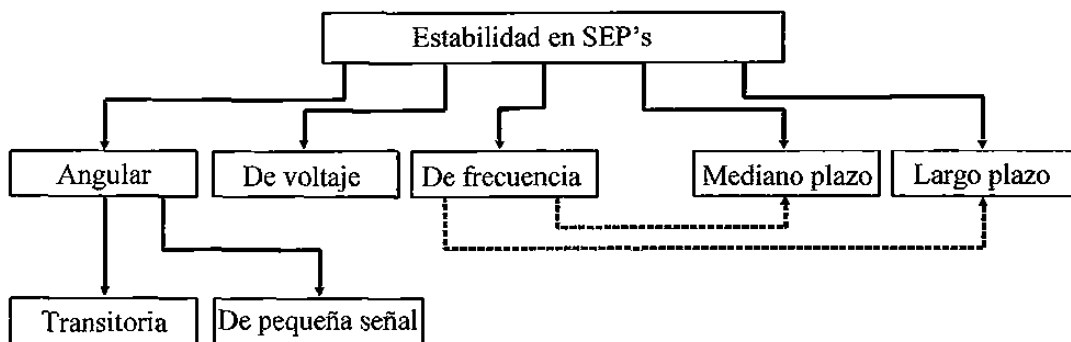


Figura 1.1 Clasificación de la estabilidad en SEP's.

La presente investigación se centra en el análisis de estabilidad transitoria en el dominio del tiempo en el marco de referencia de coordenadas *abc*. Se analiza el transitorio el tiempo deseado y posteriormente se acelera la solución al estado estable [18-26].

1.3 Estabilidad transitoria

Como se mencionó en su definición, la estabilidad transitoria examina el comportamiento dinámico del sistema de potencia por varios segundos después del disturbio al que se vea sometido el sistema. El análisis de estabilidad transitoria engloba la red eléctrica, las cargas eléctricas y las ecuaciones electromecánicas de movimiento de los generadores interconectados, [27-33]. Se realizan estudios de estabilidad transitoria fuera de línea para entender y cuantificar la habilidad que posee el sistema para resistir determinados disturbios, así como su respuesta característica para regresar a su operación normal, por ejemplo, el amortiguamiento de las oscilaciones de las unidades generadoras. Tales estudios de contingencias están orientados al diseño y/o actualización de los componentes del sistema dirigidos a la obtención de un SEP más robusto.

La complejidad computacional de los problemas de estabilidad transitoria ha mantenido en expectativa las simulaciones en tiempo real con lo que se tendría un soporte para la toma de decisiones al momento en que un disturbio ocurra [30]. Implementaciones de simulaciones más rápidas en estabilidad transitoria significan un aumento en la integridad del SEP que en forma directa o indirecta impacta en:

- ▶ Beneficios a la compañía de energía.
- ▶ Beneficios al medio ambiente.
- ▶ Satisfacción de los usuarios.

1.3.1 Simulación de estabilidad transitoria en SEP's

El SEP se modela completamente mediante un sistema de Ecuaciones Diferencio-Algebraicas (EDA's) que deben ser resueltas simultáneamente [1-4, 10-11]. El conjunto de ecuaciones diferenciales lo forman los generadores, cargas activas y demás elementos dinámicos. El conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales lo forman la red eléctrica y demás restricciones algebraicas impuestas a las variables dinámicas, aquí cabe hacer hincapié en que en el presente desarrollo la red

se modela con ecuaciones diferenciales, por lo que las restricciones algebraicas son impuestas por la ley de Kirchoff de corrientes en los nodos de la red. El análisis de estabilidad transitoria es computacionalmente intenso porque grandes sistemas de EDA's deben ser resueltos para pequeños incrementos de tiempo para asegurar la minimización de los errores en los métodos de integración para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) rígidas [34-48]. En los programas desarrollados para la solución de estabilidad transitoria tanto de uso público como comerciales, ATP, EMTP, EMTDC, PSS, EDSA, EUROESTAG, SABER, [2, 8, 11, 17, 33, 49], la dinámica de cada generador es modelada individualmente en la referencia $dq0$ y acoplados algebraicamente a través de la red eléctrica. Para sistemas a gran escala se requiere resolver simultáneamente grandes sistemas de ecuaciones no lineales dispersas [10, 46].

1.3.2 Técnicas para acelerar las simulaciones de estabilidad transitoria

La obtención de soluciones más rápidas de grandes sistemas de EDA's se logra, básicamente, mediante las siguientes dos opciones:

1. Hardware más rápido y con mayor memoria.
2. Algoritmos numéricos más eficientes.

En la actualidad se está viviendo un movimiento acelerado en lo que se refiere a la velocidad de procesamiento de los equipos de cómputo, así que por ese lado ya se cuenta con una forma de obtener soluciones más rápidas. La segunda opción que consiste en el desarrollo de algoritmos más eficientes promete ser un medio efectivo para la reducción de tiempo de reloj en los problemas de intensa computación numérica como lo es en simulaciones de estabilidad dinámica [32, 34-38, 40-41, 49-52]. Sin embargo, cuando se requiere realizar una aplicación, una fuerte sinergia existe entre hardware más rápido y algoritmos. En particular, siempre deben ir de la mano, ya que por ejemplo el uso de supercomputadoras requiere de investigación en los algoritmos que hagan un uso eficiente del procesamiento vectorial o arquitectura de procesamiento en paralelo, especialmente cuando grandes porciones de la aplicación no presentan el uso directo del procesamiento en paralelo.

La tecnología de las supercomputadoras basadas en la arquitectura del procesamiento vectorial o escalar, se ha enfocado en las limitaciones físicas: tamaño de los circuitos y velocidad de conmutación lógica. Consecuentemente el procesamiento en paralelo se dirige hacia grandes retos computacionales. Un análisis de estabilidad transitoria detallado, exacto y más rápido que el tiempo real del sistema eléctrico de una región o estado requerirá de estas supercomputadoras, respaldadas y reforzadas por el uso de algoritmos eficientes.

Numerosas investigaciones se han dirigido al uso del procesamiento en paralelo para el problema de estabilidad transitoria, [53-58]. Muchos otros artículos en este campo ofrecen la aplicación del procesamiento en paralelo al estudio de estabilidad transitoria pero solo en forma teórica. Como se puede observar la aplicación del procesamiento en paralelo a los SEP's, incluyendo los métodos numéricos más eficientes, entre los que destacan los métodos de Runge-Kutta implícitos de orden múltiple. Lo anterior está fuera de alcance de esta investigación por lo que se recomienda al lector interesado en este campo las siguientes referencias, [27, 55, 57, 59-60].

Otro enfoque interesante es la obtención del estado estable del sistema mediante técnicas tipo Newton, con esta opción el analista simula el sistema el tiempo que desea analizar de estado transitorio, y así evaluar la estabilidad transitoria, y posteriormente llevar el sistema al estado estable rápidamente y evaluarlo en estado estable, si es que el sistema posee este estado de lo contrario el proceso no converge. Esta técnica se ha aplicado principalmente a circuitos de electrónica inicialmente por Aprille y Trick [18], y a la fecha los trabajos desarrollados tipo Newton tienen su fundamento o son modificaciones de éste, en sistemas de potencia su aplicación se ha mostrado en trabajos como los de Usaola *et al* [24-26], García *et al* [19, 20, 61, 62], Semlyen *et al* [21], Pérez-Rojas *et al* [22-23]

1.4 Importancia del tema

Actualmente, con el avance en los procesadores digitales que permiten realizar cálculos a altas velocidades, así como almacenar grandes cantidades de datos a bajo costo, y por otro lado la

disponibilidad de métodos numéricos poderosos, existen las condiciones para desarrollar estudios de SEP's en el cuadro de referencia de coordenadas de fase, y compararlos con los tradicionales.

Dicha comparación es sobre todo importante en aspectos tales como las dificultades de convergencia de los métodos tradicionales usados en el estudio de una fase solamente, ver problemas relacionados con asimetrías y no linealidades, que en los modelos clásicos se tratan en forma aproximada, mientras que en el cuadro de referencia de coordenadas de fase se modelan con más precisión y facilidad, permitiendo una mejor comprensión física del sistema eléctrico.

En el área de enseñanza el tema tiene una gran importancia, ya que este modelado se acerca más a los aspectos físicos del problema, y proporciona un mejor entendimiento en el modelado y simulación desbalanceada de los SEP's. Por otro lado, permite evaluar los resultados que se obtienen al usar herramientas de transformación, como son las componentes simétricas en la red eléctrica y la transformada de Park en los generadores, es lo que tiene un elevado valor académico.

La diferencia fundamental de esta investigación estriba principalmente en mantener lo más completo posible el modelo de los elementos que intervienen directamente en el estudio que se pretende realizar, que es el de estabilidad dinámica de los SEP's. Este es un fenómeno de naturaleza electromecánica en que la importancia la tiene la dinámica de los rotores, razón por la cual el modelo de los generadores debe de realizarse de la manera más detallada posible para tener un comportamiento fiel a la realidad. De igual forma con el modelo completo del generador se incluye la opción de inyectar armónicos al sistema, por parte de la máquina, en el número y magnitud deseadas. Otro punto importante son los transformadores trifásicos, cuyo modelo realizado desde sus características magnéticas y eléctricas, nos permite observar qué pasa en el interior del mismo y qué ocasiona al sistema. Para lo cual se utiliza el modelo desarrollado para la representación de la saturación e histéresis en materiales magnéticos, usando la función arcotangente [129].

De todo lo anterior se deduce la importancia que reviste el presente tema, tanto en el área de investigación como en el proceso de enseñanza - aprendizaje.

1.5 Estado del problema

Hasta la fecha se han desarrollado investigaciones relacionadas con el modelado de la red en forma trifásica [63-65], pero principalmente orientadas a estudios de flujo de carga y fallas. Los estudios de estabilidad dinámica se desarrollan, por lo general, utilizando equivalentes del sistema y considerando simetría en los elementos de la red y las fuentes de alimentación.

La dinámica del sistema de potencia es esencial para investigar la interacción entre la red eléctrica y los generadores [63]. Este análisis es útil para determinar la magnitud de esfuerzos eléctricos y mecánicos que pueden desarrollar las unidades de generación y la red eléctrica durante y después de un disturbio eléctrico. El funcionamiento dinámico completo puede realizarse a través de simulaciones digitales en las cuales los generadores y la red son modelados en coordenadas trifásicas.

En resumen, es conveniente abordar la solución de los siguientes problemas:

- a).- Distribución de flujos de carga desbalanceados en la red.
- b).- Determinación de corrientes de falla en coordenadas de fase.
- c).- Corrientes de desbalance.
- d).- Determinación de perfiles de voltaje y grados de desbalance.
- e).- Estudio de efectos de conductores abiertos.
- f).- Puntos de equilibrio para transitorios electromagnéticos.
- g).- Estudios de enlaces de corriente alterna - corriente directa.
- h).- Análisis de estabilidad dinámica en SEP's en coordenadas de fase.
- i).- Modelo trifásico de las protecciones de los elementos del SEP.

La respuesta a estas preguntas y la solución a los problemas presentados, entre otros, pueden lograrse como resultados del desarrollo de la investigación de los SEP's en coordenadas de fase.

1.6 Planteamiento de la investigación

El problema a resolver es el estudio de estabilidad dinámica en los SEP's en el marco de

referencia en coordenadas **abc**. El comportamiento de los SEP's es inherentemente dinámico y para mantener los niveles de voltaje y frecuencia dentro de límites especificados por normas, se requiere de estrategias apropiadas de operación, control y protección de la red eléctrica. El sistema está supeditado, además de los cambios normales del mismo, a situaciones imprevistas que pueden ocasionar perturbaciones severas que hagan que el equilibrio del sistema peligre.

El comportamiento dinámico de un SEP está definido fundamentalmente por la dinámica de los rotores de las unidades generadoras, de aquí la necesidad de considerar el modelo de los generadores en forma completa, es decir, su modelo en las coordenadas de fase **abc**, que no es lineal. Otro elemento de gran relevancia son los transformadores, los cuales también son modelados en forma completa y al igual que con el generador desde el punto de vista magnético. Para la representación de la saturación e histéresis en materiales ferromagnéticos se desarrolla un modelo en base a la función arcotangente, con mayor rapidez computacional y un mínimo de parámetros a usar [129]. Las líneas de transmisión son modeladas en coordenadas **abc** con parámetros concentrados mediante ecuaciones diferenciales, al igual que los bancos de capacitores y las cargas **RL**. Las restricciones algebraicas se obtienen mediante el equilibrio nodal de corrientes, ley de Kirchhoff de corrientes:

Para tener un sistema eléctrico regulado se tienen que incluir los controles de excitación y carga a cada generador del sistema, los cuales están descritos, en el dominio del tiempo, por un conjunto de ecuaciones diferenciales y restricciones algebraicas.

Con esto se observa que el SEP se representa mediante un sistema de EDA's. En la Figura 1.2, se muestra el diagrama de bloques general propuesto para el modelo del sistema de potencia en el marco de referencia de coordenadas de fase. Los elementos que forman el diagrama son:

- a).- Modelo del generador síncrono
- b).- Modelo del transformador
- c).- Modelos del sistema de excitación y del sistema gobernador-turbina
- d).- Modelo de la red eléctrica

Donde cada elemento del sistema presenta las variables que requiere y/o las variables que aporta a otro elemento, así como el tipo de ecuaciones que lo definen. La solución del SEP consiste en resolver el conjunto de EDA's utilizando métodos numéricos adecuados al estudio que se desee realizar.

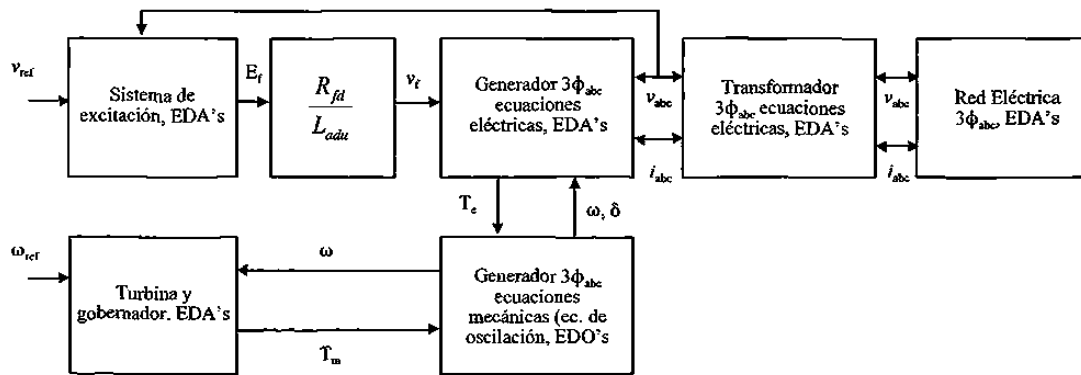


Figura 1.2 Modelo para simular el sistema de potencia en coordenadas de fase.

1.7 Objetivo y contribuciones de la Tesis

Los beneficios que se pretenden alcanzar con la presente investigación son:

- Desarrollo de un modelo completo de la máquina síncrona en coordenadas de fase **abc** considerando saliencia en el rotor y estator, desde el punto de vista de sus elementos magnético y eléctricos básicos.
- Desarrollo e implementación de un modelo reducido en coordenadas de fase **abc** para la máquina síncrona, que considere inyección de armónicos al sistema en el número y magnitud deseados.
- Desarrollo de un modelo para la representación de la saturación e histéresis en materiales magnéticos, utilizando la función arcotangente. Modelo sencillo conceptualmente hablando y de una implementación y funcionamiento en computadora rápido y eficaz. Requiere de solo tres constantes que se calculan a partir de la curva de saturación del material magnético en análisis.

- Revisión, implementación y aplicación de un modelo para transformadores trifásicos con las conexiones más utilizadas en los SEP's, basándose en los parámetros primitivos tanto magnéticos como eléctricos. Considerando el efecto de la saturación.
- Inclusión de los controles de excitación y velocidad al modelo desarrollado del generador en coordenadas de fase **abc**.
- La finalidad de poder realizar simulaciones y estudios de disturbios asimétricos, o no muy usuales en el sistema de potencia eléctrico, en forma directa.
- Análisis e implementación de métodos numéricos que puedan ser considerados como los más apropiados en los estudios de SEP's en la referencia de coordenadas de fase.
- Análisis de la estabilidad a los siguientes sistemas eléctricos en coordenadas de fase **abc**
 - Generador-barra infinita con y sin inyección de armónicos
 - No regulado
 - Regulado
 - Generador-transformador-línea-barra infinita
 - Sistema multimáquina.
- Obtención del estado estable en forma rápida usando un método tipo Newton para acelerar la obtención de dicho estado.
- Revisión del estado del arte en los métodos numéricos para la solución y análisis de las EDA's.
- Comparación del sistema multimáquina completo, con su equivalente en SimPowerSystems de SIMULINK[®] que es uno de los programas más socorridos en el ambiente académico, de investigación y de desarrollo.

1.8 Estructura de la tesis

El trabajo consta de ocho capítulos, enumerados como se indica:

- 1.- Introducción
- 2.- Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferencio-algebraicas
- 3.- Desarrollo del modelo de la máquina síncrona incluyendo armónicos
- 4.- Modelo del transformador trifásico de cinco columnas para estudios transitorios de baja frecuencia
- 5.- Análisis de estabilidad a barra infinita del generador síncrono
- 6.- Análisis dinámico de un sistema multimáquina en coordenadas **abc**
- 7.- Comparación del SMM implementado en coordenadas **abc** vs modelos convencionales
- 8.- Conclusiones

El primer capítulo presenta los antecedentes, la situación del problema abordado y el alcance del presente trabajo.

En el segundo capítulo se hace una revisión de los métodos numéricos más usados en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferencio-algebraicas, en el ámbito general y particularmente en los SEP's. Así como el fundamento del proceso de aceleración al estado estable de un sistema de EDA's.

En el tercer capítulo se modela la máquina síncrona en sus coordenadas originales. El modelo se basa en parámetros primitivos como distribución de devanados, número de vueltas, dimensiones del troquel, entre otros. Se presenta un modelo completo en función de los parámetros indicados. Adicionalmente se reduce el modelo para no depender de estos parámetros primitivos y se adiciona la opción de incluir armónicos del número y magnitud deseados. Donde este último modelo depende de los parámetros clásicos en **dq0** que proporciona el fabricante. Se presentan, a su vez, las

ecuaciones para transformar estos datos a la referencia de coordenadas **abc**.

El cuarto capítulo presenta la revisión, implementación y prueba del modelo del transformador trifásico de cinco columnas considerando saturación, es importante la revisión de este modelo en sus tradicionales conexiones utilizadas en los SEP's. Se incluye un ejemplo de prueba, con los datos y parámetros necesarios.

En el quinto capítulo se realiza la simulación del sistema máquina barra infinita sin controles y con controles, considerando que el generador inyecta armónicos o no inyecta armónicos. Se realizan también las simulaciones del sistema Generador-Transformador-Línea-Barra infinita, para probar los modelos del generador y transformador completas en coordenadas **abc** ante una referencia fija. Estas simulaciones arrojan resultados del transitorio y del estado estable, antes y después de los transitorios debido a las fallas.

