

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**MODELADO DE ELEMENTOS EN SISTEMAS
ELECTRICOS DE POTENCIA PARA ESTUDIOS
SOBRE ENERGIZACION**

TESIS
**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON
ESPECIALIDAD EN POTENCIA**
PRESENTA
OMAR MENDEZ ZAMORA

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

OCTUBRE, 2001

2001

TM
Z5853
.M2
FINE
2001

MODELLADO DE ELEMENTOS EN SISTEMAS
ELECTRICOS DE POTENCIA PARA ESTUDIOS
SOBRE ENERGIZACION

O
M
N



1020145484

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



MODELADO DE ELEMENTOS EN SISTEMAS
ELECTRICOS DE POTENCIA PARA ESTUDIOS
SOBRE ENERGIZACION

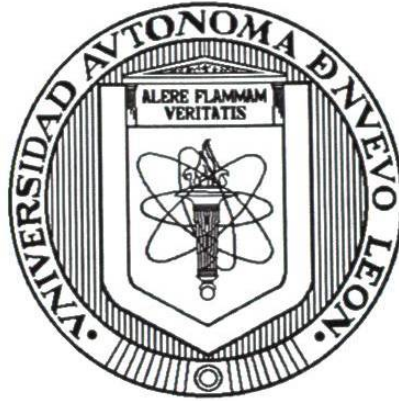
TESIS
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON
ESPECIALIDAD EN POTENCIA
PRESENTA
OMAR MENDEZ ZAMORA

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. OCTUBRE, 2001

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**MODELADO DE ELEMENTOS EN SISTEMAS ELECTRICOS DE
POTENCIA PARA ESTUDIOS SOBRE ENERGIZACION**

TESIS

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON
ESPECIALIDAD EN POTENCIA**

PRESENTA

OMAR MENDEZ ZAMORA

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

OCTUBRE, 2001

0150-28060

TM
Z5853
• M2
FINE
2001
M4

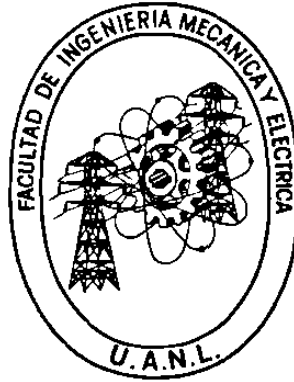


FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**MODELADO DE ELEMENTOS EN SISTEMAS ELECTRICOS DE
POTENCIA PARA ESTUDIOS SOBRE ENERGIZACION**

TESIS

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON
ESPECIALIDAD EN POTENCIA**

PRESENTA

OMAR MENDEZ ZAMORA

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

OCTUBRE, 2001

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Subdirección de Estudios de Postgrado

Los miembros de comité de tesis recomendamos que la tesis **MODELADO DE ELEMENTOS EN SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA PARA ESTUDIOS SOBRE ENERGIZACION**, realizada por el alumno Omar Méndez Zamora, matrícula 1079802 sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Potencia.

El Comité de Tesis



Asesor
Dr. Salvador Acha Daza



Coasesor
Dr. J. Aurelio Medina Rios



Coasesor
Dr. Rogelio Ramirez Barradas



Vo. Bo.
M. C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Postgrado

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo a mis padres Isabel y Gerardo quienes me han apoyado incondicionalmente y sobre todo por la confianza que me han brindado. También quiero dedicar esta tesis a mis hermanos: Gaby, Ale, Alma y Sylvia, quienes han sido parte fundamental en mi desarrollo como persona.

AGRADECIMIENTOS

A toda mi familia por estar siempre al pendiente de lo que ocurre en mi vida. No escribo sus nombres porque no me alcanzaria esta página, pero ustedes saben a quienes me refiero.

Al Dr. Salvador Acha Daza por su asesoría y apoyo desde el inicio de mi maestría, pero sobre todo por su calidad como persona.

Al Dr. Rogelio Ramírez Barradas y al Dr. Aurelio Medina Rios por sus valiosos comentarios los cuales enriquecieron el contenido de esta tesis

A todos los profesores del Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica de quienes me llevo algo muy valioso que son sus conocimientos.

A todos mis compañeros de la maestría por la amistad que me otorgaron. En especial a Yanet por su cariño y compañía.

A las siguientes personas quienes de una u otra forma me ayudaron: Ing. Lino Coria, Dra. Andrea Vázquez y Sra. Eloisa Izquierdo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado durante la realización de mis estudios de Postgrado.

RESUMEN

Publicación No. _____

Omar Méndez Zamora, M. C. en Ingeniería Eléctrica
Universidad Autónoma de Nuevo León, 2001

Profesor Asesor: Dr. Salvador Acha Daza

En este trabajo se presentan modelos de los elementos más importantes que conforman a los sistemas eléctricos de potencia con el objetivo de analizar el fenómeno transitorio que se presenta durante su energización y puesta en servicio. El fenómeno es importante ya que los esfuerzos debidos a sobrecorrientes o a sobretensiones afectan el comportamiento eléctrico y la resistencia mecánica de los elementos del sistema de potencia.

Para el caso del reactor y del transformador, en este trabajo se presenta un procedimiento para el modelado del núcleo magnético, el cual tiene una característica no lineal que relaciona los enlaces de flujo con la corriente de magnetización. Se hace uso de la función tangente hiperbólica para lograr una representación adecuada de la curva de saturación. El modelo del núcleo se incorpora a un equivalente de un transformador monofásico que a su vez se utiliza para el modelado de bancos trifásicos formados por unidades monofásicas; las ecuaciones de comportamiento se escriben en la forma de variables de estado. Los modelos se aplican para hacer un análisis del efecto de la saturación magnética, motivo por el que se presenta el fenómeno de corrientes de avalancha. Además se presenta una secuencia de energización que, en teoría, permite eliminar las corrientes de avalancha; lo que se logra controlando el instante de cierre de interruptores para las fases del transformador trifásico.

En este trabajo también se llevó a cabo la modelación de motores síncronos y de motores de inducción, planteando en función de variables de estado, las ecuaciones diferenciales no lineales que describen el comportamiento de éstas máquinas en estado transitorio, así como en estado estable. Se hace énfasis en el transitorio que se presenta en el momento del arranque de los motores, lo cual permite estudiar las sobrecorrientes que toman un valor varias veces el nominal de estado estable. Las corrientes de energización pueden manifestarse como daños físicos a los devanados de los motores y tener efectos adversos sobre el comportamiento eléctrico de las componentes asociadas. Las magnitudes de las corrientes pueden provocar caídas de tensión en los circuitos de alimentación que son indeseables para otros usuarios conectados al mismo alimentador.

Para las simulaciones digitales del motor síncrono se consideraron tres devanados de estator, uno de campo y dos amortiguadores. Para el motor de inducción se consideraron tres devanados del estator y tres del rotor. Las ecuaciones se escribieron en componentes $qd0$, las cuales simplifican la solución del modelo empleado, además de haberse normalizado para manejar valores en por unidad. Se plantean diversos casos de motores para analizar su comportamiento durante el transitorio de energización, por ejemplo: energización en vacío, energización a plena carga y energización a tensión reducida. El trabajo presenta la formulación y las herramientas de simulación digital las cuales fueron desarrolladas en MATLAB[®]. Los resultados del software del autor se comparan con los obtenidos por medio del ATP, se establecen diferencias, ventajas y desventajas de los modelos propuestos.

INDICE

Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Resumen	vi
1. INTRODUCCION	
1.1 Motivación	1
1.2 Antecedentes	2
1.3 Estructura de la tesis	5
2. FORMULACION DE MODELOS DE REACTOR Y TRANSFORMADOR	
2.1 Introducción	8
2.2 Elementos de teoría del campo magnético	9
2.2.1 Materiales magnéticos y permeabilidad	11
2.2.2 Circuito magnético equivalente	13
2.3 La característica de saturación	17
2.4 Modelado de un reactor monofásico	19
2.5 Modelado del transformador monofásico	21
2.5.1 Transformador ideal	21
2.5.2 Modelo de transformador incluyendo saturación e histéresis	25
2.6 Un modelo de banco trifásico	28
2.6.1 Tipos de núcleos	29
2.6.2 Conexiones trifásicas	31
2.6.2.1 Conexión delta-estrella	31
2.6.2.2 Conexión estrella-estrella	34
2.7 Resumen	36
3. FORMULACION DE MODELO DE MAQUINA SINCRONA PARA ESTUDIOS DE ENERGIZACION	
3.1 Introducción	37
3.2 Componentes de una máquina síncrona	38
3.3 Formulación del modelo matemático	40
3.3.1 Inductancias propias del estator	41
3.3.2 Inductancias mutuas del estator	42

INDICE (Continuación)

3.3.3	Inductancias mutuas entre estator y rotor	43
3.3.4	Inductancias propias del rotor	43
3.4	La Transformada de Park	44
3.5	Variables en componentes $qd0$	46
3.5.1	Enlaces de flujo del estator	46
3.5.2	Enlaces de flujo del rotor	48
3.5.3	Ecuaciones de voltaje en el estator y rotor	49
3.5.4	Ecuaciones para las corrientes	52
3.6	Potencia y par electromagnético	53
3.7	Ecuación de oscilación	55
3.8	Ecuaciones normalizadas	56
3.8.1	Ecuaciones normalizadas para las simulaciones	58
3.9	Máquina síncrona en estado estable	60
3.10	Resumen	62
4.	MODELO DEL MOTOR DE INDUCCION PARA ESTUDIOS DE ENERGIZACION	
4.1	Introducción	63
4.2	Elementos que constituyen una máquina de inducción	64
4.2.1	Principio de funcionamiento	65
4.3	Formulación del modelo matemático para el motor de inducción	66
4.3.1	Inductancias propias del estator	68
4.3.2	Inductancias mutuas del estator	69
4.3.3	Inductancias mutuas entre estator y rotor	69
4.3.4	Inductancias propias y mutuas del rotor	69
4.3.5	Inductancias mutuas entre rotor y estator	70
4.4	Transformación de variables de fase a componentes $qd0$	70
4.4.1	Enlaces de flujo en componentes $qd0$	70
4.4.2	Ecuaciones de voltaje	72
4.4.3	Circuitos equivalentes $qd0$	73
4.5	Expresión del par electromagnético	74
4.6	La ecuación de oscilación	75
4.7	Ecuaciones normalizadas	75
4.7.1	Ecuaciones normalizadas para simulación	77
4.8	Marco de referencia estacionario	79
4.9	El motor de inducción en estado estable	81
4.10	Equivalente Thévenin para la máquina de inducción	84
4.11	Resumen	86

INDICE (Continuación)

5.	SIMULACIONES DIGITALES PARA FENOMENOS DE ENERGIZACION DE ELEMENTOS DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA	
5.1	Introducción	87
5.2	Energización de transformadores	87
5.2.1	Corriente de avalancha en un transformador monofásico	90
5.2.1.1	Dependencia de la corriente de avalancha respecto del ángulo de energización	95
5.2.2	Pérdidas de energía por histéresis	97
5.2.3	Corriente de avalancha en un banco trifásico Δ -Y	99
5.2.3.1	Energización de un banco de transformadores Δ -Y con carga eléctrica	100
5.2.4	Estrategia para reducir la corriente de avalancha	103
5.3	Energización de motores síncronos	106
5.3.1	Energización de motores síncronos considerando efecto de devanados amortiguadores	107
5.3.2	Energización de motor síncrono empleando un primo motor	109
5.3.3	Energización de motor síncrono a tensión reducida	111
5.4	Energización de motores de inducción	112
5.4.1	Energización de motor de inducción en vacío	113
5.4.2	Relación entre par máximo y resistencia de rotor	115
5.4.3	Energización a plena carga	117
5.4.4	Energización de motor de inducción a tensión reducida	118
5.4.5	Energización de motor de inducción con carga variable	119
5.4.6	Depresiones de voltaje ocasionadas por energización de motores de inducción	120
5.5	Resumen	122
6.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	
6.1	Introducción	123
6.2	Conclusiones	123
6.3	Recomendaciones para trabajos futuros	125
6.4	Aportaciones del trabajo	127
	REFERENCIAS	129

INDICE (Continuación)

INDICE DE TABLAS	133
INDICE DE FIGURAS	134
APENDICE A: Parámetros Empleados en las Simulaciones	137
APENDICE B: Comparación del Modelo de Transformador con los Modelos del ATPDraw	140
APENDICE C: Nomenclatura	147

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 Motivación

Al energizar un dispositivo en un sistema eléctrico de potencia, ocurre un fenómeno transitorio el cual es la manifestación del circuito y cómo responde debido a un cambio repentino en las condiciones de operación. Este fenómeno de energización ocurre en un periodo de tiempo muy corto y depende de las constantes de tiempo involucradas pero que debe ser estudiado con detalle, ya que durante éste tiempo los diferentes elementos del sistema se ven sometidos a grandes esfuerzos debidos a corrientes o a sobretensiones excesivas, estos fenómenos transitorios en casos extremos pueden causar daños por efectos térmicos, o daños al aislamiento eléctrico o ser la causa de fatiga mecánica.

Por las razones anteriores en este proyecto de tesis se trató de establecer modelos que representen adecuadamente el fenómeno de energización y sus características principales, con el objetivo de desarrollar herramientas apropiadas para estudiar, analizar y poder presentar recomendaciones para prevenir efectos indeseables sobre las redes eléctricas y las cargas conectadas.

Cuando ocurre un cambio súbito en las condiciones operativas de un circuito eléctrico o de un sistema electromecánico se tiene una redistribución de energía en tanto se alcanza una nueva condición operativa de estado estable. Es importante recordar que esta redistribución de energía no se lleva a cabo de manera instantánea debido a las siguientes razones:

Un cambio en energía magnética almacenada requiere de un cambio en la corriente, pero en los sistemas eléctricos las inductancias no permiten un cambio súbito en la corriente. Así mismo un cambio en la energía almacenada en un campo eléctrico, asociada a un capacitor, resulta en un cambio en el voltaje, pero éste cambio no puede ser instantáneo. Además, en todo instante de tiempo el principio de la conservación de la energía debe preservarse.

La redistribución de energía por energización puede ocasionar componentes de corriente o de voltaje de magnitud y de frecuencia mayor a la nominal, dependiendo del instante en que se energizan los elementos y de las condiciones iniciales. Por ejemplo, al energizar un transformador en ocasiones se puede observar corrientes mucho mayores que la corriente de carga nominal; lo que puede ocasionar un mal funcionamiento del equipo de protección o en otros casos se puede ocasionar daños térmicos o mecánicos en el elemento de potencia involucrado.

Con un modelado adecuado para los diferentes elementos del sistema se puede caracterizar y estudiar diferentes aspectos del fenómeno transitorio, el cual ocurre en tiempos muy cortos una vez iniciada la energización. Los modelos desarrollados permiten la caracterización de estos eventos al resolver las ecuaciones diferenciales, de naturaleza no lineal, en el dominio del tiempo usando métodos de integración apropiados.

1.2 Antecedentes

En lo que respecta al reactor y el transformador, se tiene diferentes modelos para estudios transitorios, tanto monofásicos como trifásicos, en donde se incluye el modelado del núcleo magnético [1, 2, 3, 4, 14, 15, 16], el cual presenta el fenómeno de saturación. Una forma de modelar la saturación magnética y el fenómeno de histéresis es por medio de un arreglo de un inductor no lineal en paralelo con una resistencia [1, 2, 5]. El inductor no lineal permite incluir el efecto de saturación a través de una curva que es característica de los materiales ferromagnéticos. Esta curva generalmente relaciona la densidad de flujo

magnético con la intensidad de campo magnético o los enlaces de flujo con la corriente de magnetización. Como es importante tener una representación adecuada de la curva de saturación, se ha propuesto y desarrollado varios modelos, generalmente con base a un ajuste de curvas.

Una forma de aproximar la curva de saturación es usando un conjunto de rectas [6], con lo cual se llega a una aproximación sencilla, pero no tan exacta como se puede lograr con otras funciones. Otra forma es hacer una aproximación empleando interpolación lineal [24] con lo cual se tiene, en general, buenos resultados, pero la desventaja al emplear esta técnica es que para llegar a una buena aproximación se requiere de varios puntos, además, si se tiene que calcular un valor alejado de los puntos originales, debe llevarse a cabo una extrapolación. Si se emplea una función polinomial [7] se logra una buena aproximación, pero el problema es el tener puntos de quiebre en valores determinados, por lo que debe tenerse cuidado al emplear un polinomio como una alternativa para ajustar la curva de saturación. Las funciones trigonométricas [8, 9, 10, 11] muestran una gran ventaja para aproximar éste tipo de funciones de saturación, en el presente trabajo se utiliza la función tangente hiperbólica [12]. La tangente hiperbólica logra una representación adecuada de la característica del material magnético, además de que requiere de pocos puntos experimentales para lograr una buena representación.

La máquina síncrona es uno de los dispositivos de mayor importancia en los sistemas eléctricos, por lo que se han llevado a cabo un gran número de investigaciones en las cuales se proponen modelos matemáticos que describen su comportamiento. En la literatura existen modelos sencillos de la máquina, los cuales consisten de una fuente de voltaje detrás de una reactancia subtransitoria [28], y modelos complejos en donde se efectúa un modelado en componentes de fase [17, 21]; siendo éste plano de referencia en las fases el más adecuado para la simulación de transitorios en condiciones desbalanceadas [18]. Sin embargo, debe tenerse en cuenta el tipo de análisis que se debe realizar y el objetivo a lograr para elegir el grado de complejidad del modelo [25]. En la década de los años 1920, se propuso una simplificación la cual hace que el sistema de ecuaciones que describen el comportamiento de

la máquina sea más sencillo de resolver. Más recientemente la formulación se escribe en forma matricial, y las inductancias variantes en el tiempo, con la *Transformación de Park* [27, 30], se llevan a expresiones constantes, esto es, no cambian en el tiempo al cambiar la posición del rotor. La limitante de dicha transformación es la falta de acceso a algunas de las variables eléctricas de la máquina.

En éste trabajo se decidió usar la *Transformación de Park* y obtener un modelo para la máquina síncrona en componentes $qd0$ ya que para la energización se consideran condiciones balanceadas y no se simulan fallas asimétricas. Se parte del modelado físico de la máquina y se llega a un modelo matemático para el análisis del comportamiento dinámico en el momento de la energización, al operarse como motor. La diferencia entre considerar la máquina como generador o como motor, radica en el sentido de las corrientes de estator [30]. Para casos de energización se tiene el problema de que durante el arranque del motor síncrono no se tiene un valor apreciable en el “par de arranque”, por lo que se establecen procedimientos de operación para llevar a la máquina a su velocidad síncrona; posteriormente se opera como motor al tomar carga mecánica en la flecha.

En el modelo de la máquina síncrona se incluye devanados amortiguadores [19]. Estos devanados ayudan al problema de bajo par de arranque en el motor síncrono [27], por medio de los devanados amortiguadores y del devanado de campo cortocircuitado, el motor puede arrancar como un motor de inducción tipo jaula de ardilla; llevando el rotor a una velocidad muy cercana a la velocidad síncrona. Si en esos momentos se energiza apropiadamente el devanado de campo, se sincronizarán las velocidades: la mecánica del rotor y la del campo magnético rotatorio el cual es producido por la corriente trifásica que circula por los devanados del estator.

En el modelado de la máquina de inducción se han presentado en la literatura técnica diversas formulaciones en coordenadas de fase abc [22], o en variables transformadas $qd0$ [27]. Los modelos consideran representaciones simplificadas o muy completas, dependiendo del propósito del estudio. Para el caso que se aborda en este trabajo de tesis, el cual es

estudiar el transitorio en el momento de la energización, se eligió representar el motor de inducción con un modelo que se obtiene después de utilizar la *Transformación de Park*.

Para la solución de los modelos matemáticos de las máquinas, se eligen como variables de estado los enlaces de flujo, ya que en opinión del autor se tiene una representación más sencilla y se requiere de una menor cantidad de cálculos, respecto a formulaciones en donde se plantean el uso de las corrientes como variables de estado [27, 28, 29, 31], ya que una formulación basada en seleccionar los enlaces de flujo como variables de estado tiende a ser más estable numéricamente.

Tanto para el motor síncrono como para el motor de inducción, se despreció el par debido al amortiguamiento mecánico que se presenta por la fricción del aire, viscosidad y uniones en la sección de flecha, no es un término significativo por lo que generalmente se desprecia su efecto en el análisis de motores [30].

1.3 Estructura de la tesis

El trabajo está organizado en seis capítulos, ordenados de manera que se presentan los modelos y se estudian los fenómenos asociados a la energización de los principales elementos de un sistema de potencia. Los elementos considerados que se tratan a detalle son: el reactor y el transformador, la máquina síncrona y el motor de inducción. Sobre los elementos mencionados se llevaron a cabo simulaciones digitales para su análisis y en base a los resultados se establecen recomendaciones de cómo mitigar los efectos adversos de la energización.

En el Capítulo 1 se presenta el problema a tratar en el trabajo de investigación, el cual se tiene al instante en que se energizan elementos del sistema eléctrico y de las condiciones de la energía almacenada en ellos; lo cual se representa por medio de las condiciones iniciales para la solución de las ecuaciones diferenciales. Se listan breves antecedentes de

trabajos publicados y se establecen las consideraciones más importantes adoptadas en la tesis.

En el Capítulo 2 se presenta el modelado de un núcleo magnético, el cual puede ser incluido en el circuito equivalente de un reactor o de un transformador monofásico. Se incluye en el modelo el efecto de saturación, y se presenta un modelo para incluir las pérdidas de energía por histéresis. Para considerar el efecto de la saturación del núcleo, se utiliza la función no lineal tangente hiperbólica, y las ecuaciones que describen el comportamiento del reactor o transformador se expresan en función de las corrientes como variables de estado. Se inicia con el modelo del transformador monofásico y posteriormente se forma un banco trifásico trabajando algunas de las conexiones más utilizadas.

En el Capítulo 3 se describe el desarrollo de las ecuaciones que caracterizan el comportamiento de la máquina síncrona, al ser trabajada como motor. Se hace uso de la *Transformación de Park* para simplificar el modelado matemático del elemento. Se plantea el desarrollo considerando una máquina elemental, la cual contiene tres devanados de estator y un devanado de campo, sin embargo para las simulaciones efectuadas y que se presentan en el Capítulo 5 se incluyeron dos devanados amortiguadores.

En el Capítulo 4 se presenta el desarrollo de ecuaciones que describen el comportamiento del motor de inducción en términos de variables $qd0$. Se plantean las ecuaciones dinámicas en forma de variables de estado, obteniéndose una representación en forma de circuitos equivalentes, los cuales permiten plantear un análisis transitorio o de estado estable. Se considera en el desarrollo del modelo del motor de inducción tres devanados en el estator y tres devanados en el rotor.

En el Capítulo 5 se muestran resultados de simulaciones para los elementos que se describieron matemáticamente en los capítulos anteriores. Se plantean varios casos de estudio de energización para cada elemento y se discuten los resultados obtenidos. Los resultados se obtuvieron con programas desarrollados por el autor usando como herramienta

MATLAB. Los resultados se comparan contra los obtenidos usando los mismos parámetros con el simulador ATP. El autor anota, con base a la experiencia obtenida, las ventajas y desventajas, así como una explicación sobre las diferencias obtenidas debido a simplificaciones que usa el ATP.

Por último, en el Capítulo 6 se establecen las aportaciones del trabajo, las conclusiones y las recomendaciones para atenuar el impacto de energización sobre los elementos del sistema, así mismo, se plantean recomendaciones que pueden ser aplicadas para trabajos futuros.

CAPITULO 2

FORMULACION DE MODELOS DE REACTOR Y TRANSFORMADOR

2.1 Introducción

En los sistemas eléctricos de potencia se tienen elementos como reactores y transformadores, los cuales están expuestos a fenómenos transitorios como descargas atmosféricas, fallas, operaciones de conexión y desconexión rutinarias o de energización, siendo éstos últimos el tema en el cual se concentra este trabajo. Los reactores y los transformadores están formados por un núcleo magnético que presenta una característica no lineal y por dos o más circuitos eléctricos, acoplados mediante el circuito magnético; configuración común en el caso de transformadores.

Los circuitos acoplados magnéticamente juegan un papel importante en la transmisión y en la conversión de la energía, por lo cual se debe establecer un modelo matemático que represente adecuadamente el comportamiento del circuito acoplado, tanto en el estado estable, como en el estado transitorio. Durante la energización de elementos con núcleos magnéticos, se presenta un transitorio electromagnético, el cual se caracteriza por la circulación de corrientes de magnitud mayor a la nominal, un alto contenido armónico, así como una componente considerable de corriente directa. El fenómeno se denomina como “corriente de avalancha” o “corriente de inrush”. Para efectuar estudios sobre ésta corriente y evaluar sus efectos, la no linealidad del núcleo, que es la principal causa para que se presente la corriente de avalancha, debe ser simulada de manera adecuada incluyendo un modelo para el comportamiento del núcleo magnético. Los principales efectos de la no linealidad del núcleo son la saturación y la histéresis.

2.2 Elementos de teoría del campo magnético

Para obtener un modelo apropiado de un núcleo magnético que describa correctamente el transitorio que ocurre durante la energización, debe tomarse en cuenta algunas definiciones que tienen su origen en el estudio del campo magnético. La primera definición que es de utilidad es la Ley Circuital de Ampere, que es una derivación de la ley de Biot-Savart [32], teniendo en cuenta la simetría del problema ésta ley establece que la integral de línea de la intensidad del campo magnético H , sobre cualquier trayectoria cerrada es igual a la corriente encerrada por dicha trayectoria.

$$\oint H \cdot d\ell = I_{encerrada} \quad (2.1)$$

Las líneas de flujo magnético son cerradas, con lo que la densidad de flujo magnético B , se conserva, es decir, no hay flujo neto que entre o salga de una superficie cerrada; lo anterior se expresa mediante (2.2). En el espacio libre, la densidad de flujo magnético se define por (2.3).

$$\oint_S B \cdot dA = 0 \quad (2.2)$$

$$B = \mu_0 H \quad (2.3)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del espacio libre y tiene un valor de $4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

Considerando el circuito magnético de la Figura 2.1, se puede determinar las expresiones que caracterizan el estudio del campo magnético, como el flujo que pasa a través de la sección transversal del núcleo, expresión (2.4).

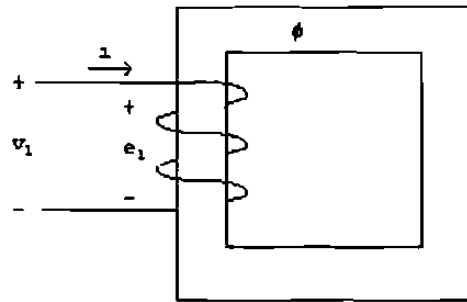


Fig. 2.1 Circuito magnético.

$$\phi = \oint_S B \cdot dA \quad (2.4)$$

En la ecuación (2.4), si se considera que el vector de densidad de flujo es perpendicular a un plano de área A , es conveniente seleccionar la sección transversal del núcleo y si el flujo magnético es uniforme a través de la sección transversal, la ecuación se puede reducir a la forma (2.5).

$$\phi = B A \quad (2.5)$$

Además, suponiendo que cualquier línea de flujo es aproximadamente igual a la longitud promedio del núcleo ℓ , la integral de línea en (2.1) se puede expresar como un producto escalar, obteniéndose (2.6).

$$\oint H \cdot d\ell = H \ell \quad (2.6)$$

En muchos problemas es conveniente usar una analogía con los circuitos eléctricos, en los cuales el voltaje o fuerza electromotriz es la que hace que fluya corriente. En cambio en los circuitos magnéticos se tiene una fuerza magnetomotriz, la cual es igual a la corriente aplicada al devanado que envuelve el núcleo, por el número efectivo de vueltas del devanado que enlaza al núcleo.

De las ecuaciones (2.1) y (2.6) se tiene la siguiente relación:

$$\mathfrak{I} = N i = \oint H \cdot d\ell = H \ell \quad (2.7)$$

2.2.1 Materiales magnéticos y permeabilidad

Generalmente los circuitos magnéticos están formados por una estructura que está compuesta en su mayor parte por un material magnético de alta permeabilidad. Este tipo de material hace que el flujo magnético esté confinado a las trayectorias definidas por la estructura geométrica del material. En estos materiales magnéticos, cada átomo tiene un momento dipolar relativamente grande, causado por los momentos del spin del electrón no equilibrados, y las fuerzas interatómicas causan que esos momentos se alineen en forma paralela por regiones que contienen un gran número de átomos. A estas regiones se les llama dominios. Los materiales ferromagnéticos vírgenes, o materiales no magnetizados, tendrán dominios en que cada uno tiene un momento magnético intenso, sin embargo, como están orientados al azar, el efecto neto que se tiene es de cancelación, así el flujo resultante en el material es nulo.

Con la aplicación de un campo magnético externo, los momentos magnéticos de los dominios tienden a alinearse con el campo magnético aplicado; el campo magnético interno aumenta por encima del campo magnético externo ya que se suman los momentos de los dipolos magnéticos con el campo aplicado. Debido a esto la permeabilidad efectiva μ (2.9), que es igual a la relación de la densidad total de flujo magnético respecto a la fuerza magnetizante aplicada, es mucho mayor que la permeabilidad del espacio libre μ_0 . La permeabilidad del material ferromagnético o la permeabilidad relativa se puede expresar como μ_r y su relación con la del espacio libre está dada por:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (2.8)$$

$$\mu = \frac{B}{H} \quad (2.9)$$

El comportamiento que describe (2.9) continúa hasta que todos los momentos magnéticos están alineados con el campo aplicado, pero al llegar a este punto ya no se contribuye al crecimiento de la densidad de flujo magnético. En este momento se dice que el material está saturado.

Cuando se retira el campo externo, no se produce un alineamiento desordenado de los dominios, entonces, los momentos de los dipolos magnéticos no tendrán ya su orientación al azar, sino que permanece en la estructura microscópica un remanente de campo magnético. El hecho de que el momento magnético del material sea diferente después de que el campo externo se hace cero o que el estado magnético sea función de su historia magnética se le llama "histéresis".

Los elementos ferromagnéticos más comunes son el hierro, el níquel y el cobalto, y existe una gran cantidad de aleaciones de estos materiales con otros elementos como el aluminio, el tungsteno, etc. Los materiales ferromagnéticos se emplean para concentrar y dirigir el campo magnético en trayectorias definidas. La Figura 2.2 muestra una curva $B-H$ para una muestra de un material ferromagnético el cual está desmagnetizado; inicialmente tanto B como H son cero. Al aplicar una fuerza magnetomotriz creciente, la densidad de flujo también aumenta, pero no linealmente, pudiendo llegar a un punto de saturación parcial o a una zona completamente saturada.

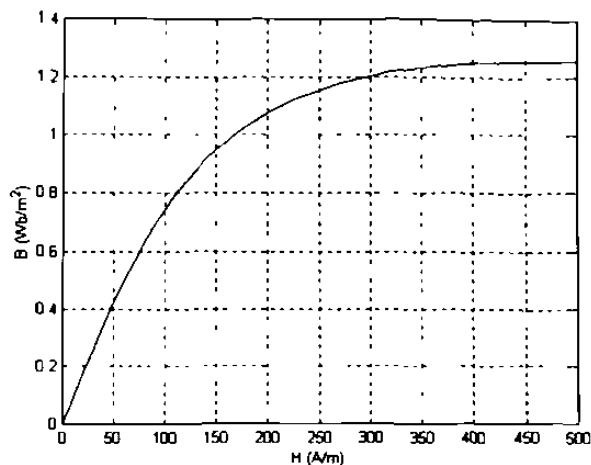


Fig. 2.2 Curva característica B - H de una muestra de acero al silicio [33].

2.2.2 Circuito magnético equivalente

El núcleo magnético, incluyendo saturación e histéresis, puede ser representado por un circuito equivalente, Figura 2.3. El circuito consta de un inductor no lineal para representar la característica de saturación del material ferromagnético, dicho inductor requiere una resistencia en paralelo para incluir las pérdidas en el núcleo. La saturación del núcleo es el efecto de mayor importancia en la simulación del núcleo magnético, como se mencionó anteriormente, y se requiere una relación de B con H . También puede expresarse una relación en función de los enlaces de flujo y de la corriente de magnetización $\lambda - i_m$, como se muestra en la Figura 2.4.

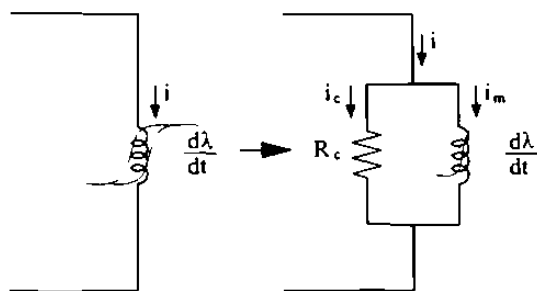


Fig.2.3. Circuito equivalente del núcleo magnético.

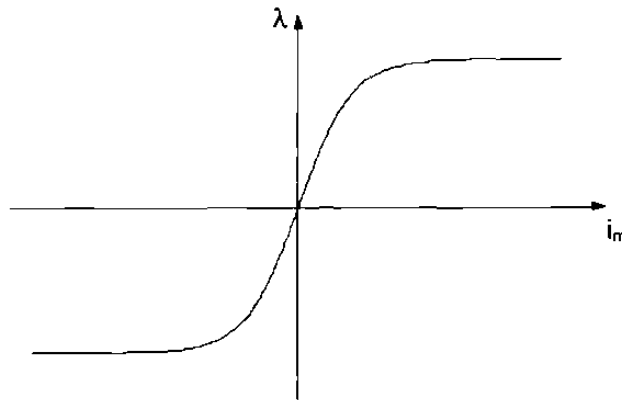


Fig. 2.4. Característica no lineal $\lambda - i_m$.

La permeabilidad del material ferromagnético se expresó mediante (2.9) y debido a que la característica del material magnético es no lineal, es necesario calcular la permeabilidad en forma incremental, haciendo que los incrementos sean lo suficientemente pequeños para tener una expresión como la (2.10).

$$\mu = \frac{\Delta B}{\Delta H} \Rightarrow \frac{dB}{dH} \Rightarrow \frac{d\lambda}{di_m} \quad (2.10)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.7) se puede tener la fuerza magnetomotriz en función de la permeabilidad magnética (2.11), además multiplicando y dividiendo por el área de la sección transversal del núcleo se tiene (2.12).

$$\mathfrak{F} = Ni = H \ell = \frac{B}{\mu} \ell \quad (2.11)$$

$$\mathfrak{F} = Ni = \frac{B}{\mu} \ell \frac{A}{A} = B A \left(\frac{\ell}{\mu A} \right) \quad (2.12)$$

Con las expresiones (2.5) y (2.12), se obtiene la fuerza magnetomotriz (2.13), en donde el término que multiplica al flujo magnético es la reluctancia. La reluctancia, dada por (2.14), es una expresión análoga a la resistencia en el análisis de los circuitos eléctricos.

$$\mathfrak{F} = N i = \phi \mathfrak{R} \quad (2.13)$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\ell}{\mu A} \quad (2.14)$$

En la ecuación anterior la permeabilidad μ no es de valor constante. La permeabilidad es un valor que debe calcularse conforme se desplaza el punto de operación sobre la curva de saturación, Figura 2.4. Así, debido a la no linealidad del núcleo magnético la reluctancia equivalente varía en cada punto de operación.

