CAPÍTULO III

PROPUESTA DE TESIS

INDICACIONES METODOLÓGICAS PARA LA REALIZACIÓN DE LABORATORIOS DE COMPUTACIÓN Y/O COMPUTADORAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

3.1 INDICACIONES METODOLÓGICAS PARA CONCEBIR LA ENSEÑANZA CON USO DE LA COMPUTADORA:

1. Lograr la integración:

La computadora no puede sustituir al maestro, ni al libro de texto. No puede remplazar ninguno de los recursos que se posee para llevar a cabo el proceso, ella se integra a esos recursos, aportando posibilidades nuevas.

2. Lograr la racionalidad en el uso de la computadora:

La computadora debe usarse en aquellas tareas que hacen uso de las potencialidades que ella ofrece en la activación del proceso de aprendizaje (simulación de procesos, calculo, interacción con el alumno etc.).

3. Lograr el diseño programático del contenido introduciendo la computadora:

Usar la computadora para ilustrar ejemplos del currículum actual no es suficiente. Hay que analizar el currículum asumiendo la disponibilidad de las computadoras y sus potencialidades, realizando el diseño programático del contenido teniendo en cuenta estos elementos.

4. Doble papel del maestro:

En el proceso docente al maestro le corresponde el papel de guiar y mediatizar los saberes socioculturales que debe aprender a interiorizar el alumno. Esto significa que debe enseñar en un contexto de interactividad propiciando que los alumnos reconstruyan el conocimiento.

5. Principio de la interactividad del alumno:

El alumno interioriza el conocimiento primero en el plano interindividual y posteriormente en el plano intraindividual. Por ello el uso de la computadora debe concebirse de forma tal que permita la interacción entre los alumnos y entre estos y el profesor.

6. Concebir su utilización bajo el principio de la caja transparente:

La computadora debe dar la posibilidad de evaluar y de autoevaluar a los alumnos en cada etapa del proceso con el fin de que los alumnos detecten sus preconcepciones erróneas y puedan modificarlas.

3.2 Funciones metodológicas del uso de la computadora y de la calculadora en la enseñanza de las matemáticas.

1. Provocar la contradicción dialéctica entre la predicción de lo que el alumno piensa que va a suceder y la realidad.
2. Propiciar el proceso de construcción de los nuevos conceptos a partir de las acciones que los alumnos realizan (seminario computarizado).
3. Propiciar la generalización, lo que contribuye a que el alumno no solo se apropie de casos particulares (variar las condiciones del problema dado y estudiar diferentes situaciones).

4. Propiciar el descubrimiento de nuevas relaciones y la formulación de nuevas leyes desconocidas para él, por las potencialidades de cálculo de la computadora.

Para la segunda función, el laboratorio debe tener los siguientes requisitos:

1. A partir del conocimiento de las principales dificultades del tema, determinar los conceptos que se quieren ilustrar en el laboratorio.
2. Determinar el momento más apropiado del tema para hacer el laboratorio.
3. Determinar el conocimiento previo que es necesario para el laboratorio.
4. Selección de las tareas.
5. Determinar las preguntas más apropiadas para motivar y dirigir la observación de los estudiantes y el proceso de razonamiento, antes, durante y después del laboratorio.
6. Determinar las preguntas de seguimiento que pueden ser usadas para evaluar el desarrollo de la comprensión del nuevo concepto.

Seminario computarizado:

Se inserta en el curso posterior a las clases teóricas con el objetivo de que los alumnos consoliden los conocimientos a partir de sistematizar los conceptos. En esta clase los alumnos trabajan por parejas con la computadora, interactuando a su vez con el maestro.

Importancia de los seminarios computarizados:

- Establecimiento de las conexiones entre conceptos.
- Comprender las relaciones y diferencias entre los conceptos, propiciando una estructura conceptual coherente.

3.3 Regularidades Metodológicas

1. Garantizar el sistema de tareas para el laboratorio en soporte electrónico.
2. El número de tareas para el laboratorio debe ser lo suficientemente amplio de forma que se garantice el trabajo para los estudiantes aventajados que se adelantan a los demás; así como para el trabajo independiente.
3. Incluir, siempre que sea posible la instrucción del sistema de computación o la calculadora que se debe utilizar en el enunciado del ejercicio.
4. Considerar la posibilidad de planificar trabajos extraclases con el uso de las computadoras.
5. En el desarrollo del curso, mencionar siempre que sea posible las instrucciones del MatLab, Derive u otro sistema que se utilizan, para realizar las operaciones indicadas, describiendo su sintaxis o pedir a los estudiantes las instrucciones que utilizará para resolver determinado ejercicio.
6. Hacer ver al estudiante que el sistema matemático es bueno solo con el uso de los conceptos matemáticos (no confiar ciegamente en los resultados que da la máquina)

3.4 EJEMPLOS DE UTILIZACIÓN DE LAS COMPUTADORAS EN LAS MATEMATICAS.

EJEMPLO 1

ALGEBRA LINEAL

Laboratorio Computación

Orientaciones a los estudiantes.

Algunos comandos básicos del matlab

- MATLAB distingue entre minúsculas y mayúsculas, esto quiere decir que A y a representan variables diferentes
- Para introducir matrices en MATLAB : A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9] es decir se entra por filas y estas separadas por ;
- C=rref(A) se obtiene la matriz C = a la matriz escalón de A
- C= [A b] Forma la matriz ampliada (A/B)
- Para resolver un SEL se utiliza el comando X=[A\B]
- Para escribir una línea de comentario, esta comienza con el símbolo %.
- Calculo de inversa, use el comando inv(A).
- Producto de matrices A*B, suma A+B, diferencia A-B
- B=c*(2*rand(n,m)-1) genera una matriz aleatoria de orden n por m con elementos entre -c y c
- Una potencia entera de una matriz A^n se usa el comando A^n donde n tiene valor asignado previamente.
- El comnado triu(A) forma matrices triangulares superiores a partir de la matriz aleatoria A, y el comando tril(A) es para las triangulares inferiores
- el comando R=eye(n) forma la matriz R idéntica de orden n.
- Con el comando A´ se obtiene la transpuesta

TAREAS

1. Si se tienen dos puntos en el plano con coordenadas X distintas, existe una recta única $y= C_1 X + C_2$ que pasa por ambos puntos. Si se tienen tres puntos en el plano de coordenadas x distintas, existe una parábola única. $Y = C_1 X^2 + C_2 X + C_3$ que pasa por los tres puntos. Si se tienen *n+1 puntos* con coordenadas X distintas, entonces existe un polinomio de grado N único que pasa a través de los n+1 puntos: $y = C_1 X^n + C_2 X^{(n-1)} + \ldots + C_{n+1}$ los coeficientes $C_1,\ldots, C_{n+1}$ se pueden encontrar resolviendo un SEL.

Encuentre los puntos C_1, C_2 y C_3 de manera que $y = C_1 X^2 + C_2 X + C_3$ pase por los puntos

a) $P_1(2,5)$, P_2 (3,10) y P_3 (4,-3)

b) $P_1 = (1,-1)$, P_2 (3,3),P_3 (4,-2)

2. Encuentre una matriz A

$$A \approx \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tal que } A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Un fabricante de joyería sobre diseño tiene órdenes por dos anillos, tres pares de aretes, cinco prendedores y un collar. El fabricante estima que le lleva 1 hora de mano de obra hacer un anillo, 1½ hacer un par de aretes, ½ hora va prendedor y 2 horas un collar.

   a) Exprese las órdenes del fabricante como una matriz fila.
   b) Exprese los requerimientos en horas para los distintos tipos de joyas como una matriz columna.
   c) Utilice el producto de matrices para calcular el número total de horas que requerirá para terminar las órdenes.