El capítulo sexto describe el procedimiento para la modelación y formulación del sistema multimáquina en términos de la fases **abc**. Se presentan las características fundamentales del sistema de ecuaciones resultante que describen la dinámica lenta de la red y de los generadores. Se muestran resultados del comportamiento transitorio y de estado estable ante diferentes situaciones y distintas fallas en el sistema multimáquina.

En el capítulo séptimo es implementado el sistema multimáquina, analizado en el capítulo seis, en el paquete de simulación MatLab con el SimPowerSystems (SPS), de SIMULINK[®] haciendo las transformaciones y consideraciones necesarias con el objetivo de realizar una comparación entre la metodología propuesta en la presente Tesis y la forma en que se resuelve utilizando SPS de SIMULINK[®], el cual se basa en la teoría clásica para estudios de estabilidad, principalmente en el modelo de los generadores en el cuadro de referencia **dq0**.

Finalmente en el octavo capítulo se dan las conclusiones, recomendaciones para trabajos futuros y las aportaciones de la presente investigación.

Capítulo 2

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y ECUACIONES DIFERENCIO-ALGEBRAICAS

2.1 Introducción

Una solución analítica para las ecuaciones diferenciales no lineales, en términos generales, no existe. Por lo cual se emplean técnicas de integración numérica para obtener una solución aproximada y_n a la solución continua $y(t_n)$. Estas técnicas emplean procedimientos de paso por paso, donde estos pasos pueden ser de amplitud constante o variable de acuerdo a la aplicación del método numérico. Se cuenta con un gran número de métodos numéricos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales con condiciones iniciales conocidas. Así como estas ecuaciones diferenciales y ordinarias (EDO's), con restricciones algebraicas que forman los sistemas conocidos como diferencio-algebraicos.

A lo largo de este capítulo se proporcionan los métodos numéricos más utilizados en la simulación de los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP's). Los sistemas de ecuaciones resultantes del modelo de los SEP's son sistemas de ecuaciones diferencio-algebraicas (EDA's).

Los sistemas diferencio-algebraicos utilizan los mismos métodos numéricos que los sistemas diferenciales, en donde la solución se debe obtener tanto para las diferenciales como para las algebraicas, en forma alterna o simultánea, para cada instante de tiempo. Lo anterior se logra mediante la aplicación de la Iteración Funcional o la Iteración de Newton; el tipo de iteración a utilizar depende de si el sistema es rígido o no lo es.

Actualmente, muchos grupos de investigadores alrededor del mundo están explotando las bondades de los métodos de Runge-Kutta implícitos, recordemos que tradicionalmente se han usado los métodos de Runge-Kutta explícitos, para la solución de ecuaciones diferencio-algebraicas de índice superior así como el estado de la variación del paso de integración óptimo para estos métodos. Estos dos últimos aspectos quedan fuera del alcance de esta investigación, únicamente aclarando que en realidad en la literatura de métodos numéricos aplicados en la simulación de los SEP's sí se ha usado y se sigue usando una versión de los métodos de Runge-Kutta implícitos: la Regla Trapezoidal. Ésta se obtiene directamente del método de Runge-Kutta implícito de segundo orden.

Los sistemas de EDO's y EDA's requieren de condiciones iniciales consistentes, en los SEP's normalmente se obtienen mediante un estudio de flujos de carga en estado estable lo cual es práctica común. Una opción alterna es usar técnicas numéricas de aceleración de la solución al estado estable periódico, que se puede aplicar tanto para el cálculo de condiciones iniciales consistentes así como la obtención del estado estable periódico de forma rápida después de un disturbio, especialmente cuando los sistemas no contienen mucho amortiguamiento.

2.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales se emplean para modelar problemas en ciencias e ingeniería que implican el cambio de una variable respecto a otra. La mayoría de estos problemas requiere la solución de una ecuación diferencial que satisfaga una condición inicial dada.

En la mayoría de los casos reales, la ecuación diferencial que modela el problema es muy

complicada para resolverla exactamente, por lo que se toma uno de los procedimientos para aproximar la solución. El primero es simplificar la ecuación diferencial a una que pueda resolverse exactamente. El otro enfoque consiste en obtener métodos para aproximar la solución del problema original directamente. Este último enfoque es el adoptado comúnmente, puesto que los métodos numéricos de aproximación proporcionan resultados más precisos e información real del error.

Los métodos numéricos utilizados no obtienen una aproximación continua a la solución del problema de valor inicial. En su lugar encuentran aproximaciones en ciertos puntos específicos, con frecuencia igualmente espaciados. El problema a resolver es escrito en forma general como:

$$y' = f(t, y) \quad 0 \leq t \leq b \quad (2.1)$$

con $y(0)=c$, condiciones iniciales conocidas. Esta EDO se puede pensar como escalar o matricial y se asume suficiente uniformidad y límites en $f(t, y)$ y así garantizar la existencia de la solución $y(t)$.

Los métodos más recomendados, por su simplicidad en la implementación así como sus propiedades de estabilidad y exactitud, son la Regla Trapezoidal y el Runge-Kutta de Cuarto Orden. La formulación de la Regla Trapezoidal es:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1})] \quad (2.2)$$

La Regla Trapezoidal es un método simétrico, es decir $f(t, y)$ es igual a $f(-t, y)$. La Regla Trapezoidal es más exacta y generalmente requiere menos pasos de integración para satisfacer una tolerancia de error dada. Es un método A-estable.

Por otro lado la formulación del Runge-Kutta de cuarto Orden es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\
 K_2 &= f\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{K_1}{2}\right) \\
 K_3 &= f\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{K_2}{2}\right) \\
 K_4 &= f(t_{n-1} + h, y_{n-1} + K_3)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
 \tag{2.4}$$

Tradicionalmente los métodos de Runge-Kutta son explícitos, sin embargo, actualmente se está explotando la versión implícita en la solución de sistemas rígidos.

2.3 Solución de ecuaciones algebraicas no lineales

Las soluciones de una ecuación algebraica no lineal se llaman raíces o ceros. La razón principal para resolver ecuaciones no lineales por medio de métodos numéricos, es que esas ecuaciones carecen de solución exacta, excepto para muy pocos problemas. La solución analítica de las ecuaciones polinomiales existe solo hasta el cuarto orden, pero no existen soluciones en forma exacta para ordenes superiores. Por lo tanto, las raíces de esas ecuaciones no lineales se obtienen mediante métodos computacionales basados en procedimientos iterativos.

Los métodos numéricos diseñados para encontrar las raíces son poderosos, aunque cada uno tiene sus propias limitaciones y defectos. Entre estos métodos el más empleado en ciencias e ingeniería es el Newton.

2.3.1 Método de Newton

Para una ecuación no lineal escalar

$$g(y) = 0 \quad (2.5)$$

se define una secuencia de iteración con y^0 como los valores iniciales y y^l como la iteración actual l , que en forma escrita es:

$$0 = g(y) = g(y^l) + g'(y^l)(y - y^l) + \dots \quad (2.6)$$

Ignorando los términos de orden superior en esta expansión de Taylor para la aproximación de y , se puede definir la próxima iteración y^{l+1} por la ecuación lineal:

$$0 = g(y^l) + g'(y^l)(y^{l+1} - y^l) \quad (2.7)$$

despejando y^{l+1} se obtiene la representación clásica del método Newton:

$$y^{l+1} = y^l - g'(y^l)^{-1} g(y^l) \quad (2.8)$$

Generalizando este resultado a un sistema de m ecuaciones algebraicas con m incógnitas

$$g(y) = 0 \quad (2.9)$$

todo permanece igual, solo que como vectores, excepto que la primer derivada de g es reemplazada por la matriz Jacobiana $\partial g / \partial y$ de $m \times m$. Con lo que se obtiene:

$$y^{l+1} = y^l - \left[\frac{\partial g}{\partial y}(y^l) \right]^{-1} g(y^l) \quad l = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

2.3.2 Iteración funcional

Para los métodos implícitos como la Regla Trapezoidal, un sistema de ecuaciones no lineales debe ser resuelto para cada paso de integración. Así, para la Regla Trapezoidal el sistema de ecuaciones no lineales es:

$$g(y_n) = y_n - y_{n-1} - \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1})] = 0 \quad (2.11)$$

Se tienen dos formas básicas para resolver (2.11) que son la Iteración Funcional y la Iteración Newton, esta última se verá en líneas posteriores.

El primer intento debe resolver el sistema no lineal mediante Iteración Funcional. Siguiendo con el ejemplo de (2.11), la Iteración Funcional es:

$$y_n^{l+1} = y_{n-1} + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n^l) + f(t_{n-1}, y_{n-1})] \quad l = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

donde los valores iniciales para la iteración $l=0$ son $y_n^l = y_{n-1}$.

La ventaja aquí es la simplicidad en la implementación computacional y comprensión por el usuario. Sin embargo, la convergencia de esta iteración requiere que $h\|\partial f/\partial y\| < 1$ en alguna norma. Para sistemas rígidos $\|\partial f/\partial y\|$ es grande, de aquí que el tamaño de h deba ser pequeño, lo que puede ser una restricción para el uso de este método. Normalmente se usa la Iteración Funcional en combinación con métodos implícitos para la solución de problemas no rígidos.

2.3.3 Iteración Newton

Actualmente el método de Newton y variantes del mismo, son usados virtualmente en todos los modernos códigos de EDO's rígidas. La Regla Trapezoidal (2.2) es el método implícito más

utilizado en la implementación de simuladores de SEP's; aplicándole el método de Newton se obtiene la formulación de la Iteración de Newton para la solución de EDA's rígidas.

$$\mathbf{y}_n^{(l+1)} = \mathbf{y}_n^{(l)} - \left[\mathbf{I} - \frac{h}{2} \frac{\partial \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n^{(l)})}{\partial \mathbf{y}_n} \right]^{-1} \left[\mathbf{y}_n^{(l)} - \mathbf{y}_{n-1} - \frac{h}{2} \mathbf{f}(t_{n-1}, \mathbf{y}_{n-1}) - \frac{h}{2} \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n^{(l)}) \right] \quad (2.13)$$

La matriz $[\mathbf{I} - (h/2) \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}]$ es evaluada en la actual iteración \mathbf{y}_n^l . Esta matriz es llamada Matriz de Iteración y el costo de formarla y resolver el sistema lineal, representa la mayor carga computacional de la solución del problema. El proceso iterativo inicia con las condiciones de arranque $\mathbf{y}_n^0 = \mathbf{y}_{n-1}$, itera hasta que un error en las variables entre la última iteración y la precedente sea menor que una tolerancia especificada por el usuario, como:

$$|\mathbf{y}_n^{l+1} - \mathbf{y}_n^l| \leq \text{tolerancia} \quad (2.14)$$

Con las condiciones iniciales adecuadas para el sistema de EDO, el Newton requeriría de muy pocas iteraciones para cada paso de integración.

2.3.4 Aproximación de la Matriz Jacobiana

El método de Newton requiere la evaluación de la matriz Jacobiana $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}$. Esto para ecuaciones escalares no es problema, pero para casos reales, especificar estas derivadas parciales analíticamente es muy difícil y/o tedioso. Una técnica conveniente es usar la aproximación por diferencias, definida por la siguiente relación:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \approx \frac{\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n + \varepsilon \mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)}{\varepsilon} \quad (2.15)$$

donde ε es una perturbación.

El valor de la perturbación es un parámetro pequeño y positivo, debe elegirse un valor lo más pequeño posible para dar una aproximación más exacta del Jacobiano pero no tan cercano a cero que provoque errores numéricos. Una buena elección es $\varepsilon \approx 10^{-7}$ [98], ya que tomar valores más pequeños lleva a resultados incorrectos, en base a la aritmética del punto flotante del procesador con que se resuelva el sistema. ω_j es un vector unitario con la j -ésima componente igual a 1 y 0 las demás, con este vector se asegura la perturbación para solo la j -ésima variable de estado.

El proceso de obtención de $\partial f / \partial y$ aproximadamente mediante (2.15), consiste en aplicar (2.15) para cada columna del Jacobiano, es decir, el Jacobiano se forma columna a columna. Para la obtención de la columna j se evalúa la función f con una perturbación ε en la j -ésima variable de estado, o sea, $f(t_n, y_n + \varepsilon \omega_j)$, a ésta se resta f evaluada en la iteración anterior, $f(t_n, y_n)$ y el resultado se divide entre la perturbación ε .

Como se puede observar el costo de la aproximación de la matriz Jacobiana se incrementa de acuerdo al número de variables de estado, ya que se tiene que evaluar $n+1$ veces la función, donde n es el número de variables de estado. Esto último es de relevante importancia en el caso de la Iteración Newton sobre algún método numérico implícito. Para este caso las $n+1$ evaluaciones de la función se realizan para cada paso de integración lo cual eleva en mucho el costo computacional.

Con esta base se realizan algunas acciones para la reducción de este costo computacional. Estas consisten en calcular el Jacobiano al inicio de cada iteración o más aún, mantenerlo constante por algunas iteraciones. Estas modificaciones llevan al denominado Newton deshonesto.

2.4 Sistemas de ecuaciones rígidos

Normalmente la rigidez de un sistema de EDO's se describe en términos de múltiples escalas de tiempo. Un sistema rígido es aquel que involucra un cambio rápido en sus componentes junto con un cambio lento de algunos. En muchos casos la variación rápida de componentes son transitorios efímeros que terminan rápidamente, después de lo cual la solución es dominada por la variación lenta

de componentes. Aunque los fenómenos transitorios existen sólo para una parte del intervalo de integración, pueden dictar el paso del tiempo para toda la solución. La solución adecuada a este tipo de problemas es usar para la aproximación de la solución métodos implícitos, con lo que el problema se reduce a resolver un conjunto de ecuaciones simultáneas en cada paso de integración.

Para EDO's no lineales la solución es más difícil, ya que involucra resolver un sistema de ecuaciones no lineales para cada paso de integración. Mientras se gana estabilidad se aumenta el costo al agregar complejidad a la solución.

La elección de los métodos a usar depende de dos parámetros a ponderar, estabilidad y exactitud. El uso de métodos de órdenes superiores produce soluciones más exactas pero los límites de estabilidad son reducidos. Lo recomendable en la literatura es usar métodos implícitos de segundo o tercer orden, con pasos de integración pequeños y así se logra tener un amplio margen en la estabilidad del método como en su exactitud.

En resumen se puede decir que el concepto de rigidez se entiende mejor en términos cualitativos más que cuantitativos. Así mismo la rigidez depende, adicionalmente a la EDO misma, de la exactitud deseada, del tamaño de paso de integración y de la región de estabilidad absoluta del método numérico.

2.5 Ecuaciones diferencio-algebraicas

La definición más simple para las Ecuaciones Diferencio-Algebraicas (EDA's) consiste en un sistema de EDO's con restricciones algebraicas en las variables. Un sistema de EDA's envuelve una mezcla de diferenciaciones e integraciones, se espera que aplicando diferenciaciones analíticas al sistema dado, reduciendo lo necesario y repitiendo las diferenciaciones lo conveniente, se alcanza un sistema de EDO's explícito para todas la incógnitas. Esto es cierto a menos que el problema sea singular. El número de diferenciaciones necesarias para lograr esta transformación se llama índice de la EDA. Lo cual implica, por ejemplo, que una EDO tiene índice 0.

La representación de las EDA's puede ser en forma implícita o semi-implícita. La forma implícita es:

$$F(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0 \quad (2.16)$$

donde $\partial F/\partial \mathbf{y}'$ debe ser singular. El rango y estructura de la matriz Jacobiana depende, en general, de la solución de $\mathbf{y}(t)$, la cual se supone que es independiente del tiempo.

Por otro lado la forma semi-explicita es:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (2.17)$$

$$0 = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (2.18)$$

el índice de (2.16) es 1 si $\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{z}$ es no singular, porque entonces una diferenciación de (2.18) arrojaría una \mathbf{y}' . Para las EDA's semi-explicitas se puede distinguir entre variables diferenciales $\mathbf{y}(t)$ y variables algebraicas $\mathbf{z}(t)$. Las variables algebraicas pueden ser menos suaves que las diferenciales, o más aún pueden ser no diferenciables.

2.6 Métodos numéricos para ecuaciones diferencio-algebraicas

El enfoque numérico para la solución de EDA's, puede dividirse en dos clase: (i) discretización directa del sistema dado y (ii) métodos que requieren una reformulación para reducir el índice y combinados con una discretización.

La reformulación del sistema puede ser costosa, sobre todo para sistemas reales de grandes dimensiones. Pero es necesaria puesto que la discretización directa está limitada su utilidad a EDA's de índice 1. Afortunadamente la mayoría de las EDA's encontradas en la práctica son de índice 1.

En base a lo anterior, la solución de las EDA's de índice 1 consiste en discretizar las

ecuaciones diferenciales usando un método numérico de aproximación como los indicados para las EDO's y resolver esta discretización junto con las restricciones algebraicas para cada paso de integración. Esto último se puede realizar en forma alternada o simultánea, con Iteraciones Funcionales o de Newton, dependiendo si el sistema de ecuaciones son lineales o no lineales y si el sistema es rígido o no.

2.7 Ecuaciones diferencio-algebraicas en sistemas eléctricos de potencia

La simulación del comportamiento del Sistema de Potencia es una herramienta de alta utilidad en la planeación del sistema, análisis de estabilidad y operación del mismo. En los Sistemas de Potencia es usual modelar los generadores, reguladores de voltaje, gobernador-turbina y las cargas del sistema por medio de ecuaciones diferenciales; mientras que la red es modelada con ecuaciones algebraicas, el tradicional método nodal. La unión de estos dos sistemas de ecuaciones forman el sistema de ecuaciones diferencio-algebraicas que debe resolverse numéricamente para simular el comportamiento del sistema.

Las ecuaciones diferenciales describen la dinámica del sistema y los principales componentes que contribuyen a ella son los generadores y cargas dinámicas, mientras que las ecuaciones algebraicas describen la red, las cargas estáticas y las restricciones algebraicas del generador. La solución de estas dos ecuaciones define el estado electromecánico del sistema para cualquier instante en el tiempo.

El sistema de EDA's que se forma en los SEP's son de la forma de (2.17) con restricciones algebraicas (2.18) cuya solución puede ser particionada (alterna) o simultánea. En la solución particionada las ecuaciones diferenciales son resueltas usando un método de integración explícito con las ecuaciones algebraicas resueltas separadamente para cada paso de integración. La solución simultánea usa métodos de integración implícitos, para convertir las ecuaciones diferenciales (2.17) en un conjunto de ecuaciones algebraicas las cuales son combinadas con las ecuaciones algebraicas de la red (2.18) y resueltas como un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales.

