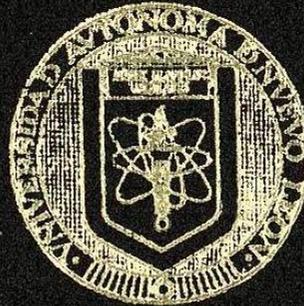


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE UN OBSERVADOR BACKSTEPPING
PARA UN ROBOT CON ARTICULACION
ROTATORIA FLEXIBLE

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

POR

ELIUT LOPEZ TOLEDO

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

OCTUBRE DEL 2001

TM
Z5853
.M2
FIME
2001
L66

OCC

THE JURY

CONSIDERS

THE CASE

AND

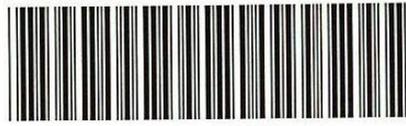
RECOMMENDS

A VERDICT

AND

THE JURY CONSIDERS THE CASE AND RECOMMENDS A VERDICT AND

RECOMMENDS A VERDICT AND RECOMMENDS A VERDICT AND



1020145987

m

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE UN OBSERVADOR BACKSTEPPING
PARA UN ROBOT CON ARTICULACION
ROTATORIA FLEXIBLE

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

POR

ELIUT LOPEZ TOLEDO

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

OCTUBRE DEL 2001

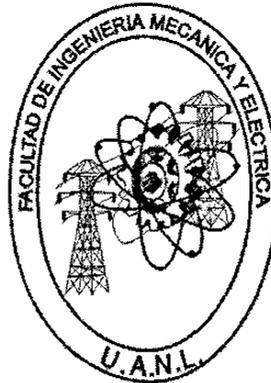
0150-33460

TM
75853
• MZ
FINE
2001
L66



FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE UN OBSERVADOR BACKSTEPPING PARA UN
ROBOT CON ARTICULACIÓN ROTATORIA FLEXIBLE

POR

ELIUT LOPEZ TOLEDO

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

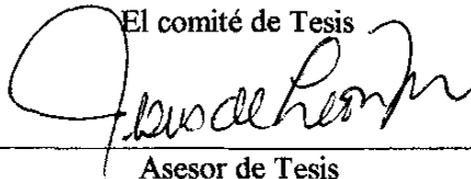
SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

OCTUBRE DEL 2001

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **DISEÑO DE UN OBSERVADOR BACKSTEPPING PARA UN ROBOT CON ARTICULACIÓN ROTATORIA FLEXIBLE**, realizada por el Ing. Eliut López Toledo sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.

El comité de Tesis



Asesor de Tesis

Dr. Jesús de León Morales.



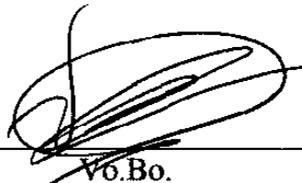
Coasesor

Dr. René Galindo Orozco



Coasesor

Dr. Marco Tulio Mata Jiménez



Vó.Bo.

M.C. Roberto Villareal Garza
División de Estudios de Postgrado

Copyright 2001
Por Eliut López Toledo
Reservados Todos los Derechos

Dedicatoria:

A mi padres Nelson López Santos (+) y Romana Toledo García, por el gran amor, principios y apoyo incondicional que siempre me han dado y los cuales contribuyeron en gran medida para la elaboración de este trabajo.

A mi esposa Andrea Angeles A. Por el apoyo que siempre me ha brindado.

A mis hijos Cinthia Y. y Nelson E. Con infinito amor.

A mis hermanos Nelson, Iván, Jairo, Aquiles y Daniel, con cariño.

Agradecimientos:

A Jehová mi Dios, por haberme dado la oportunidad de realizar este trabajo.

Al Dr. Jesús de León M. por sus enseñanzas y el apoyo necesario para llevar a cabo este trabajo de Tesis.

A los profesores del programa doctoral por sus enseñanzas en las aulas de clases que contribuyeron en gran medida a mi formación académica.

Al CONACyT por su apoyo económico sin el cual no pudiera haber realizado este trabajo.

A la Universidad Autónoma de Nuevo León mediante el proyecto PAICyT CA 376-00 el cual el cual permitió financiar la construcción del robot TIGRE 01.

Resumen

DISEÑO DE UN OBSERVADOR BACKSTEPPING PARA UN ROBOT CON ARTICULACIÓN ROTATORIA FLEXIBLE.

Publicación No. _____

Eliut López Toledo

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales

Octubre, 2001

El problema de determinar o reconstruir el estado de un sistema cuando solo se dispone de una función de salida que involucra una parte del vector de estado es conocido como el problema de estimación del estado. Este problema ha sido resuelto para el caso lineal, sin embargo para el caso no lineal, con excepción de algunos resultados parciales, sigue siendo un problema abierto.

Por otra parte, los algoritmos de control de robots requieren en general de toda la información del vector de estados; sin embargo, solo la medición de la posición del eslabón y del rotor son posibles, ya que al introducir más sensores para medir la velocidad del eslabón y del rotor, involucran otros problemas como el ruido en la señal, el alto costo de los sensores por mencionar algunos.

El presente trabajo de tesis está constituido de dos partes: una teórica y otra de carácter práctico.

Respecto a la parte teórica, se presenta un estudio sobre la construcción de un observador Backstepping para una clase de sistemas no lineales afines en el estado, el cual es aplicado al modelo matemático que describe el comportamiento de un robot flexible en la articulación de un solo eslabón con la finalidad de estimar la velocidad

angular y la posición angular del rotor del motor, así como también estimar la velocidad angular y la posición angular del eslabón.

También se lleva a cabo la comparación de estos resultados con los obtenidos mediante un observador de alta ganancia, el cual es construido considerando los mismos parámetros de inercia y las mismas condiciones iniciales del robot con flexibilidad en la articulación de un solo eslabón que el observador Backstepping.

Considerando la parte práctica, un robot flexible de cinco grados de libertad llamado TIGRE 01 es diseñado y construido, cuyos accionadores son motores a paso. Este robot cuenta con una parte mecánica cuyo sistema de transmisión es por medio de cadenas, una interfase y un programa de software mediante el cual se programan las tareas a realizar por el robot.

Notación

q	Matriz q
q^T	Transpuesta de la matriz q
q^{-1}	Inversa de la matriz q
R	Conjunto de los números reales
R^n	Espacio vectorial de dimensión n con componentes reales
\in	Pertenece a
Π	Producto
\rightarrow	Tiende a
\Rightarrow	Implica
$\ \arg\ $	Norma del argumento
$ \arg $	Valor absoluto del argumento
x	Derivada completa de x con respecto al tiempo
\forall	Para toda
$O(e)$	Término de orden e superior
V_{x_0}	Vecindad abierta alrededor de x_0

Índice

1	INTRODUCCIÓN	1
	1.1 Definición de Robot Industrial	3
	1.1.1 Clasificación del Robot Industrial	4
	1.2 Configuraciones en Robots Industriales	5
	1.3 Robots con Flexibilidad en las Articulaciones	6
	1.4 Objetivos de la investigación	7
	1.5 Aportación del trabajo de tesis	7
	1.6 Estructura del trabajo de tesis	8
2	MODELO MATEMÁTICO DEL ROBOT CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACIÓN	10
	2.1 Manipuladores con Articulaciones Flexibles	10
	2.2 Propiedades del Modelo	13
	2.3 Modelo del brazo robot con Articulación Flexible de un Grado De Libertad (GDL)	16
	2.4 Modelo Matemático	16
	2.5 Conclusiones	17
3	OBSERVADOR BACKSTEPPING	18
	3.1 Conceptos y definiciones de los observadores	18
	3.2 Observabilidad de sistemas no lineales.	19
	3.3 Observadores	23
	3.4 Metodología para el Diseño del Observador Backstepping	24
	3.5 Construcción del Observador Backstepping para el Modelo Matemático del Robot con Articulación Flexible	33
	3.6 Construcción del Observador de alta ganancia para el Modelo Matemático del Robot con Articulación Flexible	35
	3.6.1 Resultados de Simulación	36
	3.6.2 Conclusiones	40

4	DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN ROBOT DE 5 GDL CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACIÓN	42
4.1	Introducción	42
4.2	Consideraciones Básicas para la construcción del Robot	43
4.3	Aspectos de diseño de los Sub-Sistemas de control y Mecánico	45
4.4	Programación del robot <i>Tigre 01</i>	49
4.5	Especificaciones Técnicas	52
4.6	Conclusiones	53
5	CINEMÁTICA Y POSICIONAMIENTO DEL ROBOT <i>TIGRE 01</i>	55
5.1	Introducción	55
5.2	Las transformadas homogéneas	57
5.2.1	Interpretación de las transformadas homogéneas	59
5.3	Solución directa del Robot <i>Tigre 01</i> por el método matricial.	60
5.3.1	Definición de los sistemas de referencia en el robot <i>Tigre 01</i> . .	61
5.3.2	Definición de las matrices	63
5.4	Obtención de la solución inversa del Robot <i>Tigre 01</i> por el método matricial	66
5.5	Conclusiones	70
6	CONCLUSIONES	72
6.1	Conclusiones generales de esta Tesis	72
6.2	Trabajos Futuros	73
	APENDICE A PANTALLAS DEL SISTEMA	74
	REFERENCIAS	77

Lista de Figuras

1.1	Ejemplo de estructura mecánica y elementos constitutivos de un Robot	4
1.2	Configuraciones más frecuentes en robots industriales	5
2.1	Modelo del Robot Manipulador	17
3.1	Esquema del observador	23
3.2	El estado x_1 con los estimados \hat{z}_1 y \hat{x}_1	37
3.3	El estado x_2 con los estimados \hat{z}_2 y \hat{x}_2	38
3.4	El estado x_3 con los estimados \hat{z}_3 y \hat{x}_3	38
3.5	El estado x_4 con los estimados \hat{z}_4 y \hat{x}_4	39
4.1	Robot <i>Tigre 01</i>	43
4.2	Motor de pasos de 4 fases	44
4.3	Sección de Potencia.	45
4.4	Sección Lógica.	46
4.5	Sección Óptica.	46
4.6	Efector Final.	47
4.7	Un aspecto del área de trabajo del <i>Tigre 01</i>	48
4.8	Eslabón.	48
4.9	Puerto LPT1.	50
4.10	Figuras del robot <i>Tigre 01</i>	53
5.1	Esquema de las barras y articulaciones del robot <i>Tigre 01</i> , en el que se indican los ángulos de las articulaciones y las coordenadas cartesianas del punto medio de la pinza (TCP)	58
5.2	Obtención del sistema de referencia definido por la matriz transformada	60
5.3	Sistema de referencia, aplicado al caso del Robot <i>Tigre 01</i>	62
5.4	Representación de los elementos del manipulador sobre el plano formado por los ejes Z y a.	62
5.5	Vectores unitarios que reflejan la orientación de la mano	66

Lista de Tablas

4.1	Secuencia de bits para un motor de pasos de cuatro fases.	50
4.2	Especificaciones técnicas del robot <i>Tigre 01</i>	52

Capítulo 1

Introducción

El progreso en la ciencia y en la tecnología ha permitido desarrollar nuevas herramientas para mejorar la productividad y obtener productos de alta calidad, lo cual ha motivado a la industria a desarrollar estrategias de automatización basadas en computadoras. Actualmente, la mayoría de las tareas de fabricación automatizadas se realizan mediante máquinas de uso especial, diseñadas para realizar funciones predeterminadas en un proceso de manufactura. La automatización mediante robots ha sido introducida en las tareas de manufactura para incrementar la productividad y reducir los costos. Además, en algunos casos, reemplazar al hombre en tareas de alto riesgo o tediosas. De éste modo, los robots representan una forma elevada de automatización en procesos de fabricación.

Los primeros robots que fueron construidos tenían forma antropomórfica, es decir, robots con forma humana, donde la mayor parte de éstos estaban constituidos de brazos y piernas. Recientemente, las nuevas versiones de robots no cuentan con una forma humana, lo cual permite desarrollar nuevas áreas de investigación como lo es actualmente la mecatrónica. El desarrollo de estas nuevas áreas ha permitido la creación de grupos interdisciplinarios que combinan aspectos de ingeniería eléctrica, mecánica y/o computacional entre otros. Por otro lado, para integrar estos nuevos equipos a las cadenas de producción es necesario desarrollar una teoría sobre el funcionamiento de

estos equipos. Por lo tanto, la obtención de modelos y de algoritmos de control permite realizar mejoras en el funcionamiento de estos sistemas y extender su aplicación a diferentes campos de la investigación y de la industria.

Por otra parte, para efectuar el control del movimiento del robot es necesario obtener un modelo que permita conocer el comportamiento dinámico del robot. Existen varios problemas relacionados con el movimiento del robot. Entre ellos destaca el determinar la posición y la orientación de la herramienta del robot con respecto a un sistema de coordenadas; otro problema es el de determinar el movimiento que debe efectuar el robot dadas ciertas coordenadas de referencia. El primer problema se conoce como el problema cinemático directo y el segundo como el problema cinemático inverso, de los que se hace un estudio basado en el robot *TIGRE 01*, el cual fue construido en nuestro laboratorio.

Es de todos conocido que para implementar un algoritmo de control que permita aumentar la eficiencia del sistema, es necesario medir algunas variables que intervienen en los algoritmos diseñados. Los algoritmos que permiten resolver los problemas anteriormente expuestos, no requieren de información actualizada del estado en que se encuentra el sistema. A éste caso se le conoce como algoritmos de control fuera de línea, ya que sólo requieren información de algunas variables. La función de los sensores del robot se puede dividir en dos categorías principales: *estado interno* y *estado externo* según [10]. Los sensores de estado externo tratan con la detección de variables tales como alcance, proximidad y contacto, los cuales se utilizan en los problemas de cinemática directa e inversa. Los sensores de estado interno tratan con la detección de variables tales como la posición de la articulación del brazo, la cual se utiliza para controlar al robot. Sin embargo, muchas veces no es posible medir todas estas variables debido a los costos de los sensores, sobre todo cuando no se cuenta con suficientes recursos económicos. Es por ello que el diseño de observadores (ver capítulo 3) resulta necesario.

En la literatura especializada sobre el tema, encontramos diversos resultados relacionados con el diseño de observadores para sistemas no lineales. En éste trabajo se

propone el diseño de un observador por medio de la técnica *Backstepping* para estimar variables no medibles en un robot.

1.1 Definición de Robot Industrial

De acuerdo con el instituto americano de Robótica, un robot industrial es un manipulador *reprogramable multifuncional* diseñado para mover materiales, partes, herramientas, o dispositivos especiales, a través de movimientos programados para el desempeño de una variedad de tareas. Un robot de estas características, se dice que posee inteligencia si asociamos a los algoritmos de control computacionales uno o varios sistemas de medición y/o visión [24].

Un robot industrial consiste de algunos elementos rígidos conectados en serie, llamados eslabones, mediante articulaciones prismáticas o de revolución. Un extremo final de la cadena está fijo a una base soporte, mientras el otro extremo se encuentra libre y está equipado con una herramienta para manipular objetos o realizar tareas específicas. El movimiento de las articulaciones produce un movimiento relativo de los distintos elementos.

Mecánicamente, un robot se compone de un brazo y una muñeca mas una herramienta. Éste es diseñado para alcanzar una pieza de trabajo localizada dentro de su área de trabajo (volumen espacial al que puede llegar el extremo del robot [3]). Por lo general, el movimiento del robot está caracterizado en dos tipos de movimientos que son el posicionamiento y la orientación, los cuales pueden ser rotatorios o prismáticos. La combinación de estos movimientos permite posicionar y orientar la herramienta, para facilitar el trabajo del robot [6]. Los movimientos de orientación se denominan a menudo *elevación* (pitch), *desviación* (yaw) y *giro* (roll). Por lo tanto, los movimientos de un robot con seis grados de libertad, es decir, con seis movimientos independientes, divididos por ejemplo, en tres para el posicionamiento y tres para la orientación, se muestran en la figura 1.1.

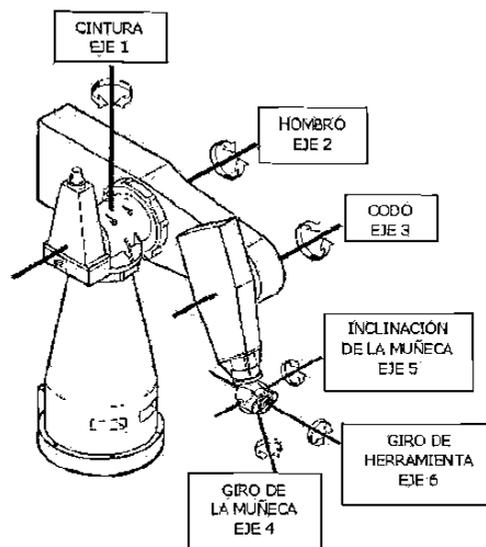


Figura 1.1: Ejemplo de estructura mecánica y elementos constitutivos de un Robot.

1.1.1 Clasificación del Robot Industrial

Existen diversas formas en las que se pueden clasificar a los robots en función de su funcionamiento, geometría y aplicación. Aquí sólo haremos mención a dos tipos de clasificaciones que son las más comunes.

De acuerdo con la *Federación Internacional de Robótica* (I.F.R.) se distinguen cuatro tipos de robots:

- Robot secuencial.
- Robot de trayectoria controlable.
- Robot adaptable.
- Robot telemanipulado.

Esta clasificación coincide en gran medida con la establecida por la *Asociación Francesa de Robótica Industrial* (A.F.R.I.) que se presenta a continuación [3]:

Tipo A Manipulador con control manual o telemando.

Tipo B Manipulador automático con ciclos preajustados; regulación mediante fines de carrera o topes; control por PLC; accionamiento neumático, eléctrico o hidráulico.

- Tipo C Robot programable con trayectoria continua o punto a punto. Carece de conocimiento sobre su entorno.
- Tipo D Robot capaz de adquirir datos de su entorno, readaptando su tarea en función de estos.

1.2 Configuraciones en Robots Industriales

Algunos robots se utilizan ampliamente en tareas industriales y de investigación, para la fabricación y ensamblaje, manejo de material, soldadura por arco y de punto, montajes de piezas, pintura en aerosol, exploraciones espaciales y submarinas, investigación de brazos protésicos y el manejo de materiales peligrosos, entre otros. Estos robots pertenecen a una de las cinco categorías que definen los movimientos básicos, como se indica en la figura 1.2 [3].

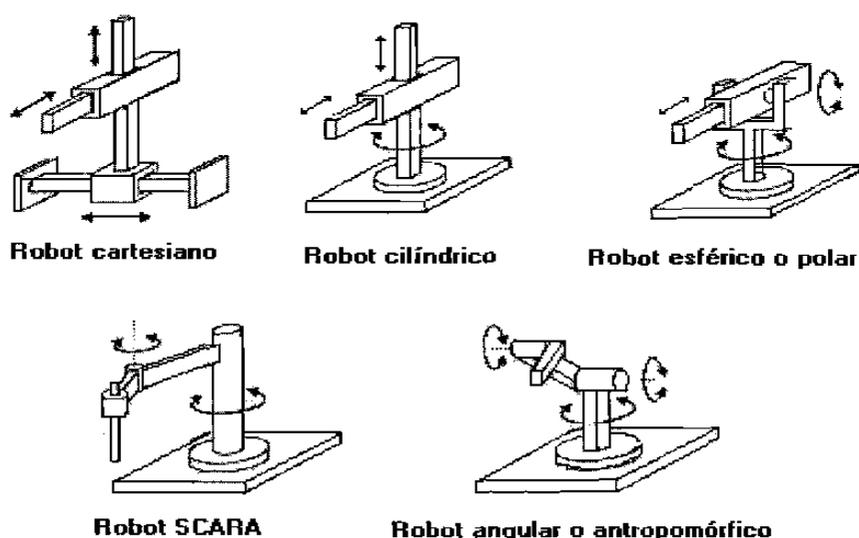


Figura 1.2: Configuraciones más frecuentes en robots industriales.

