

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA POR ESQUEMA DIFUSO
TA KAGI-SUGENO: UN ENFOQUE DE CONTROL OPTIMO INVERSO

POR
LIC. JOEL PEREZ PADRON
TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD
EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. JUNIO DEL 2001

P47
FIME
2001

FIME
2001

TM
25853

SECRETORIO DE TRAYECTORIA DIFUSO
SECRETORIO DE TRAYECTORIA DIFUSO

SECRETORIO DE TRAYECTORIA DIFUSO

T.A. REA-CI-SUCRINO: UN BIVINO OPTIMO INVESO

T.A. REA-CI-SUCRINO: UN BIVINO OPTIMO INVESO

T.A. REA-CI-SUCRINO: UN BIVINO OPTIMO INVESO



1020145922

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA POR ESQUEMA DIFUSO
TA KAGI-SUGENO: UN ENFOQUE DE CONTROL OPTIMO INVERSO

POR
LIC. JOEL PEREZ PADRON
TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD
EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. JUNIO DEL 2001

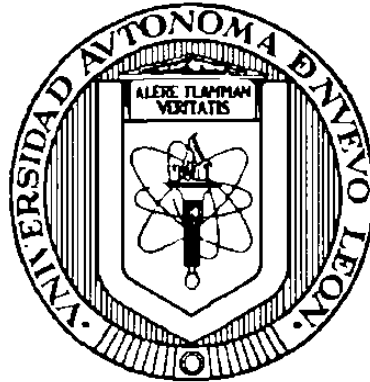
0120-32760

TH
25853
•M2
FINE
2001
P47



FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA POR ESQUEMA DIFUSO
TAKAGI-SUGENO: UN ENFOQUE DE CONTROL OPTIMO INVERSO

POR

LIC. JOEL PEREZ PADRON

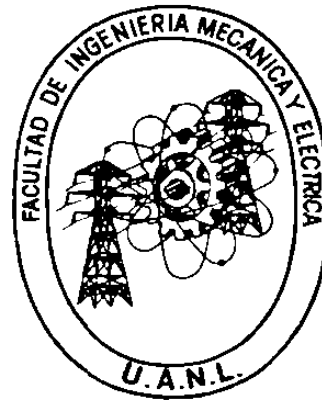
TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N.L.

JUNIO DEL 2001

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA POR ESQUEMA DIFUSO
TAKAGI-SUGENO: UN ENFOQUE DE CONTROL OPTIMO INVERSO

POR

LIC JOSE PEREZ PADRON

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N.L.

JUNIO DEL 2001

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA POR ESQUEMA DIFUSO TAKAGI-SUGENO: UN ENFOQUE DE CONTROL ÓPTIMO INVERSO** realizada por el Lic. Joel Pérez Padrón sea aceptada para su defensa como opción al Grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.

El Comité de Tesis



Asesor

Dr. Oscar Leonel Chacón Mondragon



Coasesor

Dr. Edgar N. Sanchez Camperos



Coasesor

Dr. César Elizondo González



Vo. Bo.

M.C. Roberto Villarreal Garza
Division de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza. N.L., Junio, 2001.

© Copyright 2001 por Joel Pérez Padrón

Reservados todos los derechos

DEDICO ESTE TRABAJO DE TESIS A:

LA MEMORIA DE MI PADRE

José Pérez Ríos (+)

MI MADRE

Sra. Irene Padrón Méndez

MI HIJO

Joey Pérez Flores

MI ESPOSA

Lic. Yolanda Flores Hernández

MIS HERMANOS

Genoveva, José Paz, Francisco, Feliciano y Rubén.

TODOS MIS SOBRINOS, PRIMOS, TIOS(AS) y CUÑADOS (AS)

Deseo agradecer de una manera especial

A mi asesor de tesis

Dr. Oscar Leonel Chacón Mondragón

A los Drs. Edgar N. Sánchez C. y Ernesto Vázquez

Y al M. C. José Paz Pérez Padrón

Deseo también agradecer

Al Dir. de la F.I.M.E. M.C. Cástulo E. Vela Villarreal, Al

Subdirector del Postgrado de esta Facultad M.C. Roberto Villarreal

Garza, así como también Al Director de Estudios de Postgrado de la

U.A.N.L. Dr. Ubaldo Ortiz Méndez, por su valiosa ayuda para poder

llevar a cabo la defensa de esta tesis, a todos ellos gracias.

A todos los compañeros de trabajo de la F.C.F.M. de la U.A.N.L.

A todos los maestros del programa doctoral en control de la F.I.M.E..

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Junio, 2001

PRÓLOGO

El objetivo a largo plazo de la Ingeniería de Control Automático es implementar un sistema que pueda operar, independientemente de la intervención humana, en un ambiente incierto; un sistema con esas capacidades se denomina autónomo. Una vez implementado solo requerirá que se le especifiquen las metas deseadas, en lenguaje natural, y él determinará sus objetivos y los mecanismos para lograrlos por medio de una interacción continua con el ambiente. Este tipo de sistemas serán muy útiles cuando la intervención humana sea peligrosa, susceptible a fallas o sencillamente imposible. Sobre decir que un sistema tal aun no ha sido desarrollado, así mismo, las técnicas actuales de análisis, diseño e implementación de sistemas de control automático, no son lo suficientemente poderosas y flexibles para construir estos sistemas autónomos.

Se dice que un sistema tiene la capacidad de aprender si este adquiere información, durante su operación, sobre las características desconocidas de la planta y su medio ambiente, de tal forma que el desempeño global es mejorado de forma continua. Por lo tanto, si se le agrega esta capacidad al sistema de control, entonces se puede expandir el rango global de operación y finalmente obtener un sistema autónomo.

Aunque se han reportado muchas aplicaciones de Control Lineal, como sistemas de control automático basados en sistemas lineales, el análisis de sus propiedades está bastante menos desarrollado. En el control difuso Takagi-Sugeno se requiere linealizar los sistemas, mientras que en el control óptimo inverso se puede aplicar a sistemas no lineales.

Con base en lo anteriormente expuesto, los objetivos del trabajo de investigación presentados en esta tesis son:

- Seguimiento de trayectorias de sistemas lineales
- Analizar la estabilidad de un esquema, basado en control óptimo inverso, de sistemas no lineales

CONTENIDO

1 INTRODUCCIÓN	1
2 CONTROL DIFUSO TAKAGI-SUGENO PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA	4
2.1 Preliminares	5
2.1.1 Modelo Difuso Takagi-Sugeno	5
2.1.2 Análisis de Estabilidad	9
2.1.3 Regulador Lineal	11
2.2 Estructura del Controlador Propuesto	16
3 APLICACIÓN AL PÉNDULO INVERTIDO SIMPLE	18
3.1 Modelo Dinámico	19
3.2 Representación en Variables de Estado	20
3.3 Aproximación Lineal del Modelo	21
3.4 Diseño del Controlador	22
3.4.1 Modelo del Sistema	23
3.4.2 Modelos Lineales	24
3.4.3 Modelo Difuso	24
3.4.4 Controlador Difuso	25

4 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS USANDO LA TÉCNICA DE ASIGNACIÓN DE GANANCIA ÓPTIMA INVERSA	29
4.1 Conceptos Preliminares	30
4.2 Estabilización del Péndulo Vía Asignación de Ganancia Óptima Inversa	33
5 CONCLUSIÓN	38
APÉNDICE	40
BIBLIOGRAFÍA	47
LISTA DE FIGURAS	51
AUTOBIOGRAFÍA	52

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En diferentes casos, uno de los problemas para la implementación de sistemas de control automático es la necesidad de contar con un modelo que describa la dinámica del sistema a ser controlado. Normalmente este modelo no está disponible ó es demasiado complicado para propósitos de diseño. Por ello es importante disponer de un modelo lo suficientemente simple para trabajar con él, pero que retenga las características esenciales del proceso.