La efectividad de estas dos soluciones depende tanto del modelo usado para el generador y del método numérico de integración. Para una óptima selección del método de integración a usar, es necesario entender las escalas de tiempo de la dinámica del sistema completo. Se sabe que la solución de un conjunto de EDO's lineales es en la forma de una combinación lineal de funciones exponenciales donde cada una describe un modo individual del sistema. Estos modos son definidos por eigenvalores del sistema los cuales son relacionados a las escalas de tiempo de las diferentes dinámicas en el modelo. Cuando los eigenvalores tienen un rango de valores distribuidos ampliamente en el plano complejo, la solución consistirá de la suma de las dinámicas que cambian rápidamente, correspondientes a grandes eigenvalores, y las dinámicas que cambian lentamente, correspondientes a pequeños eigenvalores.

A un sistema que presenta ambas dinámicas se le conoce como rígido. Un sistema no lineal es rígido si su aproximación lineal es rígida.

Los modelos electromecánicos de los Sistemas de Potencia incluyen tanto las ecuaciones transitorias, con sus constantes de tiempo pequeñas, así como la dinámica lenta de los rotores, lo cual constituye un sistema rígido. La rigidez del modelo se ve aumentada si las ecuaciones del regulador de voltaje, constantes de tiempo pequeñas, y las del gobernador-turbina, constantes de tiempo grandes, son incluidas en el modelo. La solución para este modelo debe considerar métodos de integración que tomen en cuenta la rigidez del sistema. Por el contrario si el modelo solo incluye la dinámica lenta del rotor, los métodos de integración simples son suficientes.

En los SEP's los métodos de integración utilizados en la mayoría de los simuladores se pueden clasificar en dos categorías: de un paso, los métodos de Runge-Kutta y los multipasos, métodos predictor-corrector. Los métodos de Runge-Kutta clásicos, generalmente se aplican en la solución alterna de sistemas no rígidos. Mientras que los métodos implícitos se usan tanto en la solución alterna como simultánea de sistemas rígidos.

La solución de las fórmulas explícitas se lleva a cabo en forma iterativa, donde ésta puede ser Funcional o Newton. La Iteración Funcional es la forma más simple de resolver una formulación

implícita, siendo suficiente para sistemas de EDA's no rígidas.

En los sistemas de EDA's con grandes eigenvalores, sistemas rígidos, es necesario usar la Iteración Newton en lugar de la Funcional. El método de Newton permite pasos de integración mayores, pero como la matriz de iteración debe de ser calculada e invertida para cada paso n veces hasta converger, la complejidad del método es mucho mayor que para la Iteración Funcional. Sin embargo, si el paso de integración es suficientemente grande entonces la complejidad del Newton se puede justificar.

Como se ha observado las fórmulas de orden superior presentan una mayor exactitud en la solución aproximada, sin embargo tienen la desventaja de que su implementación computacional se dificulta y además su área de estabilidad numérica se va decrementando conforme aumenta el orden del método. La mayoría de los programas desarrollados para la solución de grandes sistemas de EDA's utilizan fórmulas de segundo y tercer orden para evitar problemas de estabilidad numérica.

Se pueden usar formulaciones que contengan procedimientos de paso variable y orden variable o paso variable y orden constante. El cambio automático del orden y/o del paso de integración del método requiere cálculos adicionales. Además un cambio en el paso de integración provoca en la mayoría de los métodos cambios en los coeficientes del mismo.

2.7.1 Simuladores de estabilidad transitoria

Un simulador de estabilidad transitoria está compuesto de tres partes esenciales:

1. Interfase con el usuario.
2. Técnica de solución de las EDA's.
3. Métodos de análisis para clasificar la estabilidad de la red.

Numerosas técnicas de análisis han sido dirigidas hacia los SEP's en lo que respecta a la

solución de las EDA's [1-11, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 41, 46-48], entre las que se incluyen:

1. Análisis iterativo en el tiempo.
2. Procesamiento en paralelo en el dominio del tiempo.
3. Técnicas de Newton.
4. Técnicas de relajación.
5. Métodos de Kraylov.

Cada una de estas técnicas requieren análisis numérico adicional, tal como:

1. Métodos de integración numérica usando la Regla Trapezoidal.
2. Solución de las ecuaciones no lineales mediante el método de Newton.
3. Solución de las ecuaciones no lineales mediante la Iteración de Picard.
4. Solución de las ecuaciones no lineales mediante métodos de Relajación.
5. Solución de las ecuaciones no lineales mediante el método de Kraylov.
6. Solución de las ecuaciones lineales con métodos iterativos.

Los métodos de solución numérica de las EDA's han sido aplicados al problema de estabilidad transitoria.

2.8 Aceleración de la solución al estado estable

Del análisis numérico de sistemas no lineales con entradas periódicas estables, se puede obtener la respuesta periódica en estado estable con una condición inicial de estado dada, mediante la aplicación de un método de integración al sistema de ecuaciones hasta que la respuesta se haga periódica. En sistemas pobremente amortiguados este proceso de integración se extiende sobre muchos periodos de tiempo haciéndolo costoso, computacionalmente hablando. Para este tipo de sistemas sería muy difícil que llegaran a su estado estable periódico usando únicamente técnicas de punto por punto, por esta razón se han usado técnicas de aceleración al estado estacionario. Estas

técnicas numéricas inicialmente fueron desarrolladas e implementadas por Aprille y Trick [18], con aplicaciones principalmente en circuitos de electrónica, en sistemas de potencia se tienen trabajos de Usaola *et al* [24-26], quienes han trabajado en algoritmos híbridos en tiempo y frecuencia con elementos no lineales en el sistema, así mismo estas técnicas se han aplicado posteriormente, con sus características particulares por García *et al.* [19, 20, 61, 62], Semlyen *et al.* [21] y Pérez-Rojas *et al* [22, 23], cuyas aplicaciones a los SEP's han sido directas.

Otras técnicas de aceleración, utilizando los esquemas de Newton y que aún no han sido explotadas en los SEP's, son las investigaciones realizadas por Fokkema *et al.* [67] con la aplicación de los métodos Krylov o Newton inexactos, Vanderstraeten [68] quien propone una aceleración basada en la reutilización de la información del Jacobiano, Engelborghs *et al* [69] acelera la solución mediante el uso de la Iteración de Picard. Li *et al* [70] realizan una comparación de los métodos para acelerar la solución al estado estable, destacando la formulación Newton que usa la diferenciación automática para la obtención del Jacobiano, además hacen la comparación con otros métodos como Skelboe [71], Bukowski y Broyden [70]. Tolsma [72] evalúa eficientemente el Jacobiano disperso, mientras que Ushida [73] realiza un análisis de estado estable usando métodos híbridos. En [74-76] Houben y Maubach aceleran al estado estable utilizando los mapas de Poincaré.

La técnica utilizada en esta investigación es la propuesta inicialmente por Aprille y Trick [18] y se basa en el método de Newton a un mapeo de la ecuación a solucionar. Si existe una órbita estable el algoritmo de Newton converge a ella rápidamente, siempre y cuando las condiciones iniciales se encuentren en la vecindad de ésta órbita.

Considerando el problema como una EDA (2.17 - 2.18) donde y y f son vectores de dimensión n , y z son las variables algebraicas. f es periódica en $t \in T$. y es continua en t y su primera derivada parcial respecto a y es continua respecto a t donde $-\alpha < t < \alpha$. Por lo tanto se tendrá una solución periódica de (2.17- 2.18) en el periodo T .

El objetivo es determinar la solución periódica de (2.17-2.18) sobre el intervalo $[0, T]$ partiendo de una condición inicial. La solución de (2.17-2.18) en el intervalo $[0, T]$ debe satisfacer la condición frontera:

$$y(0) = y(T) \quad (2.19)$$

integrando (2.17) se tiene

$$y(T) = \int_0^T f(y, \tau) d\tau + y(0) \quad (2.20)$$

bajo las restricciones algebraicas (2.18), se puede expresar (2.19) en términos del mapeo

$$y_0 = E(y_0) \quad (2.21)$$

donde

$$y_0 = y(0) \quad E(y_0) = \int_0^T f(y, \tau) d\tau + y_0 \quad (2.22)$$

por lo tanto $y(t)$ satisface (2.17) para $0 \leq t \leq T$.

La solución del estado estable se obtiene aplicando el método de Newton a (2.21):

$$y_0^{l+1} = y_0^l + [I - E'(y_0^l)]^{-1} [E(y_0) - y_0^l] \quad (2.23)$$

donde $E'(y_0^l)$ es el Jacobiano del sistema (2.23) y el cual es aproximado numéricamente como se indica en el apartado §2.3.4; $E(y_0)$ es la solución del sistema en el punto inicial.

Esta técnica numérica se aplica al sistema a resolver en periodos T y el criterio de convergencia es el estándar del método de Newton en base a una tolerancia proporcionada por el usuario.

La aplicación de este algoritmo puede extenderse al cálculo de condiciones iniciales consistentes para la solución del problema de estabilidad en los SEP's. Aventajando el cálculo de tales condiciones mediante un estudio de flujos de carga en el hecho de que con esta técnica de aceleración los modelos del sistema permanecen intactos, Mientras que en un estudio de flujos se utilizan normalmente modelos reducidos.

Después de cualquier disturbio se deja espacio para ver el transitorio en el tiempo que se desee y aplicando aceleración se tendría el estado estable nuevamente. Para una revisión más a fondo de las bondades así como detalles de implementación de esta técnica en SEP's se recomienda García [61], Aprille [18] y Usaola[26].

2.9 Conclusiones

A lo largo de este capítulo se mostraron los métodos de mayor aplicación en ingeniería eléctrica y más aun en sistemas eléctricos de potencia. Entre estos métodos destacan: el Runge-Kutta de cuarto orden (explícito) y la Regla Trapezoidal (implícito) ampliamente socorridos por sus características de estabilidad, exactitud y facilidad en su implementación computacional. Los métodos multipaso presentan una mayor complejidad para su implementación computacional, requieren además de información de los pasos precedentes de acuerdo al orden del método. Sin embargo, se gana en exactitud, menos pasos de integración y una facilidad para insertar esquemas de control del tamaño del paso de integración, aunque se sacrifica en estabilidad numérica.

Se revisó una técnica de aceleración al estado estable para así poder aplicarla en la obtención de condiciones iniciales consistentes de los sistemas de las EDA's. Así como de aplicarla en el estudio de estabilidad transitoria de SEP's.

El problema de estabilidad en sistemas de potencia resulta en un sistema de EDA's rígidas cuya solución se obtiene mediante los métodos revisados para discretizar las ecuaciones diferenciales y resolverlas junto con el conjunto de ecuaciones algebraicas en forma alterna o simultánea, para cada paso de integración. Para esto último se usa la Iteración Funcional o la Iteración de Newton, dependiendo de la rigidez del sistema de EDA's [77].

Para la presente investigación que consiste en el estudio de la estabilidad transitoria de un SEP se opta por solucionarlo utilizando los métodos clásicos de Runge-Kutta y Regla Trapezoidal con paso fijo, puesto que en un transitorio es más conveniente mantener el paso fijo y además se hará

una comparación con los dos tipos de Iteración, la Funcional y la de Newton, respectivamente. Así mismo se obtendrán las condiciones iniciales mediante la técnica de aceleración descrita.

Capítulo 3

DESARROLLO DEL MODELO DE LA MÁQUINA SÍNCRONA INCLUYENDO ARMÓNICOS

3.1 Introducción

Cada vez se requiere un conocimiento más detallado de los elementos que forman los sistemas eléctricos de potencia, en este análisis se profundiza en la máquina síncrona tomando como referencia sus circuitos magnéticos, con lo cual se obtienen las inductancias en función de las características y dimensiones del material del estator y rotor. El modelo desarrollado toma en cuenta la no linealidad del material por el cual viaja el flujo magnético; pero sin llegar a tener un modelo muy involucrado, computacionalmente hablando, para su solución. Para lograr un modelo más detallado lo más adecuado es realizar el estudio y análisis utilizando la técnica del método del elemento finito o el del elemento frontera. De acuerdo con [78-94], se hace imprescindible considerar los efectos de saturación en el estudio y análisis de las máquinas, para lo cual el análisis en coordenadas **dqo** no es lo más adecuado.

La inclusión de la saturación en el modelo de la máquina síncrona ha sido desde hace años

el objetivo primordial de muchas investigaciones, por ejemplo se mencionan algunos resultados de los más sobresalientes, por supuesto no los únicos:

J. O. Ojo y T. A. Lipo [84], aplican factores de saturación obtenidos a través de pruebas o mediante el análisis de la máquina usando la técnica del método del elemento finito. Las ecuaciones de Park para la máquina síncrona son modificadas con estos factores para tener en consideración la saturación en forma independiente sobre los ejes d y q . El flujo máximo en el núcleo es la suma vectorial de los flujos en los ejes d y q . Este modelo toma en cuenta los efectos de saturación en el núcleo del estator, en el núcleo del rotor, en los dientes del estator y en la cara polar del rotor, usando los factores de saturación separados, esto sobre la base del punto de partida como son pruebas físicas y/o análisis de elementos finitos.

A. M. El-Serafi et al. [85], mediante mediciones del efecto del acoplamiento magnético entre los ejes d y q , es obtenido un modelo en dqo incluyendo los efectos de saturación, con la utilización de éste se observa y comprueba que la saturación afecta notablemente la curva de potencia-ángulo; y este efecto depende primordialmente del acoplamiento magnético. Es decir la gran discrepancia que hay entre los valores calculados para los ángulos del rotor de las máquinas y los medidos se debe a la inclusión no adecuada de la saturación en los modelos usados.

Otras investigaciones realizadas [81-83], [86-89], [92-94], han arrojado resultados similares y propuesto modelos adecuados de acuerdo a la aplicación requerida. Pero lo importante a observar que tienen en común es que todos estos modelos son planteados en el marco de referencia dqo .

Un trabajo interesante es el de Slemon [91], [95], donde plantea e implementa un modelo partiendo de circuitos magnéticos, y que aunque no tiene el mismo número de elementos para un análisis por elementos finitos -2000 a 10000- si requiere de un número considerable de parámetros -30 a 100- si se compara con modelos convencionales en dqo que tiene un rango de 13 a 19 parámetros (resistencias, inductancias). La importancia de este modelo es que conserva las

propiedades del método del elemento finito, y por lo tanto considerar las no linealidades es transparente.

Una propuesta más actual es [81], donde se indica un modelo de la máquina síncrona en coordenadas abc incluyendo saturación. Un ligero inconveniente de éstas últimas investigaciones es que están desarrolladas para una máquina de dos polos, lo cual es importante aclarar ya que estos modelos dependen de distancias físicas, y no consideran el efecto del ranurado en el estator, sin embargo hay que aclarar que [91], [95], toman en cuenta el coeficiente de Carter.

Los estudios más recientes [81], se orientan a retomar el modelo de la máquina en sus coordenadas originales abc . Con este tipo de formulación el modelo es totalmente adecuado con el fin de analizar fenómenos de complejidad creciente en el control y la protección, así como para simular fallas internas en las máquinas, por ejemplo: cortocircuitos entre espiras, apertura de devanados o de barras, entre otras. Este análisis se lleva a cabo observando qué armónicos aumentan su contenido en la salida del generador; y así obtener una relación entre los armónicos que son inyectados a la red y las fallas internas más comunes. Conociendo lo anterior se espera que la protección y el control del generador sea una tarea segura y sencilla.

El modelo desarrollado depende principalmente de las dimensiones físicas de la máquina, así como de las características del material magnético. Al considerar la no linealidad del material, se incluyen como parte de dicha no linealidad los efectos de las ranuras y polos para el cálculo de las inductancias [79]; lo cual permite evaluar de manera más completa qué tanto influye la saliencia del estator y rotor en las inductancias, y en consecuencia en el comportamiento electromecánico del generador.

La saturación ocurre en diferentes puntos de la máquina para diferentes condiciones de operación. Por ejemplo durante el transitorio de carga normal, la corriente de campo es relativamente mayor y la saturación es por lo tanto limitada a la región de núcleo del rotor sobre el que descansa el devanado de campo aquí un simple modelo de saturación en el eje d sería factible. Mientras tanto en el arranque el flujo de campo es relativamente pequeño y la saturación ocurre en el núcleo del estator. En el modelo planteado en el presente trabajo por la forma de tratar la saturación en cada uno

de los elementos magnéticos en que se divide el troquel de la máquina lo mencionado antes no presenta problema alguno. Y otro punto a favor es considerar y cuantificar el efecto de las ranuras en la respuesta de la máquina ante diferentes situaciones de operación.

La finalidad de obtener un modelo completo del generador en coordenadas *abc*, forma parte del proyecto que consiste en desarrollar un simulador de sistemas de potencia en coordenadas de fase.

3.2 Modelo del generador en coordenadas de fase *abc*

El generador síncrono se modela considerando simetría en las fases y en la carcasa. En la Figura 3.1 se tiene un diagrama esquemático para un generador síncrono de *p* polos.

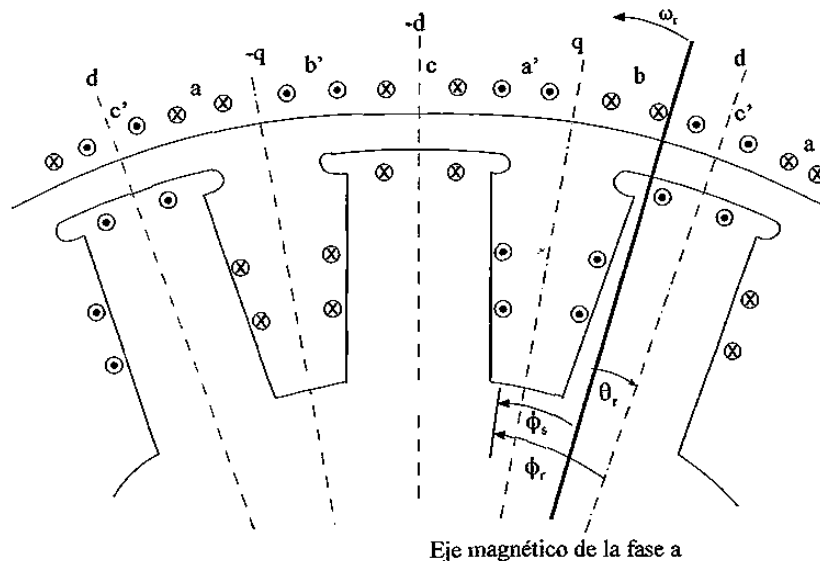


Figura 3.1 Diagrama esquemático de la máquina síncrona de *p* polos.

En la Figura 3.1 se muestra la distribución de los devanados en los ejes de la máquina síncrona, tanto en el estator (*a,b,c*), como en el rotor donde se tienen los devanados de campo y los de amortiguamiento (*f,g,kd,kq*), [79]. Los devanados del estator son distribuidos y separados 120° eléctricos entre sí, con número de vueltas N_s y resistencia r_s ; como los devanados se consideran

balanceados el número de vueltas y la resistencia en cada uno de ellos se consideran iguales.