Cuando se tiene un campo magnético variante en el tiempo, se genera un campo eléctrico, de acuerdo a la Ley de Faraday. Mediante la expresión (2.15), se indica que si un campo magnético varía con el tiempo produce una fuerza electromotriz que puede producir una corriente en un circuito cerrado; para el caso del presente estudio se hacen consideraciones de acuerdo al problema que se plantea. Por ejemplo, en las estructuras magnéticas con devanados como la que se muestra en la Figura 2.1, el campo E en el conductor es muy pequeño, tanto que se puede omitir. Otra consideración que se hace es que el devanado enlaza N veces al flujo del núcleo, obteniéndose (2.16).

$$\oint E \cdot d\ell = - \frac{d}{dt} \int_S B \cdot dA \quad (2.15)$$

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (2.16)$$

El signo negativo indica que la fuerza electromotriz o voltaje inducido tiene una dirección, tal que produce una corriente, cuyo flujo si se agrega al flujo original, reduciría el voltaje inducido. Lo anterior establece que el voltaje inducido actúa para producir un flujo opuesto, este fenómeno es conocido como la Ley de Lenz.

Como el flujo magnético es enlazado por las espiras del devanado se puede considerar que existen enlaces de flujo (2.18) y sus unidades son Weber-vuelta, por lo que (2.16) se rescribe como:

$$e = - \frac{d \lambda}{dt} \quad (2.17)$$

$$\lambda = N \phi \quad (2.18)$$

De (2.13) se tiene el flujo magnético y se substituye en (2.18), obteniendo los enlaces de flujo en función de la reluctancia (2.19). La reluctancia se substituye a su vez para tener la expresión (2.20).

$$\lambda = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} i_m \quad (2.19)$$

$$\lambda = \frac{N^2 A}{\ell} \mu i_m \quad (2.20)$$

Con el último resultado y substituyendo en (2.17) se tiene la expresión que permite la extensión de conceptos en el modelado no lineal del núcleo magnético.

$$e = - \frac{N^2 A}{\ell} \frac{d}{dt} (\mu i_m) \quad (2.21)$$

De la ecuación (2.10) se observa que μ está dada en función de los enlaces de flujo y éstos, por la forma de la curva de saturación, están en función de la corriente de magnetización. Por tanto, la permeabilidad resulta que puede ser expresada como función de la corriente de magnetización. Tomando la derivada del producto de funciones que aparece en (2.21) resulta:

$$e = \frac{N^2 A}{\ell} \left[\mu \frac{di_m}{dt} + i_m \frac{d\mu}{dt} \right] \quad (2.22)$$

Trabajando la última expresión, por medio de la regla de la cadena, se puede describir (2.23), la cual representa la razón de cambio, en el núcleo magnético, de los enlaces de flujo respecto al tiempo.

$$e = \frac{N^2 A}{\ell} \left[\mu + i_m \frac{d\mu}{di_m} \right] \frac{di_m}{dt} \quad (2.23)$$

Esta interpretación es una aportación relevante del presente trabajo la cual permite interpretar de manera no convencional el problema de saturación en los núcleos magnéticos.

2.3 La característica de saturación

Del material ferromagnético generalmente se conoce su característica de saturación, Figura 2.4, la cual está formada por un conjunto de puntos experimentales proporcionados por el fabricante. Para aproximar un modelo a dicha curva, existen diversas formas de lograrlo y en este trabajo se emplea una función no lineal que es la tangente hiperbólica. La función hiperbólica por si misma tiene la forma de una curva saturada, lo cual es típico de los materiales ferromagnéticos.

El presentar la característica de saturación por medio de una tangente hiperbólica tiene algunas ventajas sobre otras aproximaciones. Por ejemplo:

- a) Es posible emplear únicamente dos o tres coeficientes para su representación
- b) No tiene puntos de quiebre
- c) Está definida en todo el rango de valores
- d) Su derivada se puede obtener fácilmente

Lo anterior hace que sea preferible emplear una función como la tangente hiperbólica y lograr una buena aproximación, con respecto a los datos observados para una característica de saturación. Se propone una expresión de la forma:

$$\lambda = \alpha \tanh (\beta i_m) + \gamma i_m \quad (2.24)$$

Los coeficientes α , β y γ permiten tener control sobre la forma de la función tangente hiperbólica. De la curva experimental normalmente sólo se conocen algunos puntos, por lo tanto los coeficientes de la curva de saturación se calculan basándose en tales puntos; se requiere de al menos tres mediciones y se sustituyen en (2.24), formando un conjunto de ecuaciones con tres incógnitas. En caso de tener un mayor número de puntos se puede aplicar una estimación de parámetros por mínimos cuadrados. La expresión (2.25) es un sistema de ecuaciones no lineales y con el método de Newton se resuelve iterativamente el sistema de ecuaciones. Con el procedimiento descrito se obtienen coeficientes adecuados para representar la curva de saturación.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \tanh (\beta i_{m1}) + \gamma i_{m1} \\ \lambda_2 &= \alpha \tanh (\beta i_{m2}) + \gamma i_{m2} \\ \lambda_3 &= \alpha \tanh (\beta i_{m3}) + \gamma i_{m3} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Cada coeficiente en (2.24) cumple una función específica sobre el ajuste de la curva: α da el ajuste a la rodilla de saturación, β ajusta la pendiente de la curva en la parte lineal y γ hace lo propio sobre la pendiente de la zona saturada. Una vez que se conoce la característica de saturación λ se sustituye en (2.26), y se obtiene la permeabilidad en función de la corriente de magnetización. Se puede a continuación obtener la derivada, como lo requiere la expresión (2.23).

$$\mu = \frac{\ell \lambda}{N^2 A i_m} \quad (2.26)$$

2.4 Modelado de un reactor monofásico

El circuito magnético de la Figura 2.1 se puede representar por un circuito eléctrico análogo en el cual se incluye el equivalente del núcleo magnético. Una representación se tiene por medio de la Figura 2.5.

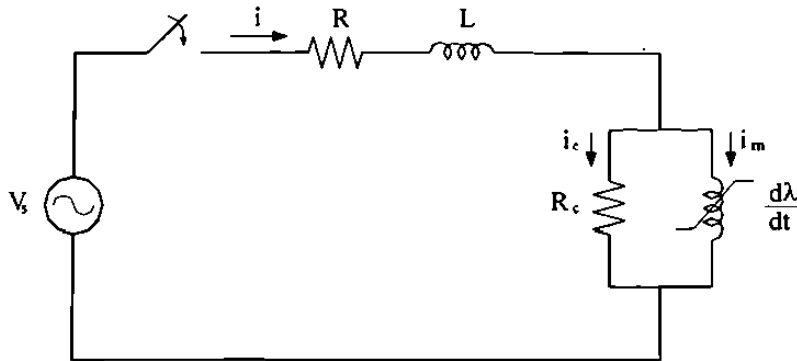


Fig. 2.5 Circuito eléctrico equivalente del reactor.

Para plantear las ecuaciones que describen el comportamiento del circuito, primeramente se usa la Ley de Voltajes de Kirchhoff (2.27), en donde la expresión para el cambio de enlaces de flujo, con respecto al tiempo, está dada por (2.28).

$$v_s = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \quad (2.27)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{N^2 A}{\ell} \left[\mu + i_m \frac{d\mu}{di_m} \right] \frac{di_m}{dt} \quad (2.28)$$

Otra forma de expresar el cambio de los enlaces de flujo, con respecto al tiempo, es igualándolo con la caída de tensión que se tienen en R_c , esto es

$$\frac{d\lambda}{dt} = R_c i_c \quad (2.29)$$

Por la ley de corrientes de Kirchhoff

$$i_c = i - i_m \quad (2.30)$$

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en (2.27) y resolviendo para la corriente i , se obtiene la primer variable de estado en (2.31).

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [v_s - Ri - R_c (i - i_m)] \quad (2.31)$$

Para obtener la segunda variable de estado, se igualan (2.28) y (2.29), obteniendo (2.32), de la cual se resuelve para la corriente de magnetización como en (2.33).

$$R_c i_c = \frac{N^2 A}{\ell} \left[\mu + i_m \frac{d\mu}{di_m} \right] \frac{di_m}{dt} \quad (2.32)$$

$$\frac{di_m}{dt} = R_c i_c \frac{\ell}{N^2 A} \left[\mu + i_m \frac{d\mu}{di_m} \right]^{-1} \quad (2.33)$$

2.5 Modelado del transformador monofásico

Un primer paso para estudiar el comportamiento durante la energización de elementos con núcleo saturable es establecer un modelo del transformador monofásico. Posteriormente se extienden los conceptos a configuraciones de bancos trifásicos, tomando como base el modelo del transformador monofásico.

2.5.1 Transformador ideal

Los transformadores consisten esencialmente de dos a más devanados relacionados mediante el flujo magnético mutuo. El flujo mutuo es la variable en el tiempo que enlaza los dos devanados, y al interpretarse en términos de inductancia se tiene el concepto de inductancia mutua. En una configuración con núcleo de aire se obtiene la acción de inducción mutua, pero se logra una mayor eficiencia al usar un núcleo magnético, ya que la mayor parte del flujo se concentra en la trayectoria definida por el núcleo y se enlazan de manera efectiva los devanados; en este caso el núcleo tiene una permeabilidad mayor a la del aire. El flujo mutuo induce voltajes en los devanados, con valores proporcionales al número de vueltas en los devanados, logrando así una elevación/reducción de las tensiones.

Por otra parte se sabe que los circuitos acoplados magnéticamente juegan un papel importante en la transmisión y en la conversión de la energía. Por esto es importante establecer las ecuaciones que describen su comportamiento eléctrico en todo instante, de tal forma que se tengan expresiones adecuadas para el análisis. Partiendo de dos circuitos eléctricos estacionarios y acoplados magnéticamente, como se muestra en la Figura 2.6, se obtendrá un modelo que represente un transformador monofásico para estudios transitorios.

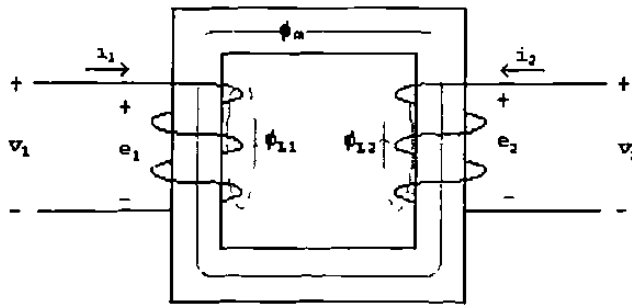


Fig. 2.6 Circuitos acoplados magnéticamente.

El flujo generado por cada devanado puede separarse en dos componentes, una es el llamado flujo propio de cada devanado y la otra es el flujo mutuo entre ambos. El flujo total que enlaza cada devanado es entonces:

$$\phi_1 = \phi_{L1} + \phi_m \quad (2.34)$$

$$\phi_2 = \phi_{L2} + \phi_m \quad (2.35)$$

Si se define N_1 como el número de vueltas del primer devanado, se podrá expresar los enlaces de flujo para el primer devanado, por medio de:

$$\lambda_1 = N_1 \phi_1 = N_1 (\phi_{L1} + \phi_m) \quad (2.36)$$

El flujo de dispersión ϕ_{L1} resulta de la fuerza magnetomotriz fmm del primer devanado, es decir $N_1 i_1$. A su vez, el flujo ϕ_m resulta por la fmm de $N_1 i_1 + N_2 i_2$, y se considera la reluctancia \mathfrak{R} de la trayectoria del flujo. Escribiendo de nuevo (2.36) como:

$$\lambda_1 = N_1 \left[\frac{N_1 i_1}{\mathfrak{R}_{L1}} + \frac{(N_1 i_1 + N_2 i_2)}{\mathfrak{R}_m} \right] = \left(\frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{L1}} + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_m} \right) i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_m} i_2 \quad (2.37)$$

De igual forma se puede obtener para el segundo devanado

$$\lambda_2 = N_2 \left[\frac{N_2 i_2}{\mathfrak{R}_{L2}} + \frac{(N_1 i_1 + N_2 i_2)}{\mathfrak{R}_m} \right] = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_m} i_1 + \left(\frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{L2}} + \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_m} \right) i_2 \quad (2.38)$$

Cuando el sistema magnético es lineal, los enlaces de flujo se pueden expresar en términos de inductancias y corrientes, con lo que se llega a la forma siguiente.

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \quad (2.39)$$

$$\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 \quad (2.40)$$

De las ecuaciones (2.37) y (2.38) se obtiene L_{11} y L_{22} que son las inductancias propias de ambos devanados y también las expresiones para L_{12} y L_{21} que son las inductancias mutas entre ellos.

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{L1}} + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_m} = L_{L1} + L_{m1} \quad (2.41)$$

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{L2}} + \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_m} = L_{L2} + L_{m2} \quad (2.42)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_m} \quad (2.43)$$

De las ecuaciones (2.42) y (2.43) se establece la relación (2.44) con la cual se puede lograr las expresiones para los enlaces de flujo λ_1 y λ_2 .

$$L_{12} = \frac{N_2}{N_1} L_{m1} = \frac{N_1}{N_2} L_{m2} \quad (2.44)$$

$$\lambda_1 = L_{L1} i_1 + L_{m1} \left[i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2 \right] \quad (2.45)$$

$$\lambda_2 = L_{L2} i_2 + L_{m2} \left[\frac{N_1}{N_2} i_1 + i_2 \right] \quad (2.46)$$

Al escribir las ecuaciones de voltaje inducido, en cada devanado, como la razón de cambio de los enlaces de flujo por unidad de tiempo

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_{L1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt} \left(i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2 \right) \quad (2.47)$$

$$e_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = L_{L2} \frac{di_2}{dt} + L_{m2} \frac{d}{dt} \left(\frac{N_1}{N_2} i_1 + i_2 \right) \quad (2.48)$$

La relación de vueltas entre ambos devanados es (N_1/N_2) , también se conoce como relación de transformación, y se emplea para referir las variables a un sólo devanado. Las variables con apóstrofe indican que la variable está referida a uno de los devanados, por ejemplo:

$$i_2' = \frac{N_2}{N_1} i_2 \quad (2.49)$$

Tomando en cuenta esta relación de transformación, se puede multiplicar a (2.48) por (N_2/N_1) , y escribir nuevamente (2.47) y (2.48) como:

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_{L1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt} (i_1 + i'_2) \quad (2.50)$$

$$e'_2 = \frac{d\lambda'_2}{dt} = L'_{L2} \frac{di'_2}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt} (i_1 + i'_2) \quad (2.51)$$

Con las ecuaciones de voltaje anteriores se logra un circuito eléctrico ideal, equivalente en su comportamiento estático y dinámico al circuito magnético, Figura 2.7. Hasta este punto se ha despreciado las resistencias de los devanados, así como las pérdidas del núcleo; se supone también que todo el flujo se concentra en el núcleo y que dicho flujo enlaza a los dos devanados.

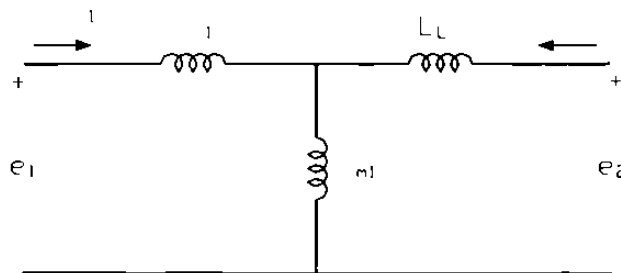


Fig. 2.7 Circuito eléctrico equivalente del transformador ideal.

2.5.2 Modelo de transformador incluyendo saturación e histéresis

La representación del transformador de la sección anterior no es la adecuada en términos generales, ya que no incluye las pérdidas, además de que el núcleo tiene una característica de saturación. Por lo anterior, también se debe modelar las componentes que

ocasionan las pérdidas y la saturación no lineal. Entonces, las ecuaciones (2.45) y (2.46) deben incluir estos fenómenos, por lo que las ecuaciones se escriben como:

$$\lambda_1 = L_{L1} i_1 + \lambda_m \quad (2.52)$$

$$\lambda'_2 = L'_{L2} i'_2 + \lambda_m \quad (2.53)$$

Para considerar las pérdidas en los devanados por efecto Joule, se agrega una resistencia en serie con el efecto inductivo y para considerar las pérdidas por Eddy e histéresis en el núcleo, se inserta en paralelo con la inductancia de magnetización una resistencia. Las ecuaciones de voltaje se escriben como (2.54) y (2.55) y de ellas se deduce el modelo que representa al transformador monofásico, incluyendo saturación y pérdidas, Figura 2.8.

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{L1} \frac{di_1}{dt} + \frac{d\lambda_m}{dt} \quad (2.54)$$

$$v'_2 = R'_2 i'_2 + L'_{L2} \frac{di'_2}{dt} + \frac{d\lambda_m}{dt} \quad (2.55)$$

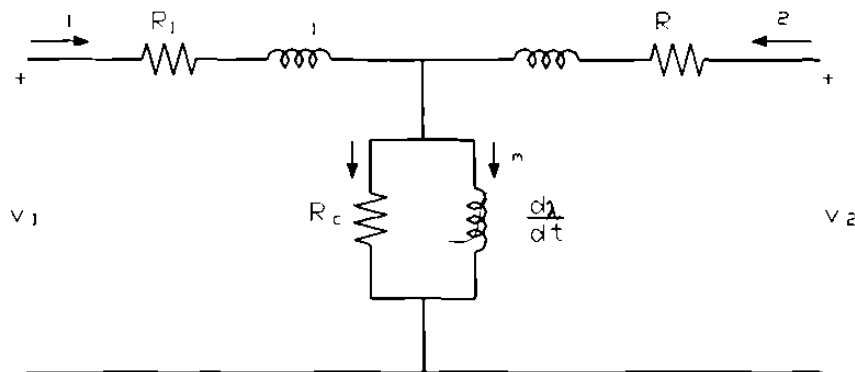


Fig. 2.8 Modelo del transformador monofásico.

Para analizar el comportamiento del transformador en el dominio del tiempo, se escriben sus ecuaciones de comportamiento dinámico en función de variables de estado. De (2.54) y (2.55), que resultan de aplicar la Ley de Voltajes de Kirchhoff al circuito de la Figura 2.8, se observa que se tiene el término que describe el cambio de los enlaces de flujo con respecto al tiempo, por lo que se usará la expresión (2.28) descrita anteriormente. Además, por la Ley de Corrientes de Kirchhoff, se obtiene una ecuación que determina la corriente que circula por la rama de magnetización, y se emplea para determinar las pérdidas en el núcleo.

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{N^2 A}{\ell} \left[\mu + i_m \frac{d\mu}{di_m} \right] \frac{di_m}{dt} \quad (2.56)$$

también se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = R_c i_c \quad (2.57)$$

$$i_c = i_1 + i_2' - i_m \quad (2.58)$$

En caso de tener una carga en el secundario del transformador, por ejemplo una carga puramente resistiva, el voltaje en el secundario estará dado por:

$$v_2' = -R_L' i_2' \quad (2.59)$$

Sustituyendo (2.59) en (2.55), y resolviendo para la corriente del devanado secundario, así como en (2.54), y resolviendo para la corriente en el primario, se logran dos expresiones en función de variables de estado; (2.60) y (2.61). Para obtener una tercera variable de estado, se iguala (2.56) y (2.57), resolviendo para la corriente de magnetización

(2.62). Una vez obtenidas las tres ecuaciones en forma de variables de estado, se puede llevar a cabo un análisis transitorio del transformador en el dominio del tiempo.

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_{L1}} [v_1 - R_1 i_1 - R_c i_c] \quad (2.60)$$

$$\frac{di_2'}{dt} = \frac{1}{L_{L2}} [-(R_2' + R_L')i_2' - R_c i_c] \quad (2.61)$$

$$\frac{di_m}{dt} = R_c i_c \frac{\ell}{N^2 A} \left[\mu + i_m \frac{d\mu}{di_m} \right]^{-1} \quad (2.62)$$

2.6 Un modelo de banco trifásico

Los sistemas eléctricos comerciales son suministrados por generadores trifásicos, y a su vez los sistemas de transmisión y de distribución son también de configuración trifásica, razón por la que es importante analizar los transformadores trifásicos, o bien las configuraciones de bancos trifásicos, formados por elementos monofásicos.

Los transformadores que se emplean en circuitos trifásicos pueden construirse de dos formas: una consiste en conectar tres transformadores monofásicos para formar un banco, mientras que otra alternativa es tener un conjunto de tres pares de devanados enrollados sobre un núcleo común. La ventaja de tener una unidad trifásica es que requiere de una menor cantidad de hierro o material ferromagnético para la formación del núcleo; por esta razón, es más económica y requiere de un menor espacio. La ventaja de trabajar con unidades monofásicas consiste en que se tiene una mayor continuidad en el servicio, es decir, si alguna unidad falla, sólo se reemplaza la unidad dañada o dependiendo del tipo de conexión que se tenga, se puede seguir operando con los dos transformadores restantes a una capacidad menor; pero sin pérdida total del servicio.

Existen varias formas de conectar un transformador trifásico o un banco formado por unidades monofásicas. La conexión depende de los requerimientos de la carga y las conexiones más comunes son:

- a) Delta - Delta ($\Delta-\Delta$)
- b) Estrella - Estrella (Y-Y) aterrizadas
- c) Delta - Estrella ($\Delta-Y$) aterrizada

2.6.1 Tipos de núcleos

Se puede tener diversas configuraciones de núcleos ferromagnéticos para transformadores trifásicos, entre ellas la denominada triple núcleo, Figura 2.9. En este arreglo se tienen tres núcleos monofásicos en un mismo tanque y el núcleo presenta características de comportamiento similares a tener tres transformadores monofásicos; ya que el flujo de secuencia cero circula individualmente en cada núcleo. No sucede así con una configuración de núcleo de tres piernas, Figura 2.10, lo cual provoca calentamiento debido a las corrientes de Eddy inducidas en el tanque, el cual no es laminado como el núcleo. En éste tipo de configuración, el flujo de secuencia cero es forzado a cruzar el aislamiento que existe alrededor del núcleo y a pasar por el tanque del transformador, ocasionando un calentamiento excesivo. Por ésta razón, el tipo de núcleo de tres piernas sólo se emplea en lugares donde las corrientes de carga son casi perfectamente balanceadas.

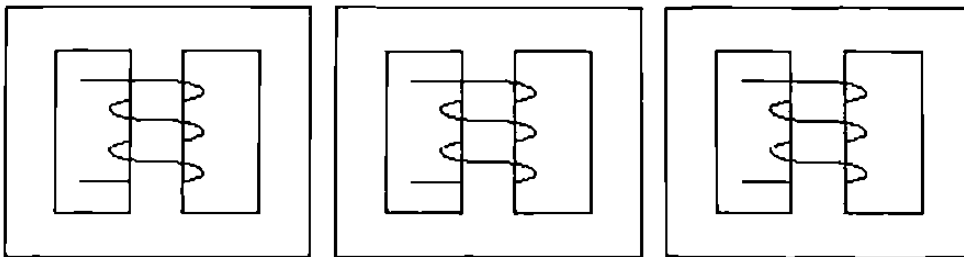


Fig. 2.9 Configuración de triple núcleo magnético.

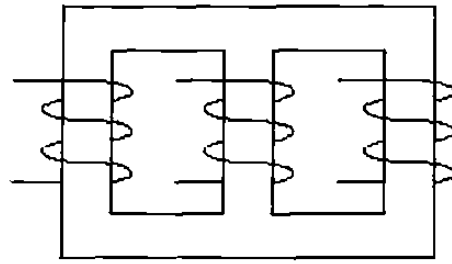


Fig. 2.10 Configuración de núcleo de tres piernas.

Otra configuración del núcleo magnético que muestra una característica similar a la presentada por tres unidades monofásicas es la llamada tipo acorazado, Figura 2.11; en la cual el núcleo es también laminado y provee una ruta magnética para el flujo de secuencia cero por lo que es una mejor opción para ser usada en condiciones desbalanceadas. Al igual que el núcleo acorazado, la configuración del núcleo en cinco piernas provee una ruta magnética para el flujo de secuencia cero, es laminado y simétrico, Figura 2.12.

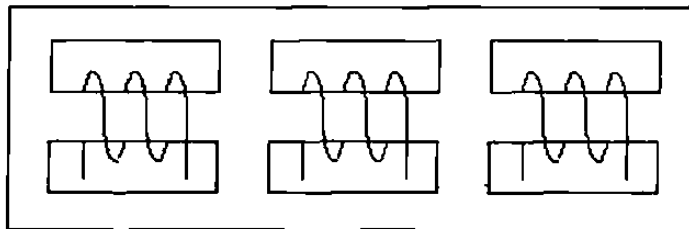


Fig. 2.11 Configuración del núcleo tipo acorazado.

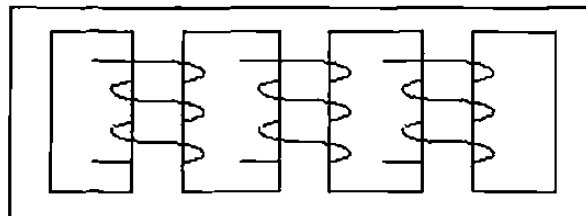


Fig. 2.12 Configuración del núcleo de cinco piernas.

Para transformadores con configuración triple núcleo, tipo acorazado y núcleo de cinco piernas, los cuales proveen una ruta para el flujo de secuencia cero, puede suponerse lo siguiente:

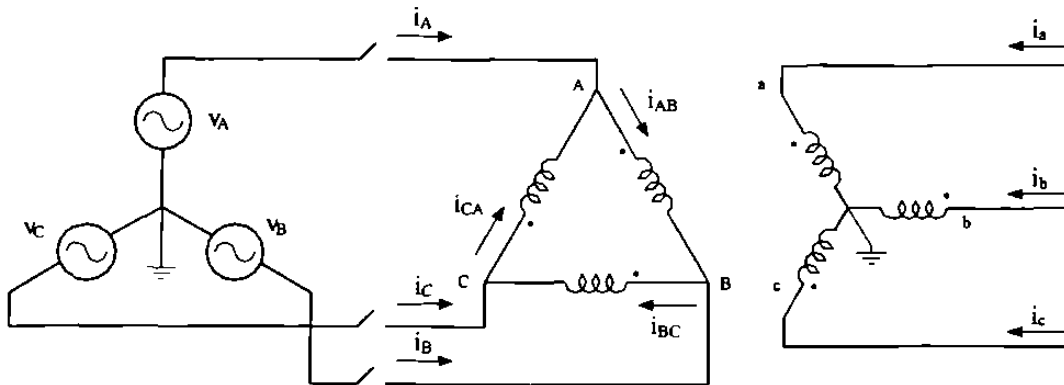
- a) El comportamiento magnético de las tres fases es independiente.
- b) Generalmente sólo la curva de saturación bajo secuencia positiva es conocida, por lo que para cada una de las tres fases del transformador se conecta una inductancia no lineal para representar el núcleo. Esto supone que los valores de secuencia cero para la curva de saturación son los mismos que los de secuencia positiva.

En el presente trabajo se muestra un desarrollo para un transformador compuesto por tres unidades monofásicas formando un banco trifásico, se utiliza para ello el desarrollo del modelo del transformador monofásico de la sección 2.5.2.

2.6.2 Conexiones trifásicas

2.6.2.1 Conexión delta-estrella

Este tipo de conexión es ampliamente utilizada, en la Figura 2.13 se muestra un esquema simplificado de tal conexión. Del circuito puede obtenerse las relaciones de voltaje y corriente, como se muestran en (2.63), para los voltajes en el devanado primario y (2.64) para las corrientes de línea.

Fig. 2.13 Diagrama de conexión Δ -Y.

$$v_{AB} = v_A - v_B$$

$$v_{BC} = v_B - v_C$$

$$v_{CA} = v_C - v_A$$

(2.63)

$$i_A = i_{AB} - i_{CA}$$

$$i_B = i_{BC} - i_{AB}$$

$$i_C = i_{CA} - i_{BC}$$

(2.64)

Para la representación de una fase del transformador, Figura 2.14, se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff para obtener las ecuaciones diferenciales en términos de variables de estado. Las variables de estado serán las corrientes que circulan por las inductancias y permiten simular el comportamiento del banco trifásico para la conexión mencionada.

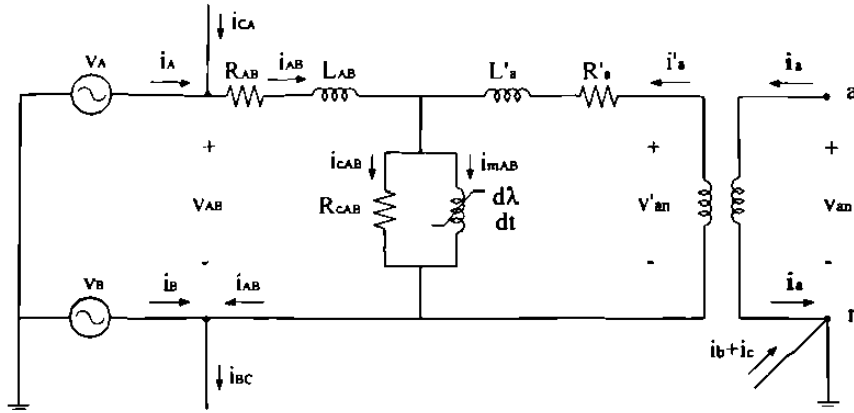


Fig. 2.14 Circuito equivalente por fase para el banco Δ -Y.

$$\frac{di_{AB}}{dt} = \frac{1}{L_{AB}} [v_{AB} - R_{AB} i_{AB} - R_{cAB} i_{cAB}] \quad (2.65)$$

$$\frac{di'_a}{dt} = \frac{1}{L'_a} [v'_{an} - R'_a i'_a - R_{cAB} i_{cAB}] \quad (2.66)$$

$$\frac{di_{mAB}}{dt} = R_{cAB} i_{cAB} \frac{\ell_{AB}}{N_{AB}^2 A_{AB}} \left[\mu_{AB} + i_{mAB} \frac{d\mu_{AB}}{di_{mAB}} \right]^{-1} \quad (2.67)$$

Para las fases restantes se sigue un procedimiento similar, usándose como variables de estado las corrientes de línea y las corrientes de magnetización del transformador.

$$\frac{di_{BC}}{dt} = \frac{1}{L_{BC}} [v_{BC} - R_{BC} i_{BC} - R_{cBC} i_{cBC}] \quad (2.68)$$

$$\frac{di'_b}{dt} = \frac{1}{L'_b} [v'_{bn} - R'_b i'_b - R_{cBC} i_{cBC}] \quad (2.69)$$

$$\frac{di_{mBC}}{dt} = R_{cBC} i_{cBC} \frac{\ell_{BC}}{N_{BC}^2 A_{BC}} \left[\mu_{BC} + i_{mBC} \frac{d\mu_{BC}}{di_{mBC}} \right]^{-1} \quad (2.70)$$

$$\frac{di_{CA}}{dt} = \frac{1}{L_{CA}} [v_{CA} - R_{CA} i_{CA} - R_{cCA} i_{cCA}] \quad (2.71)$$

$$\frac{di'_c}{dt} = \frac{1}{L'_c} [v'_{en} - R_c i'_c - R_{cCA} i_{cCA}] \quad (2.72)$$

$$\frac{di_{mCA}}{dt} = R_{cCA} i_{cCA} \frac{\ell_{CA}}{N_{CA}^2 A_{CA}} \left[\mu_{CA} + i_{mCA} \frac{d\mu_{CA}}{di_{mCA}} \right]^{-1} \quad (2.73)$$

Con las ecuaciones anteriores se tiene un modelo no lineal de nueve variables de estado, el cual se resolverá por técnicas de integración numérica, y que son apropiadas para resolver la dinámica del fenómeno.

2.6.2.2 Conexión estrella-estrella

En esta conexión los devanados de los transformadores se conectan como se muestra en el esquema simplificado para dicha conexión, Figura 2.15.

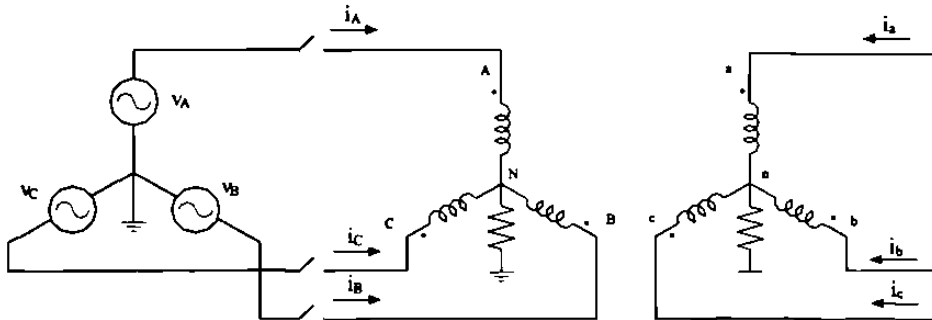


Fig. 2.15 Diagrama de conexión Y-Y.

Las ecuaciones en términos de las variables de estado se obtienen al aplicar la Ley de Voltajes de Kirchhoff a la Figura 2.16; en la cual se muestra una representación de una fase del transformador. Con un procedimiento similar, se obtiene las ecuaciones de las fases restantes para describir el comportamiento en estado transitorio del transformador, en términos de nueve variables de estado.

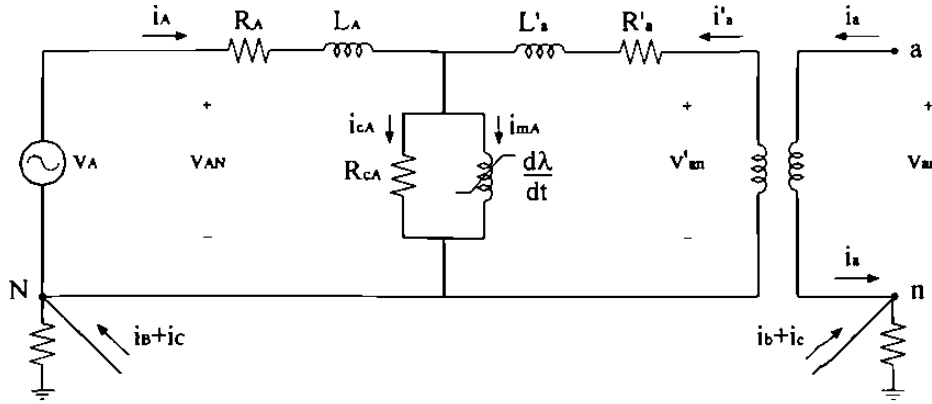


Fig. 2.16 Circuito equivalente por fase del transformador Y-Y.

$$\frac{di_A}{dt} = \frac{1}{L_A} [v_{AN} - R_A i_A - R_{cA} i_{cA}] \quad (2.74)$$

$$\frac{di'_a}{dt} = \frac{1}{L'_a} [v'_{an} - R'_a i'_a - R_{cA} i_{cA}] \quad (2.75)$$

$$\frac{di_{mA}}{dt} = R_{cA} i_{cA} \frac{\ell_A}{N_A^2 A_A} \left[\mu_A + i_{mA} \frac{d\mu_A}{di_{mA}} \right]^{-1} \quad (2.76)$$

$$\frac{di_B}{dt} = \frac{1}{L_B} [v_{BN} - R_B i_B - R_{cB} i_{cB}] \quad (2.77)$$

$$\frac{di'_b}{dt} = \frac{1}{L'_b} [v'_{bn} - R'_b i'_b - R_{cB} i_{cB}] \quad (2.78)$$

$$\frac{di_{mB}}{dt} = R_{cB} i_{cB} \frac{\ell_B}{N_B^2 A_B} \left[\mu_B + i_{mB} \frac{d\mu_B}{di_{mB}} \right]^{-1} \quad (2.79)$$

$$\frac{di_C}{dt} = \frac{1}{L_C} [v_{CN} - R_C i_C - R_{cC} i_{cC}] \quad (2.80)$$

$$\frac{di'_c}{dt} = \frac{1}{L'_c} [v'_{cn} - R'_c i'_c - R_{cC} i_{cC}] \quad (2.81)$$

$$\frac{di_{mC}}{dt} = R_{cC} i_{cC} \frac{\ell_C}{N_C^2 A_C} \left[\mu_C + i_{mC} \frac{d\mu_C}{di_{mC}} \right]^{-1} \quad (2.82)$$

2.7 Resumen

En este capítulo presenté un modelo que interpreta en forma adecuada el fenómeno no lineal de magnetización, mediante una reluctancia variable. Se obtuvieron exactamente las ecuaciones de la interpretación propuesta para el comportamiento del circuito magnético y se aplicaron a un transformador monofásico. De igual forma, se desarrollaron las ecuaciones que describen el comportamiento de un banco de transformadores, considerando algunas de las conexiones más utilizadas en los sistemas eléctricos trifásicos.