Por otra parte, recientemente, para propósitos de control se ha presentado otro tipo de clasificación que permite estudiar el comportamiento dinámico de los robots [5], la cual se da a continuación.



En realidad los robots rígidos son una subclase de los robots flexibles en la articulación, ya que si la flexibilidad en la articulación no está presente, la dinámica del robot flexible coincide con la del robot rígido.

1.3 Robots con Flexibilidad en las Articulaciones

La flexibilidad en los brazos robots manipuladores se presenta cuando se utilizan elementos para la transmisión del movimiento, tales como bandas de transmisión, o en el caso de grandes flechas de transmisión, donde un desplazamiento dinámico es introducido entre la posición de los actuadores y la posición de los eslabones. Esta flexibilidad se manifiesta por lo general en la mayoría de los brazos robot.

En el movimiento de los brazos robots se presentan efectos de vibraciones pequeñas, las cuales no se deben de despreciar. Estas vibraciones son de una pequeña magnitud y de una frecuencia alta, las cuales permanecen en un determinado ancho de banda, que lo hace atractivo e interesante para el estudio desde el punto de vista de control.

La modelación de robots flexibles manipuladores se realiza de la siguiente manera, según el tipo de flexibilidad que se presente. Para los robots flexibles en la articulación, la flexibilidad se considera como si ésta se encontrara en las articulaciones del robot: representando esta deformación como un resorte torsional lineal. Por otra parte, cuando la flexibilidad se encuentra en los eslabones, ésto es, debido a que los brazos robots cuentan con eslabones largos y ligeros, en los que la flexibilidad involucra cuerpos de grandes masas que son sometidos a deformaciones distribuidas sobre largos segmentos.

La flexibilidad para robots flexibles en el eslabón, se modela mediante la partición en pequeñas secciones del eslabón. La descripción matemática del comportamiento

dinámico del robot, está descrita por la teoría de Euler Bernoulli haciendo uso de algunas hipótesis:

1.- El eslabón es un brazo delgado con características geométricas uniformes y distribución de masa homogénea.

2.- Las deformaciones no lineales, así como la fricción interna y las perturbaciones externas son despreciables.

3.- Sólo se consideran deformaciones elásticas en la dirección lateral del brazo flexible.

El modelo resultante para el brazo flexible está descrito mediante ecuaciones diferenciales parciales.[25]

1.4 Objetivos de la Investigación

El objetivo de éste trabajo de tesis se divide en dos partes, una teórica y otra práctica. Con respecto a la parte teórica, se propone el diseño de un observador basado en la técnica conocida como *Backstepping*, la cual se aplica a una clase de sistemas no lineales afines en el estado para la estimación de variables no medibles. Éste observador es aplicado a un modelo matemático que describe el comportamiento dinámico de un robot con flexibilidad en la articulación de un solo eslabón. Además, un estudio comparativo entre el observador *Backstepping* y uno diseñado mediante la técnica de alta ganancia; donde se estiman la posición angular y la velocidad angular del rotor del motor, así como también la posición angular y la velocidad angular de la posición del eslabón, es realizado.

Por otra parte, desde el punto de vista práctico, se diseña y se construye un robot de 5 grados de libertad, el cual tiene como finalidad, el desarrollo de la investigación y enseñanza de la robótica.

1.5 Aportación del trabajo de Tesis

El uso de observadores tiene como objetivo reconstruir la información de las variables no medibles del sistema, las cuales son necesarias para la aplicación de

cualquier algoritmo de control, y en algunos casos reemplazar el uso de sensores. Por tal motivo, una de las aportaciones de éste trabajo consiste en el diseño de un observador basado en la técnica de Backstepping y un estudio comparativo donde se muestra su eficiencia con respecto a otro tipo de observadores.

Por otro lado, la necesidad de diseñar equipos que permitan realizar los estudios experimentales, en donde los resultados teóricos que han sido obtenidos puedan ser verificados, es uno de los objetivos de éste trabajo. Como una de las principales aportaciones se tiene el desarrollo de un prototipo para el laboratorio de un robot de cinco grados de libertad, el cual permitirá en trabajos posteriores implementar algoritmos de control desarrollados durante la investigación y definir las principales direcciones a donde se puede dirigir la investigación para mejorar el funcionamiento de estos equipos y sus posibles aplicaciones.

1.6 Estructura del Trabajo de Tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra estructurado de la siguiente manera: en el Capítulo 2, se presenta el modelo matemático de un brazo robot con flexibilidad en la articulación, además se mencionan las hipótesis que se consideran para la obtención del modelo de los robots con flexibilidad en la articulación; también se presenta el modelo del brazo robot de un simple eslabón con articulación rotatoria flexible el cual es considerado para la realización del observador Backstepping y el observador de alta ganancia.

En el Capítulo 3 se construye un observador Backstepping para una clase de sistemas no lineales afines en el estado, para estimar la velocidad angular del rotor del motor, la posición angular del rotor del motor, la velocidad angular del eslabón y la posición angular del eslabón del brazo robot flexible de un solo eslabón; también se construye un observador de alta ganancia para el mismo modelo matemático del brazo robot flexible de un solo eslabón estimando los mismos estados que en el observador Backstepping y se hace un análisis comparativo para estos dos.

En el Capítulo 4 se presenta todo el proceso para el diseño y construcción de un brazo robot con flexibilidad en la articulación de 5 grados de libertad llamado *TIGRE 01*; que considera el tipo de actuadores, sistema de impulsión, sistema de transmisión mecánica, diseño del software de control e interfase.

En el Capítulo 5 se presenta un estudio Cinemático y de posicionamiento del robot *TIGRE 01*, mediante el método de transformación homogénea de las ecuaciones que posicionan la pinza tanto directa como inversa.

En el Capítulo 6 se mencionan conclusiones de éste trabajo de tesis y se proponen trabajos futuros.

Capítulo 2

Modelo matemático del robot con flexibilidad en la articulación.

2.1 Manipuladores con Articulaciones Elásticas

En el presente capítulo se presenta la obtención de un modelo matemático de un robot con flexibilidad en la articulación con n grados de libertad [25].

En los robots con flexibilidad en la articulación aparecen diversos fenómenos que afectan el comportamiento dinámico del robot flexible. A diferencia de los robots rígidos donde la flexibilidad no existe debido a su rigidez, en los robots flexibles en la articulación los fenómenos ocasionados por la flexibilidad de sus estructuras mecánicas se deben tomar en cuenta ya que modifican el comportamiento dinámico de estos y los hacen más difíciles de controlar.

A continuación, se presentan las principales consideraciones de estos robots:

- Las deformaciones elásticas deben ser pequeñas, de modo que sus efectos puedan ser conocidos, de lo contrario los modelos resultantes serían muy complejos y no podrían ser tratados para el diseño de controladores.
- Para la modelación de la flexibilidad en la articulación, esta se considera como si fuera un resorte torsional lineal.
- En la modelación de los rotores de los accionadores, estos son considerados como si fueran cuerpos uniformes con centro de masa en el eje de rotación.

En base a la formulación Lagrangiana, un conjunto de coordenadas generalizadas es considerado para poder caracterizar la configuración del sistema, de modo que serán necesarias $2n$ coordenadas, esto es debido a que el brazo robot consta de $2n$ cuerpos rígidos, los cuales representan a los accionadores y los eslabones de la estructura del brazo robot.

Sea q_1 el vector $(n \times 1)$ de posición de los eslabones y sea q_2 el vector $(n \times 1)$ el cual representa las posiciones del accionador, que es reflejado por medio de la relación de engranes del robot. Una vez considerada esta selección, la diferencia $q_{1,i} - q_{2,i}$ representará la deformación de la i -ésima articulación. Además, cabe mencionar que para determinar la cinemática directa de todo el eslabón (y también de cada extremo del eslabón), se requerirá de una función que dependa únicamente de las variables del eslabón q_1 .

Definiendo la energía cinética del robot que es representada por la expresión:

$$T = \frac{1}{2} q^T H(q) q \quad (2.1)$$

donde $q = (q_1, q_2) \in R^{2n}$ y $H(q)$ representa la matriz de inercia de dimensión $(2n \times 2n)$ siendo ésta simétrica y definida positiva $\forall q$. Cabe mencionar que para las articulaciones rotatorias todos los elementos de $H(q)$ son acotados. Por lo tanto, la estructura interna de $H(q)$ está dada de la siguiente manera:

$$H(q) = \begin{bmatrix} H_1(q_1) & H_2(q_1) \\ H_2^T(q_1) & H_3 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Considerando la ecuación descrita anteriormente, podemos decir que las submatrices son de dimensión $(n \times n)$ donde la submatriz H_1 contiene las propiedades inerciales, la submatriz H_2 toma en cuenta los acoplamientos inerciales entre los giros de los accionadores y los eslabones previos, y finalmente, la submatriz H_3 es una matriz diagonal constante la cual depende de las inercias de los rotores de los motores y de la relación de engranes del brazo robot.

Otro elemento importante a considerar es la energía potencial, que viene dada como la suma los efectos gravitacionales de los accionadores y de los eslabones.

Si suponemos que las masas de los rotores son simétricas, entonces la energía potencial (U_g) está dada por la siguiente ecuación:

$$U_g = U_g(q_1) + U_e \quad (2.3)$$

donde la elasticidad de la articulación puede expresarse de la siguiente manera:

$$U_e = \frac{1}{2} (q_1 - q_2)^T K (q_1 - q_2) \quad (2.4)$$

siendo $K = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\}$, $k_i > 0$, donde k_i representa la constante de elasticidad de la i -ésima articulación.

Sin embargo, si definimos la matriz

$$K_E = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

la energía elástica se puede reescribir quedando de la siguiente forma:

$$U_e = \frac{1}{2} q^T K_E q. \quad (2.6)$$

Para obtener las ecuaciones dinámicas del movimiento del robot, partimos de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = m_i, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (2.7)$$

donde $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ es la función Lagrangiana y m_i representa la fuerza generalizada que realiza un trabajo sobre la coordenada q_i . Debido a que las coordenadas del motor q_2 son accionadas directamente, todas las fuerzas se pueden representar en el lado derecho de la ecuación (2.7) por

$$m = [0 \dots 0 \ u_1 \dots u_n]^T \in R^{2n}. \quad (2.8)$$

Además, la ecuación (2.7) da lugar a $2n$ ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$H(q_1)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K_E q + g(q_1) = m, \quad (2.9)$$

donde $H(q)$ está dado por (2.2) y los términos de Coriolis y centrífugos son expresados como

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \dot{H}(q_1)\dot{q} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T H(q_1) \dot{q}) \right]^T, \quad (2.10)$$

y el vector de gravedad está dado por

$$g(q_1) = \frac{\partial U_g(q_1)^T}{\partial q} = \begin{pmatrix} g_1(q_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

con

$$g_1 = \left(\frac{\partial U_g}{\partial q_1} \right)^T.$$

2.2 Propiedades del modelo

Considerando la ecuación que representa el comportamiento dinámico del robot flexible en la articulación general (2.9), a continuación se presentan las propiedades que el modelo satisface [17].

1.- Los elementos de $C(q, \dot{q})$ se pueden definir si la matriz $\dot{H} - 2C$ es anti-simétrica. Esta selección es proporcionada por los símbolos de Christoffel

$$C_{ij}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H_{ij}}{\partial q} \dot{q} + \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \right], \quad (2.12)$$

con $i, j = 1, \dots, 2n$; donde q_i denota el i -ésimo elemento del vector q .

2.- Si $C(q, \dot{q})$ se encuentra definida como en la expresión (2.12), implica que puede ser descompuesta como

$$C(q, \dot{q}) = C_A(q_1, \dot{q}_2) + C_B(q_1, \dot{q}_1), \quad (2.13)$$

con

$$C_A(q_1, \dot{q}_2) = \begin{bmatrix} C_{A1}(q_1, \dot{q}_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$C_B(q_1, \dot{q}_1) = \begin{bmatrix} C_{B1}(q_1, \dot{q}_1) & C_{B2}(q_1, \dot{q}_1) \\ C_{B3}(q_1, \dot{q}_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde los elementos de las matrices $(n \times n)$ C_{A1} , C_{B1} , C_{B2} y C_{B3} están dados por

$$C_{A1,ij}(q_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_2^i}{\partial \dot{q}_{1,j}} - \frac{\partial H_2^j}{\partial \dot{q}_{1,i}} \right) \dot{q}_2, \quad (2.16)$$

$$C_{B1,ij}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_{1,ij}}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \left(\frac{\partial H_1^i}{\partial \dot{q}_{1,j}} - \frac{\partial H_1^j}{\partial \dot{q}_{1,i}} \right) \dot{q}_1 \right), \quad (2.17)$$

$$C_{B2,ij}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_{2,ij}}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 - \frac{\partial (H_2^T)^j}{\partial \dot{q}_{1,i}} \dot{q}_1 \right), \quad (2.18)$$

$$C_{B3,ij}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_{2,ji}}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial (H_2^T)^j}{\partial \dot{q}_{1,i}} \dot{q}_1 \right), \quad (2.19)$$

con A^i denotando la i – ésima fila de una matriz A. Estas expresiones resultan a partir de la dependencia de la matriz de inercia (2.2) y de la propiedad 1.

3.- La matriz $H_2(q_1)$ tiene la siguiente estructura triangular superior

$$\begin{bmatrix} 0 & H_{2,12}(q_{1,1}) & H_{2,13}(q_{1,1}, q_{1,2}) & \dots & H_{2,1n}(q_{1,1}, \dots, q_{1,n-1}) \\ 0 & 0 & H_{2,23}(q_{1,2}) & \dots & H_{2,2n}(q_{1,2}, \dots, q_{1,n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_{2,n-1,n}(q_{1,n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

de donde los elementos de la matriz H_2 se obtienen de la siguiente manera

$$H_{2,ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_{1,j} \partial \dot{q}_{2,i}} \quad (2.20)$$

donde la energía cinética T representa la suma de la energía cinética de cada eslabón incluyendo la del estator del motor sucesivo y la de cada rotor de los motores.

Por otra parte, las contribuciones de H_2 se deben sólo a la parte de la energía cinética de los rotores, de modo que la contribución del i – ésimo rotor está dada por

$$T_{r,i} = \frac{1}{2} m_{r,i} v_{2,i}^T v_{2,i} + \frac{1}{2} w_{2,i}^T I_{r,i} w_{2,i} \quad (2.21)$$

siendo $v_{2,i}$ y $w_{2,i}$ la velocidad lineal absoluta y la velocidad angular del i –ésimo rotor, respectivamente, las cuales están expresadas en un marco de referencia colocado en el correspondiente estator; $m_{r,i}$ e $I_{r,i}$ son la masa y el tensor de inercia del rotor,

respectivamente. $w_{2,i}$ puede ser calculada, para el caso de articulaciones rotacionales, por la siguiente fórmula recursiva

$$\begin{aligned} w_{2,i} &= R_{r,i} [w_{1,i-1} + b_{2,i} \dot{q}_{2,i}], \\ w_{1,i} &= R_i(q_{1,i}) [w_{1,i-1} + b_{1,i} \dot{q}_{1,i}], \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $w_{1,i}$ es la velocidad angular absoluta del i -ésimo eslabón expresado en un marco de referencia colocado en el correspondiente eslabón, $b_{1,i}$ denota el vector unitario asociado al eje de la i - ésima articulación, $b_{2,i}$ es el vector unitario constante de la velocidad angular del rotor i relativo al eslabón $i - 1$, $w_{2,i}$ la velocidad absoluta angular del eslabón i en un marco de referencia sujeto al propio eslabón, R_i la matriz de transformación de dimensión (3×3) desde el marco del eslabón $i - 1$ al marco de referencia del eslabón i y $R_{r,i}$ es la matriz de transformación de dimensión (3×3) obtenida a partir del marco del eslabón $i - 1$ al marco de referencia del rotor i .

4.- Existe una constante positiva α tal que

$$\left\| \frac{\partial g_1(q_1)}{\partial q_1} \right\| \leq \alpha \|q_1 - \bar{q}_1\|, \quad \forall q_1, \bar{q}_1 \in R^n. \quad (2.23)$$

En muchos arreglos cinemáticos comunes, la submatriz H_2 en la matriz de inercia del modelo del robot con articulación elástica resulta ser constante, lo cual da como resultado que

$$H_2 = cte \Rightarrow C_{A1} = C_{B2} = C_{B13} = 0$$

es decir, los términos de Coriolis y centrífugo, los cuales son independientes de q_2 , son también independientes de \dot{q}_2 . Con ello podemos decir que el modelo (2.9) se reescribe como sigue

$$\begin{aligned} H_1(q_1) \ddot{q}_1 + H_2 \ddot{q}_2 + C(q_1, \dot{q}_1) \dot{q}_1 + K(q_1 - q_2) + g_1(q_1) &= 0 \\ H_2^T \ddot{q}_1 + H_3 \ddot{q}_2 + K(q_2 - q_1) &= u \end{aligned} \quad (2.24)$$

con $C = C_{B1}$.

Por otra parte, en algunas estructuras cinemáticas especiales de robots se tiene que $H_2 = 0$, dando lugar a simplificaciones adicionales, lo cual significa que no hay

acoplamientos inerciales entre el eslabón y las dinámicas del motor, de modo que se tiene el siguiente modelo del robot

$$\begin{aligned} H_1(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + K(q_1 - q_2) + g_1(q_1) &= 0 \\ H_3\ddot{q}_2 + K(q_2 - q_1) &= u. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En particular, H_2 puede ser igual a cero, si la parte angular de la energía cinética de cada rotor depende únicamente a su propia rotación, esto es $w_{2,i} = R_{r,i}b_{2,i}\dot{q}_{2,i}$, o bien

$$T_{r,i} = \frac{1}{2}m_{r,i}v_{2,i}^T v_{2,i} + \frac{1}{2}I_{m,i}\dot{q}_{2,i}^2 \quad (2.26)$$

con $I_{m,i} = b_{2,i}^T R_{r,i}^T I_{r,i} R_{r,i} b_{2,i}$, $i = 1, \dots, n$.

En conclusión, el modelo matemático de un robot flexible en la articulación de n grados de libertad está representado por (2.25)

2.3 Modelo del brazo robot con articulación flexible de un grado de libertad

En esta sección se presenta la obtención de un modelo matemático de un robot flexible de un grado de libertad obtenido a partir del modelo general.

2.4 Modelo Matemático

En base a la formulación Lagrangiana, el sistema dinámico que describe el comportamiento de un robot de un simple eslabón con articulación rotatoria flexible en un movimiento planar se presenta a continuación.