El rotor tiene el devanado de campo y tres devanados amortiguadores por cada par de polos. Sobre el eje directo (eje **d**), se encuentran los devanados de campo (**f**) y uno de amortiguamiento (**kd**) con número de vueltas y resistencia igual a N_f, r_f y N_{kd}, r_{kd} , respectivamente. Los devanados (**g**) y (**kq**) con parámetros de N_g, r_g y N_{kq}, r_{kq} , respectivamente, se encuentran sobre el eje de cuadratura (eje **q**), el cual está 90° adelante del eje **d** y éste a su vez se encuentra formando un ángulo θ_r con respecto a la referencia física en el estator. El giro del rotor (con velocidad angular ω_r) es, como se indica en la Figura 3.1, contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

El modelo del transitorio eléctrico de la máquina síncrona se describe por las ecuaciones de voltaje para cada devanado. En forma compacta:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda} \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = L\mathbf{I} \quad (3.2)$$

donde:

- $\mathbf{V} = [v_a \ v_b \ v_c \ v_f \ v_g \ v_{kd} \ v_{kq}]^T$ Vector de voltajes, contiene el voltaje en: Las fases, el campo y en los devanados de amortiguamiento, éstos últimos por estar cortocircuitados su voltaje es cero.
- $\mathbf{I} = [-i_a \ -i_b \ -i_c \ i_f \ i_g \ i_{kd} \ i_{kq}]^T$ Vector de corrientes en el estator y rotor, nótese el signo de las corrientes en el estator, el cual indica operación generador (signo negativo), motor (signo positivo).
- $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_a \ \lambda_b \ \lambda_c \ \lambda_f \ \lambda_g \ \lambda_{kd} \ \lambda_{kq}]^T$ Vector de enlaces de flujo en el estator y en el rotor; se relaciona con el vector de corrientes de acuerdo con (3.2).

La matriz de resistencias R de la máquina síncrona tiene valores diferentes de cero sólo en

la diagonal, se tiene la resistencia de los devanados: De las fases, del campo y de los de amortiguamiento.

L es la matriz de inductancias de la máquina y tiene la siguiente forma:

$$L = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{ag} & L_{akd} & L_{akq} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bg} & L_{bkd} & L_{bkq} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cg} & L_{ckd} & L_{ckq} \\ \hline L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & 0 & L_{fkd} & 0 \\ L_{ga} & L_{gb} & L_{gc} & 0 & L_{gg} & 0 & L_{gkq} \\ L_{kda} & L_{kdb} & L_{kdc} & L_{kdf} & 0 & L_{kdkd} & 0 \\ L_{kqa} & L_{kqb} & L_{kqc} & 0 & L_{kqg} & 0 & L_{kqkq} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La expresión de par eléctrico [79], en función de corrientes y enlaces de flujo en coordenadas abc, está dada por:

$$T_e = \frac{P}{3\sqrt{3}} \{ \lambda_a(i_b - i_c) + \lambda_b(i_c - i_a) + \lambda_c(i_a - i_b) \} \quad (3.4)$$

3.2.1 Ecuación de oscilación

El modelo que describe el comportamiento mecánico del rotor se representa por la suma de pares en la flecha del generador. La ecuación para este modelo se conoce como ecuación de oscilación.

$$\frac{d}{dt} \omega_r = \frac{\omega_b}{2H} (T_m - T_e) \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt}\delta = \omega_r - \omega_s \quad (3.6)$$

donde:

ω_r , ω_s velocidad del rotor y síncrona en p.u., H constante de inercia en seg., δ ángulo de carga en rad, T_m y T_e par mecánico y eléctrico en p.u.

El par eléctrico se obtiene de (3.4). El modelo de la máquina síncrona es el conjunto de las ecuaciones (3.1) a (3.6), donde las inductancias dependen de las características magnéticas del material y de la posición del rotor, como se discute en la siguiente sección.

3.3 Inductancias de la máquina síncrona

En forma general la inductancia de una bobina está definida por la relación:

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (3.7)$$

la cual es la razón de los enlaces de flujo que cruzan la bobina respecto a la corriente que circula por ésta.

Así mismo la definición de los enlaces de flujo es:

$$\lambda = N\Psi \quad (3.8)$$

El flujo para una bobina es la integral de superficie siguiente:

$$\Psi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (3.9)$$

Suponiendo que el flujo en el entrehierro es radial solamente, lo cual es posible debido a la corta distancia de éste, entonces el producto escalar de los vectores dentro de la integral anterior, se reduce a un producto de magnitudes, donde la inducción magnética \mathbf{B} es:

$$\mathbf{B} = \mu_r \frac{\text{FMM}}{l} \quad (3.10)$$

y la fuerza magnetomotriz está definida por:

$$\text{FMM} = Ni \quad (3.11)$$

Para obtener las inductancias de una máquina se tiene que resolver (3.7) a (3.11), en orden regresivo.

La máquina a ser analizada es trifásica, simétrica en devanados y estructura, y consta de p polos. En el presente trabajo se desarrolla el cálculo de las inductancias de la máquina considerando: la no linealidad del material, la saliencia del rotor y el ranurado del estator.

De la Figura 3.1 se observa que la posición angular en el estator ϕ_s , respecto a la referencia del estator que para este análisis coincide con el eje magnético del primer polo de la fase a , en cualquier instante es:

$$\phi_s = \phi_r + \theta_r \quad (3.12)$$

donde ϕ_r es la posición angular del rotor respecto al eje d y θ_r es el ángulo entre las referencias del estator y rotor, sus sentidos se indican en la Figura 3.1.

3.3.1 Fuerza magnetomotriz, FMM

La FMM se calcula para el devanado en cada polo de acuerdo con (3.11). Para cuestiones de análisis se consideran los devanados distribuidos senoidalmente a lo largo del paso polar, tomando como referencia el eje magnético del primer polo del devanado de la fase a , la distribución del devanado se indica en la Figura 3.2.

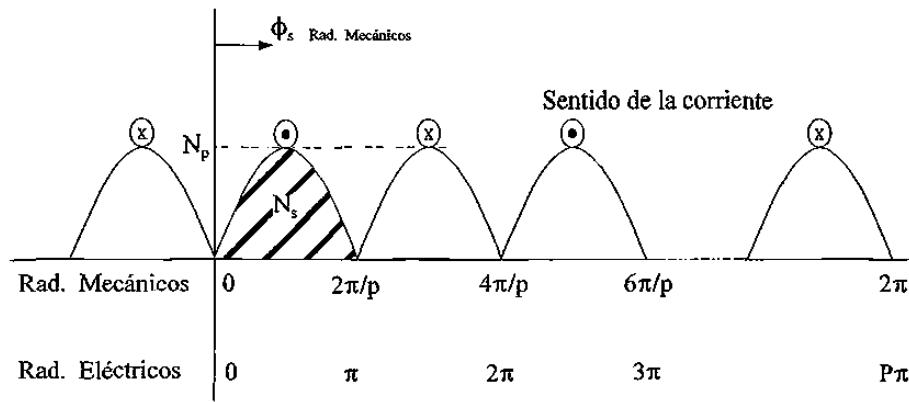


Figura 3.2 Distribución del devanado de la fase a en una máquina síncrona de p polos

El estudio para la FMM, debido a la simetría que se observa en la Figura 3.2, se realiza en un par de polos, en esta figura las abscisas indican el desplazamiento angular ϕ_s sobre el estator y el eje de las ordenadas es la densidad de conductores por radian. En base a la Figura 3.2, y tomando en cuenta el sentido de las corrientes, se tiene que la distribución del devanado de la fase a por polo es:

$$N_{sa} = N_p \operatorname{Sen}\left(\frac{p}{2} \phi_s\right) \begin{cases} + & 0 \leq \phi_s \leq \frac{2\pi}{p} \\ - & \frac{2\pi}{p} \leq \phi_s \leq \frac{4\pi}{p} \end{cases} \quad (3.13)$$

donde N_p es el valor máximo de conductores o vueltas por radian; (3.13) indica que N_{sa} es positivo en el intervalo de $0 \leq \phi_s \leq 2\pi/p$ y es negativo en el intervalo de $2\pi/p \leq \phi_s \leq 4\pi/p$. Ahora bien, designando a N_s como el número total de vueltas que corresponde al devanado equivalente distribuido senoidalmente por fase, entonces por polo se tiene:

$$\frac{N_s}{p} = \int_0^{\frac{2\pi}{p}} N_p \operatorname{Sen}\left(\frac{p}{2} \phi_s\right) d\phi_s \quad (3.14)$$

nótese que el intervalo de integración son π radianes eléctricos, cabe indicar que todos los límites angulares se indican en radianes mecánicos a menos que se indique lo contrario, obteniendo N_p de

la solución de (3.14)

$$N_p = \frac{N_s}{4} \quad (3.15)$$

sustituyendo (3.15) en (3.14), se tiene que la distribución del devanado en función de N_s es:

$$N_{sa} = \frac{N_s}{4} \text{Sen}\left(\frac{p}{2} \phi_s\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} + \quad 0 \leq \phi_s \leq \frac{2\pi}{p} \\ - \quad \frac{2\pi}{p} \leq \phi_s \leq \frac{4\pi}{p} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Esta distribución del devanado es sinusoidal, lo cual realmente no se cumple, la distribución del devanado real contiene un determinado número de armónicos dependiendo de los factores de paso y distribución del propio devanado, así como del factor de sesgo de las ranuras donde se colocan las bobinas. Luego, en base a lo anterior, la distribución del devanado expandida en series de Fourier es:

$$N_{sa} = \frac{4}{\pi} N_c Z_f \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} K_{ph} K_{dh} K_{sh} \text{Sen } h \left(\frac{p}{2} \Phi_s \right) \quad (3.17)$$

donde

h = número de armónico

N_c = número de vueltas por bobina

Z_f = número de bobinas por fase

K_{ph} = factor de paso de bobina para el h -ésimo armónico

$$K_{ph} = \text{Sen}\left(\frac{hm\pi}{2}\right) \quad (3.18)$$

K_{dh} = factor de distribución del devanado para el h -ésimo armónico

$$K_{dh} = \frac{\text{Sen}\left(\frac{h\pi}{2q}\right)}{n \text{ Sen}\left(\frac{h\pi}{2nq}\right)} \quad (3.19)$$

K_{sh} = factor de sesgo de las ranuras para el h-ésimo armónico

$$K_{sh} = \frac{\text{Sen}\left(\frac{hp\beta}{2}\right)}{\frac{hp\beta}{2}} \quad (3.20)$$

p = número de polos

β = ángulo de sesgo de las ranuras

q = número de fases por polo

n = número de ranuras por fase

m = factor del ángulo de paso de bobina, para $m=1$ se tiene paso completo, una adecuada selección de m puede eliminar o reducir determinados armónicos impares. Esta es la razón principal de usar bobinas de paso corto

Reduciendo el análisis para el armónico h únicamente, (3.17) se puede expresar como:

$$N_{sah} = \frac{hpN_{sh}}{4} \text{Sen } h\left(\frac{p}{2} \phi_s\right) \quad \begin{cases} + & 0 \leq \phi_s \leq \frac{2\pi}{hp} \\ - & \frac{2\pi}{hp} \leq \phi_s \leq \frac{4\pi}{hp} \end{cases} \quad (3.21)$$

donde N_{sh} es el valor máximo del h-ésimo armónico y representa el producto de las constantes de (3.17).

Considerando que la FMM se sitúa al centro del conductor que la genera, Figura 3.3a, la FMM para cada diferencial $d\phi_s$ se ilustra en la Figura 3.3b, la relación analítica para la FMM en el

devanado de la fase a para el armónico h es:

$$FMM_{ah} = -i_a \frac{hpN_{sh}}{4} \left[- \int_{\phi_s}^{\frac{2\pi}{hp}} \text{Sen } h\left(\frac{p}{2}\zeta\right) d\zeta - \int_{\frac{2\pi}{hp}}^{\phi_s + \frac{2\pi}{hp}} \text{Sen } h\left(\frac{p}{2}\zeta\right) d\zeta \right] \quad (3.22)$$

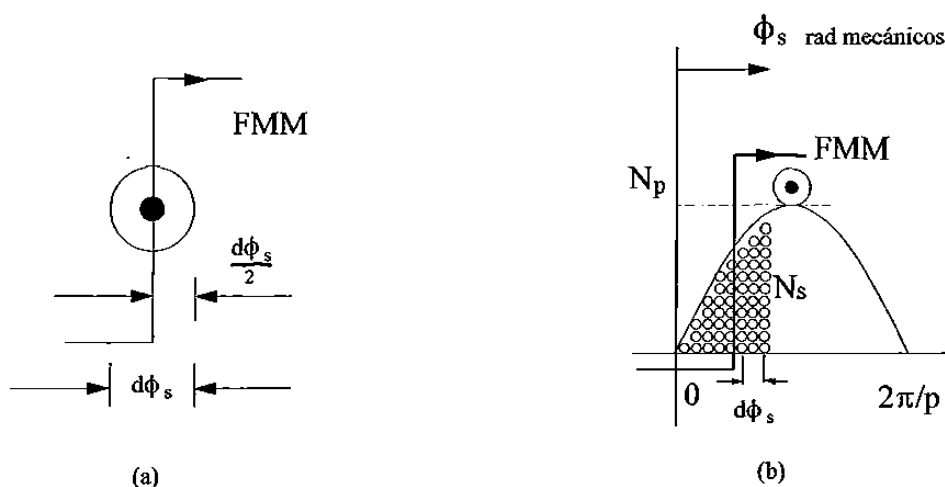


Figura 3.3 FMM de la distribución del devanado en la fase a.

resolviendo se llega a

$$FMM_{ah} = i_a N_{sh} \text{Cos } h\left(\frac{p}{2} \phi_s\right) \quad (3.23)$$

En la Figura 3.4.a se observa la distribución física del devanado donde se simula el sentido de arrollamiento del mismo, indicando la polaridad del devanado, positivo por donde entra \otimes . La Figura 3.4.b es la representación de la Figura 3.4.a como una función seno. La Figura 3.4.c muestra la obtención de la FMM en base a las dos anteriores, y se puede observar que es una función coseno, como el resultado en (3.23), obtenido analíticamente.

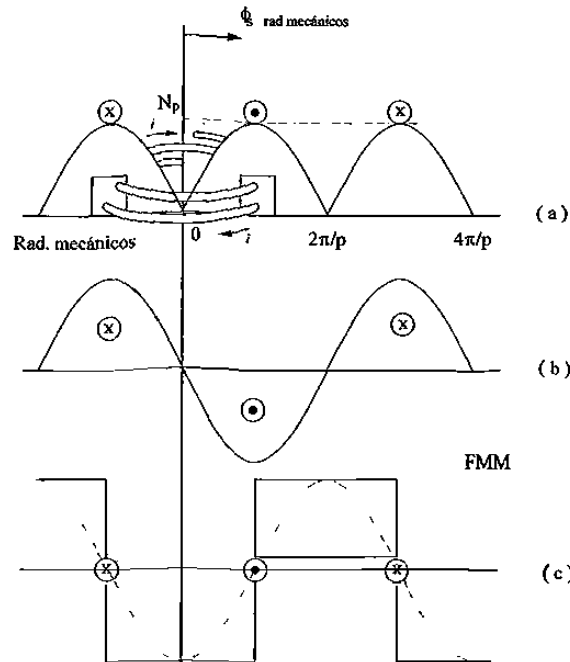


Figura 3.4 Distribución de la FMM del devanado de la fase a.

Puede observarse que los signos negativos en (3.22) se pueden eliminar, en este caso se ha considerado conveniente explicar su origen en base a la Figura 3.4, y después prescindir de ellos. Para lo anterior primeramente se considera $\phi_s = 0$. La primera integral está precedida por un signo negativo debido a que aquí se está integrando el negativo de la función seno como se ve en la Figura 3.4a y b, en los límites de 0 a π radianes eléctricos. El signo negativo que antecede a (3.22) es debido a que en el primer intervalo de integración la corriente es negativa, Figura 3.4a. El signo negativo de la segunda integral es para eliminar el efecto en ella, del signo negativo de (3.22), ya que para este intervalo la función seno que se integra es positiva y también la corriente lo es, Figura 3.4a y b.

Realizando el análisis para las restantes fases del estator se obtiene su distribución del devanado.

$$N_{sbh} = \frac{hpN_{sh}}{4} \text{Sen } h \left(\frac{p}{2} \phi_s - \frac{2}{3} \pi \right) \begin{cases} + & 0 \leq \phi_s \leq \frac{2\pi}{hp} \\ - & \frac{2\pi}{hp} \leq \phi_s \leq \frac{4\pi}{hp} \end{cases} \quad (3.24)$$

$$N_{sch} = \frac{hpN_{sh}}{4} \text{Sen } h \left(\frac{p}{2} \phi_s + \frac{2}{3} \pi \right) \quad \begin{cases} + & 0 \leq \phi_s \leq \frac{2\pi}{hp} \\ - & \frac{2\pi}{hp} \leq \phi_s \leq \frac{4\pi}{hp} \end{cases} \quad (3.25)$$

y sus FMM's, aplicando (3.22)

$$FMM_{bh} = i_b N_{sh} \text{Cos } h \left(\frac{p}{2} \phi_s - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.26)$$

$$FMM_{ch} = i_c N_{sh} \text{Cos } h \left(\frac{p}{2} \phi_s + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.27)$$

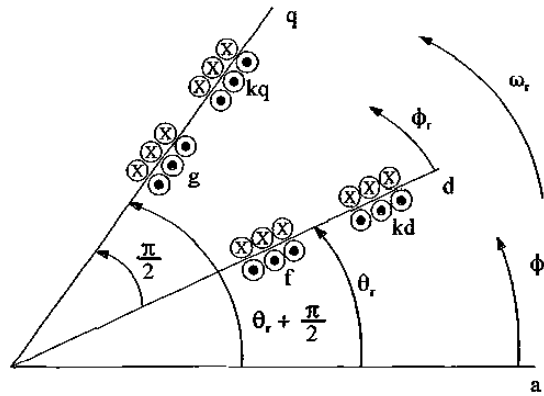


Figura 3.5 Diagrama esquemático de los devanados en el rotor

De igual forma para los devanados de campo y amortiguadores, con referencia a la Figura 3.5, las relaciones para la distribución de vueltas así como para la FMM de cada devanado son:

$$N_{rm} = \frac{hpN_{fm}}{4} \text{Sen } h \left(\frac{p}{2} \phi_r \right) \quad \begin{cases} + & 0 \leq \phi_r \leq \frac{2\pi}{hp} \\ - & \frac{2\pi}{hp} \leq \phi_r \leq \frac{4\pi}{hp} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$N_{rkdh} = \frac{hpN_{kdh}}{4} \text{Sen } h\left(\frac{p}{2} \phi_r\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} + \quad 0 \leq \phi_r \leq \frac{2\pi}{hp} \\ - \quad \frac{2\pi}{hp} \leq \phi_r \leq \frac{4\pi}{hp} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

$$N_{rgh} = \frac{hpN_{gh}}{4} \text{Sen } h\left(\frac{p}{2} \phi_r - \frac{\pi}{2}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} + \quad 0 \leq \phi_r \leq \frac{2\pi}{hp} \\ - \quad \frac{2\pi}{hp} \leq \phi_r \leq \frac{4\pi}{hp} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

$$N_{rkqh} = \frac{hpN_{kqh}}{4} \text{Sen } h\left(\frac{p}{2} \phi_r - \frac{\pi}{2}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} + \quad 0 \leq \phi_r \leq \frac{2\pi}{hp} \\ - \quad \frac{2\pi}{hp} \leq \phi_r \leq \frac{4\pi}{hp} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

$$FMM_{fh} = i_f N_{fh} \text{Cos } h\left(\frac{p}{2} \phi_r\right) \quad (3.32)$$

$$FMM_{kdh} = i_{kd} N_{kdh} \text{Cos } h\left(\frac{p}{2} \phi_r\right) \quad (3.33)$$

$$FMM_{gh} = i_g N_{gh} \text{Cos } h\left(\frac{p}{2} \phi_r - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.34)$$

$$FMM_{kqh} = i_{kq} N_{kqh} \text{Cos } h\left(\frac{p}{2} \phi_r - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.35)$$

donde el número de vueltas así como los diferentes factores de los devanados son exclusivos y específicos para cada uno de ellos.