El núcleo magnético se modela como un inductor no lineal, para representar la saturación magnética, y en paralelo se coloca una resistencia que permite considerar las pérdidas en el núcleo. La representación del inductor no lineal se hizo mediante una curva de saturación, por la función tangente hiperbólica. Esta función en particular se ajusta a la forma de saturación de los materiales magnéticos y puede representar con exactitud y sencillez los datos que se proporcionan del transformador.

CAPITULO 3

FORMULACION DE MODELO DE MAQUINA SINCRONA PARA ESTUDIOS DE ENERGIZACION

3.1 Introducción

En los sistemas eléctricos actuales la mayor parte de la generación de energía eléctrica se lleva a cabo por medio de generadores síncronos. En la industria también se emplea este tipo de máquinas, ya sea funcionando como generador o motor. Por lo anterior es importante tener un modelo, lo más completo posible, que describa el comportamiento eléctrico y electromecánico de la máquina síncrona. El establecer un modelo implica pasar de una máquina física a un modelo matemático.

Para el desarrollo del modelo se usará la Ley de Faraday, la cual describe la inducción de voltajes mediante un campo magnético que varía con respecto al tiempo.

$$e = \frac{d\lambda}{dt} \tag{3.1}$$

La conversión de energía electromagnética se lleva a cabo cuando el cambio de flujo magnético se asocia con el movimiento mecánico, ya que para generar un voltaje cambiante en el tiempo, se requiere variar en forma cíclica el flujo que enlaza a una bobina. Así, en un generador síncrono que provee de energía eléctrica a una carga eléctrica, la corriente de armadura en el generador establece una onda de flujo magnético en el entrehierro, la cual gira a velocidad síncrona. La corriente de campo o de excitación crea otro flujo magnético y ambos campos magnéticos tratan de alinearse provocando de esta manera un par

electromagnético. El par de origen electromagnético se opone al giro de la flecha de la máquina por lo que el sistema de energía primaria que la impulsa debe suministrar el par mecánico para mantener la rotación. El par electromagnético es el medio por el cual el generador síncrono convierte energía mecánica en energía eléctrica. En un motor síncrono, el par electromagnético tiene la dirección del giro de la máquina y compensa al par de reacción necesario para impulsar la carga mecánica. En el caso del motor, el flujo magnético que producen las corrientes de armadura gira adelante del flujo producido por la corriente de campo y así jala al rotor, efectuando trabajo.

3.2 Componentes de una máquina síncrona

En general, la máquina síncrona consta de un devanado de armadura, que invariablemente se encuentra en el estator y es de naturaleza trifásica. En el rotor se localiza el devanado de campo, excitado por una corriente directa, y puede alojar uno o más devanados amortiguadores. Para el modelo matemático de una máquina de rotor sólido se incluye un devanado que simula las corrientes inducidas de Eddy.

La Figura 3.1 muestra, en forma esquemática, una máquina síncrona de polos salientes, la cual está compuesta de dos polos en el rotor y tres fases en el estator. Los devanados del estator están uniformemente distribuidos y desplazados 120° . En el rotor se encuentra el devanado de campo y tres devanados amortiguadores. El devanado de campo es denominado f_d , y en el mismo eje magnético del devanado de campo se encuentra un devanado amortiguador denominado k_d . A 90° del eje magnético donde se localiza el campo se tienen dos devanados amortiguadores adicionales, denominados k_{q1} y k_{q2} . Nótese que las variables que contienen los subíndices q y d , son variables localizadas en el rotor de la máquina. Si la máquina síncrona fuera de polos lisos, uno de los devanados que se localizan en el eje magnético q , se empleará como un devanado que simula las corrientes de Eddy, debido a que el rotor, el cual tiene una estructura sólida, ofrece una ruta para las corrientes de Eddy las cuales presentan un efecto similar al de corrientes amortiguadoras [28, 29]; dichas corrientes se presentan ante condiciones dinámicas.

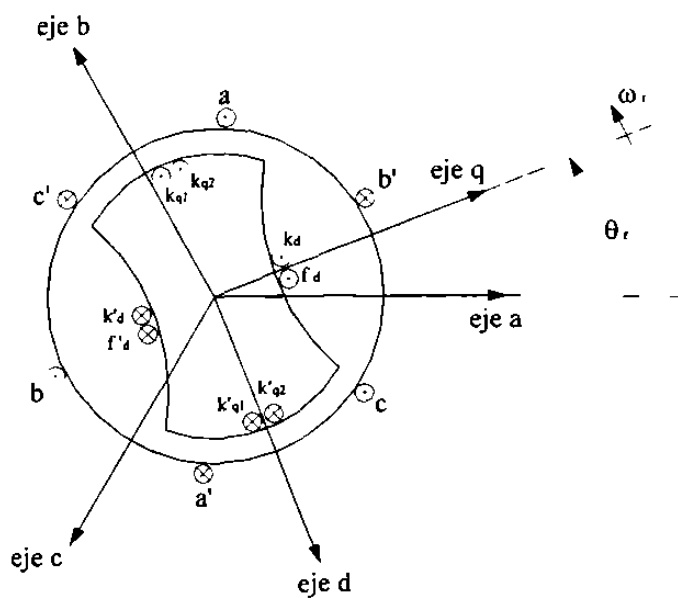


Fig. 3.1 Diagrama esquemático de una máquina síncrona trifásica.

Para representar la máquina síncrona, desde el punto de vista de circuitos eléctricos acoplados, Figura 3.2, es necesario trabajar en la deducción de las ecuaciones que describen el acoplamiento que existe entre los devanados del estator y del rotor.

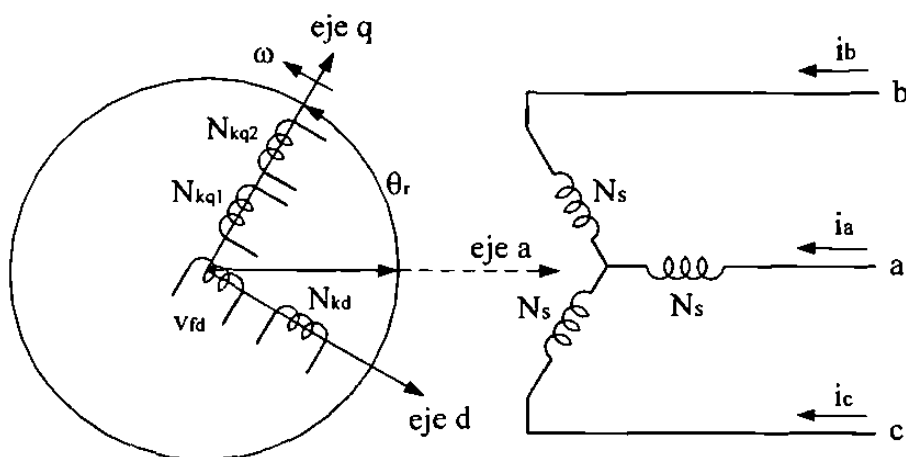


Fig. 3.2 Representación de una máquina síncrona mediante circuitos.

3.3 Formulación del modelo matemático

Para la deducción de las ecuaciones que describirán el comportamiento de la máquina síncrona como un conjunto de inductancias acopladas magnéticamente, se considera una máquina elemental, la cual consta de tres devanados en el estator y un devanado de campo en el rotor. En esta etapa se desprecia la histéresis y la saturación magnética.

Del circuito equivalente que se muestra en la Figura 3.3 se obtienen las ecuaciones de voltaje para las fases; considerando que las corrientes entran a los devanados.

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

La variable s indica que es una cantidad asociada al estator. Para el campo se tiene la expresión (3.3).

$$v_f = i_f r_f + \frac{d \lambda_f}{dt} \tag{3.3}$$

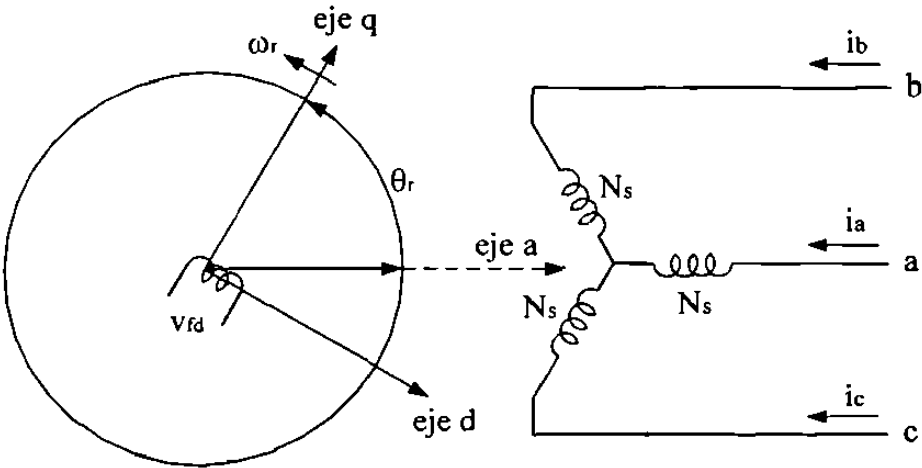


Fig. 3.3 Diagrama elemental de una máquina síncrona.

De (3.2) y (3.3) se observa que es necesario determinar los enlaces de flujo debidos a la corriente propia de cada devanado, así como la componente debida a las corrientes que circulan por los otros devanados. Los enlaces de flujo de los devanados para cualquier instante están dados por (3.4), y para el campo se escribe (3.5).

$$\lambda_a = l_{aa} i_a - l_{ab} i_b - l_{ac} i_c - l_{af} i_f$$

$$\lambda_b = -l_{ba} i_a + l_{bb} i_b - l_{bc} i_c - l_{bf} i_f$$

$$\lambda_c = -l_{ca} i_a - l_{cb} i_b + l_{cc} i_c - l_{cf} i_f$$

$$\lambda_f = -l_{fa} i_a - l_{fb} i_b - l_{fc} i_c + l_{ff} i_f$$
(3.4)

$$\lambda_f = -l_{fa} i_a - l_{fb} i_b - l_{fc} i_c + l_{ff} i_f$$
(3.5)

La inductancia propia l_{aa} es igual a la razón de los enlaces de flujo del devanado de la fase a respecto a la corriente propia del devanado, i_a , con las corrientes en los otros devanados igual a cero [28, 31].

3.3.1 Inductancias propias del estator

Para determinar las inductancias propias del estator se toma en cuenta que éstas dependen directamente de la permeancia, y se observa de la Figura 3.4, que dependiendo de la posición del rotor se tendrá un valor de enlaces de flujo mínimo debido a que se tiene la mayor reluctancia en el espacio interpolar (en $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$). Los enlaces de flujo se incrementan hasta un valor máximo cuando se presenta la mínima reluctancia en su trayectoria (en $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$).

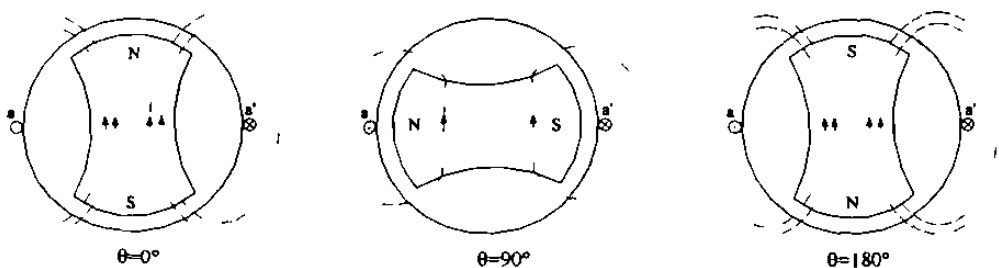


Fig. 3.4 Enlaces de flujo de la fase a .

La inductancia propia ℓ_{aa} varía periódicamente, y en 360° se tiene una variación de dos ciclos, lo cual se expresa como:

$$\ell_{aa} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta \quad (3.6)$$

Por considerar una máquina simétrica, esto es, que los devanados de las fases b y c están desplazados 120° y 240° respectivamente, se tiene:

$$\ell_{bb} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.7)$$

$$\ell_{cc} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.8)$$

Si la máquina es de polos lisos, la reluctancia del entrehierro no cambia con la posición del rotor, debido a esto, los enlaces de flujo son constantes y a su vez las inductancias son también constantes.

3.3.2 Inductancias mutuas del estator

Las inductancias mutuas entre los devanados del estator tienen un comportamiento que depende de la posición del rotor. El valor máximo se alcanza cuando los polos están equidistantes del centro de los dos devanados acoplados; este valor se alcanza cuando $\theta = -30^\circ$ o $\theta = 150^\circ$. Considerando lo anterior, las inductancias mutuas se expresan como:

$$\begin{aligned} \ell_{ab} &= L_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ \ell_{bc} &= L_{ab0} + L_{aa2} \cos 2(\theta - \pi) \\ \ell_{ca} &= L_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3.3 Inductancias mutuas entre estator y rotor

Cuando el devanado del rotor se alinea con un devanado del estator, los enlaces de flujo entre ambos es máximo por lo que la inductancia es máxima. Cuando los devanados están desplazados entre sí 90° se tiene que los enlaces de flujo son cero, entonces las inductancias se expresan como:

$$\begin{aligned} \ell_{af} &= L_{af} \cos \theta \\ \ell_{bf} &= L_{af} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \ell_{cf} &= L_{af} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.3.4 Inductancias propias del rotor

Como el devanado de campo se localiza en el rotor, los enlaces de flujo del rotor, debidos a su propia corriente permanecen constantes y son independientes de la posición que tenga el rotor. Por lo tanto, la inductancia propia del devanado de campo es constante.

$$\ell_{ff} = L_{ff} \tag{3.11}$$

Es importante observar que a excepción de la inductancia propia del devanado del rotor, las otras inductancias dependen de la posición del rotor y por lo tanto del tiempo. El trabajar ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, dependientes del tiempo, es complicado, por lo cual se usa una transformación. Para éste propósito se utiliza la llamada *Transformación de Park*, de manera que se evita la dependencia respecto del ángulo del rotor.

3.4 La Transformada de Park

Como puede observarse, las ecuaciones de voltaje que describen el comportamiento de la máquina síncrona tienen inductancias que dependen de la velocidad del rotor, con lo cual, los coeficientes de estas ecuaciones varían con el tiempo. Esto introduce una complejidad en la solución de las ecuaciones diferenciales, la cual se puede evitar si las ecuaciones se resuelven en términos de nuevas variables, que no dependan de la variación angular. Esto es posible empleando la llamada *Transformada de Park*.

En la década de los 1920, R. H. Park, basándose en el trabajo realizado por André Blondel, desarrolló una técnica de análisis para el estudio de las máquinas eléctricas, proponiendo un cambio de variables. Park logró reemplazar las variables de los devanados del estator con variables asociadas a devanados ficticios que giran con el rotor de la máquina. Esto es, trasladó las variables del estator a un marco de referencia fijo en el rotor. Con tal procedimiento logró transformar las inductancias variantes en el tiempo, que aparecen en las ecuaciones de voltaje de la máquina, a inductancias equivalentes invariantes en el tiempo.

La *Transformada de Park*, también llamada transformación $qd0$, se aplica a cualquier variable del estator: voltajes, corrientes, enlaces de flujo, etc. La transformación se puede representar en forma directa en términos del ángulo θ con la siguiente expresión matricial

$$\begin{bmatrix} f_q \\ f_d \\ f_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}\theta & \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

En donde las variables f_a , f_b y f_c son cantidades de fase y pueden representar cualquiera de las variables del estator. Los subíndices q y d representan a los ejes directo y de cuadratura respectivamente. El subíndice 0 identifica una tercera componente llamada de

secuencia cero, la cual es requerida para obtener una transformación única para las tres cantidades de fase del estator. La secuencia cero corresponde a las componentes de la corriente de armadura que no producen flujo neto en el entrehierro y por lo tanto no producen flujo neto enlazando a los circuitos del rotor. En condiciones balanceadas la componente de secuencia cero es nula.

La Transformada Inversa de Park está dada por:

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_q \\ f_d \\ f_0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La transformada de Park se puede visualizar como relaciones trigonométricas entre las variables. Esto se muestra en la Figura 3.5.

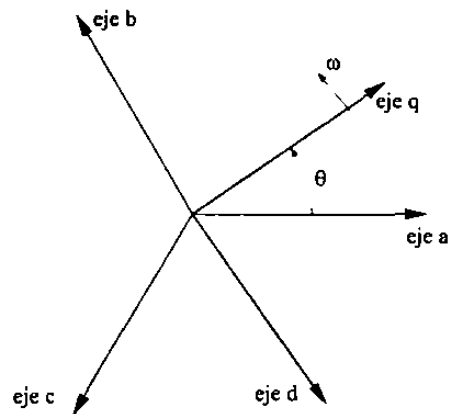


Fig. 3.5 Relación entre variables *qd* y de fases *abc*.

Se estableció que la transformación $qd0$ refiere cantidades de estator al plano de referencia del rotor, lo cual es análogo a referir cantidades del secundario al primario de un transformador; por medio de la relación de vueltas de los devanados.

Con las ecuaciones de la máquina, en función de las variables $qd0$, se simplifica la solución de las ecuaciones diferenciales debido a lo siguiente:

- a) Las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico tienen inductancias constantes.
- b) Para condiciones balanceadas, la cantidad de secuencia cero tiene un valor nulo.
- c) Para la operación de estado estable, las cantidades del estator tienen valores constantes.
- d) Los parámetros asociados con los ejes q y d pueden ser calculados por medio de pruebas efectuadas en terminales de la máquina.

3.5 Variables en componentes $qd0$

A fin de tener un modelo en la referencia $qd0$ se trabajan todas las expresiones del comportamiento electromagnético, de la máquina síncrona, como se muestra en los apartados siguientes.

3.5.1 Enlaces de flujo del estator

En la ecuación de enlaces de flujo (3.4), se sustituyen los valores de las inductancias obtenidas, como se muestra en (3.14).

$$\lambda_a = [L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta] i_a + \left[L_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \right] i_b + \left[L_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) \right] i_c + [L_{af} \cos \theta] i_f \quad (3.14)$$

Si se emplea la Transformación Inversa de Park (3.13), para obtener las variables que aparecen en (3.14), en función de variables $qd0$.

$$\lambda_o = \lambda_q \cos\theta + \lambda_d \operatorname{sen}\theta + \lambda_0 \quad (3.15)$$

$$i_a = i_q \cos\theta + i_d \operatorname{sen}\theta + i_0$$

$$i_b = i_q \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_d \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_0 \quad (3.16)$$

$$i_c = i_q \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + i_d \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + i_0$$

Al sustituir las ecuaciones anteriores en (3.14) y efectuando pasos trigonométricos e igualando coeficientes, se llega a tener los enlaces de flujo del estator en componentes $qd0$.

$$\lambda_q = \left(L_{aa0} + L_{ab0} - \frac{3}{2} L_{aa2} \right) i_q$$

$$\lambda_d = \left(L_{aa0} + L_{ab0} + \frac{3}{2} L_{aa2} \right) i_d + L_{af} i_f \quad (3.17)$$

$$\lambda_0 = (L_{aa0} - 2L_{ab0}) i_0$$

Con los resultados anteriores se define un nuevo conjunto de inductancias.

$$L_q = L_{aa0} + L_{ab0} - \frac{3}{2} L_{aa2}$$

$$L_d = L_{aa0} + L_{ab0} + \frac{3}{2} L_{aa2} \quad (3.18)$$

$$L_0 = L_{aa0} - 2L_{ab0}$$

Las inductancias en los ejes q y d , dependen principalmente de dos componentes, una resultado del flujo que encadena a los circuitos del rotor; ésta es una inductancia mutua, y la otra componente es debida al flujo de dispersión, es decir, al flujo que no enlaza ningún circuito del rotor. Así, se puede definir nuevas inductancias para (3.18).

$$\begin{aligned} L_q &= L_{ls} + L_{mq} \\ L_d &= L_{ls} + L_{md} \\ L_0 &= L_{ls} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Los enlaces de flujo del estator se definen en función de las inductancias en la referencia $qd0$.

$$\begin{aligned} \lambda_q &= L_q i_q \\ \lambda_d &= L_d i_d + L_{df} i_f \\ \lambda_0 &= L_0 i_0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.5.2 Enlaces de flujo del rotor

En el desarrollo del presente trabajo se consideró un sólo devanado en el rotor, el cual se conoce como devanado de campo o de excitación. De igual forma que para los enlaces de flujo del estator, se sigue un procedimiento similar para los enlaces de flujo del campo, partiendo de la siguiente expresión.

$$\lambda_f = -\ell_{fa} i_a - \ell_{fb} i_b - \ell_{fc} i_c + \ell_{ff} i_f \tag{3.21}$$

Si se sustituyen los valores de las inductancias, así como las corrientes en componentes $qd0$ y posteriormente se simplifican las expresiones se llega a:

$$\lambda_f = L_f i_f + \frac{3}{2} L_{af} i_d \quad (3.22)$$

Con el desarrollo anterior se tiene que se logra llevar a todas las inductancias a expresiones que permanecen constantes, es decir, ya no dependen de la posición del rotor. Estos resultados permiten simplificar la solución de las expresiones que describen el comportamiento de la máquina síncrona. El tener inductancias constantes es una gran ventaja, pero aún así se tiene un acoplamiento asimétrico entre el devanado de campo y los devanados del eje directo; esto se observa en (3.20) y (3.22), ya que en una expresión se tiene L_{af} y en la otra se tiene un factor $3/2$ para la inductancia. Para hacer recíproco el valor de la inductancia de acoplamiento, un procedimiento es expresar en por unidad los parámetros de la máquina, teniendo la misma base de potencia en ambos devanados.

3.5.3 Ecuaciones de voltaje en el estator y rotor

De la ecuación de voltajes para las fases del estator se tiene:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Si se toma la ecuación de la fase a , y se le aplica la *Transformada Inversa de Park* a cada una de las variables se obtiene:

$$v_a = r_s i_a + \frac{d \lambda_a}{dt} \quad (3.24)$$

$$v_q \cos\theta + v_d \text{sen}\theta + v_0 = r_s (i_q \cos\theta + i_d \text{sen}\theta + i_0) + \frac{d}{dt} (\lambda_q \cos\theta + \lambda_d \text{sen}\theta + \lambda_0) \quad (3.25)$$

De la Figura 3.5 se define θ como el ángulo entre el eje q y el eje de la fase a ; en dirección de la rotación de la máquina y como el rotor se mueve respecto al estator, el ángulo θ cambia con relación a la velocidad angular del rotor ω_r y el tiempo t . Se puede definir:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_r \quad (3.26)$$

Con el desarrollo de (3.25) e igualando coeficientes se logran expresiones para el voltaje en componentes $qd\theta$.

$$\begin{aligned} v_q &= r_s i_q + \omega_r \lambda_d + \frac{d\lambda_q}{dt} \\ v_d &= r_s i_d - \omega_r \lambda_q + \frac{d\lambda_d}{dt} \\ v_0 &= r_s i_0 + \frac{d\lambda_0}{dt} \end{aligned} \quad (3.27)$$

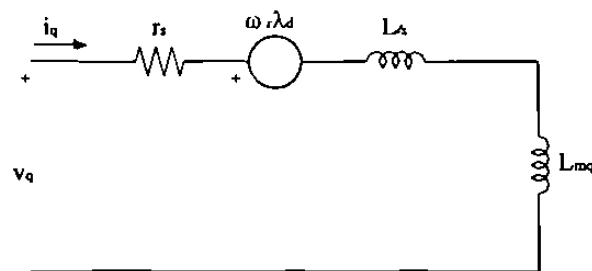
De forma similar para el rotor:

$$v_f = r_f i_f + \frac{d\lambda_f}{dt} \quad (3.28)$$

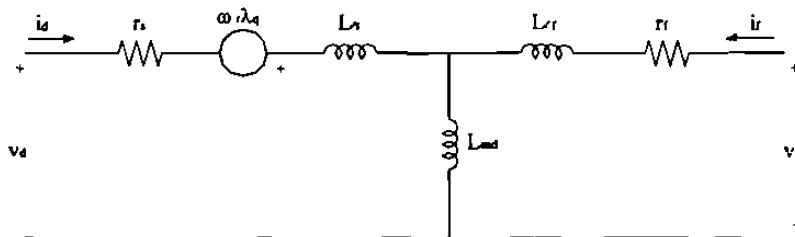
Los términos $\omega_r \lambda_d$ y $-\omega_r \lambda_q$, los cuales algunas veces les refiere como voltajes-velocidad, son el resultado de la interacción entre los ejes directo y de cuadratura. Los términos representan el efecto de tener una onda de flujo girando en sincronismo con el rotor, pero creando voltajes en la armadura. Estos términos son la causa de tener un conjunto no

lineal de ecuaciones, cuando la máquina es descrita en forma de variables de estado. La no linealidad se presenta al multiplicar variables de estado.

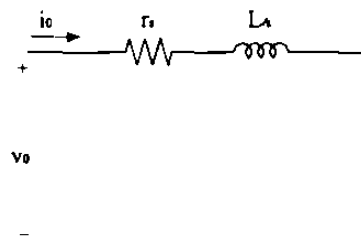
De las ecuaciones de voltajes en componentes $qd0$ se obtienen los circuitos equivalentes de la Figura 3.6, los cuales permiten visualizar las relaciones existentes entre las variables eléctricas de la máquina síncrona.



(a) Circuito equivalente en el eje en cuadratura



(b) Circuito equivalente en el eje directo



(c) Circuito equivalente de secuencia cero

Fig. 3.6 Circuitos equivalentes de la máquina síncrona en componentes $qd0$.

3.5.4 Ecuaciones para las corrientes

Para determinar los enlaces de flujo es necesario tener expresiones que calculen las corrientes de los devanados en componentes $qd\theta$. De los circuitos equivalentes, como se aprecia en la Figura 3.6, se puede determinar las corrientes. Para el estator se tiene:

$$i_q = \frac{\lambda_q}{L_{mq} + L_{ts}}$$

$$i_0 = \frac{\lambda_0}{L_{ts}} \quad (3.29)$$

Para las ecuaciones en el eje directo se encuentra un equivalente de inductancias, para lo cual el circuito de eje directo de la Figura 3.6, se convierte a un equivalente en delta y se tiene en cuenta la relación $\lambda = Li$.

$$i_d = \lambda_d \frac{L_{tf}}{L_{md} L_{ts} + L_{md} L_{tf} + L_{ts} L_{tf}} \quad (3.30)$$

de forma similar para el rotor:

$$i_f = \lambda_f \frac{L_{ts}}{L_{md} L_{ts} + L_{md} L_{tf} + L_{ts} L_{tf}} \quad (3.31)$$

De las ecuaciones de voltaje, se tiene que las variables de estado a resolver serán los enlaces de flujo, por lo que es conveniente expresar las corrientes en función de los enlaces de flujo.

$$\begin{aligned}
 i_q &= \frac{\lambda_q - \lambda_{mq}}{L_{ts}} \\
 i_d &= \frac{\lambda_d - \lambda_{md}}{L_{ts}} \\
 i_f &= \frac{\lambda_f - \lambda_{md}}{L_{tf}}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 \lambda_{mq} &= L_{mq} i_q = \frac{L_{mq}}{L_{mq} + L_{ts}} \lambda_q \\
 \lambda_{md} &= L_{md} (i_d + i_f) = \frac{L_{md}}{L_{md} L_{ts} + L_{md} L_{tf} + L_{ts} L_{tf}} (\lambda_d L_{tf} + \lambda_f L_{ts})
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

3.6 Potencia y par electromagnético

Es necesaria una expresión para determinar la potencia de entrada a la máquina, la cual será transferida a través del entrehierro para obtener el par electromagnético. Para el modelo que se está considerando, la potencia de entrada se determina por (3.34).

$$P_{en} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c + v_f i_f \tag{3.34}$$

Al igual que en las ecuaciones de voltaje y corriente, la potencia se puede expresar en términos de las componentes $qd0$. Aplicando la *Transformada Inversa de Park* a las

corrientes y a los voltajes, y el resultado de ésta transformación, en forma ya reducida, es el siguiente:

$$P_{em} = \frac{3}{2} (v_q i_q + v_d i_d + 2v_0 i_0) + v_f i_f \quad (3.35)$$

Sustituyendo las expresiones de los voltajes en (3.35) y agrupando términos se tiene:

$$P_{em} = \frac{3}{2} \left[r_s (i_q^2 + i_d^2) + i_q \frac{d\lambda_q}{dt} + i_d \frac{d\lambda_d}{dt} + \omega_r (\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) + 2i_0^2 r_0 + 2i_0 \frac{d\lambda_0}{dt} \right] + i_f^2 r_f + i_f \frac{d\lambda_f}{dt} \quad (3.36)$$

Si se desprecian las pérdidas en el cobre, así como la razón de cambio en la energía magnética, la potencia que queda después de estas consideraciones es la potencia electromagnética; la cual es requerida para obtener el par electromagnético.

$$P_{em} = \frac{3}{2} \omega_r (\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) \quad (3.37)$$

Si se toma en cuenta el número de polos de la máquina, la velocidad angular del rotor será:

$$\omega_r = \frac{P}{2} \omega_{rm} \quad (3.38)$$

donde ω_{rm} es la velocidad mecánica del rotor, expresada en rad/seg. La ecuación de potencia finalmente queda expresada por:

$$P_{em} = \frac{3}{2} \frac{P}{2} \omega_{rm} (\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) \quad (3.39)$$

El par electromagnético que se desarrolla es la potencia respecto a la velocidad mecánica del rotor, en donde nuevamente el empleo de la *Transformada de Park* lleva a un resultado compacto; en función de componentes $qd0$, como las ecuaciones obtenidas anteriormente.

$$T_{em} = \frac{3}{2} \frac{P}{2} (\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) \quad (3.40)$$

3.7 Ecuación de oscilación

La ecuación de rotación de una máquina síncrona se obtiene aplicando la segunda Ley de Newton para el movimiento angular, ésta ecuación es el resultado de igualar el par de inercia con los pares mecánicos y eléctricos presentes en el rotor. Para un motor se tiene:

$$J \frac{d^2 \theta_r}{dt^2} = T_{em} - T_{mec} \quad (3.41)$$

que también puede escribirse en función de la velocidad mecánica del rotor.

$$J \frac{d\omega_{rm}}{dt} = T_{em} - T_{mec} \quad (3.42)$$

El proceso transitorio dinámico del rotor se origina al existir un desbalance entre el par eléctrico y el par mecánico. Es conveniente, por lo tanto, expresar la posición angular del rotor en términos de un marco de referencia que gire sincrónicamente. A éste nuevo ángulo también se le llama ángulo de potencia.

$$\delta(t) = \theta_r(t) - \theta_s(t) \quad (3.43)$$

donde θ_s es la referencia síncrona. También, se puede tener como referencia la velocidad síncrona:

$$\frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = \frac{d \omega_r(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega_r(t) - \omega_s) \quad (3.44)$$

$$\delta(t) = \int_0^t (\omega_r(\tau) - \omega_s) d\tau + \delta(0) \quad (3.45)$$

con ω_s como la velocidad síncrona.

3.8 Ecuaciones normalizadas

Un procedimiento para hacer que las inductancias mutuas entre estator y rotor sean recíprocas es seleccionar apropiadamente las cantidades en por unidad, además de que todas las variables se trabajen en forma normalizada. Se eligen como cantidades base la potencia, el voltaje y la velocidad angular base ω_B . Esta velocidad base se aplica a las ecuaciones de enlaces de flujo.

$$\lambda = \frac{\Psi}{\omega_B} \quad (3.46)$$

Con cantidades expresadas en componentes abc , el voltaje y la corriente base son los valores eficaces de fase, mientras que en componentes $qd0$ se elegirá ahora como base los valores máximos de fase.

$$\begin{aligned} V_{B(qd0)} &= \sqrt{2} V_{(abc)} = V_B \\ I_{B(qd0)} &= \sqrt{2} I_{(abc)} = I_B \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$Z_B = \frac{V_B}{I_B}$$

La potencia base se puede obtener de (3.35), y después de normalizar los voltajes y las corrientes, se obtiene:

$$S_B = \frac{3}{2} V_B I_B \quad (3.48)$$

Si se define una velocidad mecánica base para determinar el par base que normaliza el par electromecánico:

$$T_B = \frac{S_B}{\omega_{Bm}} \quad (3.49)$$

en donde

$$\omega_{Bm} = \frac{2}{P} \omega_B \quad (3.50)$$

con las expresiones anteriores se determina el par electromagnético base:

$$T_B = \frac{3}{2} \frac{P}{2\omega_B} V_B I_B \quad (3.51)$$

El par electromagnético en por unidad se determina al dividir el par obtenido entre el par base, con lo que se llega a la expresión:

$$T_{em} = \psi_d i_q - \psi_q i_d \quad (3.52)$$

La ecuación de oscilación (3.42) se divide en ambos lados por el par base para obtener la forma normalizada.

$$\frac{2\omega_{Bm} J}{S_B P} \frac{d\omega_r}{dt} = T_{em} - T_{mec} \quad (3.53)$$

multiplicando y dividiendo por $2\omega_{Bm}$:

$$\frac{4}{\omega_{Bm}} \frac{1}{2} \frac{J \omega_{Bm}^2}{S_B} \frac{d\omega_r}{dt} = T_{em} - T_{mec} \quad (3.54)$$

y al definir como “Constante de Inercia” al término siguiente:

$$H = \frac{1}{2} \frac{J \omega_{Bm}^2}{S_B} \quad (3.55)$$

que al sustituir en (3.55) y en (3.54) se llega a la expresión de la ecuación de oscilación.

$$\frac{2H}{\omega_B} \frac{d\omega_r}{dt} = T_{em} - T_{mec} \quad (3.56)$$

3.8.1 Ecuaciones normalizadas para las simulaciones

Las ecuaciones normalizadas de voltaje se emplean para obtener un conjunto de variables de estado, en las cuales los estados serán los enlaces de flujo.

