

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



ESTIMACION Y CONTROL PARA
PROCESOS DE FERMENTACION AEROBICOS

POR

ANAND ELEAZAR SANCHEZ ORTA

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON
ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. NOVIEMBRE, 2001

TM
Z5853
.M2
FIME
2001
S26

ESTIMACION Y CONTROL PARA

AESO

PROCESOS DE FERMENTACION AEROBICOS

2001



1020146374

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



ESTIMACION Y CONTROL PARA
PROCESOS DE FERMENTACION AEROBICOS

POR

ANAND ELEAZAR SANCHEZ ORTA

T E S I S

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON
ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. NOVIEMBRE, 2001

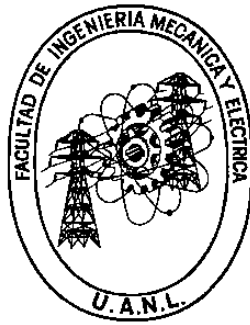
0150-52460

TH
Z5853
•Ma
Fime
2001
S26



FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**ESTIMACIÓN Y CONTROL PARA
PROCESOS DE FERMENTACIÓN AERÓBICOS**

POR

ANAND ELEAZAR SÁNCHEZ ORTA

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L.

NOVIEMBRE DEL 2001.

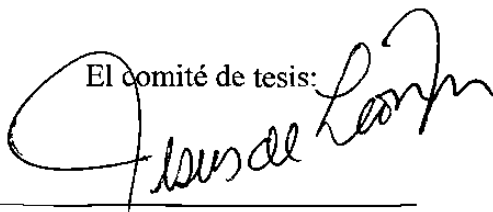


FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **ESTIMACIÓN Y CONTROL PARA PROCESOS DE FERMENTACIÓN AERÓBICOS**, realizada por la Ing. Anand Eleazar Sánchez Orta sea aceptada para su defensa como opción al Grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.

El comité de tesis:



Asesor

Dr. Jesús de León Morales



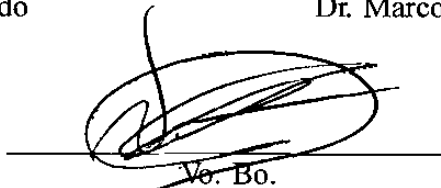
Coasesor

Dr. Aarón Sariñana Toledo



Coasesor

Dr. Marco Tulio Mata Jiménez



Ver. Bo.

M. C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza, N. L.

Noviembre del 2001.

Copyright 2001
por Anand Eleazar Sánchez Orta
Derechos Reservados

Dedicatoria

A mi esposa Hilianita de Jesús Flores Mireles por brindarme su amor, comprensión y confianza en todo momento, que me han permitido seguir en el camino de la felicidad.

A mis padres Eleazar Sánchez Hernández y Margarita Orta Silos por todo lo que me han apoyado y comprendido durante mi vida.

A mis hermanas Devi y Maya.

Agradecimientos

Al Dr. Jesús de León Morales, por su apoyo y formación durante la realización de este trabajo.

También con especial agradecimiento a mi esposa, por la revisión ortográfica que realizó a este trabajo.

A todos los doctores que participaron en mi formación académica, especialmente al Dr. Joaquín Collado Moctezuma, Dr. Krishna K. Busawon, Dr. Mikhail V. Basin y al Dr. René Galindo Orozco.

A todos mis compañeros del programa doctoral por la amistad que me brindaron, especialmente a Ivan Macías Cárdenas, Edgar Pérez Castillo, Eliut Lopez Toledo, David A. Díaz Romero y Gustavo Pérez Hernández.

Al CONACyT, a la Universidad Autónoma de Nuevo León y al proyecto PAICYT CA376-00, por su apoyo para realizar mis estudios.

Resumen

Estimación y Control para Procesos de Fermentación Aeróbicos.

Publicación No. _____
Anand Eleazar Sánchez Orta
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales
Noviembre, 2001.

El presente trabajo trata esencialmente sobre la estimación de las principales variables que intervienen en un proceso de fermentación aeróbica. Puesto que las ecuaciones dinámicas que describen el proceso son no lineales, la estimación de las variables no medibles del sistema se realiza utilizando técnicas de observación no lineal, las cuales permiten estimar el vector de estado a partir del conocimiento de las entradas y salidas del sistema.

La estimación se realiza a partir de las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del proceso de fermentación, el cual incluye la ecuación dinámica del oxígeno disuelto (que es el oxígeno diluido por unidad de volumen en el medio líquido), que será considerada como la única componente medible del vector de estado.

Un análisis de la propiedad de observabilidad del proceso de fermentación aeróbica es realizada, y a partir de ésta se diseña un observador no lineal de alta ganancia que permite estimar las componentes del vector de estado basados en las leyes de crecimiento de Monod y Haldane. Además, la estimación del crecimiento de biomasa se lleva a cabo sin tomar en cuenta ninguna de las leyes de crecimiento.

Puesto que pueden presentarse perturbaciones en la medición del oxígeno disuelto, se propone la construcción de un observador integral de alta ganancia, el cual permite atenuar el efecto de las perturbaciones sobre la estimación de las componentes del vector de estado. Finalmente, con el propósito de mostrar el desempeño del observador integral en lazo cerrado, este esquema de observación propuesto se aplica a un proceso de tratamiento de aguas residuales, donde se utiliza un control óptimo. Esta ley de control permite maximizar el consumo de los microorganismos y reducir el tiempo en cada ciclo del proceso.

Notación

\in	Pertenece a
\exists	Existe
\forall	Para toda
\Rightarrow	Implica que
\rightarrow	Tiende a
$:$	Tal que
$\ \cdot\ _l$	Norma l de \cdot
$ \cdot $	Valor absoluto de \cdot
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{R}^n	Espacio vectorial de dimensión n con componentes reales
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espacio vectorial de las matrices de dimensión $n \times m$ con componentes reales
A	Matriz
A^T	Matriz transpuesta de A
A^{-1}	Matriz inversa de A
C^∞	Conjunto de funciones continuamente diferenciables
\dot{x}	Derivada de x con respecto al tiempo

Índice

Capítulo 1	Introducción	1
1.1.	Generalidades	1
1.2.	Organización de la tesis	3
Capítulo 2	Métodos de fermentación	5
2.1.	Introducción	5
2.2.	Diseño del medio de crecimiento	5
2.3.	Cultivo por lotes	6
2.4.	Cultivo de alimentación por lotes	6
2.5.	Cultivo continuo	7
2.6.	Reactor biológico	7
2.7.	Reacciones biológicas	8
2.7.1.	Reacción enzima-catalizador	8
2.7.2.	Reacción de crecimiento microbiano	8
2.8.	Comportamiento del crecimiento de la biomasa	9
2.8.1.	Ley de Michaelis-Meten	9
2.8.2.	Ley de crecimiento de Monod	9
2.8.3.	Ley de crecimiento de Haldane	10
2.9.	Modelo matemático para un proceso de fermentación aeróbico	10
2.9.1.	Balance para el substrato	10
2.9.2.	Balance para la biomasa viva	11
2.9.3.	Balance para la biomasa muerta	11
2.9.4.	Balance para el oxígeno disuelto	12
2.10.	Conclusiones	13
Capítulo 3	Observabilidad y observadores	15

Índice (continuación)

3.1. Introducción	15
3.2. Observabilidad	16
3.2.1. Observabilidad de sistemas lineales	16
3.2.1.1. Caso invariante en el tiempo	16
3.2.1.2. Caso variante en el tiempo	17
3.2.2. Observabilidad de sistemas no lineales	19
3.2.3. Sistemas uniformemente observables	21
3.3. Observadores	23
3.3.1. Observación de sistemas lineales invariantes en el tiempo	24
3.3.2. Observación de sistemas lineales variantes en el tiempo	24
3.3.3. Observación de sistemas no lineales	25
3.3.3.1. Observadores de alta ganancia	27
3.4. Observador de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales	30
3.5. Estimación de la concentración de crecimiento de biomasa	33
3.6. Conclusiones	36
Capítulo 4 Estimación para un proceso de fermentación aeróbica	37
4.1. Introducción	37
4.2. Análisis de observabilidad	37
4.3. Estimación de los estados considerando la ley de Monod	40
4.4. Estimación de los estados considerando la ley de Haldane	45
4.5. Estimación con atenuación de perturbaciones	50
4.5.1. Observador integral para una clase de sistemas lineales	50
4.5.2. Observador integral de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales	52
4.5.3. Aplicación a un proceso de fermentación	56

Índice (continuación)

4.5.3.1. Estimación considerando la ley de Monod	56
4.5.3.2. Estimación considerando la ley de Haldane	62
4.6. Conclusiones	68
Capítulo 5 Aplicación a un reactor biológico de tratamiento de aguas residuales	69
5.1. Introducción	69
5.2. Descripción del proceso	70
5.2.1. Reactores discontinuos secuenciales	70
5.2.2. Forma de operación	71
5.3. Modelo matemático del proceso	72
5.4. Control óptimo	73
5.5. Estimación de los estados	74
5.6. Control de lazo cerrado	77
5.7. Conclusiones	85
Capítulo 6 Conclusiones	86
6.1. Aportaciones de esta investigación	86
6.2. Trabajos futuros	87
Apéndice A. Microbiología	88
Apéndice B. Geometría diferencial	96
Referencias	100

Índice de Figuras

Figura 2.1. Reactor biológico	7
Figura 3.1. Técnica de observación.	15
Figura 3.2. Dos estados iniciales x_0, x_1 indistinguibles	19
Figura 3.3. Diagrama de bloques de un observador	23
Figura 3.4. Tasa de dilución	34
Figura 3.5. Concentración de oxígeno disuelto	35
Figura 3.6. Concentración de crecimiento de biomasa	35
Figura 4.1. Ley de crecimiento de Monod	40
Figura 4.2. Función de entrada	42
Figura 4.3. Concentración de oxígeno disuelto con la ley de Monod	43
Figura 4.4. Concentración de biomasa con la ley de Monod	43
Figura 4.5. Concentración de sustrato con la ley de Monod	35
Figura 4.6. Ley de crecimiento de Haldane	45
Figura 4.7. Separación de dominios de la tasa de crecimiento específica	46
Figura 4.8. Concentración de oxígeno disuelto con la ley de Haldane	48
Figura 4.9. Concentración de biomasa con la ley de Haldane	49
Figura 4.10. Concentración de sustrato con la ley de Haldane	49
Figura 4.11. Tasa de crecimiento específica en función del sustrato	50
Figura 4.12. Medición de la salida ruidosa $y(t)$ con la ley de Monod	59
Figura 4.13. Estimación de O con el observador de alta ganancia (Monod)	59
Figura 4.14. Estimación de O con el observador integral (Monod)	60
Figura 4.15. Estimación de X con el observador de alta ganancia (Monod)	60
Figura 4.16. Estimación de X con el observador integral (Monod)	61
Figura 4.17. Estimación de S con el observador de alta ganancia (Monod)	61
Figura 4.18. Estimación de S con el observador integral (Monod)	62
Figura 4.19. Medición de la salida ruidosa $y(t)$ con la ley de Haldane	64

Figura 4.20. Estimación de O con el observador de alta ganancia (Haldane).	65
Figura 4.21. Estimación de O con el observador integral (Haldane)	65
Figura 4.22. Estimación de X con el observador de alta ganancia (Haldane)	66
Figura 4.23. Estimación de X con el observador integral (Haldane)	66
Figura 4.24. Estimación de S con el observador de alta ganancia (Haldane)	67
Figura 4.25. Estimación de S con el observador integral (Haldane).	67
Figura 5.1. Operación de un reactor discontinuo secuencial	71
Figura 5.2. Comportamiento de μ con la ley de Haldane	73
Figura 5.3. Region de valores admisibles	78
Figura 5.4. Concentración de oxígeno disuelto (lazo cerrado)	79
Figura 5.5. Concentración de biomasa (lazo cerrado)	80
Figura 5.6. Concentración de substrato (lazo cerrado)	80
Figura 5.7. Volumen de agua en el tanque	81
Figura 5.8. Control de flujo de entrada.	81
Figura 5.9. Salida $y(t)$ afectada por ruido	82
Figura 5.10. Concentración de oxígeno disuelto (lazo cerrado con y ruidosa)	82
Figura 5.11. Concentración de biomasa (lazo cerrado con y ruidosa)	83
Figura 5.12. Concentración de substrato (lazo cerrado con y ruidosa)	83
Figura 5.13. Volumen en el tanque (con y ruidosa)	84
Figura 5.14. Control de flujo de entrada (con y ruidosa)	84
Figura A.1. Estructura de la bacteria	90
Figura A.2. Crecimiento de microorganismos	91
Figura A.3. Curva de crecimiento	94

Índice de Tablas

Tabla 4.1. Parámetros del modelo y condiciones iniciales

44

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

Los procesos de fermentación se han utilizado desde tiempo inmemorial, aun cuando no se entendía por completo el fenómeno. Estos procesos han tenido un gran desarrollo sobre todo en la industria de la alimentación, bebidas, medicamentos y tratamiento de aguas residuales. La fermentación se realiza a partir de una concentración de nutrientes (substancias que sirven como alimento a los microorganismos) y al depositar microorganismos que son capaces de crecer por el consumo de estas substancias, se obtienen productos tales como el alcohol, antibióticos, enzimas, etc.

El objetivo principal en los procesos de fermentación es propagar la producción de células y obtener productos que se derivan del crecimiento y reproducción de los microorganismos.

La principal dificultad es el control de estos procesos, puesto que el comportamiento dinámico varía dependiendo de los microorganismos y sustratos (compuestos químicos cuyas transformaciones van a ser condicionadas por el microorganismo) que se utilicen. Además para mejorar la operación de estos procesos se requiere de la medición (mientras se efectúa el proceso) de las principales variables que intervienen en la fermentación (sustrato, biomasa y producto), las cuales no siempre es posible realizarlas, puesto que en ocasiones no existen sensores confiables para estas mediciones.

Otra dificultad es la falta de un modelo general de la tasa de crecimiento específica, la cual es uno de los parámetros más importantes en los procesos de fermentación, ya que determina la dinámica de los estados del proceso.

En este trabajo el principal objetivo es la estimación de las variables que intervienen en la fermentación. Una forma de realizarla, es utilizando técnicas de observación, las cuales permiten estimar las variables a partir de la información conocida como las entradas y salidas del proceso. Normalmente estas suelen ser mediciones que relacionan las variables de estado (que en el caso del proceso de fermentación son las concentraciones de biomasa y sustrato).

El problema de observación para procesos de fermentación se ha tratado durante muchos años dentro de un enfoque estocástico [28] , [24] , [27] . Generalmente, éstos se basan en el filtro de Kalman, el cual conduce a algoritmos complejos que no garantizan buena convergencia ni estabilidad de los mismos, debido a que es necesario que las condiciones iniciales del observador sean muy cercanas a las del sistema original y que la linealización del sistema debe ser observable alrededor de cualquier trayectoria.

Por otra parte, se han realizado trabajos utilizando técnicas de observación no lineal que han dado mejores resultados. Por ejemplo, en el caso de [3] se presenta un observador de alta ganancia que permite estimar la concentración de biomasa a partir de la medición de la concentración de sustrato y estableciendo el modelo de Haldane para la tasa de crecimiento específica. El problema en este caso, radica en la hipótesis de medir la concentración de sustrato (ya que es difícil medir esta variable en la práctica) y establecer el modelo de Haldane que no se puede generalizar para todos los procesos. Además muestran que el observador tiene un buen desempeño cuando se presenta una clase particular de incertidumbre, y realizan la estimación de la tasa de crecimiento específica, pero con la limitante de medir la concentración de biomasa. En [7] , se presenta un observador no lineal que permite estimar la tasa de crecimiento específica, a partir de la medición de la tasa de oxígeno (la cual es la dinámica de la concentración de oxígeno disuelto, pero despreciando ciertos parámetros), pero no considera completamente las dinámicas del proceso (las dinámicas de todas las variables de estado) y como resultado la justificación matemática es bastante cuestionable. En el caso de [11] presentan un observador no lineal que permite estimar las cinéticas (parámetros que influyen en la dinámica del proceso, relacionados con la tasa de crecimiento específica) del sistema, pero requieren de la medición de las concentraciones de biomasa y sustrato, que son difíciles de medir (ya sea por el costo de los sensores o por no dar mediciones confiables). En [14] , estiman la concentración de sustrato, utilizando un observador no lineal de alta ganancia, pero requieren de la medición de la concentración de biomasa, además de establecer un modelo para la tasa de crecimiento específica.

Para resolver las dificultades en la estimación de los procesos de fermentación aeróbicos, en el caso de la falta de un modelo general de la tasa de crecimiento específica, se propone utilizar un

observador no lineal (desarrollado por K. Busawon, *et al* [3]) que permite estimar el crecimiento de biomasa a partir de la medición de la concentración de oxígeno disuelto, el cual en la práctica se mide con relativa facilidad y los sensores dan mediciones confiables, sin establecer ningún modelo de la tasa de crecimiento específica. La estimación de este parámetro puede ser utilizado para comprobar o establecer el modelo de la tasa de crecimiento específica. Cuando no se miden directamente las variables de estado y es posible establecer un modelo de la tasa de crecimiento específica, se propone resolver este problema utilizando un observador no lineal que permite estimar las variables de estado a partir de la medición de la concentración de oxígeno disuelto.

Además, se diseña un observador no lineal [4] que permite estimar las variables de estado, cuando la salida del sistema (que en este caso es la concentración de oxígeno disuelto) es afectada por cierta clase de perturbación.

Con el propósito de verificar el desempeño de la estimación, se aplica a un proceso de tratamiento de aguas residuales, donde se utiliza un control óptimo que permite maximizar el consumo de los microorganismos (ya que este es el principal objetivo en estos procesos, para degradar la mayor cantidad de sustancias tóxicas) y reducir el tiempo en cada ciclo del proceso, presentándose resultados de simulación que validan el desempeño del sistema en lazo cerrado.

1.2 Organización de la tesis

La organización de la tesis es la siguiente:

En el capítulo 2 se definen algunos métodos de fermentación así como también los balances de materia en el reactor biológico que determinan la dinámica del sistema.

En el capítulo 3 se presentan las condiciones de observabilidad y el diseño de observadores para ciertas clases de sistemas. Además se diseña un observador, que permite estimar el crecimiento de biomasa sin establecer ningún modelo de la tasa de crecimiento específica.

En el capítulo 4 se dan las condiciones de observabilidad para un proceso de fermentación aeróbico, a partir de la medición de la concentración de oxígeno disuelto. Además se diseña un observador de alta ganancia para modelos basados en las leyes de crecimiento de Monod y Haldane. También se propone la construcción de un observador integral de alta ganancia que permite atenuar

las perturbaciones que aparecen en la medición de la concentración de oxígeno disuelto.

En el capítulo 5 se estudia un proceso de tratamiento de aguas residuales. En este caso, se diseña un observador integral que permite implementar una ley de control óptima (desarrollada por J. Moreno, *et al* [20]), la cual minimiza el tiempo de llenado y reacción.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo, así como las perspectivas de los problemas a resolver en esta área.

Capítulo 2

Métodos de fermentación

2.1 Introducción

Existen diferentes formas de operar los procesos de fermentación. Los métodos mas utilizados son el cultivo por lotes, cultivo de alimentación por lotes y cultivo continuo. En cualquiera de estos casos, se requiere que en el lugar donde se realiza la fermentación (normalmente en un reactor biológico) se mantengan las condiciones necesarias y suficientes para el cultivo del microorganismo. Ésto implica el diseño del lugar de cultivo, utilizar los nutrientes requeridos para el crecimiento del microorganismo y el control y mantenimiento de los procesos de fermentación.

Para el control de estos procesos, es necesario conocer el comportamiento en el tiempo de las diferentes variables que intervienen. Normalmente se determinan las ecuaciones dinámicas por medio de un balance de la materia del proceso.

En este capítulo se presentan algunas definiciones de los diferentes métodos de fermentación y del lugar y condiciones necesarias para que se realice la fermentación [31] . Posteriormente se presentan las reacciones que pueden dar lugar a la fermentación y algunos modelos que representan la rapidez de crecimiento de los microorganismos. Finalmente se presentan las ecuaciones dinámicas de las variables que intervienen en el proceso por medio de un balance de la materia en el reactor biológico.

2.2 Diseño del medio de crecimiento

Para que los microorganismos crezcan y se reproduzcan, es necesario proveer las condiciones adecuadas en el lugar de cultivo. Por lo tanto, el diseño del medio de crecimiento involucra la determinación de las condiciones de reacción necesarias para la formación del producto (substancia que se deriva de la fermentación, como los antibióticos) requerido.

Las condiciones de reacción incluyen la temperatura, pH^1 , suministro de sustratos, etc.

Se debe de tomar en cuenta la naturaleza del producto de interés, ya que el producto puede ser de crecimiento asociado (ésto quiere decir que la formación del producto y de la biomasa son proporcionales) o de crecimiento no asociado.

El medio es clasificado en sintético y complejo. Un medio sintético es aquel que tiene bien definida la composición química, mientras que el medio complejo es una mezcla de componentes no definidos (éste es el caso del proceso de tratamiento de aguas residuales).

El medio de crecimiento no debe contener organismos que sean improductivos o que produzcan sustancias desconocidas o no controladas, ya que pueden contaminar el producto o inhibir al microorganismo deseado.

2.3 Cultivo por lotes

El método de fermentación por lotes se considera como un " sistema cerrado ". Se inicia inoculando la solución del nutriente esterilizado en el fermentador (o reactor biológico) con microorganismos, y se presenta la incubación. En el transcurso de la fermentación nada es añadido excepto el oxígeno (en forma de aire), un agente antiespuma, y un ácido o base para el control del pH .

La principal desventaja en el cultivo por lotes es la improductividad en un intervalo de tiempo grande que se presenta entre lotes, que comprenden la carga y descarga en el fermentador, la limpieza, la esterilización y reinicialización del proceso.

2.4 Cultivo de alimentación por lotes

En el proceso de alimentación por lotes, el sustrato es añadido en incrementos en el reactor biológico, mientras la fermentación se desarrolla. Básicamente las células crecen bajo el sistema por lotes por algún tiempo, normalmente hasta cerca del final de la fase de crecimiento exponencial. En este punto, el fermentador es alimentado con una solución de sustrato sin remover el fluido del cultivo. La alimentación debe de ser balanceada para llevar el crecimiento del microorganismo a una tasa de crecimiento específica deseada, y al mismo tiempo, reducir su inhibición (disminución

¹ Es la representación de la concentración de iones de hidrógeno de una solución y determina si es neutra, ácida o alcalina.

de la actividad del microorganismo) consecuencia de sustancias tóxicas o altas concentraciones de sustrato que se presentan.

2.5 Cultivo continuo

La fermentación continua es un sistema abierto, en donde una solución de nutriente es añadido al fermentador continuamente y simultáneamente una cantidad equivalente de solución de nutrientes transformados es retirado del sistema.

2.6 Reactor biológico

Normalmente los procesos de fermentación se llevan a cabo en un reactor biológico, en donde se efectúa la transformación biológica de nutrientes en microorganismos y producto. En la figura 2.1 se muestra que el reactor biológico es un tanque en donde los microorganismos crecen en condiciones controladas del medio por el consumo de nutrientes.

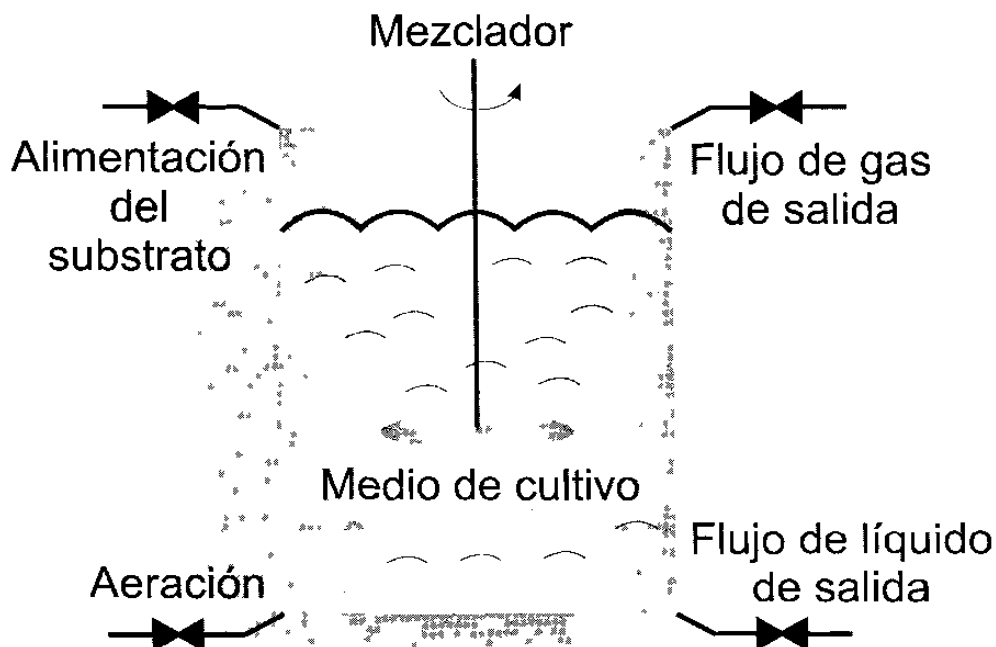


Fig. 2.1. Reactor biológico.

Las variables que intervienen en este proceso se definen de la siguiente manera:

$X(t)$	= concentración de biomasa viva [miligramo/litro]
$X_{nv}(t)$	= concentración de biomasa muerta [miligramo/litro]
$S(t)$	= concentración de sustrato [miligramo/litro]
$V(t)$	= volumen de cultivo en el reactor biológico [litros]
$F_{in}(t)$	= flujo de entrada al reactor biológico [litro/hora]
$F_{out}(t)$	= flujo de salida del reactor biológico [litro/hora]
$O(t)$	= concentración de oxígeno disuelto [miligramo/litro]

donde la concentración de biomasa $X(t)$ son los microorganismos que hay en el reactor biológico por unidad de volumen, el sustrato $S(t)$ es el compuesto químico por unidad de volumen cuya transformación va a ser condicionada por los microorganismos y $O(t)$ es el oxígeno diluido por unidad de volumen en el medio líquido. La acción de control es el flujo de entrada $F_{in}(t)$ y se considera que es igual al flujo de salida $F_{out}(t) = F_{in}(t) = F(t)$.

La forma de operación en el reactor biológico depende del método de fermentación utilizado (por ejemplo, cultivo por lotes, cultivo de alimentación por lotes, cultivo continuo, etc.).

2.7 Reacciones biológicas

En un proceso de fermentación ya sea para obtener un producto o para consumir los sustratos, se producen reacciones biológicas, las cuales son:

- Reacción enzima-catalizador.
- Reacción de crecimiento microbiano.

2.7.1 Reacción enzima-catalizador

Esta reacción se produce cuando el nutriente o sustrato se transforma en un producto mediante la acción catalizadora de una enzima.

2.7.2 Reacción de crecimiento microbiano

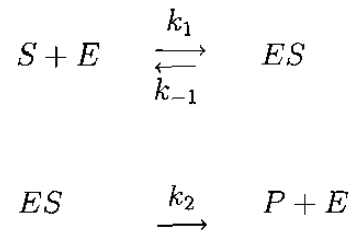
Es cuando los sustratos son consumidos por los microorganismos, causando un crecimiento en la población.