3.3.2 Inducción magnética

El siguiente paso es calcular la densidad de flujo magnético \mathbf{B} , para lo cual se requiere establecer la trayectoria magnética de \mathbf{B} . La Figura 3.6, muestra el detalle de la trayectoria que sigue \mathbf{B} en un polo de la máquina síncrona, en esta figura se ilustra conjuntamente el circuito magnético equivalente por polo, donde las distancias, áreas, distancias tangenciales y reluctancias correspondientes son:

l_1, A_1, d_1 y \mathfrak{R}_1	Yugo del rotor	l_2, A_2, d_2 y \mathfrak{R}_2	Polo del rotor
l_3, A_3, d_3 y \mathfrak{R}_3	Entrehierro	l_4, A_4, d_4 y \mathfrak{R}_4	Ranuras estator
l_5, A_5, d_5 y \mathfrak{R}_5	Yugo del estator	\mathfrak{R}_ϕ	Dispersión

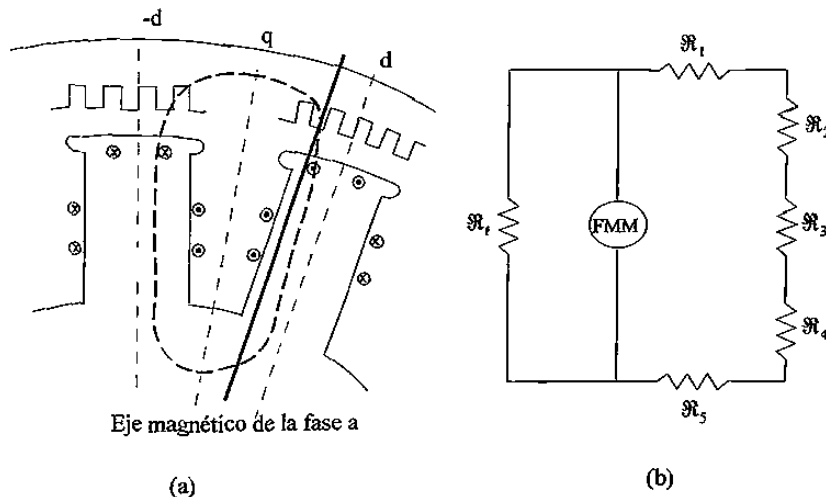


Figura 3.6 Trayectoria del flujo magnético en la máquina.

De la Figura 3.6.a se observa que las distancias de la trayectoria magnética que sigue el flujo en el yugo del rotor y del estator, se pueden considerar constantes, no así las distancias de los polos, de las ranuras y del entrehierro. Se centra la atención en las distancias variables, las cuales se presentan en forma bidimensional en la Figura 3.7.

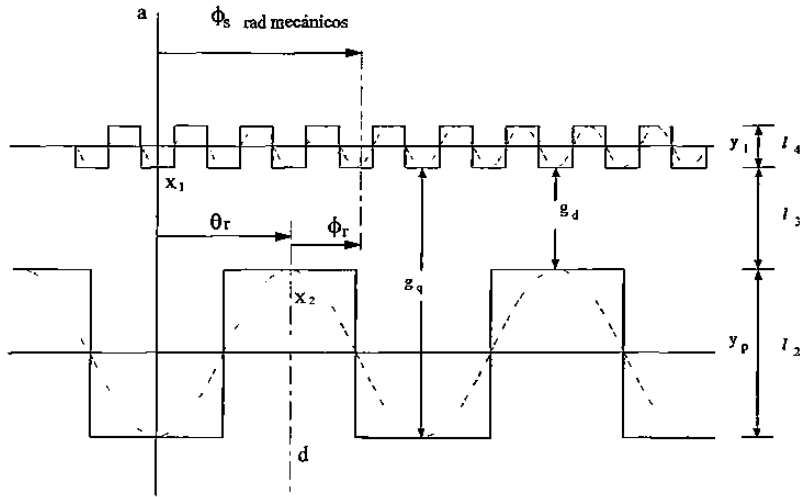


Figura 3.7 Aproximación de polos y ranuras del troquel de la máquina.

La representación de los polos y ranuras del estator se hace por medio de rectas, considerando además que el ancho de las ranuras es igual al de los dientes, en lo que respecta al estator y en el rotor los polos son iguales a los interpolos, esta consideración se realiza para simplificar la obtención del modelo, pero estas distancias pueden considerarse diferentes. La longitud de las ranuras y polos varía de acuerdo a una función cuadrada de diferente ángulo espacial. Usando una representación de Fourier para estas funciones, y reteniendo únicamente los términos deseados de la serie, con lo que se puede eliminar los armónicos espaciales de orden superior.

Para las ranuras, tomando como referencia para la función cuadrada el punto x_1 , se tiene:

$$y_r = \frac{y_1}{2} - \frac{2y_1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \text{Cos } h(pR\theta_r) \quad (3.36)$$

donde y_1 es la longitud de la ranura y R es el número de ranuras por polo, entonces y_r es la función que describe la onda cuadrada de las ranuras. Si se requiere conservar los armónicos de mayor orden, se deben de conservar los términos de la serie de Fourier tanto como se requiera.

Para los polos, tomando como referencia el punto x_2 en la Figura 3.7.

$$y_p = \frac{g_q - g_d}{2} + \frac{2(g_q - g_d)}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \text{Cos } h(p\phi_r) \quad (3.37)$$

donde g_d y g_q son las distancias del entrehierro en el eje directo y el eje de cuadratura, respectivamente. Las distancias l_2 , l_3 y l_4 se expresan como:

$$\begin{aligned} l_2 &= y_p \\ l_3 &= y_r + g_q - y_p \\ l_4 &= y_1 - y_r \end{aligned} \quad (3.38)$$

De la Figura 3.6.b se cumple la siguiente relación para el circuito magnético:

$$\text{FMM} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 + H_5 l_5 \quad (3.39)$$

Si la definición para la intensidad magnética es:

$$H = \frac{B}{\mu} \quad (3.40)$$

entonces (3.39) se expresa como:

$$\text{FMM} = \frac{B_1 l_1}{\mu_1} + \frac{B_2 l_2}{\mu_2} + \frac{B_3 l_3}{\mu_3} + \frac{B_4 l_4}{\mu_4} + \frac{B_5 l_5}{\mu_5} \quad (3.41)$$

Para el proceso de conversión electromecánica es conveniente referir las densidades de flujo B de todas las secciones del circuito magnético, a la densidad de flujo del entrehierro B_3 , por lo cual es necesario referir todos los términos de (3.41) a B_3 , además se observa que hasta este punto se tienen permeabilidades independientes para cada uno de los segmentos en que se ha dividido el troquel de la máquina. Aquí es donde se puede elegir usar diferentes tipos de material en el troquel, para este estudio se limita a un solo material magnético en el rotor y estator con permeabilidad μ_r y la del aire μ_0 . Aplicando el principio de continuidad del flujo magnético, Figura 3.8.

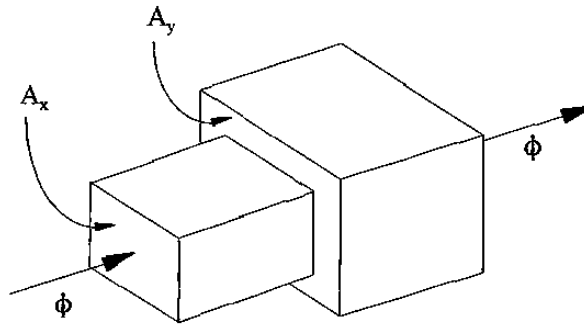


Figura 3.8 Propiedad de la continuidad del flujo magnético

se tiene que la relación de áreas es:

$$B_x = B_y \frac{A_y}{A_x} \quad (3.42)$$

y si la distancia axial es la misma, como lo es en el caso de máquinas eléctricas, entonces se considera solo la distancia tangencial d , así (3.42) se reduce a:

$$B_x = B_y \frac{d_y}{d_x} \quad (3.43)$$

Evaluando (3.36) para la fase a , refiriendo todos los elementos al entrehierro y aplicando (3.38), se obtiene:

$$FMM_a = B_3 \left[\frac{l_1 d_3}{\mu_1 d_1} + \frac{l_2 d_3}{\mu_2 d_2} + \frac{l_3}{\mu_0} + \frac{l_4 d_3}{\mu_4 d_4} + \frac{l_5 d_3}{\mu_5 d_5} \right] \quad (3.44)$$

Como B_3 es la densidad del flujo magnético en el entrehierro debido a la fase a , en adelante se indica como B_{ga} . Sustituyendo las longitudes (3.38), y arreglando algebraicamente se obtiene:

$$B_{ga} = \frac{FMM_a}{k_1 + k_2(y_r + g_q - y_p) + k_3 y_p + k_4(y_1 - y_p)} \quad (3.45)$$

con las constantes

$$k_1 = \frac{l_1 d_3}{\mu_1 d_1} + \frac{l_5 d_3}{\mu_5 d_5} \quad (3.46)$$

$$k_2 = \frac{2}{\mu_0} \quad (3.47)$$

$$k_3 = \frac{2d_3}{\mu_2 d_2} \quad (3.48)$$

$$k_4 = \frac{2d_3}{\mu_4 d_4} \quad (3.49)$$

Respaldándose en el cumplimiento de:

$$\frac{1}{1 - a - b} = \sum_{k=0}^n (a + b)^k \quad (3.50)$$

aplicando esta relación a (3.45) y tomando solo los términos para $k=0$ y $k=1$, lo cual es una aproximación adecuada ya que los restantes elementos de la serie tienden a cero, se tiene:

$$B_{ga} = \frac{FMM_{ah}}{k_5} \left[1 + \frac{k_6}{k_5} \cos h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{k_5} \cos h(p\phi_r) \right] \quad (3.51)$$

con las constantes

$$k_5 = k_1 + \frac{k_2}{2}(g_d + g_q + y_1) + \frac{k_3}{2}(g_q - g_d) + \frac{k_4}{2}y_1 \quad (3.52)$$

$$k_6 = (k_2 - k_4) \frac{2y_1}{h\pi} \quad (3.53)$$

$$k_7 = (k_2 - k_3) \frac{2(g_q - g_d)}{h\pi} \quad (3.54)$$

B en el entrehierro debido a las fases **b** y **c** es (3.51), únicamente haciendo la sustitución correspondiente a la FMM de **b** ó **c**, según sea el caso. El término entre paréntesis permanece igual debido a que depende de parámetros y referencia del rotor.

Ahora bien, (3.51) se aplica de igual forma para todos y cada uno de los devanados del rotor, como son el de campo y los de amortiguamiento. Sólo que para este caso hay un punto importante a observar; en el término entre paréntesis se modifica la dependencia angular cuando se aplica (3.51) a los devanados que se localizan sobre el eje \mathbf{q} , es decir desplazarlo $\pi/2$ radianes eléctricos, de acuerdo con el sentido de giro y posición del eje \mathbf{q} , Figura 3.1, por ejemplo para obtener \mathbf{B}_{gg} , realizando el desplazamiento indicado se tiene:

$$\mathbf{B}_{gg} = \frac{\text{FMM}_{gh}}{k_s} \left[1 + \frac{k_6}{k_s} \cos h(R(p\theta_r - \pi)) + \frac{k_7}{k_s} \text{Cos } h(p\phi_r - \pi) \right] \quad (3.55)$$

3.3.3 Enlaces de flujo

El siguiente paso es evaluar los enlaces de flujo λ en el entrehierro debido a la corriente i_a . Aplicando (3.8) y (3.9):

$$\lambda_{ga} = -\frac{hp}{2} \int_{\frac{2\pi}{hp}}^{\frac{4\pi}{hp}} \frac{hpN_{sh}}{4} \text{Sen } h\left(\frac{p}{2}\phi_s\right) \int_{\phi_s}^{\phi_s + \frac{2\pi}{hp}} \frac{i_a N_{sh}}{k_s} \text{Cos } h\left(\frac{p}{2}\zeta\right) \left[1 + \frac{k_6}{k_s} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{k_s} \text{Cos } h(p(\zeta - \theta_r)) \right] r/l d\zeta d\phi_s \quad (3.56)$$

donde r es el radio de la superficie interna del estator y l es la longitud axial de la máquina, la integral interna en (3.56) es el flujo por bobina, nótese que el ángulo ϕ_r se ha sustituido por su equivalente, usando (3.12), ζ es una variable auxiliar de integración, y la integral se obtiene a partir de ϕ_s , posición fija de la bobina, y se extiende a lo largo del estator en π radianes eléctricos. Para tomar en cuenta todo el devanado, este flujo -representado por la integral interna- es multiplicado por cada una de las vueltas del devanado y se efectúa una sumatoria de estos productos para obtener los enlaces de flujo λ totales; como el número de vueltas del devanado tiene una forma distribuida, la sumatoria se transforma en integral, la cual se evalúa sobre los límites $2\pi/hp$ a $4\pi/hp$, que representa el paso polar en radianes eléctricos, en este intervalo la corriente es positiva \oplus , y por lo tanto λ coincide con

la dirección del eje magnético. La doble integral se multiplica por $hp/2$ para tomar en cuenta los enlaces de flujo del devanado completo. Realizando las integrales en (3.56), se llega a:

$$\lambda_{ga} = 2(N_{sh})^2 I \pi i_a \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \text{Cos } h(p\theta_r) \right] \quad (3.57)$$

y por (3.7) se obtiene:

$$L_{aah} = L_t + 2(N_{sh})^2 I \pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \text{Cos } h(p\theta_r) \right] \quad (3.58)$$

donde L_t es la inductancia de dispersión de la fase **a**, que de acuerdo con [80], representa entre el 5% y el 10 % de la inductancia total.

Las inductancias en **b** y en **c** se evalúan de la misma forma, obteniendo:

$$L_{bbh} = L_t + 2(N_{sh})^2 I \pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \text{Cos } 2h\left(\frac{p}{2}\theta_r - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \quad (3.59)$$

$$L_{cch} = L_t + 2(N_{sh})^2 I \pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \text{Cos } 2h\left(\frac{p}{2}\theta_r + \frac{2}{3}\pi\right) \right] \quad (3.60)$$

Las inductancias mutuas se obtienen evaluando λ de un devanado, debido a la corriente que circula por otro devanado, para los devanados **a** y **b** se tiene:

$$\lambda_{ab} = - \frac{hp}{2} \int_{\frac{2\pi}{hp}}^{\frac{4\pi}{hp}} \frac{hpN_{sh}}{4} \text{Sen } h\left(\frac{p}{2}\phi_s\right) \int_{\phi_s}^{\phi_s + \frac{2\pi}{hp}} \frac{i_b N_{sh}}{k_5} \text{Cos } h\left(\frac{p}{2}\zeta - \frac{2}{3}\pi\right) \left[1 + \frac{k_6}{k_5} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{k_5} \text{Cos } h(p(\zeta - \theta_r)) \right] r l d\zeta d\phi_s \quad (3.61)$$

Aquí la integral interna es el flujo generado por la corriente en **b**, el cual pasa por la bobina **a**, integral externa, resolviendo y dividiendo el resultado entre la corriente de **b**, de acuerdo con (3.7), se obtiene:

$$L_{abh} = - 2(N_{sh})^2 r l \pi \left[\frac{1}{2k_5} + \frac{k_6}{2k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) - \frac{k_7}{2k_5^2} \text{Cos } 2h\left(\frac{p}{2}\theta_r - \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3.62)$$

de igual forma para los devanados **a-c** y **b-c**.

$$L_{ach} = - 2(N_{sh})^2 r l \pi \left[\frac{1}{2k_5} + \frac{k_6}{2k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) - \frac{k_7}{2k_5^2} \text{Cos } 2h\left(\frac{p}{2}\theta_r + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3.63)$$

$$L_{bch} = - 2(N_{sh})^2 r l \pi \left[\frac{1}{2k_5} + \frac{k_6}{2k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) - \frac{k_7}{2k_5^2} \text{Cos } 2h\left(\frac{p}{2}\theta_r\right) \right] \quad (3.64)$$

Para las inductancias mutuas la inductancia de dispersión se ignora si se anula la dispersión del borde de bobina, como es el caso en este trabajo.