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_q}{dt} &= \omega_B \left(v_q - \frac{\omega_r}{\omega_B} \psi_d - r_s i_q \right) \\ \frac{d\psi_d}{dt} &= \omega_B \left(v_d + \frac{\omega_r}{\omega_B} \psi_q - r_s i_d \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\frac{d\psi_0}{dt} = \omega_B (v_0 - r_s i_0)$$

para el rotor:

$$\frac{d\psi_f}{dt} = \omega_B (v_f - r_f i_f) \quad (3.58)$$

Las corrientes se expresan como

$$i_q = \frac{\psi_q - \psi_{mq}}{X_{ts}}$$

$$i_d = \frac{\psi_d - \psi_{md}}{X_{ts}} \quad (3.59)$$

$$i_0 = \frac{\psi_0}{X_{ts}}$$

$$i_f = \frac{\psi_f - \psi_{mf}}{X_{tf}} \quad (3.60)$$

en donde

$$\psi_{mq} = \frac{X_{mq}}{X_{mq} + X_{ts}} \psi_q$$

$$\psi_{md} = \frac{X_{md}}{X_{md} X_{ts} + X_{md} X_{tf} + X_{ts} X_{tf}} (\psi_d X_{tf} + \psi_f X_{ts}) \quad (3.61)$$

y para la parte mecánica se tiene

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{\omega_B}{2H} (T_{em} - T_{mec}) \quad (3.62)$$

$$T_{em} = \psi_d i_q - \psi_q i_d \quad (3.63)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_r - \omega_s \quad (3.64)$$

3.9 Máquina síncrona en estado estable

Las ecuaciones de la máquina síncrona en estado estable son necesarias para determinar las condiciones iniciales de la simulación. Bajo esta condición, las ecuaciones del estator y del rotor se simplifican debido a que los enlaces de flujo son constantes, por lo que la derivada con respecto al tiempo es cero; por lo tanto se simplifica el conjunto de ecuaciones antes descritas.

$$v_q = r_s i_q + \frac{\omega_r}{\omega_B} \psi_d$$

$$v_d = r_s i_d - \frac{\omega_r}{\omega_B} \psi_q \quad (3.65)$$

$$v_0 = r_s i_0$$

$$v_f = r_s i_f$$

Los enlaces de flujo serán

$$\psi_q = X_q i_q$$

$$\psi_d = X_d i_d + X_{md} i_f$$

$$\psi_f = X_f i_f + X_{md} i_d \quad (3.66)$$

Se puede expresar en forma de fasores las variables que se proporcionen de la máquina, como el voltaje y la corriente.

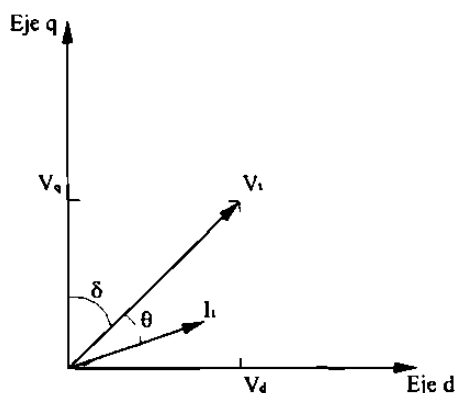


Fig. 3.7 Voltaje y corriente en componentes $qd0$.

De la Figura 3.7 se pueden definir los voltajes y las corrientes en eje directo y en el eje de cuadratura como:

$$\begin{aligned} v_q &= V_t \cos(\delta) \\ v_d &= V_t \sin(\delta) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$V_t = v_d + j v_q$$

$$\begin{aligned} i_q &= I_t \cos(\delta + \theta) \\ i_d &= I_t \sin(\delta + \theta) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$I_t = i_d + j i_q$$

De (3.65) a (3.68), se puede trabajar algunas manipulaciones algebraicas para obtener un voltaje ficticio en el eje en cuadratura.

$$E_q = V_t - (r_s + j X_q) I_t = E_q \angle \delta \quad (3.69)$$

Con base en (3.69) se puede determinar un circuito equivalente para el eje en cuadratura.

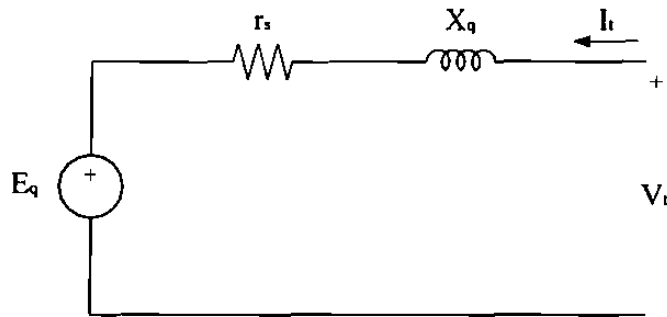


Fig. 3.8 Circuito equivalente de estado estable.

3.10 Resumen

En este capítulo se presentaron las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de la máquina síncrona al ser empleada como motor. Por simplicidad, se mostró el desarrollo para una máquina considerando únicamente los devanados del estator y el devanado de campo. Sin embargo, en las simulaciones realizadas, se consideraron también dos devanados amortiguadores, uno en cada eje ficticio resultado de la *Transformada de Park*. Como se podrá observar en un capítulo posterior, los devanados amortiguadores serán de utilidad para el problema de la energización del motor.

Se presentó también un análisis de estado estable de la máquina, con el cual se puede determinar las condiciones iniciales, las cuales son requeridas para efectuar simulaciones del transitorio que se presenta en el momento de la energización.

CAPITULO 4

MODELO DEL MOTOR INDUCCION PARA ESTUDIOS DE ENERGIZACION

4.1 Introducción

La máquina de inducción se conoce también como máquina de velocidad asíncrona, debido a que opera a una velocidad diferente de la velocidad síncrona. A valores menores si se emplea como motor, y a valores mayores de la velocidad síncrona si actúa como generador. Se utiliza principalmente como motor y es ampliamente usada en la industria debido a su bajo costo, a la robustez mecánica y al poco mantenimiento que requiere. Además, con el desarrollo de la electrónica de potencia, los procesadores y los algoritmos de control, el motor de inducción compite con otros tipos de motores para lograr controles y accionamientos sofisticados. Los motores de inducción constituyen una gran parte de la carga eléctrica en el sistema de potencia, y se puede decir que este tipo de motores consumen una buena porción de la energía que suministra un sistema de potencia. Por las razones expuestas es que se debe tener un modelo apropiado para estudios y análisis de los efectos del arranque sobre los circuitos de alimentación.

En este trabajo de investigación la atención es básicamente sobre el comportamiento del motor de inducción al momento de energizarlo. Es importante conocer el comportamiento de las variables eléctricas que describen el fenómeno electromecánico en éste tipo de máquinas, como por ejemplo: las corrientes, el par, la velocidad, los voltajes, etc. Estos estudios son relevantes ya que como se hizo mención, la mayor parte del trabajo mecánico en la industria se efectúa por medio de éste tipo de motores.

El estudio de la energización de un motor de inducción es importante ya que en esos instantes, puede presentarse corrientes excesivas, las cuales pueden llegar a ser más de seis veces la corriente a plena carga.

En este capítulo se desarrollará un modelo que permite obtener, mediante simulaciones digitales, las respuestas para diferentes casos de energización.

4.2 Elementos que constituyen una máquina de inducción

La Figura 4.1 muestra esquemáticamente una máquina de inducción trifásica, con una distribución simétrica de sus devanados, tanto del estator como del rotor.

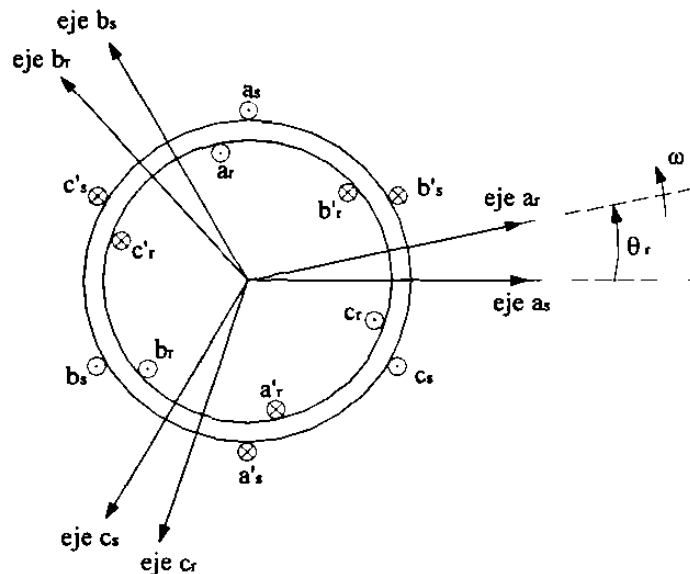


Fig. 4.1 Diagrama esquemático de una máquina de inducción trifásica.

En el desarrollo de las ecuaciones, el subíndice s indicará que es una variable asociada al estator, mientras que el subíndice r es una variable relacionada con el rotor. En un motor de inducción, el devanado del estator es similar al de una máquina síncrona, mientras que el devanado alojado en el rotor está en corto circuito. Al circuito del estator se

le aplica un voltaje trifásico, en caso de tener máquina trifásica y mediante el fenómeno de inducción electromagnética se hace que circule corrientes por los circuitos del rotor.

El rotor puede ser de dos tipos, de rotor devanado, el cual consiste de un devanado trifásico similar al del estator, y embobinado con un número de polos igual al del estator. En este tipo de rotor, las terminales del devanado son externas y se tiene acceso a ellas por medio de anillos deslizantes. El otro tipo de rotor es el que se conoce como “jaula de ardilla”, el cual consta de barras conductoras alojadas en el rotor y conectadas en cada extremo en cortocircuito, para lo cual se emplean anillos conductores en los extremos de las barras.

4.2.1 Principio de funcionamiento

Si se aplica un voltaje trifásico balanceado al devanado del estator, circulan corrientes de frecuencia f_s , causando que en los devanados del estator se produzca un campo magnético rotatorio a la velocidad síncrona ω_s , donde:

$$\omega_s = \frac{120 f_s}{P} \quad (4.1)$$

Si existe un movimiento relativo entre el campo establecido por las corrientes trifásicas que circulan en el estator y los conductores del rotor, se inducen voltajes en los devanados del rotor a una frecuencia f_r , la cual depende de la velocidad relativa entre el campo magnético rotatorio establecido por las corrientes del estator y el campo del rotor. Las corrientes del rotor y el campo magnético que se forma reaccionan con el campo magnético giratorio del estator produciendo un par que mueve el rotor en la dirección de la rotación del campo del estator. Para desarrollar un par positivo, la velocidad del rotor ω_r debe ser menor que la velocidad síncrona. El rotor entonces, se mueve a una velocidad $\omega_s - \omega_r$, hacia atrás, respecto al campo rotatorio establecido por el estator. A esta diferencia

de velocidades, también se le conoce como “deslizamiento” y suele ser expresado en por unidad con respecto a la velocidad síncrona.

$$s = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \quad (4.2)$$

o también

$$\omega_r = \omega_s (1 - s) \quad (4.3)$$

La frecuencia de los voltajes inducidos en los conductores del rotor puede expresarse en función del deslizamiento como:

$$f_r = s f_s \quad (4.4)$$

Con el rotor en reposo, el deslizamiento es igual a uno, las frecuencias en el estator y en los circuitos del rotor son iguales, por lo que el campo producido en el rotor gira a la misma velocidad que el campo magnético giratorio originándose un par de arranque que hace girar al rotor en la dirección que gira el campo del estator. Sin carga, la máquina opera con un deslizamiento muy pequeño, pero al aplicar a la flecha carga mecánica, el deslizamiento se incrementa induciéndose voltajes en el rotor que provocan corrientes, las cuales producen el par requerido por mover la carga mecánica. De esta manera la dinámica de los circuitos del rotor se puede expresar en términos del deslizamiento.

4.3 Formulación del modelo matemático para el motor de inducción

Al igual que en la máquina síncrona, para determinar un modelo que describa el comportamiento de la máquina de inducción, se puede partir de una representación mediante

circuitos acoplados magnéticamente. La Figura 4.2 muestra circuitos equivalentes que representan los devanados de las tres fases; para el estator y para el rotor.

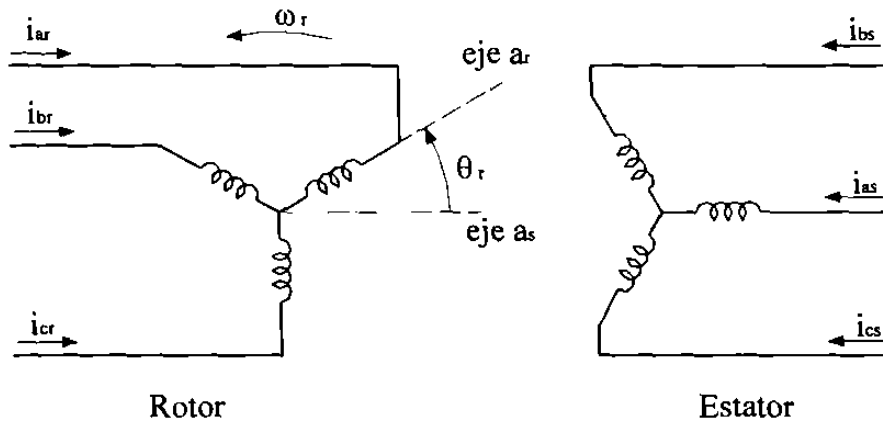


Fig. 4.2 Representación de una máquina de inducción mediante circuitos.

El ángulo θ_r , está definido como el ángulo entre el devanado de la fase a_r en el rotor, y el devanado de la fase a_s en el estator. El ángulo está en función de la velocidad angular del rotor y puede también ser definido en términos del deslizamiento como:

$$\theta_r = \omega_r t = (1-s)\omega_s t \quad (4.5)$$

Si se desprecia el lazo de histéresis, la saturación y las corrientes de Eddy, para tener un modelo con inductancias lineales y sin considerar pérdidas en el material magnético, las ecuaciones de voltaje son:

Para el estator:

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Para el rotor:

$$\begin{bmatrix} v_{ar} \\ v_{br} \\ v_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{ar} \\ \lambda_{br} \\ \lambda_{cr} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Es necesario determinar los enlaces de flujo de cada devanado [27, 29, 30]. Para esto, deben conocerse las inductancias propias y mutuas de los devanados del estator y del rotor. Los enlaces de flujo del devanado de la fase *a* del estator y del rotor se expresan por medio de (4.8).

$$\begin{aligned} \lambda_{as} &= \ell_{aas} i_{as} + \ell_{abs} i_{bs} + \ell_{acs} i_{cs} + \ell_{asar} i_{ar} + \ell_{asbr} i_{br} + \ell_{ascr} i_{cr} \\ \lambda_{ar} &= \ell_{aar} i_{ar} + \ell_{abr} i_{br} + \ell_{acr} i_{cr} + \ell_{aras} i_{as} + \ell_{arbs} i_{bs} + \ell_{arcs} i_{cs} \end{aligned} \quad (4.8)$$

En forma similar se tienen expresiones para los cuatro devanados restantes.

4.3.1 Inductancias propias del estator

Debido a la estructura del rotor de un motor de inducción, las inductancias propias de los devanados del estator son constantes, independientemente de la posición que tenga el rotor, ya que la permeancia es la misma en cualquier posición del rotor. De igual forma que en la máquina síncrona, se define una inductancia de dispersión y una inductancia propia del devanado de estator, teniendo la forma:

$$\ell_{aas} = L_{ls} + L_{ms} \quad (4.9)$$

4.3.2 Inductancias mutuas del estator

Estas inductancias también son constantes e independientes de la posición del rotor. Para cualquier inductancia de acoplamiento mutuo, entre los devanados del estator, se definen como:

$$\ell_{abs} = -0.5 L_{ms} \quad (4.10)$$

4.3.3 Inductancias mutuas entre estator y rotor

Las inductancias mutuas entre estator y el rotor tendrán un valor que depende de la posición del rotor, ya que entre ambos devanados existe un movimiento relativo. Así, cuando dos devanados, uno del estator y otro del rotor están alineados, el flujo que enlazan es el máximo posible. Al desplazarse el rotor, los enlaces de flujo disminuyen a cero, lo cual sucede cuando los devanados están en una posición ortogonal.

$$\begin{aligned} \ell_{asr} &= L_{sr} \cos \theta_r \\ \ell_{abr} &= L_{sr} \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \ell_{acr} &= L_{sr} \cos \left(\theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.3.4 Inductancias propias y mutuas del rotor

Estas inductancias se expresan de manera similar a las inductancias del estator, pero cambiando la notación:

$$\ell_{aar} = L_{tr} + L_{mr} \quad (4.12)$$

$$\ell_{abr} = -0.5 L_{mr} \quad (4.13)$$

4.3.5 Inductancias mutuas entre rotor y estator

Estas inductancias se definen como expresiones senoidales, cuyo valor depende de la posición θ_r del rotor.

$$\begin{aligned} \ell_{ars} &= L_{sr} \cos \theta_r \\ \ell_{arbs} &= L_{sr} \cos \left(\theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \ell_{arcs} &= L_{sr} \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Es importante observar que todas las variables del rotor están referidas al estator por medio de la relación de vueltas de los devanados.

4.4 Transformación de variables de fase a componentes $qd0$

A fin de simplificar el modelo y el análisis se desarrolla en las siguientes secciones, las ecuaciones con referencia a los ejes $qd0$.

4.4.1 Enlaces de flujo en componentes $qd0$

Se usa la transformación $qd0$ a fin de que las inductancias tomen valores constantes y no tengan una forma que depende de la posición del rotor. Para una máquina de inducción, en la Figura 4.3, se pueden visualizar las relaciones entre las variables en abc y las componentes en qd .

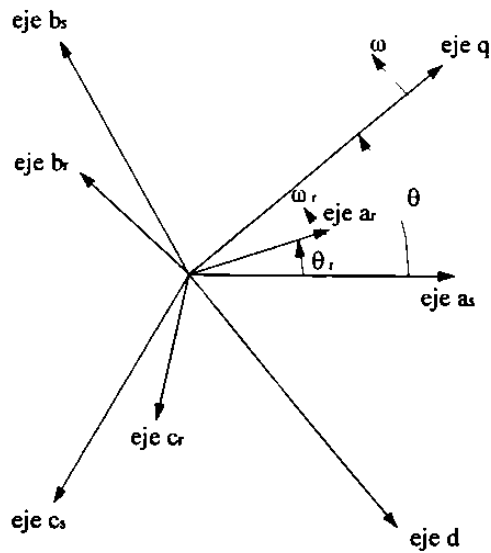


Fig.4.3 Relación entre componentes de fase abc y componentes transformadas qd .

Si se sustituyen los valores de las inductancias en (4.8), se aplica la *Transformada de Park*, Sección 3.4, y se igualan los coeficientes de las expresiones para tener los enlaces de flujo en componentes $qd0$.

$$\begin{aligned}
 \lambda_{qs} &= L_{ts} i_{qs} + L_m (i_{qs} + i_{qr}) \\
 \lambda_{ds} &= L_{ts} i_{ds} + L_m (i_{ds} + i_{dr}) \\
 \lambda_{0s} &= L_{ts} i_{0s}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

y para el rotor

$$\begin{aligned}
 \lambda_{qr} &= L_{tr} i_{qr} + L_m (i_{qs} + i_{qr}) \\
 \lambda_{dr} &= L_{tr} i_{dr} + L_m (i_{ds} + i_{dr}) \\
 \lambda_{0r} &= L_{tr} i_{0r}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

en donde:

$$L_m = \frac{3}{2} L_{ms} \quad (4.17)$$

Con el desarrollo se tienen inductancias de valor constante e independientes de la posición del rotor, lo cual simplifica la solución de las ecuaciones de voltaje.

4.4.2 Ecuaciones de voltaje

Aplicando la *Transformación de Park* en (4.6) y (4.7), se puede obtener expresiones de voltajes en función de variables $qd\theta$. Como para el estator:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (4.18)$$

De la Figura 4.3 se tiene que para el rotor hay una diferencia angular $\theta - \theta_r$, entre la fase a_r y la referencia qd , teniéndose por tanto una diferencia de velocidad:

$$\omega - \omega_r = \frac{d(\theta - \theta_r)}{dt} \quad (4.19)$$

Los voltajes del estator en componentes $qd\theta$ se expresan como

$$\begin{aligned} v_{qs} &= r_s i_{qs} + \omega \lambda_{ds} + \frac{d\lambda_{qs}}{dt} \\ v_{ds} &= r_s i_{ds} - \omega \lambda_{qs} + \frac{d\lambda_{ds}}{dt} \\ v_{0s} &= r_s i_{0s} + \frac{d\lambda_{0s}}{dt} \end{aligned} \quad (4.20)$$

y para el rotor:

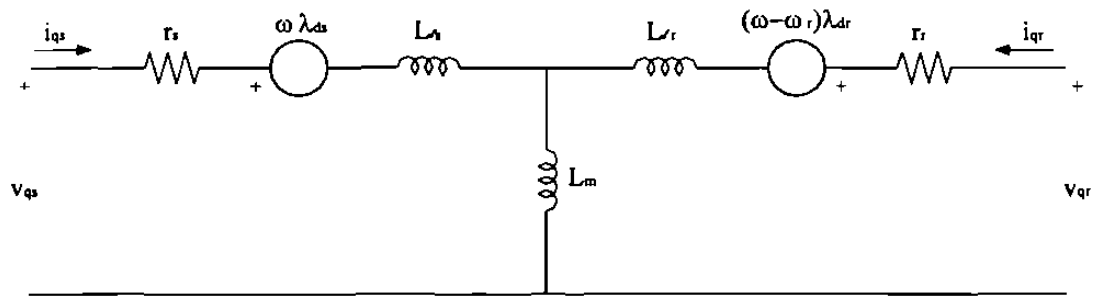
$$v_{qr} = r_r i_{qr} + (\omega - \omega_r) \lambda_{dr} + \frac{d \lambda_{qr}}{dt}$$

$$v_{dr} = r_r i_{dr} - (\omega - \omega_r) \lambda_{qr} + \frac{d \lambda_{dr}}{dt} \quad (4.21)$$

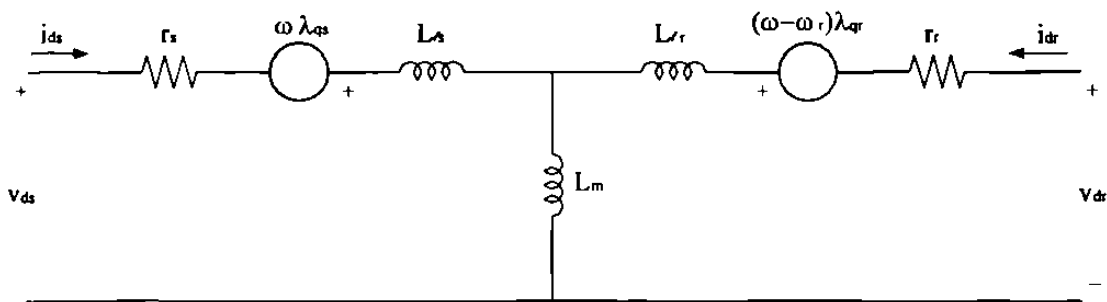
$$v_{0r} = r_r i_{0r} + \frac{d \lambda_{0r}}{dt}$$

4.4.3 Circuitos equivalentes $qd\theta$

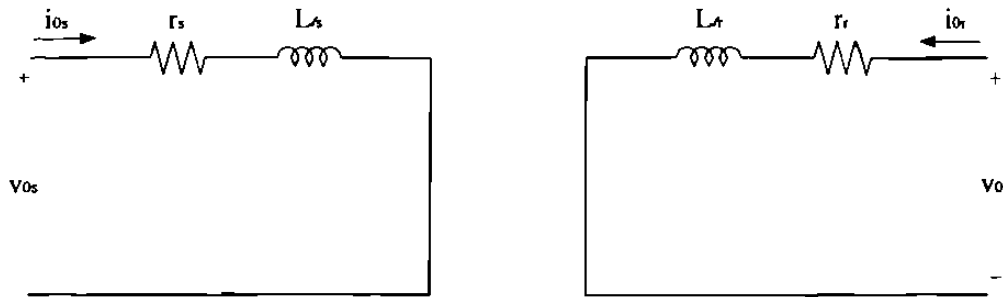
De las ecuaciones (4.20) y (4.21), se puede visualizar circuitos equivalentes para la máquina de inducción, los cuales describen el comportamiento dinámico de la máquina.



(a) Circuito equivalente en el eje q .



(b) Circuito equivalente en el eje d .

(c) Circuito equivalente en el eje θ .Fig. 4.4 Circuitos equivalentes en componentes $qd0$.

4.5 Expresión del par electromagnético

La potencia de entrada al estator está definida por (4.22), y empleando la *Transformada de Park*, se puede expresar la potencia en componentes $qd0$, como en (4.23).

$$P_s = v_{as} i_{as} + v_{bs} i_{bs} + v_{cs} i_{cs} \quad (4.22)$$

$$P_s = \frac{3}{2} (v_{qs} i_{qs} + v_{ds} i_{ds} + 2 v_{0s} i_{0s}) \quad (4.23)$$

Sustituyendo en (4.23) los voltajes en componentes $qd0$ y considerando únicamente la potencia electromagnética, es decir, despreciando pérdidas en el cobre y de otra naturaleza, así como la razón de cambio de energía magnética entre devanados, se llega a (4.24). Si se divide la potencia entre la velocidad mecánica del rotor, se tiene una expresión para el par electromagnético, dada por (4.25).

$$P_{em} = \frac{3}{2} \omega_r (\lambda_{ds} i_{qs} - \lambda_{qs} i_{ds}) \quad (4.24)$$

$$T_{em} = \frac{3}{2} \frac{P}{2} (\lambda_{ds} i_{qs} - \lambda_{qs} i_{ds}) \quad (4.25)$$

El par electromagnético también puede ser asociado con variables del rotor de la máquina. Para determinar el par en términos de cantidades del rotor, se lleva a cabo un procedimiento similar al que se empleó para el caso del estator, pero considerando que la velocidad del rotor con respecto a los ejes qd es negativa, entonces se llega a la expresión (4.26) para el par electromagnético.

$$T_{em} = \frac{3}{2} \frac{P}{2} (\lambda_{qr} i_{dr} - \lambda_{dr} i_{qr}) \quad (4.26)$$

4.6 La ecuación de oscilación

Al existir en la flecha de un motor de inducción, una diferencia entre el par electromagnético y el par mecánico que representa la carga, se tiene una dinámica en el rotor, la cual puede ser expresada por medio de una ecuación de oscilación.

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_{em} - T_{mec} \quad (4.27)$$

donde J es el momento de inercia del rotor y de la carga conectada, expresado en $\text{Kg}\cdot\text{m}^2$, mientras que ω_m es la velocidad angular del rotor.

4.7 Ecuaciones normalizadas

Es conveniente expresar las variables de la máquina de inducción en valores por unidad, ya que de esta manera es más sencillo manejar las variables y no las cantidades físicas en forma directa. Para normalizar variables se elige una velocidad como base, y se

expresa los enlaces de flujo en por unidad. De esta forma las inductancias se pueden trabajar como reactancias.

$$\psi = \lambda \omega_B \quad (4.28)$$

$$X = \omega_B L \quad (4.29)$$

De los voltajes y corrientes de fase o componentes abc , se eligen como cantidades base el voltaje y la corriente pico.

$$V_B = \sqrt{2} V_{(abc)} \quad (4.30)$$

$$I_B = \sqrt{2} I_{(abc)}$$

a partir de estas cantidades base se obtiene:

$$S_B = \frac{3}{2} V_B I_B \quad (4.31)$$

$$Z_B = \frac{V_B}{I_B} \quad (4.32)$$

La expresión para el par base se encuentra al dividir la potencia base entre una velocidad mecánica base definida como:

$$\omega_{Bm} = \frac{2}{p} \omega_B \quad (4.33)$$

entonces:

$$T_B = \frac{S_B}{\omega_{Bm}} \quad (4.34)$$

4.7.1 Ecuaciones normalizadas para simulación

Al sustituir las cantidades base en las ecuaciones de voltajes en componentes $qd0$ (4.20) y (4.21), si se despeja a las variables de estado, que en este caso se seleccionan como los enlaces de flujo, se tiene para el estator:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{qs}}{dt} &= \omega_B \left[v_{qs} - \frac{\omega}{\omega_B} \psi_{ds} - r_s i_{qs} \right] \\ \frac{d\psi_{ds}}{dt} &= \omega_B \left[v_{ds} + \frac{\omega}{\omega_B} \psi_{qs} - r_s i_{ds} \right] \\ \frac{d\psi_{0s}}{dt} &= \omega_B \left[v_{0s} - r_s i_{0s} \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

y para el rotor:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{qr}}{dt} &= \omega_B \left[v_{qr} - \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_B} \right) \psi_{dr} - r_r i_{qr} \right] \\ \frac{d\psi_{dr}}{dt} &= \omega_B \left[v_{dr} + \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_B} \right) \psi_{qr} - r_r i_{dr} \right] \\ \frac{d\psi_{0r}}{dt} &= \omega_B \left[v_{0r} - r_r i_{0r} \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

las corrientes se expresan como:

$$\begin{aligned} i_{qs} &= \frac{\psi_{qs} - \psi_{mq}}{X_{ts}} \\ i_{ds} &= \frac{\psi_{ds} - \psi_{md}}{X_{ts}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$i_{0s} = \frac{\psi_{0s}}{X_{ts}}$$

$$i_{qr} = \frac{\psi_{qr} - \psi_{mq}}{X_{tr}}$$

$$i_{dr} = \frac{\psi_{dr} - \psi_{md}}{X_{tr}} \quad (4.38)$$

$$i_{0r} = \frac{\psi_{0r}}{X_{tr}}$$

De (4.15) y (4.16) se puede obtener los enlaces de flujo normalizados. Para el estator están dados por (4.39) y para el rotor por (4.40).

$$\begin{aligned} \psi_{qs} &= X_{ts} i_{qs} + X_m (i_{qs} + i_{qr}) \\ \psi_{ds} &= X_{ts} i_{ds} + X_m (i_{ds} + i_{dr}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\psi_{0s} = X_{ts} i_{0s}$$

$$\begin{aligned} \psi_{qr} &= X_{tr} i_{qr} + X_m (i_{qs} + i_{qr}) \\ \psi_{dr} &= X_{tr} i_{dr} + X_m (i_{ds} + i_{dr}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\psi_{0r} = X_{tr} i_{0r}$$

Los flujos mutuos se expresan como:

$$\psi_{mq} = \frac{X_m}{X_m X_{ts} + X_m X_{tr} + X_{ts} X_{tr}} (\psi_{qs} X_{tr} + \psi_{qr} X_{ts}) \quad (4.41)$$

$$\psi_{md} = \frac{X_m}{X_m X_{ts} + X_m X_{tr} + X_{ts} X_{tr}} (\psi_{ds} X_{tr} + \psi_{dr} X_{ts})$$

La ecuación para describir el movimiento mecánico es:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{\omega_B}{2H} (T_{em} - T_{mec}) \quad (4.42)$$

En esta expresión el par mecánico se aplica externamente y tiene la dirección de la velocidad del rotor. El par electromagnético se define como:

$$T_{em} = \psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds} \quad (4.43)$$

4.8 Marco de referencia estacionario

Las ecuaciones presentadas en las secciones anteriores pueden ser simplificadas si se utiliza un marco de referencia estacionario [27]. La ventaja que se tiene es que el eje q puede estar en fase con el eje a del estator, por lo que no habrá diferencia angular entre ellos, es decir, no hay velocidad relativa; por lo que se considera que se mantienen estacionarios. Si no hay velocidad entre ellos, $\omega = 0$ se tiene la siguiente relación dada en la gráfica de la Figura 4.5.

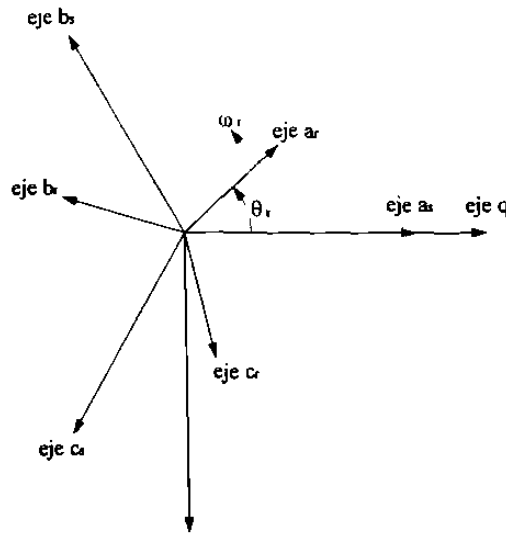


Fig. 4.5 Ejes abc y qd en un marco estacionario.

Las ecuaciones que toman una forma más simple son las ecuaciones de voltaje. Haciendo la consideración de que la velocidad ω es cero, se tiene de (4.35) y (4.36):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{qs}}{dt} &= \omega_B [v_{qs} - r_s i_{qs}] \\ \frac{d\psi_{ds}}{dt} &= \omega_B [v_{ds} - r_s i_{ds}] \end{aligned} \quad (4.44)$$

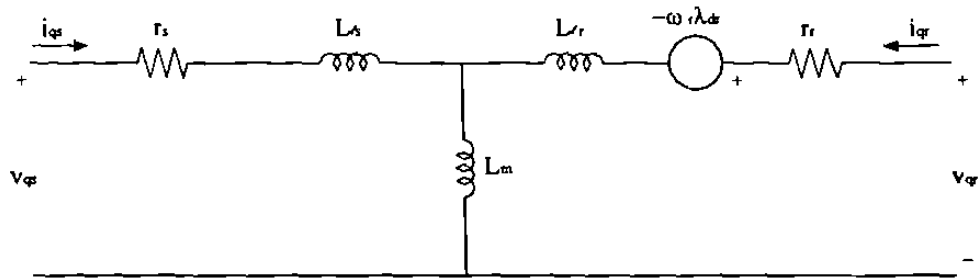
$$\frac{d\psi_{0s}}{dt} = \omega_B [v_{0s} - r_s i_{0s}]$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{qr}}{dt} &= \omega_B \left[v_{qr} + \frac{\omega_r}{\omega_B} \psi_{dr} - r_r i_{qr} \right] \\ \frac{d\psi_{dr}}{dt} &= \omega_B \left[v_{dr} - \frac{\omega_r}{\omega_B} \psi_{qr} - r_s i_{dr} \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

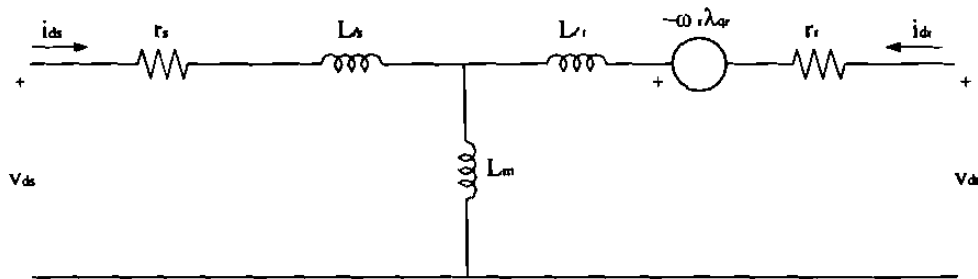
$$\frac{d\psi_{0r}}{dt} = \omega_B [v_{0r} - r_r i_{0r}]$$

El resto de las ecuaciones, como la ecuación del par electromagnético y las ecuaciones para calcular las corrientes, permanecen sin cambio alguno.