Los modelos difusos tipo Takagi-Sugeno [1] se han convertido en una herramienta muy popular para aproximar sistemas no lineales. Si se tiene un buen conocimiento del comportamiento del sistema se puede elaborar una descripción lingüística en términos de reglas **SI-ENTONCES**. Combinando la descripción matemática del sistema con su descripción lingüística resulta un modelo difuso del sistema. Si se cuenta con una descripción local de la dinámica de la planta y esta en términos de modelos lineales, es posible construir un modelo difuso Takagi- Sugeno. Los modelos lineales pueden ser obtenidos mediante la linealización del sistema no lineal alrededor de diferentes puntos de operación o, si el modelo no es bien conocido, a través de una identificación entrada-salida alrededor de esos puntos. Una vez definidos los modelos lineales locales, usando teoría de control convencional de sistemas lineales, se puede diseñar una ley de control con retroalimentación de los estados o del error para cada modelo lineal local. El controlador total será una combinación de los controladores locales lineales difusos.

Como contribución principal en este trabajo, se propone un nuevo esquema de control difuso para el seguimiento de trayectoria en sistemas no lineales. Este esquema combina la teoría del regulador lineal [2], [3], [4] con la metodología de control difuso tipo Takagi-Sugeno. La teoría del regulador lineal permite realizar la estabilización en un punto de operación y seguimiento asintótico en sistemas lineales, y mediante el modelo difuso Takagi-Sugeno se obtiene una buena aproximación del sistema no lineal.

Esta memoria de tesis se organiza como sigue:

En el Capítulo 2 se presentan los conceptos básicos sobre el modelo difuso Takagi-Sugeno y se discuten propiedades sobre la estabilidad de este modelo. También se presentan algunos conceptos fundamentales sobre la Teoría del Regulador Lineal. Al final del capítulo se deriva el esquema de control que se propone en esta tesis.

El Capítulo 3 describe la aplicación del esquema propuesto al péndulo invertido simple. Se establece el modelo del sistema y posteriormente el diseño del controlador.

Se utiliza el mismo esquema propuesto (el péndulo invertido simple), para el cual, se propone una función candidata Lyapunov de control y con base a ella, se obtiene una ley de control, la cual garantiza estabilización, esto se discute en el Capítulo 4.

Finalmente, en el Capítulo 5 se exponen las conclusiones y comentarios sobre los resultados obtenidos al aplicar los esquemas de control propuestos. También se dan algunas perspectivas generales sobre el trabajo futuro.

CAPÍTULO 2

CONTROL DIFUSO TAKAGI-SUGENO PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

En este capítulo se presentan conceptos básicos que se utilizan en la estructura del controlador propuesto en esta tesis. En la sección 2.1, se explica el modelo difuso Takagi-Sugeno en su forma más general

Se presentan los principales resultados sobre estabilidad aplicados a sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno. Sin mero párrafo, se dan algunos conceptos sobre la teoría del regulador lineal.

En la sección 2.2, se presenta la estructura del controlador que se propone en este trabajo para realizar el seguimiento de una señal de referencia, variable en el tiempo por un sistema no lineal.

2.1 Preliminares

2.1.1 Modelo Difuso Takagi - Sugeno

En esta sección se describe y define un Sistema Difuso Funcional [5], del cual el sistema difuso Takagi - Sugeno es un caso especial.

El sistema difuso funcional tiene r -ésimas reglas de la siguiente forma.

$$\text{SI } z_1 \text{ es } M_{1j} \text{ y } z_2 \text{ es } M_{2j} \text{ y } z_q \text{ es } M_{qj}; \text{ ENTONCES } t \text{ es } h_j \quad (2.1)$$

donde (\cdot) representa el argumento de la función h_j ; $j = 1, 2, \dots, r$; r es el número de reglas; $z_1(t), \dots, z_j(t), \dots, z_q(t)$ son las variables premisa; M son los conjuntos difusos del antecedente de la regla $t = j = 1, 2, \dots, r$; y h_j son las variables condicion.

El antecedente de las reglas está definido como un sistema difuso normal. Sin embargo para los consecuentes de las reglas, en lugar de un término lingüístico asociado con una función de pertenencia, se usa una función $h_j = h_j(\cdot)$ (de ahí el nombre de "sistema difuso funcional"), que no tiene asociada una función de pertenencia. El argumento de h contiene los términos z_j , pero también se pueden usar otras variables. Cualquier función puede ser usada en la parte consecuente, lo cual hace al sistema difuso funcional muy general. Información sobre los conceptos básicos de lógica difusa se pueden encontrar en [6] y [7].

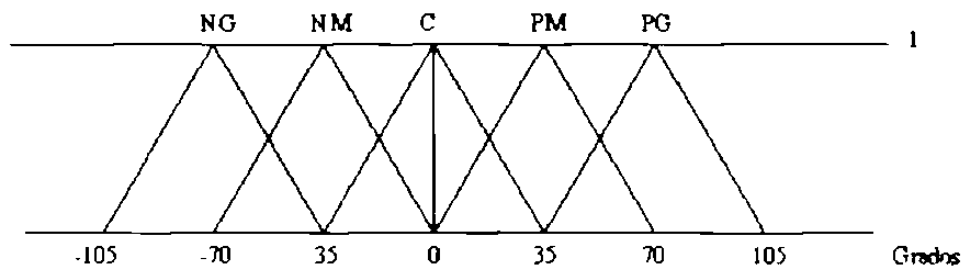


Fig. 1 Conjuntos Difusos

Para el sistema difuso funcional, se puede usar una operación apropiada (mínimo o producto) para representar el antecedente ver Fig 1, y de esta forma la desdifusificación puede ser calculada usando el método del centroide (centro de área o de gravedad) como

$$y = \frac{\sum_{i=1}^r \{\lambda_i \cdot b_i\}}{\sum_{i=1}^r \lambda_i} \tag{2.2}$$

donde $\lambda_i = \prod M_{i,j}$, z si se usa el producto, y $M_{i,j}$ es el grado de pertenencia de z en M_i , y $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]$

Se supone que el sistema difuso funcional está definido para que, independientemente del valor de la entrada, se tenga que $\sum \lambda_i \neq 0$. Se puede ver al sistema difuso funcional como una interpolación no lineal de las transformaciones definidas por las funciones en el consecuente de las reglas [5]

Cuando

$$b_i = h_i(z) = a_i + c_i z + d_i z^2 + \dots + a_n \tag{2.3}$$

(donde a_i son números reales) el sistema difuso funcional es referido como Sistema Difuso Takagi - Sugeno. El sistema difuso funcional realiza una interpolación no lineal entre transformaciones lineales.

De las reglas (2.1) se observa que cuando z_j está caracterizada por la parte **SI** de las premisas, la salida o conclusión **ENTONCES**, es una función lineal de las variables de entrada (2.3). Por lo tanto el sistema difuso puede ser visto como una función continua por partes, donde el cambio de una función a otra se efectúa de acuerdo al grado de pertenencia M_{ij} , z_j en la función de membresía.

El consecuente de las reglas del sistema difuso Takagi - Sugeno puede ser cualquier transformación lineal. Una transformación que ha probado ser particularmente útil es la de un sistema dinámico lineal como consecuente, para la representación mediante un modelo difuso de un sistema dinámico no lineal [5]. El modelo del sistema se describe por reglas difusas **SI - ENTONCES**, que representan relaciones lineales locales entrada - salida, con elementos difusos en el antecedente y sistemas lineales invariantes en el tiempo en el consecuente. El modelo difuso Takagi - Sugeno se obtiene fácilmente mediante la linealización de la planta (no lineal), en diferentes puntos de operación. Las reglas de los modelos difusos son de la siguiente forma.

i -ésima regla de la planta.

$$\text{SI } z_j(t) \text{ es } M_{ij} \text{ y } z_q(t) \text{ es } M_{iq}, \text{ ENTONCES } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

donde $i = 1, 2, \dots, r$; r es el número de reglas, $z_j(t) = x_j(t)$ son las variables premisa o algunas variables medibles del sistema, M_{ij} son las variables lingüísticas, $j = 1, 2, \dots$, g. $x(t) \in R^n$ es el vector de estado; $u(t) \in R^m$ es el vector de entrada, $y(t) \in R^p$ es el vector de salida;

$A_i \in R^{n \times n}$; $B_i \in R^{n \times m}$ y $C_i \in R^{p \times n}$ son respectivamente la matriz de estado, de entrada y de salida.