Siguiendo el análisis ahora para los devanados del rotor, iniciando con el devanado de campo, la relación para los enlaces de flujo en el entrehierro debido a la corriente en el campo, es:

$$\lambda_{gr} = -\frac{hp}{2} \int_{\frac{2\pi}{hp}}^{\frac{4\pi}{hp}} \frac{hpN_{fh}}{4} \text{Sen } h\left(\frac{p}{2}\phi_r\right) \int_{\phi_r}^{\phi_r + \frac{2\pi}{hp}} \frac{i_r N_{fh}}{k_5} \text{Cos } h\left(\frac{p}{2}\zeta\right) \left[1 + \frac{k_6}{k_5} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{k_5} \text{Cos } h(p\zeta)\right] r/d\zeta d\phi_s \quad (3.65)$$

resolviendo y dividiendo entre la corriente de campo se tiene que la inductancia propia de campo es:

$$L_{fih} = L_{tr} + 2(N_{fh})^2 r/l\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \quad (3.66)$$

aplicando (3.65) a los devanados amortiguadores.

$$L_{kdkdh} = L_{tkd} + 2(N_{kdh})^2 r/l\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \quad (3.67)$$

$$L_{ggh} = L_{tg} + 2(N_{gh})^2 r/l\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h\left(Rp\theta_r - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \quad (3.68)$$

$$L_{kqkqh} = L_{tkq} + 2(N_{kqh})^2 r/l\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h\left(Rp\theta_r - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \quad (3.69)$$

Las inductancias mutuas en el rotor son.

$$L_{fkdh} = 2N_{fh}N_{kdh}r/l\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \quad (3.70)$$

$$L_{gkqh} = 2N_{gh}N_{kqh}r/\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h} \left(Rp\theta_r - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \quad (3.71)$$

$$L_{fg} = L_{fkq} = L_{kdg} = L_{kdkq} = 0 \quad (3.72)$$

Las inductancias mutuas estator - rotor, se obtienen de:

$$\lambda_{af} = -\frac{hp}{2} \int_{\frac{2\pi}{hp}}^{\frac{4\pi}{hp}} \frac{hpN_{sh}}{4} \text{Sen h} \left(\frac{p}{2}\phi_s \right) \int_{\phi_s}^{\phi_s + \frac{2\pi}{hp}} \frac{i_r N_{fh}}{k_5} \text{Cos h} \left(\frac{p}{2}(\zeta - \theta_r) \right) \left[1 + \frac{k_6}{k_5} \text{Cos h}(pR\theta_r) + \frac{k_7}{k_5} \text{Cos h}(p(\zeta - \theta_r)) \right] r/d\zeta d\phi_s \quad (3.73)$$

sustituyendo los devanados correspondientes así como sus defasamientos donde sea requerido, las inductancias mutuas entre el estator y rotor son:

$$L_{afh} = 2N_{sh}N_{fh}r/\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h}(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Cos h} \left(\frac{p}{2}\theta_r \right) \quad (3.74)$$

$$L_{akdh} = 2N_{sh}N_{kdh}r/\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h}(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Cos h} \left(\frac{p}{2}\theta_r \right) \quad (3.75)$$

$$L_{agh} = -2N_{sh}N_{kdh}r/\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h} \left(Rp\theta_r - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Sen h} \left(\frac{p}{2}\theta_r \right) \quad (3.76)$$

$$L_{akqh} = - 2N_{sh}N_{kqh}rl\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h} \left(Rp\theta_r - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Sen h} \left(\frac{p}{2}\theta_r \right) \quad (3.77)$$

$$L_{bfh} = 2N_{sh}N_{fh}rl\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h}(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Cos h} \left(\frac{p}{2}\theta_r - \frac{2}{3}\pi \right) \quad (3.78)$$

$$L_{bkdh} = 2N_{sh}N_{kdh}rl\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h}(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Cos h} \left(\frac{p}{2}\theta_r - \frac{2}{3}\pi \right) \quad (3.79)$$

$$L_{bgh} = - 2N_{sh}N_{gh}rl\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h} \left(Rp\theta_r - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Sen h} \left(\frac{p}{2}\theta_r - \frac{2}{3}\pi \right) \quad (3.80)$$

$$L_{bkqh} = - 2N_{sh}N_{kqh}rl\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h} \left(Rp\theta_r - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Sen h} \left(\frac{p}{2}\theta_r - \frac{2}{3}\pi \right) \quad (3.81)$$

$$L_{cfh} = 2N_{sh}N_{fh}rl\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h}(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Cos h} \left(\frac{p}{2}\theta_r + \frac{2}{3}\pi \right) \quad (3.82)$$

$$L_{ckdh} = 2N_{sh}N_{kdh}rl\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos h}(pR\theta_r) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Cos h} \left(\frac{p}{2}\theta_r + \frac{2}{3}\pi \right) \quad (3.83)$$

$$L_{cgh} = - 2N_{sh}N_{gh}rI\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h \left(Rp\theta_r - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Sen } h \left(\frac{p}{2}\theta_r + \frac{2}{3}\pi \right) \quad (3.84)$$

$$L_{ckqh} = - 2N_{sh}N_{kqh}rI\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos } h \left(Rp\theta_r - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{k_7}{2k_5^2} \right] \text{Sen } h \left(\frac{p}{2}\theta_r + \frac{2}{3}\pi \right) \quad (3.85)$$

Efectuando el cambio de variable de radianes mecánicos a eléctricos.

$$\theta = \frac{p}{2}\theta_r \quad (3.86)$$

donde θ es la posición del rotor en radianes eléctricos y θ_r lo es en radianes mecánicos. Si se define una "frecuencia" para las ranuras como:

$$F_R = 2R \quad (3.87)$$

realizando lo indicado para la inductancia propia de la fase **a** (3.53), se llega a la relación:

$$L_{aah} = L_l + 2N_{sh}^2rI\pi \left[\frac{1}{k_5} + \frac{k_6}{k_5^2} \text{Cos}(F_R\theta) + \frac{k_7}{2k_5^2} \text{Cos}(2\theta) \right] \quad (3.88)$$

que es la inductancia para una máquina de dos polos. Con esta expresión se demuestra que una máquina con cualquier número de pares de polos puede ser analizada como una máquina de dos polos, en donde persiste el número de polos es en la relación del par electromagnético, (3.4).

La secuencia desarrollada para obtener la inductancia en la fase **a** debido a la corriente en **a**, se repite para obtener las demás inductancias propias y mutuas totales.

A continuación se indican en forma compacta las inductancias que complementan el modelo de la máquina síncrona.

Inductancias propias en el estator

$$L_{aah} = L_t + L_{Aaa} + L_{Baa} \cos h(F_R \theta) + L_{Caa} \cos 2h(\theta) \quad (3.89)$$

$$L_{bbh} = L_t + L_{Abb} + L_{Bbb} \cos h(F_R \theta) + L_{Cbb} \cos 2h\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.90)$$

$$L_{cch} = L_t + L_{Acc} + L_{Bcc} \cos h(F_R \theta) + L_{Ccc} \cos 2h\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.91)$$

Inductancias mutuas en el estator

$$L_{abh} = L_{bah} = -\frac{1}{2}L_{Aab} - \frac{1}{2}L_{Bab} \cos h(F_R \theta) + L_{Cab} \cos 2h\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad (3.92)$$

$$L_{bch} = L_{cbh} = -\frac{1}{2}L_{Abc} - \frac{1}{2}L_{Bbc} \cos h(F_R \theta) + L_{Cbc} \cos 2h(\theta) \quad (3.93)$$

$$L_{ach} = L_{cah} = -\frac{1}{2}L_{Aac} - \frac{1}{2}L_{Bac} \cos h(F_R \theta) + L_{Cac} \cos 2h\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \quad (3.94)$$

Las inductancias propias del rotor ahora dependen de la posición angular del rotor debido al ranurado, y son:

$$L_{fh} = L_{tf} + L_{Aff} + L_{Bff} \cos h(F_R \theta) + L_{Cff} \quad (3.95)$$

$$L_{kdkdh} = L_{tkd} + L_{Akdkd} + L_{Bkdkd} \cos h(F_R \theta) + L_{Ckdkd} \quad (3.96)$$

$$L_{ggh} = L_{tg} + L_{Agg} + L_{Bgg} \cos h\left(F_R \theta - \frac{\pi}{2}\right) + L_{Cgg} \quad (3.97)$$

$$L_{kqkqh} = L_{tkq} + L_{Akqkq} + L_{Bkqkq} \cos h\left(F_R \theta - \frac{\pi}{2}\right) + L_{Ckqkq} \quad (3.98)$$

Las inductancias mutuas del rotor también dependen de la posición angular del rotor.

$$L_{fkdh} = L_{kdfh} = L_{Afk d} + L_{Bfk d} \text{Cos } h(F_R \theta) + L_{Cfk d} \quad (3.99)$$

$$L_{gkqh} = L_{kqgh} = L_{Agk q} + L_{Bgk q} \text{Cos } h\left(F_R \theta - \frac{\pi}{2}\right) + L_{Cgk q} \quad (3.100)$$

$$L_{fgh} = L_{gfh} = L_{fkqh} = L_{kqfh} = L_{kdgh} = L_{gkdh} = L_{kdkqh} = L_{kqkdh} = 0 \quad (3.101)$$

Inductancias estator-rotor

$$L_{afh} = L_{fah} = [L_{Aaf} + L_{Baf} \text{Cos } h(F_R \theta) + L_{Caf}] \text{Cos } h(\theta) \quad (3.102)$$

$$L_{bfh} = L_{fbh} = [L_{Abf} + L_{Bbf} \text{Cos } h(F_R \theta) + L_{Cbf}] \text{Cos } h\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.103)$$

$$L_{cfh} = L_{fch} = [L_{Acf} + L_{Bcf} \text{Cos } h(F_R \theta) + L_{Ccf}] \text{Cos } h\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.104)$$

$$L_{akdh} = L_{kdah} = [L_{Aak d} + L_{Bak d} \text{Cos } h(F_R \theta) + L_{Cak d}] \text{Cos } h(\theta) \quad (3.105)$$

$$L_{bkdh} = L_{kdbh} = [L_{Abk d} + L_{Bbk d} \text{Cos } h(F_R \theta) + L_{Cbk d}] \text{Cos } h\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.106)$$

$$L_{ckdh} = L_{kdch} = [L_{Ack d} + L_{Bck d} \text{Cos } h(F_R \theta) + L_{Cck d}] \text{Cos } h\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.107)$$

$$L_{agh} = L_{gah} = - [L_{Aag} + L_{Bag} \text{Cos } h\left(F_R \theta - \frac{\pi}{2}\right) + L_{Cag}] \text{Sen } h(\theta) \quad (3.108)$$

$$L_{bgh} = L_{gbh} = - [L_{Abg} + L_{Bbg} \text{Cos } h \left(F_R \theta - \frac{\pi}{2} \right) + L_{Cbg}] \text{Sen } h \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.109)$$

$$L_{cgh} = L_{gch} = - [L_{Acg} + L_{Bcg} \text{Cos } h \left(F_R \theta - \frac{\pi}{2} \right) + L_{Ccg}] \text{Sen } h \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.110)$$

$$L_{akqh} = L_{kqah} = - [L_{Aakq} + L_{Bakq} \text{Cos } h \left(F_R \theta - \frac{\pi}{2} \right) + L_{Cakq}] \text{Sen } h(\theta) \quad (3.111)$$

$$L_{bkqh} = L_{kqbh} = - [L_{Abkq} + L_{Bbkq} \text{Cos } h \left(F_R \theta - \frac{\pi}{2} \right) + L_{Cbkq}] \text{Sen } h \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.112)$$

$$L_{ckqh} = L_{kqbh} = - [L_{Ackq} + L_{Bckq} \text{Cos } h \left(F_R \theta - \frac{\pi}{2} \right) + L_{Cckq}] \text{Sen } h \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.113)$$

donde las L's, son:

$$L_{Axy} = 2N_x N_y \pi r l \frac{1}{k_5} \quad (3.114)$$

$$L_{Bxy} = 2N_x N_y \pi r l \frac{k_6}{k_5^2} \quad (3.115)$$

$$L_{Cxy} = N_x N_y \pi r l \frac{k_7}{k_5^2} \quad (3.116)$$

La geometría de la máquina se encuentra implícita en las constantes \mathbf{k} , (3.46) - (3.49) y (3.52) - (3.54), las que dependen de las dimensiones físicas del troquel de la máquina. Ahora observando la matriz de inductancias de la máquina síncrona, se tiene que sus elementos no dependen solo de la posición del rotor, sino también de los parámetros del material magnético, μ , en cada sección, esto con la finalidad de insertar la no linealidad magnética en forma directa. El tratamiento de la saturación en las inductancias, se puede efectuar por medio de las constantes \mathbf{k} , como se indica en

el siguiente apartado.

3.4 Inclusión de la saturación

En base a la formulación planteada en las secciones anteriores, la no linealidad se incluye directamente obteniendo el valor de μ para cada posición de θ , y para cada sección del troquelado en que se dividió la máquina; tomando como referencia la curva de saturación magnética del material, Figura 3.9.

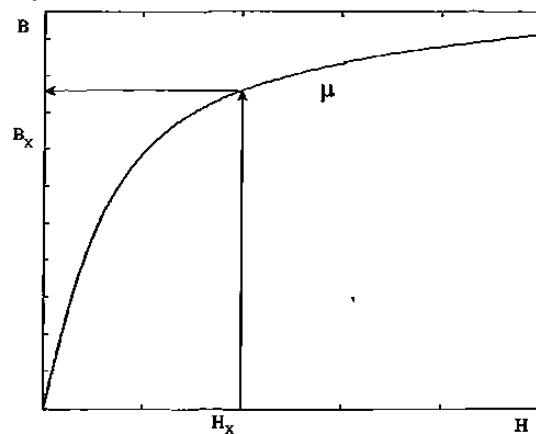


Figura 3.9 Característica magnética del material.

La característica B - H puede representarse mediante la función arcotangente, ver sección § 4.3.

$$B(H) = B_n \operatorname{atan}(mH_m) + \Delta B H \quad (3.117)$$

donde conociendo H se obtiene B , como se muestra en la Figura 3.9; teniendo los valores de B y H se obtiene μ :

$$\mu = \frac{B}{H} \quad (3.118)$$

donde H se evalúa con la relación:

$$H_x = \frac{FMM_x}{l_x} \quad (3.119)$$

el subíndice x indica que (3.119) se aplica para cada uno de los segmentos en que se divide el troquel de la máquina, de acuerdo a la Figura 3.6; aquí cabe mencionar que puede haber diferentes características magnéticas para el rotor y el estator. La ventaja de la división de troquel que se propone en este trabajo, es que se manejan diferentes niveles de saturación. Así, la saturación se maneja de manera independiente para los dientes, los polos y el yugo tanto del estator como del rotor. Considerando que el troquel está forjado del mismo material magnético para el rotor y el estator, se tiene solamente una característica no lineal, como en la Figura 3.9.

Para conocer la fuerza magnetomotriz total, FMM_T , de (3.119) se realiza la suma de todas y cada una de las FMM 's de los devanados que intervienen en la construcción de la máquina, para este caso son: a, b, c, f, kd, g y kq .

De acuerdo con (3.23) y realizando los defasamientos adecuados para los devanados restantes, se llega a:

$$\begin{aligned} FMM_T = & \frac{i_a N_s}{2} \text{Cos}\theta + \frac{i_b N_s}{2} \text{Cos}\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \\ & + \frac{i_c N_s}{2} \text{Cos}\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{i_f N_f}{2} \text{Cos}\theta + \frac{i_{kd} N_{kd}}{2} \text{Cos}\theta \\ & + \frac{i_g N_g}{2} \text{Cos}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{i_{kq} N_{kq}}{2} \text{Cos}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.120)$$

Ahora factorizando H_1 de (3.41) y utilizando el principio de continuidad del flujo, cuya relación de áreas se redujo a (3.43), se tiene

$$FMM_T = H_1 \left[l_1 + l_2 \frac{d_1}{d_2} \frac{\mu_1}{\mu_2} + l_3 \frac{d_1}{d_3} \frac{\mu_1}{\mu_0} + l_4 \frac{d_1}{d_4} \frac{\mu_1}{\mu_4} + l_5 \frac{d_1}{d_5} \frac{\mu_1}{\mu_5} \right] \quad (3.121)$$

despejando H_1

$$H_1 = \frac{FMM_T}{l_1 + l_2 \frac{d_1}{d_2} \frac{\mu_1}{\mu_2} + l_3 \frac{d_1}{d_3} \frac{\mu_1}{\mu_0} + l_4 \frac{d_1}{d_4} \frac{\mu_1}{\mu_4} + l_5 \frac{d_1}{d_5} \frac{\mu_1}{\mu_5}} \quad (3.122)$$

Considerando la condición inicial de las μ 's en todos y cada uno de los segmentos del troquelado, en la sección lineal de su característica de saturación Figura 3.9; se resuelve (3.122) para obtener H_1 , con la cual se entra a la gráfica de la Figura 3.9, para obtener B_1 y con (3.40) se obtiene μ_1 .

Conociendo B_1 se puede obtener el flujo ϕ del circuito magnético del troquel, Figura 3.6, y como tal circuito esta en serie, ignorando para el cálculo la reluctancia de dispersión, el flujo ϕ es igual en todas las secciones magnéticas.

$$\phi = \frac{B_1}{A_1} \quad (3.123)$$

Se calculan la reluctancias con los valores conocidos hasta aquí y se calculan las H 's con las relaciones siguientes.

$$H_2 = \phi \mathfrak{R}_2 = \phi \frac{l_2}{\mu_2 A_2} \quad (3.124)$$

$$H_4 = \phi \mathfrak{R}_4 = \phi \frac{l_4}{\mu_4 A_4} \quad (3.125)$$

$$H_5 = \phi \mathfrak{R}_5 = \phi \frac{l_5}{\mu_5 A_5} \quad (3.126)$$

Con estas H 's se entra a la característica magnética del material, Figura 3.9; se obtienen las B 's y utilizando (3.40) se calculan las μ 's restantes. Debe de aclararse que el conjunto de ecuaciones (3.122) - (3.126) se resuelven en forma iterativa hasta que se cumpla una tolerancia especificada para todas y cada una de las μ 's, esto para cada posición de θ .

Obsérvese que aquí es donde se pueden manejar diferentes características magnéticas para los segmentos en que se dividió el troquel de la máquina, en este caso en particular se considera que el troquel de la máquina es del mismo material magnético, tanto en el estator como en el rotor; por

lo tanto se requiere de solo una característica de la saturación del material, Figura 3.9. Lo que se debe de notar es que es solo una característica de saturación, pero no es la misma magnetización en el troquelado para todo θ , sino que para este caso la magnetización depende del área y longitud de cada segmento en que se haya dividido el troquel. Se tendrían diferentes curvas de saturación tanto como materiales magnéticos diferentes sean requeridos por el troquel de la máquina.

Por lo tanto para cualquier posición de θ se obtienen las μ 's usando la FMM calculada de (3.44). De esta forma se observa que la inclusión de la saturación es directa en el modelo planteado, conociendo los parámetros y dimensiones físicas de la máquina en estudio.