El sistema dinámico [22]

$$(\Sigma_M): \begin{cases} J\ddot{q}_m + B\dot{q}_m + K(q_m - q) = u \\ I\ddot{q} + B_1\dot{q} + mgl \sin(q) - k(q_m - q) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

donde q denota la posición angular del eslabón de longitud $\frac{l}{2}$ y masa m , q_m denota la posición angular del rotor del motor, I representa la inercia del eslabón, J es la inercia

del motor, k es el coeficiente de rigidez de la articulación flexible, B es la fricción viscosa del motor, B_f representa la fricción viscosa del eslabón, g es la aceleración gravitacional; y por último u es el vector de torques del accionador.

En el modelo representado por la ecuación (2.27), no se considera el efecto de la inercia del accionador alrededor de los tres ejes independientes. Sin embargo, se ha demostrado en [22] que la ecuación (2.27) representa de manera apropiada, dentro de un dominio de funcionamiento, la dinámica del manipulador.

La representación esquemática del modelo de robot descrito por (2.27) se muestra en la figura 2.1

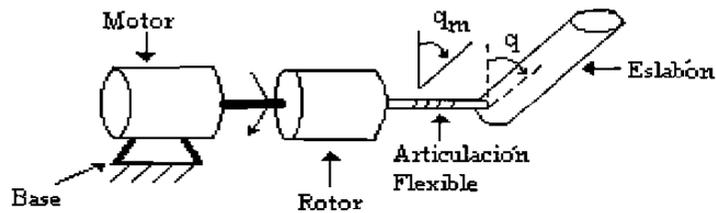


Figura 2.1: Modelo del robot Manipulador.

Los valores numéricos que serán utilizados para la simulación son los siguientes:

- q, q_m son las coordenadas generalizadas de posición.
- $J = 3.003 \text{ m}^2 \text{ Kg.}$, $B = 300.3 \text{ NmKg.}$, $k = 100 \text{ Nrad / m}$
- $\epsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{k}} \approx 10^{-4}$, $\alpha = 7.13 * 10^{-8}$
- $mg l = 0.8 \text{ Kgm}^2 / \text{seg}^2$

2.5 Conclusiones

En este capítulo se muestra la obtención de un modelo matemático que describe el comportamiento dinámico de un robot flexible en la articulación de n grados de libertad en base a un conjunto de hipótesis que permiten simplificar su comportamiento. Además, un modelo de un robot de un solo eslabón se muestra, el cual será utilizado para el diseño de observadores.

Capítulo 3

Observador Backstepping

3.1 Conceptos y definiciones de los observadores

En este capítulo se introducirán algunos conceptos y definiciones sobre la teoría de observación de sistemas no lineales en tiempo continuo. Además, se presentarán algunos resultados sobre los observadores y su síntesis.

Definición 3.1 (*Variedad*): Una variedad M de dimensión n , es un espacio topológico que es localmente euclidiano de dimensión n , es Hausdorff y tiene una base contable [18].

Ahora, considere la clase de sistemas no lineales de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

donde el estado $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, M es una variedad analítica (C^w), n es la dimensión del espacio de estado; la entrada $u \in U \subset \mathbb{R}^m$; la salida $y \in \mathbb{R}^p$. Para toda $u \in U$, $f_u(x) = f(u, x)$ denota el campo vectorial C^w sobre M y la función $h = (h_1, \dots, h_p)$ es también C^w .

Designaremos por $x_u(t, x_0)$ la solución de (3.1) a partir de la condición inicial $x_u(0, x_0) = x_0$, al tiempo $t = 0$ [19].

3.2 Observabilidad de Sistemas no Lineales

La noción de observabilidad puede ser formulada de varias maneras en el contexto no lineal. En este trabajo adoptaremos la formulación introducida por Hermann Krener [15] que se establece a partir de la noción de distinguibilidad de estados.

Definición 3.2 (*Indistinguibilidad - Distinguibilidad*): Dos estados iniciales $x_0 \in M, x_1 \in M, x_0 \neq x_1$, son indistinguibles si para todo $t \geq 0$ y para toda entrada admisible $u : [0, t] \rightarrow U$, las trayectorias correspondientes de (3.1) que resultan de x_0, x_1 son tales que $h(x_u(t, x_0)) = h(x_u(t, x_1))$. Recíprocamente, decimos que dos estados iniciales $x_0 \in M, x_1 \in M, x_0 \neq x_1$, son distinguibles si existe $t \geq 0$ y una entrada admisible $u : [0, t] \rightarrow U$ tales que $h(x_u(t, x_0)) \neq h(x_u(t, x_1))$.

Definición 3.3 (*Observabilidad*): Un sistema es observable en $x_0 \in M$ si para otro estado $x_1 \neq x_0$ es distinguible de x_0 . Un sistema es observable si es observable en todo $x_0 \in M$.

Por otra parte, para los sistemas lineales la observabilidad puede ser determinada a partir de la condición de rango:

Teorema 3.4: *El sistema lineal:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p \quad (3.2)$$

es observable si y sólo si la matriz $\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & A^{n-1} C^T \end{bmatrix}^T$ es de rango pleno [7].

La distinguibilidad es un concepto global. Sucede frecuentemente que para generar dos trayectorias a partir de x_0 y x_1 , se requiere que el sistema evolucione en el tiempo lo suficiente para que las trayectorias iniciadas a partir de x_0 y x_1 se puedan separar. Las dos definiciones que a continuación se mencionan son de naturaleza local.

Definición 3.5 (*Observabilidad local*): Se dice que el sistema (3.1) es **localmente observable** en x_0 si para toda vecindad abierta (que no contiene a los elementos de la frontera) V_{x_0} de x_0 el conjunto de puntos que son indistinguibles de x_0 en V_{x_0} vía las trayectorias en V_{x_0} son el mismo punto x_0 .

De manera general, un sistema es localmente débilmente observable si todo estado x_0 puede ser instantáneamente distinguido de sus vecinos al utilizar las trayectorias que permanecen en una vecindad de x_0 .

La propiedad de observabilidad local débil es importante, puesto que ella puede ser verificada mediante una simple condición algebraica como en el caso lineal. Por lo anterior, nos lleva a definir el espacio de observación.

Definición 3.6 (*Espacio de observación*): Se llama **espacio de observación \mathcal{O}** al más pequeño subespacio vectorial de funciones reales en M que contiene h_1, \dots, h_p , y que sea cerrado bajo la derivación de Lie con respecto a todos los campos vectoriales del tipo f_u , para $u \in U$, fijo.

Teorema 3.7: Considere el sistema (3.1) con $\dim M = n$. considere se que

$$\dim d\mathcal{O}(x_0) = n, \quad (3.3)$$

entonces el sistema es localmente observable en x_0 [19].

La condición (3.3) se llama condición de rango para sistemas no lineales. Si la condición (3.3) se verifica para todo $x_0 \in M$, se dice entonces que el sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ es observable en el sentido de rango.

El teorema anterior da una condición suficiente de observabilidad local débil.

Para poder introducir el siguiente resultado, haremos uso de la siguiente definición.

Definición 3.8 (*Densidad*): sea $A, B \subset (x, d)$; se dice que A es denso en B si $[A] \supset B$ ó $\bar{A} \supset B$. En particular si $[A] = B$, se dice que A es denso en cualquier parte de x . [18]

El siguiente resultado introduce una condición necesaria.

Teorema 3.9: *Supongamos que el sistema (3.1) es localmente débilmente observable. Entonces la condición (3.3) se cumple casi en todas partes en M , es decir, $\dim dO(x) = n$ en todo punto x que pertenece a un abierto denso M' en M .*

Ahora, considere el sistema (3.1). En general, existen entradas singulares u tales que el sistema autónomo asociado:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.4)$$

no sea observable. Cuando el sistema (3.1) no presenta entradas que hagan al sistema no observable, al conjunto de entradas admisibles para este sistema se les conoce como entradas universales.

La noción de entrada universal permite definir una clase interesante de sistemas: los sistemas uniformemente observables.

Definición 3.10 (*Sistemas localmente uniformemente observables*): *Un sistema en el cual todas las entradas son universales se llama uniformemente observable, o simplemente, observable para toda entrada. Un sistema es localmente uniformemente observable si y sólo si, para todo punto $x \in M$ existe una vecindad V_x de x tal que el sistema permanecerá en esta vecindad [15].*

En el caso particular de los sistemas lineales observables, de acuerdo con la definición anterior, éstos resultan ser sistemas uniformemente observables.

Los problemas de observación para diferentes sistemas con una salida han sido estudiados por Williamson para los sistemas bilineales y por Gauthier y Bornard [4] para los sistemas afines en el control. Estos resultados se resumen en los dos teoremas siguientes:

Teorema 3.11: *Consideremos el sistema bilineal:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx + Fu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $x \in R^n, u \in R, y \in R; A, B, F, C$ son matrices de dimensiones apropiadas.

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (3.5) sea uniformemente observable es que el sistema pueda transformarse por un cambio de coordenadas de la forma $z = Tx$, en:

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + u\bar{B}z + \bar{F}u \\ y = \bar{C}z \end{cases} \quad (3.6)$$

donde T es una matriz no singular y

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 \\ a_1 & \cdot & \cdot & a_n \end{pmatrix}, \bar{B} = TBT^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{b}_{n1} & \cdot & \cdot & \bar{b}_{nn} \end{pmatrix}, C = CT^{-1} = [1, 0, \dots, 0]$$

Teorema 3.12: Consideremos el sistema afín en el control:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y = h(x) \end{cases} \quad x \in R^n, u \in R^m, y \in R. \quad (3.7)$$

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (3.7) sea localmente uniformemente observable es que exista un cambio de coordenadas locales sobre R^n tal que (3.7) sea casi por todas partes localmente de la forma:

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \varphi(z) + \sum_{i=1}^m g_i(z)u_i \\ y = Cz \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\text{donde } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = [1, 0, \dots, 0]$$

$$y \quad \bar{g}_i(z) = (\bar{g}_{i,1}(z_1), \dots, g_{i,n}(z_1, \dots, z_n))^T \quad i = 1, \dots, m.$$

La caracterización de estos sistemas en el caso multivariable es todavía un problema abierto [4].

3.3 Observadores

Basándose en la propiedad de *Observabilidad* [13] de un sistema, es posible determinar relaciones explícitas que permitan determinar el vector de estado del sistema a partir del conocimiento de la salida y la entrada aplicada al mismo durante un intervalo de tiempo. Mediante un sistema dinámico auxiliar llamado *Observador* es posible proporcionar esta estimación del vector de estado.

Definición 3.13 Se llama *Observador* del sistema dinámico

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad \forall x \in R^n$$

a un sistema dinámico auxiliar cuyas entradas están constituidas por las entradas y salidas del sistema a observar y cuya salida es el estado estimado.

$$\Sigma_{obs} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, y) \\ \hat{x} = h(u, y, \hat{x}) \end{cases} \quad \forall \hat{x} \in R^n$$

tal que $\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

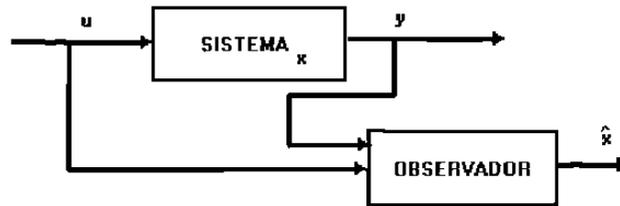


Figura 3.1: Esquema del observador.

Si $\|e(t)\|$ tiende exponencialmente hacia cero cuando $t \rightarrow \infty$ entonces, se dice que el observador es exponencial. El esquema de un observador se muestra en la figura 3.1.

En este capítulo se presenta el diseño de un algoritmo para un observador aplicado a una clase de sistemas no lineales usando la metodología conocida como backstepping.

El método es aplicable a una amplia clase de sistemas no lineales. Si el error de estimación inicial no es demasiado grande, entonces el error de estimación tiende exponencialmente a cero.

Usando este enfoque, un observador será diseñado para estimar la velocidad y aceleración para el eslabón de un robot flexible de un grado de libertad.

El Filtro de Kalman y el observador de Luenberger han sido utilizados extensamente para estimar el estado de un sistema no lineal o lineal, respectivamente.

En el artículo de W. Kang y A. J. Krener [15] se presentan resultados sobre el diseño de un observador utilizando la metodología de Backstepping para una clase de sistemas no lineales uniformemente observables. En este capítulo se propone una extensión de este trabajo para una clase de sistemas afines en el estado.

Por otra parte, para determinar la eficiencia de este observador, se efectúa un análisis comparativo de diseño de observadores. Para tal propósito, un observador de alta ganancia será diseñado y aplicado al mismo robot flexible de un solo eslabón. De esta manera, se mostrarán las ventajas y limitaciones de estos dos observadores bajo las mismas condiciones de funcionamiento.

3.4 Metodología para el Diseño del Observador Backstepping

En esta sección presentaremos la metodología propuesta por [13] para el diseño del observador Backstepping.

Considere la siguiente clase de sistemas no lineales afines en el estado

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(u, y)x_2 + g_1(u, x_1) \\ \dot{x}_i = a_i(u, y)x_{i+1} + g_i(u, x_1, \dots, x_i), \quad i = 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(x) + g_n(u, x), \\ y = Cx = x_1. \end{cases} \quad (3.9)$$

El sistema Θ

$$\Theta : \begin{cases} \dot{z}_1 = a_1(u, y)z_2 + g_1(u, z_1) + \varphi_1(z)(x_1 - z_1) \\ \dot{z}_i = a_i(u, y)z_{i+1} + g_i(u, z_1, z_2, \dots, z_i) + \varphi_2(z)(x_1 - z_1), \quad i = 2, \dots, n-1; \\ \dot{z}_n = f_n(z) + g_n(u, z) + \varphi_n(z)(x_1 - z_1) \end{cases} \quad (3.10)$$

es un observador de estado para el sistema Σ , donde $\varphi_i(z)$, $i = 1, \dots, n$; son las ganancias, $z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Definiendo el error de estimación $e_i = x_i - z_i$ para $i = 1, \dots, n$; cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_1(u, y)e_2 + g_1(u, x_1) - g_1(u, z_1) - \varphi_1(z)e_1 \\ \dot{e}_i &= a_i(u, y)e_{i+1} + g_i(u, x_1, \dots, x_i) - g_i(u, z_1, \dots, z_i) - \varphi_i(z)e_i, \quad i = 2, \dots, n-1; \\ \dot{e}_n &= f_n(x) - f_n(z) + g_n(u, x) - g_n(u, z) - \varphi_n(z)e_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

El objetivo al diseñar este tipo de observador es determinar las ganancias del observador $\varphi_i(z)$, para $i = 1, \dots, n$, de modo que el error de estimación $\|e\|$ tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 3.14 (*Condición Lipschitz*) Considere el sistema $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, donde (t, x) satisface la desigualdad

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall (t, x) \text{ y } (t, y) \text{ en alguna vecindad de } (t_0, x_0) \text{ [17].}$$

Definición 3.15 (*Compacto*): Un espacio Topológico T es llamado compacto si toda cobertura abierta de T tiene una subcobertura finita [18].

Teorema 3.16: Sea $f(t, x)$ continua a pedazos con respecto a t y satisfice

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| &\leq L\|x - y\| \\ \|f(t, x_0)\| &\leq h \end{aligned} \quad \forall x, y \in R^n, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Entonces, la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$ tiene una solución única en $[t_0, t_1]$ [17].

Hipótesis

A1) Existen constantes C_1, C_2 , donde $0 < C_1 < C_2 < \infty$, tales que para todo $x \in R^n$;

$$0 < C_1 \leq |\alpha_i(u, y)| \leq C_2 \leq \infty, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

A2) Las funciones $g_i(u, y, \dots, x_i)$, $i = 2, \dots, n$, son globalmente Lipschitz con respecto a (x_1, \dots, x_i) , y uniformemente con respecto a u e y .

Sea K un subconjunto compacto de x , el cual es positivamente invariante con respecto al sistema Σ , i.e., si una trayectoria inicia en K entonces esta permanece en K para tiempos futuros.

El conjunto $K \times \{e = 0\}$ es un conjunto positivamente invariante del sistema combinado (3.9) y (3.11).

Sea $O(e)^k$ una función de z y de e tal que sobre cualquier compacto $\Xi \subset R^n$ existen constantes N y ε tales que $|O(e)^k| \leq N|e|^k \quad \forall z \text{ en } \Xi \text{ y } |e| < \varepsilon$.

Sea $f(x)$ una función suave $\forall x \in R^n$ tal que $f(x) - f(z) = \frac{\partial f}{\partial z} e + O(e)$ donde $e = x - z$.

Teorema 3.12: *Considere el sistema (3.9) y asuma que las Hipótesis A1 y A2 se cumplen. Para cualquier conjunto compacto positivamente invariante K del sistema, existen constantes $\lambda_1, \lambda_2 \in \gamma$ tales que si $x(0) \in K$ y $\|e(0)\| \leq \varepsilon$, entonces el sistema (3.10) es un observador para el sistema (3.9), i.e., el error de estimación satisface*

$$\|e(t)\| \leq \Lambda \|e(0)\| \exp(-\gamma t).$$

Demostración: (Se toma la dinámica del error de estimación hasta n , donde n representa la dimensión del sistema; aplicándole un cambio de coordenadas; y con ello se calculan las ganancias del observador, logrando con esto obtener la matriz $M(b_{i,j}, \varphi_i)e$.