De acuerdo a lo anterior, el modelo difuso Takagi -Sugeno permite representar a un sistema no lineal como una interpolación no lineal entre r sistemas lineales. Las funciones de pertenencia del antecedente en cada regla cuantifican qué tanto, el sistema lineal en el consecuente, es válido para una región específica en el espacio de estado. Cuando el estado evoluciona se activan diferentes reglas indicando los modelos lineales que deben ser usados.

El estado final y la salida final del sistema difuso total se infieren de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(t) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i(t) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \lambda_i(t)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $\lambda_i(t) = \frac{M_i(t)}{\sum_{j=1}^r M_j(t)}$ [17], $M_i(t)$ es el grado de pertenencia de t en M_i y $z(t) = [z_1(t) \dots z_q(t)]$.

Una vez que el sistema no lineal se representa por un modelo difuso Takagi - Sugeno, se diseñan las reglas de control correspondiente a cada regla del modelo difuso de la planta. El controlador difuso diseñado comparte en el antecedente los mismos conjuntos difusos que el modelo difuso de la planta.

Las reglas difusas para el controlador son:

i - esima regla del controlador:

$$\text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } M_{ig}, \text{ ENTONCES } u(t) = K_i x(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.6)$$

De (2.6) se puede ver que las reglas del controlador difuso presentan leyes de retroalimentación lineales en la parte consecuente. Para el diseño de la ley de control de cada regla se puede utilizar cualquiera de las diferentes técnicas existentes para sistemas lineales. El controlador difuso total se representa por:

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i(t) \cdot K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \lambda_i(t)} \quad (2.7)$$

donde K_i es una ganancia de retroalimentación que puede ser calculada de acuerdo a la teoría de sistemas lineales para estabilizar cada modelo lineal local.

El controlador total resultante, que es generalmente no lineal, es una combinación de los controladores locales lineales difusos.

2.1.2 Análisis de Estabilidad

Una propiedad importante de los sistemas de control es la estabilidad. En [8] se obtienen teoremas sobre la estabilidad de un modelo difuso Takagi - Sugeno con sistemas lineales invariantes en el tiempo como consecuentes, utilizando el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Mediante estos teoremas solo se obtienen condiciones suficientes.

El sistema en lazo abierto de (2.5) se define como sigue.

$$\dot{x}(t) = \left[\sum_{i=1}^r \lambda_i z(t) \right] \cdot A_i x(t) \tag{2.8}$$

Teorema 2.1. El equilibrio de un sistema difuso continuo descrito por (2.8) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz común P_i simétrica positiva definida ($P_i = P_i^T > 0$) tal que:

$$\lambda^T P_i + P_i A_i < 0 \tag{2.9}$$

para todo $i = 1, 2, \dots, r$ ■

Este teorema se reduce al teorema de estabilidad de Lyapunov para sistemas lineales continuos cuando $r = 1$.

El teorema 2.1 solo da condiciones suficientes para asegurar estabilidad de (2.8). Del teorema 2.1 se puede deducir que todas las matrices A_i son estables si existe una matriz P_i positiva definida común a todas ellas. Un sistema difuso puede ser globalmente asintóticamente estable aun si no existe una matriz común P_i positiva definida.

Definiendo

$$h_i = \frac{\lambda_i z(t)}{\sum_{i=1}^r \lambda_i z(t)} \tag{2.10}$$

y reemplazando (2.7) en (2.5) se obtiene la siguiente ecuación para el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(t) h_j z(t) \{A_i - B K_j\} x(t) \tag{2.11}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) C_i x(t)$$

Teorema 2.2. El sistema difuso en lazo cerrado (2.11) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz positiva definida común P_j la cual satisface la siguiente desigualdad:

$$(A_i - B_i K_j)^T P_j + P_j (A_i - B_i K_j) < 0 \quad (2.12)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$, y $j = 1, 2, \dots, r$ ■

Los teoremas anteriores se basan en la elección de una función de Lyapunov cuadrática. Procedimientos de prueba y error fueron primeramente propuestos por [8] para el cálculo de la matriz P_j . Otros autores [9], [10], [11], [12], [13] y [14] establecen que el problema de diseño de la matriz común P_j puede ser resuelto numéricamente, esto es, la desigualdad (2.12) puede ser expresada como desigualdad lineal de matrices [15]. Si no existe una matriz P_j , no significa que no existe un controlador difuso Takagi - Sugeno que pueda estabilizar la planta, sino que la función de Lyapunov elegida no permite demostrar estabilidad. Por lo tanto es necesario elegir una función de Lyapunov diferente, de tal forma que sea posible probar que el controlador estabiliza la planta.

2.1.3 Regulador Lineal

En la teoría de control un problema importante es el de controlar una planta de tal forma que su salida siga asintóticamente cualquier trayectoria de referencia en una familia específica [3], [4]. Para una planta modelada por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.13)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

en el cual $u(t)$ denota la acción de control, $y(t)$ denota la salida a ser controlada y $x(t)$ es el vector que representa al estado interno de la planta, el problema en cuestión es encontrar, para cada función de salida de referencia $y_{ref}(\cdot)$ en una familia específica, una ley de control $u(\cdot)$ tal que la respuesta correspondiente y de la planta satisfaga la relación:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y_{ref}(t)\| = 0$$

para cualquier estado inicial $x(0)$.

La ley de control que permite este objetivo se genera por un controlador en retroalimentación, el cual recibe información sobre el estado $x(t)$, así como de la señal de referencia $y_{ref}(\cdot)$ y genera el valor requerido de la ley de control $u(t)$. El problema de control enunciado en esta forma se conoce como el problema de seguimiento asintótico con estabilidad interna.

En muchas situaciones prácticas, la respuesta de la planta se afecta no solo por la entrada $u(t)$, sino también por otras entradas exógenas, cuyo comportamiento no puede ser especificado ni modificado (perturbaciones). Si $u_{per}(t)$ denota el valor de una perturbación de entrada, la planta puede ser modelada por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Du_{per}(t) \quad (2.14)$$

$$y(t) = Cx(t) + Fu_{per}(t)$$

Para este caso, el papel del control es garantizar el seguimiento asintótico de alguna trayectoria de referencia específica, satisfaciendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_{ref}(t)) = 0$$

pero esto no solo debe lograrse para cualquier estado inicial ($x(0)$), sino también para cualquier perturbación posible $u_{per}(\cdot)$ en una familia específica. Este es el problema de seguimiento asintótico, con rechazo asintótico de perturbaciones.

Si la señal de referencia se expresa como una combinación lineal de otras señales

$$y_{ref}(t) = Rw_{ref}(t) \quad (2.15)$$

entonces para una planta modelada por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D \begin{bmatrix} u_{per}(t) \\ u_{ref}(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= Cx(t) + F \begin{bmatrix} u_{per}(t) \\ u_{ref}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$, el problema en cuestión puede ser descrito como el encontrar una ley de retroalimentación que cumpla

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

El sistema anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= Ar(t) + Bu(t) + Pu(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Qu(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

con $P = [D \ 0]$, $Q = [E \ -R]$ y $w(t) = \begin{bmatrix} u_{\text{per}}(t) \\ u_{\text{ref}}(t) \end{bmatrix}$

La primera ecuación de este sistema describe una planta con estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$, con entrada de control $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y sujeto a un conjunto de variables de entrada exógenas $w(t) \in \mathbb{R}^q$, las cuales incluyen perturbaciones (a ser rechazadas) y/o referencias (a ser seguidas). La segunda ecuación define una variable de error $e(t) \in \mathbb{R}^r$, que se expresa como una combinación lineal del estado de la planta x y de las entradas exógenas w

La acción de control para (2.17) es proporcionada por un controlador en retroalimentación, modelado de la siguiente forma

$$u(t) = K e(t) + I w(t) \quad (2.18)$$

La combinación de la planta con el controlador produce un nuevo sistema lineal llamado sistema en lazo cerrado. El propósito del control en lazo cerrado es lograr que el sistema sea asintóticamente estable y que la variable de error, vista como una función del tiempo, decaiga asintóticamente a cero cuando el tiempo tiende a infinito, para cualquier condición inicial posible del estado y para cualquier entrada exógena posible en una familia específica de funciones del tiempo. A este requisito se le conoce como propiedad de regulación de la salida.