Como puede observarse este modelo depende de los parámetros primitivos de la máquina, es decir parámetros que solo posee el diseñador y fabricante. Por lo tanto si se realiza una reducción considerando que el efecto de las ranuras ya está incluido en el factor de sesgo de los devanados y considerando n armónicos, el modelo se reduce a lo siguiente:

Inductancias propias en el estator

$$L_{aa} = L_{\ell} + L_A + \sum_{h=1}^n L_{Bh} \cos 2h(\theta) \quad (3.127)$$

$$L_{bb} = L_{\ell} + L_A + \sum_{h=1}^n L_{Bh} \cos 2h\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.128)$$

$$L_{cc} = L_{\ell} + L_A + \sum_{h=1}^n L_{Bh} \cos 2h\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.129)$$

Inductancias mutuas en el estator

$$L_{ab} = L_{ba} = -\frac{1}{2}L_A + \sum_{h=1}^n L_{Bh} \cos 2h\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad (3.130)$$

$$L_{bc} = L_{cb} = -\frac{1}{2}L_A + \sum_{h=1}^n L_{Bh} \cos 2h(\theta) \quad (3.131)$$

$$L_{ac} = L_{ca} = -\frac{1}{2}L_A + \sum_{h=1}^n L_{Bh} \cos 2h\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \quad (3.132)$$

Inductancias propias del rotor

$$L_{ff}, L_{gg}, L_{kdkd} \text{ y } L_{kqkq} \quad (3.133)$$

Inductancias mutuas del rotor

$$L_{fkd} = L_{kdf} \text{ y } L_{gkq} = L_{kqg} \quad (3.134)$$

Inductancias estator-rotor

$$L_{af} = L_{fa} = \sum_{h=1}^n L_{mdh} \cos h(\theta) \quad (3.135)$$

$$L_{bf} = L_{fb} = \sum_{h=1}^n L_{mdh} \cos h\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.136)$$

$$L_{cf} = L_{fc} = \sum_{h=1}^n L_{mdh} \cos h\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.137)$$

$$L_{akd} = L_{kda} = \sum_{h=1}^n L_{mdh} \cos h(\theta) \quad (3.138)$$

$$L_{bkd} = L_{kdb} = \sum_{h=1}^n L_{mdh} \cos h\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.139)$$

$$L_{ckd} = L_{kdc} = \sum_{h=1}^n L_{mdh} \cos h\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.140)$$

$$L_{ag} = L_{ga} = -\sum_{h=1}^n L_{mqh} \sin h(\theta) \quad (3.141)$$

$$L_{bg} = L_{gb} = - \sum_{h=1}^n L_{mqh} \text{Sen } h \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.142)$$

$$L_{cg} = L_{gc} = - \sum_{h=1}^n L_{mqh} \text{Sen } h \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.143)$$

$$L_{akq} = L_{kqa} = - \sum_{h=1}^n L_{mqh} \text{Sen } h(\theta) \quad (3.144)$$

$$L_{bkq} = L_{kqb} = - \sum_{h=1}^n L_{mqh} \text{Sen } h \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.145)$$

$$L_{ckq} = L_{kqb} = - \sum_{h=1}^n L_{mqh} \text{Sen } h \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (3.146)$$

donde L_{Bh} , L_{mdh} y L_{mqh} , son los valores de L_B , L_{md} y L_{mq} , respectivamente, para cada armónico que se desee incluir. El factor de participación de cada armónico se puede tomar como:

$$L_{Bh} = \frac{L_B}{h}, \quad L_{mdh} = \frac{L_{md}}{h}, \quad L_{mqh} = \frac{L_{mq}}{h} \quad (3.147)$$

o en forma porcentual

$$L_{Bh} = \%h L_B, \quad L_{mdh} = \%h L_{md}, \quad L_{mqh} = \%h L_{mq} \quad (3.148)$$

el tomar la participación de cada armónico en forma porcentual, permite más flexibilidad al modelo ya que se puede indicar qué porcentaje de determinado número de armónicos se quiere que inyecte la máquina al sistema.

Los valores de L_A , L_B , L_{md} y L_{mq} ; son los parámetros estándar en **abc**, los cuales se obtienen a partir de los datos proporcionados por el fabricante en **dqo**, como sigue:

$$L_A = \frac{1}{3} (L_d + L_q) - \frac{2}{3} L_t \quad (3.149)$$

$$L_B = \frac{1}{3} (L_d - L_q) \quad (3.150)$$

$$L_{md} = L_d - L_t \quad (3.151)$$

$$L_{mq} = L_q - L_t \quad (3.152)$$

$$L_{ff} = L_{ft} + L_{md} \quad (3.153)$$

$$L_{gg} = L_{gt} + L_{mq} \quad (3.154)$$

$$L_{kdkd} = L_{kdt} + L_{md} \quad (3.155)$$

$$L_{kqkq} = L_{kqt} + L_{mq} \quad (3.156)$$

3.5 Armónicos en la máquina síncrona

Los generadores modernos poseen un elevado control de calidad que de acuerdo a los factores de devanado, así como a las características magnéticas del material con el que se fabrican, su inyección de armónicos al sistema es mínima o nula. Por lo tanto, el presente modelo es de gran utilidad para cuando se quiere simular la máquina como una fuente de inyección de armónicos del orden y magnitud que se requiera, es decir, simular el efecto de fallas internas en el generador, lo cual implica inyección de armónicos al sistema.

Los armónicos pares se eliminan debido a la simetría de las fases en la máquina y debido a la conexión de la misma, los armónicos triples ($h=3, 9, 15, \dots$), también se eliminan. Por lo tanto los armónicos que pueden presentar problema en una máquina trifásica simétrica son: $h = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29$, etc. entre mayor sea el armónico, de acuerdo con las series de Fourier, menor será

su efecto. Entre estos los armónicos a considerar son los llamados armónicos banda, que se obtienen mediante la relación

$$h_{\text{banda}} = 2q \pm 1 \quad (3.157)$$

con $q=3$, que es el número de fases de la máquina, los armónicos banda son: $h_{\text{banda}} = 5$ y 7 . La magnitud de estos armónicos se puede reducir o anular mediante la elección apropiada de los factores de paso y distribución (3.18) y (3.19), respectivamente.

Algunos armónicos de orden superior no pueden suprimirse mediante la selección de los factores de paso y distribución, y son los llamados armónicos de ranura, los cuales se obtienen de acuerdo a

$$h_{\text{ranura}} = \frac{2MS}{p} \pm 1 \quad (3.158)$$

donde M es cualquier entero, S es el número de ranuras en el estator y p es el número de polos. Estos armónicos normalmente son: $h_{\text{ranura}} = 17$ y 19 , cuya magnitud puede ser reducida o eliminada mediante el factor de sesgo.

Los armónicos del estator y rotor pueden producir un segundo proceso de conversión de energía en la máquina el cual se refleja principalmente en pares parásitos, es decir, vibraciones mecánicas en la máquina.

3.6 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un modelo de la máquina síncrona en coordenadas **abc**, incluyendo los efectos de saturación y saliencia tanto en el rotor como en el estator. Tal modelo es posible aplicarlo tanto a hidrogeneradores como a turbogeneradores, haciendo las modificaciones necesarias al modelo general planteado, que corresponde a una máquina síncrona de polos salientes.

Partiendo de circuitos magnéticos se mostró una forma directa para incluir la saliencia del estator y del rotor, dependiendo del tipo de máquina; así como el tratamiento de la saturación. Del mismo modo se puede extender el procedimiento para incluir el ciclo de histéresis.

Una posible aplicación del modelo desarrollado es que al tener las variables internas de la máquina, es fácil simular fallas internas para obtener su espectro y así tener referencia del tipo y forma de onda que provocan tales fallas específicas al sistema. Es decir que en base a un espectro obtenido durante la operación de una máquina, se puede determinar si ésta posee una falla interna y de qué tipo.

Por lo anterior el modelo planteado se puede establecer como una herramienta adecuada y útil para el análisis en campo de máquinas eléctricas.

El modelo que se redujo al final presenta la ventaja de considerar el número de armónico deseado y su magnitud, de esta forma, mediante parámetros estandar en $dq0$ se puede simular los efectos de saturación e histéresis, a través de su reflejo armónico en coordenadas originales abc .

Capítulo 4

MODELO DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DE CINCO COLUMNAS PARA ESTUDIOS TRANSITORIOS DE BAJA FRECUENCIA

4.1 Introducción

El transformador de potencia se utiliza en los sistemas de transmisión para elevar los niveles de voltaje y así reducir pérdidas durante el transporte de energía a grandes distancias. Posteriormente el transformador reduce el nivel de voltaje en los centros de consumo. Con el incremento de la electrónica de potencia en los sistemas eléctricos, se requiere de modelos más realistas y detallados de los elementos y dispositivos que los forman, uno de dichos elementos es el transformador trifásico. La representación exacta y realista de la no linealidad del material del núcleo laminado ha sido un reto de varias investigaciones. Muchas propuestas han resultado en la dirección del modelado de transformadores monofásicos; por ejemplo, en [96,97] el enfoque se basa en un circuito eléctrico equivalente donde la no linealidad del núcleo laminado se representa mediante un elemento no lineal en paralelo a la rama de magnetización. Se han realizado comparaciones entre la solución obtenida entre los dominios de frecuencia y tiempo [96]. En [99] se calcula la corriente inrush en el dominio armónico considerando el sistema cuasi-estacionario. Los transformadores trifásicos de dos y tres

devanados se forman mediante las diferentes conexiones de los monofásicos [100], donde la saturación se representa mediante una característica de magnetización lineal por tramos.

Los trabajos en [101-103] muestran y discuten en detalle los efectos de las no linealidades magnéticas pero no concluyen en un modelo concreto para el transformador. En [104] se muestra el modelo del transformador trifásico de tres columnas habilitado para el cálculo de la corriente inrush, con el inconveniente que no toma en cuenta las no linealidades. El modelo trifásico presentado en [105] toma en cuenta la no linealidad y efecto mutuo entre fases haciendo solo énfasis en la obtención de la solución iterativa de la parte no lineal. Los modelos para las no linealidades presentados en [106-108] son muy complejos y difíciles de incluir en programas de transitorios generales como el ATP.

Una excelente presentación del modelo del transformador con no linealidades se tiene en [109] donde se presentan las bases sólidas para el desarrollo del modelo trifásico puesto que en esta referencia solo se tiene el monofásico. En [110] los autores, tomando como base [109], presentan el modelo trifásico de tres columnas.

Otro enfoque muy utilizado es la dualidad en circuitos magnéticos [111-115] donde el circuito magnético del núcleo del transformador se convierte a su dual eléctrico donde son fácilmente incluidas las pérdidas en el núcleo de la manera clásica [96-98], sin embargo, el inconveniente es que resultan redes eléctricas muy complejas y un gran número de transformadores ideales que hacen que se pierda el significado real del transformador.

Por lo tanto, un modelo que parta de las características físicas del transformador y haga uso de ellas en su solución, permitirá una comprensión real del funcionamiento del transformador al usuario. Los trabajos dirigidos en este sentido han sido [109, 110, 116-118] donde basándose en la topología del núcleo se desarrollan modelos para el transformador monofásico y trifásico de tres y cinco columnas. Estos últimos trabajos son el apoyo para el desarrollo del presente donde el objetivo primordial es tener un modelo del transformador trifásico de cinco columnas completo (el cual puede ser reducido a tres columnas directamente, esta es precisamente la ventaja de trabajar con parámetros originales), el cual se pueda utilizar fácilmente en estudios transitorios de baja frecuencia. Como se

tienen los voltajes y corrientes instantáneas se pueden analizar directamente: la corriente de inrush ante diferentes condiciones de magnetización, ferresonancia, generación de armónicos, cargas rectificadas, fallas en los devanados balanceadas o no, cortocircuito, entre otras.

Reconociendo que el modelo no es enteramente nuevo el autor muestra un simple y eficiente manejo de la inserción de la no linealidad en cada una de las reluctancias que forman el núcleo del transformador, comprobando que la saturación no es igual en cada uno de los elementos y mucho menos entre ellos en cada instante de tiempo.

4.2 Modelo del transformador trifásico de cinco columnas con n devanados por fase

El desarrollo del modelo del transformador en función de sus propiedades primitivas, es decir reluctancias, permite tener un control total sobre el mismo, ya que puede considerar un número de n devanados por fase así como las propiedades magnéticas del material, y más aún si lo relacionamos con el análisis desarrollado en elementos finitos podemos saber con más precisión qué secciones del troquel del transformador debemos detallar mejor. Para nuestro caso, la Figura 4.1 muestra el transformador trifásico de cinco columnas que se toma como base para el desarrollo del modelo en función de las reluctancias magnéticas del mismo. La reducción al trifásico de tres columnas será directa como se verá del modelo resultante. En la Figura 4.2 se observa el circuito eléctrico equivalente del transformador, donde el objetivo es obtener L y/o su inversa $L^{-1} = \Gamma$ que es el parámetro que va a estar cambiando para cada paso de integración de acuerdo a la no linealidad del material magnético del troquel del transformador. En esta misma figura se indica la ventaja del modelo ya que en este, en términos generales, se modela la matriz de inductancias multipuertos no lineal L del transformador dejando libres sus terminales para que la alimentación pueda ser derivada de cualquier conexión trifásica que se requiera del transformador, así como poder agregar otros dispositivos en las terminales del mismo, como son capacitores, de relevante importancia en maniobras de conmutación y/o análisis de ferresonancia. Además, se observa que se pueden manejar n devanados en el primario y secundario por fase, lo cual permite modelar directamente tap's al conectarlos en serie de acuerdo con la Figura 4.2.

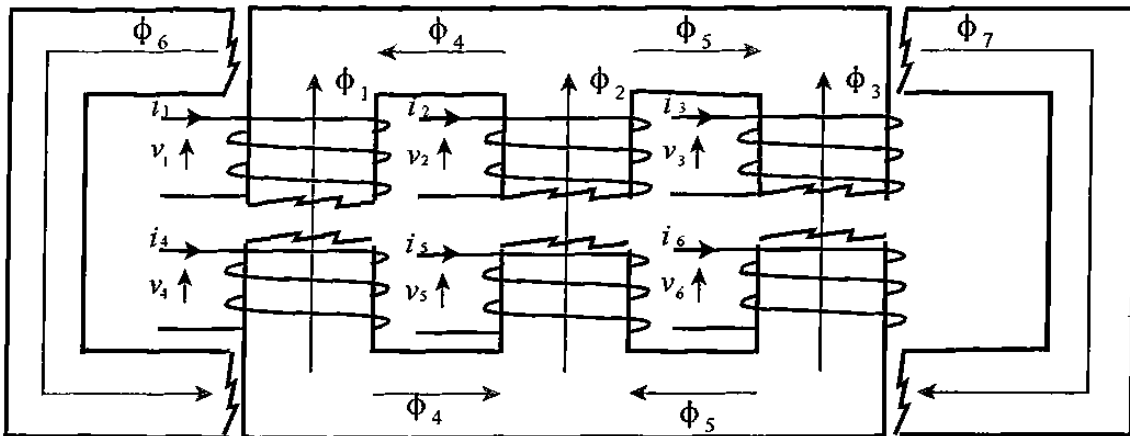


Figura 4.1 Transformador trifásico de cinco columnas

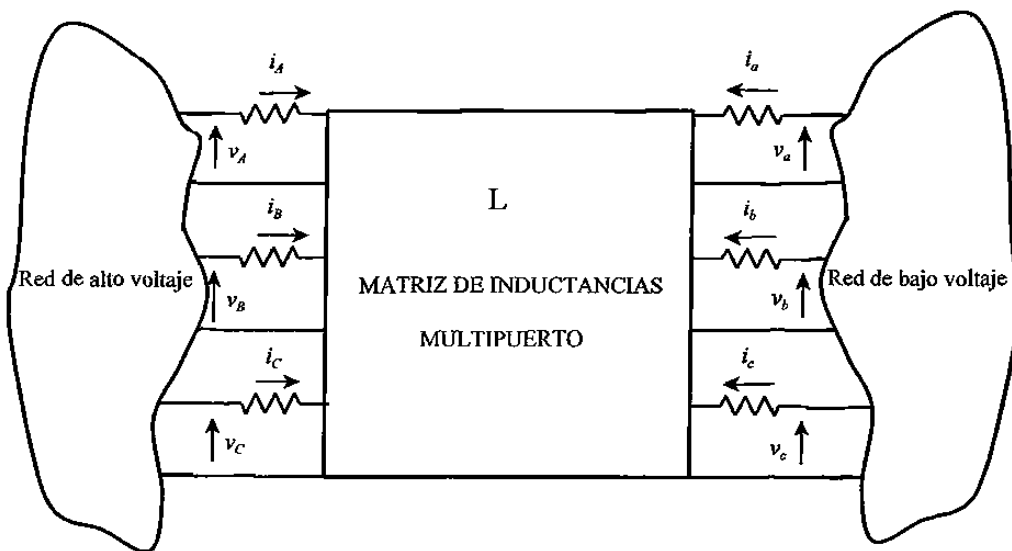


Figura 4.2 Circuito equivalente eléctrico del transformador trifásico de cinco columnas

En la Figura 4.2, se puede observar que finalmente la matriz de inductancias multipuerto es la que depende de todas y de cada una de las características físicas del transformador y es aquí donde se puede manipular la exactitud que se desea para el modelo así como también si es de 3 o de 5 columnas, o más aun si tiene diferente tipo de material magnético en las diferentes regiones del troquel del transformador ya que como se verá en el análisis, el flujo es diferente en las mismas.

Cuando se modela el transformador lineal no hay mucha diferencia entre elegir como variables de estado las corrientes o los enlaces de flujo. Sin embargo, en el modelo no lineal resulta más ventajoso elegir como variables de estado los enlaces de flujo puesto que estos cambian más lentamente que las corrientes que los producen, lo que conlleva en sí una mayor estabilidad computacional del modelo.

Con la elección de los enlaces de flujo como variables de estado, la ecuación de voltajes para los devanados del transformador es

$$\frac{d\lambda}{dt} = v - Ri \quad (4.1)$$

donde λ , v e i , vectores de 6×1 son los enlaces de flujo, voltajes y corrientes, respectivamente, en cada devanado del transformador. R es una matriz diagonal de 6×6 , que representa la resistencia en los devanados. La relación entre las corrientes y enlaces de flujo como variables de estados es

$$i = L^{-1}\lambda = \Gamma\lambda \quad (4.2)$$

El sistema de ecuaciones diferencio-algebraicas (4.1) y (4.2) forman el modelo del transformador trifásico. Como puede observarse el modelo depende del cálculo de Γ , por lo tanto el desarrollo del cálculo de Γ se realiza a continuación. Primeramente se asume una condición magneto-cuasi-estática para el transformador, esto es, que no hay retardo apreciable entre las corrientes y los flujos en el núcleo que éstas producen. Como L , y por consecuencia Γ , depende exclusivamente de la geometría magnética del transformador su obtención se basa en la Figura 4.3. Aquí, las reluctancias de las columnas donde se colocan los devanados primario y secundario son: \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 y \mathfrak{R}_3 . Las reluctancias de los yugos son: \mathfrak{R}_4 y \mathfrak{R}_5 , aclarando que \mathfrak{R}_4 es la reluctancia neta de los yugos inferior y superior de la parte izquierda en la Figura 4.3 y similarmente \mathfrak{R}_5 en la parte derecha. Las reluctancias \mathfrak{R}_6 y \mathfrak{R}_7 , son las correspondientes a las columnas externas. Las reluctancias de \mathfrak{R}_1 a \mathfrak{R}_7 son no lineales y cambian de acuerdo a la característica magnética del material, normalmente esta característica es la misma para los siete segmentos, puesto que el núcleo del transformador está

fabricado del mismo material.

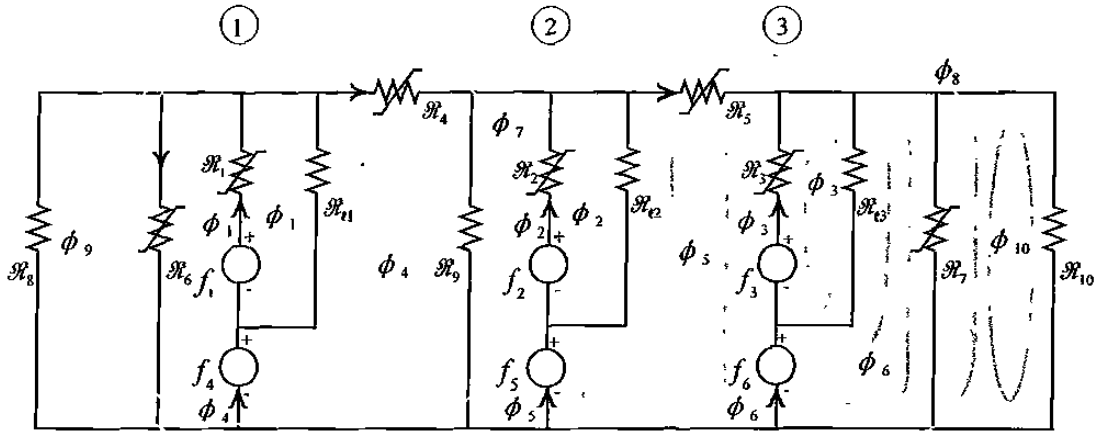


Figura 4.3 Circuito equivalente magnético del transformador trifásico de cinco columnas

Debido a la dificultad para medir o calcular las reluctancias de columnas y yugos que siguen una trayectoria por el aire, éstas se incluyen en los segmentos del núcleo adecuados y sus valores son proporcionales a los segmentos que relacione. Así pues, R_{e1} , R_{e2} y R_{e3} , son las reluctancias de dispersión en el aire entre los devanados primario y secundario. R_8 , R_9 y R_{10} , son las reluctancias de dispersión a través del aire y del tanque. Éstas últimas no son importantes en el transformador de cinco columnas, no así para el de tres columnas.