4. La siguiente tabla contiene ventas, utilidades brutas por unidad y los impuestos por unidad sobre las ventas de una compañía grande.

	Producto Artículo vendido				Utilidad unitaria (en cientos de dólares)	Impuestos unitarios (en cientos de dólares)
Mes	I	II	III	Artículo		
enero	4	2	20	I	3.5	1.5
febrero	6	1	9	II	2.75	2
marzo	5	3	12	III	1.5	0.6
Abril	8	2.5	20			

Encuentre una matriz que muestre las utilidades y los impuestos totales para cada mes.

5. Calcule A^2, A^3, A^4, A^5 y A^6. Si A es la matriz idéntica de orden cinco. Diga que regularidad observa.

6. Una matriz de probabilidades es una matriz cuadrada que tiene dos propiedades.
   1) Todos sus elementos son no negativos (≥0).
   2) La suma de los elementos de cada renglón es 1.

Las siguientes matrices son de probabilidades.

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

a) Pruebe que PQ y P^2 es una matriz de probabilidades

7. Para una matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ se quiere encontrar una matriz B tal que AB = BA.

8. Genere dos matrices A y B de orden 2 con elementos entre -10 y 10. Encuentre $C(A+B)^2$ y $D=A^2+2AB+B^2$ compare C y D, encuentre C-D.

   Repita lo anterior varias veces con matrices distintas. Qué puede concluir la afirmación $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$

9. Genere dos matrices A y B triangulares superiores de orden 3. Halle su producto. Repita para otras 3 pares de matrices aleatorias. Qué puede concluir sobre el producto de matrices triangulares superiores. Que puede concluir para matrices triangulares interiores.

10. Se dice que una matriz A diferente de cero es multipotente si existe un número k tal que $A^k = 0$. El índice de nilpotencia se define como entero más pequeños que $A^k = 0$. Genere una matriz aleatoria A de orden 5 (triángulo superior). Compare A^2, Aa^3, etc. Demuestre que A es nilpotente y encuentre su índice de nilpotencia.

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ Conviértala en matriz escalón y argumente por qué el SEL [A:b] tiene solución independiente del vector b de orden 4x1 que se elija.

12. Buscando la matriz escalón de $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & -6 & 7 \\ 3 & 9 & -15 & 9 \\ 9 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ Argumente por qué existe un vector b de 4x 1 para el que el sistema [A:b] no tiene solución. Realice un experimento para encontrar un vector b para el que no exista una solución

¿Cómo pueden generarse vectores b que garantice que habrá solución? Pruebe su procedimiento.

13. Muestre que la Matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es su propia inversa

14. Pruebe que la inversa de A tiene ceros abajo de la diagonal $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 & 4 \\ 0 & 8 & 13 & 22 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ .Repita para otras matrices triangulares superior y obtenga una conclusión. Cómo son los elementos de la diagonal de la matriz inversa de una matriz triangular.

15. Pruebe si las siguientes matrices, y otras con el mismo patrón general, son o no inversibles. Describa sus resultados.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ Obtenga una conclusión sobre la relación entre la invertibilidad de su producto. Explique de qué manera la evidencia apoya su conclusión.

16. Pruebe la relación entre inv(A^t) y (inv A) ^{t} .

17. Genere cuatro matrices aleatorias de diferentes tamaños, algunas cuadradas y otras no cuadradas. Para cada matriz F generada, encuentre G = F. F^t. Describa los patrones observados en la forma de estas matrices G.

EJEMPLO 2

LABORATORIO DE GRÁFICOS POR COMPUTADORA

Descripción del laboratorio.

En este ejemplo haremos una descripción breve de la experiencia realizada, en seminarios computarizados.

a) **Aplicación del concepto de función como modelo.**

Objetivo 1: Explotar e interiorizar los siguientes conceptos: variable dependiente e independiente, dominio, condominio y ámbito de funciones, función continua, discontinua, creciente, decreciente y constante, máximos y mínimos de funciones, conjuntos solución de **$f(x)>0$, $f(x)<0$ y $f(x) =0$**, intersecciones con los ejes.

Objetivo 2: Ligar los conceptos del objetivo anterior con la visión de función como modelo: reconocer el poder descriptivo de las funciones para modelar diversos fenómenos de la naturaleza y desarrollar la habilidad de interpretar la información que dichos modelos resumen.

Este laboratorio consistió en una práctica de solución de problemas de optimización, donde se hizo énfasis en el *concepto* de función como modelo. El vocabulario de funciones y los conceptos que ellos encierran se vieron en clase sin utilizar la computadora, y además se construyeron algunos gráficos de funciones sencillas con lápiz y papel.

Para resolver 12 problemas de este tipo, se emplearon 10 lecciones de 40 minutos cada una (2 semanas lectivas). El laboratorio consistió en una combinación adecuada de trabajo en el aula y trabajo en las computadoras considerando:

1) discusión del enunciado de los problemas en clase

2) trabajo en el laboratorio para manipular las funciones y obtener resultados

3) discusión y análisis de resultados en el aula.

b) **Introducción de la función cuadrática.**

Objetivos: Explicar los gráficos de funciones cuadráticas y descubrir o verificar los patrones existentes entre la forma general del gráfico y el valor del discriminante y del coeficiente a de su ecuación algebraica. Verificar la validez del resultado sobre el número de raíces reales de una ecuación cuadrática y el signo de su discriminante. Resolver ecuaciones e inecuaciones cuadráticas gráficamente y verificar los resultados analíticamente.

Para este laboratorio se emplearon seis lecciones y se aplicó para introducir el tema por primera vez. Previamente, los estudiantes habían trabajado el tema de funciones en general. La labor de los estudiantes en el laboratorio se orientó con una guía de ejercicios de explotación de gráficos de parábolas clasificadas y ordenados apropiadamente. En el transcurso de las actividades de laboratorio, se discutieron en clase, los principales resultados que los estudiantes fueron descubriendo y se justificaron teóricamente.

c) **Gráficas de funciones trigonométricas.**

Objetivos: verificar o redescubrir algunas identidades trigonométricas y contribuir a que los estudiantes interioricen los conceptos de amplitud, período y traslación.

Se dibujaron 42 gráficas de funciones trigonométricas en dos lecciones de 40 minutos. Los estudiantes habían trabajado el tema de trigonometría en clase y dibujado algunas funciones con lápiz y papel.

RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA

1. Los laboratorios resultaron elementos motivadores para las clases de matemática. El romper la rutina de las actividades usuales de clase e introducir el uso del computador despertó un mayor interés de los estudiantes por las clases de matemática en general.
2. La tarea de elaborar órdenes para comunicar al computador el gráfico por construir contribuyó a mejorar el empleo del lenguaje simbólico de la matemática: uso de paréntesis, operadores aritméticos y sus operandos, funciones y sus argumentos. El trabajo de "hacerse entender" por el computador y su evidente la necesidad de ser riguroso en el empleo del lenguaje matemático.
3. El recurso Gráfica posibilitó al estudiante construir muchas gráficas de funciones en corto tiempo, sin que se cansara o aburriera, y le permitió explorar las características de estos objetos, *por ejemplo*: donde son crecientes, decrecientes, constante, periodicidad, amplitud, simetrías, intersecciones con los ejes, intervalos donde las imágenes son positivas o negativas, valores donde se alcanzan máximos y mínimos. La manipulación de gráficos de funciones redundó en que los anteriores conceptos resultaran "visibles" y por lo tanto mucho más naturales.
4. Se amplió el horizonte sobre el tipo de funciones que el estudiante podía manipular y de las cuales extraer información. Además permitió tratar nuevos conceptos relativos a funciones como máximos y mínimos.