2.8 Comportamiento del crecimiento de la biomasa

La razón de crecimiento de la biomasa está correlacionada con la tasa de crecimiento específica, la cual se describe por diferentes modelos dependiendo del proceso de fermentación que se trate. Existe un gran número de modelos que se utilizan sólo para casos particulares, por lo que no existe un modelo general. Entre las leyes más importantes que describen la tasa de crecimiento específica se encuentran la ley de Michaelis-Menten, ley de crecimiento de Monod y la ley de Haldane [17].

2.8.1 Ley de Michaelis-Menten

Esta ley se deriva de estudios fundamentales en la cinética de la reacción enzima-catalizador. Es decir cuando se combinan una enzima E y un substrato S para formar un complejo ES . Después este complejo se separa en un producto P y una enzima libre de la forma siguiente:



Las cinéticas (k_1, k_2) de esta reacción se describe como:

$$\mu(t) = \frac{V_{\max}S(t)}{K_{S_1} + S(t)} \quad (2.1)$$

donde $\mu(t)$ es la tasa de crecimiento específica, V_{\max} es la velocidad máxima o limite de crecimiento y K_{S_1} es la constante de Michaelis.

2.8.2 Ley de crecimiento de Monod

Monod observó que la razón de crecimiento en cada especie era una función del substrato $S(t)$ y además tenía la misma forma funcional que la ley de Michaelis-Menten y la describió como:

$$\mu(t) = \frac{\mu_{\max}S(t)}{K_{S_2} + S(t)}$$

donde μ_{\max} es la máxima tasa de crecimiento y K_{S_2} es el valor de la concentración limitada en

$\mu_{\max}/2$.

2.8.3 Ley de crecimiento de Haldane

En muchos procesos de fermentación los substratos son sustancias tóxicas, que inhiben el crecimiento de la biomasa en concentraciones altas. Por lo que la ley de Haldane se expresa como:

$$\mu(t) = \frac{\mu_{\max}S(t)}{K_{S_3} + S(t) + S^2(t)/K_I}$$

donde K_{S_3} es la constante de afinidad y K_I es la constante de inhibición.

2.9 Modelo matemático para un proceso de fermentación aeróbico

El modelo matemático de un proceso de fermentación es obtenido mediante un balance de la materia en el reactor biológico. Una forma general del balance de la materia es la ley de la conservación de la masa.

2.9.1 Balance para el sustrato

La ecuación dinámica del sustrato está dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de cambio del} \\ \text{volumen total de sustrato} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sustrato} \\ \text{de entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Sustrato} \\ \text{de salida} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Pérdida de sustrato} \\ \text{por el crecimiento de la biomasa} \end{array} \right\}$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{S(t)V(t)\} &= S(t)F(t) + V(t)\frac{d}{dt}S(t) \\ V(t)\frac{d}{dt}S(t) &= F(t)S_{in}(t) - F(t)S(t) - \frac{\mu(t)X(t)}{Y_x}V(t) \end{aligned}$$

donde $S_{in}(t)$ es la concentración de sustrato de entrada, Y_x es el coeficiente de conversión biomasa/sustrato y $\frac{d}{dt}V(t) = F(t)$. Dividiendo por $V(t)$ a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\frac{\mu(t)X(t)}{Y_x} + \frac{F(t)}{V(t)}(S_{in}(t) - S(t)).$$

2.9.2 Balance para la biomasa viva

La razón de cambio se expresa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de cambio de} \\ \text{la biomasa viva} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Biomasa} \\ \text{de entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Biomasa} \\ \text{de salida} \end{array} \right\} \\ + \left\{ \begin{array}{l} \text{Crecimiento} \\ \text{de la biomasa} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Muerte} \\ \text{de la biomasa} \end{array} \right\}$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{X(t)V(t)\} &= X(t)\frac{d}{dt}V(t) + V(t)\frac{d}{dt}X(t) \\ V(t)\frac{d}{dt}X(t) &= F(t)X_{in}(t) - F(t)X(t) + \mu(t)X(t)V(t) - K_dX(t)V(t) \end{aligned}$$

donde $X_{in}(t)$ es la concentración de biomasa de entrada y K_d es la tasa de muerte de la biomasa.

Dividiendo por $V(t)$ a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$\frac{d}{dt}X(t) = \mu(t)X(t) + \frac{F(t)}{V(t)}(X_{in}(t) - X(t)) - K_dX(t).$$

2.9.3 Balance para la biomasa muerta

La razón de cambio se expresa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de cambio de} \\ \text{la biomasa muerta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Biomasa muerta} \\ \text{de entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Biomasa muerta} \\ \text{de salida} \end{array} \right\} \\ + \left\{ \begin{array}{l} \text{Muerte} \\ \text{de la biomasa viva} \end{array} \right\}$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \{X_{nv}(t)V(t)\} &= X_{nv}(t)\frac{d}{dt}V(t) + V(t)\frac{d}{dt}X_{nv}(t) \\ V(t)\frac{d}{dt}X_{nv}(t) &= F(t)X_{nv}^{in}(t) - F(t)X_{nv}(t) + K_dX(t)V(t)\end{aligned}$$

donde $X_{nv}^{in}(t)$ es la concentración de biomasa muerta de entrada. Dividiendo por $V(t)$ a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$\frac{d}{dt}X_{nv}(t) = K_dX(t) + \frac{F(t)}{V(t)}(X_{nv}^{in}(t) - X_{nv}(t)).$$

2.9.4 Balance para el oxígeno disuelto

El balance para el oxígeno disuelto es de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de cambio del} \\ \text{oxígeno disuelto} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Oxígeno disuelto} \\ \text{de entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Oxígeno disuelto} \\ \text{de salida} \end{array} \right\} \\ &- \left\{ \begin{array}{l} \text{Pérdida de oxígeno disuelto} \\ \text{por el crecimiento de la biomasa} \end{array} \right\} \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} \text{Transferencia de} \\ \text{saturación de oxígeno} \end{array} \right\} \\ &- \left\{ \begin{array}{l} \text{Transferencia de} \\ \text{oxígeno disuelto} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Respiración} \\ \text{endógena} \end{array} \right\}\end{aligned}$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \{O(t)V(t)\} &= O(t)\frac{d}{dt}V(t) + V(t)\frac{d}{dt}O(t) \\ V(t)\frac{d}{dt}O(t) &= F(t)O_{in}(t) - F(t)O(t) - \frac{\mu(t)X(t)}{Y_{x/o}}V(t) \\ &+ K_laV(t)O_{sat}(t) - K_laV(t)O(t) - rV(t)X(t)\end{aligned}$$

donde $O_{in}(t)$ es la concentración de oxígeno disuelto de entrada, $Y_{x/o}$ es el coeficiente de conversión

biomasa/oxígeno, $K_{l,a}$ es el coeficiente de transferencia de oxígeno, $O_{sat}(t)$ es la concentración de saturación de oxígeno y r es la tasa de respiración endógena. Dividiendo por $V(t)$ a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$\frac{d}{dt}O(t) = - \left(\frac{\mu(t)}{Y_{x/o}} + r \right) X(t) + \frac{F(t)}{V(t)} (O_{in}(t) - O(t)) + K_{l,a} (O_{sat}(t) - O(t)).$$

2.10 Conclusiones

En este capítulo se presentaron los principales métodos de fermentación que determinan la operación del reactor biológico, así como también, las condiciones necesarias para el crecimiento de los microorganismos que intervienen en la fermentación.

También se presentaron algunos de los principales modelos de crecimiento microbiano. Éste parámetro determina la dinámica del proceso, y no existe un modelo general que pueda ser aplicado a cualquier proceso de fermentación. En el siguiente capítulo se tratará este problema diseñando un observador no lineal que permite estimar el crecimiento de biomasa (bajo ciertas hipótesis), sin establecer ningún modelo de la tasa de crecimiento específica (con respecto al observador).

Además se presentaron las ecuaciones dinámicas de las variables que intervienen en la fermentación, a partir de un balance de la materia en el reactor biológico. El modelo a utilizar en los siguientes capítulos es:

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu(t)X - \frac{FX}{V} \\ \dot{S} = -\frac{\mu(t)X}{Y_x} + \frac{F(S_{in}-S)}{V} \\ \dot{O} = -\left(\frac{\mu(t)}{Y_{x/o}} + r\right)X + \frac{F(O_{in}-O)}{V} + K_{l,a}(O_{sat} - O) \\ \dot{V} = F \end{cases}$$

donde $\mu(t)$ puede estar descrita por la ley de crecimiento de Monod o Haldane y se desprecia la dinámica de muerte de biomasa.

Para poder controlar el desempeño del proceso de fermentación normalmente se requiere de la medición de las principales variables y parámetros que intervienen en la fermentación, esto no siempre es posible, puesto que hay diversos factores que no lo permiten, tales como:

- La falta de sensores.
- La falta de sensores con mediciones correctas.
- El costo de los sensores.

Para tratar este problema, en el siguiente capítulo se presentan técnicas de observación (además de las condiciones necesarias para construir un observador), las cuales son una buena opción para solucionar este problema.

Capítulo 3

Observabilidad y observadores

3.1 Introducción

Generalmente un proceso de fermentación es controlado para que trabaje en condiciones óptimas. En general la implementación de las leyes de control requieren del conocimiento instantáneo de todas o parte de las componentes del vector de estado (en el caso del proceso de fermentación las variables de estados son las concentraciones de biomasa, substrato y oxígeno disuelto). Es posible realizar la medición de los estados por medio de sensores; sin embargo, en muchos de los casos estos sensores no son confiables, son muy costosos o no existen, y una manera de solucionar este problema es utilizar técnicas de observación.

Las técnicas de observación generalmente son sistemas dinámicos que permiten estimar los componentes del vector de estado original a partir de variables medibles como las entradas (acciones de control) y salidas del sistema.

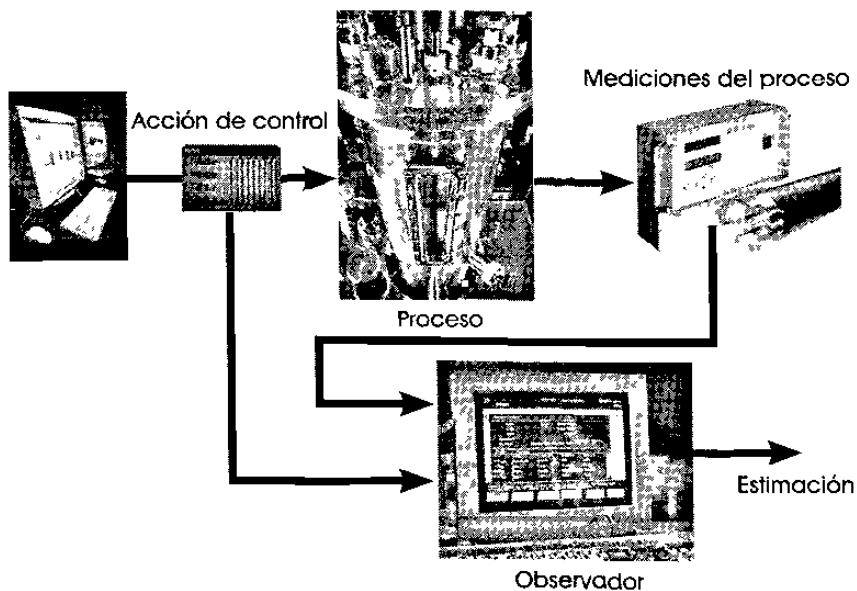


Fig. 3.1. Técnica de observación.

En este capítulo se analizan las propiedades de observabilidad de un sistema, y a partir de

ésta diseñar un observador que permite estimar las variables no medibles del sistema. Para ello se introducen algunos conceptos y definiciones que justifican la estimación de un sistema (para sistemas lineales y no lineales). Además, se presenta un estudio sobre el diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales y el observador utilizado en este trabajo. Posteriormente, se diseña un observador de alta ganancia para un proceso de fermentación considerando que el sistema tiene una particular clase de incertidumbre (no tomar en cuenta la ley de crecimiento).

3.2 Observabilidad

A continuación se exponen algunas definiciones de observabilidad presentadas en [1], [8], [12], [16] y [19].

3.2.1 Observabilidad de sistemas lineales

3.2.1.1 Caso invariante en el tiempo

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

donde A , B , C y D son matrices constantes de dimensión $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ y $q \times p$, respectivamente.

Definición 3.1 *El sistema (3.1) se dice ser observable si para cualquier estado inicial desconocido $x(0)$, existe un tiempo finito $t_1 > 0$ tal que el conocimiento de la entrada u y la salida y sobre el intervalo $[0, t_1]$ es suficiente para determinar únicamente el estado $x(0)$. De lo contrario, el sistema es no observable.*

Teorema 3.1 *El sistema (3.1) es observable si y sólo si, se cumplen las siguientes afirmaciones equivalentes.*

1. La matriz $n \times n$

$$W_0(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

es no singular para cualquier $t > 0$.

2. La matriz de observabilidad $nq \times n$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

tiene rango n (rango completo).

3. La matriz $(n + q) \times n$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

tiene rango completo en cada eigenvalor λ de A .

4. Si además, todos los eigenvalores de A tienen parte real negativa, entonces la solución única de

$$A^T W_0 + W_0 A = -C^T C$$

es positiva definida. La solución es llamado el Gramiano de observabilidad y puede ser expresado como

$$W_0 = \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

3.2.1.2 Caso variante en el tiempo

Considere el sistema lineal variante en el tiempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son matrices de dimensión $n \times n$, $n \times p$ y $q \times n$, respectivamente, cuyos elementos son funciones continuas en t definidas sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Definición 3.2 El sistema (3.3) es observable en t_0 si existe un tiempo finito t_1 tal que para cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0$, el conocimiento de la entrada u y la salida y sobre el intervalo $[t_0, t_1]$ es suficiente para determinar de manera única el estado inicial x_0 . De lo contrario, el sistema es no observable en t_0 .

Teorema 3.2 El par $(A(t), C(t))$ es observable en el tiempo t_0 si y sólo si, existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que la matriz $n \times n$

$$W_0(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$$

donde $\Phi(t, \tau)$ que es la matriz de transición de estado de $\dot{x} = A(t)x$, es no singular.

Teorema 3.3 Sean $A(t)$ y $C(t)$, $n - 1$ veces continuamente diferenciables. Entonces el par n -dimensional $(A(t), C(t))$ es observable en t_0 si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n$$

donde

$$N_{m+1}(t) = N_m(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_m(t) \quad m = 0, 1, \dots, n - 1$$

con

$$N_0 = C(t).$$

Definición 3.3 (Observabilidad uniforme completa) El sistema (3.3) se dice ser completamente uniformemente observable si existe $t_1 > 0$, $\alpha > 0$ y $t_0 > 0$ tal que, para todo $t \geq t_0$ tenemos:

$$W_0(t, t + t_1) = \int_t^{t+t_1} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \geq \alpha I$$

donde I es la matriz identidad.

3.2.2 Observabilidad de sistemas no lineales

Sea D_x y D_u dos dominios. Considere el sistema MIMO² descrito en coordenadas locales por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)), \quad x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $x \in D_x \subseteq \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$ y $u(t) \in D_u \subseteq \mathbb{R}^m$.

Dado el control $u(t)$, sea φ_u el correspondiente flujo:

$$x(t) = \varphi_u(t)x_0.$$

Definición 3.4 *Dos estados iniciales x_0, x_1 son indistinguibles si las correspondientes trayectorias siempre producen la misma salida sin importar que control se utilice. De lo contrario los estados son distinguibles.*

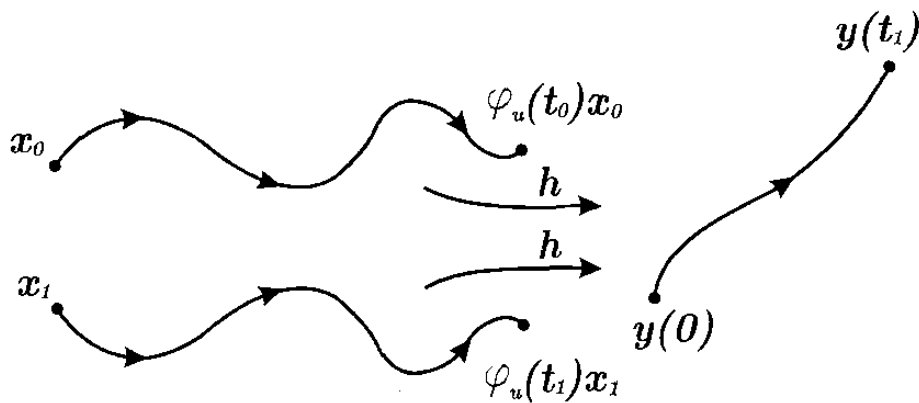


Fig. 3.2. Dos estados iniciales x_0, x_1 indistinguibles.

Definición 3.5 *El sistema (3.4) es observable si cada estado inicial es distinguible de otro estado inicial.*

Definición 3.6 *El sistema (3.4) es globalmente observable si todas las condiciones iniciales x_0 pueden ser determinadas únicamente por la salida $y(t)$ y la entrada $u(t)$ en todo el dominio $x_0 \in D_x, \forall u \in D_u$.*

² Sistema multientrada multisalida

Definición 3.7 *El sistema (3.4) es localmente observable en un punto x_p si todas las condiciones iniciales x_0 en una vecindad $\|x_0 - x_p\| < \rho$ de x_p pueden ser determinadas únicamente por la salida $y(t)$ y la entrada $u(t)$; el sistema es localmente observable si esta propiedad es válida $\forall x_p \in D_x, \forall u \in D_u$.*

Definición 3.8 *El sistema (3.4) es observable en un punto de equilibrio x_s si todas las condiciones iniciales x_0 pueden ser determinadas únicamente por la salida $y(t)$ y la entrada $u(t)$ en una vecindad $\|x_0 - x_s\| < \epsilon_x, \|u - u_s\| < \epsilon_u$ de un punto estacionario x_s, u_s i.e. $f(x_s, u_s) = 0$.*

Considere el sistema no lineal de una sola salida

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathbb{R}^m, f$ y g son campos vectoriales suaves con $g(x(t), 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, y $h(x(t))$ es una función suave con $h(0) = 0$. A continuación la condición de observabilidad para sistemas lineales se generaliza a sistemas no lineales.

Definición 3.9 *El sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (3.6)$$

se dice ser localmente observable en una vecindad del origen U_0 , si

$$\text{rango} \{dh, \dots, d(L_f^{n-1}h)\} = n, \forall x \in U_0. \quad (3.7)$$

Si ³(3.7) se cumple para todo $x \in \mathbb{R}^n$ el sistema se dice observable.

Nota 3.1 *La condición (3.7) es la prueba generalizada de la observabilidad de Kalman (3.2) a sistemas no lineales.*

³ Ver apéndice B.

3.2.3 Sistemas uniformemente observables

Los sistemas uniformemente observables están relacionados con el concepto de entrada universal, la cual nos permite definirlos.

El hecho de que un sistema sea observable en el sentido de que cada estado inicial es distinguible de otro estado inicial, sólo nos da una condición necesaria, pero no suficiente para diseñar un observador.

Mas aún, algunas entradas no permiten distinguir todos los pares de estados iniciales, y por lo tanto hacen al sistema no observable.

Considere el sistema no lineal (3.4) donde la entrada u genera un sistema homogéneo⁴ variante en el tiempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}(x(t), t) \\ y(t) = \bar{h}(x(t)) \end{cases} \quad (3.8)$$

con $\bar{f}(x(t), t) = f(x(t), u(t))$.

Definición 3.10 (*Entrada universal*) Una función de entrada u se dice ser universal para el sistema (3.4) en el intervalo de tiempo $[0, t]$ si cualquier par de estados iniciales $\{x_0, x_1\}$ pueden ser distinguidos por medio de las salidas en el intervalo de $[0, t]$, al ser excitado el sistema por la entrada u .

Definición 3.11 (*Entrada singular*) Las entradas singulares, son aquellas funciones de entrada que hacen indistinguibles algún par de estados (por lo que hacen al sistema no observable).

De la definición de entrada universal se tiene que:

- El sistema homogéneo (3.8) generado por una entrada universal u es observable.
- Si $0 < t_1 < t_2$, entonces una entrada que es universal en $[0, t_1]$ es también universal en $[0, t_2]$.

En general existen entradas singulares las cuales hacen al sistema (3.8) no observable.

⁴ Sistemas con dinámica no forzada.

Definición 3.12 (Sistemas uniformemente observables) *Un sistema donde todas sus entradas son universales se dice ser uniformemente observable (observable para cualquier entrada).*

Si para cualquier $t > 0$, todas las entradas son universales en el intervalo $[0, t]$, el sistema se dice ser localmente uniformemente observable.

Los sistemas lineales observables son uniformemente observables, ya que si consideramos dos estados iniciales diferentes, la cantidad:

$$y'(t) - y(t) = C \left(x'(t) - x(t) \right) = C e^{At} \left(x'_0 - x_0 \right)$$

no depende de la entrada.

Considere el sistema afín en el control

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (3.9)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 3.4 *El sistema afín en el control (3.9) es localmente uniformemente observable si y sólo si, existe un sistema de coordenadas locales en \mathbb{R}^n tal que el sistema (3.9) puede ser expresado de la forma:*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \Psi(z(t)) + \bar{g}(z(t))u(t) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases}$$

(conocida como la forma normal) donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}; \Psi(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Psi_n(z) \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

y

$$\bar{g}(z(t)) = \begin{bmatrix} \bar{g}_1(z_1) \\ \bar{g}_2(z_1, z_2) \\ \vdots \\ \bar{g}_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) \\ \bar{g}_n(z) \end{bmatrix}.$$

3.3 Observadores

El principal objetivo de un observador es dar la estimación de los estados del sistema a partir del conocimiento de las entradas y salidas del sistema. Puesto que la estimación generalmente, debe ser instantánea, el observador en general es un sistema dinámico (ver [8] y [12]).

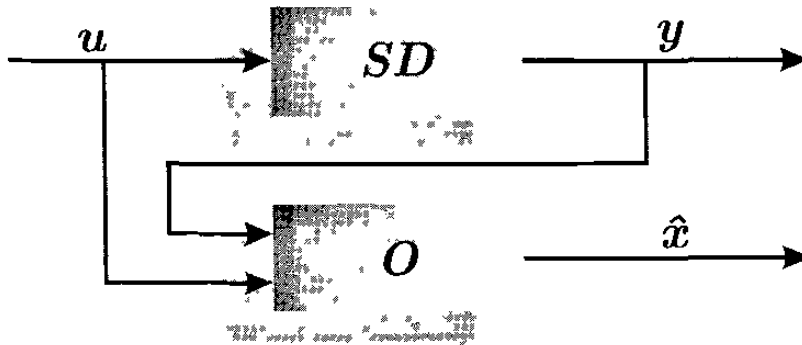


Fig. 3.3. Diagrama de bloques de un observador.

Definición 3.13 Se llama observador (o reconstructor de estados) de un sistema dinámico:

$$SD : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}$$

a un sistema dinámico auxiliar O cuyas entradas son los vectores de entradas y salidas del sistema a ser observado, y cuyo vector de salida $\hat{x}(t)$ es el estimado del estado:

$$O : \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases}$$

tal que $\|e(t)\| = \|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

3.3.1 Observación de sistemas lineales invariantes en el tiempo

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.10)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ y las matrices A , B y C son de dimensiones apropiadas. El observador para el sistema (3.10) tiene la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}).$$

Sea $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ el error de observación, cuya dinámica está dada por:

$$\dot{e} = (A - KC)e.$$

Si el sistema (3.10) es observable, entonces la matriz de ganancia K es elegida tal que los valores propios de la matriz $(A - KC)$ tengan parte real negativa, lo cual implica que $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

3.3.2 Observación de sistemas lineales variantes en el tiempo

Para la estimación de los sistemas dinámicos lineales afectados por ruidos se utiliza el filtro de Kalman. En el caso de sistemas lineales variantes en el tiempo, se puede utilizar una versión determinística del filtro de Kalman.

Considere el sistema lineal variante en el tiempo. Suponiendo que es completamente uniformemente observable (ver definición 3.3):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $b(t) = B(t)u(t)$ y las matrices $A(t)$ y $C(t)$ se suponen acotadas.

Teorema 3.5 *Considere el sistema completamente uniformemente observable (3.11):*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) - S^{-1}(t)C^T(t)Q(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) + b(t) \\ \dot{S}(t) = -\theta S(t) - A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + C^T(t)QC(t) - S(t)RS(t) \\ S(0) = S_0 \text{ (} S_0 \text{ definida positiva)} \end{cases} \quad (3.12)$$

si una de las siguientes condiciones se satisface:

1. El par $(A(t), R(t))$ es completamente uniformemente controlable,
2. $\theta > 0$,

entonces el sistema (3.12) es un observador para el sistema (3.11), cuya norma del error de estimación es acotada por una función exponencial decreciente. Mas aún, la selección de θ permite lograr una velocidad de decrecimiento arbitraria (véase [12]).

Nota 3.2 *La propiedad de controlabilidad uniforme completa es dual a la de observabilidad uniforme completa.*

3.3.3 Observación de sistemas no lineales

Existen diferentes técnicas en el diseño de observadores para sistemas no lineales, las cuales se pueden aplicar a diferentes clases de sistemas no lineales (como sistemas de la forma (3.4), (3.9)) con ciertas condiciones que deben satisfacer.

Entre las técnicas mas empleadas se encuentran las siguientes:

Observadores lineales:[18]

En esta técnica se linealiza el sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio, se verifica que sea observable y diseña un observador lineal.

La convergencia de estos observadores se garantiza sólo localmente alrededor del punto de equilibrio.

Filtro extendido de Kalman:[13]

Se basa en la linealización de Taylor alrededor de trayectorias. El término de corrección del observador es una ganancia variante en el tiempo, la cual es calculada mediante un algoritmo de optimización.

La estructura del filtro extendido de Kalman es la siguiente:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, u) + K(t) [y - h(\hat{x})]$$

con

$$K(t) = P(t)H^T(\hat{x})R^{-1}$$

$$\dot{P}(t) = F(\hat{x}, u)P(t) + P(t)F^T(\hat{x}, u) + Q - P(t)H^T(\hat{x})R^{-1}H(\hat{x})P(t)$$

donde $F(\hat{x}, u) = \left. \frac{\partial(f(x,u))}{\partial x} \right|_{\hat{x}}$, $H(\hat{x}) = \left. \frac{\partial(h(x))}{\partial x} \right|_{\hat{x}}$ y las matrices Q y R son parámetros de diseño.

Generalmente la ganancia del observador $K(t)$ es calculada con algoritmos muy complejos y el observador no garantiza buena convergencia ni estabilidad debido a que es necesario que las condiciones iniciales del observador sean muy cercanas a las del sistema original y que la linealización del sistema debe ser observable alrededor de cualquier trayectoria.

Observadores de la forma normal:[12]

Esta técnica consiste en transformar al sistema no lineal en uno lineal mediante un cambio de coordenadas (véase apéndice B) o inyección de salida⁵. El diseño del observador es una tarea fácil después de realizar la transformación.

Para poder realizar este procedimiento el sistema no debe tener entradas singulares.