La familia de entradas exógenas $w(t)$, que afectan a la planta, pueden ser modeladas como la familia de todas las funciones de tiempo que son solución de una ecuación diferencial lineal homogénea

$$\dot{w}(t) = S w(t) \quad (2.19)$$

para toda posible condición inicial $\tilde{u}(0) \in \mathbb{R}^q$. Este sistema, que puede ser visto como un modelo matemático de un "generador" para todas las funciones posibles de entrada exógenas, es llamado exosistema.

El problema de diseñar un controlador, puede ser formalmente enunciado de la siguiente manera. Dadas $[A, B, C, P, Q, S]$ encontrar, si es posible, dos matrices K y L tales que para (2.18):

- La matriz $A + BK$ tenga sus valores propios en el plano complejo negativo
- Para cada (x^0, u^0) , la solución $(x(t), u(t))$ de

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + (P + BL)u(t) \quad (2.20)$$

$$u(t) = Sx(t)$$

satisfiriendo $(x(0), u(0)) = (x^0, u^0)$, sea tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} (C^T x(t) + Q^T u(t)) = 0$

La solución del problema de regulación de la salida se establece en el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [4].

Teorema 2.3. [4] Supongase que se satisfacen las siguientes hipótesis

(H1) El exosistema (2.19) es inestable; esto es, todos los valores propios de S no tienen parte real negativa

(H2) El par (A, B) es estabilizable, es decir, existe una matriz K tal que la matriz $(A + BK)$ tiene sus valores propios en el plano complejo negativo

Entonces el problema de regulación de la salida por retroalimentación del estado tiene solución si y solo si existen matrices L y K que resuelven las ecuaciones lineales matriciales

$$\dot{\Pi} = A\Pi + B\Gamma + P \tag{2.21}$$

$$0 = C\Pi + Q$$



Por lo tanto la ley de control para el sistema (2.17) está dada por $u(t) = Kx(t) + l u(t)$ con K siendo cualquier matriz tal que $(A + BK)$ sea estable y $l = (I - K\Pi)$. La matriz K se puede diseñar con cualquiera de las técnicas existentes en la teoría de sistemas lineales.

2.2 Estructura del Controlador Propuesto

En esta sección se describe la estructura del controlador que se propone, el cual permite realizar seguimiento de trayectoria en un sistema no lineal. Básicamente, el algoritmo combina la estructura de un controlador difuso Takagi-Sugeno con la teoría del Regulador Lineal visto en la sección anterior.

De acuerdo a (2.4), (2.17) y (2.19), el modelo difuso de la planta queda expresado de la siguiente forma:

i - esima regla de la planta

$$\text{SI } x(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } y(t) \text{ es } M_{i2} \text{ ENTONCES } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + P_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) + Q_i u(t) \end{array} \right. \tag{2.22}$$

Las reglas difusas para el controlador de acuerdo a (2.6) y (2.18) son

i - ésima regla del controlador:

$$\text{SI } z_1(t) \in M_{11} \text{ y } \dots \text{ y } z_q(t) \in M_{1q}, \quad \text{ENTONCES } u(t) = K_i x(t) + L_i w(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.23)$$

donde K_i es cualquier matriz que estabiliza el sistema lineal local, $L_i = (I - K_i \Pi_i)^{-1} \Gamma_i$, y Π_i satisfacen (2.21) para cada sistema lineal local.

El controlador difuso total se representa por

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i z(t) \cdot K_i x(t) + L_i w(t)}{\sum_{i=1}^r \lambda_i(t)} \quad (2.24)$$

El diseño del controlador difuso consiste en determinar las ganancias de retroalimentación K_i y L_i en la parte consecuente de (2.23)

Por (2.10) y por el teorema (2.2), el controlador difuso total es representado por:

$$u(t) = \sum_i^r h_i z(t) \cdot K_i x(t) + L_i w(t) \quad (2.25)$$

CAPÍTULO 3

APLICACIÓN AL PÉNDULO INVERTIDO SIMPLE

En este capítulo se presenta la aplicación al péndulo invertido simple. La aplicación del controlador difuso se hace tanto para equilibrar el péndulo invertido en la posición vertical como para hacer seguimiento de trayectoria.

El capítulo está organizado como sigue: en la sección 3.1, se presenta el modelo dinámico que describe el comportamiento del sistema. En la sección 3.2, se deriva la representación en variables de estado del modelo no lineal. En la sección 3.3, se obtiene la aproximación lineal del modelo. En la sección 3.4, se lleva a cabo el diseño del controlador difuso propuesto y muestra los resultados en simulación al aplicar el controlador difuso.

3.1 Modelo Dinámico

El péndulo invertido consiste en un péndulo actuado por un motor eléctrico. Se le denomina invertido porque usualmente su régimen de operación se fija alrededor del punto de equilibrio superior -inestable-, en contraste con los péndulos normales que operan cerca del punto de equilibrio inferior. La Fig. 2 ilustra esquemáticamente esta planta

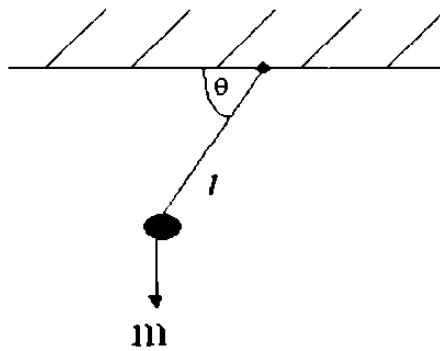


Fig. 2 Péndulo Simple

En la Fig. 2, l denota la longitud del péndulo y m su masa, mientras que τ denota el torque aplicado por el motor. Dado que θ es el ángulo entre la vertical y el péndulo, podemos modelar matemáticamente el péndulo invertido simple por medio de las fuerzas que actúan sobre el mismo. Existe también una fuerza de fricción que hemos supuesto proporcional a la velocidad del péndulo, el coeficiente de proporcionalidad es el coeficiente de fricción k . Usando la Segunda Ley de Newton podemos describir la ecuación del movimiento del péndulo en la dirección tangente como

$$ml \ddot{\theta} = \tau - mgl \sin \theta - kl \dot{\theta} \quad (3.1)$$

3.2 Representación en Variables de Estado

Escogiendo $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$ podemos escribir (3.1) como el siguiente modelo en variables de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(g/l)\sin(x_1) - (k/m)x_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si se incluye el torque τ de entrada al modelo en variables de estado, este queda como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(g/l)\sin(x_1) - (k/m)x_2 + \tau/l \end{aligned} \quad (3.3)$$

El sistema no lineal queda representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u(t) = F(x,t) + G(x,t)u(t) \\ y(t) &= h(x) = x \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los valores seleccionados para las simulaciones fueron los siguientes

$$l = 0.3 \text{ m}, m = 0.5 \text{ kg}, k = 0.1 \text{ y } g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

3.3 Aproximación Lineal del Modelo

En el diseño del controlador se requiere la aproximación lineal del modelo en variables de estado. La aproximación lineal se hace en diferentes puntos de operación mediante series de Taylor [16], [18], [19]. De (3.4), por medio de las series de Taylor se obtiene.

$$\Delta x(t) = \left[\left(\frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right)_{x_0, u_0} \right] \Delta x(t) + \left[\left(\frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right)_{x_0, u_0} \right] \Delta u(t) \quad (3.5)$$

donde $\Delta x = x - x_0$, $\Delta u = u - u_0$, $x_0 = F(x_0, u_0)$ y u_0 son los valores de x y u en un punto de equilibrio determinado.