Con este recurso se hizo posible introducir el tema de funciones, a estudiantes que lo estudian por primera vez, abordando las funciones como recursos para describir situaciones de la naturaleza que aportan información valiosa sobre el fenómeno que modelan, cuestión que antes requería esperar hasta un curso de

cálculo universitario. Este enfoque clarifica y motiva al estudiante sobre la necesidad de estudiar el tema de funciones.

Todo esto fue posible sin abandonar otros temas del programa de matemática y utilizando la misma cantidad de horas lectivas por semana.

5. El recurso de construir gráficos rápidamente permitió economizar tiempo para enfatizar sobre aspectos conceptuales.

6. La solución gráfica de ecuaciones e inecuaciones posibilitó abordar problemas que usualmente no se resuelve por su dificultad o incluso cuya solución requiere de mayor teoría matemática. Por ejemplo, aproximar soluciones de ecuaciones con raíces no enteras. Esto contribuye a que el estudiante reconozca en la matemática que estudia un aparato no acabado que muchas veces no da respuesta a problemas relativamente sencillos.

7. En la exploración de funciones trigonométricas, los estudiantes dedujeron y comprobaron muchas de las entidades clásicas. Identidades como **sen** $(-\chi)$ **= -sen** (χ) **o sen** $(\chi+\pi)$ **= sen** (χ) comenzaron a ser más naturales cuando los estudiantes verificaron que los gráficos de **y = sen** $(-\chi)$ y **y = -sen** (χ) son iguales. Por otra parte al dibujar juntas funciones como **y = sen** (2χ) y **y = 2sen** (χ) se pudo ver la falsedad de la identidad **sen** (2χ) **= 2 sen** (χ) que muchos estudiantes inventan.

8. A pesar de que aún son pocas las experiencias de este tipo que hemos realizado, nos parece que el conocimiento que adquiere el estudiante es más duradero al ser más significativo y estar asociado a ideas gráficas. Por otra parte, pareciera que el estudiante adquiere mayor madurez para operar expresiones algebraicas como ecuaciones e inecuaciones cuando le es posible apoyarse en una descripción geométrica.

El hecho mismo de usar computadoras para graficar funciones no es lo que contribuye hacer de la enseñanza de la matemática un proceso de autoconstrucción del conocimiento, como algunas veces se pretende.

La definición de un material de trabajo apropiado y la actitud correcta del profesor en el laboratorio son esenciales. Por ejemplo, un cierto material puede ser usado de una manera dirigida haciendo que el estudiante construya gráficos automáticamente y anotando las conclusiones del docente, sin darle la oportunidad de pensar y llegar a conclusiones propias. O por el contrario, se puede usar de manera que el estudiante se cuestione sobre los significados y características del objeto matemático que manipula, descubra patrones de similitud o que verifique resultados teóricos. Todo esto con el cuidado del docente, al conducir la clase, de lanzar solo las preguntas indispensables para guiar el trabajo de los estudiantes o hacerles pensar sobre aspectos importantes que dejan de lado.

EJEMPLO 3

LA SUPERCALCULADORA: EL CONCEPTO DE FUNCION Y LOS CONTEXTOS GRAFICO-ALGEBRAICO

En este ejemplo se describen los resultados más relevantes de la aplicación en cálculo, en relación al concepto de función y la interacción entre los contextos gráfico-algebraico, con el uso de supercalculadoras. Se ofrecen, además, algunas reflexiones en torno al estudio realizado.

Las situaciones de apoyo que dieron pauta a la ejecución de este laboratorio, fueron las siguientes:

- Conservamos los elementos básicos con los que se ha trabajado como resultado de las investigaciones realizadas en torno al curso de precálculo, como lo es la construcción de nuevas funciones a partir de las funciones elementales **(f(x)=x, f(x)=1x, f(x)= sen x, etc.)**.
- Implementamos el uso de supercalculadoras (Texas Instruments, modelo TI-81) como herramienta didáctica, intentando favorecer la interacción entre contextos, concerniendo especialmente a la viabilidad de un acercamiento cualitativo a este nivel.

Así, en este ejemplo, presentamos los resultados más relevantes del trabajo, principalmente en lo que respecta al uso de las calculadoras con capacidad gráfica. Entre tales resultados, a grandes rasgos, podemos mencionar los siguientes: el uso de este tipo de calculadoras para el estudio de funciones en diferentes contextos, parece favorecer la descompartamentalización.

Por otra parte, dada la rapidez de graficación y capacidad visual de estas máquinas, en las secuencias de enseñanza de operaciones gráficas, para construir nuevas funciones, resulta de gran utilidad. También, constituye un apoyo didáctico efectivo en el entendimiento de conceptos tales como: función creciente, decreciente, valores máximos y mínimos, etc.

Para el estudio de nociones específicas, en tanto su expresión analítica, se partió del supuesto reconocimiento por parte del alumno de algunas de las formas elementales (curvas) en cuanto a su relación con la expresión analítica, mínimamente abordadas en los cursos de Geometría Analítica (nivel medio superior), identificándolas como funciones: $\mathbf{f(x) = x}$, $\mathbf{f(x) = x^2}$, entre otras; las cuales serán el punto de partida para iniciar la construcción de nuevas funciones como resultado de operar gráficamente, obteniendo la expresión analítica como producto de las transformaciones asociadas a la representación simbólica de ejecución de una secuencia de operaciones.

En esta parte, utilizamos la supercalculadora intentando explotar su potencial en cuanto a la visualización del efecto que hacen en la gráfica, por ejemplo, los parámetros $\mathbf{a, b, c} \in \mathbf{R}$ en la secuencia:

$$\mathbf{f(x) = 1/x,}$$

$$\mathbf{f(x) = a/x,}$$

$$\mathbf{f(x) = a/(x + b),}$$

$$\mathbf{f(x) = [a/x(x + b)] + c.}$$

Se experimentó con secuencias similares para funciones algebraicas y trascendentes en general.

En cuanto a la evaluación, durante el desarrollo de la experiencia, utilizamos un recurso que denominamos tareas. A fin de analizar las respuestas de los estudiantes, se diferencian tres indicativos de interacción entre los contextos algebraicos y gráficos: la interpretación, la predicción, y la justificación.

Características de las tareas en el indicador interpretación: la información está dada en dos contextos simultáneamente; el problema a ser resuelto requiere interacción entre las dos partes de la información.

Características de las tareas en el indicador predicción: la información se da en un solo contexto, el problema a ser resuelto requiere solución en el otro contexto.

Por último, en el indicador justificación, se requiere que el estudiante argumente el porqué de sus respuestas.

En el examen, se incluyen algunos reactivos con el propósito de explorar hasta qué punto la supercalculadora brinda información que pueda conducir a sus soluciones, y cómo es que el estudiante interacciona con ella bajo los conocimientos y habilidades que se pretendían desarrollar en la experiencia. Por ejemplo:

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación sen (1/x) = 0?, Argumente su respuesta.