Observadores de modos deslizantes:[30]

Es una técnica basada en el de diseño de Lyapunov que puede ser utilizada para ciertas clases de sistemas que presentan entradas singulares. El observador de modos deslizantes es exponencialmente estable e independiente de la entrada, si algunas condiciones (generalmente restrictivas y que no satisfacen el sistema dinámico del proceso de fermentación) se satisfacen.

Los observadores de alta ganancia son otra técnica muy empleada debido a que su diseño es fácil y efectivo de realizar. A continuación se presenta un análisis detallado de esta técnica.

⁵ Consiste en transformar el sistema no lineal (3.4) por medio de un cambio de coordenadas, en un sistema lineal observable con un término que depende de la salida del sistema.

3.3.3.1 Observadores de alta ganancia

Los observadores de alta ganancia han sido empleados para ciertas clases de sistemas no lineales, en donde la principal característica es que el sistema se descompone en una parte lineal o afín en el estado y una parte no lineal, realizando la síntesis del observador en base a la parte lineal.

Considere el sistema afín en el control

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (3.13)$$

donde $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^p$ y $u \in \mathcal{U}$. En donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio físico y $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ es el conjunto de entradas admisibles.

El primer paso es escribir al sistema (3.13) en la forma normal. Suponga que el sistema (3.13) es observable y que $u = 0$ es una entrada universal. La matriz del Jacobiano de $\{h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{n-1} h_1\}$ con respecto a x , tiene rango n casi en todas partes en \mathbb{R}^n . En una vecindad de un punto regular (esto significa que para cualquier punto de la vecindad el cambio de coordenadas siempre tiene la misma dimensión) podemos seleccionar un subconjunto de rango completo:

$$\{\xi_1, \dots, \xi_n\} = \{h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{n_1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{n_p} h_p, \dots\}$$

De modo que el sistema (3.13) pueda ser escrito localmente como:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \Psi(z, u) \\ y = Cz \end{cases} \quad (3.14)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & A_p \end{bmatrix}, A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_p \end{bmatrix}, C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi(z, u) = \begin{bmatrix} \Psi_1(z, u) \\ \vdots \\ \Psi_p(z, u) \end{bmatrix}, \Psi_k(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \check{\Psi}_k(z, u) \end{bmatrix}.$$

La dimensión de cada bloque k es η_k , $k = 1, \dots, p$, con $\sum_{k=1}^p \eta_k = n$, y $\lambda_1 = 1$, $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \eta_{k-1}$, $k = 2, \dots, p$.

Con las siguientes suposiciones:

- (i) Las funciones ξ forman un difeomorfismo de Ω en $\xi(\Omega)$,
- (ii) ξ y Ψ se pueden extender de Ω a \mathbb{R}^n a través de funciones C^∞ ,
- (iii) El sistema (3.14) tiene funciones de entrada admisibles (medibles y acotadas) cuyos valores pertenecen a \mathcal{U} .

Teorema 3.6 (sistemas de una sola salida) *Considere el sistema (3.14) con $p = 1$, en el cual:*

1) *La función Ψ es globalmente Lipschitz con respecto a z y uniformemente con respecto a u .*

Sea K una matriz de $n \times 1$ tal que la matriz $(A - KC)$ tiene sus valores característicos con parte real negativa, y $\Lambda(\theta) = \text{diag} [\theta, \theta^2, \dots, \theta^n]$.

Suponga que:

2) $\frac{\partial \Psi_i}{\partial z_j} = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, $j = i+1, \dots, n$.

Entonces el sistema (3.14) es localmente uniformemente observable y existe un θ_0 tal que, para cualquier θ que verifique $0 < \theta \leq \theta_0$, el sistema:

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \Psi(\hat{z}, u) + \Lambda^{-1}(\theta)K(y - C\hat{z})$$

es un observador para el sistema (3.14). Mas aún, la norma del error de observación es acotada por una función exponencial cuya velocidad de decrecimiento puede ser escogida arbitrariamente

grande.

Prueba: Véase [12].

Teorema 3.7 (sistemas multisalidas) considere el sistema (3.14) en el cual:

1) La función Ψ es globalmente Lipschitz con respecto a z y uniformemente con respecto a u .

Sea $K = \text{diag} [K_1, \dots, K_p]$ una matriz de dimensión adecuada, tal que, para cada bloque k , la matriz $(A_k - K_k C_k)$ tiene sus valores característicos con parte real negativa.

Suponga que existen dos conjuntos de enteros $\sigma = \{\sigma_1 \dots \sigma_n\}$ y $\delta = \{\delta_1 \dots \delta_p\}$, con $\delta_i > 0$, ; $i = 1 \dots p$, tal que:

2) $\sigma_{\lambda_k+l} = \sigma_{\lambda_k+l-1} + \delta_k$, $k = 1 \dots p$, $l = 1 \dots \eta_k - 1$,

3) $\frac{\partial \Psi_i}{\partial z_j} \neq 0 \Rightarrow \sigma_i \geq \sigma_j$, $i = 1 \dots n$, $j \neq \lambda_k$, $k = 1 \dots p$.

Entonces el sistema (3.14) es localmente uniformemente observable, y existe un $\theta_0 > 0$ tal que, para cualquier θ , $0 < \theta \leq \theta_0$, el sistema:

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \Psi(\hat{z}, u) + \Lambda^{-1}(\theta, \delta)K(y - C\hat{z})$$

con

$$\dot{\hat{z}}_{\lambda_k} = y_k$$

$$\dot{\hat{z}}_j = \hat{z}_j, j \neq \lambda_k,$$

$$\Lambda(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} \theta^{\delta_1} \Delta(\theta^{\delta_1}) & & & \\ & \dots & & \\ & & \theta^{\delta_p} \Delta(\theta^{\delta_p}) & \\ & & & \dots \end{bmatrix}, \Delta(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \theta & & \\ & & \dots & \\ & & & \theta^{\eta_k-1} \end{bmatrix}$$

es un observador para el sistema (3.14). Mas aún, la norma del error de observación es acotada por una función exponencial, cuya velocidad de decrecimiento puede ser escogida arbitrariamente grande.

Prueba: Véase [12].

3.4 Observador de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales

Las ecuaciones dinámicas que representan a los sistemas físicos presentan cierta estructura, de la cual puede depender la técnica de observación a utilizar. En particular algunos modelos no lineales de procesos físicos presentan la forma canónica observable para diseñar el observador de alta ganancia [3].

Considere el sistema de una sola salida

$$\begin{cases} \dot{x} = F(s, x)x + G(u, s, x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.15)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$ y $s(t)$ es una señal conocida.

$$F(s, x) = \begin{bmatrix} 0 & f_1(s, x_1) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & f_{n-1}(s, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde las funciones f_i son de clase C^1 con respecto a sus argumentos, $C = [1, 0, \dots, 0]$ y

$$G(u, s, x) = \begin{bmatrix} g_1(u, s, x_1) \\ g_2(u, s, x_1, x_2) \\ \dots \\ g_{n-1}(u, s, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ g_n(u, s, x) \end{bmatrix}.$$

Con las siguientes suposiciones:

A1) Existe un subconjunto $\mathcal{U} \subset L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ y dos conjuntos compactos $K_1 \subset K_2$ tal que para toda trayectoria de $x(t)$ asociada a cualquier $u \in \mathcal{U}$ y que procede de K_1 permanece en K_2 .

A2) $s(t)$ es una señal acotada conocida de clase C^1 y $\dot{s}(t)$ también es acotada.

A3) $\exists \alpha > 0; \forall u \in \mathbb{R}^m; \forall x \in \mathbb{R}^n; \forall t \geq 0 : |f_i(s, x)| \geq \alpha$ para $i = 1, \dots, n-1$.

A4) $\exists \beta > 0, \exists \gamma > 0; \forall u \in \mathbb{R}^m; \forall x \in \mathbb{R}^n; \forall t \geq 0 : \left\| \frac{\partial f_i(s, x)}{\partial x} \right\| \leq \beta; \left\| \frac{\partial g_i(u, s, x)}{\partial x} \right\| \leq \gamma$ para

$$+\Delta_{\theta}\Lambda(s, \hat{x})(G(u, s, \hat{x}) - G(u, s, x)) + \dot{\Lambda}(s, \hat{x})\Lambda^{-1}(s, \hat{x})\bar{e}$$

puesto que $F(s, \hat{x}) = \Lambda^{-1}(s, \hat{x})A\Lambda(s, \hat{x})$ y $S_{\theta} = \frac{1}{\theta}\Delta_{\theta}S_1\Delta_{\theta}$ donde $S_1 = S_{\theta}|_{\theta=1}$.

Considere la función : $V(\bar{e}) = \bar{e}^T S_1 \bar{e}$, y tomando la derivada con respecto al tiempo, se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq & -\theta V + 2\eta \|S_1 \bar{e}\| \|\Delta_{\theta}(F(s, \hat{x}) - F(s, x))x\| \\ & + 2\eta \|S_1 \bar{e}\| \|\Delta_{\theta}(G(u, s, \hat{x}) - G(u, s, x))\| + 2\eta' \|S_1 \bar{e}\| \|\bar{e}\|\end{aligned}$$

para algunas constantes positivas η y η' .

Ahora suponga que $\theta \geq 1$. Entonces, suponiendo se cumple (A4), es decir el estado acotado y la estructura triangular de G y los f_i , obtenemos:

$$\begin{aligned}\|\Delta_{\theta}(G(u, s, \hat{x}) - G(u, s, x))\| & \leq \gamma_1 \|\Delta_{\theta}\bar{e}\| \\ \|\Delta_{\theta}(F(s, \hat{x}) - F(s, x))x\| & \leq \gamma_2 \|\Delta_{\theta}\bar{e}\|\end{aligned}$$

para algunas constantes positivas γ_1 y γ_2 .

Por lo tanto, $\exists \rho > 0$ tal que $\dot{V} \leq -\theta V + \rho \|S_1 \bar{e}\| \|\bar{e}\|$.

Por consiguiente, $\dot{V} \leq -\theta V + \rho \sigma V = -(\theta - \rho \sigma) V$ donde σ es un número condicionado por S_1 . Escogiendo $\theta > \rho \sigma$, esto completa la prueba del teorema. ■

Nota 3.3 *El observador anterior también puede trabajar cuando el sistema (3.15) tiene una clase de incertidumbre de modelo particular. Considere el sistema (3.15) con una incertidumbre aditiva $\Phi(t)$:*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(s, x)x + G(u, s, x) + \Phi(t) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.17)$$

donde $\Phi(t) = [0, \dots, 0, \phi(t)]^T$ con la función $\phi(t)$ acotada desconocida.

Utilizando las mismas suposiciones tenemos que el sistema (3.16) es un observador asintótico para el sistema (3.17) y la cota superior del error de estimación es:

$$\|e(t)\| \leq c_1 \theta^{n-1} \exp[-(\theta - \rho\sigma)/2] \|e(0)\| + \frac{c_2}{\theta - \rho\sigma} |\phi|$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas. Entonces, el segundo término de la desigualdad puede ser tan pequeño como queramos escogiendo θ suficientemente grande.

Cabe señalar que utilizando valores muy grandes de θ , el observador se puede hacer sensible ante perturbaciones en la salida.

3.5 Estimación de la concentración de crecimiento de biomasa

Una de las principales desventajas en la estimación de los procesos de fermentación aeróbicos es la falta de un modelo general de la tasa de crecimiento específica. Esto implica que el diseño del observador se podría modificar para cada proceso de fermentación (dependiendo del modelo de la tasa de crecimiento específica utilizado).

En esta sección se aplica el observador de la sección 3.3 cuando no se conoce el modelo de la tasa de crecimiento específica (con respecto al diseño del observador) y utilizando la ecuación dinámica del oxígeno disuelto (bajo ciertas condiciones) es posible estimar la concentración de crecimiento de biomasa que relaciona la concentración de biomasa con la tasa de crecimiento específica.

Considere la dinámica del oxígeno disuelto

$$\begin{cases} \dot{O} = -\frac{\varphi}{Y_{x/o}} + D(O_{in} - O) + K_L a(O_{sat} - O) \end{cases} \quad (3.18)$$

donde $\varphi = \mu X$, es la concentración de crecimiento de biomasa.

Considere las siguientes suposiciones:

- S1)** Es posible medir O .
- S2)** Es despreciable la tasa de respiración endógena r .
- S3)** No se conoce un modelo de $\varphi(t)$.
- S4)** φ y $\dot{\varphi}$, son funciones acotadas desconocidas.

El observador para (3.18) está dado por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{O}} = -\frac{\hat{\varphi}}{Y_{x/o}} + D(O_{in} - \hat{O}) + K_{la}(O_{sat} - \hat{O}) - 2\theta(\hat{O} - O) \\ \dot{\hat{\varphi}} = \theta^2 Y_{x/o}(\hat{O} - O) \end{cases} \quad (3.19)$$

Resultados de simulación

Las simulaciones fueron llevadas a cabo suponiendo la ley de crecimiento de Monod, con los siguientes valores numéricos: $Y_x = 0.05$, $Y_{x/o} = 1$, $O_{in} = 0 \text{ mg/l}$, $K_{la} = 2 \text{ hrs}^{-1}$, $O_{sat} = 1 \text{ mg/l}$, $S_{in} = 8 \text{ mg/l}$, $K_s = 4 \text{ mg/l}$, $\mu_{max} = 0.3 \text{ hrs}^{-1}$. La tasa de dilución se muestra en la figura 3.4, la cual es una señal que varía de 0.1 a 0.2 hrs^{-1} . Las condiciones iniciales fueron: Para el sistema: $O(0) = 1 \text{ mg/l}$, $X(0) = 0.5 \text{ mg/l}$, $S(0) = 10 \text{ mg/l}$. Para el observador: $\hat{O}(0) = 0.8 \text{ mg/l}$, $\hat{\varphi}(0) = 0 \text{ mg}/(\text{l} \cdot \text{hrs})$. El valor del parámetro $\theta = 20$. Los resultados de la simulación son mostrados en las figuras 3.5 y 3.6. Puede observarse que los estados del observador (líneas punteadas) convergen rápidamente a los estados del sistema (líneas sólidas). Además, la rapidez de convergencia depende de la diferencia de condiciones iniciales entre el observador y el sistema original (puesto que esta diferencia afecta el comportamiento del observador).

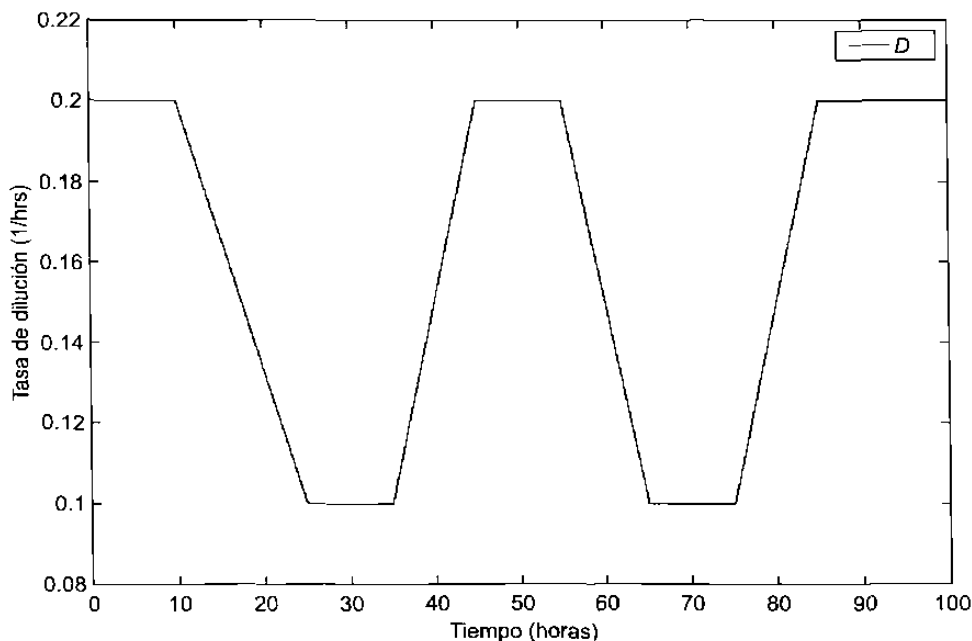


Fig. 3.4. Tasa de dilución.

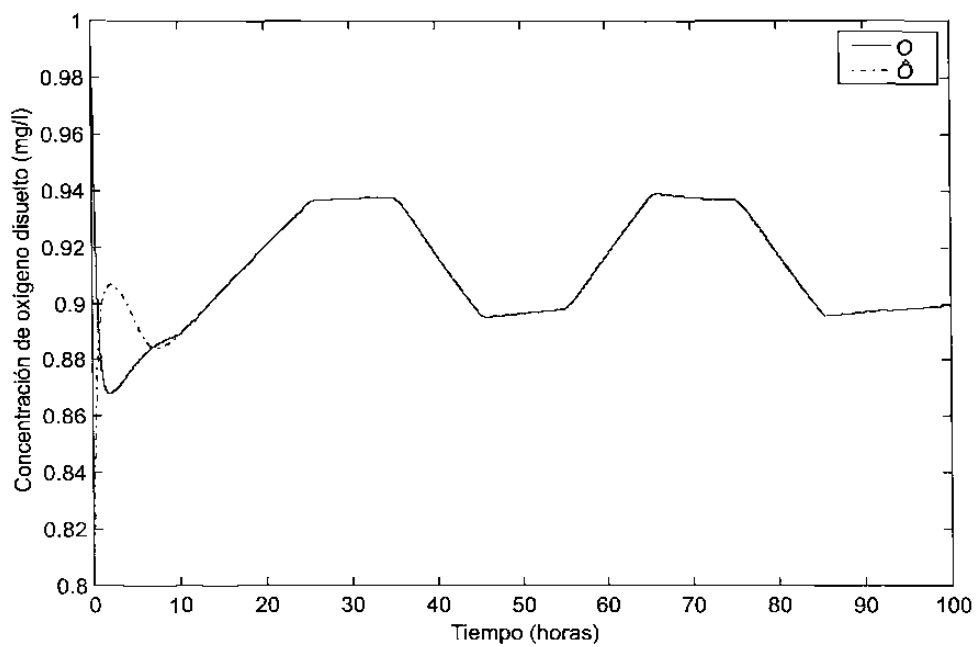


Fig. 3.5. Concentración de oxígeno disuelto.

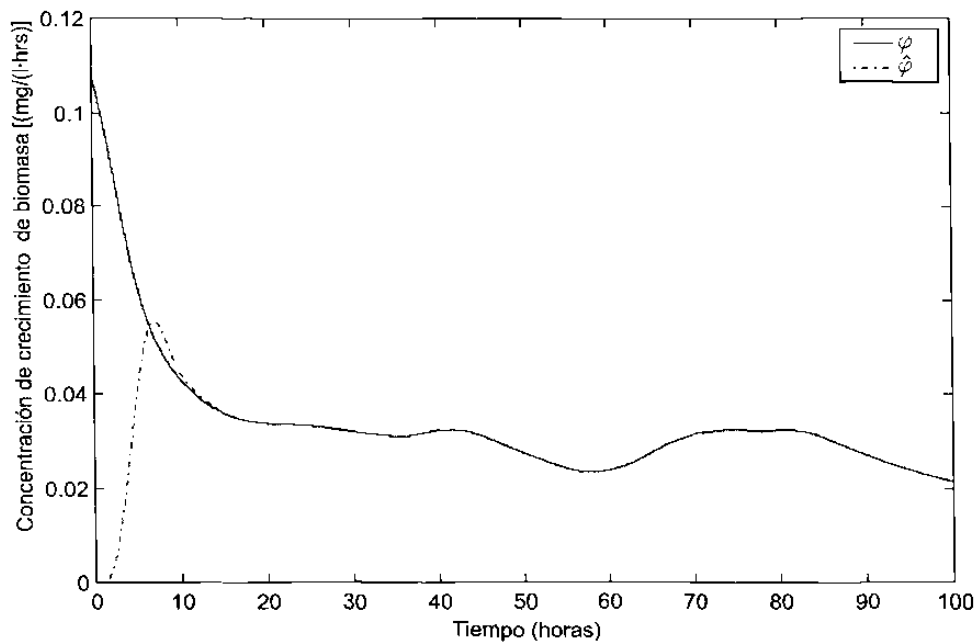


Fig. 3.6. Concentración de crecimiento de biomasa.

3.6 Conclusiones

En este capítulo se presentaron algunos conceptos y definiciones sobre observabilidad de sistemas. Además, las técnicas de diseño de observadores para diferentes tipos de sistemas.

Un observador de alta ganancia fue diseñado para un proceso de fermentación sin considerar un modelo para la tasa de crecimiento específica. Este parámetro es uno de los más importantes, ya que determina la dinámica de los estados del proceso. Despreciando la tasa de respiración endógena, se estimó la concentración de crecimiento de biomasa. El observador presentó un buen desempeño ante la incertidumbre del modelo, pero si la contribución de tasa de respiración endógena en la dinámica de la concentración de oxígeno disuelto es considerable, los estados del observador podrían divergir de los estados del sistema.

Debido a esta desventaja y de que muchos de los procesos de fermentación tienen relativamente definido el modelo de la tasa de crecimiento específica, en el siguiente capítulo se diseñan observadores que permiten estimar los estados del proceso considerando dos de los principales modelos de la tasa de crecimiento específica.

Capítulo 4

Estimación para un proceso de fermentación aeróbica

4.1 Introducción

Los procesos de fermentación generalmente son controlados por métodos que no requieren de la medición de los estados del sistema (las concentraciones de biomasa y sustrato). Sin embargo, normalmente no son muy eficientes o no se logran los resultados deseados (como aumentar el consumo de sustratos y la obtención del producto). Se han desarrollado técnicas de control que permiten mejorar el funcionamiento del reactor biológico pero necesitan de la medición de los estados del sistema (véase, por ejemplo [25], [26], [6]).

Una forma de solucionar estos problemas es utilizando técnicas de observación no lineal, las cuales permiten estimar las variables con sólo el conocimiento de las entradas y salidas del sistema.

En este capítulo se presenta una solución para estimar los estados del proceso, en particular cuando es conocido el modelo de crecimiento microbiano (para dos tipos de leyes de crecimiento) se diseña un observador con la medición de la concentración de oxígeno disuelto. Además, un observador es diseñado cuando en el proceso están presentes perturbaciones que afectan la dinámica del sistema.

4.2 Análisis de observabilidad

En general es difícil llevar a cabo la medición de las variables que intervienen en un proceso de fermentación. Normalmente, el sondeo de las variables se realiza fuera de línea. Sin embargo, estas mediciones no son útiles para propósitos de control.

Diseñando un observador es posible estimar los estados del proceso de fermentación, aunque no es tan sencillo debido a que el modelo dinámico es no lineal.

La construcción de un observador de estados para un sistema no lineal depende de que se cumplan

ciertas propiedades de observabilidad y algunas condiciones adicionales.

Existen diversos procesos de fermentación aeróbicos para diferentes aplicaciones, sin embargo estos se pueden modelar de manera general como sigue (obtenido del capítulo 2):

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu(t)X - \frac{FX}{V} \\ \dot{S} = -\frac{\mu(t)X}{Y_x} + \frac{F(S_{in}-S)}{V} \\ \dot{O} = -\left(\frac{\mu(t)}{Y_{x/o}} + r\right)X + \frac{F(O_{in}-O)}{V} + K_l a (O_{sat} - O) \\ \dot{V} = F \end{cases} \quad (4.1)$$

donde:

$X(t)$ = concentración de biomasa en el reactor biológico [miligramo/litro]

$S(t)$ = concentración de sustrato en el reactor biológico [miligramo/litro]

$O(t)$ = concentración de oxígeno disuelto en el medio [miligramo/litro]

$V(t)$ = volumen de cultivo en el reactor biológico [litros]

$\mu(t)$ = tasa de crecimiento específica [1/hora]

$F(t)$ = flujo de entrada al reactor biológico [litro/hora]

Y_x = coeficiente de conversión biomasa/sustrato

S_{in} = concentración de sustrato de entrada [miligramo/litro]

$Y_{x/o}$ = coeficiente de conversión biomasa/oxígeno

r = tasa de respiración endógena [1/hora]

O_{in} = concentración de oxígeno disuelto de entrada [miligramo/litro]

$K_l a$ = coeficiente de transferencia de oxígeno [1/hora]

O_{sat} = concentración de saturación de oxígeno [miligramo/litro]

considerando que: F es la variable de control positiva y acotada, las variables de estado (X, S, O, V) son positivas, todos los parámetros $(Y_x, S_{in}, Y_{x/o}, r, O_{in}, K_l a, O_{sat})$ se suponen constantes y la tasa de crecimiento específica es una función del sustrato $\mu(s)$ de la cual es conocido su modelo. Las variables V y O son las únicas medibles.

Puesto que podemos medir V , el sistema (4.1) se puede reducir a las tres primeras variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \dot{O} \\ \dot{X} \\ \dot{S} \end{array} \right] \\ y = O \end{array} \right. = \left[\begin{array}{c} -\left(\frac{\mu(s)}{Y_{x/o}} + r\right)X + K_l a(O_{sat} - O) \\ \mu(s)X \\ -\frac{\mu(s)X}{Y_x} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} O_{in} - O \\ -X \\ S_{in} - S \end{array} \right] D \quad (4.2)$$

con la variable de entrada $D = \frac{F}{V}$ (conocida como tasa de dilución), el sistema (4.2) se puede representar de la siguiente forma general:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{array} \right.$$

Considere el siguiente cambio de variable⁶:

$$h = O$$

$$L_f h = K_l a(O_{sat} - O) - \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r\right)X$$

$$L_f^2 h = K_l a\left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r\right)X - K_l^2 a(O_{sat} - O) - \mu X \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r\right) + \frac{\mu X^2 \mu_s}{Y_{x/o} Y_x}$$

donde $\mu_s = \frac{\partial \mu}{\partial S}$ y $\mu_{ss} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial S^2}$.

El sistema (4.2) es localmente observable (con respecto a la definición 3.9) cuando

$$\text{rango} \{dh, d(L_f h), d(L_f^2 h)\} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\mu}{Y_{x/o}} - r & \frac{-X\mu_s}{Y_{x/o}} \\ 0 & \frac{2\mu X \mu_s}{Y_{x/o} Y_x} & \Xi \end{bmatrix} = 3 \quad (4.3)$$

donde

$$\Xi = -\frac{\mu X \mu_s}{Y_{x/o}} - r X \mu_s + \frac{\mu X^2 \mu_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{X^2 \mu_s^2}{Y_{x/o} Y_x}$$

Calculando el determinante de la matriz, se obtiene:

$$\det(\{dh, d(L_f h), d(L_f^2 h)\}) = \frac{\mu^2 X \mu_s}{Y_{x/o}} + \frac{2\mu r X \mu_s}{Y_{x/o}} - \frac{\mu^2 X^2 \mu_{ss}}{Y_{x/o}^2 Y_x} + \frac{\mu X^2 \mu_s^2}{Y_{x/o}^2 Y_x} + r^2 X \mu_s - \frac{r \mu X^2 \mu_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{r X^2 \mu_s^2}{Y_{x/o} Y_x}$$

y satisface (4.3) para $x \neq 0$ o $\mu \neq 0$, lo que implica que el sistema (4.2) deja de ser localmente

⁶ Donde $L_f h$ es la derivada de Lie. Para mayor detalle véase apéndice B.

observable cuando no existen o crecen los microorganismos en el reactor biológico.