Definiendo $A = \left(\frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right)_{x_0, u_0}$ y $B = \left(\frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right)_{x_0, u_0}$ se tiene

$$\Delta \dot{x}(t) = A \Delta x(t) + B \Delta u(t) \quad (3.6)$$

Para este sistema en particular se desea que la salida siga una referencia senoidal. Se usarán señales senoidales con el fin de observar el desempeño del sistema ante estas señales. La amplitud máxima de la señal de referencia a seguir será de 70 por lo tanto se linealiza la planta en los cinco puntos de operación siguientes:

$$x_{01} = [70 \ 0]$$

$$x_{02} = [35 \ 0]$$

$$x_{03} = [0 \ 0]$$

$$x_{04} = [-35 \ 0]$$

$$x_{05} = [-70 \ 0]$$

Los modelos lineales correspondientes a cada punto de operación son:

$$A_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11.17 & 0.2 \end{pmatrix} \quad B_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \ 22 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 26.76 & 0.2 \end{pmatrix} \quad B_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \ 22 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 32.67 & 0.2 \end{pmatrix} \quad B_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \ 22 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 26 \ 76 & 0.2 \end{pmatrix} \quad B_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \ 22 \end{pmatrix} \quad C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11 \ 17 & 0.2 \end{pmatrix} \quad B_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \ 22 \end{pmatrix} \quad C_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los modelos lineales describen el comportamiento dinámico de la planta, válido en una región alrededor del punto de operación. Cada punto de operación define un sistema lineal diferente. Esto significa que se necesitan diferentes ganancias de control para cada uno de ellos.

3.4 Diseño del controlador

En esta sección se presenta el diseño del controlador difuso mediante el esquema de control propuesto en la sección 2.2. El objetivo de este controlador es que la salida de la planta siga una referencia dada. Para poder representar al sistema como el modelo propuesto en (2.22) es necesario determinar los modelos lineales, los conjuntos difusos, el exosistema y las ganancias que se utilizarán en el controlador difuso.

Para este sistema se desea que la salida del sistema (x_1) siga una señal de referencia senoidal a partir de la posición $x_0 = [90^\circ, 0]$. Se presenta, en forma general, la señal de referencia que se desea seguir como:

$$y_{ref} = [A_{mp} \cdot \sin(\alpha t)] \quad (3.7)$$

donde A_{mp} es la amplitud de la senoidal y α la frecuencia en radianes.

3.4.1 Modelo del exosistema

El modelo matemático del exosistema que permite generar la señal de referencia a seguir, de acuerdo a (2.19) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

donde w_1 y w_2 generan señales senoidales y cosenoidales, $w_k(0)$, ($k = 1, 2$) son las condiciones iniciales y $\alpha = 1$, es la frecuencia de la señal de referencia.

Para que la salida del sistema siga la señal de referencia deseada, se requiere a su vez que cada modelo lineal siga una señal de referencia específica. La señal de referencia en forma general, se expresa de la siguiente forma

$$y_{ref} = \eta + A_n \cdot \sin(\alpha t) \quad (3.9)$$

donde η es un ángulo de desplazamiento necesario para ubicar al modelo lineal en su punto de operación real.

3.4.2 Modelos Lineales

Con el propósito de expresar los modelos del sistema en la forma requerida para el diseño del regulador lineal como en (2.17), es necesario construir cinco modelos, correspondientes a cada punto de operación donde se ha linealizado la planta:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B u(t) + P_i u_r(t) \quad (3.10)$$

$$e(t) = C_i x(t) + Q_i u_r(t) \quad i = 1, 5$$

Las matrices A_i , B , y C_i ya han sido determinadas en la sección 3.3. Se considera que cada modelo lineal en (2.22) no se ve afectado por perturbaciones incluidas en el exosistema (3.8); es decir $P_i = 0$ en cada modelo lineal.

Por lo tanto, las matrices Q_i que especifican la señal de referencia que debe seguir cada modelo lineal, quedan de la siguiente forma:

$$Q_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 5$$

3.4.3 Modelo Difuso

Una vez obtenidos los modelos lineales es necesario definir los conjuntos difusos, lo cual se realiza mediante funciones de pertenencia triangulares. Cada conjunto difuso está asociado con uno de los puntos de operación donde se ha linealizado la planta. Las variables lingüísticas asociadas a los conjuntos difusos correspondientes a la salida de la planta (x) son Negativo Grande, Negativo Medio, Cero, Positivo Medio y Positivo Grande.

El modelo difuso de la planta de acuerdo a (2.22) queda como sigue:

1ª regla de la planta:

$$\text{SI } x_1 \text{ es Positivo Grande; ENTONCES } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B u(t) \\ e(t) = C x(t) + Q u(t) \end{array} \right\}$$

2ª regla de la planta:

$$\text{SI } x_1 \text{ es Positivo Medio; ENTONCES } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ e(t) = C_2 x(t) + Q_2 u(t) \end{array} \right\}$$

3ª regla de la planta:

$$\text{SI } x_1 \text{ es Cero; ENTONCES } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_3 x(t) + B u(t) \\ e(t) = C_3 x(t) + Q_3 u(t) \end{array} \right\}$$

4ª regla de la planta:

$$\text{SI } x_1 \text{ es Negativo Medio; ENTONCES } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t) \\ e(t) = C_4 x(t) + Q_4 u(t) \end{array} \right\}$$

5ª regla de la planta:

$$\text{SI } x_1 \text{ es Negativo Grande; ENTONCES } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ e(t) = C x(t) + Q u(t) \end{array} \right\}$$

3.4.4 Controlador Difuso

De acuerdo a (2.18) y a (2.23) se requiere encontrar una ley de control de la siguiente forma:

$$u(t) = K x(t) + I u(t), \quad i = 1 \dots 5$$

El procedimiento para obtener las matrices K y L que estabilizan cada sistema lineal es de la siguiente forma:

$$\dot{\Pi} S = A \Pi + B \Gamma; \quad C \Pi + Q, \quad (3.11)$$

donde $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ y $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11.17 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 & \tau_2 \\ \pi_2 & \tau_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 22.22 & 22.22 \end{pmatrix} \cdot (\gamma_1 \quad \gamma_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices y resolviendo los sistemas de ecuaciones obtenemos

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 = (0.16 \quad 0.009)$$

Ahora queremos que $H = A+BK$ sea estable, entonces:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11.17 & 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 22.22 & 22.22 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11.17 & 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 22.22k_1 & 22.22k_2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11.17 + 22.22k_1 & 0.2 + 22.22k_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces } \Delta = \lambda I - H = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 11.17 + 22.22k_1 & \lambda + 0.2 - 22.22k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Delta) = \lambda^2 + (0.2 - 22.22k_2)\lambda + 11.17 - 22.22k_1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(0.2 - 22.22k_2) \pm \sqrt{(0.2 - 22.22k_2)^2 - 4(11.17 - 22.22k_1)}}{2}$$

$$K_1 = 4 \quad 2; \quad L_1 = 1.16 \quad 2.009$$

$$K_2 = 3 \quad 2; \quad L_2 = 1.16 \quad 2.009$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}; L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 2 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}; L_4 = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 2 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}; L_5 = \begin{bmatrix} 1 & 16 & 2 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

debiéndose cumplir que el par (A_i, B_i) de cada modelo lineal sea estabilizable y la matriz L_i se calcula de acuerdo a (2.21) para cada modelo lineal

Las reglas para el controlador difuso como en (2.23) quedan de la siguiente forma:

1ª regla del controlador.

$$\text{SI } x_1 \text{ es Positivo Grande; ENTONCES } \left\{ u(t) = K_1 x(t) + L_1 u(t) \right\}$$

2ª regla del controlador

$$\text{SI } x_1 \text{ es Positivo Medio; ENTONCES } \left\{ u(t) = K_2 x(t) + L_2 u(t) \right\}$$

3ª regla del controlador:

$$\text{SI } x_1 \text{ es Cero; ENTONCES } \left\{ u(t) = K_3 x(t) + L_3 u(t) \right\}$$

4ª regla del controlador:

$$\text{SI } x_1 \text{ es Negativo Medio; ENTONCES } \left\{ u(t) = K_4 x(t) + L_4 u(t) \right\}$$

5ª regla del controlador

$$\text{SI } x_1 \text{ es Negativo Grande; ENTONCES } \left\{ u(t) = K_5 x(t) + L_5 u(t) \right\}$$

La salida total del controlador difuso esta dada por (2.24)

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^5 \lambda_i(z(t)) \cdot (K_i x(t) + L_i u(t))}{\sum_{i=1}^5 \lambda_i(z(t))} \quad (3.12)$$

donde $z(t) = [x_1(t)]$.