Los circuitos equivalentes toman la forma mostrada en la Figura 4.6.



(a) Circuito equivalente en el eje en cuadratura.



(b) Circuito equivalente en el eje directo.

Fig. 4.6 Circuitos equivalentes en componentes qd .

4.9 El motor de inducción en estado estable

Para una condición de operación balanceada de estado estable, los voltajes y las corrientes se expresan como:

$$v_{\alpha} = V_{m_s} \cos(\omega_s t)$$

$$v_{\beta s} = V_{m_s} \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.46)$$

$$v_{\gamma s} = V_{m_s} \cos\left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
 i_a &= I_{ms} \cos(\omega_s t - \phi) \\
 i_b &= I_{ms} \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3} - \phi\right) \\
 i_c &= I_{ms} \cos\left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3} - \phi\right)
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Con los voltajes y las corrientes en términos de las componentes $qd0$ y considerando que el eje q está en fase con el eje a .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_s &= v_{ds} + j v_{qs} = V_{ms} \cos(\omega_s t) + j V_{ms} \text{sen}(\omega_s t) \\
 \mathbf{i}_s &= i_{ds} + j i_{qs} = I_{ms} \cos(\omega_s t - \phi) + j I_{ms} \text{sen}(\omega_s t - \phi)
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

De forma similar para el rotor:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_r &= v_{dr} + j v_{qr} = V_{mr} \cos(\omega_r t - \delta) + j V_{mr} \text{sen}(\omega_r t - \delta) \\
 \mathbf{i}_r &= i_{dr} + j i_{qr} = I_{mr} \cos(\omega_r t - \phi - \delta) + j I_{mr} \text{sen}(\omega_r t - \phi - \delta)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Se puede expresar, tanto los voltajes como las corrientes, en valores rms lo cual se hace por medio de las ecuaciones (4.48) y (4.49).

$$\mathbf{V}_s = V_{ds} + j V_{qs} = \frac{v_{ds} + j v_{qs}}{\sqrt{2}} \tag{4.50}$$

Sustituyendo los valores en las ecuaciones de voltajes y de los enlaces de flujo, además de simplificar las expresiones, se llega a:

$$\mathbf{V}_s = (r_s + j X_{ls}) \mathbf{I}_s + j X_m (\mathbf{I}_s + \mathbf{I}_r) \tag{4.51}$$

Si además se supone un motor con los devanados del rotor cortocircuitados, el voltaje será:

$$V_r = (r_r / s + jX_{lr}) I_r + jX_m (I_s + I_r) \quad (4.52)$$

Con las ecuaciones anteriores se puede obtener una representación para el estado estable de una máquina de inducción.

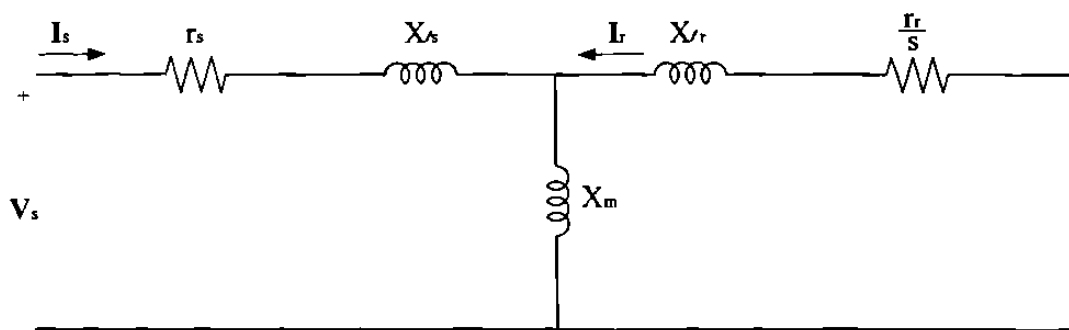


Fig. 4.7 Circuito equivalente de una máquina de inducción.

La potencia que se transfiere al rotor a través del entrehierro, se expresa en función de la corriente del rotor, así como de la resistencia del mismo.

$$P_{ch} = \frac{r_r}{s} I_r^2 \quad (4.53)$$

mientras que las pérdidas en el cobre son:

$$P_{pérd} = r_r I_r^2 \quad (4.54)$$

Con las dos ecuaciones anteriores se puede calcular la potencia mecánica que se transfiere a la flecha de la máquina; la diferencia entre la potencia que se transfiere al rotor y la potencia de pérdidas, resulta en

$$P_{\beta e} = \left(\frac{1-s}{s} \right) r_r I_r^2 \quad (4.55)$$

Una vez que se tiene una ecuación para determinar la potencia, se puede calcular el par electromecánico de una máquina trifásica.

$$T_{em} = 3 \frac{P_{\beta e}}{\omega_{rm}} \quad (4.56)$$

donde ω_{rm} se puede expresar en función de la velocidad síncrona, por medio del deslizamiento, esto es:

$$\omega_{rm} = \frac{2}{p} \omega_s (1-s) \quad (4.57)$$

El par electromagnético finalmente se expresa como:

$$T_{em} = \frac{3}{2} \frac{P}{\omega_s} \frac{r_r}{s} I_r^2 \quad (4.58)$$

4.10 Equivalente Thévenin para la máquina de inducción

Para determinar con una mayor facilidad la corriente del rotor, se puede obtener un equivalente Thévenin [28] del circuito de la Figura 4.7. Las ecuaciones (4.59) y (4.60) describen el comportamiento eléctrico del circuito de la Figura 4.8.

$$V_{th} = \frac{j X_m}{r_s + j (X_{ts} + X_m)} V_s \quad (4.59)$$

$$Z_{th} = r_{th} + j X_{th} = \frac{j X_m (r_s + j X_{ts})}{r_s + j (X_{ts} + X_m)} \quad (4.60)$$

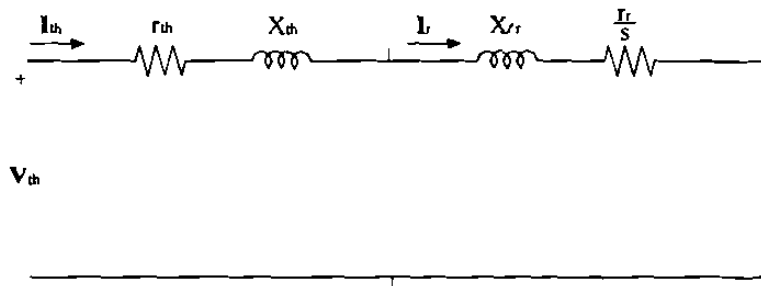


Fig. 4.8 Circuito equivalente Thévenin.

Del circuito equivalente de Thévenin se puede determinar la corriente del rotor:

$$I_r = \frac{V_{th}}{(r_{th} + r_r/s) + j (X_{th} + X_{tr})} \quad (4.61)$$

Al evaluar el valor absoluto de la corriente y sustituirlo en la ecuación del par electromagnético (4.58), se tiene:

$$T_{em} = \frac{3 P}{2 \omega_s} \frac{r_r}{s} \frac{V_{th}^2}{(r_{th} + r_r/s)^2 + (X_{th} + X_{tr})^2} \quad (4.62)$$

Con las expresiones desarrolladas se puede determinar la característica típica del par electromagnético contra el deslizamiento, Figura 4.9. En la Figura se observan las regiones en la que la máquina opera como motor o como generador. Para un deslizamiento cero, se tiene la velocidad síncrona, mientras que para un deslizamiento igual a uno, la velocidad del rotor es cero, como se observa en (4.3).

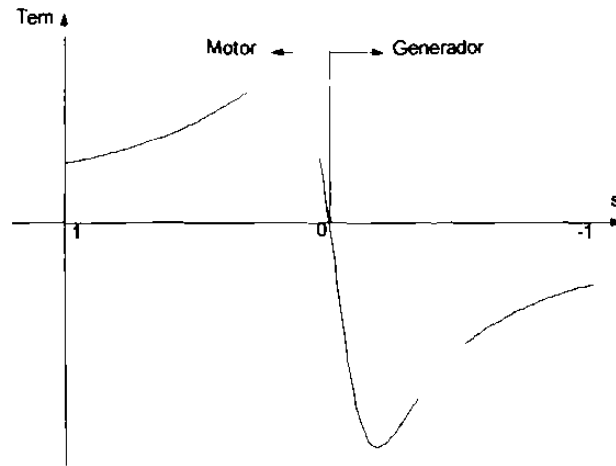


Fig. 4.9 Característica Par - Deslizamiento.

4.11 Resumen

En el presente capítulo se desarrolló un modelo para la máquina de inducción, considerando tres devanados en el estator y tres devanados en el rotor. Se plantearon las ecuaciones, en términos de variables de estado, para el análisis transitorio durante la energización y el arranque. Se empleó, al igual que para el modelo del motor síncrono, la *Transformación de Park*, la cual simplifica la solución de las ecuaciones diferenciales. Se planteó el análisis en dos marcos de referencia, los cuales pueden ser utilizados, donde la diferencia radica en el desfaseamiento que existe entre la fase a del devanado del estator y el eje ficticio q , así como en la velocidad relativa entre los devanados, ya que puede o no existir una separación angular; dependiendo del marco de referencia que se elija.

Con el circuito equivalente en estado estable, para la máquina de inducción, se puede obtener la curva de par electromagnético contra deslizamiento, la cual es de gran utilidad para determinar la condición de par máximo, en función de la variación de la resistencia del rotor.

CAPITULO 5

SIMULACIONES DIGITALES PARA FENOMENOS DE ENERGIZACION DE ELEMENTOS DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

5.1 Introducción

La importancia de contar con modelos para los diferentes dispositivos que se tienen en los sistemas eléctricos de potencia, es debido a que en condición de energización o maniobra se presentan transitorios que se caracterizan por la circulación de altas corrientes, las cuales pueden causar daño o un mal funcionamiento de equipo. En este capítulo se presentan resultados de simulaciones digitales llevadas a cabo con base en los modelos presentados en capítulos anteriores. Se estudian diferentes casos de energización de los elementos típicos del sistema de potencia, como son los reactores y transformadores con núcleo saturable.

La máquina síncrona, presentada en el Capítulo 3, se desarrolló como un caso de ejemplo interesante, pero considerando únicamente los devanados del estator y el devanado de campo. En las simulaciones presentadas en este capítulo se consideran en forma adicional dos devanados amortiguadores, con el fin de incluir sus efectos sobre la dinámica de los elementos electromecánicos.

5.2 Energización de transformadores

Al energizar reactores o transformadores, los cuales son elementos que contienen un núcleo ferromagnético con características no lineales, puede presentarse una corriente

denominada “de avalancha”, que tiene características distintivas que la distinguen de otras corrientes, como puede ser una corriente de falla, o la corriente nominal de carga.

La corriente de energización o “corriente de avalancha” en un reactor o en un transformador es de una magnitud considerablemente mayor a la corriente nominal, llegando a ser de seis a ocho veces mayor [26]. Las corrientes de avalancha pueden ocasionar efectos indeseables en los sistemas eléctricos, tales como: operaciones erróneas de los dispositivos de protección, posible daño térmico y mecánico a los devanados debido a las magnitudes excesivas de las corrientes. Otros efectos indeseables dan por resultado una reducción de la vida útil del transformador y un deterioro en la calidad de la energía del sistema; provocando reducciones momentáneas de tensión que pueden ser intolerables para equipos sensibles.

Una característica de las corrientes de avalancha es que también presentan un amplio contenido armónico, en donde destacan la componente de corriente directa y la segunda armónica, misma que es característica de este fenómeno. La corriente de avalancha se presenta cuando se energiza el núcleo saturable de un transformador o de un reactor y se debe a la presencia de una gran componente de corriente directa, la cual se manifiesta en el espectro armónico de esta corriente. Para el decaimiento de la componente de directa, hasta llegar al estado estable, pueden pasar varios segundos, debido a un pobre amortiguamiento.

Si se observa la corriente que circula en el devanado primario de un transformador en vacío y la que circula en una condición de estado estable, se tendrán dos componentes de corriente: Una corriente es debida a la histéresis y otra que se conoce como corriente de magnetización. La corriente de magnetización es necesaria para generar un flujo en el núcleo del transformador, dicha corriente se puede determinar a partir del flujo en el núcleo y la característica de saturación, como se muestra en forma esquemática en la Figura 5.1. En la Figura 5.1 se considera que el transformador se alimenta de una fuente tipo coseno.

De la Figura 5.1 se puede obtener las siguientes relaciones:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t) \quad \phi(0) = 0 \quad (5.1)$$

$$\phi = \frac{1}{N} \int_0^t V_m \cos(\omega \tau) d\tau = \frac{V_m}{\omega N} \text{sen}(\omega t) \quad (5.2)$$

$$\phi_{\max} = \frac{V_m}{\omega N} \quad (5.3)$$

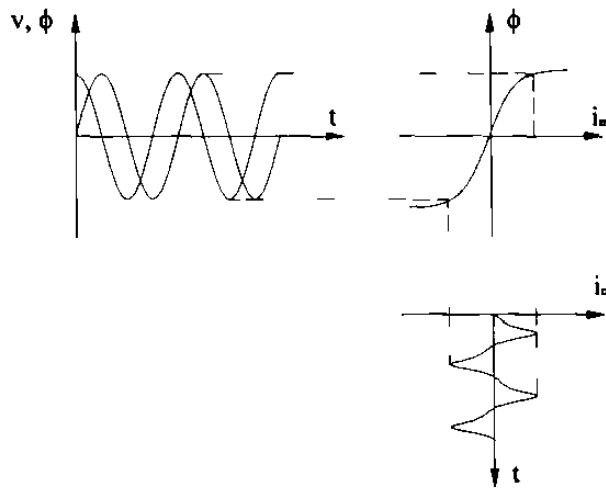


Fig. 5.1 Corriente de magnetización, requerida para establecer un flujo magnético en el transformador.

Sin embargo, si la fuente se considera senoidal se puede obtener una expresión para el flujo magnético en el núcleo, dado por (5.4). Se puede determinar el flujo máximo durante el primer medio ciclo, lo cual resulta en (5.5).

$$\phi = \frac{1}{N} \int V_m \sin(\omega t) dt + k = -\frac{V_m}{\omega N} \cos(\omega t) + k \quad k = \frac{V_m}{\omega N} \quad (5.4)$$

$$\phi(\pi) = \frac{2V_m}{\omega N} \quad (5.5)$$

En la Figura 5.2 se observa que si la magnitud del flujo en el núcleo es de dos veces su valor nominal, esta condición requiere de una corriente de magnetización con un valor considerablemente mayor.

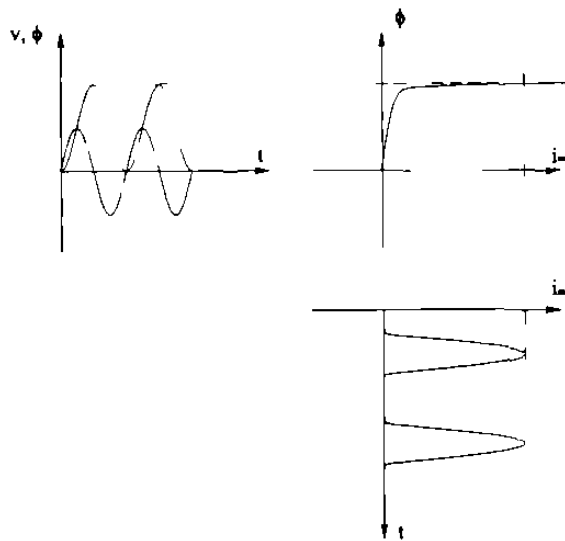


Fig.5.2 Corriente de magnetización, en donde se presenta corriente de avalancha.

Se puede concluir que la magnitud de la corriente de avalancha que se presenta al energizar el elemento no lineal, depende del ángulo de fase de la fuente que alimenta al transformador, es decir, depende del instante de cierre del interruptor. El caso más severo se presenta cuando el interruptor cierra en el instante en que la onda de tensión tiene su cruce por cero y para otros instantes, la magnitud de la corriente de avalancha es menor; hasta tener un valor mínimo, lo cual ocurre cuando el ángulo de energización es de 90° . Otro factor que influye en la corriente de avalancha, es la magnitud del voltaje de la fuente de energización del circuito, y se observa que al incrementarse el flujo magnético requerido en el núcleo, la corriente presenta un pico ya que se opera en la zona de saturación.

5.2.1 Corriente de avalancha en un transformador monofásico

En las simulaciones digitales se emplearon datos de un transformador monofásico, cuyos datos se listan en el Apéndice A, expresados mediante la curva de saturación. Se llevó

a cabo un estudio de la energización en vacío del transformador. Partiendo de los datos de la curva característica de saturación se tomaron tres puntos, como se presentó en la Sección 2.3, para formar un sistema no lineal de ecuaciones.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha \tanh(\beta i_{m1}) + \gamma i_{m1} \\ \lambda_2 &= \alpha \tanh(\beta i_{m2}) + \gamma i_{m2} \\ \lambda_3 &= \alpha \tanh(\beta i_{m3}) + \gamma i_{m3}\end{aligned}\tag{5.6}$$

Para la solución de las ecuaciones no lineales se usó el método iterativo de Newton-Raphson, que al igual que otros métodos iterativos, consiste en encontrar la solución \mathbf{x} que satisfaga la relación (5.7). La experiencia es que el método de Newton-Raphson, por tener una característica de convergencia cuadrática, hace recomendable este procedimiento.

$$F(\mathbf{x}) = 0\tag{5.7}$$

Si se considera que $\mathbf{x}_s = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ es la solución, con (5.7) en Serie de Taylor se tiene:

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + J \Delta\mathbf{x} + t.a.o.\tag{5.8}$$

t.a.o. significa términos de orden superior, los cuales se consideran de valor pequeño y por tanto se desprecian en este procedimiento. En el vector solución, se cumple que la función evaluada en dicho punto es cero y por tanto (5.8) se escribe como (5.9), la cual se resuelve para \mathbf{x}_s .

$$0 = F(\mathbf{x}) + J \Delta\mathbf{x}\tag{5.9}$$

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x} - J^{-1}F(\mathbf{x})\tag{5.10}$$

La ecuación (5.10) se resuelve iterativamente para \mathbf{x}_s , observando que J es una matriz cuadrada del mismo orden que \mathbf{x} y contiene derivadas parciales de la forma: $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$. Para el caso que se considera la matriz J tiene la forma dada por (5.11), donde el vector F de funciones tiene la forma expresada por (5.12).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$F = \begin{bmatrix} \alpha \tanh(\beta i_{m1}) + \gamma i_{m1} - \lambda_1 \\ \alpha \tanh(\beta i_{m2}) + \gamma i_{m2} - \lambda_2 \\ \alpha \tanh(\beta i_{m3}) + \gamma i_{m3} - \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Después de llevar a cabo el proceso iterativo, se obtiene los coeficientes que proporcionan una aproximación a la curva de saturación, ver Figura 5.3. Finalmente, la expresión para los enlaces de flujo y la corriente de magnetización, se tiene como (5.14).

$$\alpha = 517.912$$

$$\beta = 3.104 \quad (5.13)$$

$$\gamma = 2.508$$

$$\lambda = 517.912 \tanh(3.104 i_m) + 2.508 i_m \quad (5.14)$$

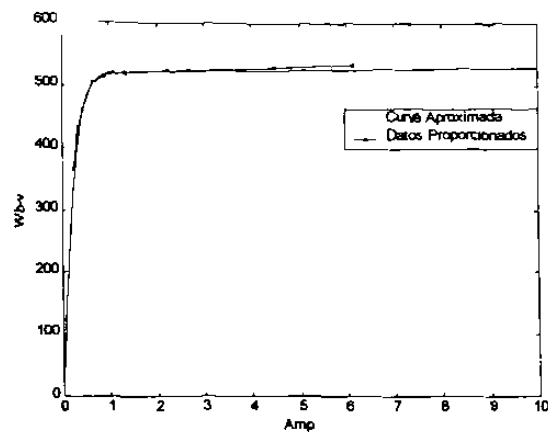


Fig. 5.3 Característica de saturación y ajuste a una función tangente hiperbólica.

El caso de energización más severo para un elemento con saturación de su núcleo, es donde se presenta la corriente de avalancha. Los resultados se muestran en la Figura 5.4.

En la Figura 5.4 se tiene que la componente de corriente directa y la segunda armónica tienen valores considerables, llegando a valores de más de un 50 % del valor de la componente fundamental, esto explica la distorsión en la forma de onda de la señal. Las componentes armónicas son normalizadas en base al valor de la amplitud máxima de la componente fundamental de la señal. El valor de estado estable se alcanza después de transcurrir varios segundos de simulación, ya que se tiene un pobre amortiguamiento [26].

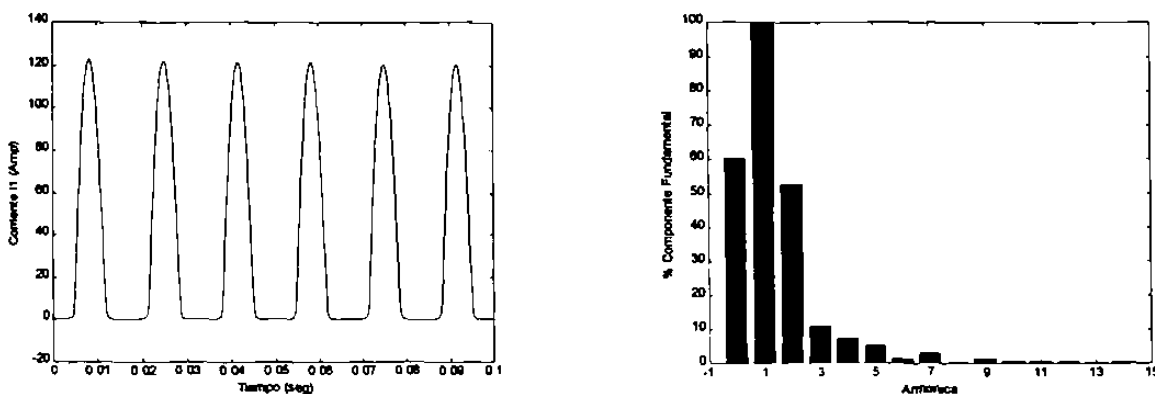


Fig. 5.4 Corriente de excitación i_1 y componentes armónicas del primer ciclo.

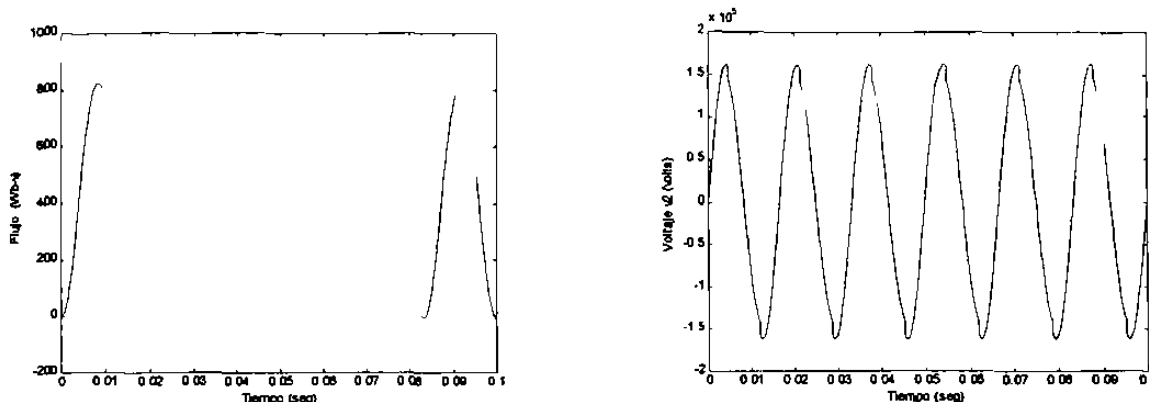


Fig. 5.5 Enlaces de flujo y voltaje en el secundario del transformador en vacío.

En la Figura 5.6 se muestra el espectro armónico de la corriente de energización para tres ciclos diferentes de la onda resultante. Las principales diferencias se observan en la componente de corriente directa, en la componente fundamental y en la segunda armónica. A medida que la simulación avanza en el tiempo, la componente de corriente directa decrece, pero debido a su magnitud y al pobre amortiguamiento pueden pasar varios segundos para que llegue a tener un valor cercano a cero. La segunda armónica, que caracteriza al fenómeno de avalancha, también va disminuyendo, y la diferencia en la gráfica no es apreciable debido a que aún después de transcurridos 60 ciclos, la onda tiene una forma similar a la que se presenta en los primeros ciclos.

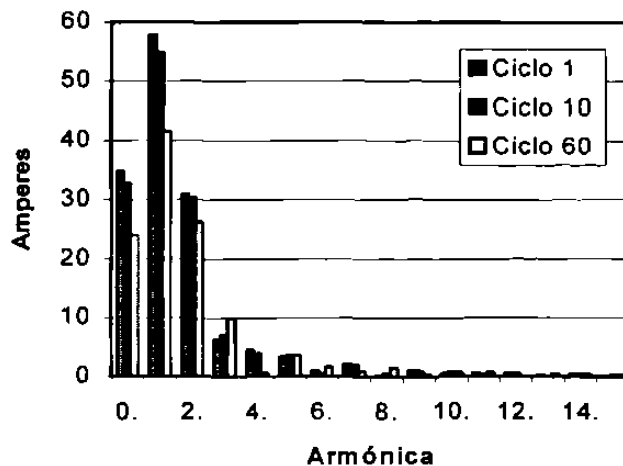


Fig. 5.6 Componentes armónicas en diferentes ciclos de la corriente de avalancha.

5.2.1.1 Dependencia de la corriente de avalancha respecto del ángulo de energización

La magnitud de la corriente de avalancha al energizar reactores o transformadores con características saturables, depende en gran parte del ángulo de energización. Por lo anterior se puede decir que depende del instante en que se cierra el interruptor al cual está conectado el transformador. A continuación se presentan tres casos con diferente ángulo de energización.

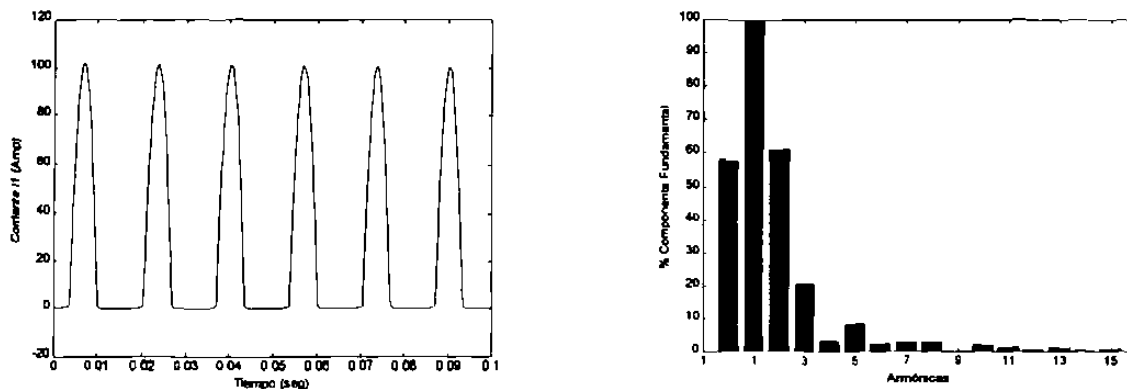


Fig. 5.7 Corriente de avalancha y espectro armónico del primer ciclo, ángulo de energización de 30° .

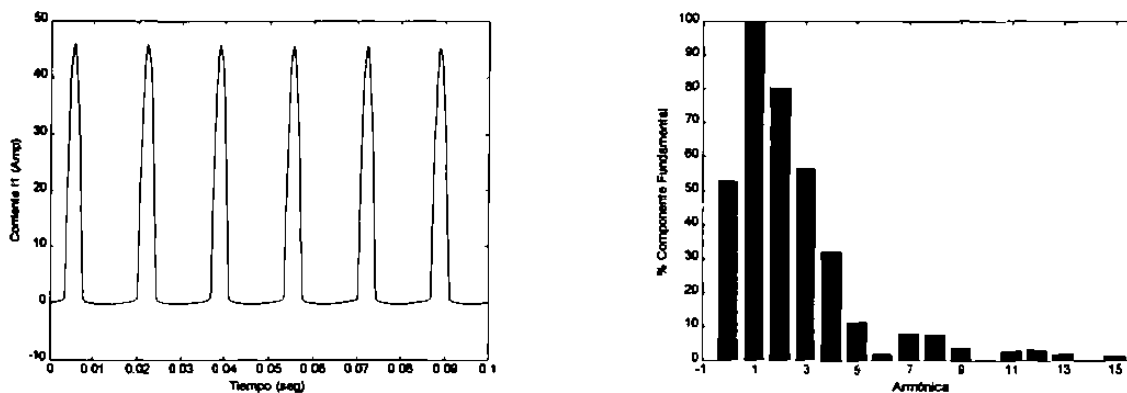


Fig. 5.8 Corriente de avalancha y espectro armónico para el primer ciclo, ángulo de energización de 60° .

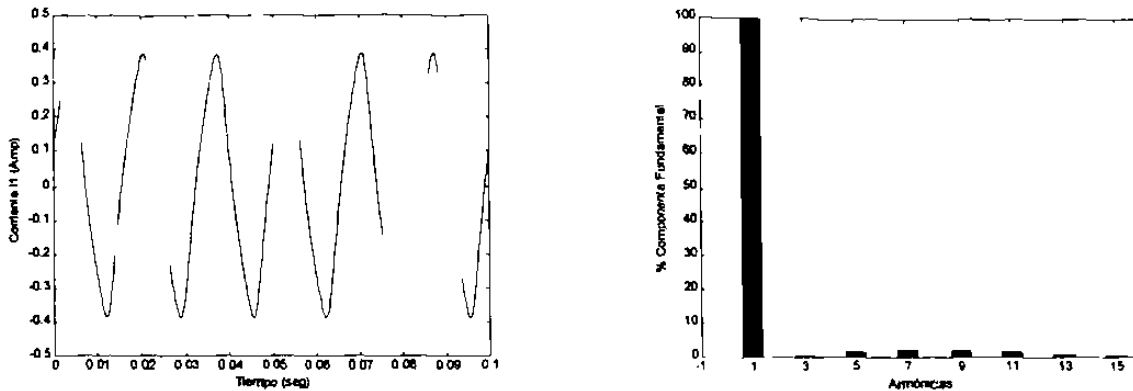


Fig. 5.9 Corriente de avalancha y espectro armónico para el primer ciclo, ángulo de energización de 90° .

Se observa que la magnitud de la corriente va disminuyendo al incrementarse el ángulo de cierre del interruptor. En la Tabla 5.1 se muestra el comportamiento de la magnitud de la corriente de avalancha, durante el primer ciclo, al variar el ángulo de energización.

Tabla 5.1 Magnitudes máximas en el primer ciclo de la corriente de avalancha para diferentes ángulos de energización.

Ángulo (Grados)	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Magnitud (Amp)	122.59	117.41	102.10	77.77	45.92	9.01	0.39

Es interesante notar en las Figuras 5.7 a 5.9 que la componente de corriente directa en el espectro armónico, de la señal de corriente, va disminuyendo conforme se incrementa el ángulo de energización, hasta llegar a un ángulo igual a 90° , en el cual, la corriente que se obtiene es la corriente de estado estable, la cual no tiene componente de corriente directa y muy poca aportación de otras componentes armónicas por lo que presenta una ligera distorsión con respecto a la onda senoidal de la fuente de alimentación, Figura 5.9. Otro aspecto importante es observar que al incrementar el ángulo de energización,

componentes armónicas como la 2ª, 3ª, 4ª y 5ª se incrementan con respecto a la componente fundamental, además su ángulo de fase varía por lo que la corriente va tomando valores negativos adquiriendo una forma oscilante entre valores positivos y negativos como una forma de onda senoidal, hasta el ángulo de energización de 90° para el cual la forma de onda de la corriente presenta poca participación de dichas componentes.

5.2.2 Pérdidas de energía por histéresis

La corriente requerida para magnetizar el núcleo del transformador durante el estado estable, se obtiene con un valor de voltaje que alcanza la rodilla de la zona de saturación, Figura 5.3. En condiciones de estado estable, la corriente de excitación tiene un valor entre un 0.5 % y 2 % del valor pico de la corriente nominal [26]. La característica no lineal del núcleo hace que la señal de corriente de excitación difiera, respecto de una forma senoidal, aún cuando los enlaces de flujo y el voltaje tengan una forma senoidal. En la Figura 5.10 se puede observar la corriente de magnetización del transformador.

La Figura 5.11 muestra el caso para una saturación mayor y en el espectro de frecuencias para la corriente de excitación, se observa que sobresalen las armónicas impares, sobre todo la tercera y la quinta. Para tener una señal de corriente con un mayor grado de saturación, el transformador debe operarse de forma tal que los enlaces de flujo sean más grandes. La corriente de la Figura 5.10, es la corriente requerida al tener enlaces de flujo en el transformador de un valor de 430 Wb-v máximos, si se incrementa el valor de los enlaces de flujo a 513 Wb-v, se requiere una corriente mayor por lo que el transformador trabaja en una zona de mayor saturación como lo muestra la Figura 5.3.

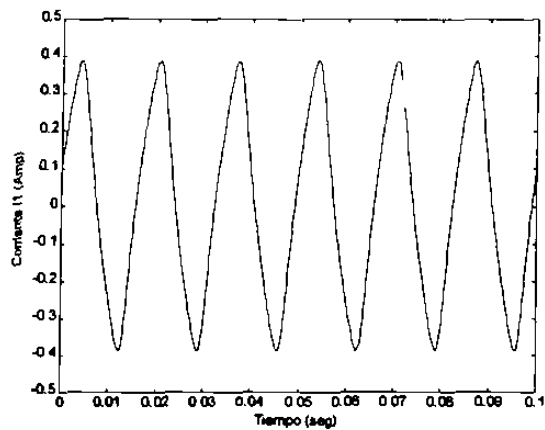


Fig. 5.10 Corriente de excitación i_f .

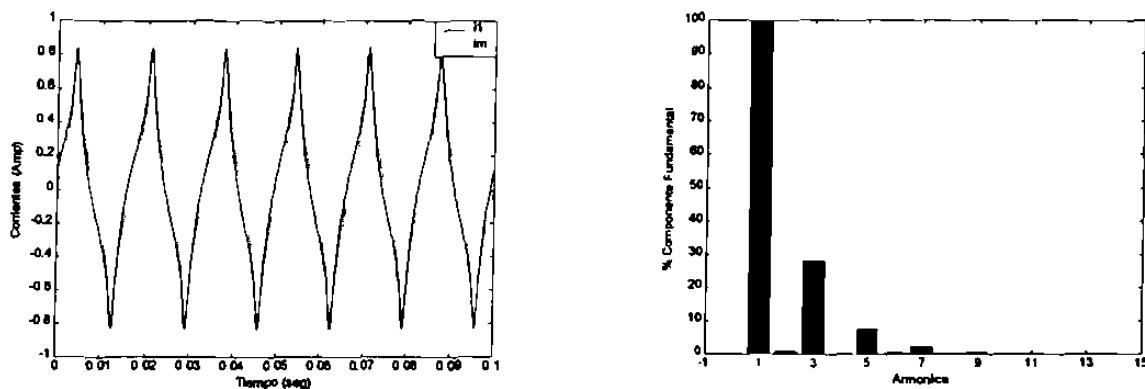


Fig. 5.11 Corriente de excitación i_f con un mayor grado de saturación y su espectro armónico durante el primer ciclo.