A partir de la definición (3.12) el sistema (4.2) es localmente uniformemente observable, ya que puede ser llevado a la forma normal bajo ciertas condiciones de la tasa de crecimiento específica. Por lo tanto es posible hacer un observador para (4.2).

4.3 Estimación de los estados considerando la ley de Monod

Ahora considere el sistema (4.2). La ley de Monod se describe mediante la ecuación:

$$\mu(S) = \frac{\mu_{\max} S}{K_s + S}$$

la cual es una función de clase K con respecto a la variación de S , como se muestra en la figura 4.1.

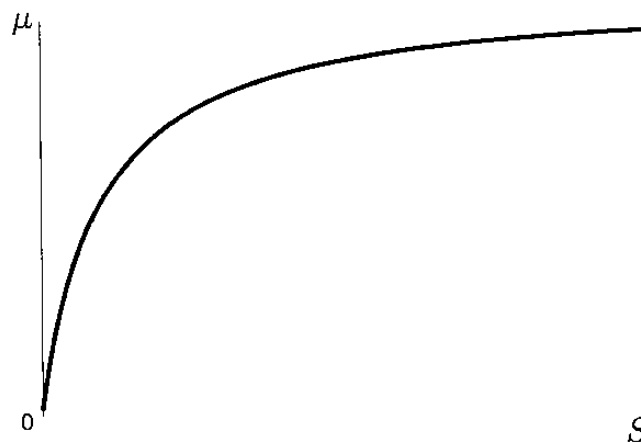


Fig. 4.1. Ley de crecimiento de Monod.

Para construir un observador de alta ganancia (de la sección 3.2.3 del capítulo 3), considere el siguiente difeomorfismo⁷:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(O, X, S) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \left[\begin{array}{c} O \\ X \\ S \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} O \\ K_l a (O_{sat} - O) - \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X \\ K_l a \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X - K_l^2 a (O_{sat} - O) - \mu X \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) + \frac{\mu X^2 \mu_s}{Y_{x/o} Y_x} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

donde $\mu_s = \frac{\mu_{\max} K_s}{(K_s + S)^2}$.

⁷ Para mayor detalle véase apéndice B.

Por lo tanto el observador de alta ganancia para el sistema (4.2) en variables originales está representado por el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{O}} \\ \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} + r\right) \hat{X} + K_1 a (O_{sat} - \hat{O}) \\ \hat{\mu} \hat{X} \\ -\frac{\hat{\mu} \hat{X}}{Y_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_{in} - \hat{O} \\ -\hat{X} \\ S_{in} - \hat{S} \end{bmatrix} D - \Gamma (\hat{O} - O)$$

donde

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 3\theta \\ 3\theta \frac{w_1}{\alpha} + 3\theta^2 \frac{w_2}{\alpha} + \theta^3 \frac{w_3}{\alpha} \\ 3\theta \frac{w_4}{\alpha} + 3\theta^2 \frac{w_5}{\alpha} + \theta^3 \frac{w_6}{\alpha} \end{bmatrix}$$

es la ganancia del observador, con

$$\alpha = \frac{\hat{\mu}^2 \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} + \frac{2\hat{\mu} r \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{\hat{\mu}^2 \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o}^2 Y_x} + \frac{\hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o}^2 Y_x} + r^2 \hat{X} \hat{\mu}_s - \frac{r \hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{r \hat{X}^2 \hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$w_1 = \frac{K_1 a \hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{K_1 a \hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{2K_1 a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - K_1 a \hat{X} r \hat{\mu}_s,$$

$$w_2 = \frac{K_1 a \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - r \hat{X} \hat{\mu}_s + \frac{\hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{\hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$w_3 = \frac{\hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}},$$

$$w_4 = \frac{K_1 a \hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r K_1 a \hat{\mu} - \frac{2K_1 a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$w_5 = \frac{\hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r \hat{\mu} - \frac{K_1 a \hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r K_1 a - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$w_6 = -\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r,$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu_{\max} \hat{S}}{K_s + \hat{S}}, \hat{\mu}_s = \frac{\mu_{\max} K_s}{(K_s + \hat{S})^2} \text{ y } \hat{\mu}_{ss} = -\frac{2\mu_{\max} K_s}{(K_s + \hat{S})^3}.$$

Resultados de simulación

A continuación se presentan los resultados de la simulación al implementar el observador, los cuales son mostrados en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5. Puede apreciarse que los estados estimados obtenidos por el observador convergen relativamente rápido (ya que este proceso es lento) a los estados del sistema. La entrada de control es una señal que varía de 0.1 a 0.2 hrs^{-1} (para efecto de la simulación) como se muestra en la figura 4.2. Los parámetros del modelo y las condiciones iniciales se muestran en la tabla 4.1. El valor del parámetro θ fue seleccionado igual a 0.05.

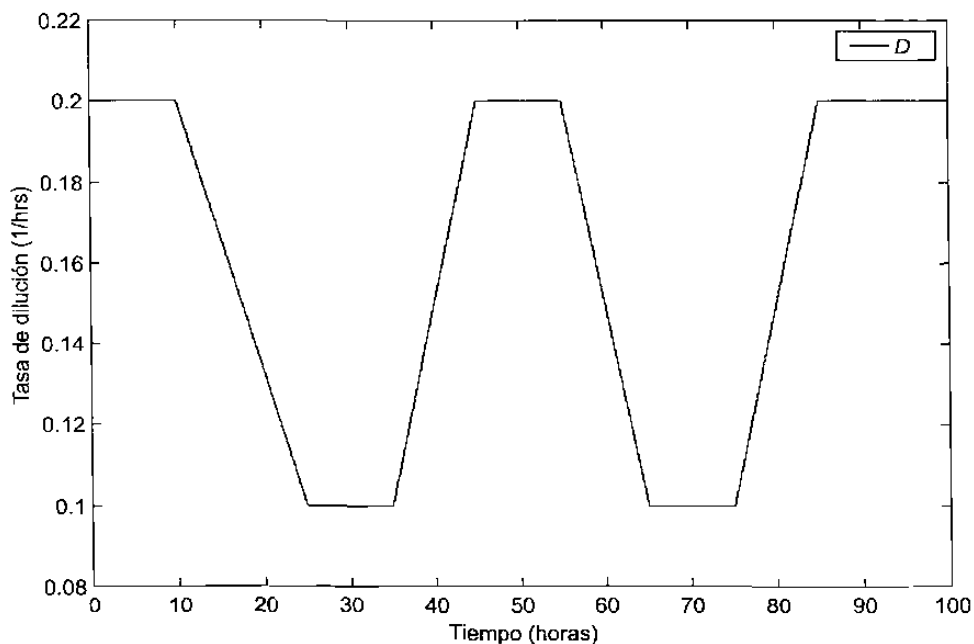


Fig. 4.2. Función de entrada.

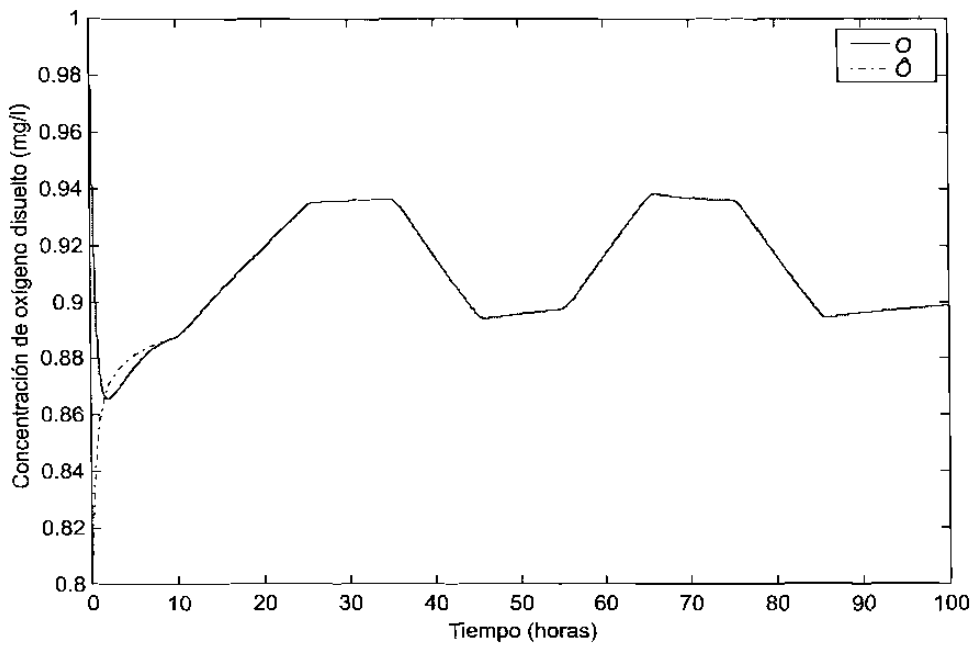


Fig. 4.3. Concentración de oxígeno disuelto con la ley de Monod.

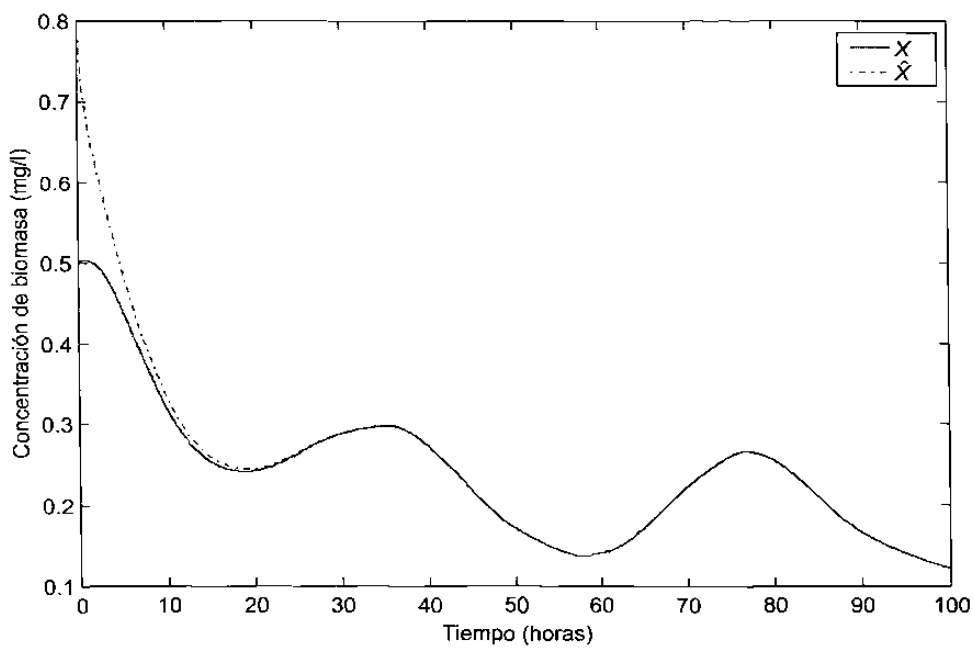


Fig. 4.4. Concentración de biomasa con la ley de Monod.

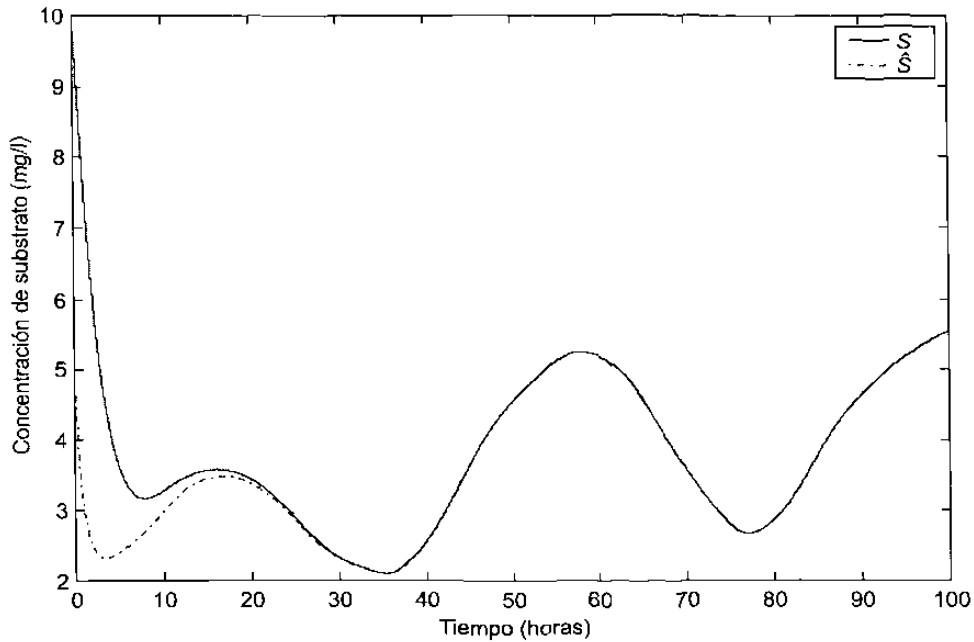


Fig. 4.5. Concentración de sustrato con la ley de Monod.

Tabla 4.1. Parámetros del modelo y condiciones iniciales.

Parámetros	
$Y_x = 0.05$	$O_{sat} = 1 \text{ mg/l}$
$Y_{x/o} = 1$	$r = 0.0097 \text{ hrs}^{-1}$
$O_{in} = 0 \text{ mg/l}$	$S_{in} = 8 \text{ mg/l}$
$K_1 a = 2 \text{ hrs}^{-1}$	$K_s = 4 \text{ mg/l}$
$\mu_{max} = 0.3 \text{ hrs}^{-1}$	
Condiciones iniciales del sistema	Condiciones iniciales del observador
$O(0) = 1 \text{ mg/l}$	$\hat{O}(0) = 0.8 \text{ mg/l}$
$X(0) = 0.5 \text{ mg/l}$	$\hat{X}(0) = 0.8 \text{ mg/l}$
$S(0) = 10 \text{ mg/l}$	$\hat{S}(0) = 5 \text{ mg/l}$

4.4 Estimación de los estados considerando la ley de Haldane

Considere el sistema (4.2), donde la ley de crecimiento está descrita por la ley de Haldane la cual se describe mediante la ecuación:

$$\mu(S) = \frac{\mu_{\max} S}{K_S + S + S^2/K_I}$$

Esta es una función no monótona que presenta un máximo en un valor $S = S^*$ como se muestra en la figura 4.6. Este máximo se calcula de la siguiente manera:

Derivando μ con respecto a S

$$\frac{d\mu}{dS} = \frac{\mu_{\max} K_S - \mu_{\max} S^2 / K_I}{(K_S + S + S^2 / K_I)^2},$$

e igualando a cero

$$\frac{\mu_{\max} K_S - \mu_{\max} S^2 / K_I}{(K_S + S + S^2 / K_I)^2} = 0,$$

tenemos

$$S^* = \sqrt{K_S K_I}.$$

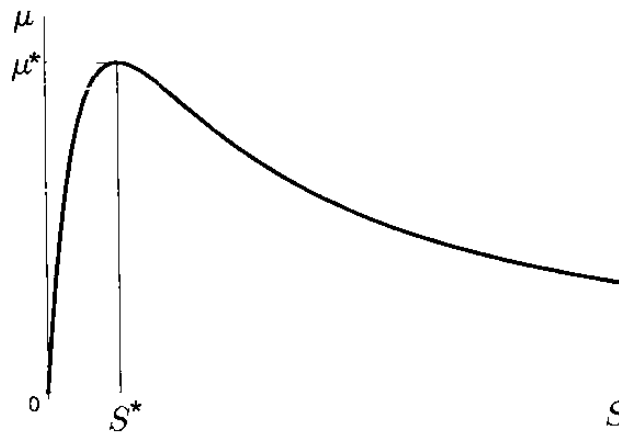


Fig. 4.6. Ley de crecimiento de Haldane.

Por otra parte, el utilizar esta ley de crecimiento no permite llevar al sistema a la forma normal (como se demuestra en [22]) puesto que el mapeo que se debe construir no es biyectivo. Esto es debido a que la ley de crecimiento no es biyectiva. El dominio de la función μ se divide en dos y haciendo que permanezca solamente en uno de los dominios se garantiza que el cambio de

coordenadas sea biyectiva, como se muestra en la figura 4.7.

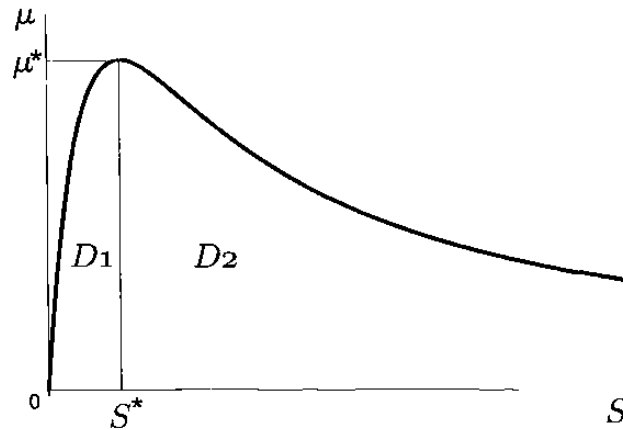


Fig. 4.7. Separación de dominios de la tasa de crecimiento específica.

Los dominios se definen de la siguiente manera:

$$D_1 = \{(O, X, S) : S < S^*\}$$

$$D_2 = \{(O, X, S) : S > S^*\}.$$

Conociendo el dominio en que se encuentra el sistema (4.2), de éste se seleccionan las condiciones iniciales para el observador.

Considere el siguiente difeomorfismo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega(O, X, S) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \left[\begin{array}{c} O \\ X \\ S \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} O \\ K_I a (O_{sat} - O) - \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X \\ K_I a \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X - K_I^2 a (O_{sat} - O) - \mu X \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) + \frac{\mu X^2 \mu_s}{Y_{x/o} Y_x} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

donde $\mu_s = \frac{\mu_{max} K_S - \mu_{max} S^2 / K_I}{(K_S + S + S^2 / K_I)^2}$. Este es un difeomorfismo siempre y cuando el sistema (4.2) este en un sólo dominio (ya sea D_1 o D_2).

El observador de alta ganancia con la ley de crecimiento de Haldane para el sistema (4.2) en variables originales está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{O}} \\ \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} + r\right)\hat{X} + K_I a (O_{sat} - \hat{O}) \\ \hat{\mu}\hat{X} \\ -\frac{\hat{\mu}\hat{X}}{Y_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_{in} - \hat{O} \\ -\hat{X} \\ S_{in} - \hat{S} \end{bmatrix} D - \Lambda (\hat{O} - O)$$

donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3\theta \\ 3\theta\frac{l_1}{\beta} + 3\theta^2\frac{l_2}{\beta} + \theta^3\frac{l_3}{\beta} \\ 3\theta\frac{l_4}{\beta} + 3\theta^2\frac{l_5}{\beta} + \theta^3\frac{l_6}{\beta} \end{bmatrix}$$

con

$$\beta = \frac{\hat{\mu}^2\hat{X}\hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} + \frac{2\hat{\mu}r\hat{X}\hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{\hat{\mu}^2\hat{X}^2\hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o}^2Y_x} + \frac{\hat{\mu}\hat{X}^2\hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o}^2Y_x} + r^2\hat{X}\hat{\mu}_s - \frac{r\hat{\mu}\hat{X}^2\hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o}Y_x} - \frac{r\hat{X}^2\hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o}Y_x},$$

$$l_1 = \frac{K_I a \hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{K_I a \hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{2K_I a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - K_I a \hat{X} r \hat{\mu}_s,$$

$$l_2 = \frac{K_I a \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - r \hat{X} \hat{\mu}_s + \frac{\hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{\hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$l_3 = \frac{\hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}},$$

$$l_4 = \frac{K_I a \hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r K_I a \hat{\mu} - \frac{2K_I a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$l_5 = \frac{\hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r \hat{\mu} - \frac{K_I a \hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r K_I a - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$l_6 = -\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r,$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu_{max} \hat{S}}{K_S + \hat{S} + \hat{S}^2/K_I}, \hat{\mu}_s = \frac{\mu_{max} K_S - \mu_{max} \hat{S}^2/K_I}{(K_S + \hat{S} + \hat{S}^2/K_I)^2} \text{ y } \hat{\mu}_{ss} = \frac{(2\mu_{max} \hat{S}^2 - 6\mu_{max} K_S) \hat{S}/K_I - 2\mu_{max} K_S}{(K_S + \hat{S} + \hat{S}^2/K_I)^2}.$$

La principal desventaja es que si hay cambios de dominio de la función μ el observador pierde estabilidad (debido a singularidades en la ganancia del observador). Además si no se seleccionan

las condiciones iniciales del observador correctamente (en el dominio en que se encuentra μ) el observador no funciona.

Resultados de simulación

El desempeño del observador es mostrado en las figuras 4.8, 4.9 y 4.10, en donde se puede ver que los estados procedentes del observador convergen a los del sistema, ya que se mantiene el sistema en un solo dominio (D_1 o D_2) y las condiciones iniciales fueron adecuadas. La función de entrada aplicada al proceso se muestra en la figura 4.2. La figura 4.11 muestra que el comportamiento de la tasa de crecimiento específica con respecto al sustrato, se mantiene en un solo dominio. Los parámetros utilizados así como también las condiciones iniciales tanto para el sistema como el observador se muestran en la tabla 4.1, con $K_I = 50 \text{ mg/l}$. La ganancia del observador es $\theta = 0.05$.

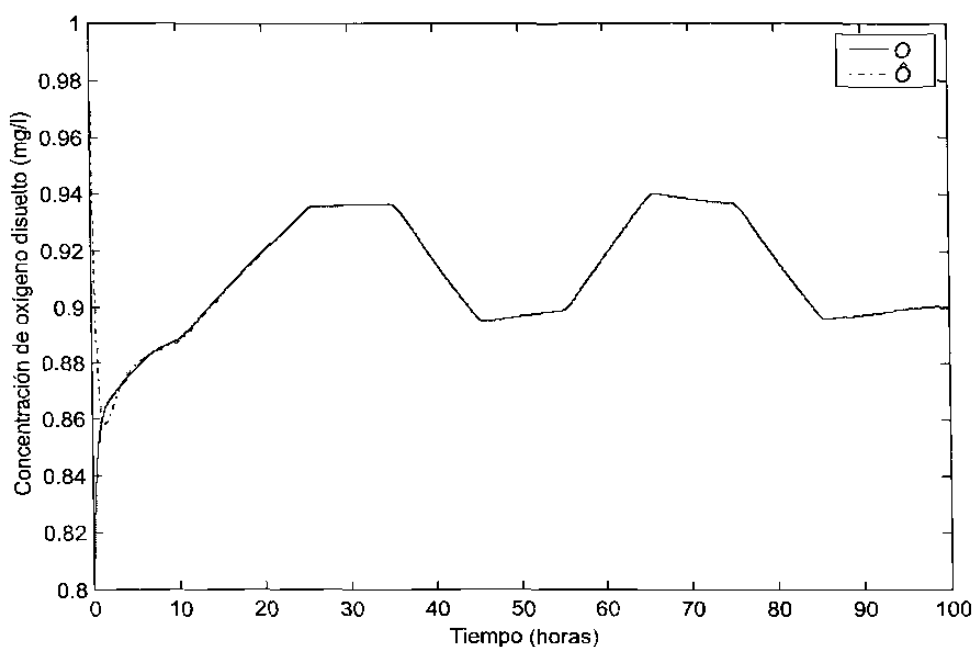


Fig. 4.8. Concentración de oxígeno disuelto con la ley de Haldane.

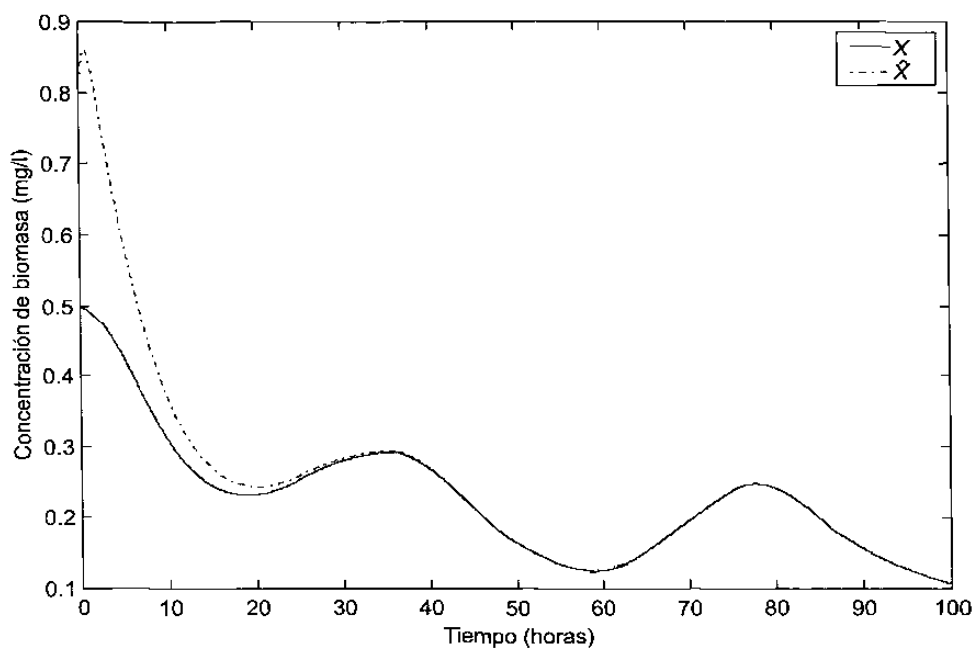


Fig. 4.9. Concentración de biomasa con la ley de Haldane.

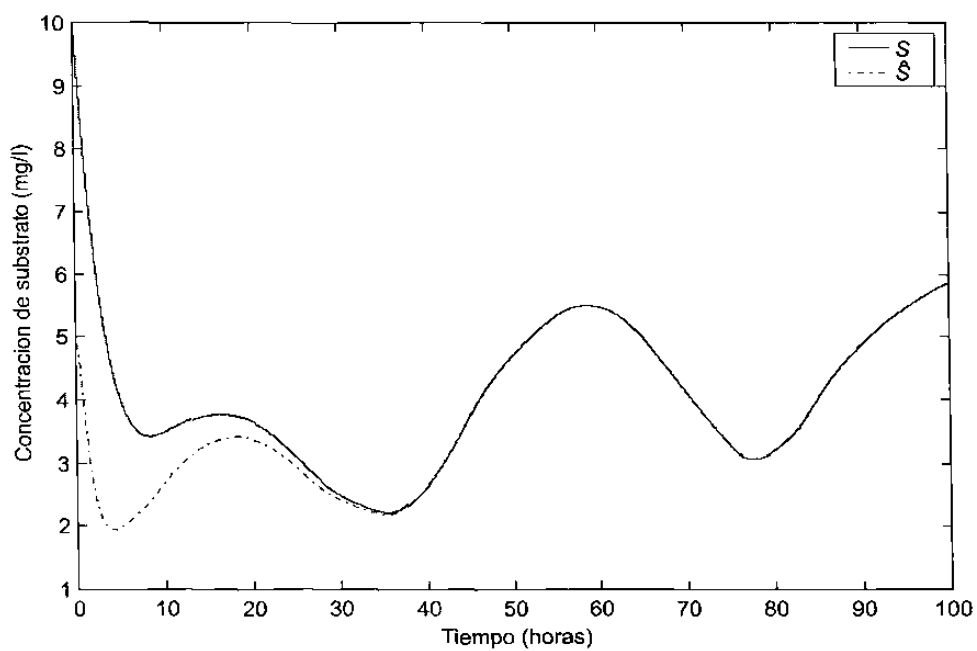


Fig. 4.10. Concentración de sustrato con la ley de Haldane.