De (2.10) y teorema (2.2) la salida total del controlador difuso queda de la siguiente forma:

$$u(t) = \sum_{i=1}^5 h_i(z(t)) \cdot (K_i x(t) + L_i u(t)) \quad (3.13)$$

La Fig. 3 muestra la simulación al aplicar el controlador difuso Takagi-Sugeno (ver apéndice)

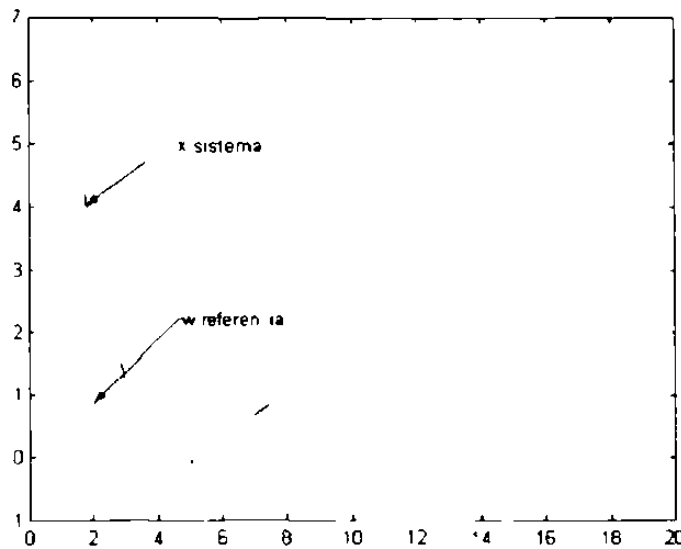


fig. 3 Seguimiento de trayectorias usando Takagi-Sugeno

CAPÍTULO 4

SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS USANDO LA TÉCNICA DE ASIGNACIÓN DE GANANCIA ÓPTIMA INVERSA

Como una segunda aplicación al péndulo invertido simple es la utilización del control óptimo inverso en el cual se discute la estabilización, proponiendo una función candidata de Lyapunov de control y obtener una ley de control.

En la sección 4.1, se definen los conceptos preliminares del control óptimo inverso, ver [20] y sus referencias.

En la sección 4.2, se da una aplicación del control óptimo inverso utilizando como modelo el péndulo invertido simple.

4.1 Conceptos Preliminares

Definición 4.1. Función Clase K

Una función continua $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ se dice que pertenece a la clase K , si es estrictamente creciente, y $\alpha(0) = 0$. Y se dice pertenecer a la clase K_∞ si $\alpha \in K$ y $\alpha(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Definición 4.2. Función Clase KL

Una función continua $\beta: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ se dice que pertenece a la clase KL , si para cada s fijo el mapeo $\beta(r, s)$ pertenece a la clase K_∞ con respecto a r y para cada r fijo el mapeo $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.

Considere el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (4.1)$$

donde $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz en x y continua a tramos en t .

Definición 4.3. El origen $x = 0$ es un punto de equilibrio de (4.1) si

$$f(0, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.2)$$

Definición 4.4. El punto de equilibrio de (4.1) es

• Global Uniformemente Estable, si existe una función $\gamma(\cdot)$ clase K_∞ tal que

$$\|x(t)\| \leq \gamma(\|x_0\|) \quad \forall t > t_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (4.3)$$

• Global Uniforme Asintóticamente Estable, si existe una función $\beta(\cdot, \cdot)$ clase KL tal que:

$$\|x(t)\| < \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t > t_0 > 0, \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n \quad (4.4)$$

Global exponencialmente estable, si (4.4) es satisfecha con $\beta(r, s) = kr e^{-\alpha s} k$

$0 < \alpha < \infty$

Funciones de Lyapunov de control

Consideremos una clase general de sistemas afín en el control $u \in \mathbb{R}^m$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.5)$$

Consideremos ahora la derivada de una función de Lyapunov candidata para el sistema general (4.5):

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)u \quad (4.6)$$

$$\dot{V} \triangleq L_f V + L_g V u$$

El objetivo es encontrar una ley de control $u = \alpha(x)$ (tal vez continua) que haga V una función definida negativa de x . En general, la función de Lyapunov no es conocida por el diseñador, por lo que la investigación está orientada a obtener una función de Lyapunov y una ley de control. Esto conlleva al concepto de una función de Lyapunov de control.

Definición 4.5 Una función suave definida positiva radialmente no acotada $V(x)$ es llamada una función de control de Lyapunov (clf) si

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{L_f V + L_g V u\} < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (4.7)$$

Lema 4.1. Una función suave definida positiva radialmente no acotada V es una clf si y solo si $L_q V = 0 \Rightarrow L_f V < 0$ cuando $x \neq 0$

Definición 4.6. Una clf $V(x)$ se dice satisfacer la propiedad del control pequeño (scp) si existe una ley de control $\alpha_c(x)$ continua en \mathbb{R}^n tal que

$$L_f V(x) + L_g V(x) \alpha_c(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (4.8)$$

Teorema 4.1. (Sontag) El sistema (4.5) es estabilizable por un control de retroalimentación continuo en el origen y suave fuera de el, si y solo si existe una clf con la propiedad del control pequeño.

Definición 4.7. El problema de la asignación de ganancia óptima inversa para el sistema (4.5) tiene solución si existe una función $R(t)$ valuada matricialmente tal que $R(x) = R(t) > 0 \forall x$, funciones $l(x) = l(t, x)$ definidas positivas y radialmente no acotadas, y una ley de control $u = \alpha(x)$ continua en todas partes con $\alpha(0) = 0$ la cual minimiza el funcional de costo:

$$J(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ l(t, x) + \int_t^\infty (l(x) + l(R(t), x)) dt \right\} \quad (4.9)$$

donde dicha ley de control óptima esta dada por:

$$u = -B^T R(x) \quad (4.10)$$

y $l(x)$ esta definida como sigue

$$l(x) = 2\beta l_f V + \gamma^{-1} l_q V - R(x) \quad l_q V \quad \text{con} \quad \beta > 0 \quad (4.11)$$

Teorema 4.2. El problema de la ganancia de asignación óptima inversa para el sistema (4.5) tiene solución si y solo si el sistema es entrada estado estabilizable

4.2 Estabilización del Péndulo Vía Asignación de Ganancia Óptima Inversa

Retomando el sistema de la sección 3.2 (Péndulo invertido simple)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g/l \sin(x_1) - (k/m)x_2 + \tau/n \end{aligned} \quad (4.12)$$

Los valores seleccionados para las simulaciones fueron los siguientes

$$l = 0.3 \text{ m}, m = 0.5 \text{ kg}, k = 0.1 \text{ y } g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Definiendo } F(x) = \int_0^x -g/l \sin(y) dy + x_2^2/2 = g/l(1 - \cos x) + x_2^2/2$$

$$V(x) = (g/l)(1 - \cos x) + x_2^2/2 \quad (4.13)$$

Tomando $u = \tau/n - l^{-1}x_2$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g/l \cos(x_1)x_2 - k/n x_2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

La grafica de los estados del péndulo invertido simple se presenta en la fig. 4

$$V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} x = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) u$$

donde

$$\dot{V}(x) = L_f V + L_q V u \quad (4.15)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ (g/l)\sin(x_1) - k/m x_2^2 \end{bmatrix}, \quad q(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) = L_f V, \quad \frac{\partial V}{\partial x} q(x) = L_q V \quad (4.17)$$

$$L_f V = (g/l)\sin(x_1) x_2 \begin{bmatrix} -x_2 \\ (g/l)\sin(x_1) - k/m x_2^2 \end{bmatrix} - k/m x_2^3 \quad (4.18)$$

$$L_q V = (g/l)\sin(x_1) x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 \quad (4.19)$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} q(x) u = k/m x_2^3 + x_2 u \quad (4.20)$$