En este reactivo, observamos en cierta medida, la potencialidad de la utilidad de la supercalculadora Algunos alumnos que dan la solución correcta, ofrecen argumentaciones como las siguientes: "de la gráfica se puede ver que tiene infinitas

soluciones"; "parece que la función cruza el **eje x** infinidad de veces, aunque se le dé -a la máquina- un rango pequeño, no se determinan las raíces,... entonces tiene un número infinito de soluciones". Además dos de estos estudiantes, van más allá en sus argumentaciones, escriben, por ejemplo, "todas las soluciones están dentro del intervalo **[-2, 2]** porque después, hacia el infinito positivo y negativo, la función ya no cruza al eje de las **x**", "la función tiene infinidad de raíces que se pegan cada vez más al cero, pero aquí no está definida,...".

Dado el tipo de argumentaciones, podemos decir que el uso de la supercalculadora resulta bastante útil en la explotación de este tipo de problema. Pero se debe tener presente que la máquina tiene una cierta capacidad, y, en ocasiones, si nos guiamos sólo por las gráficas que dibuja, sin utilizar otros caminos (estrategias, conocimientos), podemos llegar fácilmente a conclusiones o respuestas erróneas.

Para las principales relaciones entre los dos contextos, por ejemplo, en los reactivos de intersección en el indicador interpretación, se propone un dibujo (contexto gráfico), a fin de corresponder a criterios de asociación cualitativos para, que por lo menos, dos expresiones funcionales; así resultan más verosímiles los resultados obtenidos.

Los resultados obtenidos dejan entrever un desarrollo satisfactorio de las habilidades y conocimientos pretendidos en los estudiantes. Satisfactorio en el sentido de que son competentes en su mayoría, en la resolución de problemas. Estos resultados sugieren también que las tareas involucradas en el examen pueden ser correctamente resueltas a este nivel, al menos en el grupo experimental, con escasa intervención del profesor (después de ser enseñadas las estrategias y habilidades

necesarias), y que los criterios supuestos de asociación entre contextos parecen cumplirse.

REFLEXIONES FINALES.

En la experimentación (y después de ella), se observó que el estudiante recurre a la graficación en forma espontánea con el fin de "corroborar" sus procedimientos analíticos; consideramos que es necesario estudiar tal conducta de los alumnos.

Por otro lado, para dar una idea de lo que se puede lograr con las alternativas propuestas en esta investigación, mencionaremos un ejemplo sobre las ventajas que se tienen cuando el alumno es capaz de reconocer y trabajar con funciones en diferentes contextos.

Cuando se trataba el estudio del cálculo integral, se les preguntó a los estudiantes si podían encontrar la solución, sin utilizar fórmulas, de la integral. Varios alumnos indicaron que sí lo podían hacer, y, como esperábamos, en sus explicaciones aludían a la representación gráfica de la función **f(x)=sen x** y al conocimiento de la integral como área.

Como señalamos en la primera parte de este escrito, con las estrategias, habilidades y conocimientos adquiridos en el curso, con apoyo en la supercalculadora, el estudiante es capaz de reconocer y trabajar con funciones en diferentes contextos. Creemos que es ésta una situación que puede favorecer el hecho de evitar compartamentalización del conocimiento (al menos en lo que respecta al concepto de función). Así, se hace necesario, en la elaboración de

estrategias didácticas y en la observación sistemática de experiencias de aprendizaje, analizar tal situación.

Por otra parte, consideramos se debe tener cuidado al intentar introducir la supercalculadora en la enseñanza; es conveniente explorar sus ventajas y limitaciones a fin de evitar conflictos técnicos que puedan propiciar en el estudiante un aprendizaje deficiente. Aún más, debido a que ellos no están acostumbrados a utilizar este tipo de calculadoras con otro fin el de realizar cálculos numéricos, se puede correr el riesgo (si no se aclara el uso que se pretende darles), de que en otros cursos de matemáticas en los que no tengan a su disposición estas máquinas, no sean capaces de enfrentar satisfactoriamente, cuando se requiera, problemas que involucren las habilidades y conocimientos que se pretenden desarrollar.

Por "ultimo, en relación a los cursos de precálculo vigentes, una reflexión importante, es la posibilidad de ofrecer una alternativa diferente que permita a los estudiantes interaccionar los conocimientos del álgebra y lo geométrico-analíticos mediante la construcción de funciones y la solución de problemas en estos contextos.

EJEMPLO 4

FUNCIONES CUADRÁTICAS

En este laboratorio se parte de un problema real para llegar a describir las características de las funciones cuadráticas.

Descripción del laboratorio:

Problema inicial:

El Sr. Alonso es propietario de un edificio de departamentos el cual cuenta con **60 habitaciones**, él puede rentarlas todas si fija una renta mensual de **$200** por habitación. A una renta más alta, algunas habitaciones quedarán vacías. En consecuencia, por incremento de la renta de **$5**, una habitación queda vacía, sin posibilidad alguna de rentarla. Determine la relación entre ingreso total y el número de habitaciones vacías.

La intención de resolver este tipo de problemas, es para destacar que la solución, se puede encontrar a través de diferentes vías llamadas métodos didácticos tales como: el método de la enseñanza problémica, el método de aprendizaje por descubrimiento, el método de inducción.

Aparte de lo interesante que ya resulta encontrar la solución, independientemente del método que se elija, en este tipo de problemas, el estudiante puede valerse del uso de una computadora, o bien de una calculadora sofisticada pero el hecho de contar con estos recursos, no es garantía de poder llegar a la solución, ya que para resolver el problema, se requiere de un razonamiento previo donde podamos establecer una o más estrategias de solución.

Una vez encontrado el resultado del problema con los datos obtenidos procederemos, a construir una gráfica con la ayuda de una calculadora gráfica, con la finalidad de indicarle a los estudiantes, que se trata de una función cuadrática, y de paso aprovechar, para explicar las características y cualidades de las funciones cuadráticas.

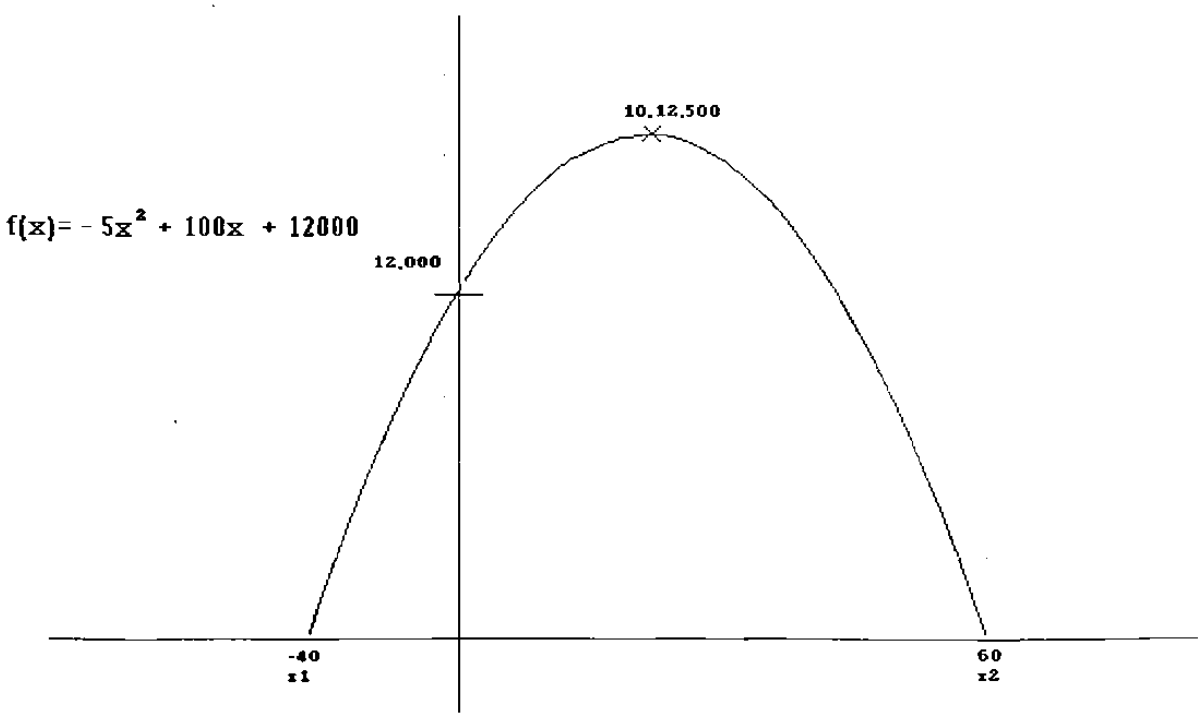
Con la ayuda de una calculadora se le pide a los estudiantes que desarrollen una tabla con tres columnas, una para representar las habitaciones rentadas, otra para el costo de la renta de cada habitación y la tercera para los ingresos, y de esta manera poder apreciar el comportamiento que tiene la columna de ingresos. Pues en el problema se nos pide encontrar el ingreso máximo