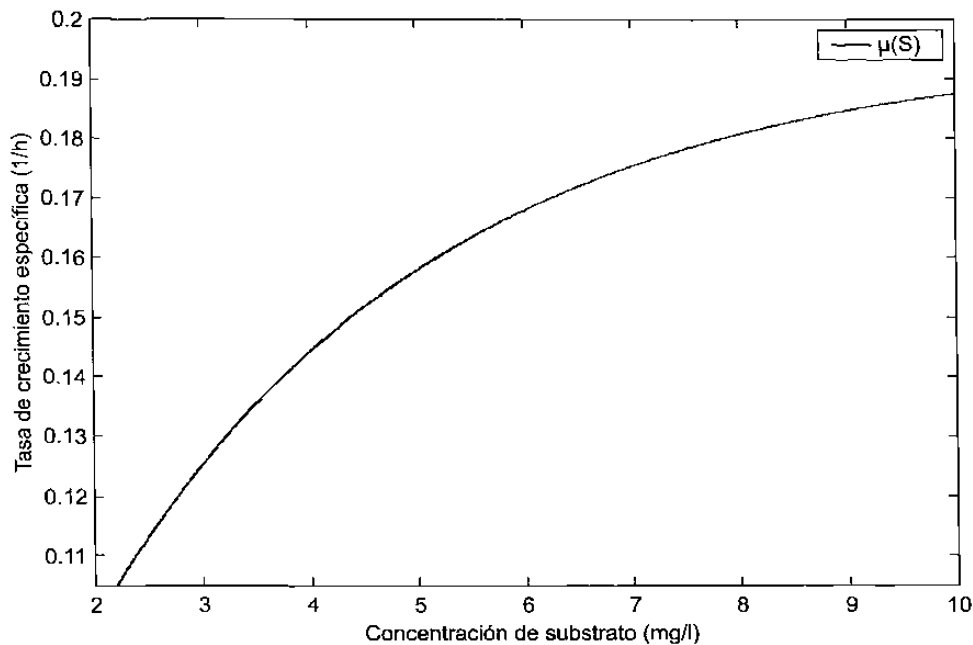


Fig. 4.11. Tasa de crecimiento específica en función del sustrato.

4.5 Estimación con atenuación de perturbaciones

En ocasiones la medición de la salida puede estar afectada por alguna perturbación, lo cual hace que la estimación no proporcione una buena convergencia hacia las variables reales.

En esta sección se presenta un observador integral en el cual un término de corrección es agregado para lograr un mejor desempeño ante perturbaciones (ver [4]). De hecho, la adición de este término permite obtener un grado de libertad adicional para el propósito del diseño del observador y mejorar la estimación.

4.5.1 Observador integral para una clase de sistemas lineales

Considere el sistema lineal de una sola salida descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + d \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R}$ es una perturbación desconocida pero acotada. Las

matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ son de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = [1, 0, \dots, 0] \quad (4.5)$$

y B es una matriz constante de dimensiones apropiadas.

Con respecto al sistema (4.4), es importante notar que si $d(t) = -x_1(t)$ (esta condición quiere decir que hay una falla total en el sensor), entonces el sistema anterior es no observable. Debido a esto establecemos la siguiente hipótesis:

H1) $|d(t)| < |x_1(t)|$ para todo $t \geq 0$.

Esto implica que la amplitud de la perturbación no excede la amplitud de la señal de salida, lo cual no es restrictivo ya que no podemos esperar extraer información útil de la salida si la amplitud de la perturbación $|d(t)|$ es mayor que $|x_1(t)|$.

Sea $x_0(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau$ lo que implica $\dot{x}_0(t) = y(t) = Cx(t) + d(t)$. Por lo que tenemos el siguiente sistema aumentado

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = Cx + d \\ \dot{x} = Ax + Bu \\ y_0 = x_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Definiendo $z = \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$ y $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0_{n \times 1} & A \end{bmatrix}$ podemos reescribir el sistema (4.6) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + B_0 u + C_0^T d \\ y_0 = C_0 z \end{cases} \quad (4.7)$$

donde $C_0 = [1, 0_{1 \times n}]$. Claramente sí el sistema (4.4) es observable para $d = 0$, entonces el sistema (4.7) es también observable para $d = 0$.

Ahora, considere el siguiente sistema:

$$\dot{\hat{z}} = A_0 \hat{z} + B_0 u + K_I (y_0 - C_0 \hat{z}). \quad (4.8)$$

donde la matriz de ganancia K_I es escogida tal que los valores propios de la matriz $(A_0 - K_I C_0)$ tengan parte real negativa. Ahora se establece el siguiente resultado.

Teorema 4.1 *Suponga que el sistema (4.7) satisface H1). El sistema (4.8) es un observador asintótico para el sistema (4.7), el cual permite desacoplar el efecto de las perturbaciones en la salida del sistema del estado estimado.*

Prueba: Sea $e = z - \hat{z}$, el error de estimación cuya dinámica es

$$\dot{e} = (A_0 - K_I C_0) e + C_0^T d \quad (4.9)$$

Se puede ver que la perturbación $d(t)$ en la ecuación (4.9) no es afectada por la ganancia del observador. Por lo tanto, podemos escoger razonablemente una alta ganancia de K_I tal que el término estabilizante $(A_0 - K_I C_0)$ prevalezca sobre el término de perturbación $C_0^T d$. ■

4.5.2 Observador integral de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales

Considere el sistema no lineal de una sola salida de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + G(x, u) \\ y = Cx + d \end{cases}$$

donde $x \in \mathbb{R}^l$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$ y la perturbación acotada desconocida $d \in \mathbb{R}$. Las matrices A y C son de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0, \dots, 0]$$

y

$$G(x, u) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, u) \\ g_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ g_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}, u) \\ g_l(x, u) \end{bmatrix}.$$

Suponga que:

A1) las funciones $g_i(x_1, \dots, x_i, u)$, $i = 1, \dots, l$, son globalmente Lipschitz con respecto a (x_1, \dots, x_i) , y uniformemente con respecto a u .

A2) la perturbación $d(t)$ es tal que $|d(t)| < |x_1(t)|$ para todo $t \geq 0$.

Definiendo $x_0(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau$, tenemos el siguiente sistema aumentado:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = Cx + d \\ \dot{x} = Ax + G(x, u) \\ y_0 = x_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

el cual puede ser escrito en forma compacta como

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 + \bar{G}(z, u) + C_0^T d \\ y_0 = C_0 z \end{cases} \quad (4.11)$$

donde $z = \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix}$, $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0_{l \times 1} & A \end{bmatrix}$, $C_0 = [1, 0_{1 \times l}]$ y $\bar{G}(z, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ G(z, u) \end{bmatrix}$.

Si hacemos $d(t) = 0$ en (4.11), tenemos un sistema $(l+1)$ dimensional el cual es uniformemente observable.

Considere el siguiente sistema:

$$\dot{\hat{z}} = A_0 \hat{z} + \bar{G}(\hat{z}, u) + S_\theta^{-1} C_0^T (y_0 - C_0 \hat{z}) \quad (4.12)$$

donde S_θ es una matriz única simétrica definida positiva, solución de la siguiente ecuación

algebraica de Lyapunov:

$$\theta S_\theta + A_0^T S_\theta + S_\theta A_0 = C_0^T C_0 \quad (4.13)$$

con $\theta > 0$.

Se puede mostrar que una solución explícita de (4.13) está dada por

$$S_\theta(i, j) = \frac{(-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{j-1}}{\theta^{i+j-1}}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

donde $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ y $n = l + 1$.

De lo anterior, se establece el siguiente resultado.

Teorema 4.2 *Suponga que el sistema (4.11) satisface las suposiciones A1) y A2). Entonces, existe un $\theta_0 > 0$ tal que, para todo $\theta \geq \theta_0$, el sistema (4.12) es un observador asintótico para el sistema (4.11), el cual permite desacoplar el efecto de las perturbaciones en la salida del sistema del estado estimado.*

Prueba: Definiendo el error de estimación como $e(t) = \hat{z}(t) - z(t)$, entonces la dinámica está dada por:

$$\dot{e} = (A_0 - S_\theta^{-1} C_0^T C_0) e + \bar{G}(\hat{z}, u) - \bar{G}(z, u) - C_0^T d.$$

Considere la transformación de coordenadas de la forma $\bar{e} = \Delta_\theta e$, donde $\Delta_\theta = \text{diag} \left[1, \frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^{n-1}} \right]$.

Entonces:

$$\dot{\bar{e}} = \theta (A_0 - S_1^{-1} C_0^T C_0) \bar{e} + \Delta_\theta [\bar{G}(\hat{z}, u) - \bar{G}(z, u)] - C_0^T d \quad (4.14)$$

puesto que $\Delta_\theta A_0 \Delta_\theta^{-1} = \theta A_0$, $C_0 \Delta_\theta = C_0 \Delta_\theta^{-1} = C_0$ y $S_\theta = \frac{1}{\theta} \Delta_\theta S_1 \Delta_\theta$ donde $S_1 = S_\theta |_{\theta=1}$.

Sea $V(\bar{e}) = \bar{e}^T S_1 \bar{e}$, una función de Lyapunov para el sistema (4.14), y derivando con respecto al tiempo, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{e}^T S_1 \bar{e}) &= 2\bar{e}^T S_1 \dot{\bar{e}} \\ &= -\theta \bar{e}^T S_1 \bar{e} - \theta \|C_0 \bar{e}\|^2 + 2\bar{e}^T S_1 \Delta_\theta [\bar{G}(\hat{z}, u) - \bar{G}(z, u)] - 2\bar{e}^T S_1 C_0^T d. \end{aligned}$$

Denotando $\|x\|_S$ para $\sqrt{x^T S x}$, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \|\bar{e}\|_{S_1}^2 \leq -\theta \|\bar{e}\|_{S_1}^2 + 2 \|\bar{e}\|_{S_1} \|\Delta_\theta \bar{G}(\hat{z}, u) - \bar{G}(z, u)\|_{S_1} + \|\bar{e}\|_{S_1}^2 + \|C_0^T d\|_{S_1}^2$$

Por la hipótesis A1) y siguiendo el procedimiento en [14] tenemos que

$$\|\Delta_\theta [\bar{G}(\hat{z}, u) - \bar{G}(z, u)]\|_{S_1} \leq \rho \|\bar{e}\|_{S_1}$$

para alguna constante positiva ρ .

Suponiendo que

$$\|C_0^T d\|_{S_1} \leq \gamma$$

resulta

$$\frac{d}{dt} \|\bar{e}\|_{S_1}^2 \leq -\theta \|\bar{e}\|_{S_1}^2 + 2\rho \|\bar{e}\|_{S_1}^2 + \|\bar{e}\|_{S_1}^2 + \gamma^2.$$

Definiendo $y = \|\bar{e}\|_{S_1}^2$

$$\frac{dy}{dt} \leq -(\theta - 2\rho - 1)y + \gamma^2$$

integrando, resulta la siguiente desigualdad

$$y \leq \left[y(0) - \frac{\gamma^2}{\theta - 2\rho - 1} \right] \exp[-(\theta - 2\rho - 1)t] + \frac{\gamma^2}{\theta - 2\rho - 1}$$

entonces, tomando un valor suficientemente grande de θ , la trayectoria de y es localmente últimamente uniformemente acotada, es decir para $\theta = \theta_1 \geq \theta_0$ y para $y(0) \leq r$, a partir de un tiempo dado, las trayectorias de y entran a una esfera de radio $\frac{\gamma^2}{\theta_1 - 2\rho - 1}$ y permanecen ahí para tiempos posteriores. Esto completa la prueba del teorema. ■

4.5.3 Aplicación a un proceso de fermentación

4.5.3.1 Estimación considerando la ley de Monod

Considere el sistema (4.2) pero ahora afectado por una perturbación en la salida de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{O} \\ \dot{X} \\ \dot{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\mu(s)}{Y_{x/o}} + r\right)X + K_1 a (O_{sat} - O) \\ \mu(s)X \\ -\frac{\mu(s)X}{Y_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_{in} - O \\ -X \\ S_{in} - S \end{bmatrix} D \\ y = O + d \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Definiendo $P = \int_0^t y(\tau) d\tau$, tenemos el siguiente sistema aumentado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{O} \\ \dot{X} \\ \dot{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ -\left(\frac{\mu(s)}{Y_{x/o}} + r\right)X + K_1 a (O_{sat} - O) \\ \mu(s)X \\ -\frac{\mu(s)X}{Y_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ O_{in} - O \\ -X \\ S_{in} - S \end{bmatrix} D + \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_0 = P \end{array} \right. \quad (4.16)$$

donde y_0 es la nueva salida del sistema.

Para construir el observador considere el siguiente cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta(O, X, S) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{bmatrix} P \\ O \\ X \\ S \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} P \\ O \\ K_1 a (O_{sat} - O) - \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r\right)X \\ K_1 a \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r\right)X - K_1^2 a (O_{sat} - O) - \mu X \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r\right) + \frac{\mu X^2 \mu_s}{Y_{x/o} Y_x} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

donde $\mu_s = \frac{\mu_{max} K_s}{(K_s + S)^2}$.

Por lo tanto, el observador integral de alta ganancia para el sistema (4.16) en variables originales

está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{P}} \\ \dot{\hat{O}} \\ \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{O} \\ -\left(\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} + r\right)\hat{X} + K_1 a (O_{sat} - \hat{O}) \\ \hat{\mu}\hat{X} \\ -\frac{\hat{\mu}\hat{X}}{Y_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ O_{in} - \hat{O} \\ -\hat{X} \\ S_{in} - \hat{S} \end{bmatrix} D - \Pi (\hat{P} - P)$$

donde

$$\Pi = \begin{bmatrix} 4\theta \\ 6\theta^2 \\ 6\theta^2 \frac{q_1}{\gamma} + 4\theta^3 \frac{q_2}{\gamma} + \theta^4 \frac{q_3}{\gamma} \\ 6\theta^2 \frac{q_4}{\gamma} + 4\theta^3 \frac{q_5}{\gamma} + \theta^4 \frac{q_6}{\gamma} \end{bmatrix}$$

con

$$\gamma = \frac{\hat{\mu}^2 \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} + \frac{2\hat{\mu} r \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{\hat{\mu}^2 \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o}^2 Y_x} + \frac{\hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o}^2 Y_x} + r^2 \hat{X} \hat{\mu}_s - \frac{r \hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{r \hat{X}^2 \hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$q_1 = \frac{K_1 a \hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{K_1 a \hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{2K_1 a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - K_1 a \hat{X} r \hat{\mu}_s,$$

$$q_2 = \frac{K_1 a \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - r \hat{X} \hat{\mu}_s + \frac{\hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{\hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$q_3 = \frac{\hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}},$$

$$q_4 = \frac{K_1 a \hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r K_1 a \hat{\mu} - \frac{2K_1 a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$q_5 = \frac{\hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r \hat{\mu} - \frac{K_1 a \hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r K_1 a - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$q_6 = -\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r,$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu_{max} \hat{S}}{K_s + \hat{S}}, \hat{\mu}_s = \frac{\mu_{max} K_s}{(K_s + \hat{S})^2} \text{ y } \hat{\mu}_{ss} = -\frac{2\mu_{max} K_s}{(K_s + \hat{S})^3}.$$

Resultados de simulación

Con el propósito de mostrar el desempeño del observador integral de alta ganancia, se presentan resultados de simulación del observador de alta ganancia (presentado en la sección 4.2) afectado por el mismo ruido en la salida y se efectúa la comparación.

Los parámetros del modelo y las condiciones iniciales se muestran en la tabla 4.1. Las simulaciones se llevaron a cabo con los mismos parámetros del modelo, las mismas condiciones iniciales y la misma ganancia, tanto para el observador integral de alta ganancia como para el observador de alta ganancia. El valor del parámetro $\theta = 0.03$. Cabe señalar que el parámetro θ también es un factor que afecta la sensibilidad al ruido de medición (tiende a amplificarlo, debido a que el ruido aparece en el error de estimación y es proporcional a la ganancia θ). La función de entrada se muestra en la figura 4.2. La figura 4.11 muestra la salida afectada por ruido medible del 30% del máximo valor de la salida (aproximadamente), con media cero y desviación estándar de 1. Las figuras 4.14, 4.16 y 4.18 muestran el desempeño del observador integral de alta ganancia, donde se puede apreciar que la diferencia entre los estados estimados por el observador y los estados del sistema es relativamente pequeña. Las figuras 4.13, 4.15 y 4.17 muestran el desempeño del observador de alta ganancia, presentando una estimación deficiente ante el ruido en la salida. Se puede apreciar claramente la atenuación a la perturbación del observador integral de alta ganancia.

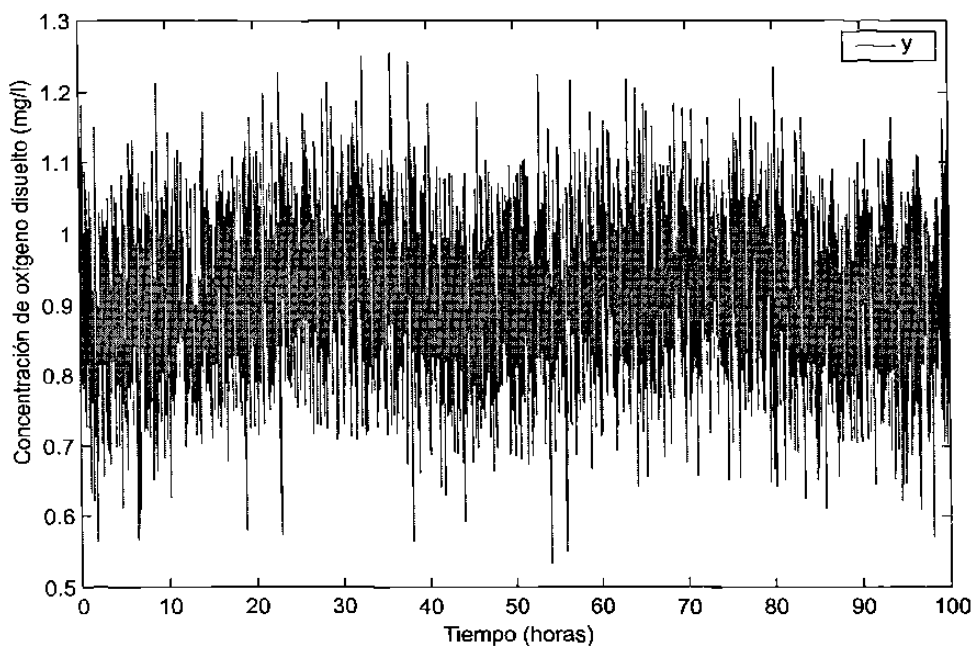


Fig. 4.12. Medición de la salida ruidosa $y(t)$ con la ley de Monod.

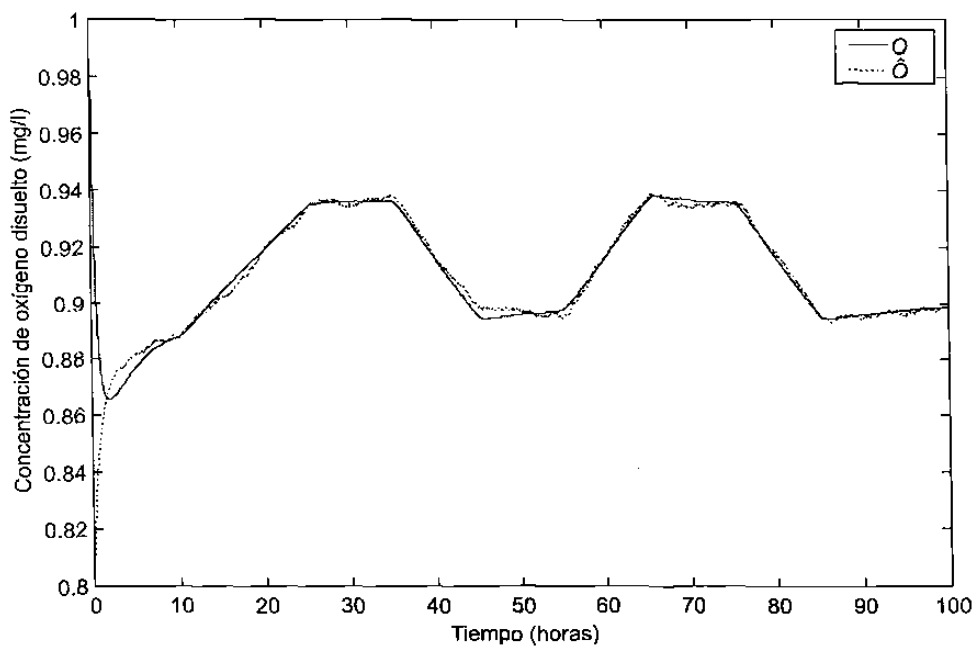


Fig. 4.13. Estimación de O con el observador de alta ganancia (Monod).

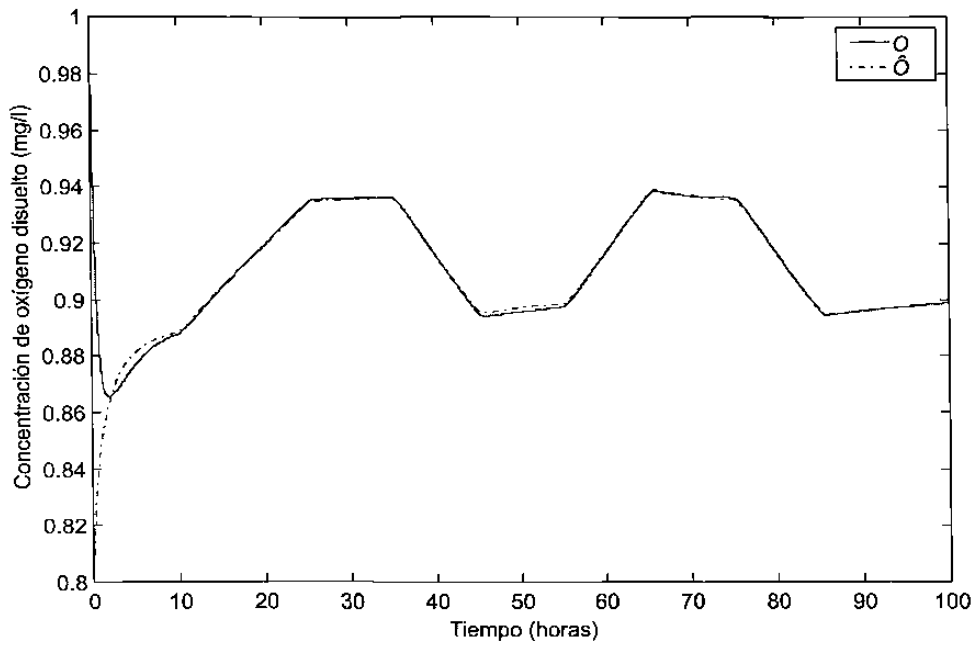


Fig. 4.14. Estimación de O con el observador integral (Monod).

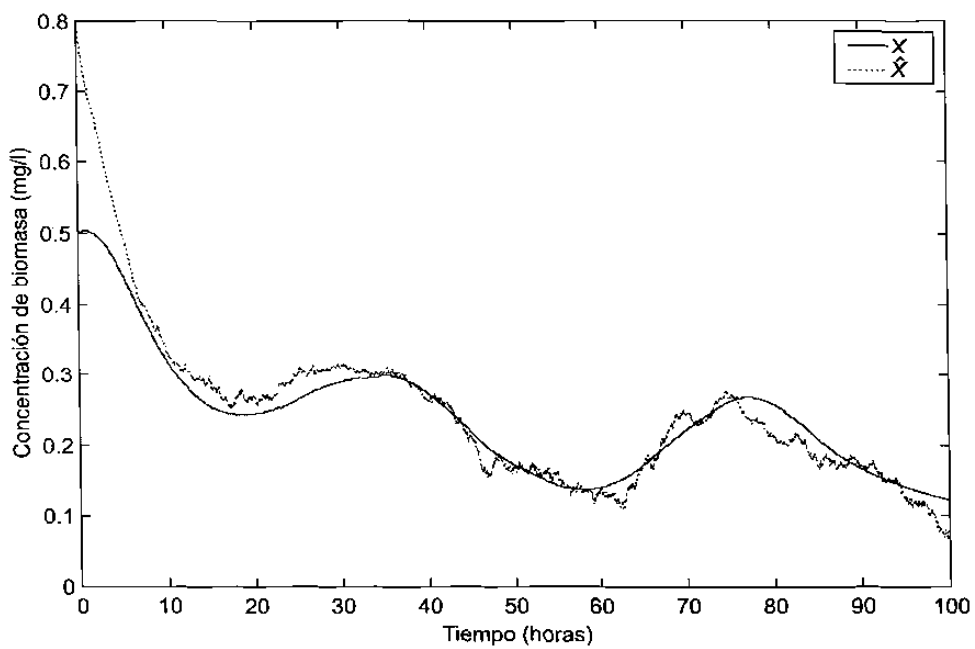


Fig. 4.15. Estimación de X con el observador de alta ganancia (Monod).

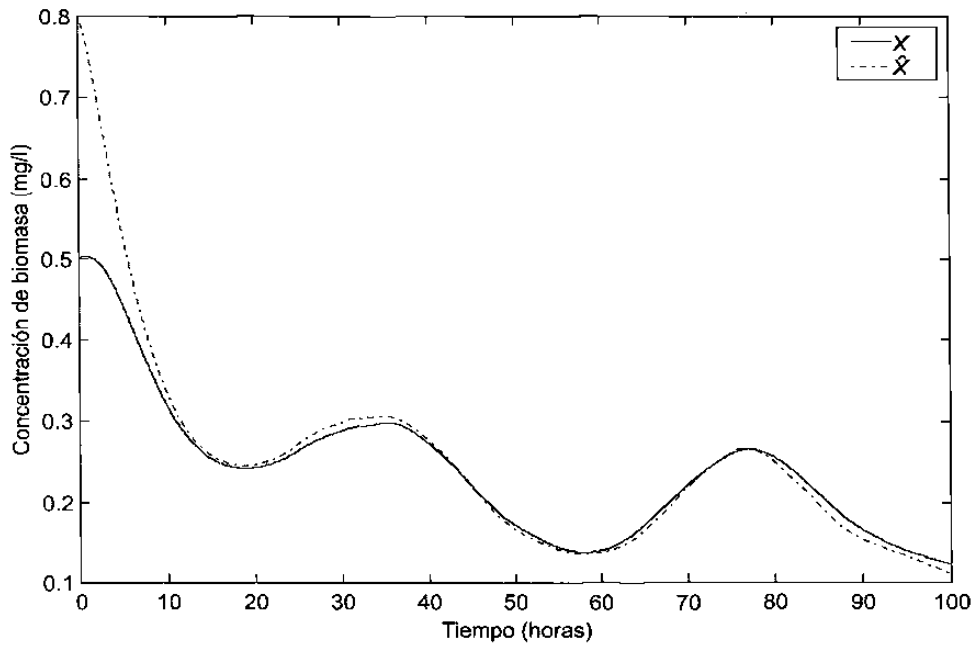


Fig. 4.16. Estimación de X con el observador integral (Monod).