Tomando $u = -x_2^2 + 1 - x_2$ donde

$$u = -(x_2^2 + 1 - x_2) \quad (4.21)$$

$V = k/m)x_2^2 - x_2 - 1 + x_2$, por lo tanto $\dot{V} = -x_2^3$ y además

$L_q V = 0$ implica que $L_f V = 0 \forall x \neq 0$

$$J(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 2\beta V(x) + \int_0^t (-x_2^3 + \beta R(x)) dt \right\} \quad (4.22)$$

donde $l(x) = 2\beta L_f V + 2\beta L_q V R(x) - L_q V^2 + \beta \beta - 2L_q V R(x) - L_q V^2$

$$l(x) = 2\beta L_f V + \beta L_q V^T R(x) L V^T \quad (4.23)$$

$$l(x) = 2\beta(k-m)x_2^2 + \beta x_1^2 + 1/x_1 - x_2$$

$$l(x) = (2\beta k - m)x_2^2 + \beta x_1^2 x_2^2 + \beta x_2$$

la cual es radialmente no acotada y $l(x) < 0 \forall x \neq 0$

Multiplicando (4.15) por -2β obtenemos

$$-2\beta V = -2\beta L_f V + 2\beta^2 L_q V^T R(x) L V^T \quad (4.24)$$

y tomando en cuenta u :

$$u^T R(x) u = \beta^2 L_q V^T R(x) L V \quad (4.25)$$

por lo tanto:

$$-2\beta V = -2\beta L_f V + 2\beta^2 L_q V^T R(x) L V \quad (4.26)$$

$$-2\beta V = -2\beta L_f V + \beta^2 L_q V^T R(x) L V + \beta L V^T R(x) L V^T$$

$$-2\beta V = l(x) + u^T R(x) u$$

Tomando el funcional como:

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 2\beta V(x) + \int_0^t l(x + u^T R x + u) d\tau \right\} & (4.27) \\
 J(u) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 2\beta V(x) + \int_0^t 2\beta V(x) d\tau \right\} \\
 J(u) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \{ 2\beta V(x) - 2\beta V(x) + 2\beta V(x) \}
 \end{aligned}$$

el funcional ya optimizado es de la forma.

$$J = 2\beta V(x) \tag{4.28}$$

y toma este valor u de la forma (4.21)

El sistema (4.12) toma la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu \\
 y &= Cx + Du
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

La grafica del sistema estabilizado se presenta en la Fig. 5

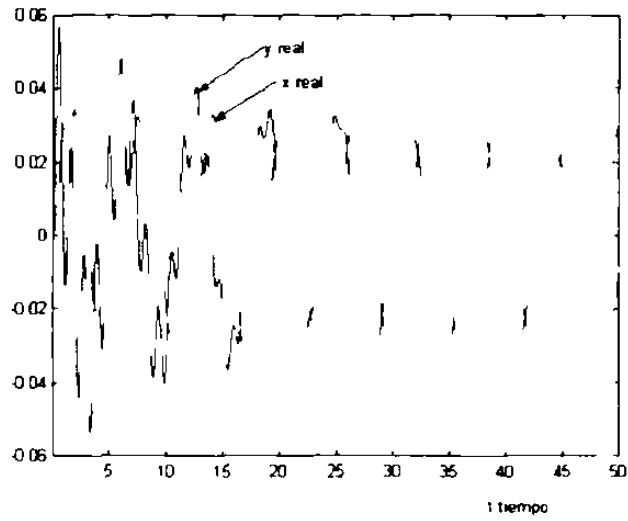


Fig. 4 Variables de estado del péndulo invertido simple

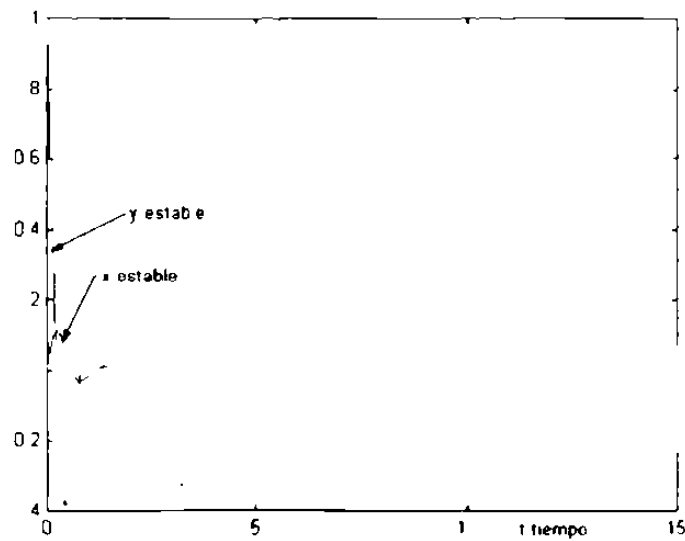


Fig. 5 Estabilización del péndulo invertido via control óptimo inverso

CAPÍTULO 5

CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha presentado un nuevo esquema de control difuso para el seguimiento de trayectorias en sistemas no lineales, que combina la teoría del Regulador Lineal con la metodología de control tipo Takagi-Sugeno. Este esquema ha sido probado sobre un prototipo: el pendulo invertido simple. Para este sistema se analizo en simulacion tanto su seguimiento de trayectoria como también sus variables de estado.

De acuerdo a los resultados obtenidos en el prototipo: el péndulo invertido simple, el modelo difuso tipo Takagi-Sugeno permite obtener una buena aproximación del sistema no lineal y en combinación con la teoría del Regulador Lineal, permite realizar el seguimiento de trayectorias de referencia con un buen desempeño.

En la Fig. 3 se presentan los resultados al aplicar el controlador difuso propuesto al modelo no lineal para seguir una señal de referencia

La Fig. 4 muestra la gráfica de las variables de estado utilizando como entrada una función senoidal.

Como en el control difuso, también se ha presentado una nueva ley de control para la estabilización del péndulo invertido simple. Esta ley de control es basada en control óptimo inverso, y es muy simple, comparada con otros métodos de control. Esta ley de control puede ser aplicada a otros sistemas dinámicos complejos.

La Fig. 5 muestra la estabilización del péndulo invertido con un buen desempeño al soltarlo en diferentes puntos de ubicación.

Como trabajo futuro, el problema de seguimiento es la primera parte de la investigación realizada utilizando el controlador difuso Takagi-Sugeno y como segunda parte se resolverá el seguimiento del sistema caótico de Chen usando primero el control óptimo inverso, y, posteriormente, linealizar este sistema alrededor de diferentes regiones, para utilizar la metodología de control tipo Takagi-Sugeno.

APÉNDICE

Programa de simulación en Matlab utilizado en el péndulo invertido simple

```
function miu = funmem(x,a,c)

% Programa para obtener los grados de membrecia de una funcion de membrecia
triangular.

% Datos de entrada del programa
%_
%_ x: Valor actual de las variables linguisticas
%_ a: Vector de cotas inferiores con grado de membrecia 0 de las variables
linguisticas de "x".
%_ La cardinalidad de "a" es el numero de variables linguisticas de "x"
%_ c: Vector de cotas superiores con grado de membrecia 0 de las variables
linguisticas de "x".

% Datos de salida
%_ miu: grado de membrecia de las variables linguisticas de "x"
%_
%_ Vector de valores medios entre cotas superiores e inferiores, con grado de mem-
brecia 1
%_
```

b = a+(c-a)/2

°°

for i = 1:length(a)

°° Valores de "x" menores que "a"

if x < a(i)

 miu(i) = 0;

°° Valores de "x" mayores que "a" y menores que "b"

elseif (x > a(i)) & (x < b(i))

 miu(i) = (x-a(i)) / (b(i)-a(i));

°° Valores de "x" mayores que "b" y menores que "c"

elseif (x > b(i)) & (x < c(i))

 miu(i) = (c(i)-x) / (c(i)-b(i));

°° Valores de "x" mayores que "c"

else

 miu(i) = 0;

end

end

miu = miu';

global A B P G K I

global a c

A = cell(1,5);

B=cell(1,5);

P=cell(1,5);

G=cell(1,5);

°°

°° Datos de los diversos parametros de un sistema lineal $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Pw(t)$

con un modelo de la

°° acción de control como $u(t) = Kx(t) + Iw(t)$ siendo K cualquier matriz tal que

$A + B * K$ sea estable y

°° $I = G - K * P$; ver Teorema 2.3.