Definiendo el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} s_1 &:= e_1 \\ s_2 &:= c_1 s_1 + \dot{s}_1 + O(e)^2 \\ s_{i+1} &:= s_{i-1} + c_i s_i + \dot{s}_i + O(e)^2, \\ &i = 2, \dots, n; \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$s = M(b_{i,j}, \varphi_i) e \quad (3.12)$$

donde $c_i > 0$, $s = \text{col}(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, s_{n+1})$, $e = \text{col}(e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}, e_n)$ y la matriz

$M(b_{i,j}, \varphi_i)$ está dada por

$$M(b_{i,j}, \varphi_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,1} - \varphi_1 & K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{3,1} - K_1 \varphi_2 & b_{3,2} - a_1 \varphi_1 & K_2 & 0 & \dots & 0 \\ b_{4,1} - K_2 \varphi_3 & b_{4,2} - a_1^2 \varphi_2 & b_{4,3} - a_1^2 a_2 \varphi_1 & K_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 & d_2 & \dots & \dots & \dots & K_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

cuyas componentes están definidas como

$$d_1 = b_{n,1} - K_{n-2} \varphi_{n-1}, \quad d_2 = b_{n,2} - K_{n-1} \varphi_{n-2},$$

$$a_1 = b_{n+1,1} - K_{n-1}(f_{n,1} - \varphi_n), \quad a_2 = b_{n+1,2} - a_1 K_{n-2}(f_{n,2} - \varphi_{n-1}), \dots,$$

$$a_n = b_{n+1,n} - K_{n-1}(f_{n,n} - \varphi_1),$$

donde

$$K_r := \prod_{i=0}^r a_i, \quad a_0 = 1 \quad (3.13)$$

$$f_{n,i} := \frac{\partial f_n}{\partial z_i}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Además, las funciones $b_{i,j} = b_{i,j}(z)$ están determinadas por las siguientes ecuaciones recursivas

para $i = 2$

$$b_{2,1} = c_1 + \frac{\partial g_1}{\partial z_1}$$

para $i = 3$

$$b_{3,1} = 1 + c_2(b_{2,1} - \varphi_1) + (b_{2,1} - \varphi_1)\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_1} - \varphi_1\right) + \frac{d}{dt}(b_{2,1} - \varphi_1) + a_1 \frac{\partial g_2}{\partial z_1}$$

$$b_{3,2} = a_1 c_2 + a_1 b_{2,1} + \frac{da_1}{dt} + a_1 \frac{\partial g_2}{\partial z_2}$$

para $i = 4$

$$b_{4,1} = b_{2,1} - \varphi_1 + c_3(b_{3,1} - a_1 \varphi_2) + (b_{3,1} - a_1 \varphi_2)\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_1} - \varphi_1\right) + \frac{d}{dt}(b_{3,1} - a_1 \varphi_2) + (b_{3,2} - a_1 \varphi_1)\left(\frac{\partial g_2}{\partial z_1} - \varphi_2\right) + a_1 a_2 \frac{\partial g_3}{\partial z_1} + \frac{d}{dt}(b_{3,2} - a_1 \varphi_1) + a_1 a_2 \frac{\partial g_3}{\partial z_2}$$

$$b_{4,2} = a_1 + c_3(b_{3,2} - a_1 \varphi_1) + a_1 b_{3,1} + (b_{3,2} - a_1 \varphi_1) \frac{\partial g_2}{\partial z_2}$$

$$b_{4,3} = c_3 a_1 a_2 + a_1 b_{3,2} + \frac{d}{dt}(a_1 a_2) + a_1 a_2 \frac{\partial g_3}{\partial z_3}$$

para i

(3.15)

$$b_{i,1} = b_{i-2,1} - K_{i-4} \varphi_{i-3} + c_{i-1}(b_{i-1,1} - K_{i-3} \varphi_{i-2}) + \sum_{k=1}^{i-2} (b_{i-1,k} - K_{i-3} \varphi_{i-ki-1}) + \frac{d}{dt}(b_{i-1,1} - K_{i-3} \varphi_{i-2}) + k_{i-2} \left(\frac{\partial g_{i-1}}{\partial z_1}\right)$$

$$b_{i,j} = b_{i-2,j} - K_{i-j-3} K_{j-1} \varphi_{i-j-2} + K_{i-2} \left(\frac{\partial g_{i-1}}{\partial z_j}\right) + c_{i-1}(b_{i-1,j} - K_{i-j-2} K_{j-1} \varphi_{i-j-1}) + \frac{d}{dt}(b_{i-1,j} - K_{i-j-2} K_{j-1} \varphi_{i-j-1}) + a_{j-1} b_{i-1,j-1} + \sum_{k=j}^{i-2} (b_{i-1,k} - K_{i-k-2} K_{k-1} \varphi_{i-k-1}) \left(\frac{\partial g_k}{\partial z_1}\right)$$

$$b_{i,j} = K_{i-3} + c_{i-1}(b_{i-1,i-2} - K_{i-3} \varphi_1) + a_{i-3} b_{i-1,i-3} + (b_{i-1,i-2} - K_{i-3} \varphi_1) \left(\frac{\partial g_{i-2}}{\partial z_{i-2}}\right) + \frac{d}{dt}(b_{i-1,i-2} - K_{i-3} \varphi_1) + K_{i-2} \left(\frac{\partial g_{i-1}}{\partial z_{i-2}}\right)$$

$$b_{i,i-1} = K_{i-2} c_{i-1} + a_{i-2} b_{i-1,i-2} + K_{i-2} \left(\frac{\partial g_{i-1}}{\partial z_{i-1}}\right) + \frac{dK_{i-2}}{dt}$$

Ahora, para demostrar la convergencia del observador, se define la siguiente función V como una función candidata de Lyapunov en términos de las variables s_i .

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2. \quad (3.16)$$

Entonces, calculando la derivada de V con respecto al tiempo en términos de las variables s , resulta que

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^n c_i s_i^2 + s_n s_{n+1} + O(e)^3 \quad (3.17)$$

Por otra parte, las ganancias del observador se obtienen al hacer igual a cero el último renglón de la matriz $M(b_{i,j}, \varphi_i)$, esto es resolviendo para $s_{n+1} = 0$, de donde se obtienen las siguientes expresiones para las funciones φ_i para $i = 1, \dots, n$

$$\varphi_i = \frac{b_{i+1,i}}{K_{i-1}K_{n-i}} + f_{n,n+1-i}, \text{ para } i = 1, \dots, n; \quad (3.18)$$

de modo que

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^n c_i s_i^2 + O(e)^3 \quad (3.19)$$

Las funciones $b_{i,j}$ pueden ser calculadas de manera recursiva mediante las ecuaciones (3.15), obteniéndose las expresiones para obtener las ganancias de la ecuación (3.18).

Ahora, para demostrar la convergencia de este observador, sea U_r , $r > 0$, una vecindad de K , entonces la cerradura \bar{U}_r es un subconjunto compacto. En consecuencia, existen constantes $N > 0, \varepsilon > 0$ tales que el término de error de (3.19) satisface

$$|O(e)^3| \leq N|e|^3 \quad (3.20)$$

para todo $z \in \bar{U}_r$, $|e| < \varepsilon$.

Ahora, redefiniendo $\varepsilon = \min(r, \varepsilon)$.

A partir de $s = T(e, z) = M(b_{i,j}, \varphi_i)e$, sabemos que existen constantes $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ tales que $\forall z \in U_r$, y $\forall e, s$, resulta que

$$\lambda_1 |e| \leq |s| \leq \lambda_2 |e| \quad (3.21)$$

Puesto que $c_i > 0$, para $i = 1, \dots, n$; existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$4\gamma |s| \leq \sum_{i=1}^n c_i s_i^2 \quad (3.22)$$

En consecuencia, existe un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, de modo que el término del error en (3.19) satisface

$$|O(e)^3| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i s_i^2 \quad (3.23)$$

para todo $z \in U_r$, $|e| < \varepsilon$. Entonces, la derivada de V con respecto al tiempo, resulta de la forma

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i s_i^2 \leq -2\gamma V \quad (3.24)$$

Utilizando la desigualdad de Gronwall [17], se tiene que

$$V(t) \leq \exp(-2\gamma t) V(0) \quad (3.25)$$

De la desigualdad (3.20), finalmente resulta que

$$|e(t)| \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \exp(-2\gamma t) |e(0)| \quad (3.26)$$

y así, queda demostrada la convergencia del error de estimación.

A continuación se presentan algunos ejemplos en donde se muestra la metodología de diseño de observadores.

Ejemplo 1. Sistema de dimensión $n=1$. Uniformemente observable $\forall u$.

Considere el siguiente sistema no lineal de dimensión 1

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1)$$

el siguiente sistema

$$\dot{\hat{x}} = f_1(\hat{x}_1) + \varphi_1(\hat{x}_1)(x_1 - \hat{x}_1)$$

representa un observador de estado.

Definiendo el error de estimación como $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= f_1(x_1) - f_1(\hat{x}_1) - \varphi_1(\hat{x}_1)e_1 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_1} - \varphi_1(\hat{x}_1)e_1 \end{aligned}$$

Ahora, definiendo el siguiente cambio de variable $s_1 = e_1$, $s_2 = C_1 s_1 + \dot{s}_1 + O(e_1)^2$, considerando la función de Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2} s_1^2$, y tomando la derivada con respecto al tiempo, se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= s_1 \dot{s}_1 = s_1 (s_2 - C_1 \dot{s}_1) + O(e_1)^3 \\ &= -C_1 \dot{s}_1^2 + s_1 s_2 + O(e_1)^3\end{aligned}$$

Luego, de la ecuación anterior, igualando s_2 a cero, se obtiene

$$\dot{V}_1 = -C_1 \dot{s}_1^2 + O(e_1)^3$$

Por otro lado, para s_2 , substituyendo las expresiones apropiadas, resulta que

$$s_2 = C_1 e_1 + \dot{e}_1 = C_1 e_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_1} e_1 - \varphi_1(\hat{x}_1) e_1$$

Puesto que s_2 es igual a cero, se tiene que

$$(C_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_1} - \varphi_1(\hat{x}_1)) e_1 = 0$$

Esta igualdad se satisface si se selecciona

$$\varphi_1(\hat{x}_1) = C_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_1}, \quad b_{21} = C_1$$

De esta forma, la ganancia del observador ha sido determinada.

Ejemplo 2. Sistema de dimensión $n=2$.

Considere ahora el siguiente sistema no lineal de dimensión 2

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x) \end{cases}$$

Un observador para este sistema es de la forma

$$\Theta : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \varphi_1(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = f_2(\hat{x}) + \varphi_2(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases}$$

La dinámica del error de estimación es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - \varphi_1(\hat{x}) e_1 \\ \dot{e}_2 &= f_2(x) - f_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x}) e_2\end{aligned}$$

Definiendo el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} s_1 &= e_1 \\ s_2 &= C_1 s_1 + \dot{s}_1 + O(e)^2 \\ s_3 &= s_1 + C_2 s_2 + \dot{s}_2 + O(e)^2 \end{aligned}$$

se determinarán las ganancias del observador. Para realizar esto, considere la siguiente

función de Lyapunov $V_2 = \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2$, cuya deriva con respecto al tiempo está dada

por

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= s_1 \dot{s}_1 + s_2 \dot{s}_2 \\ &= s_1 (s_2 - C_1 s_1) + s_2 (s_3 - C_2 s_2) + O(e)^3 \\ &= -C_1 s_1^2 - C_2 s_2^2 + s_2 s_3 + O(e)^3 \end{aligned}$$

Puesto que $s_3 = 0$, resulta que

$$\dot{V}_2 = -C_1 s_1^2 - C_2 s_2^2 + O(e)^3 .$$

Además, como

$$\begin{aligned} s_3 &= s_1 + C_2 s_2 + \dot{s}_2 \\ &= e_1 + C_2 \{ (b_{21} - \varphi_1(\hat{x}))e_1 + e_2 \} + \frac{d}{dt} (b_{21} - \varphi_1(\hat{x}))e_1 + \\ &\quad (b_{21} - \varphi_1(\hat{x}))e_2 - \varphi_1(\hat{x})e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_2} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_2} e_2 - \varphi_2(\hat{x})e_1 \\ s_3 &= \{ 1 + C_2 (b_{21} - \varphi_1(\hat{x})) + \frac{d}{dt} (b_{21} - \varphi_1(\hat{x})) + (b_{21} - \varphi_1(\hat{x}))(-\varphi_1(\hat{x})) + \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_1} - \varphi_2(\hat{x}) \} e_1 + \{ C_2 + (b_{21} - \varphi_1(\hat{x})) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_2} \} e_2 \end{aligned}$$

Finalmente, las ganancias del observador resultan ser

$$\begin{aligned} \varphi_1(\hat{x}) &= C_1 + C_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_2} \\ \varphi_2(\hat{x}) &= 1 + C_2 (b_{21}) - \frac{d}{dt} \varphi_1(\hat{x}) - \varphi_1(\hat{x})(b_{21}) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_1} \\ \varphi_1(\hat{x}) &= b_{32}(\hat{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_2} \\ \varphi_2(\hat{x}) &= b_{31}(\hat{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_1} \end{aligned}$$

donde $b_{21} = C_1 - \varphi_1(\hat{x})$,

$$b_{31} = 1 + C_2 (b_{21} - \varphi_1(\hat{x})) + \frac{d}{dt} (b_{21} - \varphi_1(\hat{x})) + (b_{21} - \varphi_1(\hat{x}))(-\dot{\varphi}_1(\hat{x})) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_1} - \varphi_2(\hat{x}) y$$

$$b_{32} = C_2 + (b_{21} - \varphi_1(\hat{x})) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_2}$$

3.5 Construcción del Observador Backstepping para el Modelo Matemático del Robot con Articulación Flexible

En esta sección se diseñará un observador mediante la técnica Backstepping, el cual será aplicado a un robot de un eslabón simple con flexibilidad en la articulación. Para ello consideramos el modelo matemático descrito por las siguientes ecuaciones dinámicas

$$(\Sigma_M) : \begin{cases} J\ddot{q}_m + B\dot{q}_m + k(q_m - q) = u \\ I\ddot{q} + B_l\dot{q} + mgl \sin(q) - k(q_m - q) = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Ahora, definimos el siguiente cambio de coordenadas:

$x_1 = q_m$ la posición angular del motor,

$x_2 = \dot{q}_m$ la velocidad angular del motor,

$x_3 = q$ denota la posición angular del eslabón de longitud $\frac{l}{2}$ y de masa m ,

$x_4 = \dot{q}$ es la velocidad del eslabón,

el cual permite transformar el sistema (3.27) a la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.28)$$

donde

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ m_2 x_3 \\ x_4 \\ f_4(x) \end{pmatrix} \text{ y } g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2(x_1, x_2, u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con

$$g_2(x_1, x_2, u) = (m_1 x_2 - m_2 x_1 + m_3 u), \quad f_4(x) = m_4 x_4 + m_5 \sin(x_3) + m_6 (x_1 - x_3)$$

$$m_1 = -\frac{B}{J}, m_2 = -\frac{k}{J}, m_3 = -\frac{1}{J}, m_4 = -\frac{B_l}{I}, m_5 = -\frac{mgl}{I} \text{ y } m_6 = \frac{k}{I}, \text{ y salida } y = x_1.$$

Para el diseño del observador backstepping para el sistema (3.28) se procede de la siguiente forma. Considere el observador backstepping para el sistema (3.28)

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + \varphi(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \varphi_1(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= m_2 \hat{x}_3 + g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) + \varphi_2(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_4 + \varphi_3(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_4 &= f_4(\hat{x}) + \varphi_4(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \end{aligned}$$

donde las ganancias del observador $\varphi_i(\hat{x})$ $i=1, \dots, 4$; serán obtenidas a partir de las ecuaciones (3.18), ésto es,

$$\begin{aligned} \varphi_1(\hat{x}) &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + m_1 + m_4 \\ \varphi_2(\hat{x}) &= c_2 b_{21} + b_{32}(c_3 + m_1) + b_{43} \frac{c_4}{m_2} - 2\varphi_1 - m_2 - m_6 + 2 \\ \varphi_3(\hat{x}) &= \frac{[b_{21} + b_{31}(c_3 - \varphi_1) + b_{32}(1 - m_2 - \varphi_2) + b_{42}(c_4 + m_1)]}{m_2} \\ \varphi_4(\hat{x}) &= \frac{[b_{31} + b_{41}(c_4 - \varphi_1) - b_{42}(m_2 + \varphi_2) - b_{43}\varphi_3 + b_{44}m_6]}{m_2} \end{aligned}$$

donde las $b_{i,j}$ están determinadas mediante el algoritmo propuesto (3.15), por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} b_{21} &= c_1 - \varphi_1 \\ b_{22} &= 1 \\ b_{31} &= 1 + c_2 b_{21} - 2\varphi_1 - m_2 - \varphi_2 \\ b_{32} &= c_2 + b_{21} + m_1 \\ b_{33} &= m_2 \\ b_{41} &= b_{21} + b_{31}(c_3 - \varphi_1) - b_{32}(m_2 + \varphi_2) - b_{33}\varphi_3 \\ b_{42} &= 1 + b_{32}(c_3 + m_1) + b_{31} \\ b_{43} &= c_3(b_{33}) + b_{32}(m_2) \\ b_{44} &= b_{33} . \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, las ganancias del observador resultan ser constantes. Más adelante se presentarán los resultados de simulación obtenidos utilizando este observador. Los valores numéricos de las constantes definidos anteriormente, permiten determinar los valores de las constantes $b_{i,j}$, que intervienen en las expresiones de las ganancias del observador backstepping.

3.6 Construcción del observador de alta ganancia para el Modelo Matemático del Robot con Articulación Flexible

En esta sección presentaremos la construcción de un observador de alta ganancia mediante la metodología propuesta por [14].

Considere el modelo del robot con un grado de libertad descrito por (3.28), con salida para el sistema $y = x_1$. Este sistema puede ser representado de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \tilde{A}x + g(x, u) \quad (3.30)$$

donde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad g(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{B}{J}x_2 - \frac{k}{J}x_1 + \frac{u}{J} \\ 0 \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

$$\text{con } \Phi = -\frac{B_l}{I}x_4 - mgl \sin(x_3) + \frac{k}{I}(x_1 - x_3).$$

De esta forma, un observador de alta ganancia para el sistema anterior es diseñado como sigue. Considere el sistema

$$\dot{z} = \tilde{A}z + g(z, u) + K\Delta_{\theta^{-1}}[y - \hat{y}] \quad (3.31)$$

donde

$$\Delta_{\theta^{-1}} = \text{diag}(\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \quad \text{y} \quad K = \text{col}(K_1, \dots, K_4)$$

siendo K_1, K_2, K_3 y K_4 constantes positivas, tales que son seleccionadas de modo que el polinomio de cuarto grado $(K + 1)^4$ tiene raíces de parte real negativas.

Efectuando un cambio de variable de la siguiente forma

$$\bar{x} = \gamma x \quad \text{donde } \gamma = \text{diag}\left(1, 1, \frac{k}{J}, \frac{k}{J}\right),$$

de manera que el sistema resultante está representado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \\ \dot{\bar{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{B}{J}x_2 - \frac{k}{J}x_1 + \frac{u}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Entonces, el observador de alta ganancia, en coordenadas originales (3.30) está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + K_1\theta[x_1 - \bar{z}_1] \\ \dot{z}_2 &= -\left(\frac{B}{J}\right)z_2 - \frac{k}{J}(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + \frac{u}{J} + K_2\theta^2[x_1 - z_1] \\ \dot{z}_3 &= \bar{z}_4 + \frac{J}{k}K_3\theta^3[x_1 - \bar{z}_1] \\ \dot{z}_4 &= \left(\frac{k}{I}\right)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) - \frac{mgl}{I}\sin(\bar{z}_3) - \frac{B_1}{I}\bar{z}_4 + \frac{J}{k}K_4\theta^4[x_1 - \bar{z}_1]. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando este observador se presentara un estudio de simulación entre éste observador y el observador backstepping.

3.6.1 Resultados de Simulación

En esta sección, se presentan los resultados en simulación obtenidos al aplicar un observador de alta ganancia comparados con el desempeño del observador Backstepping. Para llevar a cabo este experimento, se consideraron los siguientes valores de condiciones iniciales.

Las condiciones iniciales para el sistema fueron seleccionadas como: $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0$. Mientras que las condiciones iniciales para el observador de alta ganancia como para el observador Backstepping, fueron las siguientes $\dot{z}_1(0) = \dot{\hat{x}}_1(0) = 0.002, \quad \dot{z}_2(0) = \dot{\hat{x}}_2(0) = 0.002, \quad \dot{z}_3(0) = \dot{\hat{x}}_3(0) = 0.002, \quad \dot{z}_4(0) = \dot{\hat{x}}_4(0) = 0.002$.

Los parámetros del robot flexible en la articulación considerados para la implementación de los observadores fueron los siguientes: $J = 30.003 \text{ m}^2 \text{ Kg}$, $I = 700.006 \text{ m}^2 \text{ Kg}$, $B = 600.3 \text{ NmKg}$, $B_1 = 500 \text{ NmKg}$, $k = 1000 \text{ Nrad/m}$ y $mgl = 0.8 \text{ Kg m}^2 / \text{seg}^2$.