Aplicando mallas al circuito magnético de la Figura 4.3, cuidando de que solo un flujo de malla pase por cada una de las fuentes magnetomotrices, se obtiene la siguiente relación en función de las *fmm*'s aplicadas externamente, f_i .

donde

$$N_k \phi_k = \lambda_k \quad (4.10)$$

$$N_k i_k = f_k$$

La actualización de las permeabilidades μ_k ($k = 1..7$) consiste en obtener la H en cada uno de los segmentos del núcleo del transformador, para lo cual primero se calculan las fmm 's nodales, fn_k ($k=1..3$), como sigue

$$fn_k = f_k + f_{k+3} + \Re_k \frac{\lambda_k}{N_k} \quad (k = 1..3) \quad (4.11)$$

lo que habilita el cálculo de la H para cada segmento, así para las columnas con devanados se tiene

$$H_k = \frac{(f_k + f_{k+3} - fn_k)}{l_k} \quad (4.12)$$

para los yugos

$$H_{k+3} = \frac{(fn_k - fn_{k+1})}{l_{k+3}} \quad (k = 1..2) \quad (4.13)$$

finalmente para las columnas externas

$$H_6 = \frac{fn_1}{l_6} \quad (4.14)$$

$$H_7 = \frac{fn_3}{l_7} \quad (4.15)$$

Con la H en cada segmento se obtiene la B para el mismo de la curva de saturación y se actualiza la permeabilidad como sigue

$$\mu_k = \frac{B_k}{H_k} \quad (k = 1..7) \quad (4.16)$$

Si se trabaja en *por unidad* (*p. u.*), de (4.7) y (4.9) se induce que bajo esta referencia $\phi_k = \lambda_k$, $fmm_k = i_k$, para ($k=1..6$) y $A^m = \Gamma$, la cual es una matriz simétrica y dispersa. Por lo tanto la formación directa de Γ implica únicamente un manejo de la característica no lineal de saturación $B-H$ en *p. u.*

4.3 Representación de la saturación e histéresis, aproximando mediante la función arcotangente

La característica no lineal como lo es la saturación y la histéresis, en los materiales ferromagnéticos, desde fines del siglo XIX se ha tratado de modelar, primeramente con relaciones empíricas, y hasta ahora ha pasado por diferentes formas de aproximación, como son: rectas, exponenciales [119], hipérbolas [120,121], polinomios [122-127], arcotangente [128-130] y ecuaciones diferenciales de retardo [131,132], y relaciones entre ellas. El interés de modelar con mayor precisión las características no lineales, radica en que los sistemas requieren ser cada vez más robustos, lo que implica que sus parámetros deben de tener el mínimo de incertidumbre, esto, independiente del nivel de potencia que se trate, es decir, equipos con materiales ferromagnéticos que van desde instrumentos de medición hasta grandes transformadores y generadores eléctricos. Existe un buen número de trabajos en esta dirección, donde cada uno presenta un avance ya sea en el modelado o aplicación, una lista más completa en referencia a esta literatura se tiene en [126].

En el presente trabajo se propone un modelo basado en la función arcotangente, [128-130], con un mínimo de constantes, pero significativas, ya que permiten el ajuste a cualquier característica de saturación. La relación obtenida es de gran flexibilidad analítica y numéricamente. Esto último es importante ya que entre más rápido sea su evaluación numérica, mejor aprovechamiento se tendrá en el modelo completo. La sencillez analítica permite fácilmente pasar de $\lambda_m = f(i_m)$ a $i_m = f(\lambda_m)$, es decir, de la formulación en corrientes a la formulación en enlaces de flujo.

4.3.1 Característica de saturación

La aproximación de la característica de saturación, se realiza mediante la función arcotangente, puesto que dicha función por si sola tiene la forma de la saturación, por lo tanto lo único que resta es normalizarla y obtener el mínimo número de parámetros para tener control sobre ella. La función propuesta para la aproximación de la curva mostrada en la Figura 4.4, esta dada por [129].

$$\lambda_m(i_m) = \lambda_n \operatorname{atan}(m i_m) + \Delta \lambda i_m \quad (4.17)$$

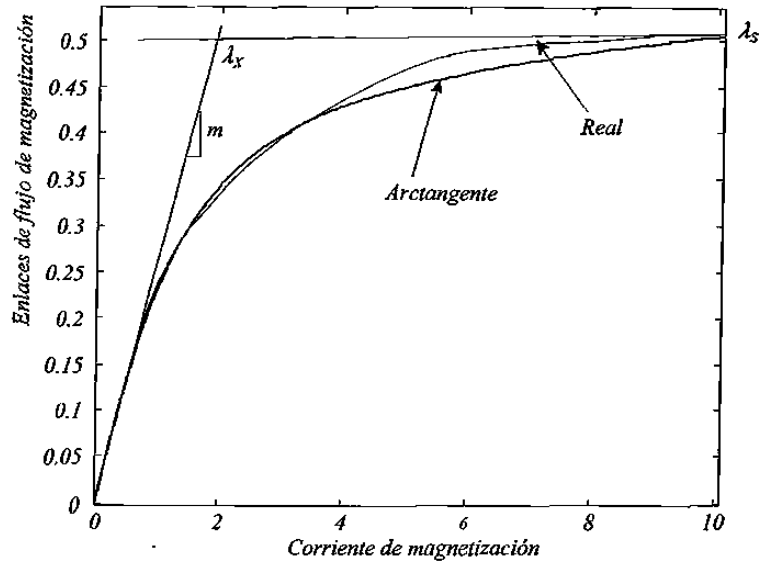


Figura 4.4 Curva de saturación real y aproximada

Se observa que (4.17) depende de tres constantes que se calculan a partir de los datos que se tienen en la curva real, como sigue

$$\lambda_n = \lambda_x \frac{2}{\pi} \quad (4.18)$$

$$m = \frac{\Delta \lambda}{\Delta i} \frac{\pi}{2 \lambda_s} \quad (4.19)$$

$$\Delta\lambda = \frac{[\lambda_s - \lambda_n \operatorname{atan}(m i_s)]}{i_s} \quad (4.20)$$

donde

- λ_x es el valor de λ_m en el punto de cruce de las pendientes indicadas en la Figura 4.4.
- λ_n es el valor de λ_x normalizada al valor máximo que tiende la función arcotangente, $\pi/2$.
- λ_s es el valor de saturación de λ_m de la característica real.
- m es la pendiente inicial de la curva, normalizada al valor máximo del arcotangente, $\pi/2$, y al valor de saturación, λ_s .
- i_s es el valor de i para cuando se tiene el punto λ_s .
- $\Delta\lambda$ es el incremento lineal de λ_m .
- λ_m enlaces de flujo de magnetización
- i_m corriente de magnetización

Como puede notarse el cálculo de las constantes (4.18)-(4.20), es simple y los parámetros requeridos son directos de obtener a partir de la característica real.

El efecto de cada constante en (4.17), se puede observar en las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7

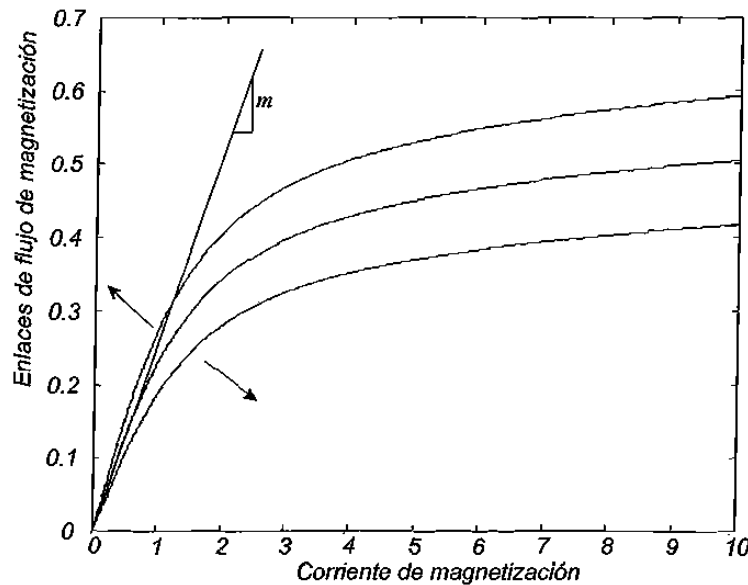


Figura 4.5 Movimiento relativo variando m

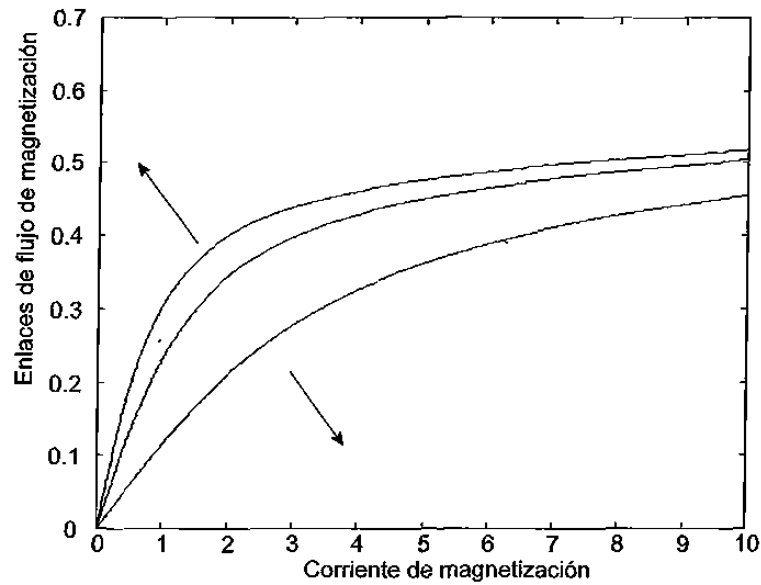


Figura 4.6 Movimiento relativo, variando λ_n

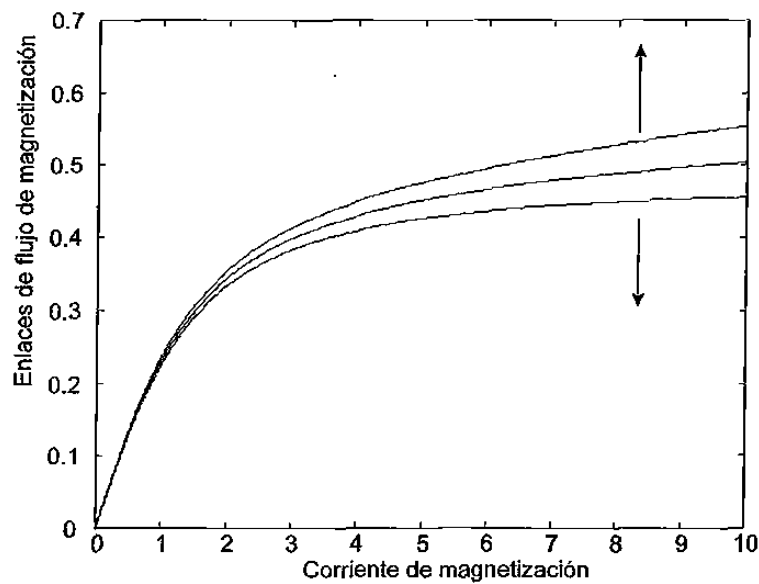


Figura 4.7 Movimiento relativo, variando $\Delta\lambda$

Analizando las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7, se observa el movimiento que provocarían los cambios, positivos o negativos, en la curva resultante. Por lo tanto se tiene un control total al aplicar y manejar las constantes m , λ_n y $\Delta\lambda$ en (4.17), e incluso hacer un ajuste más fino, si los cálculos de (4.18)-(4.20), presentan algún error por falta de exactitud al medir los puntos de interés.

En el modelo de sistemas magnéticos, electromagnéticos y electromecánicos; una de las no linealidades es la inductancia de magnetización L_m , que matemáticamente está definida como

$$L_m = \frac{d\lambda_m(i_m)}{di_m} \tag{4.21}$$

entonces de (4.17) se tiene

$$L_m = \frac{d\lambda_m(i_m)}{di_m} = \frac{\lambda_m m}{1+m^2 i^2} + \Delta\lambda \tag{4.22}$$

Estas ecuaciones son aplicables cuando la formulación de los sistemas se desarrolla en base a las corrientes como variables de estado. El resultado debe de extenderse para cuando la formulación se realiza tomando los enlaces de flujo como variables de estado. Para este caso, la relación no lineal es $i_m = f(\lambda_m)$, Figura 4.8.

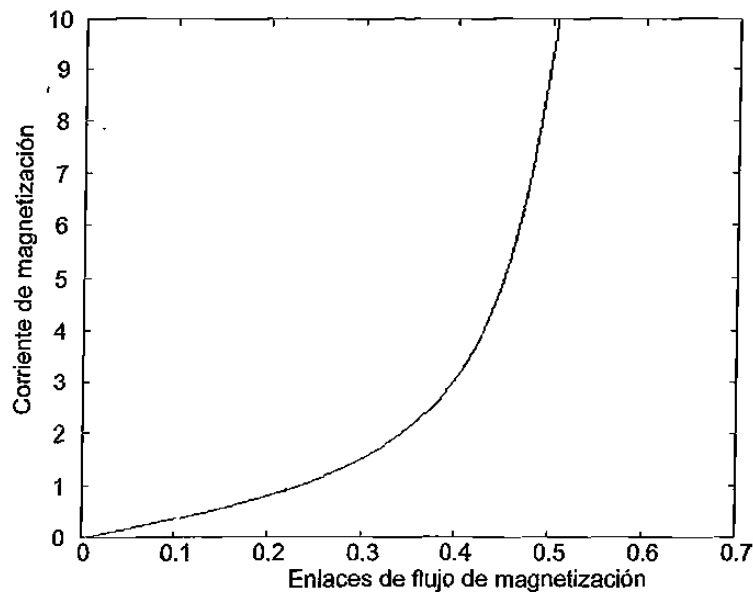


Figura 4.8 Característica $i_m = f(\lambda_m)$

Matemáticamente se obtiene de (4.17), al despejar se llega a

$$i_m(\lambda_m) = \frac{1}{m} \tan \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_n} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_n} i_m \right) \quad (4.23)$$

y para este caso se obtiene el inverso de la inductancia de magnetización

$$\frac{1}{L_m} = \frac{di_m(\lambda_m)}{d\lambda_m} = \frac{i}{\lambda_n m} \left[1 + \tan \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_n} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_n} i_m \right)^2 \right] \quad (4.24)$$

4.3.2 Histéresis

El modelo de histéresis a usar es el que podría llamarse tradicional y es el que consiste en una resistencia, que representa las pérdidas en el núcleo, en paralelo con un inductor no lineal [122, 123], Figura 4.9.

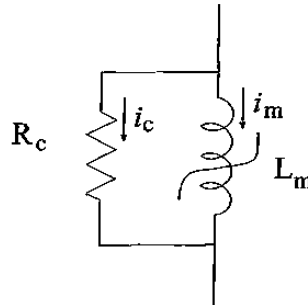


Figura 4.9 Circuito para simular la histéresis

De lo anterior se puede afirmar que si la representación de la no linealidad del inductor es sencilla, lo será por consecuencia la representación de la histéresis.

4.4 Simulación y resultados

Se implementó computacionalmente el modelo diferencio-algebraico representado por (4.1) y (4.2), respaldándose en (4.4), (4.6) y (4.9), así como en la curva de saturación del material.

Los parámetros para el transformador tomados de [22], son los siguientes:

S , potencia nominal	=	150	MVA
V , voltaje nominal	=	20/20	KV
I , corriente nominal	=	75	KA
R , resistencia	=	0.0015/0.0015	<i>p.u.</i>
X_{ps} , reactancia de cortocircuito	=	0.1	<i>p.u.</i>
X_o , reactancia de magnetización	=	1.86	<i>p.u.</i>

Las dimensiones del núcleo en *p.u.*, se proporcionan en la Figura 4.10.

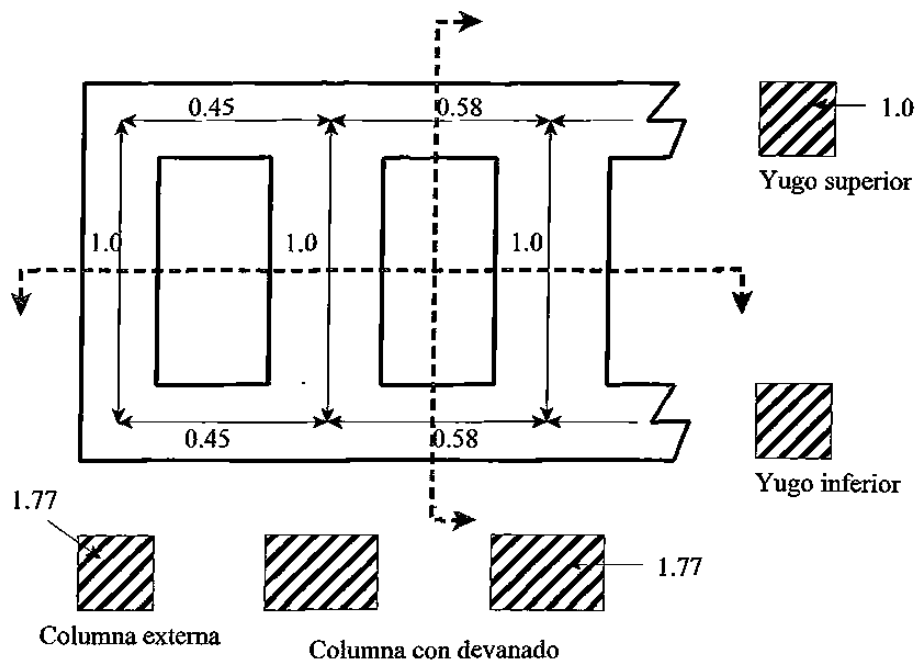


Figura 4.10 Dimensiones físicas del núcleo magnético para el transformador trifásico de cinco columnas

Datos de la curva de saturación en *p.u.*

B (0 0.8 0.9 1.0 1.1 1.15 1.2 1.24)

H (0.002 0.005 0.012 0.025 0.048 0.105 0.2)