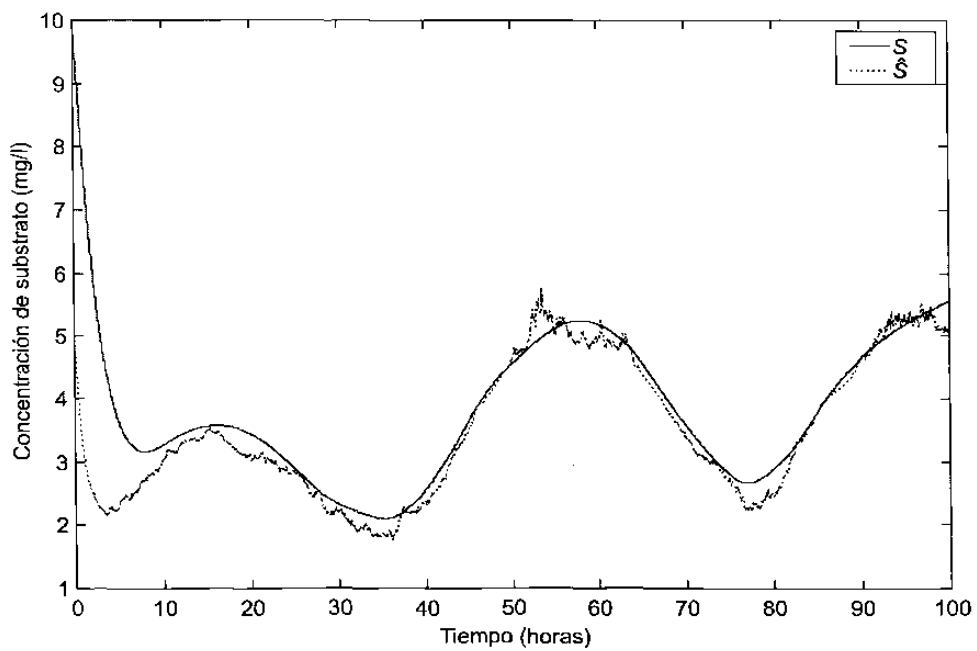


Fig. 4.17. Estimación de S con el observador de alta ganancia (Monod).

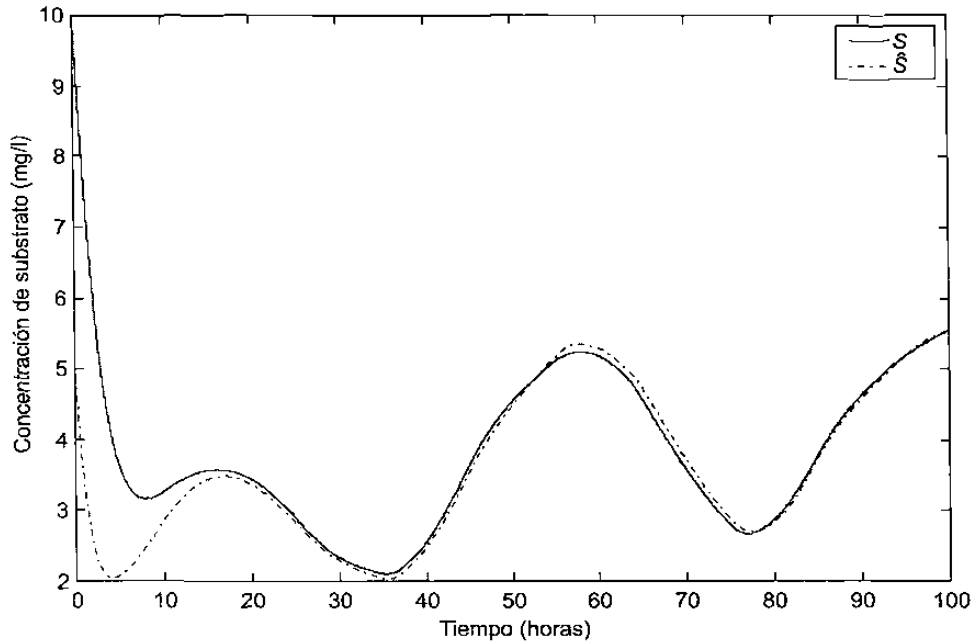


Fig. 4.18. Estimación de S con el observador integral (Monod).

4.5.3.2 Estimación considerando la ley de Haldane

Considere el sistema (4.16). Considere el siguiente cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(O, X, S) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \left[\begin{array}{c} P \\ O \\ X \\ S \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} P \\ O \\ K_l a (O_{sat} - O) - \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X \\ K_l a \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X - K_l^2 a (O_{sat} - O) - \mu X \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) + \frac{\mu X^2 \mu_s}{Y_{x/o} Y_x} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

donde $\mu_s = \frac{\mu_{max} K_S - \mu_{max} S^2 / K_I}{(K_S + S + S^2 / K_I)^2}$. En este caso para garantizar que el difeomorfismo sea biyectivo tenemos que conocer el dominio en que se encuentra el sistema (4.16) y tomar las condiciones iniciales apropiadas para el observador.

El observador integral de alta ganancia con la ley de crecimiento de Haldane para el sistema (4.16), en variables originales, esta dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{P}} \\ \dot{\hat{O}} \\ \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{O} \\ -\left(\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} + r\right) \hat{X} + K_I a (O_{sat} - \hat{O}) \\ \hat{\mu} \hat{X} \\ -\frac{\hat{\mu} \hat{X}}{Y_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ O_{in} - \hat{O} \\ -\hat{X} \\ S_{in} - \hat{S} \end{bmatrix} D - \Delta (\hat{P} - P)$$

donde

$$\Delta = \begin{bmatrix} 4\theta \\ 6\theta^2 \\ 6\theta^2 \frac{j_1}{\delta} + 4\theta^3 \frac{j_2}{\delta} + \theta^4 \frac{j_3}{\delta} \\ 6\theta^2 \frac{j_4}{\delta} + 4\theta^3 \frac{j_5}{\delta} + \theta^4 \frac{j_6}{\delta} \end{bmatrix}$$

con

$$\delta = \frac{\hat{\mu}^2 \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} + \frac{2\hat{\mu} r \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{\hat{\mu}^2 \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o}^2 Y_x} + \frac{\hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o}^2 Y_x} + r^2 \hat{X} \hat{\mu}_s - \frac{r \hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{r \hat{X}^2 \hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$j_1 = \frac{K_I a \hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{K_I a \hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{2K_I a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - K_I a \hat{X} r \hat{\mu}_s,$$

$$j_2 = \frac{K_I a \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - r \hat{X} \hat{\mu}_s + \frac{\hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{\hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$j_3 = \frac{\hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}},$$

$$j_4 = \frac{K_I a \hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r K_I a \hat{\mu} - \frac{2K_I a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$j_5 = \frac{\hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r \hat{\mu} - \frac{K_I a \hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r K_I a - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$j_6 = -\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r,$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu_{max} \hat{S}}{K_S + \hat{S} + \hat{S}^2/K_I}, \hat{\mu}_s = \frac{\mu_{max} K_S - \mu_{max} \hat{S}^2/K_I}{(K_S + \hat{S} + \hat{S}^2/K_I)^2} \text{ y } \hat{\mu}_{ss} = \frac{(2\mu_{max} \hat{S}^2 - 6\mu_{max} K_S) \hat{S}/K_I - 2\mu_{max} K_S}{(K_S + \hat{S} + \hat{S}^2/K_I)^2}.$$

Resultados de simulación

A continuación se presenta la comparación del observador integral de alta ganancia con el observador de alta ganancia.

Los parámetros del modelo y las condiciones iniciales para los dos observadores se muestran en la tabla 4.1, con $K_I = 50 \text{ mg/l}$. La función de entrada se muestra en la figura 4.2. La figura 4.19 muestra la salida afectada por la perturbación, la cual es un ruido medible del 30% del máximo valor de la salida (aproximadamente), con media cero y desviación estándar de 1. El valor de ganancia tanto para el observador integral de alta ganancia como para el observador de alta ganancia es $\theta = 0.03$. El desempeño del observador integral de alta ganancia se muestra en las figuras 4.21, 4.23 y 4.25; y el desempeño del observador de alta ganancia se muestra en las figuras 4.20, 4.22 y 4.23; mostrando el observador integral de alta ganancia un mejor desempeño ante el ruido en la salida.

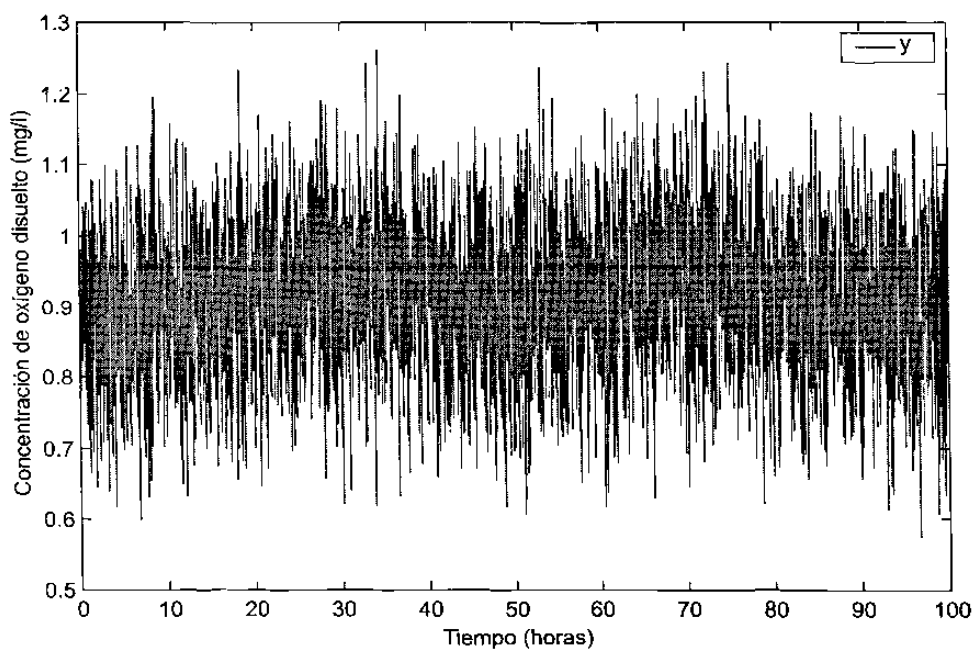


Fig. 4.19. Medición de la salida ruidosa $y(t)$ con la ley de Haldane.

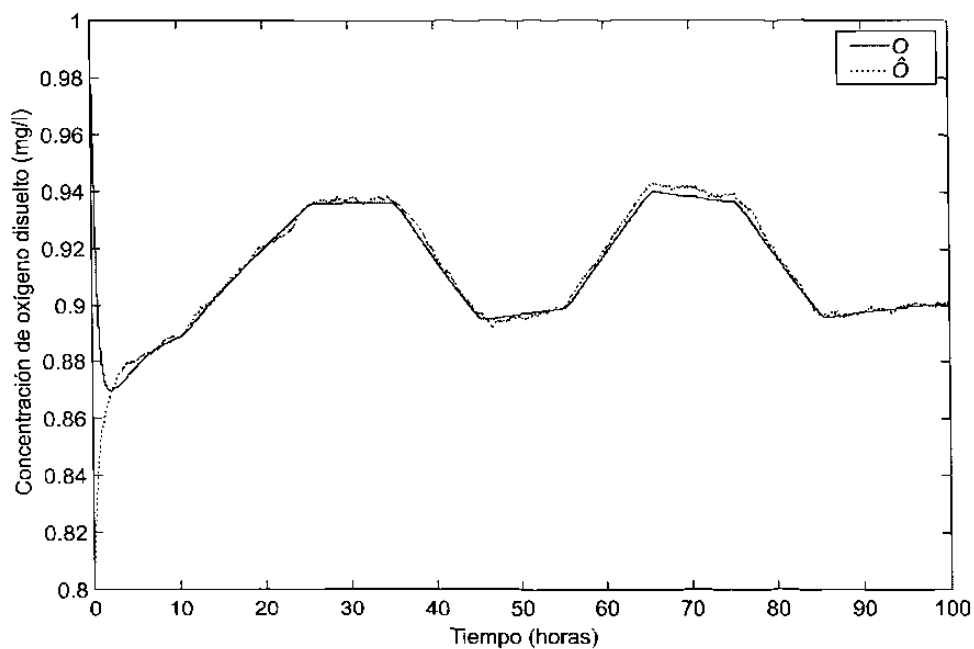


Fig. 4.20. Estimación de O con el observador de alta ganancia (Haldane).

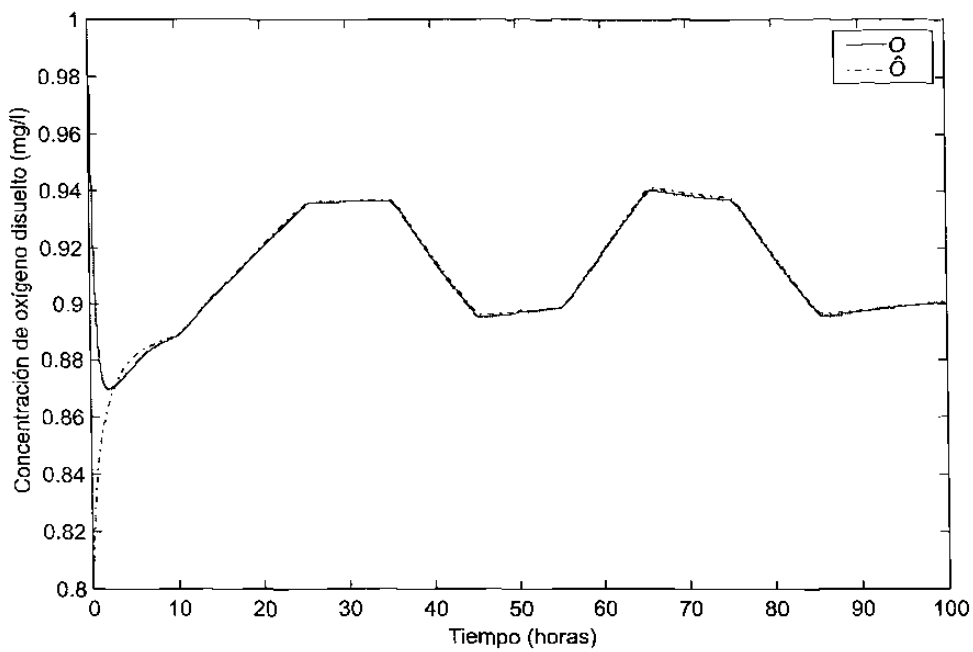


Fig. 4.21. Estimación de O con el observador integral (Haldane).

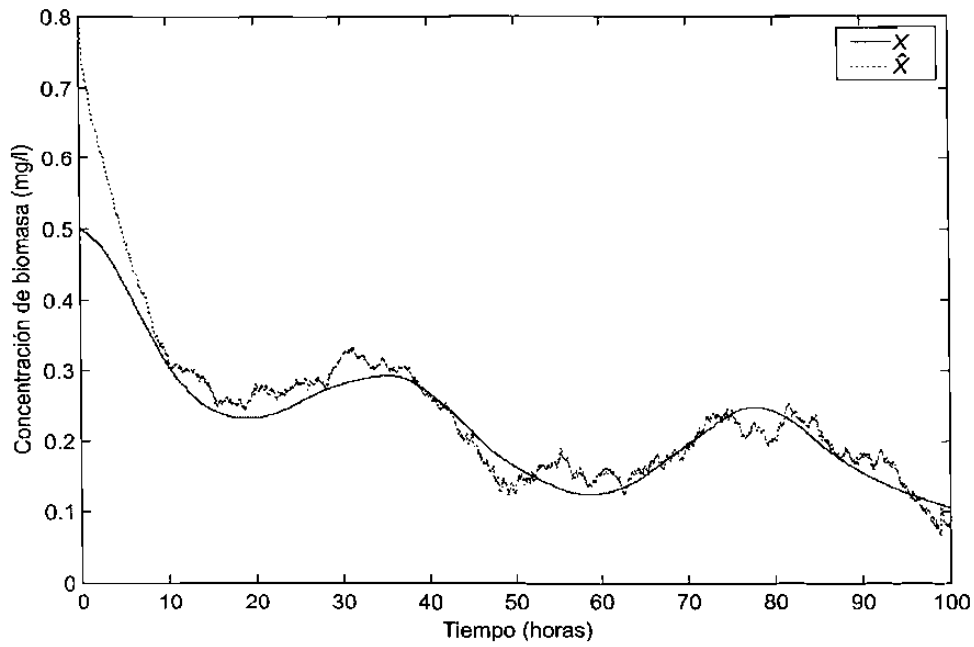


Fig. 4.22. Estimación de X con el observador de alta ganancia (Haldane).

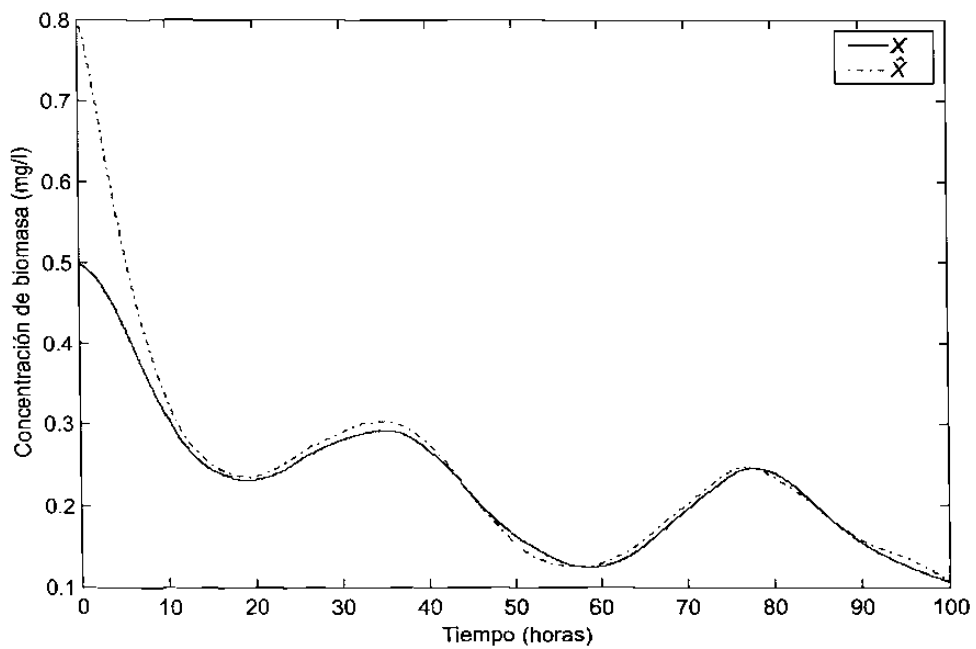


Fig. 4.23. Estimación de X con el observador integral (Haldane).

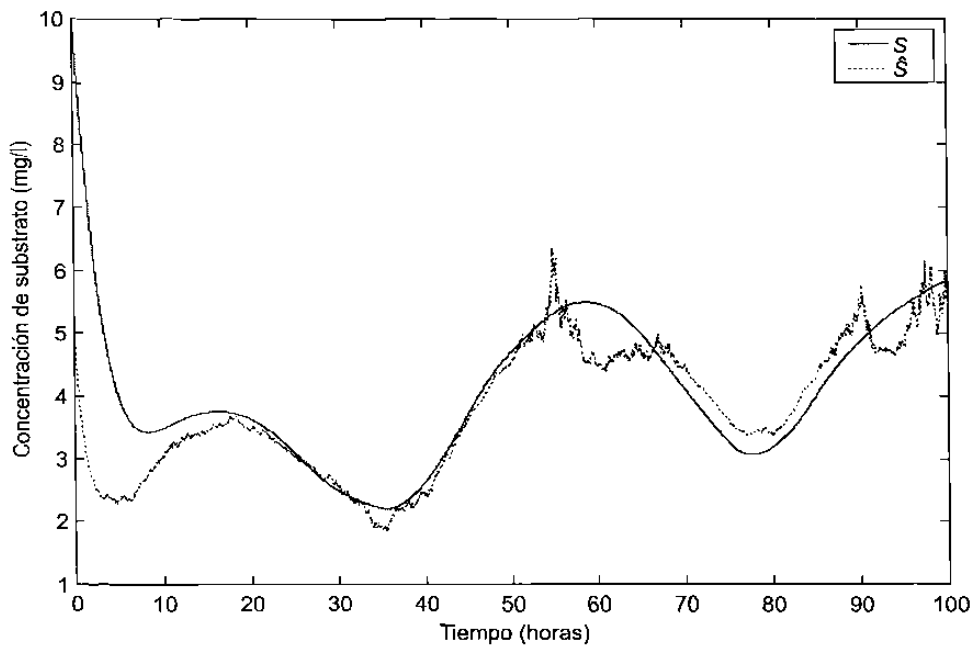


Fig. 4.24. Estimación de S con el observador de alta ganancia (Haldane).

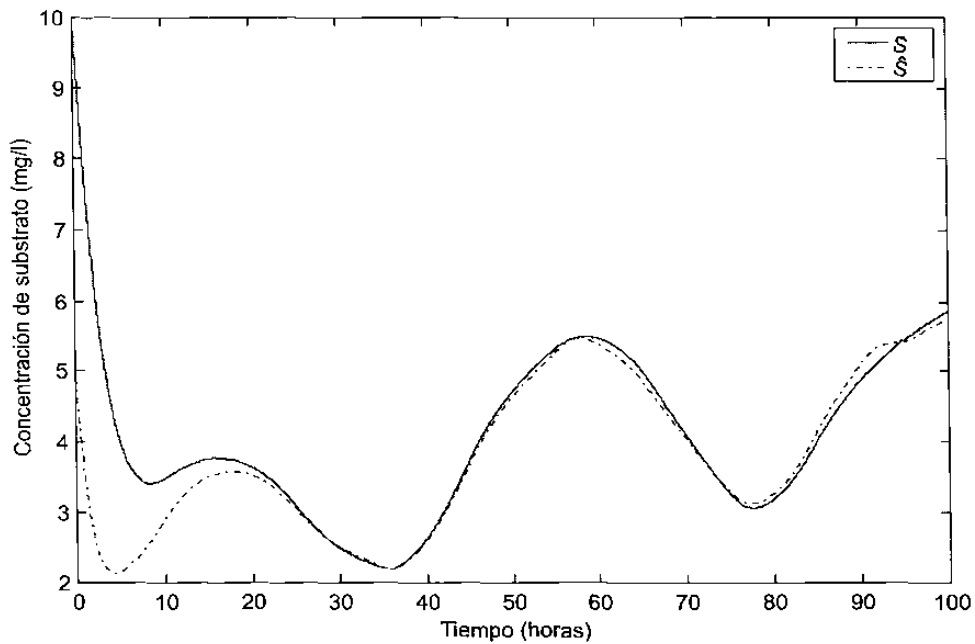


Fig. 4.25. Estimación de S con el observador integral (Haldane).

4.6 Conclusiones

En este capítulo se presentó el análisis de observabilidad y la estimación de los estados para un proceso de fermentación aeróbico a partir de la medición de la concentración de oxígeno disuelto (en la práctica esta medición se considera confiable, además de que los sensores son relativamente baratos) y utilizando los modelos de crecimiento microbiano de Monod y Haldane. Cuando se utilizó el modelo de Monod el diseño del observador no lineal se realizó empleando un cambio de coordenadas no lineal que llevaron al sistema original a una forma canónica observable que permitió implementar el observador. En el caso del modelo de Haldane se utilizó la misma metodología para diseñar el observador excepto que el cambio de coordenadas no lineal se restringía a un dominio más reducido. En ambos casos el desempeño de los observadores se verificó por medio de simulaciones, presentando buenos resultados.

Además se presentó el diseño de un observador no lineal con atenuación de perturbaciones en la salida, el cual se aplicó al proceso de fermentación. Se implementó el observador para los dos modelos de crecimiento microbiano (modelos de Monod y Haldane) y se comparó con un observador de alta ganancia con el propósito de mostrar sus propiedades de filtrado ante perturbaciones en la salida. El desempeño del observador se presentó por medio de simulaciones, donde se pudo constatar la atenuación del efecto de las perturbaciones en la salida del sistema del estado estimado.

La estimación de los estados del proceso de fermentación se verificó solamente en lazo abierto, es decir que no hay retroalimentación de los estados estimados al sistema original (generalmente se realiza por medio de la acción de control). En el siguiente capítulo se aplica la técnica de observación presentada a un proceso de tratamiento de aguas residuales cuando la acción de control es implementada con los estados estimados del sistema.

Capítulo 5

Aplicación a un reactor biológico de tratamiento de aguas residuales

5.1 Introducción

Un problema de gran importancia que se presenta actualmente es la escasez de agua potable en el mundo. La contaminación industrial y doméstica han contaminado ríos y mantos acuíferos que podrían ser utilizados para el consumo humano. Ésto ha generado una preocupación general en encontrar soluciones para esta problemática. Algunos países han tomado medidas estrictas (legislativas) en lo que concierne a la descarga de residuos industriales. Sin embargo, ésto no ha sido suficiente, ya que se sigue contaminando agua por todo el mundo. Otro factor importante es el aumento de la temperatura global de la tierra, puesto que ha traído cambios bruscos en el clima del mundo, es decir, mientras que en alguna región llueve demasiado en otra hay sequía y produce escasez de agua.

Una manera de resolver este problema es el tratamiento de aguas residuales, ya sea para uso industrial o para consumo humano. Actualmente la mayoría de los países están invirtiendo en la plantas tratadoras de agua para mejorar la purificación del agua o para hacer más eficiente el proceso.

Originalmente los procesos de tratamiento de aguas residuales funcionaban de manera experimental. Sin embargo, la necesidad de mejorar el proceso originó que se realizaran estudios más profundos para controlarlo. El objetivo de controlar el proceso de tratamiento de aguas residuales es obtener una mejor calidad del agua tratada y hacerlo más eficiente (como por ejemplo reducir el tiempo para tratar cierta cantidad de agua).

El tratamiento biológico de las aguas residuales se basa en el proceso aparentemente simple en el que una población mixta de microorganismos utiliza como nutrientes sustancias que contaminan el agua. Este es el mecanismo por el cual las corrientes de aguas naturales, como los lagos y los

ríos, se autopurifican.

Existen muchos métodos para el tratamiento biológico de aguas residuales que funcionan satisfactoriamente para ciertas características del agua residual. Sin embargo, cuando el agua residual contiene compuestos orgánicos tóxicos es difícil realizar el tratamiento por métodos biológicos convencionales. Una de las alternativas ante tales situaciones han sido los reactores discontinuos secuenciales, no obstante, éstos presentan dificultades ante sustancias tóxicas de los residuos (puesto que pueden inhibir a los microorganismos) y tiempos muy grandes de reacción.

En este capítulo se presenta una estrategia de control (propuesta por J. Moreno, *et al* en [20] y [21]) que minimiza el tiempo de llenado y reacción en un reactor discontinuo secuencial. Debido a las dificultades para medir todos los estados necesarios para implementar la estrategia de control se construye un observador integral de alta ganancia a partir de la medición de la concentración de oxígeno disuelto.