Los valores de las ganancias del observador de alta ganancia fueron: $k_1 = 1$, $k_2 = 15$, $k_3 = 0.01$ y $k_4 = 0.01$.

Mientras que los valores de las ganancias para el observador Backstepping se seleccionaron $c_1 = 12$, $c_2 = 8$, $c_3 = 6$, $c_4 = 1$. De modo que utilizando los valores de los parámetros del robot y las constantes anteriores se obtuvieron, finalmente los valores para las φ_i , resultaron ser los siguientes:

$$\varphi_1 = 6.2787, \quad \varphi_2 = 32.96, \quad \varphi_3 = -155.62, \quad \varphi_4 = -548.49.$$

Aplicando un control de la forma $u = \sin(t)$, los resultados obtenidos se muestran a continuación:

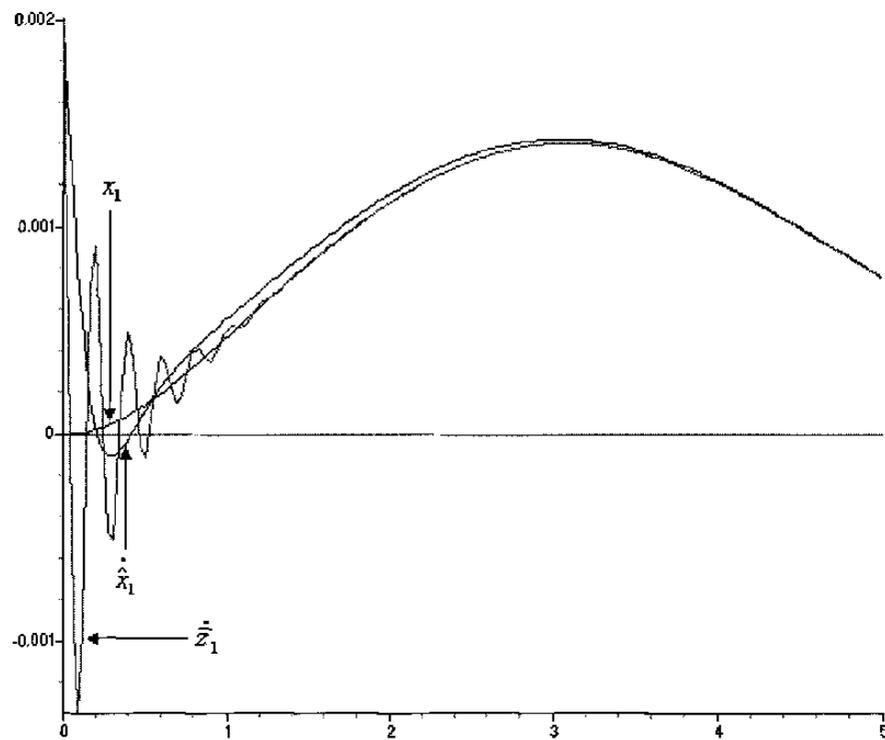


Figura 3.2: El estado x_1 con los estimados \hat{z}_1 y \hat{x}_1 .

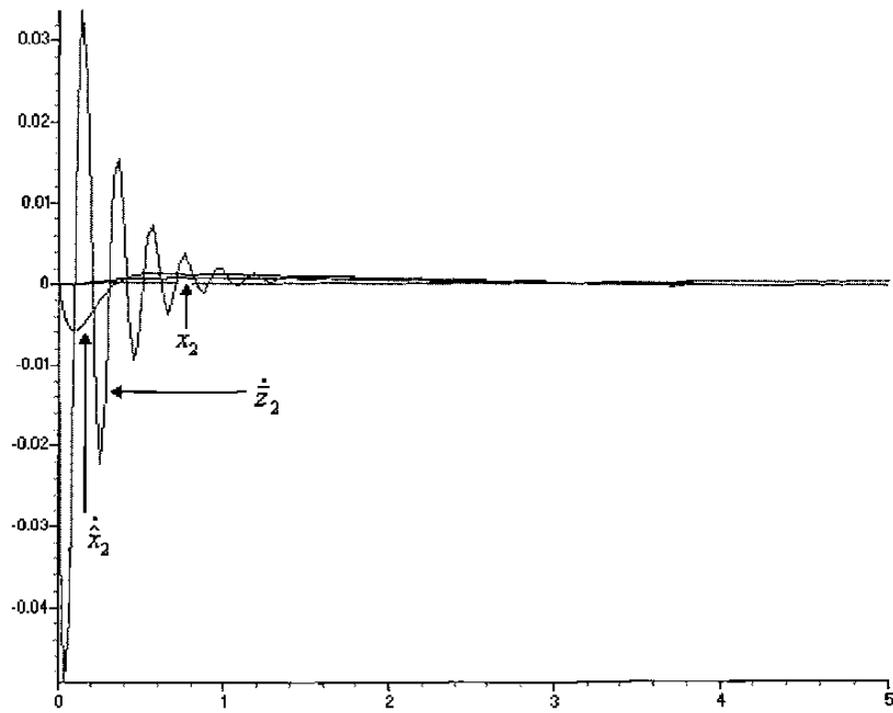


Figura 3.3: El estado x_2 con los estimados \dot{z}_2 y \hat{x}_2 .

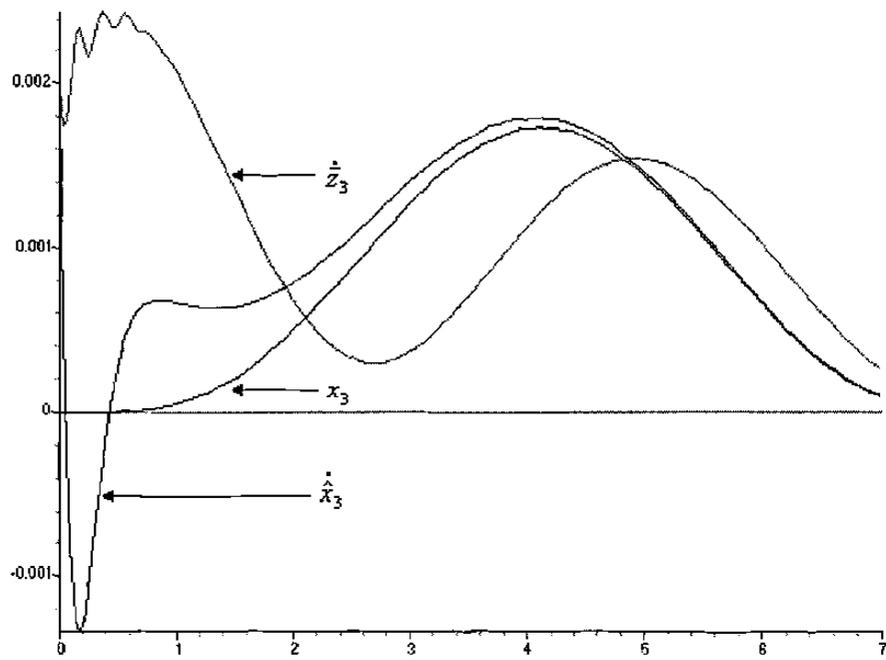


Figura 3.4: El estado x_3 con los estimados \dot{z}_3 y \hat{x}_3 .

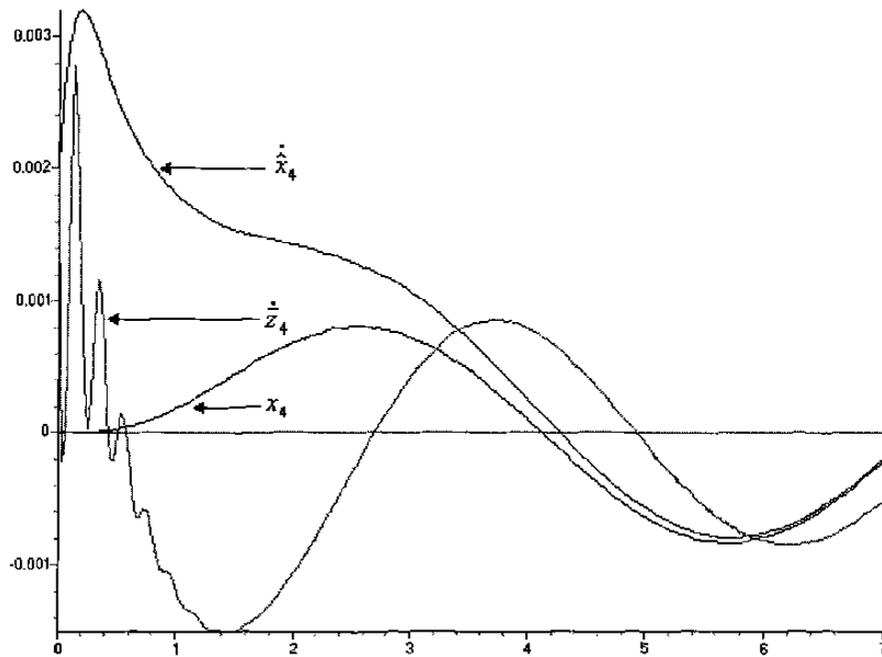


Figura 3.5: El estado x_4 con los estimados \dot{z}_4 y $\dot{\hat{x}}_4$.

Los resultados obtenidos entre ambos observadores se muestran en las figuras 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5.

En la figura 3.2 se observa el comportamiento de la posición angular del motor, donde \dot{z}_1 que es la variable que representa al observador de alta ganancia logra su objetivo ligeramente más rápido, pero con mucho mayor oscilaciones que $\dot{\hat{x}}_1$ quien representa al observador Backstepping.

En la figura 3.3 se visualiza el comportamiento de la velocidad angular del motor, donde \dot{z}_2 que es la variable que representa al observador de alta ganancia logra su objetivo al mismo tiempo que el observador Backstepping que es representado por $\dot{\hat{x}}_2$, pero presentando este último mucho menos oscilaciones que el primero.

En la figura 3.4 se visualiza el comportamiento de la posición angular del eslabón, donde el observador Backstepping que es representado por $\dot{\hat{x}}_3$, logra su objetivo en un tiempo aproximado de 5 seg. y con mucho menos oscilaciones que el observador de alta ganancia que es representado por \dot{z}_3 y que en un tiempo de 7 seg. aún no logra su objetivo.

En la figura 3.5 se muestra un comportamiento similar a la anterior, el observador Backstepping que viene representado por la variable \hat{x}_4 logra su objetivo en un tiempo de 7 segundos y presentado pocas oscilaciones, mientras que el observador de alta ganancia que está representado por \hat{z}_4 , pasados los 7 segundos aun no logra su objetivo y además presenta un número mayor de oscilaciones.

Comentarios relacionados con el diseño de observadores

A continuación, se discuten las ventajas y limitaciones de los observadores de alta ganancia y el propuesto mediante la técnica de Backstepping.

Primero, es de todos conocido que la utilización de altas ganancias produce grandes transitorios y presenta el fenómeno de picking (efecto debido a otras condiciones iniciales). En el caso del observador backstepping la determinación de las ganancias permite obtener valores más pequeños y además reduce los transitorios, evitando los problemas asociados al observador de alta ganancia. Se hace notar que cuando los parámetros C_i son suficientemente grandes e iguales, estos coinciden con los de alta ganancia.

Por otra parte, el observador de alta ganancia permite diseñar observadores para sistemas de dimensiones superiores y se puede extender a sistemas multivariables observables que pueden ser llevados a formas similares para las cuales es posible diseñar un observador. En cambio, el observador backstepping, dada su metodología de diseño, requiere de un cálculo más detallado para determinar las ganancias que limitan su implementación para sistemas de dimensiones grandes.

3.6.2 Conclusiones

En este capítulo se presentó el diseño un observador Backstepping, el cual fue aplicado al modelo matemático que describe el comportamiento de un robot flexible de un solo eslabón para estimar la posición y velocidad angular tanto del rotor del motor como del eslabón. También se diseñó un observador de alta ganancia para el mismo sistema y así realizar un estudio comparativo entre ambos observadores.

Los resultados obtenidos que se muestran gráficamente, indican que el observador construido bajo la técnica Backstepping converge más rápidamente que el observador de alta ganancia.

Además, la amplitud de la señal transitoria es más grande cuando se aplica el observador de alta ganancia.

Capítulo 4

Diseño y Construcción de un Robot de 5 Grados de Libertad con Flexibilidad en la Articulación

4.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar la construcción de un prototipo de un robot con flexibilidad en la articulación de cinco grados de libertad, cuya configuración corresponde a un brazo articulado con transmisión mecánica, el cual ha sido llamado *TIGRE 01*. En este capítulo se presentarán las diferentes etapas de diseño y construcción de este robot, mostrando sus cualidades de operación así como sus limitaciones.

Los conocimientos básicos relacionados con la construcción y programación de robots semi-industriales, están basados en fundamentos de mecánica, electrónica, computación y control. De esta forma, este prototipo ha sido diseñado para realizar trabajos relacionados con el estudio y la enseñanza de la robótica.

El robot rígido *TIGRE 01* (Figura 4.1) representa el primer prototipo de robot que se construye en el Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Este sistema funciona mediante corriente continua, utilizando como accionadores motores de pasos (step motors) y transmisión mecánica. El robot representa un brazo mecánico de configuración brazo articulado, el cual ha sido

diseñado para levantar una carga de hasta 840 grs., lo cual lo convierte en un prototipo muy versátil para una gran variedad de trabajos.

El robot rígido *TIGRE 01* cuenta con un sistema de transmisión mecánica de diseño original exclusivo; y la tecnología utilizada para su construcción es sumamente sencilla.

El robot está constituido de 6 motores de pasos (stepping motors) marca Sanyo de 1.8 grados/paso, 2.1 Amperes y 2.4 Volts. Este tipo de motores han sido ampliamente estudiados, donde el control de la velocidad y del sentido de giro de éstos se realiza mediante un programa de software almacenado en la memoria de la computadora, la cual está conectada a través de una interfase a las líneas de salida que van a los embobinados de los motores. Todos los elementos del robot están contruidos por componentes que son fáciles de adquirir.

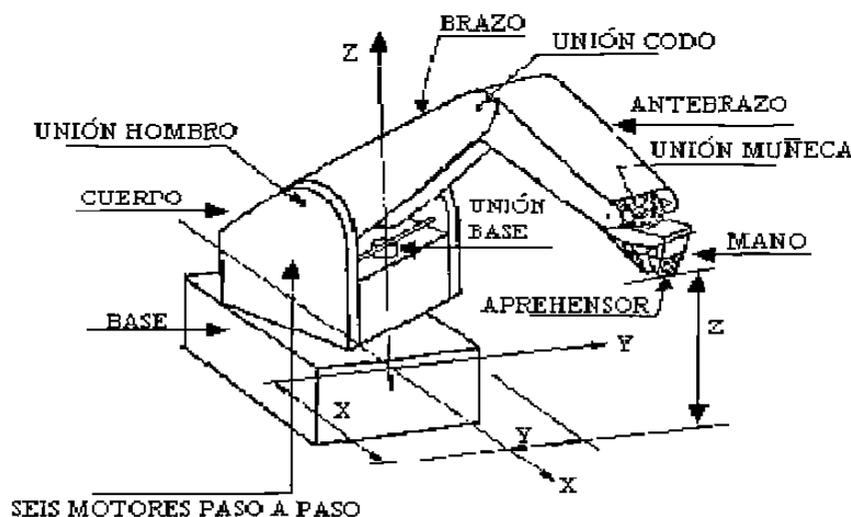


Figura 4.1: Robot *TIGRE 01*.

4.2 Consideraciones Básicas para la Construcción del Robot

Los elementos motrices son las piezas clave en la construcción de un robot porque dan el movimiento del mismo, y son responsables en gran medida de la precisión del robot.

En la construcción del robot *TIGRE 01* se utilizaron como elementos motrices motores de pasos, debido a su desempeño dentro de un dominio de operación, tanto en potencia como en velocidad, a diferencia de los motores de corriente directa que comúnmente son utilizados para este tipo de robots.

Por otra parte, existen dos tipos básicos de motores de pasos, éste es, motores de dos y cuatro fases: en lo que respecta a los motores de cuatro fases, éstos resultan ser más útiles (figura 4.2), ya que sólo se requieren cuatro juegos de interruptores de estado sólido, en lugar de ocho juegos que se requieren en el motor de dos fases; lo cual permite un ahorro del cincuenta por ciento en los interruptores de estado sólido utilizando los motores de pasos de cuatro fases.

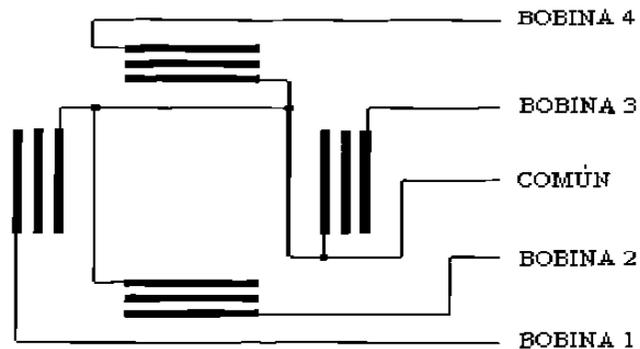


Figura 4.2: Motor de pasos de 4 fases.

A continuación se presenta una descripción de las principales características de los motores de pasos de cuatro fases que han sido utilizados en la construcción del robot *TIGRE 01* [16].

- 1) Los motores de pasos responden a pulsos digitales de entrada proporcionando un control de lazo abierto, logrando que el motor tenga un control simple y de bajo costo.
- 2) El ángulo de rotación del motor es proporcional a los pulsos de entrada.
- 3) El motor tiene un torque completo si las bobinas son energizadas.
- 4) Se tiene precisión de posicionamiento y repetividad de movimiento.
- 5) Excelente respuesta al arranque/ paro/ reversa.

- 6) Son de alta confiabilidad debido a que no contiene escobillas de contacto, de ahí que la vida del motor simplemente depende de la vida de los baleros.
- 7) Un amplio rango de velocidades de rotación pueden ser realizadas, esto es debido a que la velocidad es proporcional a la frecuencia de los pulsos de entrada.

4.3 Aspectos de Diseño de los Sub-Sistemas de Control y Mecánico

La interfase se divide en tres etapas: Lógica, Óptica y de Potencia. La sección de potencia (figura 4.3) consta de un juego de transistores darlington TIP 122, la cual se encarga de suministrar la corriente necesaria a los actuadores. Estos transistores llevan a cabo la función de interruptores para poder disparar las bobinas de los motores.

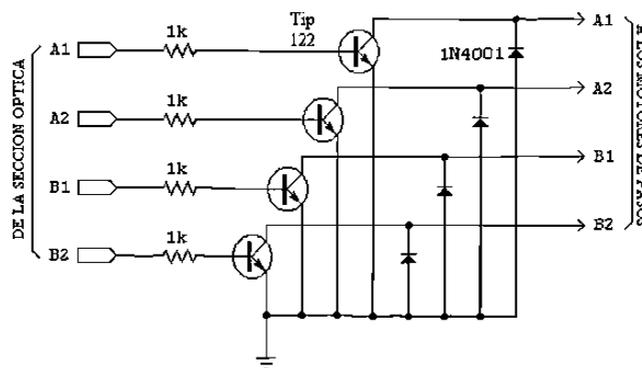


Figura 4.3: Sección de Potencia.