El área que encierra el lazo de histéresis, Figura 5.12, se asocia con una energía perdida en cada ciclo durante la operación del dispositivo en estado estable. Esta es una energía que no regresa al dispositivo durante la operación cíclica, determinada por la frecuencia de la fuente de excitación, y se transforma en calor debido al comportamiento del material magnético [30], se puede determinar mediante la expresión (5.8).

$$W = \oint i d\lambda \quad (5.8)$$

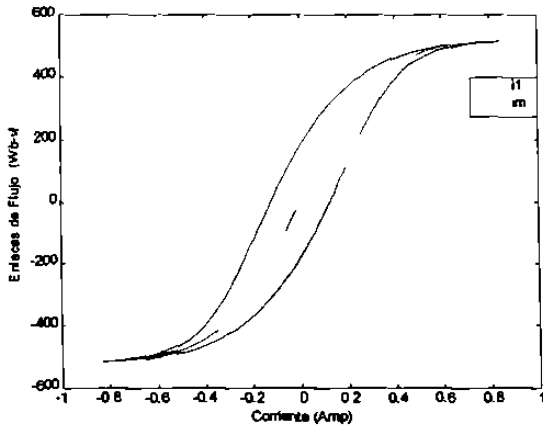


Fig. 5.12 Lazo de histéresis.

5.2.3 Corriente de avalancha en un banco trifásico Δ-Y

Para llevar a cabo la simulación de la energización de un arreglo trifásico se hizo la consideración de tener tres unidades monofásicas formando un banco. Las Figuras 5.13 y 5.14 corresponden a una conexión delta-estrella. Como se mencionó en la Sección 2.6.1, para este tipo de estudios únicamente se requiere la curva de saturación para una de las fases, por lo que se hace uso de los resultados obtenidos a partir de la Figura 5.3 para representar la característica de saturación.

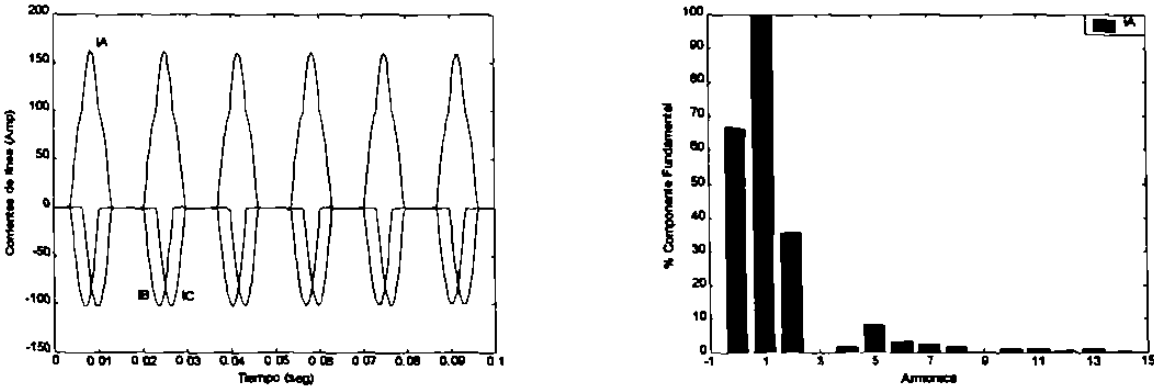


Fig. 5.13 Corrientes de línea en el primario del transformador y espectro armónico del primer ciclo de una de las corrientes de línea.

Se observa en la Figura 5.13, la cual presenta el espectro armónico de la corriente de línea i_A , que sobresalen las componentes de corriente directa y la de segunda armónica, tal como se menciona en el desarrollo de las simulaciones para el transformador monofásico.

De la Figura 5.14 se tiene que los flujos magnéticos en las fases del transformador, llegan a ser superiores al flujo magnético en la zona de saturación de la Figura 5.3, por lo tanto el núcleo se opera con una alta saturación, produciendo corrientes excesivas tal como se observa en la Figura 5.13. Finalmente, se muestra que los voltajes en el secundario del banco de transformación, no son exactamente senoidales, debido a la saturación que se tiene en el núcleo magnético; lo cual afecta la calidad del suministro de energía.

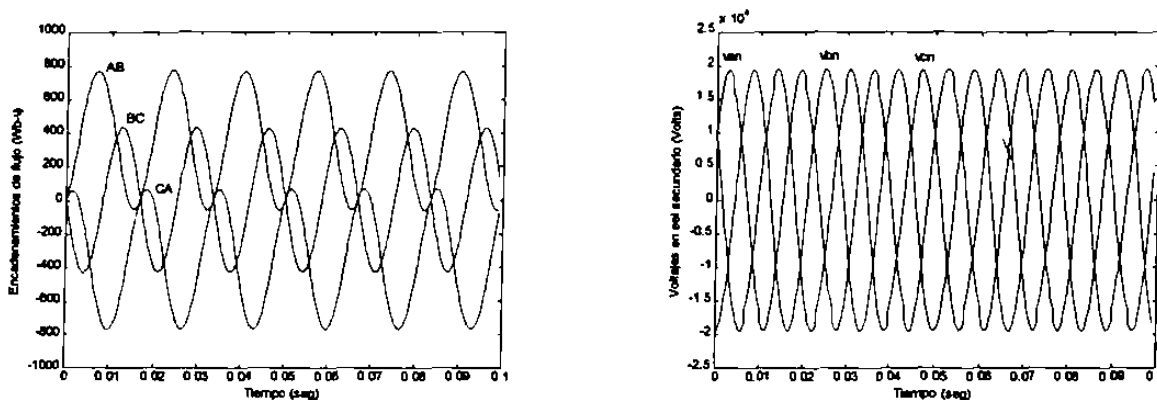


Fig. 5.14 Enlaces de flujo en las fases y voltajes de fase en el secundario del transformador.

5.2.3.1 Energización de un banco de transformadores Δ -Y con carga eléctrica

En las siguientes simulaciones se considera que el banco de transformadores tiene una carga conectada. Se hace el análisis considerando una carga puramente resistiva y a continuación se considera una carga RL (ver Apéndice A); a efecto de analizar el comportamiento de las corrientes en los transformadores, así como la distorsión armónica que presentan.

En la Figura 5.15 se muestran las corrientes de línea en el primario y en el secundario del banco. En este caso se observa la distorsión que tienen las corrientes del lado primario debidas a que el banco opera en una condición saturada, como se observa en la Figura 5.16. Los enlaces de flujo por fase llegan a ser de casi 800 Wb-vuelta, por tanto, los núcleos de los transformadores monofásicos del banco se encuentran operando en una zona de alta saturación. La distorsión de las corrientes en el lado primario se ve reflejada en el secundario, en donde las corrientes y el voltaje suministrado a la carga resistiva muestran una pequeña distorsión; la cual impacta en la calidad de energía que se entrega a la carga.

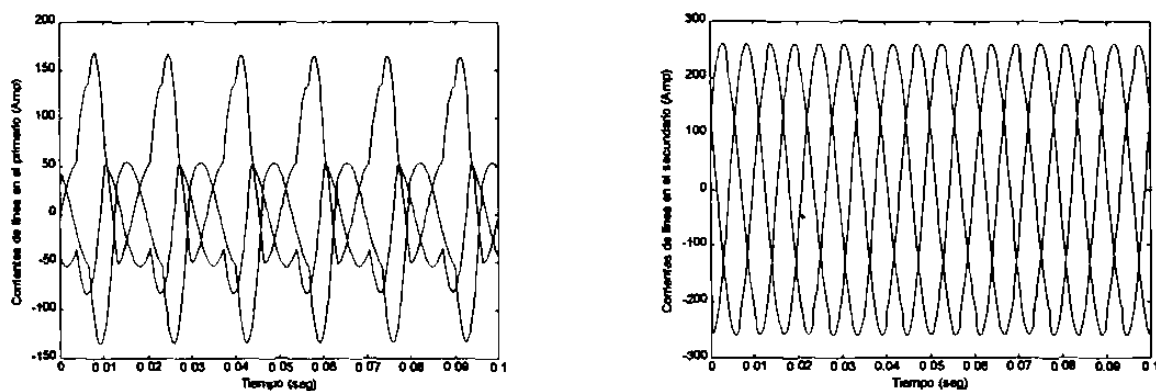


Fig. 5.15 Corrientes de línea en el primario y en el secundario del banco Δ -Y con carga resistiva.

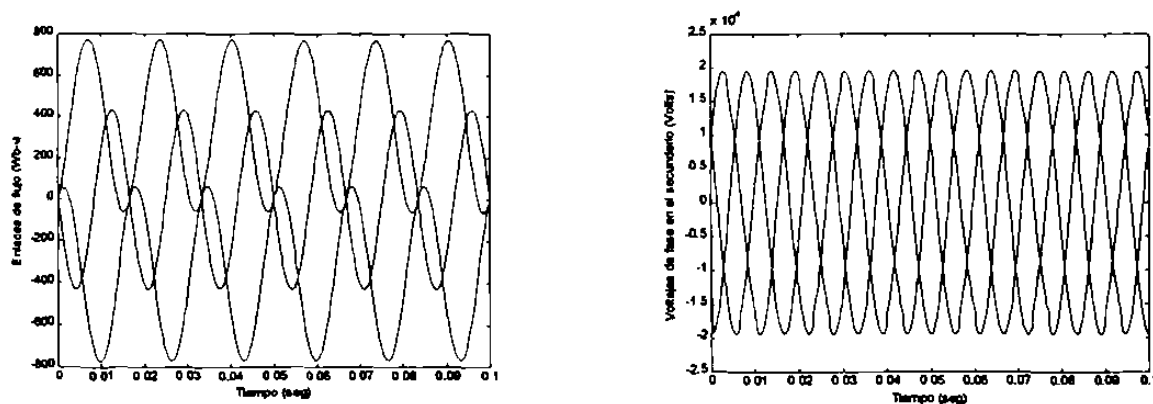


Fig. 5.16 Enlaces de flujo y voltajes en el secundario del banco Δ -Y con carga resistiva.

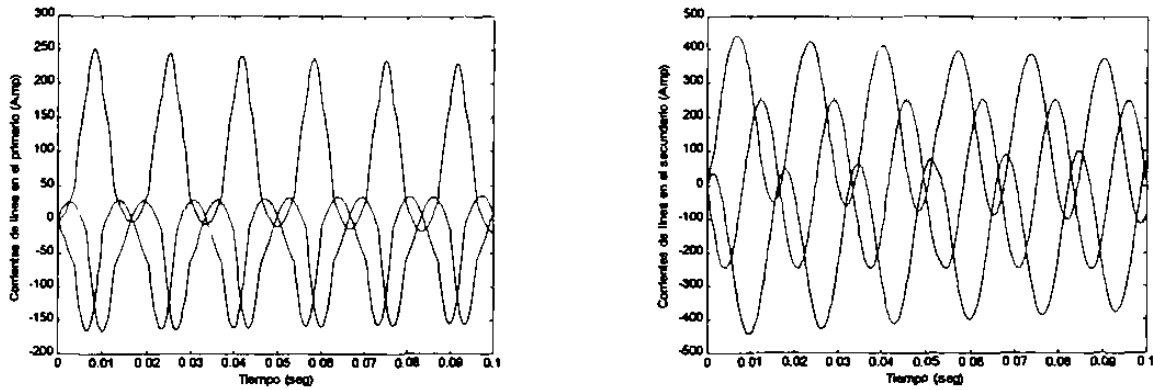


Fig. 5.17 Corrientes de línea en el primario y secundario del transformador Δ -Y con carga resistiva-inductiva.

Con una carga resistiva-inductiva en el secundario del banco, la distorsión armónica de las corrientes del primario es considerable, mientras que las corrientes del secundario son senoidales con una componente aperiódica que decrece rápidamente. En la Figura 5.18 se muestran los enlaces de flujo y se observa que los transformadores se encuentran operando en la región de saturación, por lo cual se tiene distorsión en las corrientes del primario y en los voltajes del secundario, los cuales presentan una distorsión pequeña.

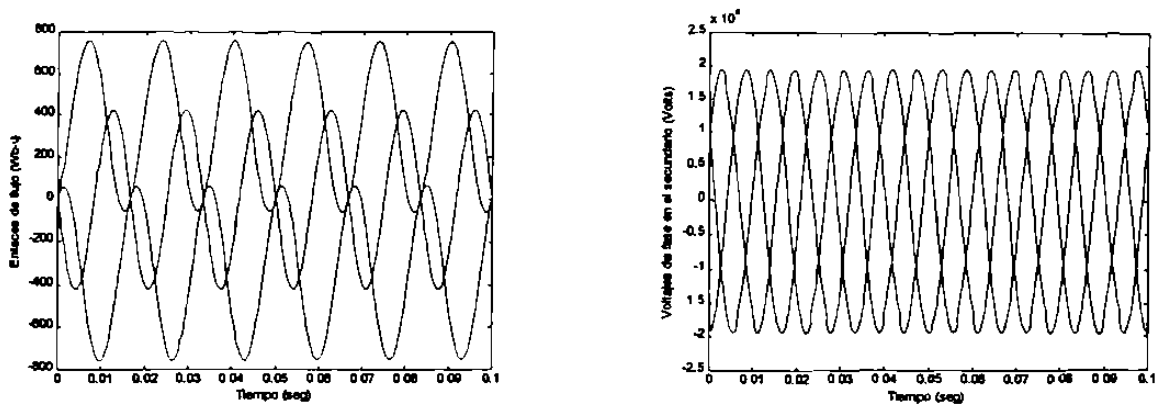


Fig. 5.18 Enlaces de flujo y voltajes en el secundario del transformador Δ -Y con carga resistiva-inductiva.

En la Figura 5.19 se tiene el espectro armónico de la corriente i_A , durante el primer ciclo del transformador, para los dos casos de energización con carga resistiva y resistiva-inductiva, respectivamente. Se observa, en los resultados del análisis de Fourier, que se mantiene el espectro de frecuencias que caracteriza a la corriente de avalancha, es decir, sobresalen la componente de corriente directa y la segunda armónica.

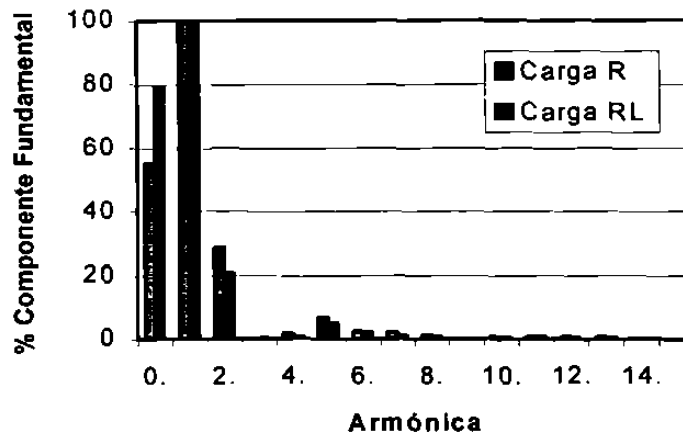


Fig. 5.19 Espectro armónico del primer ciclo de la corriente de energización, banco de transformadores Δ -Y con carga.

5.2.4 Estrategia para reducir la corriente de avalancha

Como se ha mostrado en los estudios de las secciones anteriores, la corriente de avalancha depende del momento de cierre del interruptor para energizar las fases de un transformador. Por ejemplo, si un transformador monofásico se energiza en el momento en que la onda de voltaje cruza por cero y con pendiente positiva, a su vez el flujo magnético se incrementa en el tiempo hasta llegar a un valor de dos veces el flujo nominal o un valor mayor si se tiene un flujo residual, Figura 5.20. Para obtener estos valores de flujo magnético se requiere de una gran corriente debido a que en esos puntos el núcleo se encuentra saturado, como se observa en la Figura 5.3.

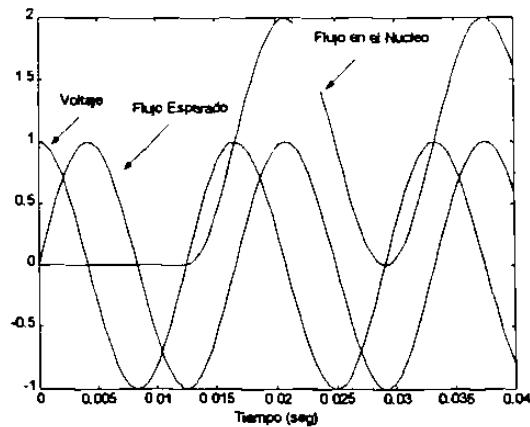


Fig. 5.20 Condición crítica de energización.

En el caso del banco trifásico, y debido a la conexión que existe entre las fases del transformador, al energizar alguna de las fases circulan corrientes por trayectorias definidas hacia las fases restantes, esto causa que el flujo magnético en los núcleos adicionales no sea constante, sino que existe un flujo transitorio denominado “flujo dinámico” [13]. Entonces, es importante notar que si se energiza el núcleo magnético en el instante preciso, es decir aquel en el cual el flujo dinámico es igual al flujo esperado en el estado estable, la forma de onda del flujo magnético en el núcleo toma la forma final, como se muestra en la Figura 5.21. Esto significa que no existe flujo transitorio y por consecuencia tampoco se observa un fenómeno transitorio en las otras variables del transformador.

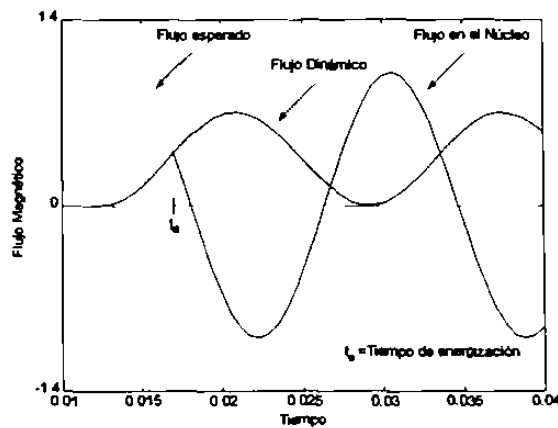


Fig. 5.21 Condición ideal de energización.

La discusión anterior muestra, en teoría, que las corrientes de avalancha pueden reducirse y ser eliminadas [13], siempre y cuando se logre que el núcleo no llegue a estar saturado. Para lograr esta condición se controla el instante en que se energiza el transformador. Para la conexión mostrada en la Figura 2.13, se considera que el flujo residual es cero y por tanto se logra la eliminación de la corriente de avalancha, Figura 5.23.

Se ha considerado la siguiente secuencia de cierre de interruptores: a) Los interruptores de las fases *A* y *B* se cierran en cualquier instante de tiempo en el cual el flujo de la fase que se está energizando (*AB*) es cero y comienza a crecer. b) La fase *C* se cierra cuando el flujo dinámico de la fase *BC* es igual al flujo magnético esperado en el estado estable. Las condiciones de cierre de interruptores se muestran más claramente en la Figura 5.22, en ella se indican los instantes en que deben cerrar los interruptores para evitar la formación de la corriente de avalancha.

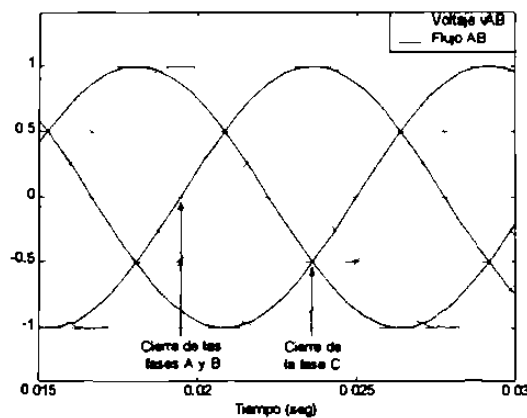


Fig. 5.22 Instantes de energización de un transformador trifásico Δ -Y para evitar la corriente de avalancha.

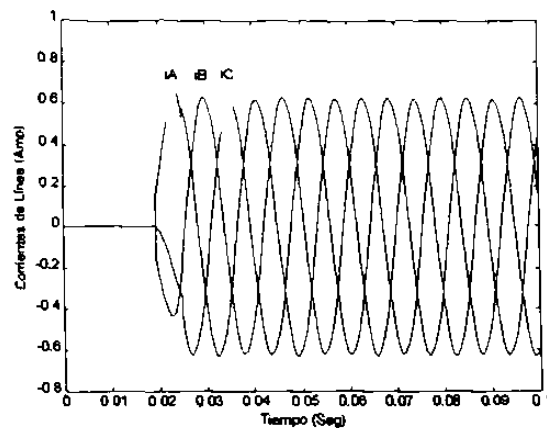


Fig. 5.23 Corrientes de avalancha controladas, primario del transformador.

Como se puede observar en las Figuras 5.22 y 5.23, el procedimiento es teóricamente atractivo, pero se requiere demostrar su viabilidad con base a interruptores de estado sólido; en los cuales se tiene un control preciso para tener el estado de conducción. Además se requiere asociar un dispositivo de control, con lógica adecuada para determinar los instantes adecuados para el cierre de interruptores.

5.3 Energización de motores síncronos

Los motores síncronos se construyen de la misma forma que un generador síncrono, o sea que prácticamente son idénticos, sólo la dirección del flujo de potencia los hace diferentes. Además, los generadores síncronos tienen una capacidad mucho mayor que los motores, por lo que se considera que un motor síncrono se conecta a un sistema sin variaciones de frecuencia y voltaje, esto permite suponer que el motor síncrono se conecta a una barra infinita.

Los motores síncronos son empleados para mover cargas que requieren de velocidad constante en su operación, además, para ciertas aplicaciones de baja velocidad se prefiere su uso con respecto a motores de inducción. Un motor de inducción para bajas velocidades incrementa su costo y reduce su eficiencia, así como su factor de potencia; a menos que se

considere un dispositivo variador de velocidad-motor de inducción, el cual puede ser atractivo técnica y económicamente.

Así, la aplicación de los motores síncronos se prefiere cuando se requiere de velocidades constantes y de bajo valor, ya que además se puede ajustar el factor de potencia del sistema eléctrico a un valor cercano al unitario; dentro de los rangos operativos permitidos, por lo cual este motor tiene una eficiencia mayor. Otra característica importante es que los motores síncronos tienen un buen par de arranque, debido a los devanados amortiguadores que actúan como devanados jaula de ardilla; dando un gran efecto inicial, y en el estado estable no modifican la velocidad o la eficiencia del motor síncrono.

5.3.1 Energización de motores síncronos considerando efecto de devanados amortiguadores

Un motor síncrono prácticamente no tiene par de arranque propio, por esta razón los devanados amortiguadores durante la energización hacen la función de devanados tipo jaula de ardilla, también durante el período del arranque el devanado de campo se cortocircuita. El devanado de campo se cortocircuita para que la corriente inducida en dicho devanado participe con un par de arranque, si el devanado de campo se deja en circuito abierto durante la energización, puede experimentar altos voltajes inducidos. Una vez que el motor alcanza una velocidad cercana a la síncrona, se energiza el devanado de campo con la fuente de directa y la máquina se sincroniza, es decir, girará a una velocidad que depende de la frecuencia de la fuente trifásica y de los polos de la máquina misma.

Las simulaciones en este trabajo se llevaron a cabo con los modelos desarrollados en capítulos anteriores y se usaron los datos del motor síncrono, Apéndice A. Se observa en la Figura 5.24 que el ángulo del motor se decrementa más allá de 2π radianes, lo que indica que el motor durante el arranque opera asincrónicamente, y que el rotor ha avanzado más de una revolución al sistema que gira a velocidad síncrona, a este fenómeno se le conoce como

deslizamiento de polos. En la Figura 5.25 se muestra cómo varía el ángulo de $-\pi$ a π radianes durante el arranque del motor.

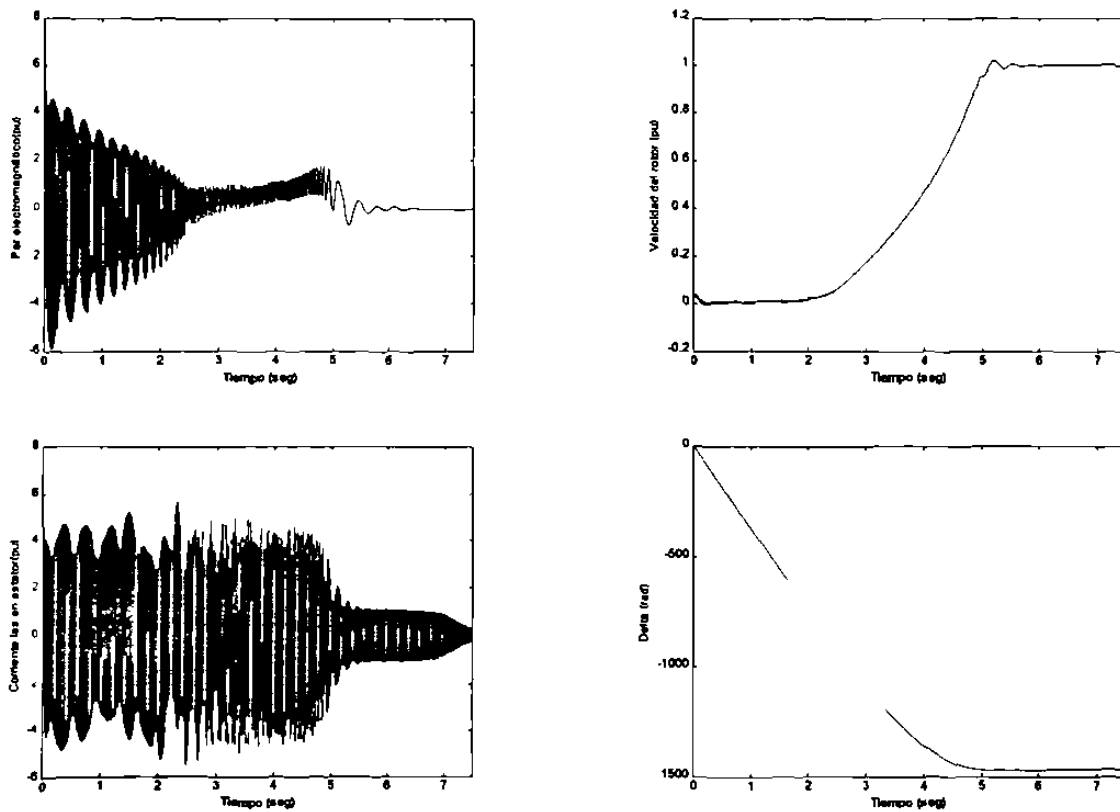


Fig. 5.24 Energización en vacío de un motor síncrono.

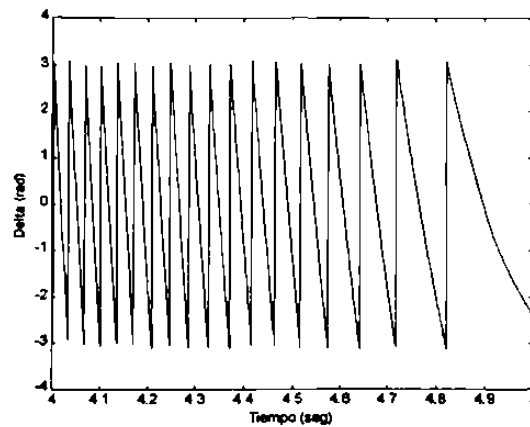


Fig. 5.25 Deslizamiento de polos durante el arranque del motor síncrono.

La Figura 5.26 muestra la energización en vacío del motor síncrono, los devanados amortiguadores y el devanado de campo se tienen en cortocircuito, a los 6 segundos de simulación, cuando la máquina ha llegado a la velocidad síncrona, se energiza el devanado de campo y un segundo después, se inserta plena carga mecánica.

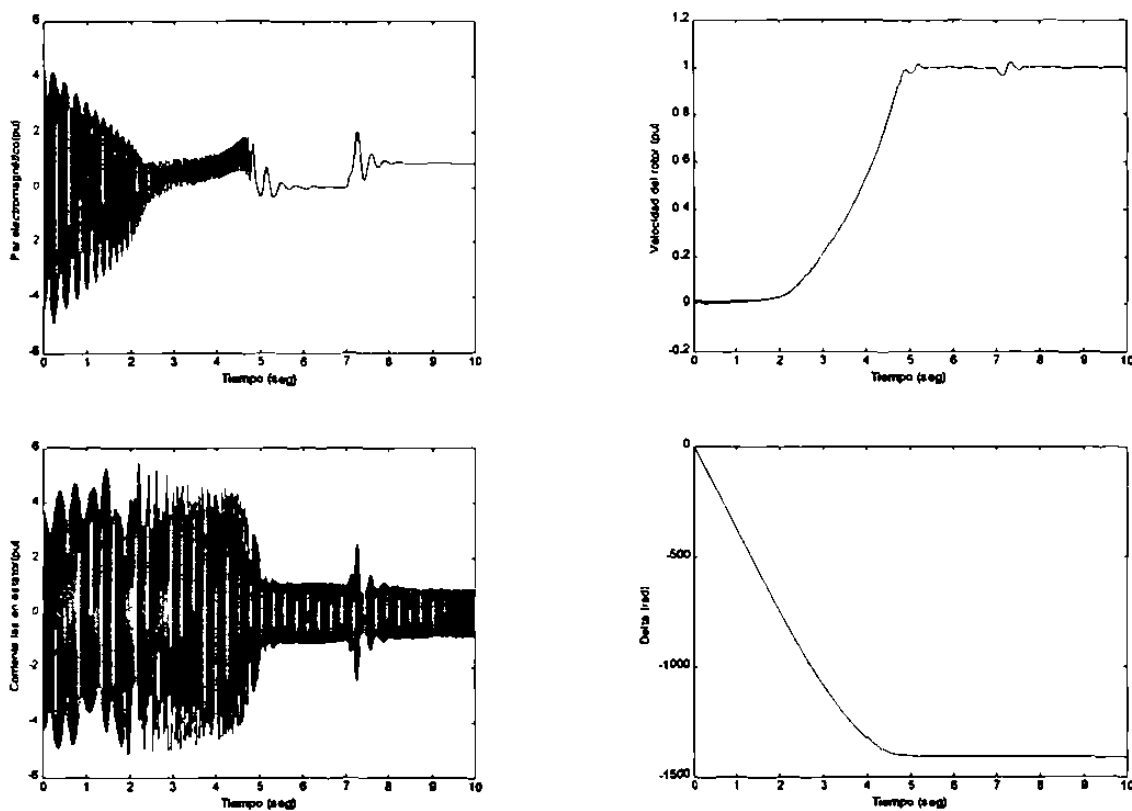


Fig. 5.26 Arranque en vacío de motor síncrono, inserción de plena carga al tener velocidad síncrona.

5.3.2 Energización de motor síncrono empleando un primo motor

Otra forma de dar solución al problema del bajo par de arranque en los motores síncronos es empleando un primo motor [30], el cual se acopla a la flecha del motor para llevarlo a una velocidad cercana a la síncrona. El primo motor a usar es de una capacidad relativamente menor a la del motor síncrono que se desea arrancar, ya que sólo se requiere vencer la inercia del motor síncrono y lograr movimiento en la dirección requerida. En esos

momentos se energiza el devanado de campo para “enganchar” el flujo magnético producido por el campo con el flujo magnético rotatorio establecido por las corrientes trifásicas que circulan en el estator. La Figura 5.27 muestra el comportamiento dinámico durante el arranque de un motor síncrono, al cual se le aplica la excitación de campo cuando se está cerca de la velocidad síncrona. Posteriormente, cuando ya se tiene sincronizados los flujos magnéticos estator-rotor, se inserta la carga mecánica.

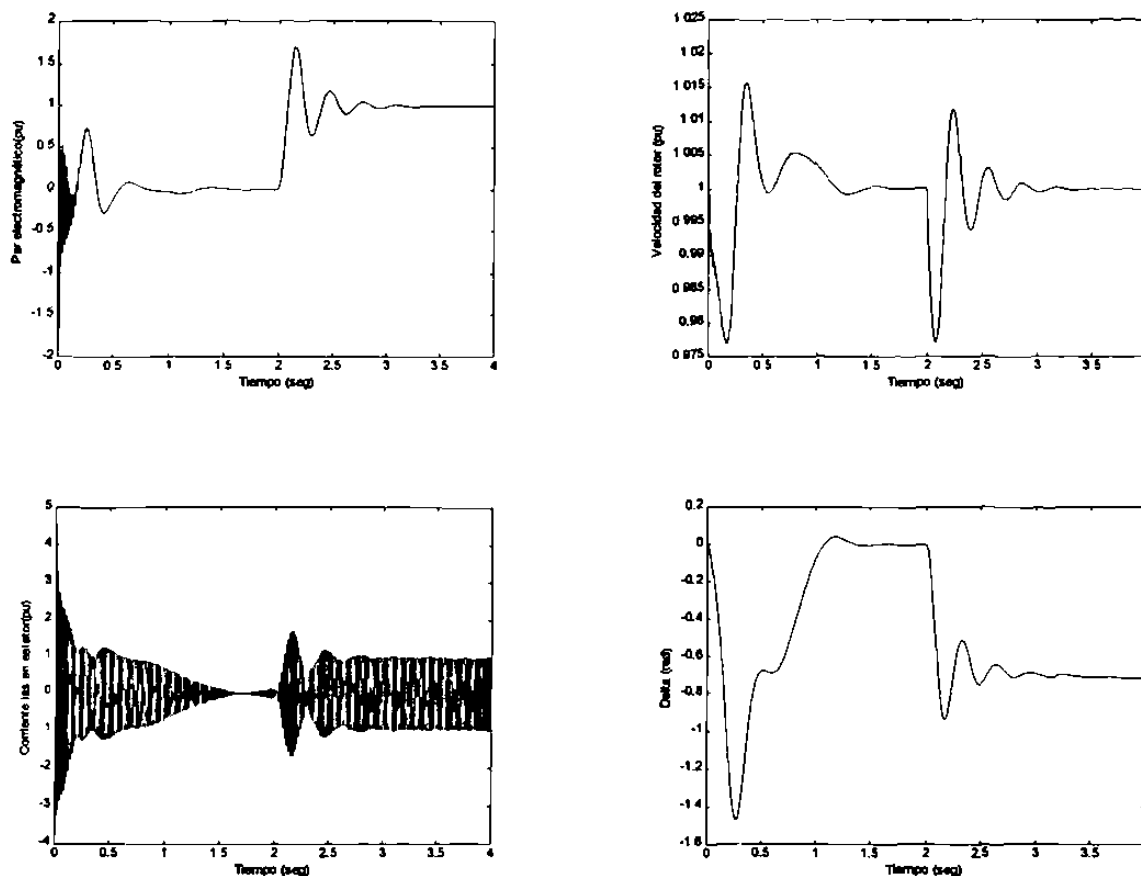


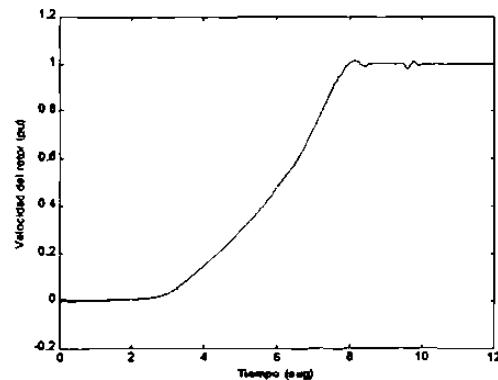
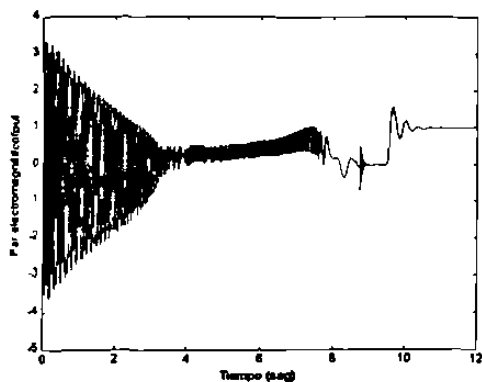
Fig. 5.27 Arranque de motor síncrono con primo motor, inserción de plena carga mecánica.