NUMERO DE HABITACIONES RENTADAS	PRECIO DE RENTA X HABITACIÓN	INGRESOS
60	200	12000
59	205	12095
58	210	12180
57	215	12255
56	220	12320
55	225	12375
54	230	12420
53	235	12455
52	240	12480
51	245	12495
50	**250**	**12500**
49	255	12495
48	260	12480
47	265	12455
46	270	12420
45	275	12375
44	280	12320
43	285	12255
42	290	12180
41	295	12095
40	300	12000
39	305	11895

Si observamos los valores de la tabla podemos encontrar que en la columna de ingresos esta el máximo valor que es **$12,500**, el cual se obtiene si multiplicamos la columna de habitaciones rentadas por la columna de precio de la renta por habitación. Si observamos las otras dos columnas podemos encontrar también que las celdas de cada una de estas dos columnas multiplicadas representarían el número de habitaciones rentadas y así como el precio de lo que debe ser rentada cada habitación.

De esta forma podemos apreciar que la solución de este problema puede ser encontrada a través de la realización de simples cálculos. Pero es importante hacer un razonamiento previo que nos permita interpretar correctamente la solución del problema.

Se le pide también a los estudiantes que grafiquen los valores obtenidos en la tabla anterior donde el eje de las **"x"** sería el número de habitaciones rentadas mientras el eje de las **"y"** sería el ingreso obtenido de las habitaciones rentadas. Mediante la visualización de esta gráfica, les explicamos a los estudiantes lo que significa cada una de las intersecciones con el eje **"x"**, y también lo que significan las intersecciones con el eje **"y"**, finalmente cuál es el valor máximo de la función, y como se obtiene este valor.



Este problema también se puede resolver, sobre la base de métodos numéricos, es decir, lo que sería una interpolación elemental. Donde se trata de buscar un polinomio que mejor aproxime esos números del problema, y esto se logra haciendo unos cálculos muy sencillos.

Otro método que también nos puede ayudar a encontrar la solución de este ejercicio sería mediante la utilización del método algebraico, el cual consiste en resaltar las condiciones del problema mediante la asignación de variables.

Regresando a los datos del problema una de las condiciones que tenemos, nos dice que si se aumenta en **$5** el precio de renta a cada habitación, se deja de rentar una.

Por lo tanto consideramos que la variable **x sería el # de habitaciones** que quedarán vacías, y esto a su vez nos dice que el incremento de la renta entonces seria **5x**. Por esta razón tendríamos que **(60-x)** sería el número de habitaciones rentadas. De tal forma que **(200+5x)** sería el precio de renta fijado para cada habitación.

Si multiplicamos:

(# de habitaciones rentadas) x (el precio de renta de cada habitación)
= obtendríamos un ingreso.

En base a lo anterior las ecuaciones quedarían expresadas de la siguiente forma:

1. ***x = # de habitaciones vacías.***
2. ***(60 – x) = # de habitaciones rentadas.***
3. ***(200+5x)= Precio de la Renta Mensual de cada habitación***

   (# habitaciones rentados) por (renta mensual) = ingreso.

   Ingreso=I(x)

   (60-x)(200+5x)= I(x)

Del producto de la ecuación 2 y la ecuación 3 obtenemos la siguiente función. ***I(x)=12,000+300x-200x-5x²*** que esta sería la función de ingreso. Al simplificar y ordenar nos quedaría la ecuación de esta forma: ***I(x)=-5x²+100x+12,000.*** como segundo paso se procede a resolver la función de ingreso mencionándole a los estudiantes que pueden utilizar el método que para ellos se les haga mas fácil de resolver ó el que mejor dominen. A través de la observación nos hemos dado cuenta que por lo general el estudiante decide resolver el problema utilizando el método de formula general.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De la ecuación de ***I(x)=***$5x^2 + 100x + 12{,}000$ tomamos los valores de los coeficientes a, b, c, que corresponden a la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde

$a = -5$
$b = 100$
$c = 12{,}000$

Sustituimos estos valores en la formula general con el objeto de encontrar los valores de x1 y x2 quedando de la siguiente manera.

$$x_{1,2} = \frac{(-100) \pm \sqrt{(100)^2 - 4(-5)(12{,}000)}}{2(-5)}$$

Simplificando

$$x_{1,2} = \frac{(-100) \pm \quad (10{,}000) + 240{,}000}{-10}$$

La siguiente simplificación nos permite observar en el discriminante (valor que esta dentro de la raíz cuadrada) es $(10{,}000) + 240{,}000$, y además representa un

valor positivo por lo tanto, la función cuadrática tiene raíces reales, es decir se les explica a los estudiantes, que en la gráfica, la función debe cruzar dos veces el eje de las **"x"**. También aprovechamos para recalcar los conceptos que se derivan de los posibles valores que pueda tener el discriminante de la función cuadrática, si el discriminante **es > 0** (positivo), la función debe cortar dos veces el eje de las **"x"**, si **es < 0** sus raíces serán complejas y estarán formadas por un número real y un imaginario, por lo tanto nunca podrán cruzar el eje de las **"x"**, finalmente si el discriminante **es = 0**, entonces sus raíces serán el vértice de la función, por lo tanto lo **x1** y **x2** tendrán un mismo valor **(x1=x2).**

$$x_{1,2} = \frac{-100 \pm \quad 250{,}000}{(-10)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-100 \pm 500}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-100 + 500}{-10}$$

$$x_1 = \frac{400}{-10}$$

$$x_1 = -40$$

$$x_2 = \frac{-100 - 500}{-10}$$

$$x_2 = \frac{-600}{-10}$$

$$x_2 = 60$$

Se hace también la indicación, que los resultados obtenidos, son las intersecciones que cortan el eje de las **"x"** de la función. Pero que esto no contesta la pregunta requerida por el problema, motivo por el cual es necesario encontrar los vértices de la función donde, el vértice en el eje **"y"** vendría a ser el ingreso máximo y el vértice en el eje **"x"** el número de habitaciones vacías.