La fuente de potencia utilizada por el robot es una fuente de voltaje regulado que trabaja a 5 Volts y proporciona hasta 18 Amperes. Esta fuente permite el funcionamiento de los seis actuadores del robot ya que éste consume 15 Amperes como máximo. La sección lógica (ver figura 4.4) es la encargada de mantener la señal o secuencia que permite generar el movimiento de los accionadores, sin que estos pierdan su señal de enclavamiento, es decir, que la señal con la información asignada a cada uno de los motores sea adquirida por el motor seleccionado.

LPT1

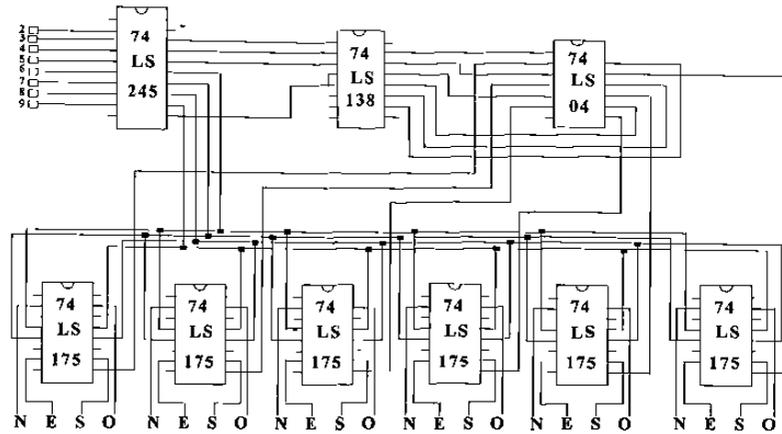


Figura 4.4: Sección Lógica.

Finalmente, la sección óptica (Figura 4.5) tiene como finalidad, por razones de protección, de aislar la sección de potencia de la sección lógica utilizando como optoacopladores los circuitos MCT6.

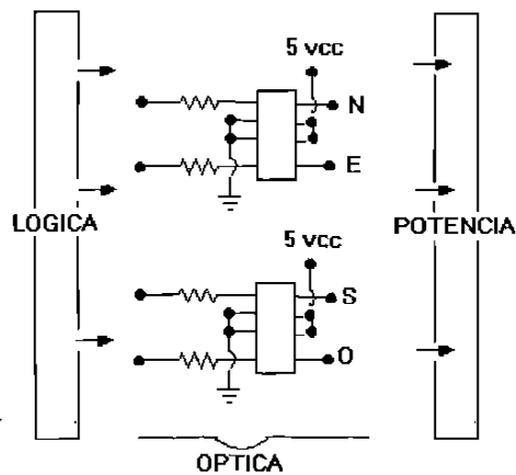


Figura 4.5: Sección Óptica.

Por otra parte, en lo que respecta a la parte mecánica, se diseñó un sistema de transmisión tipo cadena para cada uno de sus actuadores. Esta transmisión está constituida por componentes básicos tales como sprockets (cantarinas o estrellas) de diversas medidas, y cadenas; produciendo una reducción en la velocidad pero a su vez un aumento, en gran medida, de la potencia y de la precisión de éste. De modo que este tipo de configuración tiene como tarea principal suministrar la potencia necesaria al robot.

La muñeca tiene dos grados de libertad y sus movimientos son controlados mediante dos motores. Cada uno de los motores regula el movimiento del engranaje mediante una unión diferencial.

Según el giro de los dos engranes, se pueden generar diferentes tipos de movimientos de la muñeca, es decir, el giro vertical del aprehensor (pitch) y el giro sobre sí mismo (roll) como se muestra en la Figura 4.6.

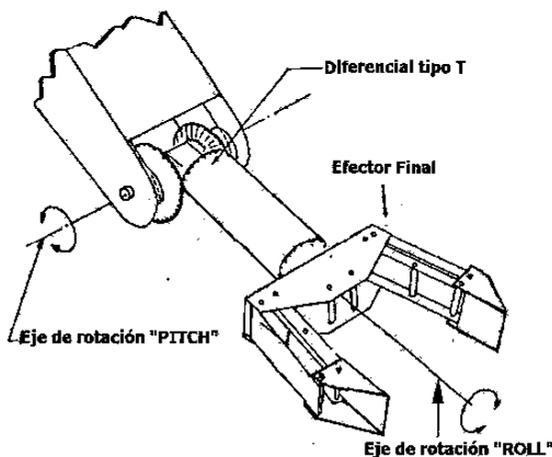


Figura 4.6: Efector final.

Finalmente, la pinza o elemento terminal puede posicionarse en cualquier punto y con cualquier orientación, dentro de una esfera de 600 mm de radio y con una repetitividad de 0.04 mm, como se muestra en la figura 4.7. El elemento terminal puede ser remplazado por otro tipo de herramienta según la aplicación que se desee realizar, lo cual determina la tarea que el robot desarrollará.

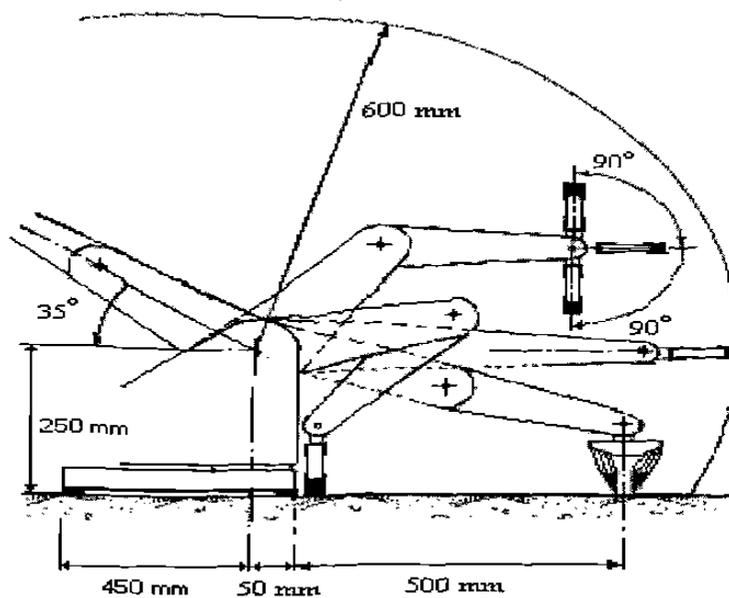


Figura 4.7: Un aspecto del área de trabajo del *TIGRE 01*.

Cuando el robot *TIGRE 01* se encuentra en su posición de máximo alcance, éste puede levantar un peso máximo de 870 gramos, con una velocidad de desplazamiento que se encuentra comprendida entre 10 y 14 cm / seg.

Los eslabones (figura 4.8) fueron construidos de aluminio, lo que permite reducir el peso de éstos y alcanzar una velocidad máxima con respecto a otros materiales utilizados para el mismo propósito.

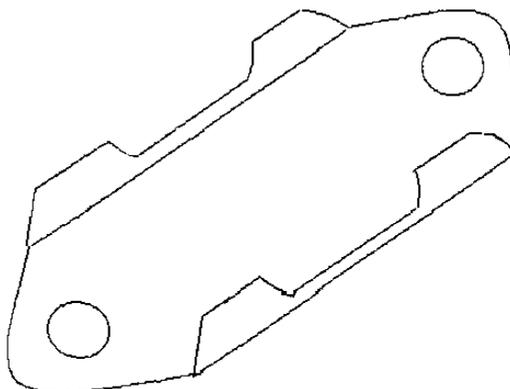


Figura 4.8: Eslabón.

Las posibilidades que se tienen para el movimiento del robot, mediante el software y el hardware desarrollados para tal propósito, toma en cuenta las siguientes características:

- a) La velocidad de los pasos del motor se mantiene fija,
- b) La generación de la secuencia de fases que se aplica a las bobinas del motor no se altera durante la tarea del motor.
- c) Se efectúa un registro del conteo de los pasos hasta alcanzar el número deseado, para posteriormente ordenar el paro del motor.

4.4 Programación del Robot *TIGRE 01*

En esta sección se describe la forma en que se desarrolló el programa para el movimiento del robot. A continuación se presenta un ejemplo de la mecánica del movimiento de los motores de pasos. Cabe mencionar que el robot se puede programar en cualquier lenguaje que tenga acceso a los puertos de entrada/salida de la computadora.

Las consideraciones que se tomaron en cuenta para el desarrollo del software del robot son las siguientes:

- Control de la secuencia de bits para activar cada uno de los motores utilizando la computadora y el lenguaje de programación C++.
- Control de varios motores simultáneamente.
- El diseño del programa se llevó a cabo mediante el método de aprendizaje gestual, es decir el robot responde a una serie de comandos a los que se les ha asignado una tarea específica.

De los motores con los que cuenta el robot *TIGRE 01*, 5 se utilizan para accionar los ejes de las articulaciones o grados de libertad del robot y 1 se emplea como actuador final, cuya función es abrir y cerrar la pinza. En la tabla 4.1 se muestra una posible secuencia de bits para un motor de pasos de 4 fases. Esta secuencia puede variar de acuerdo con la disposición de las bobinas del motor, siendo $Q_i, i = 1, \dots, 4$; el transistor que activa la bobina correspondiente.

Paso	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄
1	1	0	1	0
2	1	0	0	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0

Tabla 4.1 Secuencia de bits para un motor de pasos de cuatro fases.

El puerto LPT1 de la computadora (figura 4.9) proporciona 8 bits de datos (T2-T9), y cuatro bits son utilizados por el motor de pasos para determinar la posición de un paso. Ésto constituye la información que permite el movimiento del motor. Ahora, para seleccionar el motor que se desea mover, se utilizan otros tres de estos 8 bits, los cuales definen un canal de 8 direcciones que asignan un número a cada motor. Esta información pasa a través de un circuito integrado para asignar el dato disponible por los cuatro primeros bits al motor seleccionado.

Esta información se ejecutará hasta que otra consigna sea asignada. Por último, el bit restante se utiliza para habilitar a los circuitos los cuales indiquen que las fases del motor se activen o inactiven.

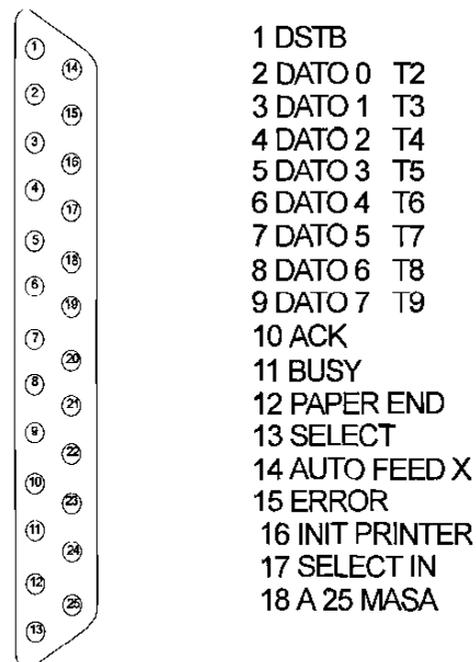
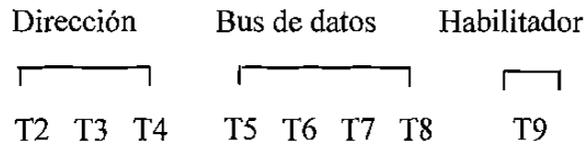


Figura 4.9. Puerto LPT1

Las terminales del puerto LPT1 que se toman en cuenta para diseñar el programa son las siguientes:

LPT1



En la interfase del control de movimiento del robot se encuentra el decodificador, al cual llegan las 3 primeras líneas de dirección (T2-T4) que se encargan de seleccionar un motor en particular. El bus de datos que está constituido por T5 – T8, se conecta directamente a cada uno de los integrados que se comunican con cada uno de los motores del robot. La señal de habilitar, representada por T9, se procesa a través de otro integrado, debido a que los Flip Flops utilizados son del tipo D, los cuales transfieren el dato cuando el bit de habilitar pasa del nivel bajo al nivel alto.

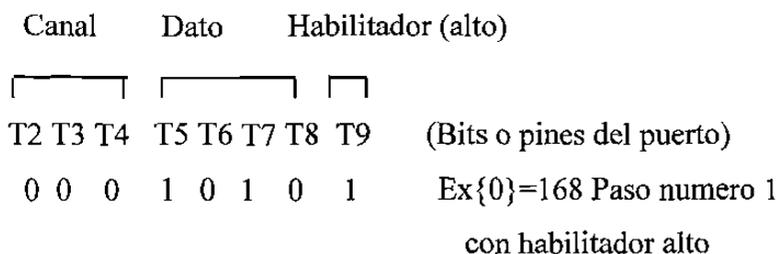
Para diseñar el programa de Software del control de movimiento del robot, se tomaron en cuenta las consideraciones que se mencionan a continuación.

El procedimiento para enviar los datos al puerto LPT1 y activar los motores requeridos es el siguiente:

- 1.- Buscar el código del motor que se desea poner en movimiento.
- 2.- Activar el bit habilitador en alto y enviarlo por el puerto LPT1.
- 3.- Enviar por el puerto la secuencia de bits en el bus de datos bajando el habilitador.
- 4.- Repetir los pasos anteriores para obtener el movimiento del motor.

En el siguiente ejemplo se analiza la forma en que se manda un paso al motor.

LPT1.



Con esta información enviada a través del puerto, se puede ver que el motor seleccionado resultó ser el representado por 0. Posteriormente, los bits (1,0,1,0) se ponen en el bus de datos para que el motor se posicione en el primer paso. Puesto que el habilitador está en alto, el integrado asociado con este motor no los toma, dando lugar a que la tarea no se ejecute. Para que esto ocurra, se debe de mandar la misma información, pero con el habilitador bajo:

LPT1.

Canal	Dato	Habilitador (bajo)	
			(Bits o pines del puerto)
T2 T3 T4	T5 T6 T7 T8	T9	
0 0 0	1 0 1 0	0	Ex{0}=40 Paso numero 1

con habilitador bajo

De este modo se ordena al motor que se mueva un paso. A partir de la tabla de secuencia de bits se le ordena al motor que realice los pasos necesarios, siguiendo la secuencia del 1 al 4, e inmediatamente volviendo a empezar. Por otra parte, para regresar a la posición original, ésto es, para mover el motor en sentido contrario, se envía la secuencia de pasos en sentido contrario, es decir: 1,4,3,2,1...

4.5 Especificaciones Técnicas

En la Tabla 4.2 se presentan las principales características del Robot *Tigre 01* que fue descrito en este capítulo, dando una idea general de las que caracterizan a los robots industriales y didácticos.

Capacidad de carga	Coordenadas
870 Grs.	Angulares
Peso del robot	Alcance Máximo
47 Kgs.	60 Cms.
Velocidad máxima	Alimentación y consumo
14 Cm/seg	4-12 V cc ; 18 A
Grados de Libertad	Elementos motrices
4	Motores paso a paso

Controlador	Capacidad de memoria
Ordenador PC	Según el Ordenador
Aplicaciones	Fabricante
Manipulación, Educación e investigación	U.A.N.L F.I.M.E D.I.E
Repetitividad	Lenguaje de programación
0.04 mm	C ++

Tabla 4.2 Especificaciones Técnicas del Robot *Tigre 01*.

4.6 Conclusiones

En este capítulo, se presentaron las características principales que describen el funcionamiento del robot de cinco grados de libertad, *TIGRE 01*, cuya operación se realiza a través de una interfase y programas de software en un ambiente amigable (ver Apéndice A), los cuales se diseñaron exclusivamente para este prototipo.

Para poder ejecutar los algoritmos de observación propuestos y de control a este robot, es necesario la construcción o compra de una tarjeta especial, la cual opera mediante la utilización de MATLAB. Sin embargo, el costo de esta tarjeta es sumamente elevado. Por tal motivo, en este trabajo se diseñó una tarjeta que funciona sólo para realizar control de movimiento en lazo abierto, y que además, resultó económica.

Figuras del robot *TIGRE 01*.

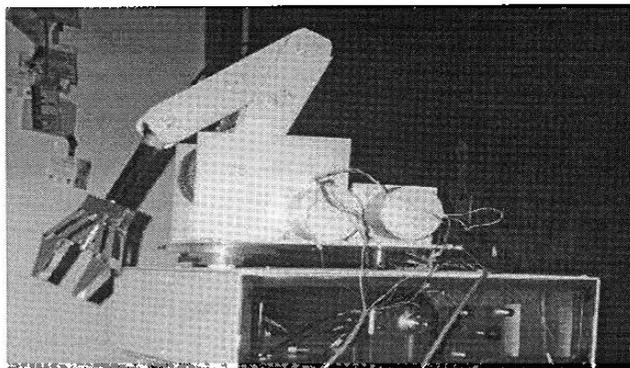


Figura 4.10 a)

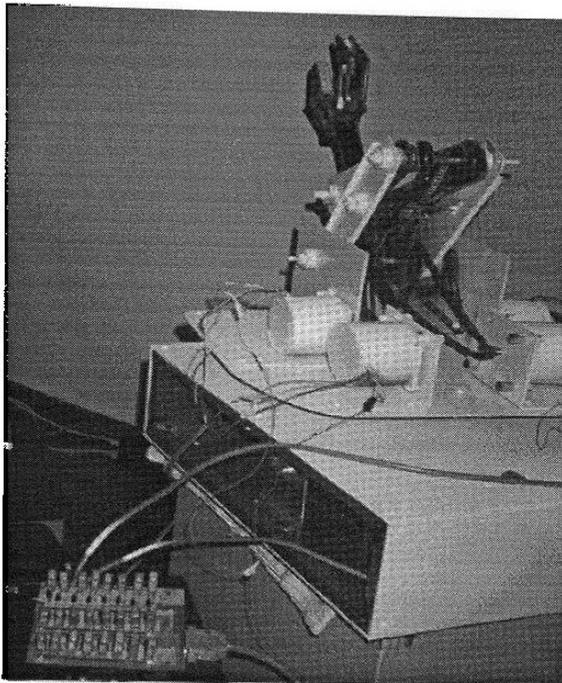


Figura 4.10 b)

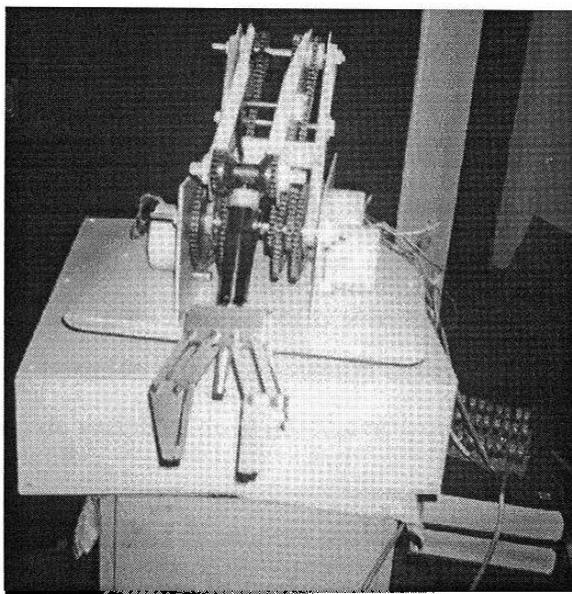


Figura 4.10 c)

Capítulo 5

Cinemática y Posicionamiento del Robot

TIGRE 01

5.1 Introducción

Este capítulo tratará sobre el estudio matemático del movimiento cinemático del robot, el cual no toma en cuenta las fuerzas que lo producen. Existen dos maneras de estudiar este problema: mediante la cinemática directa por un lado y la cinemática inversa por el otro. El problema de la cinemática directa se puede establecer como sigue: dadas dos variables de la articulación del robot, determinar la posición y orientación de la herramienta. En cambio, para resolver el problema mediante la cinemática inversa se asumen conocidas una posición y una orientación deseadas de la herramienta, y se desea determinar el conjunto de variables de la articulación que permiten estas.