5.2 Descripción del proceso

5.2.1 Reactores discontinuos secuenciales

En este proceso la fermentación se lleva a cabo en un reactor o tanque en el cual los microorganismos crecen por el consumo de nutrientes.

El tratamiento de agua en el reactor biológico se lleva a cabo en un ciclo. Cada ciclo está dividido en una secuencia de cinco fases, las cuales son:

- Llenado.
- Reacción.
- Decantación.
- Vaciado.
- Tiempo muerto.

Al inicio de cada ciclo, el reactor contiene cierto volumen de agua y lodos activados⁸. El ciclo inicia con la fase de llenado, en donde se introduce el agua residual al reactor con cierto flujo

⁸ Agrupación de microorganismos y materia orgánica.

(éste depende de los efectos que se quieran lograr). Una vez que se alcanzan las condiciones adecuadas empieza la fase de reacción, en donde los microorganismos en suspensión dentro del reactor mineralizan los componentes tóxicos del agua residual. En la fase de decantando son asentados los lodos que resultan del consumo de substrato por los microorganismos. Una vez que finaliza la fase de decantado el agua tratada es retirada del reactor biológico. Finalmente, la fase de tiempo muerto consiste en remover los lodos e inicializar el ciclo (agregar nuevamente cierto volumen de agua y lodos activados).

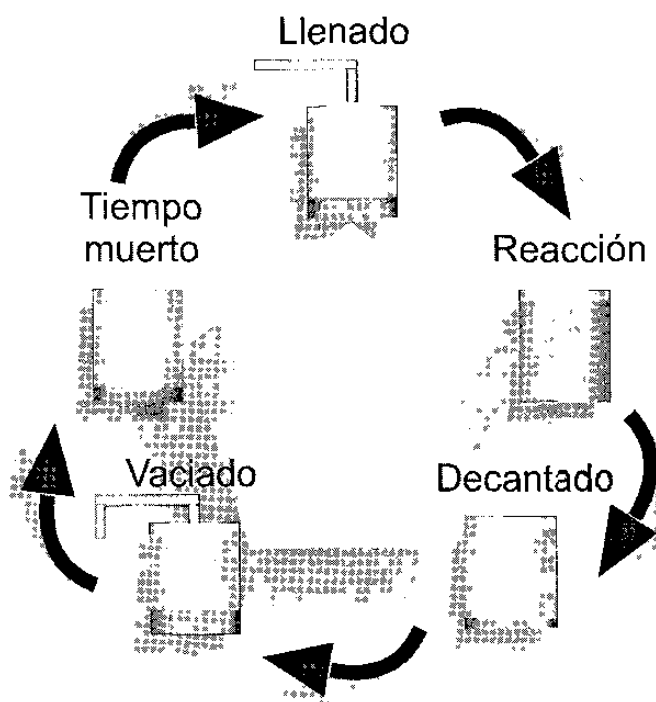


Fig. 5.1. Operación de un reactor discontinuo secuencial.

5.2.2 Forma de operación

Cada ciclo del proceso se repite periódicamente y cada fase tiene un tiempo de duración definido. La manera en que se determina esta duración se denomina forma de operación y tiene un impacto fundamental en las características que se desea lograr del agua a tratar. En la forma de operación usual la duración de cada una de estas fases es constante y reducida en base a la experiencia del operador.

5.3 Modelo matemático del proceso

Las fases de llenado y de reacción se describen mediante el siguiente modelo dinámico:

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu X - \frac{Q_{in}}{V} X \\ \dot{S} = -\frac{\mu X}{Y_x} + \frac{Q_{in}}{V} (S_{in} - S) \\ \dot{V} = Q_{in} \end{cases} \quad (5.1)$$

donde X es la concentración de biomasa; S es la concentración de sustrato; V es el volumen de agua en el tanque; μ es la tasa de crecimiento específica; Y_x es el coeficiente de conversión biomasa/sustrato; S_{in} la concentración de sustrato de entrada y Q_{in} es el flujo de entrada de agua.

Todas las variables de estado se consideran positivas $X, S, V \geq 0$, el volumen V está restringido al volumen del reactor $V \leq V_{max}$ y el flujo de entrada, el cual es la variable de control sólo toma valores en el intervalo $0 \leq Q_{in} \leq Q_{max}$.

Puesto que los residuos que intervienen en este proceso son sustancias orgánicas tóxicas, éstas pueden impedir el crecimiento de la biomasa en concentraciones altas. Este efecto normalmente se describe por la ley de Haldane:

$$\mu = \frac{\mu_{max} S}{K_S + S + S^2/K_I}$$

donde μ_{max} es la máxima tasa de crecimiento, K_S es la constante de afinidad y K_I es la constante de inhibición.

La figura 6.2 muestra el comportamiento de la tasa de crecimiento específica en función de la concentración de sustrato. Se puede observar que el máximo valor de la tasa de crecimiento específica se alcanza en μ^* , donde su correspondiente valor de concentración de sustrato es S^* .

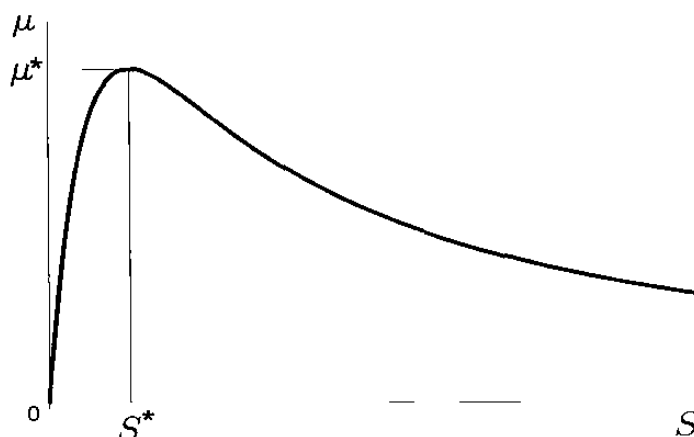


Fig. 5.2. Comportamiento de μ con la ley de Haldane.

5.4 Control óptimo

La reducción del tiempo de cada ciclo en el reactor discontinuo secuencial incrementaría la cantidad de agua residual a tratar. Puesto que las fases de decantado, vaciado y tiempo muerto normalmente tienen un tiempo fijo, la manera de optimizar el tiempo de cada ciclo del reactor discontinuo secuencial será reduciendo el tiempo en las fases de llenado y reacción.

Cuando el reactor discontinuo secuencial inicia con la fase de llenado, la concentración de substrato es S_0 y el volumen de agua en el reactor es V_0 . A medida que se va llenando se incrementa el tóxico presente en el agua residual así como su volumen en el tanque. Entonces la reacción inicia, y los microorganismos comienzan a degradar la sustancia tóxica. Cuando el substrato alcanza un valor mínimo deseado y el tanque se llena, la fase de reacción finaliza y toman lugar las otras fases (decantado, vaciado y tiempo muerto).

En la forma convencional el llenado se realiza en el menor tiempo posible, y el tiempo de la fase de reacción es lo suficientemente grande para asegurar que los microorganismos hayan mineralizado las sustancias tóxicas a degradar. La principal desventaja de esta forma de operación es que normalmente las dos fases requieren 24 horas en realizarse.

El objetivo es reducir el tiempo de llenado y de reacción al mínimo, con una alimentación en el reactor (por medio de Q_{in}) adecuada para obtener óptimos resultados (como maximizar la concentración de biomasa).

Para obtener la mayor degradación de la sustancia tóxica, se requiere que la tasa de crecimiento específica se mantenga al máximo. Esto se logra manteniendo $\mu = \mu^*$. Puesto que esto sucede para $S = S^*$, tenemos que \dot{S} debe ser igual a cero, para cuando ha alcanzado el valor S^* , por lo que:

$$0 = -\frac{\mu^* X}{Y_x} + \frac{Q_{sing}}{V} (S_{in} - S^*)$$

donde la estrategia de control está dada por:

$$Q_{sing} = \frac{\mu^* V X}{Y_x (S_{in} - S^*)}.$$

Para reducir el tiempo al mínimo y obtener la mayor degradación de la sustancia tóxica, se controla el flujo de entrada de agua para que primero se alcance S^* tan rápido como sea posible y después se mantenga esta concentración. Finalmente, cuando el reactor se ha llenado, se espera hasta que la concentración de sustrato sea menor a un límite inferior preestablecido. La expresión matemática se expresa de la siguiente manera:

$$Q_{in} = \begin{cases} 0 & \text{si } (V = V_{max}) \text{ ó } (S > S^*) \\ Q_{sing} & \text{si } (V < V_{max}) \text{ y } (S = S^*) \\ Q_{max} & \text{si } (V < V_{max}) \text{ y } (S < S^*) \end{cases} \quad (5.2)$$

donde V_{max} es el máximo volumen alcanzable en el reactor y Q_{max} es el flujo máximo alcanzable por la bomba de alimentación en el reactor, como se demostró en [21].

5.5 Estimación de los estados

Para poder implementar la estrategia de control óptimo se requiere del conocimiento de los estados del sistema. Normalmente es posible medir el volumen de agua en el reactor, sin embargo, no es el caso para las concentraciones de biomasa y sustrato (ya que los sensores son muy costosos o no proporcionan mediciones confiables). Este problema puede ser resuelto utilizando técnicas de observación que permiten estimar las variables de estado a partir de las entradas y salidas del sistema (como se presentó en el capítulo anterior).

Consecuentemente, es importante considerar la estimación basada en la medición de algunas

tasas de reacciones relevantes y fáciles de medir tal como lo es la concentración de oxígeno disuelto O , cuya dinámica es:

$$\dot{O} = - \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X + \frac{Q_{in}}{V} (O_{in} - O) + K_{l}a (O_{sat} - O) \quad (5.3)$$

donde $Y_{x/o}$ es el coeficiente de conversión biomasa/oxígeno, $K_{l}a$ es el coeficiente de transferencia de oxígeno, r es la tasa de respiración endógena, O_{in} es la concentración de oxígeno disuelto de entrada y O_{sat} es la concentración de saturación de oxígeno.

A partir de la medición de la concentración de oxígeno disuelto (cuya dinámica relaciona a las variables de estado X , S , V) y del conocimiento de los parámetros del modelo se construye un observador integral de alta ganancia el cual nos permite estimar los estados aún cuando se presente cierto tipo de perturbación en la salida.

Ahora bien, puesto que es posible medir el volumen, el sistema puede ser descrito de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{O} = - \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X + \frac{Q_{in}}{V} (O_{in} - O) + K_{l}a (O_{sat} - O) \\ \dot{X} = \mu X - \frac{Q_{in}}{V} X \\ \dot{S} = - \frac{\mu X}{Y_x} + \frac{Q_{in}}{V} (S_{in} - S) \\ y = O + d \end{cases} \quad (5.4)$$

donde d es una perturbación desconocida que satisface $|d(t)| < |O(t)|$, para todo $t \geq 0$.

Definiendo $W = \int_0^t y(\tau) d\tau$, el modelo anterior puede ser representado en la forma:

$$\begin{cases} \dot{W} = O + d \\ \dot{O} = - \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X + \frac{Q_{in}}{V} (O_{in} - O) + K_{l}a (O_{sat} - O) \\ \dot{X} = \mu X - \frac{Q_{in}}{V} X \\ \dot{S} = - \frac{\mu X}{Y_x} + \frac{Q_{in}}{V} (S_{in} - S) \\ y_0 = W \end{cases} \quad (5.5)$$

Para construir el observador consideremos el siguiente cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(O, X, S) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \left[\begin{array}{c} W \\ O \\ X \\ S \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} W \\ O \\ K_l a (O_{sat} - O) - \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X \\ K_l a \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) X - K_l^2 a (O_{sat} - O) - \mu X \left(\frac{\mu}{Y_{x/o}} + r \right) + \frac{\mu X^2 \mu_s}{Y_{x/o} Y_x} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

donde $\mu_s = \frac{\mu_{max} K_S - \mu_{max} S^2 / K_I}{(K_S + S + S^2 / K_I)^2}$. Por otra parte, como la tasa de crecimiento específica es una función no monótona, para garantizar que el difeomorfismo sea biyectivo, el sistema debe de ser tal que el valor de $\mu(S)$ se encuentre en un sólo lado de la curva con respecto a S^* . Esto se garantiza acotando los valores de la concentración de substrato en $S > S^*$, ya que si S toma el valor de S^* , el sistema resulta ser no observable, es decir el rango $\{dh, d(L_f h), d(L_f^2 h)\}$ no es completo. Y en $S \leq \check{S}$, $\check{S} > S^*$, donde \check{S} es tal que $\mu \neq 0$. Por lo tanto, los valores admisibles de las variables del sistema deben de estar en la región:

$$\Omega_A \hat{=} \left\{ (O, X, S, V) \mid O > 0, X > 0, S^* < S \leq \check{S}, V_{min} \leq V \leq V_{max} \right\}. \quad (5.6)$$

En la figura 5.3 se muestran los valores admisibles de $\mu(S)$.

El observador integral de alta ganancia para el sistema (5.5), en variables originales, está dado por:

$$\left[\begin{array}{c} \dot{\hat{W}} \\ \dot{\hat{O}} \\ \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{S}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \hat{O} \\ - \left(\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} + r \right) \hat{X} + \frac{Q_{in}}{V} (O_{in} - \hat{O}) + K_l a (O_{sat} - \hat{O}) \\ \hat{\mu} \hat{X} - \frac{Q_{in}}{V} \hat{X} \\ - \frac{\hat{\mu} \hat{X}}{Y_x} + \frac{Q_{in}}{V} (S_{in} - \hat{S}) \end{array} \right] - \Xi (\hat{W} - W)$$

donde la ganancia del observador está dada por:

$$\Xi = \begin{bmatrix} 4\theta \\ 6\theta^2 \\ 6\theta^2 \frac{a_1}{\Delta} + 4\theta^3 \frac{a_2}{\Delta} + \theta^4 \frac{a_3}{\Delta} \\ 6\theta^2 \frac{a_4}{\Delta} + 4\theta^3 \frac{a_5}{\Delta} + \theta^4 \frac{a_6}{\Delta} \end{bmatrix}$$

con

$$\Delta = \frac{\hat{\mu}^2 \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} + \frac{2\hat{\mu}r \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{\hat{\mu}^2 \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{\hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o} Y_x} + r^2 \hat{X} \hat{\mu}_s - \frac{r \hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{r \hat{X}^2 \hat{\mu}_s^2}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$a_1 = \frac{K_I a \hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{K_I a \hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x} - \frac{2K_I a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - K_I a \hat{X} r \hat{\mu}_s,$$

$$a_2 = \frac{K_I a \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}} - r \hat{X} \hat{\mu}_s + \frac{\hat{\mu} \hat{X}^2 \hat{\mu}_{ss}}{Y_{x/o} Y_x} + \frac{\hat{X}^2 \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$a_3 = \frac{\hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o}},$$

$$a_4 = \frac{K_I a \hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r K_I a \hat{\mu} - \frac{2K_I a \hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$a_5 = \frac{\hat{\mu}^2}{Y_{x/o}} + r \hat{\mu} - \frac{K_I a \hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r K_I a - \frac{2\hat{\mu} \hat{X} \hat{\mu}_s}{Y_{x/o} Y_x},$$

$$a_6 = -\frac{\hat{\mu}}{Y_{x/o}} - r,$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu_{\max} \hat{S}}{K_S + \hat{S} + \hat{S}^2/K_I}, \hat{\mu}_s = \frac{\mu_{\max} K_S - \mu_{\max} \hat{S}^2/K_I}{(K_S + \hat{S} + \hat{S}^2/K_I)^2} \text{ y } \hat{\mu}_{ss} = \frac{(2\mu_{\max} \hat{S}^2 - 6\mu_{\max} K_S) \hat{S}/K_I - 2\mu_{\max} K_S}{(K_S + \hat{S} + \hat{S}^2/K_I)^2}.$$

5.6 Control de lazo cerrado

Para poder implementar la estrategia de control con el observador propuesto el sistema debe encontrarse dentro de la región definida por (5.6).

Por lo tanto el control de lazo cerrado es:

$$Q_{in} = \begin{cases} 0 & \text{si } (V = V_{\max}) \text{ o } (\hat{S} > \tilde{S}) \\ Q_{slc} & \text{si } (V < V_{\max}) \text{ y } (\hat{S} = \tilde{S}) \\ Q_{\max} & \text{si } (V < V_{\max}) \text{ y } (\hat{S} < \tilde{S}) \end{cases}$$

donde $\tilde{S} = S^* + \epsilon$ para $\epsilon > 0$ y $Q_{slc} = \frac{\mu(\tilde{S})V\hat{X}}{Y_x(S_{in} - \tilde{S})}$.

Este control de lazo cerrado garantiza que todas las trayectorias del sistema permanezcan dentro de la región definida por (5.6), si cada ciclo del proceso inicia en un valor $S^* < S_0 \leq \tilde{S}$. Puesto que la tasa de crecimiento específica sólo es llevada a un valor muy cercano del máximo, el control es subóptimo.

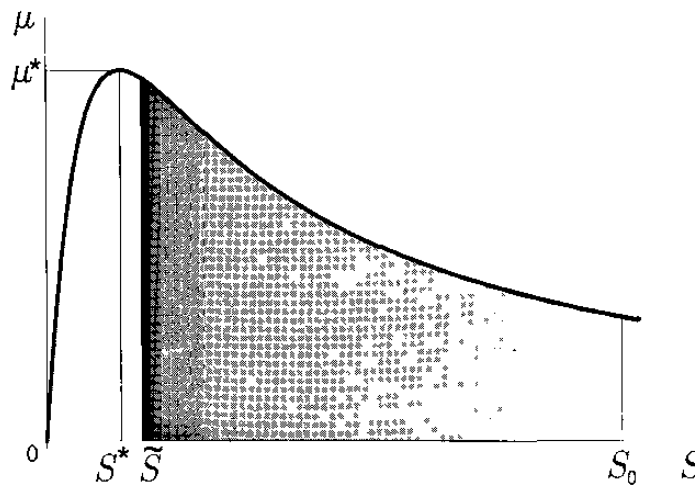


Fig. 5.3. Región de valores admisibles.

Resultados de simulación

Con el propósito de mostrar el desempeño del sistema en lazo cerrado se presentan los resultados en simulaciones obtenidos para la concentración de oxígeno disuelto O , sin perturbaciones y con perturbaciones (ver figuras 5.4-5.8 y 5.9-5.14, respectivamente).

Las simulaciones fueron llevadas a cabo con los siguientes valores numéricos: $Y_x = 0.5$, $Y_{x/o} = 1$, $O_{in} = 0 \text{ mg/l}$, $K_1 a = 40 \text{ hrs}^{-1}$, $O_{sat} = 20 \text{ mg/l}$, $r = 0.0097 \text{ hrs}^{-1}$, $S_{in} = 200 \text{ mg/l}$, $K_s = 2 \text{ mg/l}$, $K_I = 50 \text{ mg/l}$ y $\mu_{\max} = 0.072 \text{ hrs}^{-1}$. Las condiciones iniciales fueron: Para el sistema: $O(0) = 8 \text{ mg/l}$, $X(0) = 7000 \text{ mg/l}$, $S(0) = 50 \text{ mg/l}$ y $V(0) = 5 \text{ l}$. Para el observador:

$\hat{O}(0) = 10 \text{ mg/l}$, $\hat{X}(0) = 7100 \text{ mg/l}$, $\hat{S}(0) = 55 \text{ mg/l}$. El valor del parámetro $\theta = 16$. Las figuras 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 muestran el desempeño del sistema y el observador, cuando no se presentan perturbaciones en la salida. Se puede apreciar una buena convergencia de los estados obtenidos por el observador con los estados del sistema. Además que el tiempo de las fases de llenado y reacción se redujo a 2.5 horas aproximadamente. Las figuras 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13 y 5.14 muestran el desempeño en lazo cerrado cuando la salida es afectada por un ruido medible del 2% del máximo valor de la salida (aproximadamente) con media cero y desviación estándar de 1. Se puede hacer notar que los estados producidos por el observador convergen a los estados del sistema, mostrando claramente una atenuación ante la perturbación en la salida.

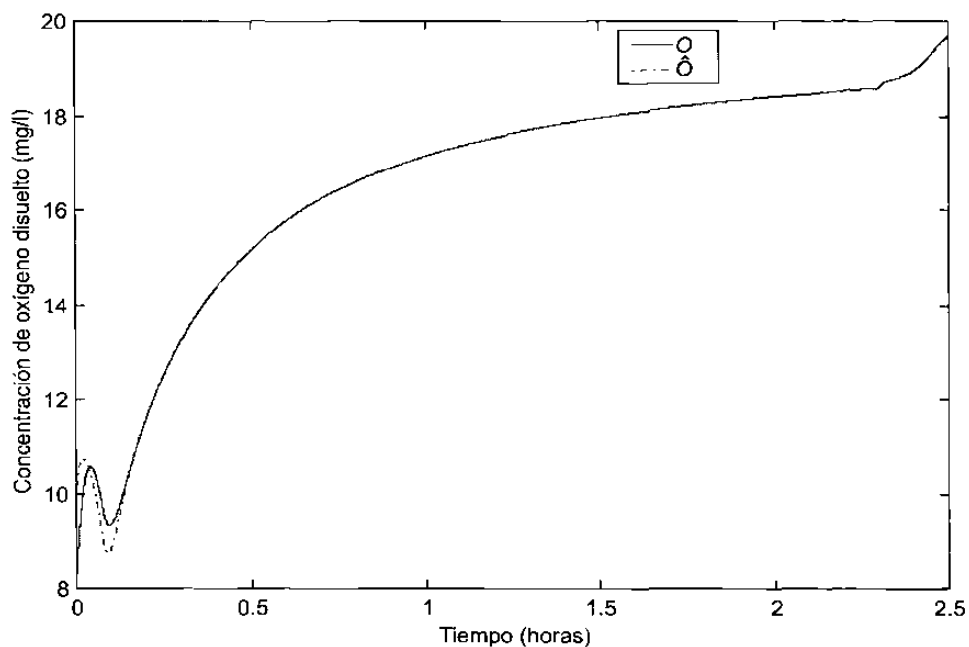


Fig. 5.4. Concentración de oxígeno disuelto (lazo cerrado).

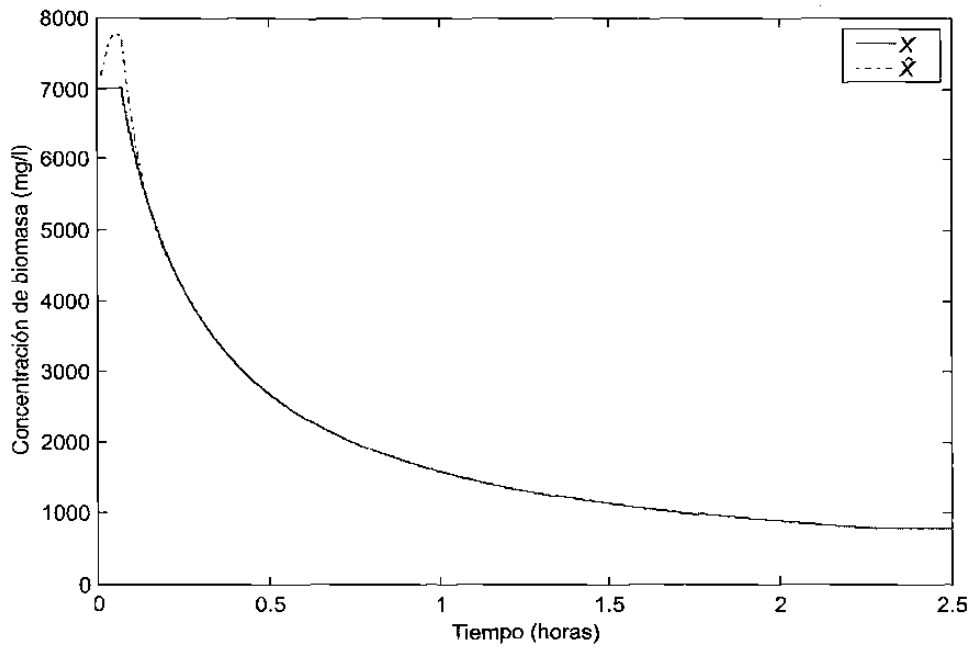


Fig. 5.5. Concentración de biomasa (lazo cerrado).

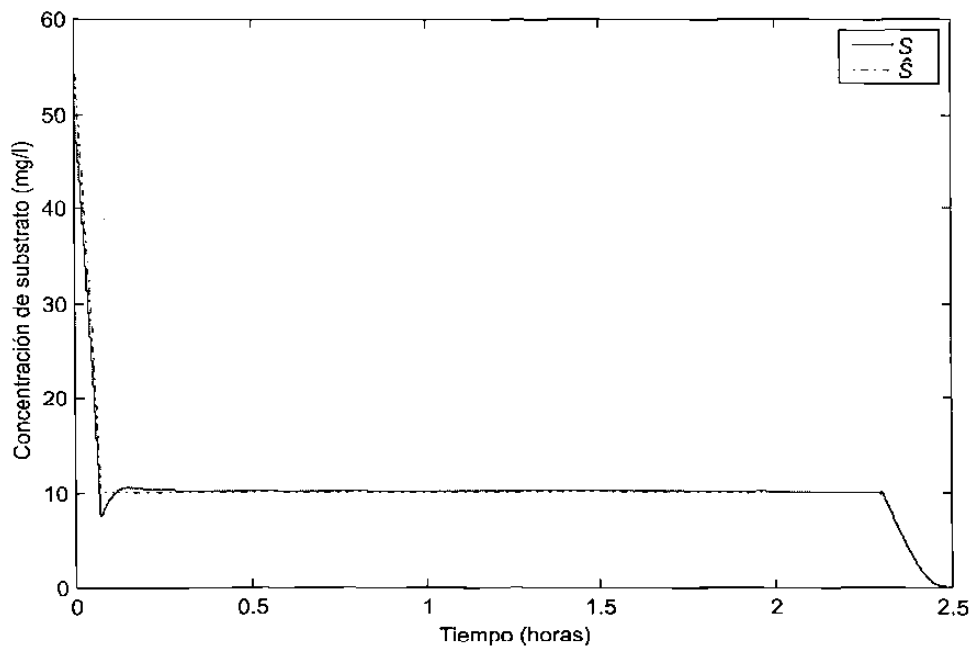


Fig. 5.6. Concentración de sustrato (lazo cerrado).