Mediante la formula $x = \frac{-b}{2a}$ obtenemos el vértice de la función en el eje x, sustituyendo los valores de los coeficientes correspondientes.

$$x = \frac{-100}{2(-5)}$$

$$x = \frac{-100}{-10}$$

$$x = 10$$

También mediante la formula $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ obtenemos el vértice de la función, pero ahora en el **eje y**, quedando de la siguiente manera:

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$y = \frac{4(-5)(12{,}000) - (100)^2}{4(-5)}$$

$$y = \frac{-240{,}000 - 10{,}000}{-20}$$

$$y = \frac{-250{,}000}{-20}$$

$$y = 12{,}5000$$

Finalmente se les hace la explicación a los estudiantes, con la ayuda de la gráfica, que el vértice del eje **y= 12,500,** es el punto mas alto de la función y que por lo tanto este valor es el resultado del problema, destacando que en este resultado, se trata de un punto máximo de la función.

Resolver este tipo de ejercicios, mediante la utilización del método algebraico, es la manera tradicional como se les explica a los estudiantes en el salón de clases, pero hemos observado que la utilización de este método crea un alto grado de confusión e incertidumbre entre los alumnos, dando como resultado una comprensión deficiente de los conceptos. Por esta razón consideramos que con la ayuda de las computadoras y de las calculadoras gráficas, para resolver este tipo de ejemplos pudiéramos utilizar cualquiera de los métodos didácticos anteriormente mencionados, creemos que esto puede contribuir en un ahorro de operaciones y cálculos engorrosos, y ayudados con una visualización gráfica, apropiada del problema hecha con los mismos datos de este, esto puede contribuir a incrementar la comprensión, la asimilación y la solidez de los conceptos de la función cuadrática.

Aprovechando la oportunidad que nos dio el problema anterior, y con la seguridad que hemos involucrado a los alumnos en el tema de funciones cuadráticas escogemos un ejemplo sencillo de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con la finalidad de destacar el comportamiento que tiene la función al cambiar intencionalmente cada uno de los coeficientes a, b, c.

La función cuadrática que escogimos es la siguiente:

$f(x) = x^2 + 2x + 1$ por lo tanto el valor de los coeficientes a, b, c. son los siguientes:

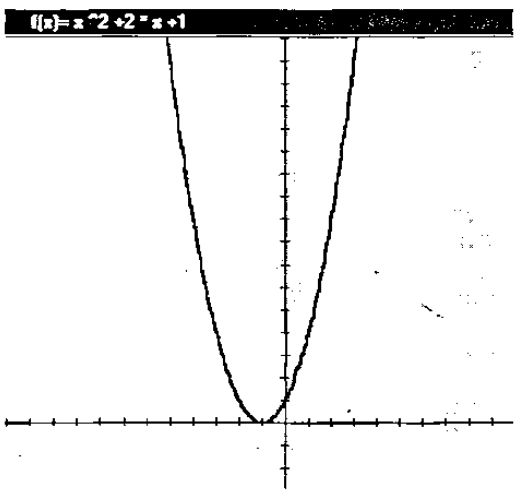
$a = 1$

$b = 2$

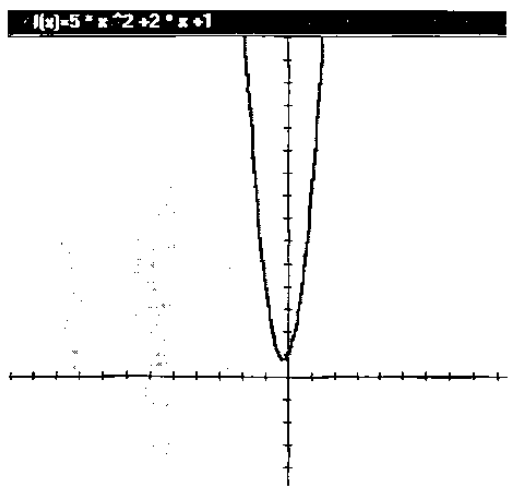
$c = 1$

Con la ayuda de un Software de Matemáticas creado por la Compañía IBM llamado Sintesoft Matemáticas Funciones, obtuvimos las gráficas, el mismo programa nos permitió cambiarle los valores a los coeficientes y construir las gráficas de una forma rápida y sencilla, pero una de las restricciones que ofrece el programa para el tema de funciones es que solo permite cambiarle los valores a los coeficientes de la función cuadrática en un dominio **(-10;10)**, lo cual es una limitante que solo se puede usar para funciones cuadráticas cuyos coeficientes comprendan solamente esos valores.

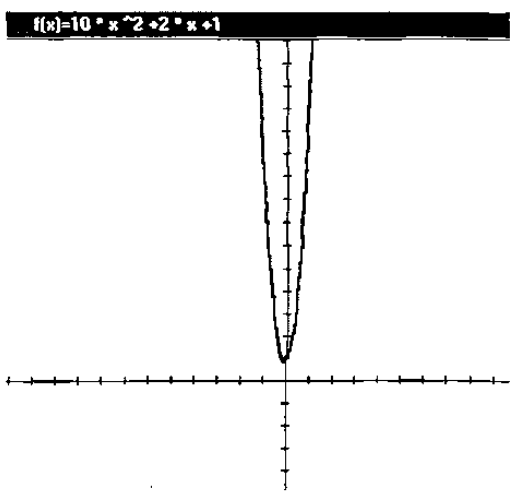
$$x^2 + 2x + 1$$



$$5x^2 + 2x + 1$$



$$10x^2 + 2x + 1$$

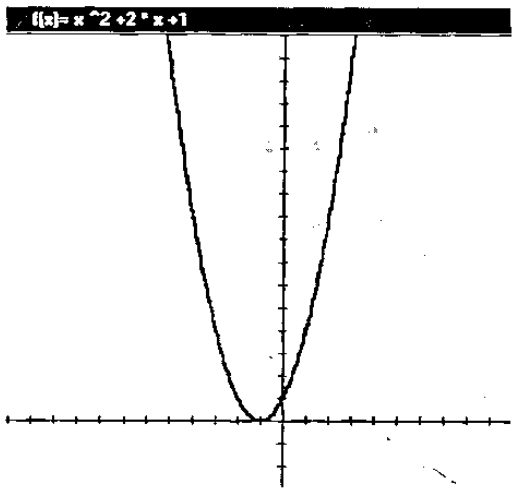


Con estas graficas buscamos destacar el comportamiento de la función al incrementar el coeficiente **a** de una cuadrática.

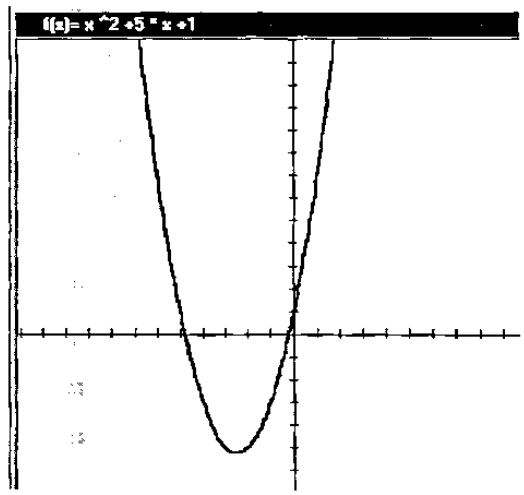
Como podemos observar en las gráficas al incrementar el valor del coeficiente **"a"**, la función cuadrática tiende a cerrarse sobre el eje de las **"y"**.

En estas gráficas lo que hicimos fue cambiar el valor del coeficiente **"b"** y como podemos observar el comportamiento de la función nos muestra que a medida que incrementamos el valor del coeficiente **"b"** la función tiende a desplazarse hacia la izquierda sobre el eje de las **"x"** y aumenta su concavidad.