Para llevar acabo este análisis de manera sistemática, se toma en cuenta la geometría del robot y algunas convenciones, lo cual permite la asignación de coordenadas y la obtención de transformaciones para determinar el efecto resultante de todas las variables articulares del robot que determinan la posición y orientación deseadas, y recíprocamente.

Para llevar acabo este estudio analítico se requiere de la asignación de un sistema de coordenadas de referencia fijo sin considerar las fuerzas o momentos que originan el

movimiento. Así, la cinemática se encarga de la descripción analítica del desplazamiento espacial del robot como una función del tiempo, en particular de las relaciones entre la posición de las variables de articulación, y la posición y orientación de la herramienta del robot.

La cinemática de los robots hace uso de tres conceptos fundamentales [10]:

- 1) Estructura mecánica del manipulador.
- 2) Grados de libertad para el posicionamiento del efector final.
- 3) Solución de los problemas *cinemático directo* y *cinemático inverso*.

El robot antropomórfico está constituido por tres elementos básicos: Cuerpo, Brazo y Antebrazo, que se encuentran relacionados entre sí mediante articulaciones o pares cinemáticos, los cuales pueden ser de rotación (R) o prismáticos (P). Cada elemento dispone de dos pares cinemáticos, estando el primero de ellos fijado a la base y el último con un extremo libre, en donde se sitúa la herramienta.

Por lo general, cuando se considera un robot manipulador de seis grados de libertad, los tres primeros grados de libertad son utilizados para posicionar al robot, y los otros tres son empleados para orientar a la herramienta.

Además, la estructura del manipulador y el tipo de las articulaciones definen los movimientos del robot, lo cual permite determinar el tipo de coordenadas requeridas para su descripción cinemática.

Por otra parte, la *Dinámica de los robots* toma en cuenta las fuerzas y momentos motrices, en cambio la Cinemática sólo se ocupa de definir la posición del manipulador respecto a un sistema de coordenadas función del tiempo.

La solución de los problemas cinemáticos directo e inverso puede llevarse a cabo mediante la aplicación de reglas trigonométricas, o mediante el cálculo matricial y transformadas homogéneas [3].

En este capítulo, se hará un análisis cinemático directo e inverso de las ecuaciones de posicionamiento, mediante el método de transformaciones homogéneas de la herramienta del robot *TIGRE 01*. Estos resultados son utilizados para programar la

secuencia lógica para el movimiento del robot a través del control de los motores del robot. Vale la pena mencionar que este proceso representa la primera etapa de control en lazo abierto del robot.

Para aplicar los algoritmos de control relacionados con la dinámica del robot, se requiere un análisis diferente, además, de la instrumentación apropiada para medir las variables necesarias para implementar el control deseado. Todo esto requiere de una electrónica y una programación completamente diferente de la que actualmente tiene el robot. Para poder realizar esto es necesario una tarjeta de adquisición de datos (Dspace), de encoders para determinar la posición de los eslabones. La realización de este planteamiento será parte de un trabajo futuro.

5.2 Las Transformadas Homogéneas

Como se vió en la sección anterior, el análisis de la cinemática del robot se llevó a cabo usando sistemas de referencia ligados a cada eslabón. Sin embargo, existe un método sistemático en robótica que permite seleccionar estos sistemas de referencia de manera más apropiada. Este método está basado en la aplicación de transformaciones homogéneas, el cual es conocido como Transformaciones de Denavit-Hartenberg [2].

Los algoritmos matemáticos, que controlan los movimientos de los elementos del manipulador, calculan la posición de las articulaciones y definirán el punto medio de la herramienta (Tool Center Point).

En el diagrama esquemático que se muestra en la figura 5.1, se indican las coordenadas de las articulaciones del modelo cinemático del robot *TIGRE 01* definidas en términos de los ángulos φ_1, φ_2 y φ_3 . Además, φ_4 y φ_5 representan los posibles giros de la unión diferencial situados en la muñeca, y cuya composición da origen a los ángulos conocidos como PITCH Y ROLL.

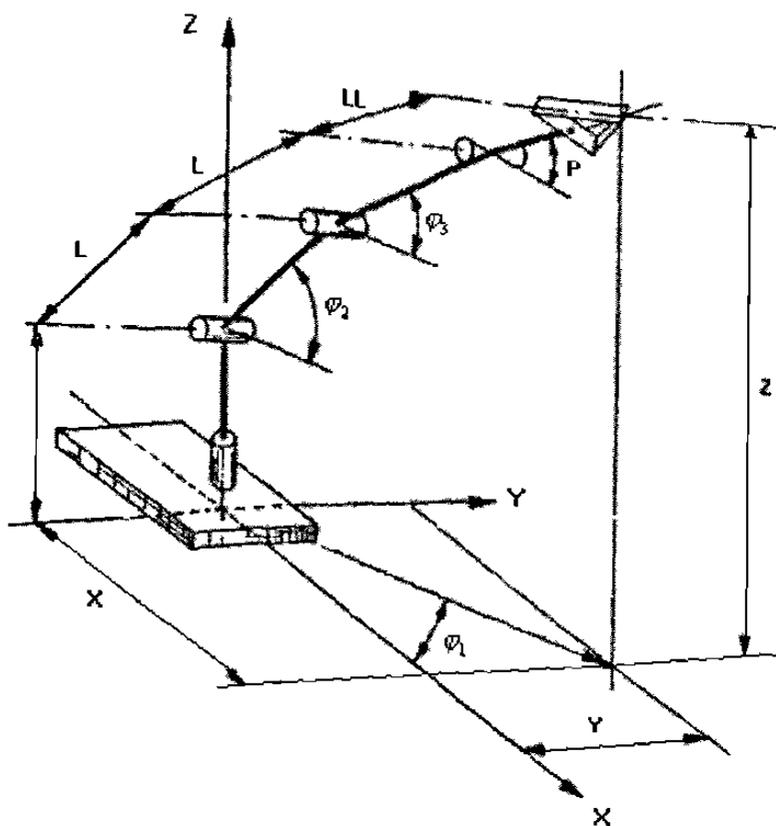


Figura 5.1. Esquema de los eslabones y articulaciones del robot *TIGRE 01*, en el que se indican los ángulos de las articulaciones y las coordenadas cartesianas del punto medio de la pinza (TCP).

Una transformación T cualquiera en el espacio de coordenadas es una matriz de orden 4×4 , la cual puede representar ya sea una rotación o una traslación.

En las aplicaciones relacionadas con la Robótica se consideran especialmente las transformaciones relativas a las rotaciones y las traslaciones, las cuales se mencionan a continuación.

Traslación.

Una traslación representada por el vector $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ viene dada por la transformación T.

$$T = \text{Tras}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Rotación.

Para representar las rotaciones alrededor de los ejes x, y, z, estas pueden definirse mediante las siguientes matrices de transformación

a) “ Rotación de un ángulo φ alrededor del eje x ”

$$\text{Rot}(\varphi, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \text{sen} \varphi & 0 \\ 0 & \text{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

b) “ Rotación de un ángulo φ alrededor del eje y ”

$$\text{Rot}(\varphi, y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \text{sen} \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

b) “ Rotación de un ángulo φ alrededor del eje z ”

$$\text{Rot}(\varphi, z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen} \varphi & 0 & 0 \\ \text{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

5.2.1 Interpretación de las transformadas homogéneas

Los elementos de una transformación homogénea se pueden interpretar como 4 vectores, que describen al segundo sistema coordenado, el cual se obtiene como consecuencia del conjunto de rotaciones y traslaciones que se definen en dicha transformación. Las tres primeras columnas de la matriz determinan las direcciones de los tres nuevos ejes, mientras que la cuarta columna proporciona la posición del origen del nuevo sistema de referencia base.

Dada una transformación Homogénea H , se puede representar el sistema de referencia resultante de las rotaciones y traslaciones por ella definidos, examinando simplemente los elementos de la matriz. Por ejemplo, en la figura 5.2 se muestra una matriz transformada H y el sistema de referencia definido por ella.

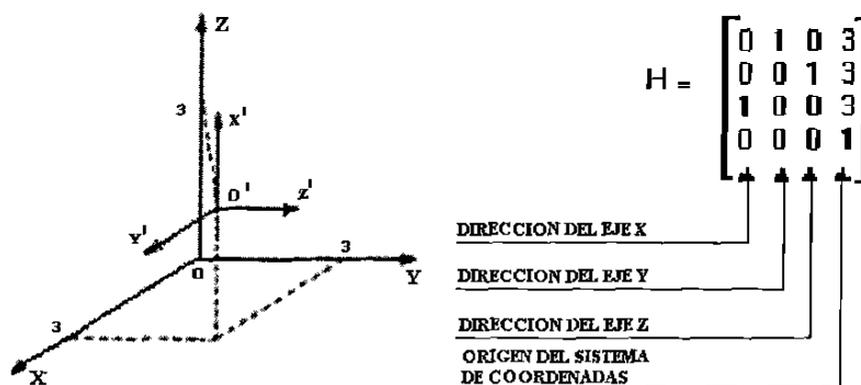


Figura 5.2: Obtención del sistema de referencia definido por la matriz transformada H .

5.3 Solución directa del *TIGRE 01* por el método Matricial

El robot *TIGRE 01* es un mecanismo controlado en lazo abierto, compuesto por una cadena de eslabones unidos entre sí mediante articulaciones; cuyas articulaciones son del tipo revolución, mientras que la articulación de la muñeca es del tipo diferencial.

Para obtener la solución cinemática directa, a partir del conocimiento de los valores de las coordenadas de las articulaciones, primero se define un sistema coordinado de referencia en cada eslabón. Posteriormente, utilizando transformaciones homogéneas, se determina la posición y orientación relativas de un sistema respecto a otro.

Para determinar la matriz que describe la rotación y la traslación entre un eslabón con respecto a, se calcula de la siguiente manera. Sea A_1 la matriz que determina la posición y la orientación del primer elemento con respecto al sistema de referencia base. A_2 es la matriz que determina la posición y orientación relativa entre el segundo eslabón con respecto al primero, y así sucesivamente hasta obtener la posición y orientación deseadas del punto medio de la pinza.

El producto de matrices $A_1.A_2$, determina la posición y orientación relativa del segundo elemento con respecto al sistema base. En consecuencia, teniendo en cuenta que el robot *TIGRE 01* posee 5 grados de libertad, para determinar la posición y orientación del punto medio de la pinza, es necesario calcular el producto de cinco matrices. Para llevar a cabo este producto, definamos las variables que representan las rotaciones de las articulaciones de cada uno de los eslabones por medio de los ángulos: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ y φ_5 . Entonces, los ángulos PITCH y ROLL, en función de los ángulos φ_4 y φ_5 , están dados por las expresiones

$$\text{(PITCH) } \quad p = \frac{1}{2}(\varphi_4 + \varphi_5) \quad ; \quad \text{(ROLL) } \quad r = \frac{1}{2}(\varphi_5 - \varphi_4).$$

5.3.1 Definición de los sistemas de referencia en el *TIGRE 01*

Los sistemas de referencia que están localizados sobre las articulaciones del robot, como se muestran en la figura 5.3, los cuales no han sido colocados arbitrariamente. Estos se han elegido de acuerdo a un criterio que permite simplificar los cálculos de las matrices homogéneas. Por ejemplo, el eje z con la dirección del eslabón en la cual se ha establecido el sistema de referencia base. De esta forma, se define fácilmente el ángulo ROLL como una rotación alrededor del eje z_4 , además de la relación relativa entre los distintos elementos.

La definición de los sistemas de referencia que se han seleccionado, trae consigo la aparición de tres nuevas variables asociadas a cada nuevo sistema de referencia. Para poder establecer la relación entre las variables anteriores, se analiza el esquema de la figura 5.4, el cual representa el mecanismo en el plano formado por los ejes z y a. De la figura 5.4, se deduce:

$$\begin{aligned} \alpha + \varphi_2 &= 90, & \alpha &= 90 - \varphi_2, \\ \varphi_2 &= \beta + \varphi_3, & \beta &= \varphi_2 - \varphi_3, \\ \varphi_3 &= \gamma + P, & \gamma &= \varphi_3 - P. \end{aligned} \quad (5.5)$$

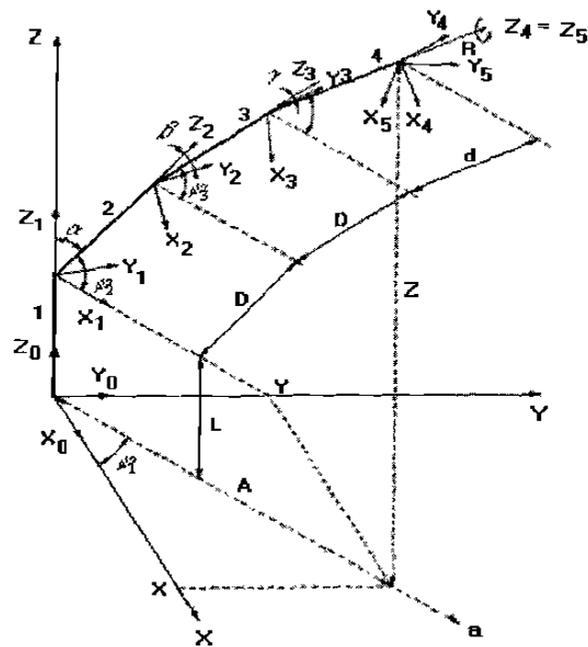


Figura 5.3: Sistema de referencia, aplicado al caso del Robot *Tigre 01*.

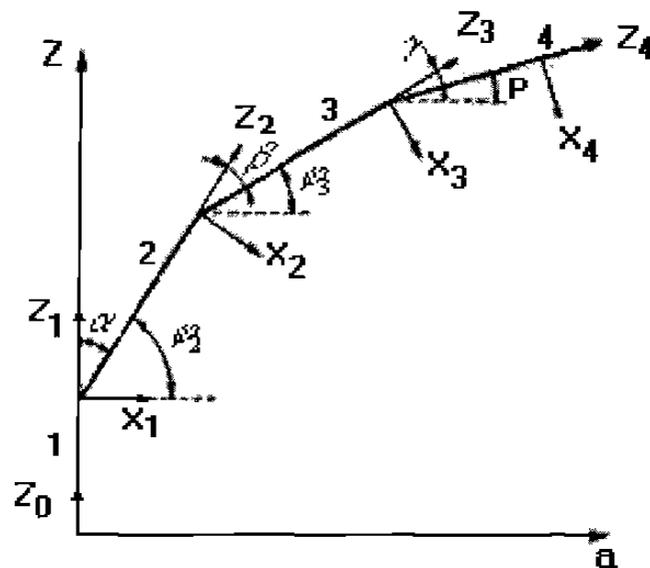


Figura 5.4: Representación de los elementos del manipulador sobre el plano formado por los ejes Z y a.

5.3.2 Definición de las matrices

Ahora definiremos el conjunto de matrices que permite calcular la transformación homogénea en cada etapa. El sistema 1, representado por la base y el primer eslabón, está relacionado con el sistema 0, que corresponde al origen, por medio de una rotación alrededor de Z_0 . Por lo que la matriz A_1 de transformación tendrá la siguiente expresión:

$$A_1 = Rot(Z_0, \varphi_1), Tras(0,0, L) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\text{sen} \varphi_1 & 0 & 0 \\ \text{sen} \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\text{sen} \varphi_1 & 0 & 0 \\ \text{sen} \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

El sistema 2, representado por la segunda articulación, se obtiene a partir del sistema 1, rotando un ángulo α alrededor del eje Y_1 y trasladando una magnitud D a partir del eje Z_1 girado. De este modo, se deduce que la matriz de transformación A_2 está dada por

$$A_2 = Rot(Y, \alpha)Tras(0,0, D) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \text{sen} \alpha & D \text{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha & D \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

En consecuencia el producto $A_1 \cdot A_2$ está dado por

$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \alpha & -\text{sen} \varphi_1 & \cos \varphi_1 \text{sen} \alpha & D \cos \varphi_1 \text{sen} \alpha \\ \text{sen} \varphi_1 \cos \alpha & \cos \varphi_1 & \text{sen} \varphi_1 \text{sen} \alpha & D \text{sen} \varphi_1 \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha & D \cos \alpha + L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

De manera similar, para el sistema 3, el cual se obtiene a partir del sistema 2, al rotar un ángulo β alrededor de Y_2 y trasladándolo una distancia D a lo largo del eje Z_2 rotado, resulta que

$$A_3 = Rot(Y_2, \beta)Tras(0,0, D) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen} \beta & D \text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \beta & 0 & \cos \beta & D \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Finalmente, el producto $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, que representa la rotación y la translación de los tres eslabones, está dado por la siguiente expresión:

$$A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos(\alpha + \beta) & -\text{sen} \varphi_1 & \cos \varphi_1 \text{sen}(\alpha + \beta) & D \cos \varphi_1 \text{sen} \alpha + D \cos \varphi_1 \text{sen}(\alpha + \beta) \\ \text{sen} \varphi_1 \cos(\alpha + \beta) & \cos \varphi_1 & \text{sen} \varphi_1 \text{sen}(\alpha + \beta) & D \text{sen} \varphi_1 \text{sen} \alpha + D \text{sen} \varphi_1 \text{sen}(\alpha + \beta) \\ -\text{sen} \varphi_1 (\alpha + \beta) & 0 & \cos(\alpha + \beta) & D \cos(\alpha + \beta) + D \cos \alpha + L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Ahora, para determinar la rotación y translación del sistema 4, el cual se obtiene a partir del sistema 3, que ha sido rotado un ángulo γ alrededor del eje Y_3 y trasladándolo una magnitud d a lo largo del eje Z_3 , se obtiene

$$A_4 = Rot(Y_3, \gamma)Tras(0,0, d) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \text{sen} \gamma & d \text{sen} \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \gamma & 0 & \cos \gamma & d \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Calculando la expresión $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$, resulta que

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos(\alpha + \beta + \gamma) & -\text{sen} \varphi_1 & \cos \varphi_1 \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma) & X_{11} \\ \text{sen} \varphi_1 \cos(\alpha + \beta + \gamma) & \cos \varphi_1 & \text{sen} \varphi_1 \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma) & Y_{11} \\ -\text{sen}(\alpha + \beta + \gamma) & 0 & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & Z_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

donde $X_{11} = D \cos \varphi_1 [\text{sen} \alpha + \text{sen}(\alpha + \beta)] + d \cos \varphi_1 \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma)$,

$Y_{11} = D \text{sen} \varphi_1 [\text{sen} \alpha + \text{sen}(\alpha + \beta)] + d \text{sen} \varphi_1 \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma)$ y

$Z_{11} = D \cos \alpha + d \cos(\alpha + \beta + \gamma) + D \cos(\alpha + \beta) + L$.