Para la simulación anterior, se considera que en un tiempo igual a cero, ya se tiene el rotor girando a velocidad síncrona, o muy cercana a ella; tiempo en el cual se excita el devanado de campo ocasionando un transitorio producto del “enganche” de los flujos magnéticos durante el primer segundo de simulación, como se observa en la Figura 5.27.

Una vez que se llega a una condición de estado estable, aproximadamente en dos segundos, se inserta plena carga mecánica.

5.3.3 Energización de motor síncrono a tensión reducida

Una forma de reducir la corriente de avalancha en el momento del arranque de un motor síncrono, es energizando sus fases a tensión reducida. La Figura 5.28 muestra este caso, además con la posibilidad de manejar los devanados amortiguadores con una función de devanados tipo jaula de ardilla. En el momento en que se alcanza una velocidad cercana a la velocidad síncrona se aplica, a las terminales del estator, una tensión plena y a su vez se energiza el devanado de campo, dicho procedimiento se efectúa en un tiempo igual a 8.75 segundos. En estos instantes los campos magnéticos rotatorios se sincronizan, y posteriormente se inserta plena carga mecánica al rotor, en un tiempo de 9.5 segundos. Con este procedimiento se reduce la corriente en devanados del estator, pero el tiempo para alcanzar el estado estable es mayor.



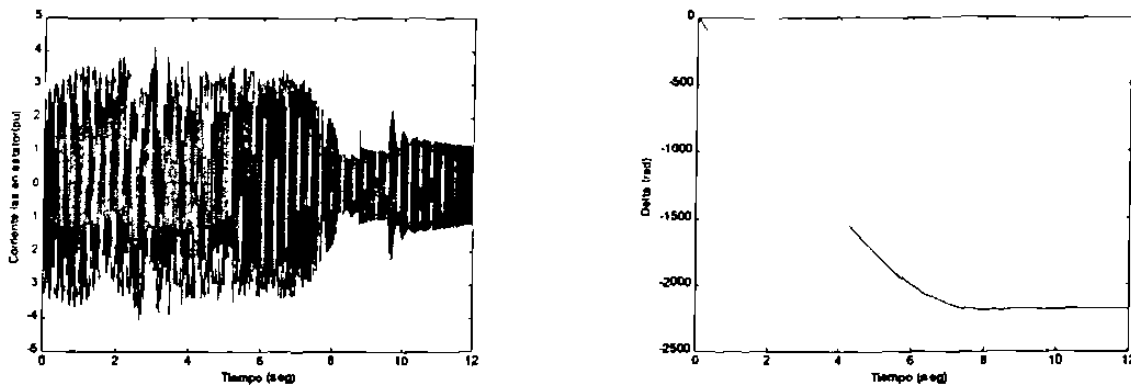


Fig. 5.28 Energización del motor síncrono a tensión reducida.

Al continuar la simulación anterior, se obtiene la condición de estado estable, como se aprecia en la Figura 5.29. En las gráficas se observa la naturaleza senoidal de la corriente en las fases, con un valor de 1.0 pu, así como la forma en que el ángulo de carga δ alcanza su valor de estado estable.

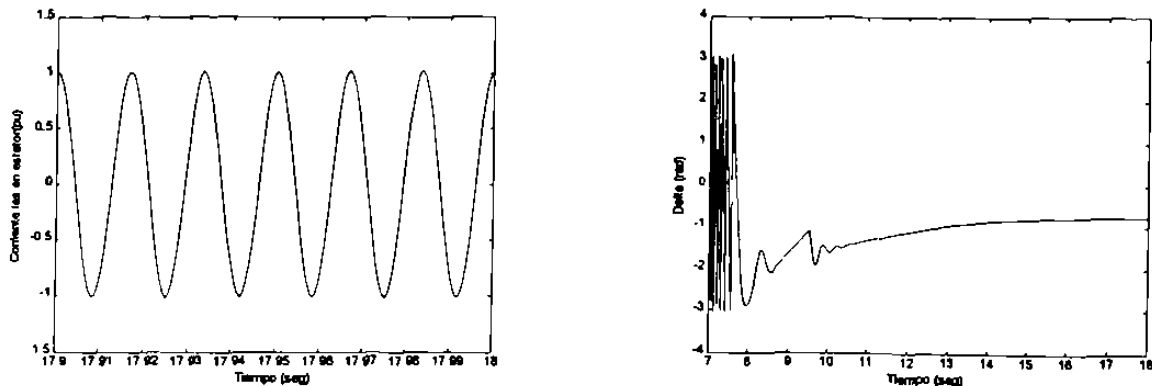


Fig. 5.29 Corriente de una fase del estator y ángulo δ del motor síncrono.

5.4 Energización de motores de inducción

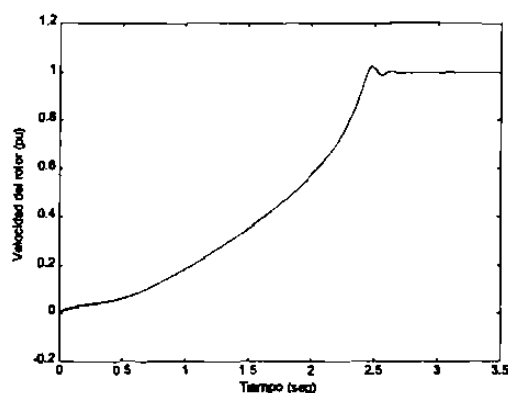
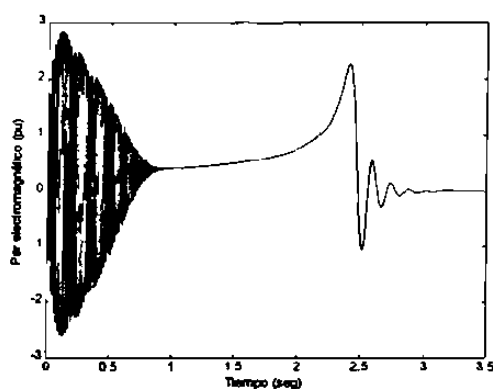
Los motores de inducción son ampliamente utilizados en la industria, debido a su sencillez en diseño, robustez mecánica y eléctrica, por su bajo costo y fácil mantenimiento. Su velocidad de operación es cercana a la velocidad síncrona y depende de la frecuencia de la

fuente suministro y del número de polos para los cuales se diseña el estator. Sin embargo, con el uso de la electrónica de potencia, se puede emplear variadores de voltaje/frecuencia y con ello se logra un control amplio para la velocidad en motores de inducción, así como en su par eléctrico que ha de trabajar con cargas variables.

En esta sección se presentan varios casos de energización con un motor de inducción de gran tamaño; para los datos utilizados ver el Apéndice A. El propósito es observar las diferentes condiciones que se pueden presentar en la naturaleza del par electromagnético, la velocidad y las corrientes en los devanados de la máquina de inducción.

5.4.1 Energización de motor de inducción en vacío

Si se energiza un motor de inducción en vacío (sin carga), como se muestra en la Figura 5.30, se observa que la máquina se acelera hasta alcanzar una velocidad cercana a la síncrona, sin embargo antes de lograrlo, se presentan corrientes de energización que pueden llegar a ser hasta seis veces el valor nominal [34]. El fenómeno se explica debido a que en reposo la impedancia de la máquina es la suma de las resistencias y las reactivas de estator y rotor, el valor de la impedancia equivalente durante el arranque es pequeña y al aplicarse un voltaje pleno al estator, circularán corrientes de gran magnitud.



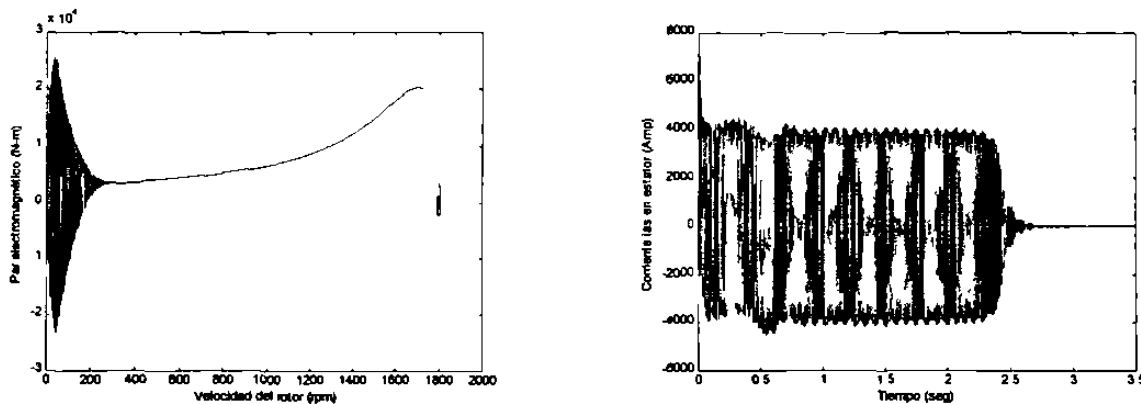


Fig. 5.30 Energización en vacío de un motor de inducción.

Al energizar el motor de inducción, la característica del par electromagnético presenta un transitorio originado por las componentes de corriente directa que se presentan en las corrientes del estator, además, conforme el deslizamiento se incrementa, el par electromagnético crece hasta llegar a un valor máximo, posteriormente disminuye y antes de llegar al estado estable, la velocidad del rotor sobrepasa la velocidad síncrona mientras que el par electromagnético decae y oscila alrededor del punto final de operación, tal característica se presenta en los motores de gran tamaño los cuales presentan una relación r_s/X_s pequeña.

El par electromagnético en el motor de inducción es originado por la interacción de una onda de flujo magnético rotatorio generada por las corrientes de estator, con otra onda de flujo magnético rotatorio generada por las corrientes inducidas en el rotor. Las corrientes del rotor son inducidas a la frecuencia del deslizamiento s . Cuando se conecta o se incrementa la carga mecánica en el motor, su velocidad disminuye y por tanto se incrementa el deslizamiento, y como consecuencia las corrientes inducidas en el rotor ocasionan un incremento en el par electromagnético, el cual tratará de balancear el par mecánico requerido. El proceso transitorio de ajuste en las variables es mostrado en la Figura 5.31, en donde se muestra la energización en vacío de un motor de inducción insertando plena carga en 3.25 segundos.

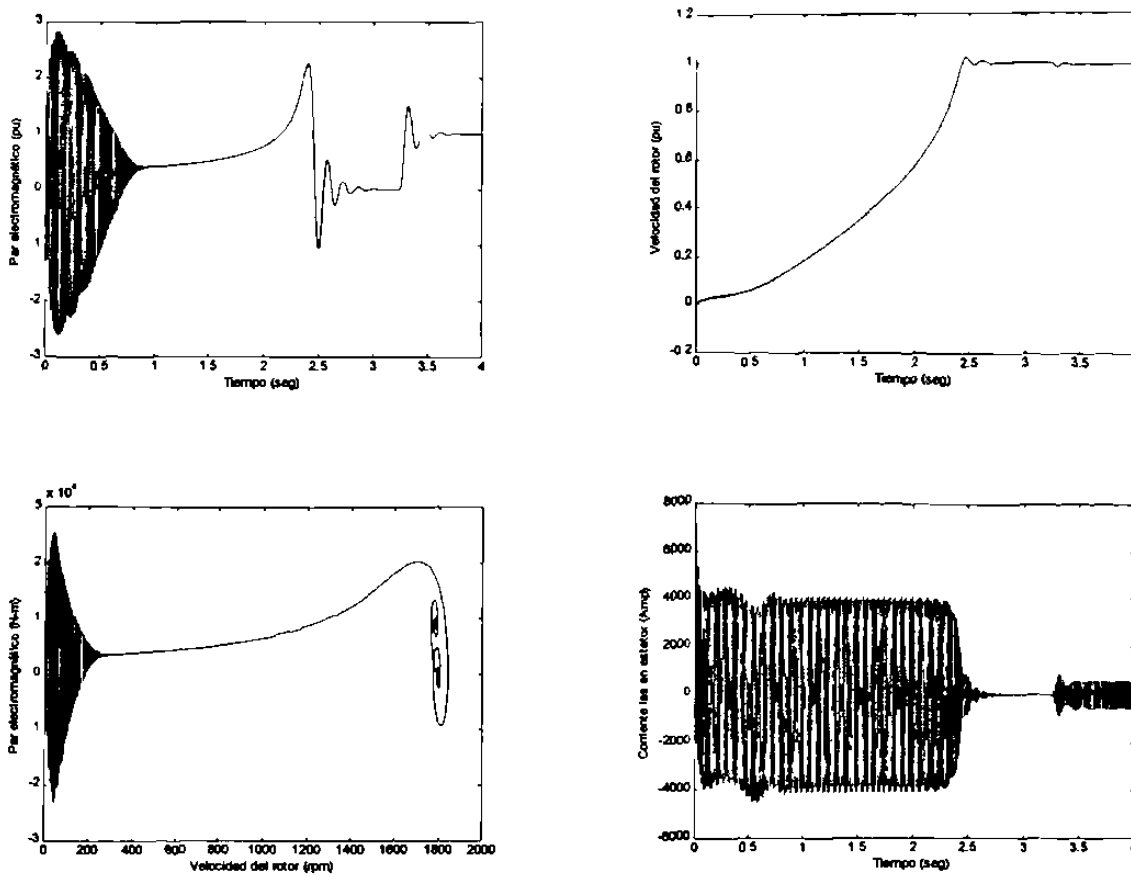


Fig. 5.31 Energización en vacío de motor de inducción, e inserción de plena carga en estado estable.

5.4.2 Relación entre par máximo y resistencia de rotor

Para un motor de inducción, como el que se usó en las simulaciones de este trabajo de investigación, debido al par de arranque reducido que tiene no es recomendable energizarlo a plena carga. El par de arranque reducido únicamente permite insertar alrededor del 30% de la carga durante el arranque, sin embargo, existen alternativas para modificar el deslizamiento con lo que se obtiene un par máximo. El par máximo se logra variando la resistencia del rotor y la razón por la cual no se puede energizar éste motor a plena carga es debido a que la resistencia del rotor, es pequeña por diseño. El valor de resistencia del rotor, si se compara con un motor de menor capacidad, se observa que el de menor capacidad tiene una resistencia de rotor mayor, lo cual le permite tener el par máximo de arranque con un

mayor deslizamiento. Este hecho permite energizarlo a plena carga o incluso tener arranque exitoso con una carga superior a la nominal.

El proceso de diseño de los motores de inducción debe considerar el compromiso entre eficiencia y par de arranque, ya que con una resistencia de rotor alta, se tienen condiciones óptimas de arranque, pero en condiciones de funcionamiento de estado estable, el deslizamiento también es grande. La expresión (4.55) muestra que para un deslizamiento grande, la potencia que se transfiere a la flecha del motor es menor, por lo que la eficiencia de la máquina se reduce. Debido a éstas razones, el motor de inducción de gran capacidad que se usa en las simulaciones se diseñó para tener condiciones de alta eficiencia en su funcionamiento de estado estable. En la Figura 5.32 se muestra el efecto sobre el par máximo, al variar la resistencia del rotor. Se observa que para una resistencia mayor, el par máximo se logra con un deslizamiento cercano a uno, teniendo así una condición óptima en el par de arranque.

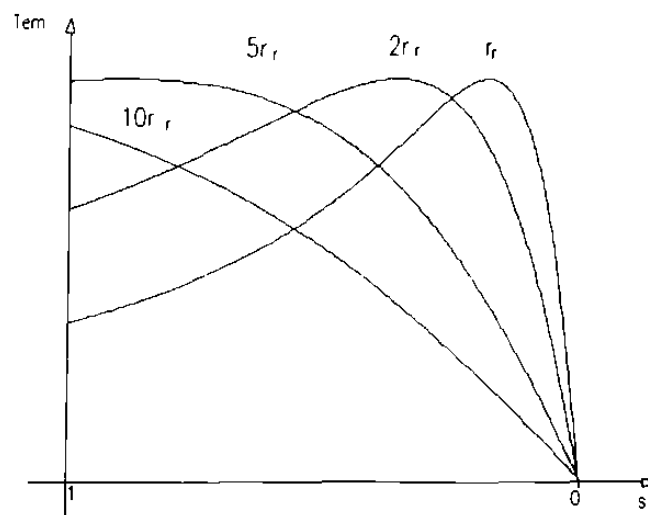


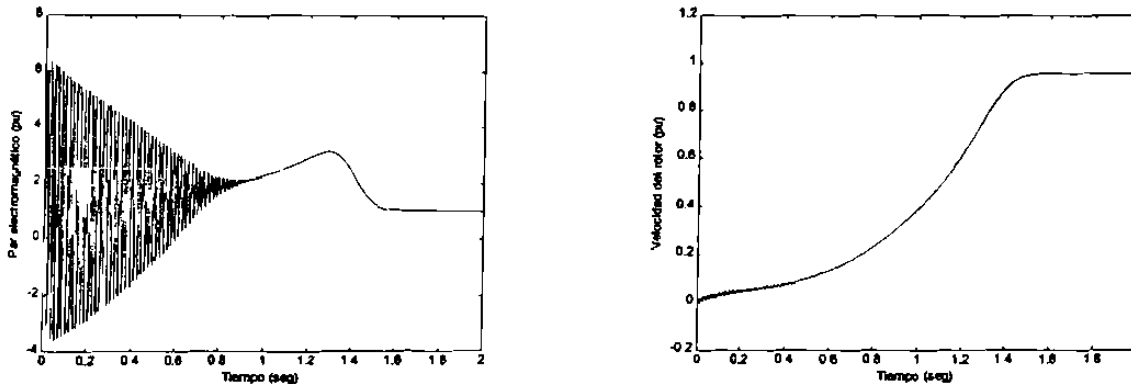
Fig. 5.32 Curva Par vs Deslizamiento para diferentes valores de resistencia de rotor.

La resistencia del rotor también influye en el amortiguamiento de la velocidad del rotor en la condición de operación de estado estable, es decir, una máquina como la que emplea en este trabajo presenta una oscilación al momento de llegar a la velocidad nominal,

como se observa en las graficas de par vs. velocidad, Figura 5.33. En máquinas de menor capacidad, estas oscilaciones son amortiguadas debido a que la relación r_r/X_r es mayor, mientras menor es la capacidad de la máquina.

5.4.3 Energización a plena carga

Para energizar a plena carga, el motor de inducción empleado en este trabajo de investigación, es necesario incrementar la resistencia del rotor como se mostró en la Figura 5.32. En este caso, debido a que la máquina fue diseñada con una resistencia de rotor pequeña para tener buena eficiencia, se requiere de un incremento de hasta cinco veces su valor de diseño para lograr que el máximo par de arranque se localice cerca de un deslizamiento igual a uno. Físicamente se puede lograr este efecto cuando se tiene un motor de rotor devanado, al cual se le conecta en terminales externas del rotor una resistencia adicional durante la energización y la cual se retira cuando se alcanza el funcionamiento de estado estable.



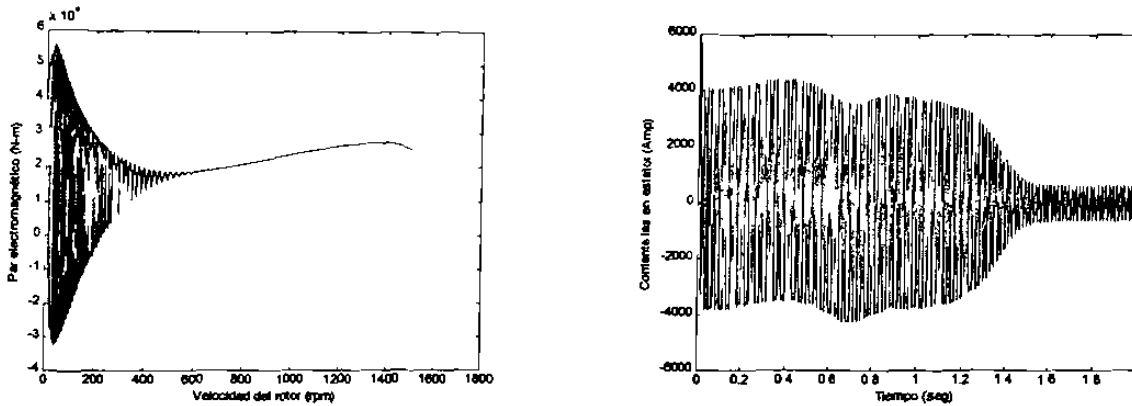
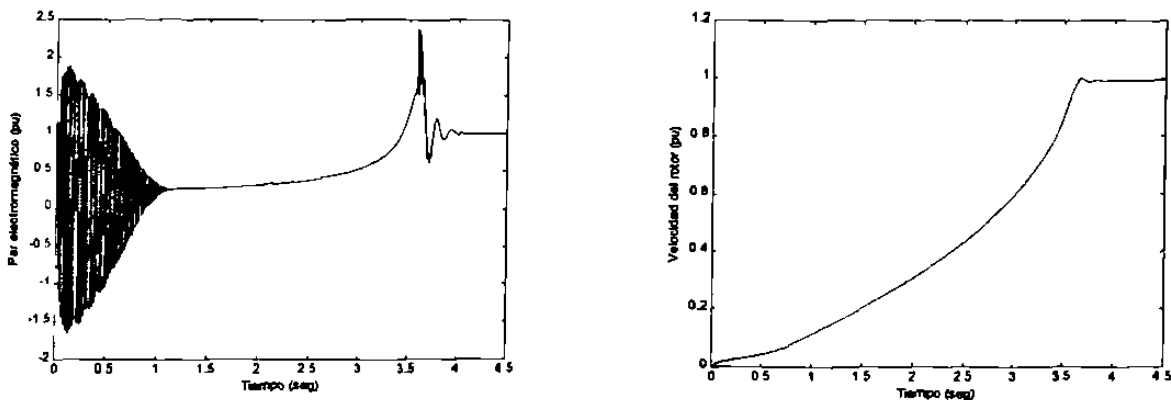


Fig. 5.33 Energización a plena carga de motor de inducción.

En la Figura 5.33 se observa que al incrementar la resistencia del rotor, se logra tener el par máximo con un deslizamiento grande. Con la medida implementada se tiene que las oscilaciones de velocidad se amortiguaron más rápidamente.

5.4.4 Energización de motor de inducción a tensión reducida

Una forma de reducir las altas corrientes en el momento de energización del motor de inducción es energizar a tensión reducida y posteriormente operar la máquina con tensión nominal. La Figura 5.34 muestra la energización del motor a tensión reducida, cuando se le aplica el 80 % del voltaje. Cuando se logra el par máximo, se cambia la excitación a tensión plena y se inserta la carga mecánica nominal en un tiempo igual a 3.58 segundos.



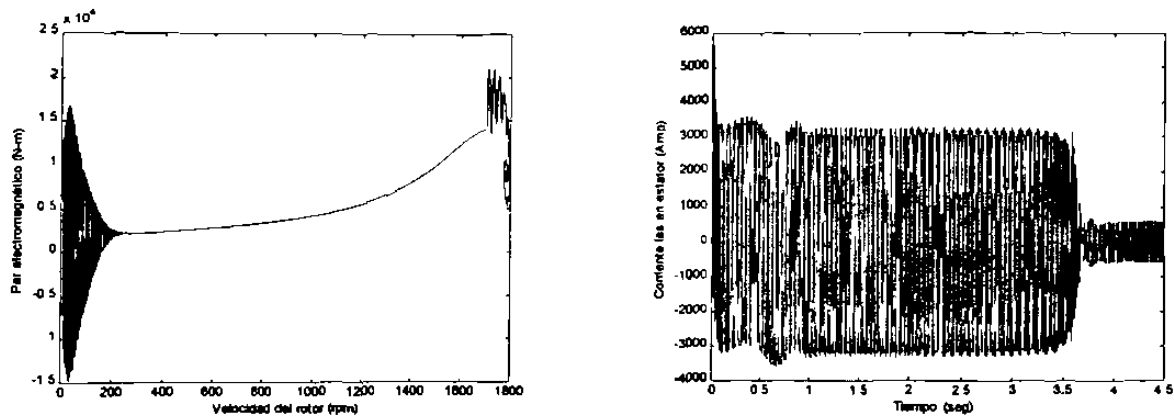
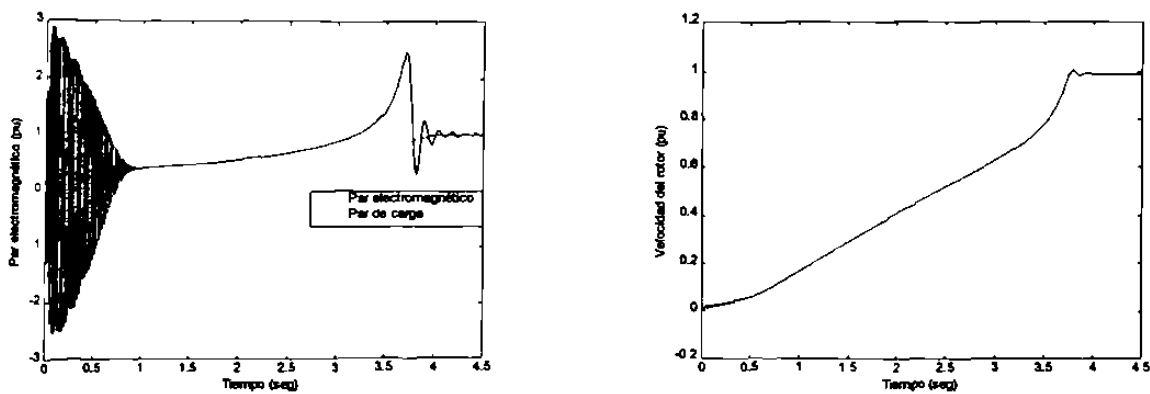


Fig. 5.34 Energización de motor de inducción a tensión reducida e insertando plena carga.

5.4.5 Energización de motor de inducción con carga variable

El comportamiento del par de carga es importante en la simulación de la energización de motores de inducción. La carga no siempre se inserta o se comporta en forma de escalón, sino que puede incrementarse en función de la velocidad del rotor o del tiempo. La carga puede tomar forma de rampa, o de una función cuadrática o polinomial. En la Figura 5.35 se muestra un caso de energización con una función cuadrática para describir el par de carga, en este caso el motor se energiza en vacío y la carga se va incrementando según la función cuadrática para incorporar el par de carga.



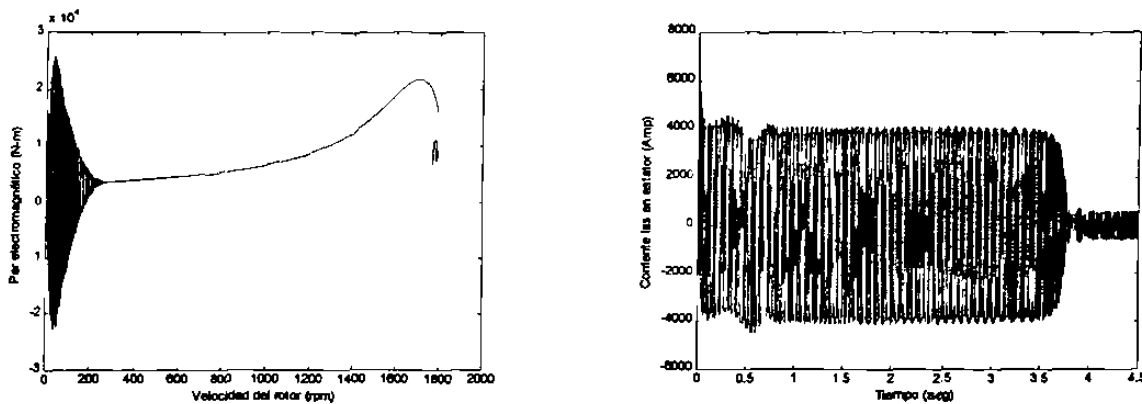


Fig. 5.35 Energización de motor de inducción, carga con variación cuadrática.

5.4.6 Depresiones de voltaje ocasionadas por energización de motores de inducción

Las depresiones de voltaje son reducciones en el voltaje de alimentación con una corta duración. Las depresiones de tensión pueden ser causadas por cortocircuitos, sobrecargas de elementos o por energización de motores de gran tamaño; este tipo de fenómeno puede causar problemas a otras cargas conectadas en el alimentador o en las cercanías eléctricas a donde se presenta la depresión del voltaje.

Las depresiones de voltaje, producidas por la energización de grandes motores de inducción [34], son de una duración mayor a las ocasionadas por un cortocircuito, pudiendo llegar a ser del orden de segundos, como se muestra en la Figura 5.37. La disminución del voltaje en el *punto común de acoplamiento (pca)* se debe a que al energizar los motores, se requiere de grandes corrientes durante los primeros instantes, pudiendo llegar a ser de más de seis veces la corriente nominal. Esta disminución de voltaje también depende de los parámetros del sistema, como son: capacidad de cortocircuito, potencia del motor y reactancia del transformador que alimenta al motor de inducción. Para las simulaciones se considera el sistema de la Figura 5.36.

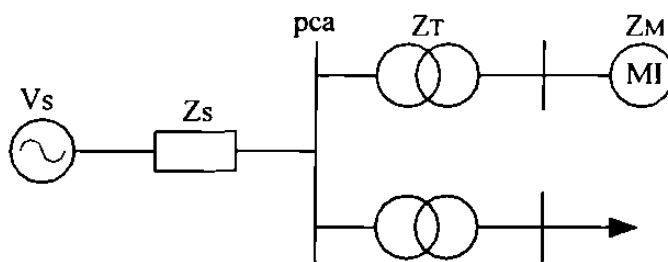


Fig. 5.36 Circuito equivalente para mostrar depresiones de voltaje.

De la Figura 5.36 se puede obtener expresiones para caracterizar el fenómeno de depresión de voltaje, ocasionada por la energización de motores de inducción. Partiendo de las impedancias equivalentes de los elementos del sistema, se puede expresar en función de sus potencias, por lo que se tiene (5.15).

$$V_{pca} = \frac{Z_T + Z_M}{Z_s + Z_T + Z_M} \quad V_s = 1 \text{ pu} \quad (5.15)$$

$$V_{pca} = \frac{S_s + \beta X_T S_s}{S_s + \beta X_T S_s + \beta S_M} \quad (5.16)$$

Donde X_T es la reactancia del transformador y β es un factor que relaciona la corriente de energización con la corriente nominal, como se observa en (5.17).

$$\beta = \frac{I_{ener}}{I_{nom}} \quad (5.17)$$

De la expresión (5.16) se observa la dependencia de la depresión de tensión, con respecto a la capacidad de cortocircuito del sistema. En la Figura 5.37 se muestra el perfil de voltaje en por unidad para diferentes capacidades de cortocircuito del sistema durante la energización en vacío de un motor de inducción.

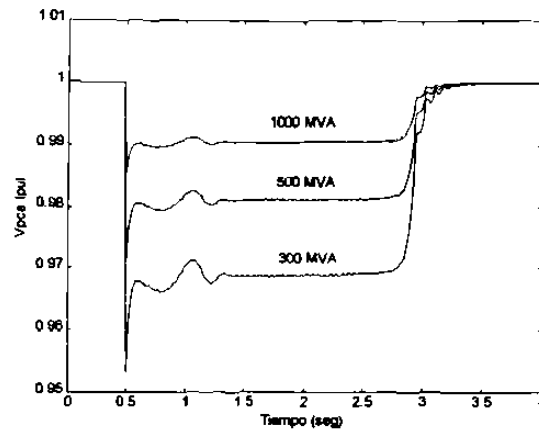


Fig. 5.37 Perfil de una depresión de voltaje debida a energización de un motor de inducción.

5.5 Resumen

En este capítulo se presentaron simulaciones digitales para diversos casos de energización de diferentes elementos del sistema, para lo cual se usaron los modelos desarrollados en capítulos anteriores. Se hizo un análisis de las variables más importantes que caracterizan el comportamiento dinámico de los elementos estudiados, en el instante en que se les aplica una señal como lo es el voltaje y/o el par mecánico de carga en el caso de las máquinas rotatorias.

El análisis presentado pone especial atención a las corrientes de considerable magnitud que se llegan a establecer al momento de energizar un dispositivo. Las simulaciones se hicieron considerando que el elemento está en vacío o con carga, ya sea eléctrica o mecánicamente, según el caso de estudio. Se hizo uso extensivo del MATLAB en rutinas programadas por el autor para obtener los resultados que se presentaron.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Introducción

El estudio del fenómeno de energización de diferentes elementos presentes en los sistemas eléctricos de potencia es de suma importancia, debido a las corrientes excesivas que se observan durante ese período transitorio. Esta es una motivación importante, tanto teórica como práctica, por lo cual en este trabajo de investigación se presentaron modelos que describen apropiadamente las corrientes y otras variables, dependiendo del elemento a estudiar, que caracterizan el fenómeno de la energización.

Los modelos presentados se describen por medio de ecuaciones diferenciales, las cuales se resuelven con técnicas de integración apropiadas, con el fin de obtener el comportamiento dinámico para las variables más significativas de los modelos durante el transitorio.

6.2 Conclusiones

Por el análisis desarrollado en los capítulos del trabajo se tienen las siguientes conclusiones:

Con la función tangente hiperbólica se puede aproximar casi cualquier característica de saturación para materiales ferromagnéticos, empleando tres coeficientes o únicamente dos para el caso en que no se requiera ajustar la pendiente en la zona saturada. Los coeficientes permiten el ajuste a las tres partes principales de la curva que son: la región lineal, la zona de

la rodilla de saturación y la región saturada. Por este procedimiento se obtiene cualquier punto que relaciona enlaces de flujo con la corriente de saturación, sin tener que usar interpolación lineal u otra aproximación. El modelado del núcleo magnético y en particular la expresión para el voltaje inducido, en función de la permeabilidad y de la corriente de magnetización, tiene ventajas importantes, ya que la permeabilidad μ no cambia bruscamente su valor.

El reducir o eliminar el transitorio de energización en reactores y transformadores se logra si el núcleo no trabaja en la región de saturación. Al reducir la corriente de energización se evitan efectos indeseables en los sistemas eléctricos, ya que los valores excesivos de corriente ocasionan una reducción de la vida útil del elemento o inclusive daños físicos y mecánicos.