°°

°° x: variables de estado

°° u: variables de control

°° w: variables exogenas(entradas)

°° \dot{x} : razon de cambio de las variables de estado

°° A: Matriz de coeficientes de las variables de estado

°° B: Matriz de coeficientes de las variables de control

°° P: Matriz de coeficientes de las variables exogenas

°° K: Matriz de coeficientes de las variables de estado en la accion de control

°° I: Matriz de coeficientes de las variables exogenas en la accion de control

°°

°° Ejemplo incluido en la tesis Ver seccion 3.3, 3.4 y 3.4.4

°°

$A\{1\} [0 \ 1; -11.17 \ -0.2];$
 $A\{2\} [0 \ 1; -26.76 \ -0.2];$
 $A\{3\} [0 \ 1; -32.67 \ -0.2];$
 $A\{4\} [0 \ 1; -26.76 \ -0.2];$
 $A\{5\} [0 \ 1; -11.17 \ -0.2];$
 $B\{1\} [0; 22.22];$
 $B\{2\} [0; 22.22];$
 $B\{3\} [0; 22.22];$
 $B\{4\} [0; 22.22];$
 $B\{5\} [0; 22.22];$
 $P\{1\} [1 \ 0; 0 \ 1];$
 $P\{2\} [1 \ 0; 0 \ 1];$
 $P\{3\} [1 \ 0; 0 \ 1];$
 $P\{4\} [1 \ 0; 0 \ 1];$
 $P\{5\} [1 \ 0; 0 \ 1];$
 $G\{1\} [0.46 \ 0.009];$
 $G\{2\} [1.16 \ 0.009];$
 $G\{3\} [1.43 \ 0.009];$
 $G\{4\} [1.16 \ 0.009];$
 $G\{5\} [0.46 \ 0.009];$
 $K [-4 \ -2; -3 \ -2.0 \ -2; -3 \ -2; -4 \ 2];$
 $L \text{ zeros}(1,2).$

```

for i = 1:5
    L(i,:) = G{i}-K(i,:)*P{i};
end
%
% Datos de las bases (a,c) de funciones de membresia triangulares de variables
linguísticas asociadas a las
% salidas de la planta
% NEGATIVO GRANDE, NEGATIVO MEDIO, CERO, POSITIVO MEDIO y POS-
ITIVO GRANDE
%
a = [-105 -70 -35 0 35]';
c = [-35 0 35 70 105]';

function xp = tsode(t,x)
global A B P G K I
global a c
AB = cell(1,length(a));
% Este programa determina la dinamica del pendulo invertido mediante linearizacion
de las ecuaciones de
% estado, fusificacion de las variables de estado y agregacion basado en Takagi-
Sugeno
%

```

```

%Obtencion de los grados de membresia de la variable x(1)
%_
miu funmem(x(1),a,c),
%_
%_ Determinación de la agregacion de las dinamicas "xp(i)" de las variables de
estado "x"
%_
%_
w [sin(t), cos(t)];
xt [x;w];
ABI [ ];
for i = 1:length(a)
    AB{i} = A{i}*x+B{i}*([K(1,:) I(1,:)]*xt/sum(miu));
ABI = [ABT AB{i}],
end
%_
xp = ABI*miu;
%_

clear
clc
%_

```

° Obtención de datos de prueba

°

prueba TS;

°

° Presentación de condiciones iniciales de tiempo "tinitial" y de las variables de estado "xinicial", así

° como tiempo de simulacion "tfinal"

°

tinitial 0;

tfinal 20,

xinicial [20,0];

°

° Integracion del sistema de ecuaciones diferenciales "tsode" mediante el metodo de Runge-Khuta de

° cuarto orden

°

[t,x] ode45('tsode',[tinitial tfinal],[20,0 0 1]),

plot(t(2:tfinal),x(2:tfinal,0:1),'b-',t(2:tfinal),sin(t(2:tfinal)),'r-')

BIBLIOGRAFÍA

[1] T. Takagi and M. Sugeno

"Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control"

IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics Vol 15, No 1, pp 116-132, 1985

[2] B. A. Francis

"The linear multivariable regulator problem"

SIAM J. Control Optim., Vol 14, pp 486-505, 1977

[3] A. Isidori

"Nonlinear Control Systems"

2nd Ed. Springer-Verlag, Berlin

[4] H. W. Noblock, A. Isidori, D. Flockerzi

"Topics in Control Theory"

Birkhäuser Verlag, 1993.

[5] K. M. Passino, S. Yurkovich

"Fuzzy Control"

Addison-Wesley, 1998

[6] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank

"An Introduction to Fuzzy Control"

2nd Ed., Springer, USA, 1996

[7] L. A. Nuño

"Control PD Difuso Aplicado a Robots"

Tesis de Maestría, Cinvestav-GDL, 1998.

[8] K. Tanaka and M. Sugeno

"Stability analysis and design of fuzzy control system"

Fuzzy Sets and Syst., Vol. 45, No 2, pp 133-156, 1992

[9] X. Ma, Z. Sun, Y. He

"Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer"

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol 6, No.1, pp 41-51, February, 1998

[10] K. Tanaka, T. Ikeda, H. O. Wang

"Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs"

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.6, No 2 , pp 250-264, May, 1998

[11] K. Tanaka, T. Taniguchi and H. O. Wang

"Fuzzy Control based on Quadratic Performance Function: A Linear Matrix Inequality Approach"

In Proceedings 1998 IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, U.S.A., December 1998.

[12] S. K. Hong and R. Langari

"Synthesis of an LMI Based Fuzzy Control System with guaranteed Optimal H-infinity Performance"

In Proceedings 1998 IEEE World Congress on Computational Intelligence, Alaska, U.S.A., June 1998.

[13] A. Jadbabaie, M. Jamshidi and A. Tith

"Guaranteed-Cost Design of Continuous-Time Takagi- Sugeno Fuzzy Controllers via Linear Matrix Inequalities"

In Proceedings 1998 IFFF World Congress on Computational Intelligence Anchorage, Alaska, USA, June

1998.

[14] K. Tanaka and T. Kosaki

"Design of Stable Fuzzy Controller for an Articulated vehicle"

IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B Cybernetics Vol. 27, No. 3, pp. 552-558, June

1997

[15] S. Boyd, I. H. Ghaoui, F. P. P. Feron y V. Balakrishnan

"Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory"

SIAM series in Applied Mathematics, Vol. 15, Philadelphia, PA., 1994

[16] K. Ogata

"Modern Control Engineering"

Third edition, Prentice-Hall, New Jersey, 1997

[17] O. Begovich, F. N. Sanchez, M. Maldonado

"Real-Time Nonlinear Regulation via TS Fuzzy Control"

Cinvestav, Unidad Guadalajara

[18] T. Kailath

"Linear Systems"

Prentice-Hall, N. J., 1980

[19] B. C. Kuo

“Sistemas Automáticos de Control”

7ª Ed., Prentice-Hall, México, 1995.

[20] E. N. Sanchez, J. P. Perez, and G. Chen

“Using dynamic neural networks to generate chaos: an inverse optimal control approach”

Intl. Journal of Bifurcation and Chaos, to appear, 2001

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1 Conjuntos Difusos	6
Fig. 2 Péndulo Simple	19
Fig. 3 Seguimiento de trayectorias usando Takagi-Sugeno	28
Fig. 4 Variables de estado del péndulo invertido simple	37
Fig. 5 Estabilización del pendulo invertido vía control óptimo inverso	37

AUTOBIOGRAFÍA

Mi nombre es Joel Pérez Padrón, nací el 26 de septiembre de 1967 en Cd. Valles, SLP, soy hijo de la Sra. Irene Padrón Mendez y el Sr. Jose Perez Ríos (+)

Cursé la preparatoria en Cd. Valles y me gradué en la FCFM de la UANL obteniendo el título de Licenciado en Matemáticas en 1991, y posteriormente ingresé a trabajar como docente en la escuela de técnicos Rómulo Garza del ITESM, y desde 1992 hasta el día de hoy imparto cátedra en la FCFM de la UANL.

Deseo obtener el grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control en la FIME de la UANL con el tema de Tesis "SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA POR ESQUEMA DIFUSO TAKAGI-SUGENO: UN ENFOQUE DE CONTROL OPTIMO"