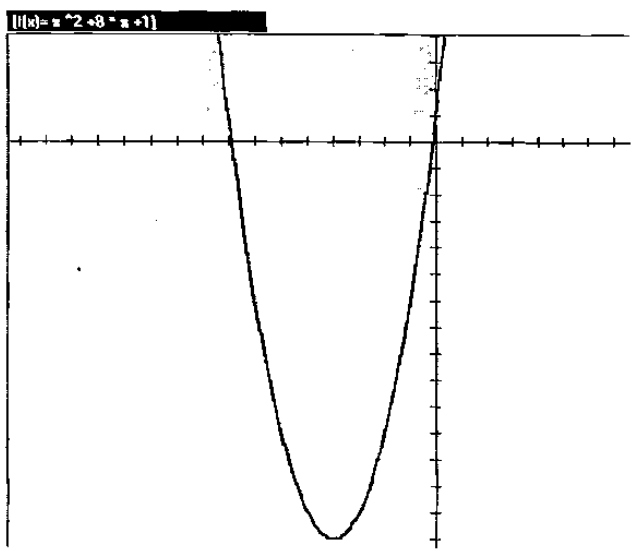
$$x^2 + 2x + 1$$



$$x^2 + 5x + 1$$

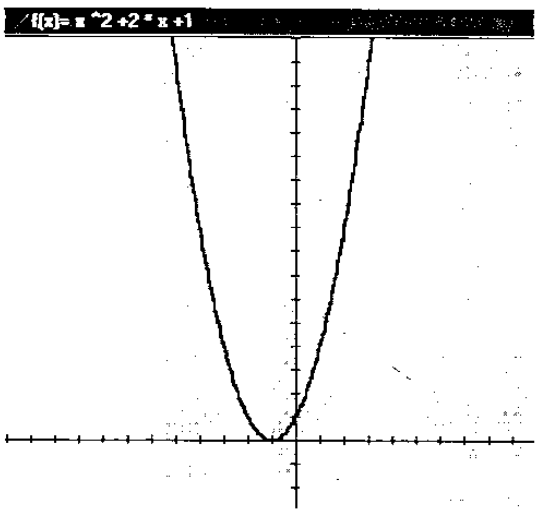


$$x^2 + 8x + 1$$

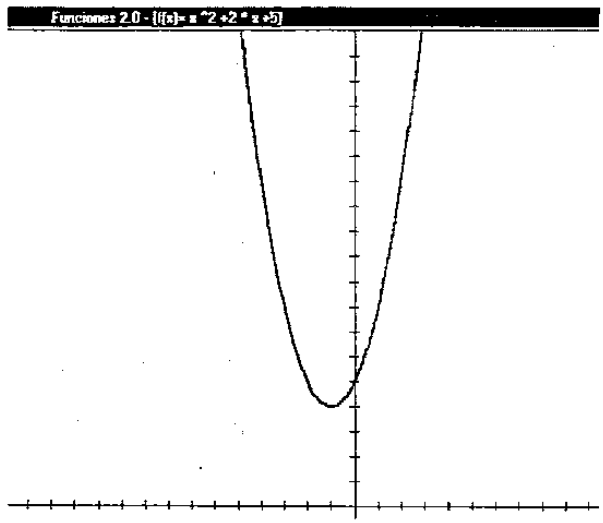


En estas gráficas lo que hicimos fue cambiar el valor del término independiente **"c"** y como podemos observar, el comportamiento de la función nos muestra que a medida que incrementamos el valor del termino independiente **"c"** la función tiende a desplazarse por encima del eje de las **"x"** y disminuye su concavidad. El término independiente de una función cuadrática representa también la intersección con el eje de las **"y"**.

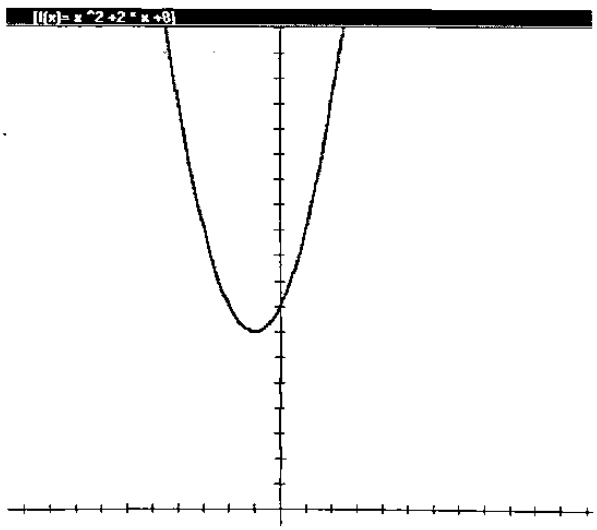
$$x^2 + 2x + 1$$



$$x^2 + 2x + 5$$



$$x^2 + 2x + 8$$



CONCLUSIONES

Durante los últimos años el impacto de la Computación ha sido impresionante. De hecho la velocidad con que cambia es mucho mayor que la que han tenido otras ramas del conocimiento, donde la mayoría de los campos de la acción humana han sido invadidos con fuerza por este instrumento poderoso.

En los años cincuenta se comenzó a pensar que la computadora, podría desempeñar un papel importante en los procesos de aprendizaje. En la actualidad las computadoras son instrumentos con frecuencia presente en los lugares de trabajo y estudio, por lo que la educación no escapa a esta realidad, lo que trae como consecuencia, que el sistema educativo deba enfrentarse a la problemática de su incorporación al proceso de enseñanza - aprendizaje, incorporación que por supuesto modifica este proceso, en particular en la enseñanza de la matemática, que hace surgir ante la presencia de este instrumento, una serie de interrogantes, que podríamos resumir en la siguiente pregunta ***¿el ordenador será un instrumento adecuado para enseñar matemática, y si lo es cuál es la forma más apropiada para utilizarlo?***

Puede ser un instrumento para enseñar matemáticas si se tiene en cuenta para su utilización:

1. Los principios didácticos.
2. Las indicaciones metodológicas aquí propuestas
3. Las funciones metodológicas de su utilización en la enseñanza de las matemáticas.
4. Las regularidades metodológicas que se deben manifestar en su uso.

Un aspecto esencial es que se puede incorporar en la enseñanza de las matemáticas como una herramienta de cálculo, pero también como un medio para

hacer una matemática más experimental, es decir utilizarla como un recurso didáctico donde se pueda unir el mundo abstracto de las matemáticas con el mundo concreto del alumno.

Lo más importante, es que la tecnología avanza a pasos agigantados y que los profesores de matemáticas no podemos quedarnos rezagados. Que aquellos que apoyan la incorporación de la computadora y aún no saben cual es la mejor forma de hacerlo, no es motivo para que quienes estén interesados y que poseen los recursos accesorios no la utilicen ya en sus labores.

Además una de las orientaciones que se deben introducir a la enseñanza de la matemática es la de vincularla con todos los fenómenos del mundo y el universo, debido a que ellos nos proporciona los instrumentos que debe manejar nuestro pensamiento, para decidir y actuar en una realidad cambiante, sin olvidar nuestra responsabilidad ante la naturaleza y la vida que es, en el último de los casos, la razón de nuestra existencia.

RECOMENDACIONES

- Investigar en los requerimientos metodológicos a tener en cuenta para seleccionar los software más conveniente para cada nivel escolar y para contenido matemático en específico.
- Investigar en la necesidad de cambios profundos en la currícula de matemáticas para que los alumnos utilicen las computadoras y las calculadoras de manera reflexiva y creativa.