Por último, el sistema 5 se obtiene a partir del sistema 4 rotando el ángulo *roll* alrededor del eje Z_4 . La matriz resultante A_5 será dada por la siguiente expresión:

$$A_5 = Rot(Z_4, R) = \begin{bmatrix} \cos R & -\text{sen}R & 0 & 0 \\ \text{sen}R & \cos R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

La matriz resultante del producto $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 = T$ proporciona la posición y la orientación del punto medio de la herramienta. Para expresar la transformación en términos de las variables originales, es decir de los ángulos de las articulaciones, se emplearán las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \alpha + \varphi_2 &= 90, & \alpha &= 90 - \varphi_2, \\ \varphi_2 &= \beta + \varphi_3, & \alpha + \beta + \gamma &= 90 - P, \\ \varphi_3 &= \gamma + P, & \alpha + \beta &= 90 - \varphi_3. \end{aligned} \quad (5.14)$$

La matriz T obtenida es una transformación homogénea que define la posición y orientación del punto medio de la pinza. La orientación homogénea define un nuevo sistema de referencia, de manera que las tres primeras columnas proporcionan la orientación de los ejes X, Y y Z, mientras que la cuarta determina el origen.

$$T = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \text{sen}P \cos R - \text{sen} \varphi_1 \text{sen}R & -\text{sen}R \cos \varphi_1 \text{sen}P - \text{sen} \varphi_1 \cos R & \cos \varphi_1 \cos P & X_{12} \\ \text{sen} \varphi_1 \text{sen}P \cos R + \cos \varphi_1 \text{sen}R & -\text{sen} \varphi_1 \text{sen}P \text{sen}R + \cos \varphi_1 \cos R & \text{sen} \varphi_1 \cos P & Y_{12} \\ -\cos P \cos R & \cos P \text{sen}R & \text{sen}P & Z_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

donde

$$X_{12} = D \cos \varphi_1 [\cos \varphi_2 + \cos \varphi_3] + d \cos \varphi_1 \cos P,$$

$$Y_{12} = D \text{sen} \varphi_1 [\cos \varphi_2 + \cos \varphi_3] + d \text{sen} \varphi_1 \cos P \text{ y } Z_{12} = D \text{sen} \varphi_2 + d \text{sen}P + D \text{sen} \varphi_3 + L.$$

5.4 Obtención de la solución inversa del Robot *TIGRE 01* por el método Matricial

En esta sección se presenta un estudio del problema cinemático inverso para el robot *TIGRE 01*. En este caso la posición y la orientación de la mano del robot se asumen conocidas, y mediante la transformada homogénea T , se desea averiguar las coordenadas de las articulaciones, es decir, se desea determinar los ángulos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ y φ_5 .

Para determinar la posición y orientación del punto final del manipulador se calculará la matriz de transformación de la siguiente manera. El origen de un sistema de referencia situado en la pinza está localizado entre los dedos de ésta, la cual se describe por un vector P de coordenadas X, Y y Z . A su vez, la orientación de la pinza se representa mediante los tres vectores unitarios \vec{n}, \vec{o} y \vec{a} , mostrados en la figura 5.5

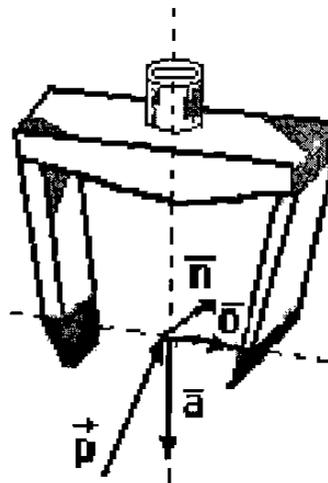


Figura 5.5: Vectores unitarios que reflejan la orientación de la mano.

donde el vector unitario en el eje Z es el vector \vec{a} , el cual define la dirección en la que la pinza se dirige al objeto. El vector unitario en el eje Y es el vector \vec{o} , cuya dirección es la que va de dedo a dedo (pinza).

El vector unitario del eje X se define como el vector producto $\vec{o} \times \vec{a}$.

La transformación homogénea que define el sistema de referencia de la figura 5.5, está dada por:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & X \\ n_y & o_y & a_y & Y \\ n_z & o_z & a_z & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Si la matriz T es conocida, entonces se desea que el robot *Tigre 01* adopte la posición y orientación por ella definidas. Por consiguiente, la matriz T está dada por: $T = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5$. La matriz T que contiene la información de la posición y la orientación está dada por (5.16).

En la expresión de T, los valores X, Y y Z son las coordenadas del vector de posición P que determina el punto final de la pinza del manipulador. Los vectores unitarios \vec{n} , \vec{o} y \vec{a} , definidos como (n_x, n_y, n_z) , (o_x, o_y, o_z) y (a_x, a_y, a_z) definen la posición de la herramienta.

Puesto que:

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \text{sen} \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

tenemos que

$$A_1^{-1} \cdot T = A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} n_x \cos \varphi_1 + n_y \text{sen} \varphi_1 & o_x \cos \varphi_1 + o_y \text{sen} \varphi_1 & a_x \cos \varphi_1 + a_y \text{sen} \varphi_1 & x \cos \varphi_1 + y \text{sen} \varphi_1 \\ -n_x \text{sen} \varphi_1 + n_y \cos \varphi_1 & -o_x \text{sen} \varphi_1 + o_y \cos \varphi_1 & -a_x \text{sen} \varphi_1 + a_y \cos \varphi_1 & -x \text{sen} \varphi_1 + y \cos \varphi_1 \\ n_z & o_z & a_z & z - L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

El producto $A_1^{-1} \cdot T$ se expresa como

$$A_1^{-1} \cdot T = \begin{bmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(P) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(P) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(P) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

donde:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \cos \varphi_1 x + \operatorname{sen} \varphi_1 y, \\ f_{12} &= -\operatorname{sen} \varphi_1 x + \cos \varphi_1 y, \\ f_{13} &= z \text{ excepto } f_{13}(P) = z - L. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ahora, de la matriz $A_2 A_3 A_4 A_5$, la componente (2,4) de esta matriz es nula. Al igualarla con la respectiva componente de la matriz $A_1^{-1} \cdot T$, se obtiene el valor del ángulo φ_1 ; ésto es,

$$\begin{aligned} f_{12}(P) &= -X \operatorname{sen} \varphi_1 + Y \cos \varphi_1, \\ \varphi_1 &= \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}. \end{aligned}$$

De la misma forma, igualando las componentes (1,3) y (3,3) de la matriz $A_2 A_3 A_4 A_5$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} f_{11}(a) &= \cos P, & a_x \cos \varphi_1 + a_y \operatorname{sen} \varphi_1 &= \cos P, \\ f_{13}(a) &= \operatorname{sen} P, & a_z &= \operatorname{sen} P, \\ P &= \operatorname{arctg} \frac{a_z}{a_x \cos \varphi_1 + a_y \operatorname{sen} \varphi_1}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ahora, igualando las componentes (2,1) y (2,2) de la matriz $A_2 A_3 A_4 A_5$ con la de la matriz $A_1^{-1} \cdot T$, se obtiene el ángulo *roll*:

$$\begin{aligned} f_{12}(\vec{n}) &= \operatorname{sen} R - \operatorname{sen} \varphi_1 n_x + \cos \varphi_1 n_y = \operatorname{sen} R, \\ f_{12}(\vec{o}) &= \cos R - \operatorname{sen} \varphi_1 o_x + \cos \varphi_1 o_y = \cos R, \\ R &= \operatorname{arctg} \frac{-\operatorname{sen} \varphi_1 n_x + \cos \varphi_1 n_y}{-\operatorname{sen} \varphi_1 o_x + \cos \varphi_1 o_y}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Partiendo del hecho que el valor de los ángulos *pitch* y *roll*, es conocido se determinan las coordenadas de la unión φ_4 y φ_5 , las cuales están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= P + R, \\ \varphi_5 &= P - R. \end{aligned}$$

Para determinar los demás ángulos, se multiplica por las matrices inversas A_2, A_3 y A_4 , hasta obtener el siguiente producto: $A_4^{-1} \cdot A_3^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \cdot T = A_5$. Simplificando, se tiene que

$$A_5 = \begin{bmatrix} \cos R & -\text{sen}R & 0 & 0 \\ \text{sen}R & \cos R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

De la matriz anterior, se aprecia que las componentes (1,4) y (3,4) son nulos, de lo cual se deduce:

$$\begin{aligned} D \text{sen} \gamma + D \cos \beta \text{sen} \gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) f_{11}(P) - \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma) f_{13}(P) &= 0 \\ \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma) f_{11} \cos(\alpha + \beta + \gamma) f_{13}(P) - D \cos \beta \cos \gamma - D \cos \gamma - d &= 0. \end{aligned}$$

Si se analizan estas dos ecuaciones, se puede ver que todos los términos son conocidos, excepto las variables β y γ , las cuales son desconocidas. Entonces, puesto que $\alpha + \beta + \gamma$ es conocido ya que el valor de P ha sido determinado, y se sabe que $\alpha + \beta + \gamma = 90 - P$. Por otra parte, D y d son datos que se obtienen a partir de la configuración del robot **TIGRE 01**, los cuales son conocidos. Entonces, resulta que :

$$\begin{aligned} f_{11}(P) &= \cos \varphi_1 X + \text{sen} \varphi_1 Y, \\ f_{13}(P) &= Z - L. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D \cos \beta \text{sen} \gamma + D \text{sen} \gamma &= d - \cos(90 - P) f_{11}(\vec{P}) + \text{sen}(90 - \vec{P}) f_{13}(P) \\ - D \cos \beta \cos \gamma - D \cos \gamma &= d - \text{sen}(90 - P) f_{11}(\vec{P}) - \cos(90 - \vec{P}) f_{13}(P) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Las dos expresiones del lado derecho de las ecuaciones anteriores son constantes y de valor conocido, los cuales se definen como A^1 y B^1 , entonces se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
A^1 &= d - \text{sen } Pf_{11}(\vec{P}) + \text{cos } Pf_{13}(\vec{P}), & \cos \beta &= \frac{A - \text{sen} \gamma}{\text{sen} \gamma}, \\
B^1 &= d - \text{cos } Pf_{11}(\vec{P}) + \text{sen } Pf_{13}(\vec{P}), & \beta &= \arccos \frac{A - \text{sen} \gamma}{\text{sen} \gamma}, \\
D \cos \beta \text{ sen} \gamma + D \text{ sen} \gamma &= A', & -\frac{A - \text{sen} \gamma}{\text{sen} \gamma} \cos \gamma - \cos \gamma &= B, \\
-D \cos \beta \cos \gamma - D \cos \gamma &= \beta', & -A \cos \gamma &= B \text{ sen} \gamma, \\
A &= \frac{A^1}{D} = \cos \beta \text{ sen} \gamma + \text{sen} \gamma, & \gamma &= \arctg \frac{-A}{B}. \\
B &= \frac{B^1}{D} = -\cos \beta \cos \gamma - \cos \gamma,
\end{aligned}$$

Asumiendo que β y γ son calculados de las ecuaciones anteriores, se puede determinar el valor de α , de la siguiente forma :

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= 90 - P, \\
\alpha &= 90 - P - \beta - \gamma.
\end{aligned}$$

Además, a partir del conocimiento de α, β y γ , se puede calcular el valor de las coordenadas de las articulaciones φ_2 y φ_3 ; es decir

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= 90 - \alpha, \\
\varphi_3 &= \gamma_2 - \beta.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Una vez obtenidas las soluciones directa e inversa del robot, se construye el programa computacional que permita ejecutar la tarea encomendada al robot **Tigre 01** en lazo abierto.

5.5 Conclusiones

En este capítulo se presentó la solución a los problemas de la cinemática directa e inversa, mediante el método de transformación homogénea para el **TIGRE 01**. Un programa basado en la solución de las transformaciones homogéneas ha sido desarrollado para obtener la cinemática inversa del robot **TIGRE 01**. Este programa permite conocer las coordenadas espaciales del robot dentro de un espacio de trabajo para el control del movimiento en lazo abierto, el cual calcula los ángulos, que de acuerdo con la electrónica asociada a la tarjeta lógica, permite efectuar el movimiento de los motores.

Sin embargo, para realizar el control en lazo cerrado del robot es necesario colocar sensores de posición, los cuales estarán ubicados en los ejes de cada motor. Con esta información, y haciendo uso de los observadores, es posible implementar leyes de control.

Por razones económicas, el control de lazo cerrado no se llevó a cabo, dejando esta tarea para un trabajo futuro.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Conclusiones Generales

En esta tesis, se presentó un estudio sobre la construcción de un observador Backstepping para una clase de sistemas no lineales afines en el estado. Este método fue aplicado al modelo matemático que describe el comportamiento de un robot flexible de un solo eslabón, obteniendo resultados satisfactorios al estimar la velocidad angular y la posición angular del rotor del motor, así como también al estimar la velocidad angular y la posición angular del eslabón.

Se llevó a cabo una comparación de estos resultados con los obtenidos con un observador de alta ganancia que fue construido considerando las mismas condiciones iniciales y los mismos parámetros de inercia del robot flexible de un solo eslabón que en el observador Backstepping.

Los resultados que se muestran en el Capítulo 3 manifiestan la gran diferencia entre ambos observadores, presentando el observador Backstepping una convergencia más rápida y menos transitorios con respecto a los resultados obtenidos con el observador de alta ganancia.

Por otra parte, un robot flexible de cinco grados de libertad, fue diseñado y construido, el cual está constituido por una parte mecánica, una interfase (que cuenta con una sección lógica, una sección óptica y una sección de potencia) y un programa de

software en el cual se programan las tareas que debe ejecutar el robot y se almacena la información relativa al movimiento del robot. Estas tareas están relacionadas con el movimiento de cada una de las articulaciones del robot, así como también al movimiento de una pinza de dos tenazas.

El programa del control de movimiento del robot se encuentra en un ambiente amigable (ver Apéndice A) que permite la programación de las tareas que debe ejecutar el robot.

6.2 Trabajos Futuros

Algunos de los trabajos futuros a desarrollar tomando como base éste son:

- Implementar la instrumentación y la electrónica que permitan la aplicación de algoritmos de control y de observación para el control del movimiento en lazo cerrado del robot.
- Desarrollar estrategias de control digitales para el control del robot.
- Puesto que el observador Backstepping se aplica a un robot de un grado de libertad, desarrollar otro tipo de estrategias de observación para sistemas multivariados que incluyan al modelo del robot.

APENDICE A
Pantallas del sistema

Apéndice A

Pantallas del sistema.

PANTALLA PRINCIPAL.

ELIJA UNA OPCIÓN, OPRIMIENDO LA LETRA A LA IZQUIERDA DE CADA
FUNCIÓN

F> FORMACIÓN **E**> EJECUCIÓN
R> REPETIR **B**> BORRAR
G> GRABAR **D**> RECUPERAR
S> SALIR

+++ UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN +++

+++ DOCTORADO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA +++

PANTALLA CORRESPONDIENTE AL COMANDO FORMACIÓN.

ELIJA UNA OPCIÓN OPRIMIENDO LA TECLA DE LA LETRA A LA IZQUIERDA DE CADA FUNCIÓN

A > SUBIR HOMBRO	Q > BAJAR HOMBRO
E > ABRIR PINZA.	R > CERRAR PINZA.
T > BAJAR CODO	Y > SUBIR CODO.
U > ROTAR BASE A LA IZQ.	I > ROTAR BASE A LA DERECHA
J > GIRO DIFERENCIAL IZQ. (IZQ)	K > GIRO DIFERENCIAL IZQ.(DER.)
O > GIRO DIFERENCIAL DER. (IZQ)	L > GIRO DIFERENCIAL DER.(DER.)
D > PAUSA	
P > PUNTO	F > FIN DE LA FORMACIÓN

0 PUNTOS

0 0 0 0 0 0 0
AQ OL TY JK ER UI D

REFERENCIAS

- [1] Anders R., Johansson R., “ *Observer Backstepping for a class of Nonminimum-Phase System*”, in *Proc. Of 38th CDC*, Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- [2] Angulo J., *Robótica Práctica. Tecnología y Aplicaciones*, Edit. Rede Barcelona, 1985.
- [3] Barrientos A., *Fundamentos de Robótica*, Edit. McGraw-Hill, Interamericana.,1999.
- [4] Bornard G., Covenne N., and celle F., “*Regularly Persistent observer for a class of uniformly observable System*”, IEEE (CDC 91), Brighton, Great Britain.
- [5] Canudas C. de W., “*Theory of Robot Control*”, Edit. The European Summer School of the Laboratory of Automatic Control of Grenoble, France, 1992.
- [6] Craig J. J., *Robotic, Mechanics and Control*, Edit. Adison Wesley, 1988.
- [7] Chen C., *Linear System Theory and Design*, Edit. Oxford, 1999.
- [8] Chiasson J.N. and Novotnak R.T., “ *Nonlinear speed observer for the PM Stepper Motor*”, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 38, No.10, pp. 1584-1588, 1993.
- [9] De León J., Schreier G., Gluminear A.,”*Backstepping Observer for Induction motors*”, Second nonlinear control network , Nonlinear control in the year 2000, Francia 2000.
- [10] Fu K. S., González R. C., Lee C. S. G., *Robótica control, detección, visión e inteligencia*, Edit. McGraw-Hill/ Interamericana de España, S.A,1993.
- [11] Grover M. P., Weiss M., Nagell R. N. y Odrey N. G., *Robótica Industrial tecnología, programación*, Edit. McGraw-Hill, 1989.
- [12] Ham H.Jo and Jin H. Seo., “*Int. J. Control 2000*”; Vol. 73; No.4.
- [13] Isifori A., *Nonlinear Control Systems, Communications and Control Engineering series*, Springer Verlag, London, 1995.
- [14] Jankovic M., “ *Observer Based Control for Elastic Joint Robots*”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 11, No. 4, pp. 618-623, 1995.

- [15] Kang W. and Krener A.J., “ *Nonlinear Observer design, a backstepping approach*”, preprint, 1998.
- [16] Kenjo T. and Sugawara A., *Stepping Motors and their Microprocessor Controls*, Edit. Oxford Science Publications, 1995.
- [17] Khalil H. K., *Nonlinear systems*, Edit. Prentice hall., Michigan state university, Second edition, 1996.
- [18] Kolmogorov A.N. and Fomin S.V., *Introductory Real Analysis.*, Edit. Dover., U. S. A 1970.
- [19] Nijmeijer H., Van der Schaft A. J., *Nonlinear Dynamical Control System*, Springer Verlag, 1995.
- [20] Plestan F. and Glumineau A., “ *Linealization by Generalized Input-Output Injection for Electrical Motors Observers*” *Electrimac*. pp. 1584-1588, 1993.
- [21] Schilling R. J., *Fundamentals of Robotics Analysis and Control*, Edit. Prentice Hall ,1990.
- [22] Slotine, J.J. and Hong S., “ *Two-Time scale sliding control of manipulators with flexible joints*”, Proc. Of the 1986 American Control Conference, Seattle, Washington, pp. 805-810.
- [23] Spong M., “ *Control of flexible joint robots: a survey*”, Technical report, No. UIULENG-90-2203/DC-116, coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana – Champaign, 1990.
- [24] Spong M. W., Vidyasagar M., *Robot Dynamics & Control*, Edit. John Wiley & Sons, 1989.
- [25] The European summer school of the laboratory of automatic control of Grenoble., “ *Theory o robot Control*”, Session 6., France 1992.

7
E
2
L