Para el análisis de máquinas eléctricas, se prefiere el uso de la transformación $qd0$, evitando tener una matriz de inductancias variantes con respecto a la posición del rotor y del tiempo; este artificio facilita la solución de las ecuaciones diferenciales una vez transformadas al dominio $qd0$. Para los motores síncronos y de inducción, se escribieron las ecuaciones diferenciales en términos de enlaces de flujo por ser más simple y requerir de una menor cantidad de operaciones numéricas. La desventaja de esta representación es que es difícil considerar asimetrías que se presentan en las máquinas, como saturación.

En las simulaciones del motor síncrono, se puede observar el efecto de los devanados amortiguadores durante el proceso de arranque, y se analizan las formas más comunes de solucionar el problema del poco par de arranque en este tipo de motores. Se ilustra el caso de usar un primo motor, con el que se lleva el motor a una velocidad cercana a la velocidad síncrona, y se muestra cómo se alcanzan las condiciones de estado estable, así como los cambios en el par electromagnético, en las corrientes y la velocidad. Con este procedimiento no se presenta un deslizamiento de polos. Durante la energización de máquina síncrona en vacío, se presentan corrientes mayores a la nominal, lo cual apunta a efectuar una

energización a tensión reducida, sin embargo, el tiempo en que se logra el estado estable es mayor.

En las simulaciones del motor de inducción, se observa que la dinámica de las corrientes del estator, durante la energización en vacío es notoria, además el par mecánico y la velocidad, los cuales alcanzan su valor de estado estable con oscilaciones alrededor de su valor final. El amortiguamiento de estas oscilaciones se incrementa conforme se disminuye la potencia nominal de la máquina, es decir, mientras mayor sea la capacidad de la máquina, las oscilaciones pueden ser más notorias.

Otro aspecto importante a mencionar es que al incrementarse la capacidad de la máquina, se ve disminuida su capacidad de arranque con carga, debido a que el par electromagnético máximo en por unidad es menor. Sin embargo, la alternativa de tener un mayor par de arranque y poder insertar carga en el arranque, es variar la resistencia del rotor. Al igual que en el caso del motor síncrono, una forma de reducir las corrientes de energización es efectuando un proceso a tensión reducida y posteriormente incrementarla hasta su valor nominal.

6.3 Recomendaciones para trabajos futuros

Se recomienda usar la formulación presentada para describir el núcleo magnético de un transformador monofásico, y desarrollar un modelo de núcleo para un transformador trifásico tipo acorazado, de tres o de cinco piernas, etc. Con esa extensión se evitará las simplificaciones y las consideraciones que se hicieron en este trabajo y así analizar las corrientes de avalancha en un sistema trifásico con otras características. Dicho modelo de núcleo trifásico, ayudará a comprender mejor el fenómeno que ocurre al efectuar el control de cierre de interruptores para reducir o eliminar las corrientes de avalancha. Otros dispositivos que pueden ser estudiados con la metodología presentada en esta tesis son los autotransformadores monofásicos y trifásicos, así como los transformadores de tres devanados.

Explorar el uso de interruptores de estado sólido para tener un transitorio de energización controlado en transformadores y reactores, ya que para eliminar las corrientes de avalancha el instante de energización de cada fase debe ser exacto, un retraso adicional en el momento del cierre de los interruptores puede ocasionar que el núcleo se sature y se demanden corrientes de gran magnitud.

Con el modelo propuesto, se recomienda llevar a cabo estudios de ferresonancia, fenómeno que se presenta al interactuar una inductancia no lineal, como la que se utiliza para describir la rama de magnetización de transformadores, con efectos capacitivos de cables o líneas de transmisión, que estén conectadas al transformador. Este fenómeno es importante por las sobretensiones y sobrecorrientes que se presentan en el sistema. Predecir o confirmar que se tiene una condición de ferresonancia en un sistema, depende de la correcta modelación del transformador que se utiliza en las simulaciones. Una extensión interesante sería el estudio del fenómeno, que se ha sugerido tiene una naturaleza caótica [2].

Se observó por los resultados del Capítulo 5, que en el espectro de Fourier para la corriente de avalancha se tiene una componente considerable de corriente directa. Esta corriente y un pobre amortiguamiento hace que se requiera de un tiempo de simulación bastante grande para obtener el estado estable. Esto apunta a que sería conveniente aplicar técnicas que aproximen en forma rápida a la solución de estado estable [23], pero sin tener que efectuar la simulación durante todo el periodo de tiempo, hasta que la componente aperiódica desaparezca.

Se recomienda, tanto para el motor síncrono como para el motor de inducción, un modelado en términos de variables originales conocida también como formulación en variables de fase *abc*. Esta formulación presenta ventajas para incluir asimetrías y no linealidades de las máquinas. Si se requiere simular condiciones asimétricas, una formulación en *abc* será más conveniente y seguramente se obtendrán resultados más cercanos al comportamiento real, este será un avance al enfoque que se trabajó en esta tesis y que se utiliza actualmente en paquetes comerciales como el PSCAD/EMTDC™ [18].

Un campo importante es el relacionado con el diseño controles, utilizando electrónica de estado sólido, para tener un control óptimo sobre las máquinas eléctricas. Para el caso de energización de motores síncronos, al utilizar electrónica de potencia se puede hacer variar la frecuencia del campo magnético del estator, de forma tal que el rotor gire a una velocidad relativamente baja, a fin de que el campo magnético presente en el rotor se enganche con el establecido por el estator. De esta manera, al acelerarse el rotor, de la misma forma debe incrementarse la frecuencia hasta alcanzar su valor nominal.

Una recomendación importante consiste en desarrollar un método apropiado para la solución unificada del sistema, utilizando los modelos trifásicos propuestos en este trabajo de investigación, para llevar a cabo dicha recomendación, se debe incorporar un modelo de la línea de transmisión con dependencia de la frecuencia. Así, con un marco de referencia unificado de solución, será posible analizar en el sistema distintos tipos de disturbios.

6.4 Aportaciones del trabajo

En el trabajo se ha presentado un modelo que interpreta el fenómeno no lineal de magnetización mediante una reluctancia variable. Con dicho modelo se representa exactamente el comportamiento físico no lineal del núcleo magnético y las ecuaciones propuestas para la interpretación se aplicaron a un transformador monofásico y a su vez a un banco de transformadores Δ -Y, para analizar el transitorio que se tiene en el momento de energizarlos. Se comprobó la exactitud y sencillez al ajustar la curva de saturación con la función tangente hiperbólica, la cual mostró ventajas sobre otras aproximaciones que se mencionan en la literatura. Se validó el modelo del transformador monofásico, así como el del banco trifásico usando los modelos con que cuenta el simulador de transitorios electromagnéticos ATPDraw, considerando los modelos de transformadores monofásico y trifásico saturables [24].

Se presenta un procedimiento, con base a la secuencia de cierre de los interruptores, que teóricamente elimina las corrientes de avalancha. En la práctica, es difícil que se puedan

eliminar por completo las corrientes de avalancha, ya que se tiene un retraso en el tiempo de cierre de los interruptores, pero el esquema presentado permitirá ir en esa dirección de importancia práctica.

Se presenta el modelado de la máquina síncrona operada como motor, así como del motor de inducción haciendo la transformación a componentes $qd0$ para analizar el comportamiento de estas máquinas durante su energización ante diferentes condiciones de arranque. En el caso concreto del motor síncrono, se incluyeron en las simulaciones dos devanados amortiguadores, que para los casos estudiados en esta tesis, ayudaron a estudiar el efecto sobre el par de arranque a la máquina.

Se desarrollaron rutinas en MATLAB para los estudios de esta tesis y los resultados se compararon con los obtenidos por simuladores disponibles en el medio académico, como el ATP.

REFERENCIAS

- [1] W. L. Neves, H. W. Dommel, "On Modelling Iron Core Nonlinearities," IEEE Transactions On Power Systems, Vol. 8, No. 2, May 1993, pp. 417-425.
- [2] M. R. Iravani, A. K. S. Chaudhary, B. A. Mork, A. S. Morched, "Modeling and Analysis Guidelines for Slow Transients – Part III: The Study of Ferroresonance," IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, No. 1, January 2000, pp. 255-265.
- [3] X. Chen, "A Three-Phase Multi-Legged Transformer Model in ATP Using the Directly-Formed Inverse Inductance Matrix," IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 11, No. 3, July 1996, pp. 1554-1562.
- [4] B. A. Mork, "Five-Legged Wound-Core Transformer Model: Derivation, Parameters, Implementation, and Evaluation," IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 14, No. 4, October 1999, pp. 1519-1525.
- [5] D. A. Tziouvaras, P. McLaren, G. Alexander, "Mathematical Models for Current, Voltaje, and Coupling Capacitor Transformers," IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, No. 1, January 2000, pp. 62-72.
- [6] C. E. Li, J. B. Wei, C. L. Huang, C. J. Huang, "A New Method for Representation of Hysteresis Loops," IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 4, No. 1, January 1989, pp. 413-420.
- [7] Xi-Fan Wang, Xiu-Li W., Jian-Hua W., "Analytical Approach to Electric Circuits Containing Saturating Ferromagnetic Coils," IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, No. 2, April 2000, pp. 679-697.
- [8] M. Popov, L. Van der Sluis, G. C. Paap, P. H. Schavemaker, "On a Hysteresis Model for Transient Analysis," IEEE Power Engineering Review, May 2000, pp. 53-55.
- [9] J. H. B. Deane, "Modeling the Dynamics of Nonlinear Inductor Circuits," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, September 1994, pp. 2795-2801.

- [10] N. Menemenlis, "Noniterative Dynamic Hysteresis Modelling for Real-Time Implementation," *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 4, November 1998, pp. 1556-1563.
- [11] C. Pérez, "Fitting Saturation and Hysteresis via Arctangent Functions", *IEEE Power Engineering Review*, November 2000, pp. 55-57.
- [12] S. Acha, "Solución Transitoria de Circuitos No Lineales Usando Microcomputadoras Personales," *LATINCON 90*, Monterrey, N. L. 1990.
- [13] J. H. Brunke, K. J. Fröhlich, "Elimination of Transformer Inrush Currents by Controlled Switching - Part I: Theoretical Considerations," *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 16, No. 2, April 2001, pp. 276-280.
- [14] F. de León, A. Semlyen, "Complete Transformer Model for Electromagnetic Transients," *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 9, No. 1, January 1999, pp. 231-239.
- [15] S. Chimklai, J. R. Martí, "Simplified Three-Phase Transformer Model for Electromagnetic Transient Studies," *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 10, No. 3, July 1995, pp. 1316-1325.
- [16] S. García, A. Medina, "A State Space Three-Phase Multilimb Transformer Model in the Time Domain: Fast Periodic Steady State Analysis," *IEEE PES Summer Meeting*, 2001, Vancouver BC, Canada, Paper 0-7803-7031-7/01.
- [17] J. R. Martí, K. W. Louie, "A Phase-Domain Synchronous Generator Model Including Saturation Effects," *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 12, No. 1, February 1997, pp. 222-229.
- [18] K. H. Chan, E. Acha, M. Madrigal, J. A. Parle, "The Use of Direct Time-Phase Domain Synchronous Generator Model in Standard EMTP-Type Industrial Packages," *IEEE Power Review*, June 2001, pp. 63-65.
- [19] J. O. Ojo, T. A. Lipo, "An Improved Model For Saturated Salient Pole Synchronous Motors," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 4, No. 1, March 1989, pp. 135-142.

- [20] K. A. Corzine, B. T. Kunh, "An Improved Method for Incorporating Magnetic Saturation in the Q-D Synchronous Machine Model," IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 13, No. 3, September 1998, pp. 270-275.
- [21] O. Rodríguez, A. Medina, "Fast Periodic Steady State Solution of a Synchronous Machine Model in Phase Coordinates Incorporating the Effects of Magnetic Saturation and Hysteresis," IEEE PES Winter Meeting, 2001, Columbus OH, USA, Vol. 3, pp.1431-1436.
- [22] J. M. Cañedo, A. I. Ramírez, "Análisis de las Diferentes Formulaciones en el Modelado del Motor de Inducción Trifásico," IEEE Sección México, RVP'98, Julio 1998, pág. 1-7.
- [23] A. Semlyen, A. Medina, "Computation of the Periodic Steady State in Systems with Nonlinear Components Using Hybrid Time and Frequency Domain Methodology," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No. 3, August 1995, pp. 1498-1504.
- [24] "Alternative Transients Program," Rule Book, Last Revision: July 1987.
- [25] "Electromagnetics Transients Program," Theory Book, Bonneville Power Administration, July 1994.
- [26] A. Greenwood, *Electrical Transients in Power Systems*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [27] P. C. Krause, *Analysis of Electric Machinery*, McGraw-Hill, 1987.
- [28] E. W. Kimbark, *Power System Stability*, Vol. III Synchronous Machines, New York IEEE PRESS, 1995.
- [29] P. Kundur, *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, 1994.
- [30] D. Brown, E. P. Hamilton III, *Electromechanical Energy Conversion*, MacMillan Publishing Co., 1984.
- [31] G. Arroyo, F. Aboytes, *Estabilidad Transitoria en Sistemas Eléctricos Potencia*, Comisión Federal de Electricidad, México 1990.

- [32] S. V. Marshall, G. G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, New Jersey 1990.
- [33] W. Hayt Jr., *Teoría Electromagnética*, Quinta Edición, McGraw-Hill, México 1991.
- [34] Math H. J. Bollen, *Understanding Power Quality Problems, Voltage Sags and Interruptions*, New York IEEE PRESS, 2000.

INDICE DE TABLAS

Tabla		Página
5.1	Magnitudes máximas en el primer ciclo de la corriente de avalancha para diferentes ángulos de energización	96
A.1	Parámetros del transformador monofásico	138
A.2	Parámetros de motor síncrono	139
A.3	Parámetros de motor de inducción	139
A.4	Cargas utilizadas en las simulaciones del banco de transformadores	139

INDICE DE FIGURAS

Figura		Página
2.1	Circuito magnético	10
2.2	Curva característica $B-H$ de una muestra de acero al silicio	13
2.3	Circuito equivalente del núcleo magnético	13
2.4	Característica no lineal $\lambda-i_m$	14
2.5	Circuito eléctrico equivalente del reactor	19
2.6	Circuitos acoplados magnéticamente	22
2.7	Circuito eléctrico equivalente del transformador ideal	25
2.8	Modelo del transformador monofásico	26
2.9	Configuración de triple núcleo magnético	29
2.10	Configuración de núcleo de tres piernas	30
2.11	Configuración de núcleo tipo acorazado	30
2.12	Configuración de núcleo de cinco piernas	30
2.13	Diagrama de conexión $\Delta-Y$	32
2.14	Circuito equivalente por fase para el banco $\Delta-Y$	33
2.15	Diagrama de conexión $Y-Y$	34
2.16	Circuito equivalente por fase del transformador $Y-Y$	35
3.1	Diagrama esquemático de una máquina síncrona trifásica	39
3.2	Representación de una máquina síncrona mediante circuitos	39
3.3	Diagrama elemental de una máquina síncrona	40
3.4	Encadenamiento de flujo de la fase a	41
3.5	Relación entre variables qd y de fases abc	45
3.6	Circuitos equivalentes de la máquina síncrona en componentes $qd0$	51
3.7	Voltaje y corriente en componentes $qd0$	61
3.8	Circuito equivalente de estado estable	62
4.1	Diagrama esquemático de una máquina de inducción trifásica	64
4.2	Representación de una máquina de inducción mediante circuitos	67
4.3	Relación entre componentes de fase abc y componentes transformadas qd	71
4.4	Circuitos equivalentes en componentes $qd0$	74
4.5	Ejes abc y qd en un marco estacionario	80
4.6	Circuitos equivalentes en componentes qd	81

INDICE DE FIGURAS (Continuación)

4.7	Circuito equivalente de una máquina de inducción	83
4.8	Circuito equivalente Thévenin	85
4.9	Característica Par-Deslizamiento	86
5.1	Corriente de magnetización, requerida para establecer un flujo magnético en el transformador	89
5.2	Corriente de magnetización, en donde se presenta corriente de avalancha	90
5.3	Característica de saturación y ajuste a una función tangente hiperbólica	93
5.4	Corriente de excitación i_j y componentes armónicas del primer ciclo	93
5.5	Enlaces de flujo y voltaje en el secundario del transformador en vacío	94
5.6	Componentes armónicas en diferentes ciclos de la corriente de avalancha	94
5.7	Corriente de avalancha y espectro armónico del primer ciclo, ángulo de energización de 30°	95
5.8	Corriente de avalancha y espectro armónico para el primer ciclo, ángulo de energización de 60°	95
5.9	Corriente de avalancha y espectro armónico para el primer ciclo, ángulo de energización de 90°	96
5.10	Corriente de excitación i_j	98
5.11	Corriente de excitación i_j con un mayor grado de saturación y su espectro armónico durante el primer ciclo	98
5.12	Lazo de histéresis	99
5.13	Corrientes de línea en el primario del transformador y espectro armónico del primer ciclo de una de las corrientes de línea	99
5.14	Enlaces de flujo en las fases y voltajes de fase en el secundario del transformador	100
5.15	Corrientes de línea en el primario y en el secundario del banco Δ -Y con carga resistiva	101
5.16	Enlaces de flujo y voltajes en el secundario del banco Δ -Y con carga resistiva	101
5.17	Corrientes de línea en el primario y secundario del transformador Δ -Y con carga resistiva-inductiva	102
5.18	Enlaces de flujo y voltajes en el secundario del transformador Δ -Y con carga resistiva-inductiva	102
5.19	Espectro armónico del primer ciclo de la corriente de energización, banco de transformadores Δ -Y con carga	103
5.20	Condición crítica de energización	104
5.21	Condición ideal de energización	104
5.22	Instantes de energización de un transformador trifásico Δ -Y para evitar la corriente de avalancha	105
5.23	Corrientes de avalancha controladas, primario del transformador	106

INDICE DE FIGURAS (Continuación)

5.24	Energización en vacío de un motor síncrono	108
5.25	Deslizamiento de polos durante el arranque del motor síncrono	108
5.26	Arranque en vacío del motor síncrono, inserción de plena carga al tener velocidad síncrona	109
5.27	Arranque de motor síncrono con primo motor, inserción de plena carga mecánica	110
5.28	Energización del motor síncrono a tensión reducida	112
5.29	Corriente de una fase del estator y ángulo δ del motor síncrono	112
5.30	Energización en vacío del motor de inducción	114
5.31	Energización en vacío de motor de inducción, e inserción de plena carga en estado estable	115
5.32	Curva Par vs Deslizamiento para diferentes valores de resistencia de rotor	116
5.33	Energización a plena carga de motor de inducción	118
5.34	Energización de motor de inducción a tensión reducida insertando plena carga	119
5.35	Energización de motor de inducción, carga con variación cuadrática	120
5.36	Circuito equivalente para mostrar depresiones de voltaje	121
5.37	Perfil de una depresión de voltaje debida a energización de un motor de inducción	122
A.1	Característica de saturación $\lambda-i_m$	138
B.1	Modelo de transformador monofásico saturable del ATPDraw	141
B.2	Curva de saturación utilizada por ATPDraw	142
B.3	Corriente de excitación i_f en el transformador monofásico	142
B.4	Enlaces de flujo en el transformador monofásico	142
B.5	Corriente de excitación i_f , condición sin corriente de avalancha	143
B.6	Modelo de transformador trifásico saturable del ATPDraw	143
B.7	Modelo de banco de transformadores implementado en ATPDraw	144
B.8	Corriente de línea i_A en el primario del transformador	144
B.9	Corriente de línea i_B en el primario del transformador	145
B.10	Corriente de línea i_C en el primario del transformador	145
B.11	Voltaje de fase en el secundario del transformador	145
B.12	Corrientes de avalancha de línea controladas comparadas con ATPDraw	146

APENDICE A

PARAMETROS EMPLEADOS EN LAS SIMULACIONES

APENDICE A

PARAMETROS EMPLEADOS EN LAS SIMULACIONES

A continuación se presentan los parámetros de las máquinas, empleados en las simulaciones digitales de los diferentes casos de energización presentados en el Capítulo 5.

Tabla A.1 Parámetros del transformador monofásico

Volts (kV)	R_1 (Ω)	L_{l1} (mH)	R_2 (m Ω)	L_{l2} (mH)	R_c (M Ω)
115/13.8	2.591	300	18.67	2.2	2.5

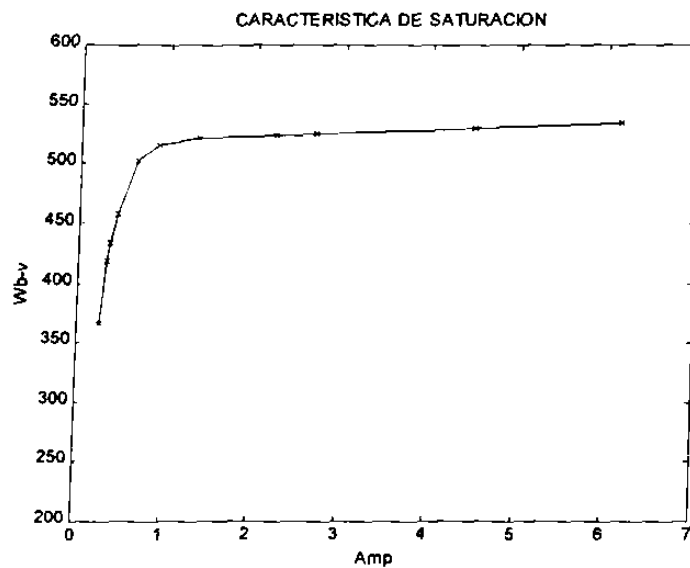


Fig. A.1 Característica de saturación $\lambda-i_m$.

Tabla A.2 Parámetros de motor síncrono

HP	Volts (kV)	f (Hz)	P (pu)	H (pu-seg)	R_s (pu)	X_{ls} (pu)	R_{fd} (pu)	X_{kd} (pu)
6,000	4	60	8	1	0.0121	0.140	0.039	0.115
					R_{fd} (pu)	X_{kd} (pu)	R_{fd} (pu)	X_{kd} (pu)
					0.032	0.092	0.00145	0.267
							X_{md} (pu)	X_{md} (pu)
							1.03	0.75

Tabla A.3 Parámetros de motor de inducción

HP	Volts (kV)	rpm	J (Kg m ²)	R_s (Ω)	X_{ls} (Ω)	R_r (Ω)	X_{lr} (Ω)	X_m (Ω)
2,250	2.3	1,786	63.87	0.029	0.226	0.022	0.226	13.04

Tabla A.4 Cargas utilizadas en las simulaciones del banco de transformadores

Carga Resistiva	Carga Resistiva-Inductiva
75 Ω	0.87 Ω , 200 mH

APENDICE B

COMPARACION DEL MODELO DE TRANSFORMADOR CON LOS MODELOS DEL ATPDRAW

APENDICE B

COMPARACION DEL MODELO DE TRANSFORMADOR CON LOS MODELOS DEL ATPDRAW

El modelo del transformador monofásico que se presentó en el Capítulo 2, se validó haciendo comparaciones de las variables más importantes de este elemento, con el modelo que se tiene en el programa ATPDraw [24] para hacer análisis de fenómenos transitorios. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, ya que se replica substancialmente el fenómeno.

La Figura B.1 presenta el modelo del transformador monofásico del ATPDraw, el cual fue empleado para corroborar las simulaciones del modelo de transformador propuesto en este trabajo de tesis.

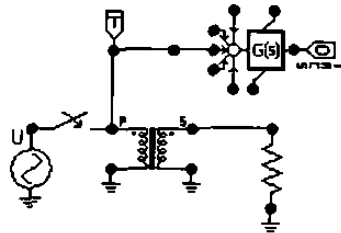


Fig. B.1 Modelo de transformador monofásico saturable del ATPDraw.

La Figura B.2 muestra la curva de saturación que emplea el modelo de ATPDraw, el cual utiliza interpolación lineal para el cálculo de los valores que relacionan λ vs. i_m . En la Figura B.3 se tiene la corriente de avalancha que se presenta al energizar el transformador y en la Figura B.4 se muestra los enlaces de flujo para la condición de energización en que se presenta el fenómeno de avalancha.

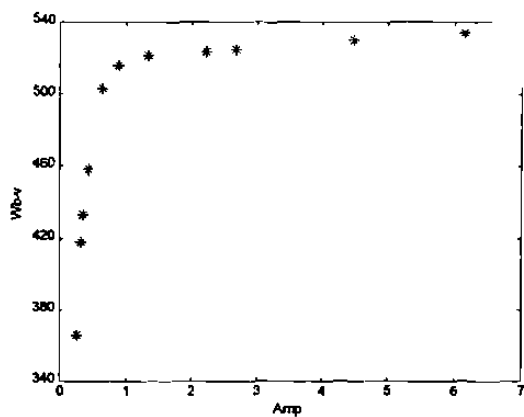


Fig. B.2 Curva de saturación utilizada por ATPDraw.

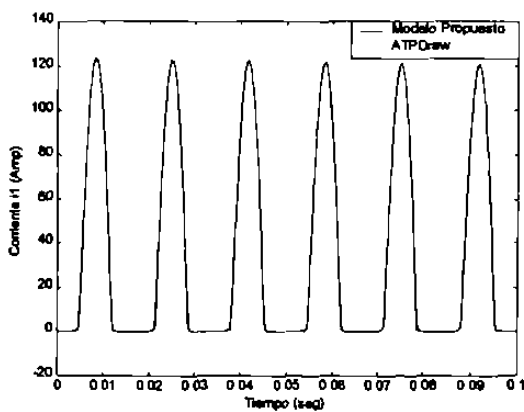


Fig. B.3 Corriente de excitación i_1 en el transformador monofásico.

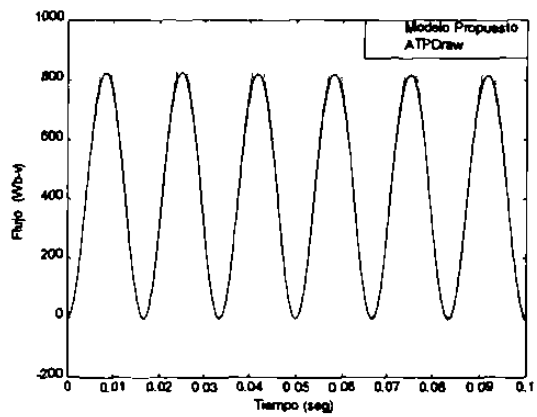


Fig. B.4 Enlaces de flujo en el transformador monofásico.

La Figura B.5 muestra la corriente de excitación del transformador, para una condición en que no se presenta la corriente de avalancha y además se tiene el caso en que la señal de corriente está saturada, motivo por el cual se presenta una distorsión armónica.

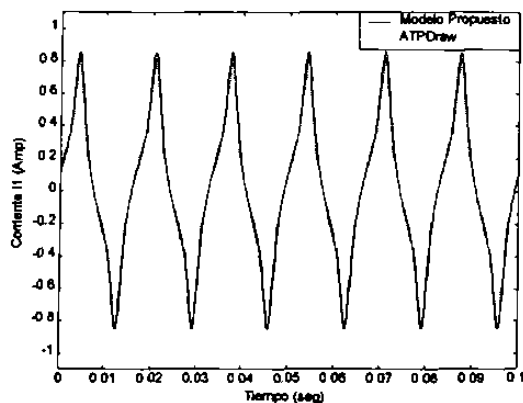


Fig. B.5 Corriente de excitación i_1 , condición sin corriente de avalancha.

Se usó también el modelo de transformador trifásico saturable, Figura B.6, y un banco de transformadores implementado con unidades monofásicas, Figura B.7, en donde se observó que se presentan características semejantes entre ellos y con el modelo propuesto. En el modelo trifásico saturable se eligió la opción de tener un transformador de tres o cinco piernas tipo acorazado, teniendo así una ruta para el flujo de secuencia cero como se mencionó en la Sección 2.6.1 de la tesis.

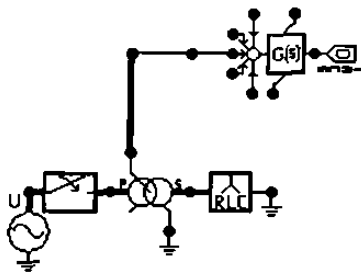


Fig. B.6 Modelo de transformador trifásico saturable del ATPDraw.

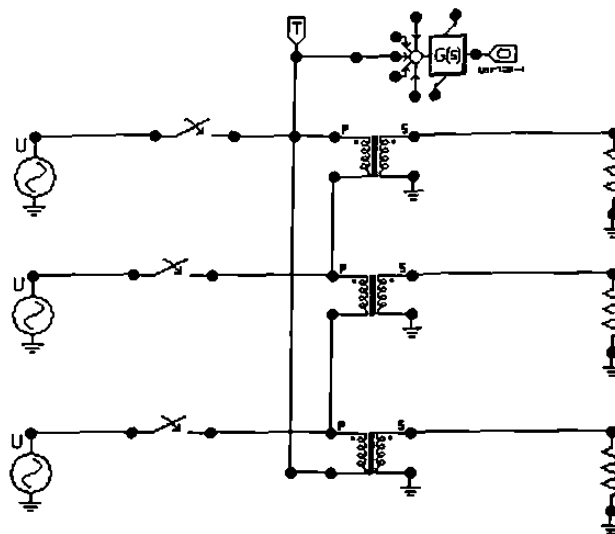


Fig. B.7 Modelo de banco de transformadores implementado en ATPDraw.

Las Figuras B.8 a B.10 muestran las tres corrientes de línea en el primario del transformador y las corrientes del banco trifásico con conexión delta-estrella propuesto para estudio en el Capítulo 2. Se observa que las corrientes obtenidas con el modelo propuesto son muy semejantes al modelo con que cuenta el ATPDraw. En la Figura B.11 se tiene el voltaje de una de las fases en el secundario del transformador, el cual muestra distorsión armónica, la que es producto de la saturación con que opera el transformador o el banco trifásico.

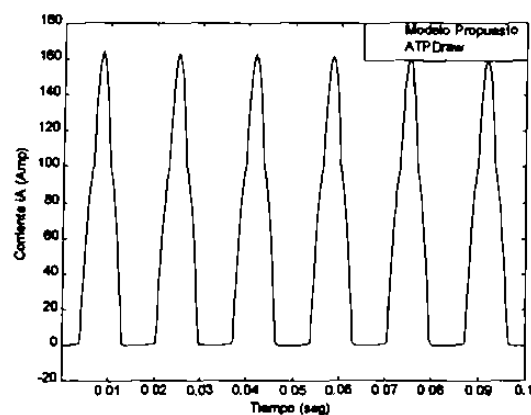


Fig. B.8 Corriente de línea i_A en el primario del transformador.

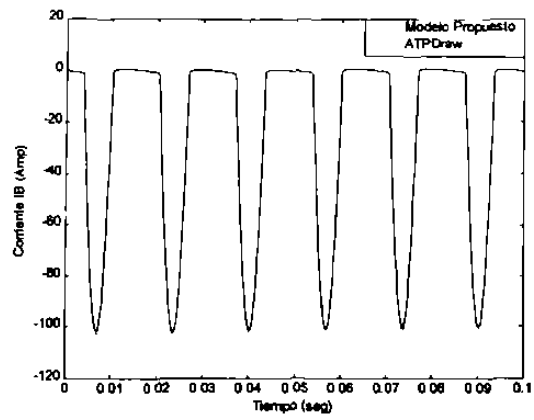


Fig. B.9 Corriente de línea i_B en el primario del transformador.

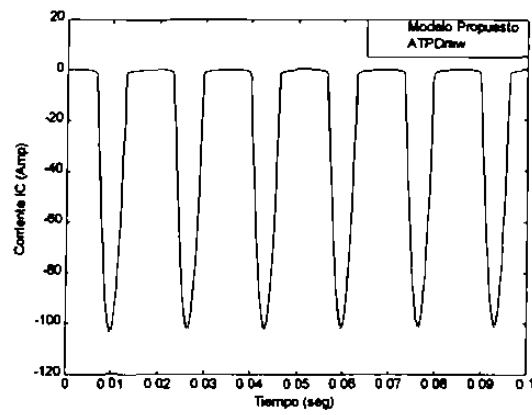


Fig. B.10 Corriente de línea i_C en el primario del transformador.

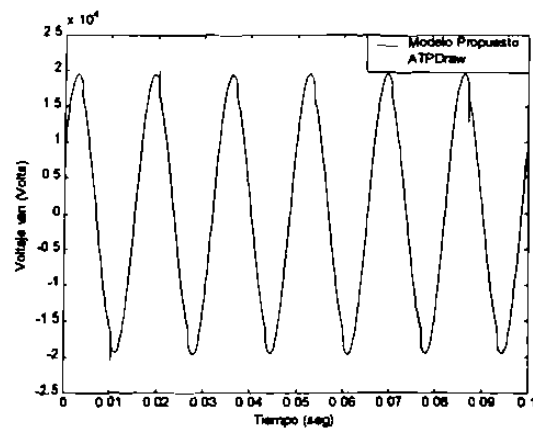


Fig. B.11 Voltaje de fase en el secundario del transformador.

En lo que respecta a la eliminación de la corriente de avalancha, con base a un procedimiento apropiado del cierre de interruptores, también se realizó una secuencia de cierre en el ATPDraw y se comparó con el modelo propuesto, lo cual se muestra en la Figura B.12.

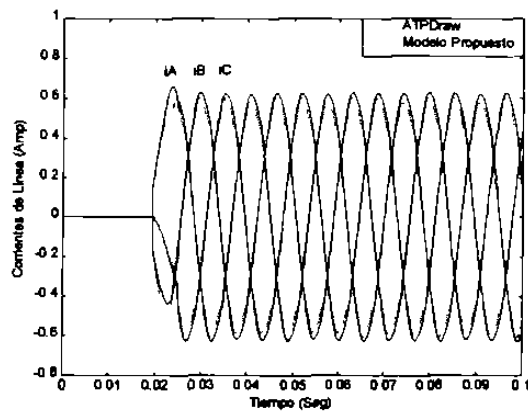


Fig. B.12 Corrientes de avalancha de línea controladas comparadas con ATPDraw.

APENDICE C
NOMENCLATURA

APENDICE C

NOMENCLATURA

μ_0	Permeabilidad del espacio libre
λ	Enlaces de flujo
i_m	Corriente de magnetización
R_1	Resistencia del primario del transformador
R_2	Resistencia del secundario del transformador
R_c	Resistencia del núcleo del transformador
R_s	Resistencia de estator
R_{kq}	Resistencia del devanado amortiguador en el eje q
R_{kd}	Resistencia del devanado amortiguador en el eje d
R_{fd}	Resistencia del devanado de campo
R_r	Resistencia de rotor
L_{L1}	Inductancia en el primario del transformador
L_{L2}	Inductancia en el secundario del transformador
X_{ls}	Reactancia de estator
X_{lkq}	Reactancia del devanado amortiguador en el eje q
X_{lkd}	Reactancia del devanado amortiguador en el eje d
X_{lfd}	Reactancia del devanado de campo
X_{mq}	Reactancia mutua en el eje q
X_{md}	Reactancia mutua en el eje d
X_{lr}	Reactancia de rotor
X_m	Reactancia mutua entre rotor y estator