BIBLIOGRAFÍA

1. Beichner, R.: Considering perception and Cognition in the design of an Instructional Software Package. Multimedia Tools and Aplications, USA, 1, 1995, pág. 173-184.
2. González V.: Teoría y práctica de los medios de enseñaza, Ed. Pueblo y Educación, 1986
3. Redish, E. F.: On the Effectiveness os Active-Engagement Microcomputer Based Laboratories, Internet, USA, http://www.physics.umd.edu/rgroups/ripe/papers/mbl/ mbl1.html.
4. Valente, J.A.: Computadores e conhecimento: repensando a educação. Ed. Gráfica Central da UNICAMP, NIED, Brasil, 1993.
5. Vaquero, A.: Eficacia de la Lengua Española en el Contexto Informático, Comunicación Personal, España,1997.
6. Aceituno, J.; Mujica, V.: Elementos psicopedagógicos esenciales presentes en el juego computarizado "Escape al Castillo de la Física", Pedagogía 97, La Habana, febrero de 1997
7. García, E.: Dificultades de la aplicación de las computadoras a la enseñanza. Posibles soluciones, Revista Cubana de Educación Superior,2, 1995, pág. 75-81
8. Pérez, R.;Gallego, R.: Corrientes constructivistas, Colombia, 1994, pág. 10.
9. Sokoloff, D.R. y Thornton, R.K.: "Tools for Scientific Thinking", Vernier Software, Portland OR, 1992 and 1993.
10. Retamal, J.V.: Tecnología de multimedios para la educación, Fundación Para El Desarrollo De La Ciencia Y La Tecnología, Santiago de Chile, 1996.
11. Fernández Valmayor, A.; Fernández, C.; Vaquero, A. Panorama de la Informática Educativa: de los Métodos Conductistas a las Teorías Cognitivas,

Boletín de Nuevas Tecnologías Educativas y Recursos Didácticos, España, No 5, Octubre 1991, pág.5-19

12. Suppes,P. Current Trends On Computer Assisted Instruction, Advances in Computers, 18, (Academic Press), 1979, pág. 173-229.

13. O'Shea, T. & Self, J. Enseñanza y Aprendizaje con Ordenadores, Madrid, Ediciones Anaya Multimedia, 1985.

14. Carnoy, M.; Daley, H. & Loop, L. Education and Computers: Vision and Reality, Monografía editada por la UNESCO, Paris, 1987

15. Kurland,D.M. & Kurland, L.C. Computers Aplications in Educations: A Historical Overview, Ann. Rev. Comp. Sci, 2, 1987, pág. 317-358.

16. Trowbridge, D. A Look at Educational Computing in 1987, Technical Report Submitted to the BSCS Study of Elementary School Science, Carnegie Melon University, 1987

17. Bork, A. The History of Technology in Education, Informe Técnico, Educational Technology Center, University of California, Irvine, 1989

18. Vaquero, A.; Fernández Chamizo, C. La Informática aplicada a la Enseñanza, Madrid, Eudema, 1987.

19. Bitzer, D.L.; Braunfeld, P.G. y Linchtnberger, W.W.. PLATO II: A Multiplistuden, Computer - Controlled, Automatic Teaching Device, en COULSON J.E., Programmed Learning and Computer- Based Instruction, New York, John Wiley and Sons, 1962.

20. Merril, M.D. Premises, Propositions and Research Underlying the Design of a Lerner Controlled Computer Assisted Instruction system: a summary for the TICCITC system, Working Pape No. 44, Div. Inst. Services, Birgham Young University, 1974.

21. Barros, B.: Sistema de Soporte para Actividades Educativas a Distancia, Revista de Enseñanza y Tecnología, España, No. 8, Octubre, 1997, pág. 18-28

22. Vaquero, A. La tecnología en la educación. TIC para la enseñanza, la formación y el aprendizaje, Informática'98, La Habana, Febrero de 1998.

23. Skinner, B.F. : The science of learning and the art of teaching, Harvard Educational Review, Vol. 24, 1954

24. Bork, A.: El ordenador en la enseñanza, Barcelona, Ed. Gustavo Gili, 1986

25. Coulson, J.E.: Programmed learning and Computer-Based Instruction, John Wiley and Sons, 1962.

26. Cabrera, A.: Informática educativa: La revolución constructivista, Informática y Automática, 28 (1), marzo, 1995.

27. De Jong, T.: Learning and Instruction with computer simulations, Education&Computing, 6, 1991.

28. Solomon, C.: Introducing Logo to children, Byte, 7 (8), 1983

29. Piaget, J.: The origins of intelligence in children, Horton, 1963

30. Piaget, J.: Intellectual evolution from adolescence to adulthood, Human Development, 15, 1972.

31. Papert, S.: Mindstorms: Children, Computer and Powerfull Ideas, Basic Books, New York, 1980.

32. Newell, A.; Shaw, J.; Simon, H.A.: report on a general problem-solving program for a computer, Proceedings of the International Conference on Information Processing, UNESCO, París, 1960.

33. Quillian, M.R.: Word Concepts: A Theory and Simulation of Some Basic Semantic Capabilities, Brachmen, R.J. y Levesque, H.J. (Eds). Reading in Knowledge Representation, Morgan Kaufman, 1967.

34. Carbonell, J.R. AI in CAI: an artificial intelligence approach to computer asissted instruction, IEEE Trans. On Man-Machine Systems, 11, pág. 190-202

35. Wenger, E.: Artificial Intelligence and Tutoring Systems, CA, Morgan Kaufmann Publishers, 1987.

36. Elorriaga, J.A.; Fernández de Castro', I.; Gutiérrez, J.: Sistemas tutores inteligentes y aprendizaje automático, Informática y Automática, 28 (4), diciembre 1995.

37. Verdejo, M.V.: Lenguaje natural: avances, aplicaciones y tendencias, Arbor.CSIC. no 595, 1995.

38. Fernández-Castro, I.; Díaz A., Verdejo, F.: Architectural and planning issues in intelligent tutoring systems, J. Artificial Intelligence and Education, 4 (4), 1993.

39. Nielsen, J.: Hipertext & Hipermedia, Academic Press, 1990.

40. Norman, K.: Navigating the educational space with HyperCourseware, Hypermedia, 6 (1), 1994.

41. Trowbridge, D.; Bork, A.: Computer based learning modules for early adolescence, Conference on Computers in Education, Lausanne, Switterland, July 19, 1981

42. García, J.: Algunos ejemplos de utilización del ordenador en la enseñanza de la mecánica estadística, Taller Iberoamericano de Enseñanza de la Física Universitaria, La Habana, Enero de 1997

43. Mc Dermott, L.: Research and computer- based instruction: Oportunity for interaction,

44. Thornton, R.K., Sokoloff, D.R. : "Learning motion concepts using real-time microcomputer-based laboratory tools", Am. J. Phys. 58 ,1990, pág. 858-867.

45. Kafay, Y. What Happens If You Introduce an Intelligent Tutoring System in the Classroom: A Case Study of the Geometry Tutor, Proceedings of the NEC 89, en W.C. Ryan, International Council on Computers for Education, University of Oregon, pág. 46-53

46. Alessi, S.M; Trollip, S.R.: Computer-Based Instruction: Methods and Developments, Prentice Hall Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.

47. Valdés, G.: Investigación y elaboración de sistemas para la enseñanza asistida por computadoras, Tesis para la obtención del grado de Doctor en Ciencias Técnicas, Santa Clara, Las Villas, 1988.

48. Prieto, M.: Caribe: Sistema automatizado de enseñanza de pequeñas computadoras, Tesis para la obtención del grado de Dr. en Ciencias Físico Matemáticas, Universidad de la Habana, 1985.