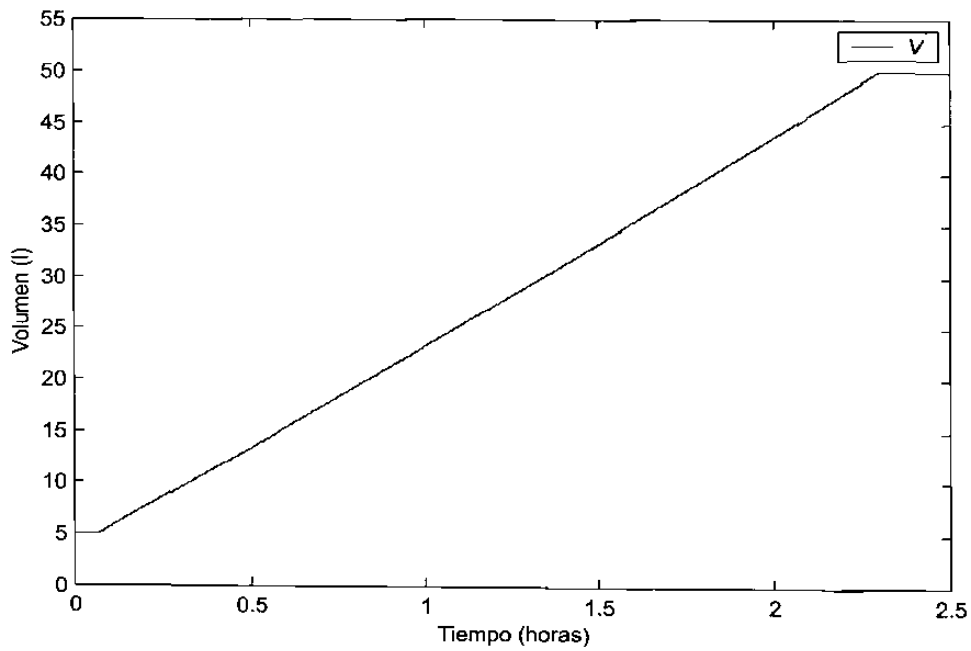


Fig. 5.7. Volumen de agua en el tanque.

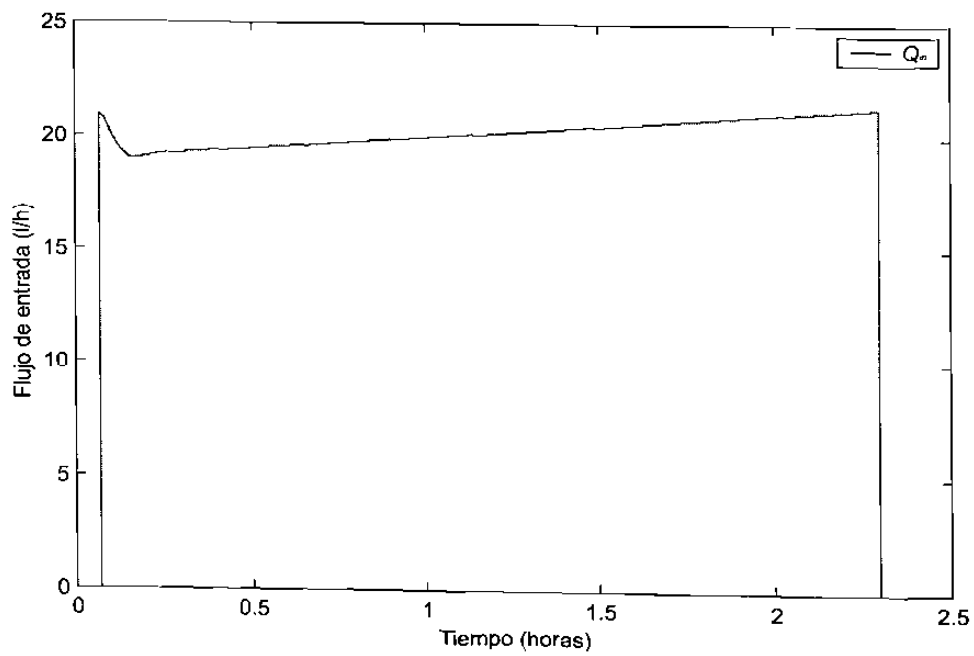


Fig. 5.8. Control de flujo de entrada.

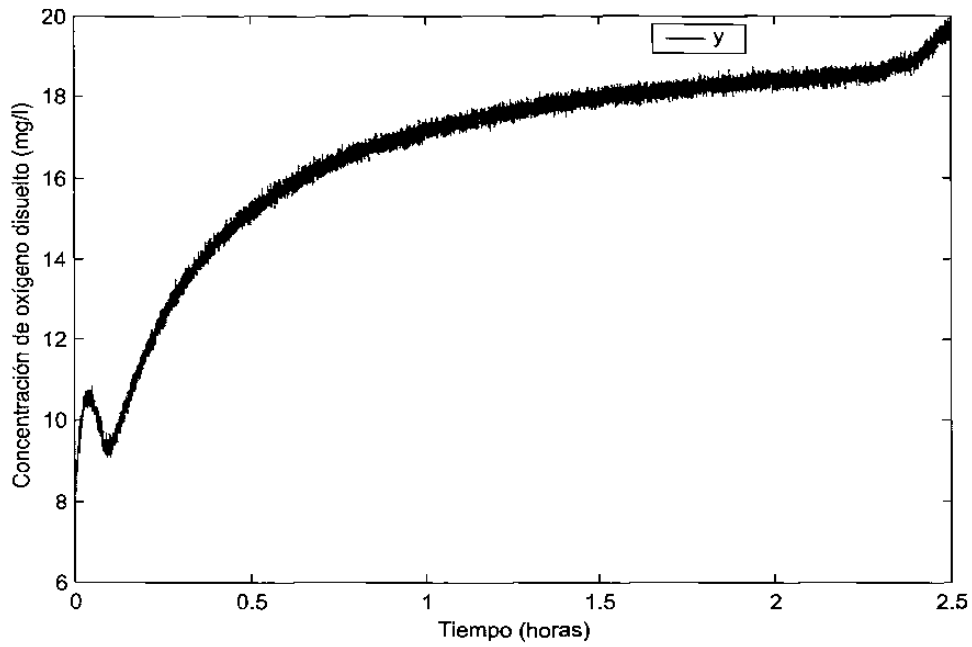


Fig. 5.9. Salida $y(t)$ afectada por ruido.

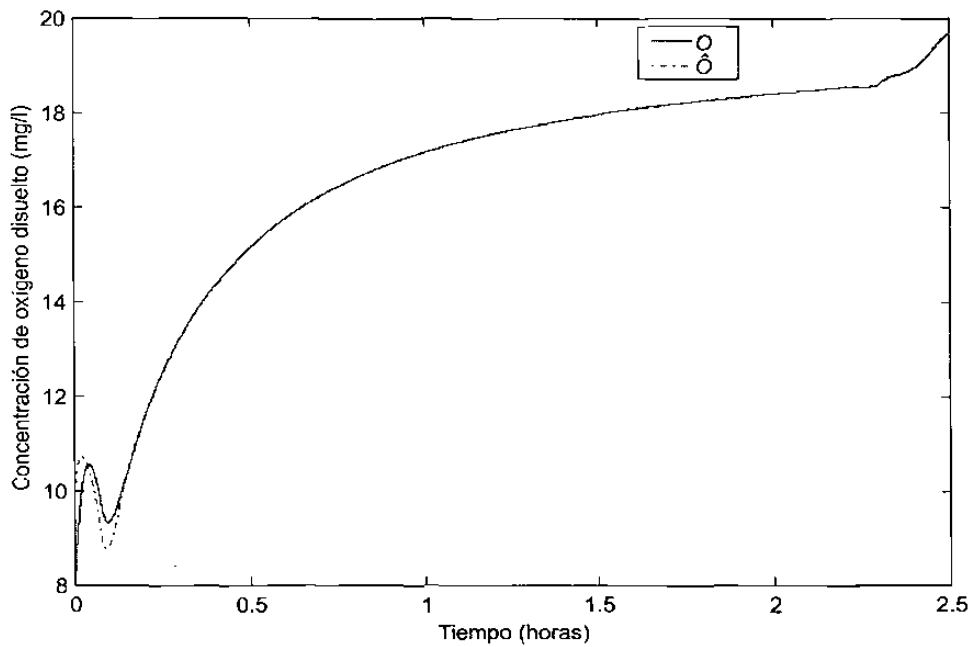


Fig. 5.10. Concentración de oxígeno disuelto (lazo cerrado con y ruidosa).

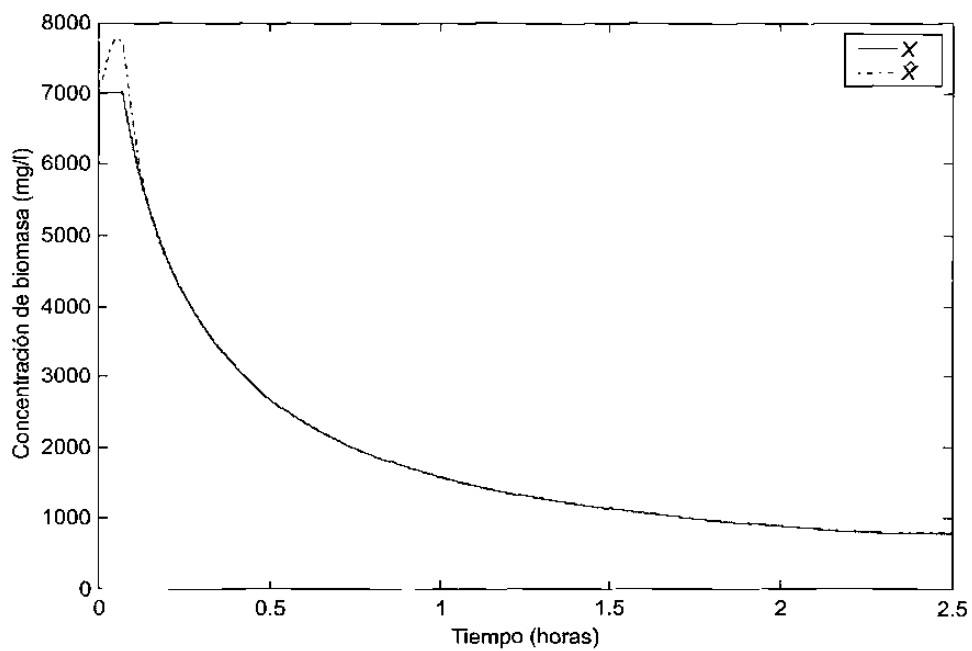


Fig. 5.11. Concentración de biomasa (lazo cerrado con y ruidosa).

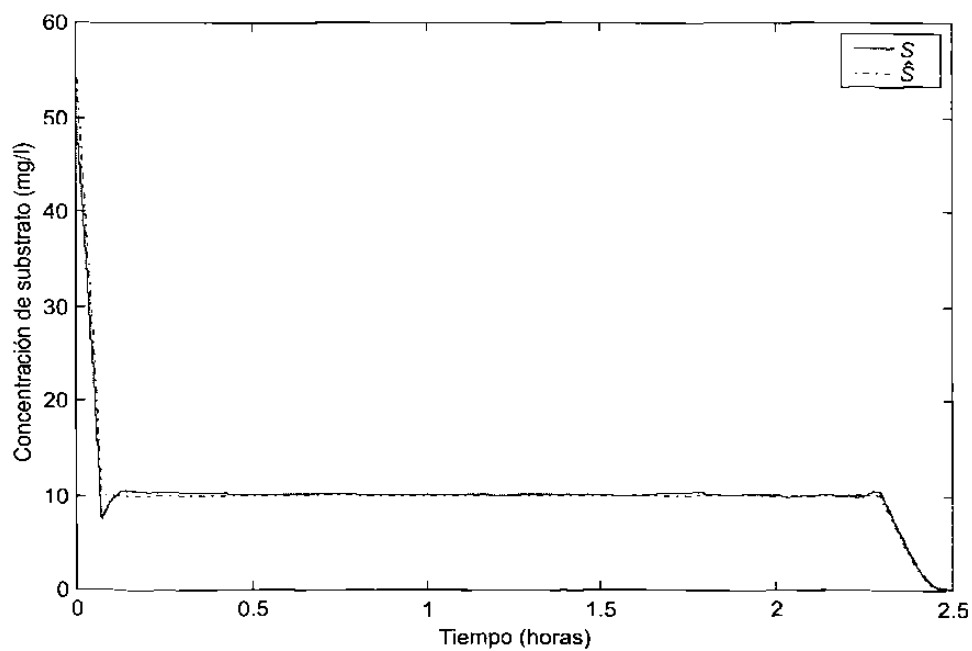
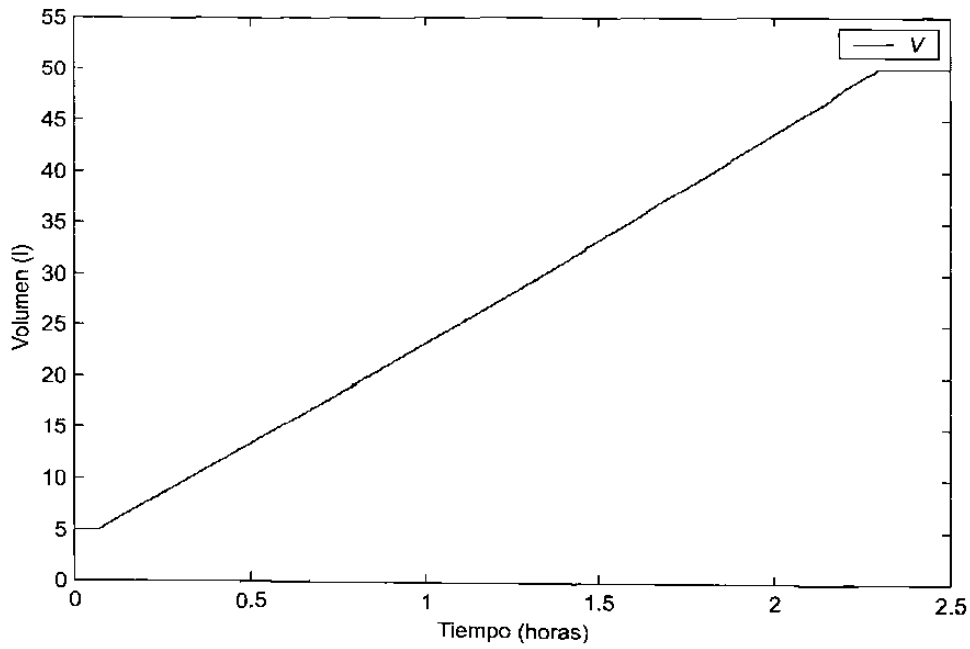
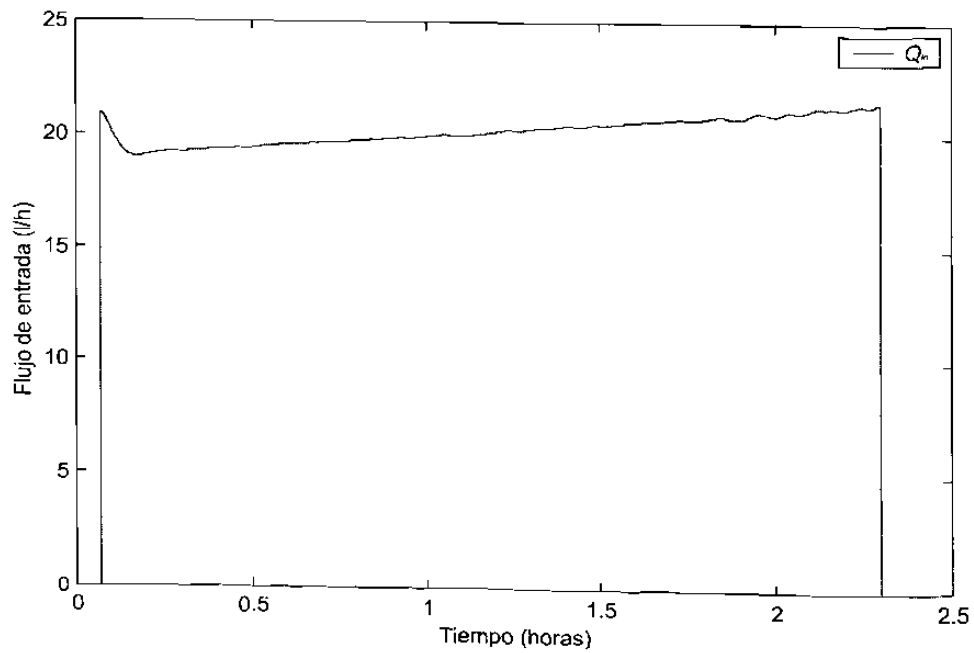


Fig. 5.12. Concentración de sustrato (lazo cerrado con y ruidosa).

Fig. 5.13. Volumen en el tanque (con γ ruidosa).Fig. 5.14. Control de flujo de entrada (con γ ruidosa).

5.7 Conclusiones

En este capítulo se presentó una estrategia de control óptimo basado en [21] para un proceso de tratamiento de aguas residuales que minimiza el tiempo en las fases de llenado y reacción, además de maximizar la tasa de crecimiento específica. Utilizando un observador integral de alta ganancia se estimaron los estados del proceso para poder implementar esta estrategia de control, verificando que bajo ciertas condiciones funciona en cada ciclo del proceso.

La estrategia de control presentada funciona siempre y cuando el comportamiento de la tasa de crecimiento específica del proceso se describa por el modelo de Haldane. En el caso de haber considerables diferencias el desempeño del proceso podría ser deficiente.

En el caso de la estimación el dominio en que funciona el observador es aceptable (con respecto a la estrategia de control utilizada), sin embargo, garantizar que la concentración de substrato en el proceso inicie en un valor adecuado puede ser restrictivo.

La estrategia de control se implementó con los estados estimados y se mostró en simulaciones, presentando un buen desempeño, aun cuando la salida fue afectada con perturbaciones.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Aportaciones de esta investigación

En este trabajo se trataron los problemas de control y estimación de procesos de fermentación aeróbicos.

Puesto que una de las principales dificultades en los procesos de fermentación es el conocimiento de la estructura de la tasa de crecimiento específica se diseñó un observador que logró estimar la concentración de crecimiento de biomasa, a partir de la medición de la concentración de oxígeno disuelto, sin establecer un modelo de la tasa de crecimiento específica (con respecto al observador), logrando buenos resultados de convergencia. Esta estimación podría ser utilizada para comprobar o establecer el modelo de la tasa de crecimiento específica.

También un análisis de las propiedades de observabilidad fue realizado para el modelo del proceso de fermentación aeróbico, y se diseñó un observador de alta ganancia que logró estimar las concentraciones de biomasa y substrato a partir de la medición de la concentración de oxígeno disuelto, para dos de las principales leyes de crecimiento microbiano. Cabe señalar que en la práctica la medición de la concentración de oxígeno disuelto se realiza con relativa facilidad. Los observadores presentaron un buen desempeño en la estimación de los estados del proceso.

Se sabe que los observadores de alta ganancia tienden a amplificar las perturbaciones que se presentan en la salida del proceso. Para resolver este problema, se presentó el diseño de un observador integral de alta ganancia que permite atenuar las perturbaciones en la salida. Se aplicó al proceso de fermentación aeróbico logrando estimar los estados del proceso y además se comparó con el observador de alta ganancia convencional, presentando notoriamente un mejor desempeño y buenas propiedades de filtrado.

Finalmente, un proceso de tratamiento de aguas residuales fue estudiado, donde se presentó una estrategia de control óptimo, que minimiza el tiempo en las fases de llenado y reacción en el reactor biológico. Utilizando un observador integral de alta ganancia se estimaron las variables del

proceso para poder implementar esta estrategia de control, presentando las condiciones necesarias para el funcionamiento en cada ciclo del proceso. El desempeño de lazo cerrado se mostró en simulaciones, para dos condiciones, cuando la salida era afectada por perturbaciones y cuando no lo era, resultando que las fases de llenado y reacción se reducían considerablemente en comparación de la forma convencional en que se realiza.

6.2 Trabajos futuros

Como trabajos futuros están el de realizar el análisis matemático de lazo cerrado de la estrategia de control implementada con los estados estimados por el observador en el procesos de tratamiento de aguas residuales.

Además tomando en cuenta que una de las principales dificultades en este tipo de procesos es considerar una ley de crecimiento microbiano y que al utilizar un modelo para implementarlo es necesario conocer todos sus parámetros, como trabajo futuro, es el de realizar un estudio de diseño de un observador independiente del modelo de crecimiento microbiano a partir de la medición de la concentración de oxígeno disuelto. Además, diseñar otras técnicas de control que permitan mejorar el desempeño del proceso y que no dependan directamente de la ley de crecimiento, ya que la estrategia de control implementada en este trabajo se basa en el modelo de crecimiento de Haldane.

Finalmente es el de realizar estudios en un proceso real de fermentación.

Apéndice A

Microbiología

En este apéndice se presenta algunas definiciones fundamentales para el entendimiento de los microorganismos que intervienen en la fermentación (ver [5]).

Fermentación

El proceso de fermentación se lleva a cabo mediante la acción de microorganismos, los cuales consumen nutrientes para obtener los productos deseados.

La fermentación se define como la clase general de cambios o descomposiciones químicas producidas en los substratos orgánicos mediante la actividad de microorganismos vivos.

Microorganismos de fermentación

Son considerados como microorganismos de fermentación las levaduras, mohos y bacterias. Estos microorganismos de fermentación son incapaces de fabricar su propio alimento por el proceso corriente de fotosíntesis, ya que carecen de clorofila, y están clasificados como hongos que pertenecen al grupo de las talofitas. Los principales organismos utilizados en fermentaciones son algunos tipos de los ascomicetos (hongos con ascas) y de los ficomicetos (hongos próximos a algas) y un gran número de especies bacterianas.

Los microorganismos de fermentación se diferencian grandemente entre sí en cuanto morfología, tamaño, reacción con el oxígeno libre, formas de reproducción, requisitos de crecimiento, capacidad para asimilar o fermentar materias primas (naturales) y en otros aspectos. Pero todos son incoloros, se desarrollan más activamente en la oscuridad o con luz difusa y producen enzimas mediante los cuales catalizan las reacciones que le son propias.

Cultivo de microorganismos

Esta técnica puede llevarse a cabo al proporcionar a los microorganismos un medio favorable para su crecimiento. Ello significa que las nuevas células dispongan de nutrimentos necesarios en forma adecuada para emplearlos como materiales sintéticos, una fuente de energía y temperatura, oxígeno y otros factores que sean adecuados.

Medio de cultivo

Un medio de cultivo es un sustrato o solución de nutrimentos en que se cultivan los microorganismos. Los microorganismos necesitan distintos materiales nutritivos, y se emplean ciertos medios para finalidades específicas (tal como para precisar la capacidad de digestión de proteínas de un microorganismo, carbohidratos etc.).

Estructura de la bacteria

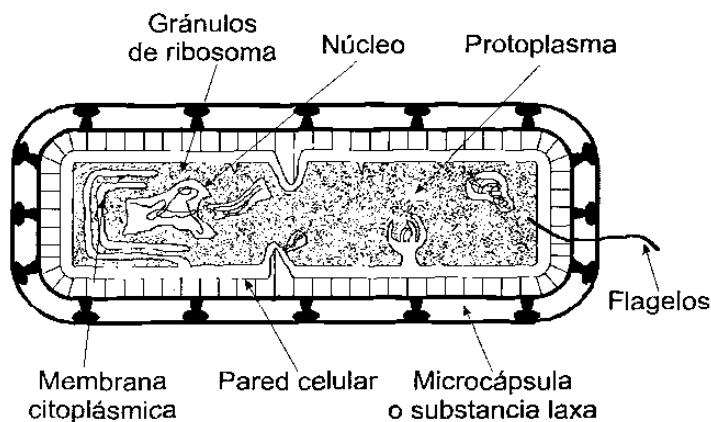


Fig. A.1. Estructura de la bacteria.

En la figura A.1 se presenta la estructura de la bacteria en forma esquemática. El protoplasma está rodeado por una membrana citoplásmica independiente, que a su vez está incluida en la pared celular. Fuera de la pared hay una microcápsula o sustancia laxa. El protoplasma además contiene cientos de ribosomas y un núcleo o cuerpo de cromatina (nuclóide o genóforo). Las bacterias móviles tienen uno o más flagelos, y las bacterias en esporación pueden incluir endoesporas.

Reproducción de bacterias

El método principal de reproducción es la división sencilla, conocida como reproducción vegetativa. Se inicia con el crecimiento celular, la célula se alarga, a menudo varias veces su tamaño original, y aparece la división nuclear. La división celular parece ser iniciada por el crecimiento hacia adentro de la membrana citoplásmica que produce una placa transversal y forma dos células hijas independientes. Aparece una pared transversal y divide a esta placa en dos capas, y después de ello las células hijas pueden separarse.

Requerimientos de crecimiento

Los factores necesarios para el cultivo de microorganismos son los térmicos y nutricionales, los cuales involucran condiciones controladas del medio de cultivo (pH, agitación, aeración etc.).

Una forma sencilla de precisar lo anterior es inocular uniformemente el medio de cultivo e incubar en él el microorganismo. El crecimiento en la superficie indica la presencia de microorganismo aerobio, el crecimiento en la profundidad del medio indica microorganismo anaerobio, y el crecimiento completo se obtiene con organismos anaerobios facultativos, esto es, un aerobio que puede crecer anaerobiamente (fig. A.2).

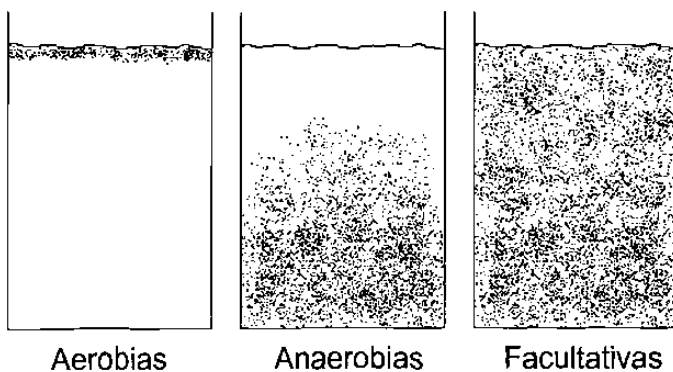


Fig. A.2. Crecimiento de microorganismos.

Nutrición microbiana

Los nutrientes (alimentos) son sustancias extracelulares que después de pasar por la membrana celular se emplean como material sintético o para que la célula obtenga energía.

Prácticamente cualquier sustancia terrestre puede servir de nutriente a un microorganismo. Algunas sustancias van desde materiales conocidos como las proteínas, azúcares y purinas, hasta sustancias como el caucho, papel, cuero, aceite, trementina, monóxido de carbono y hierro. Ningún microorganismo puede utilizar todos los nutrientes, y algunas sustancias son empleadas solamente por un número pequeño de especies.

En general la nutrición de los microorganismos es holofítica, donde la función de la membrana celular es seleccionar y transportar las moléculas de poco peso. La pared bacteriana impide la entrada de moléculas grandes. El fenómeno de transporte necesita energía y es catalizado por enzimas denominadas permesas. Algunas permesas son producidas sólo cuando hay un determinado sustrato.

Muchas bacterias obtienen energía por reacciones denominadas oxidaciones. Cuando se oxida una sustancia, y pierde electrones; otra sustancia los recibe y en consecuencia se reduce. Por ello este fenómeno incluye la pérdida de electrones, que se acompaña de pérdida de hidrógeno o ganancia de oxígeno. Toda oxidación se acompaña de reducción equivalente de otra sustancia y no hay oxidación si falta reducción.

En la mayor parte de las oxidaciones biológicas, hay paso rápido de electrones de una molécula de sustrato, llamada donador de hidrógeno a otra sustancia, receptor de hidrógeno. En la fermentación, sustancias orgánicas sirven simultáneamente como aceptores y donadores de hidrógeno; en consecuencia, distintas partes de la misma molécula cubren estas funciones. Dado que los productos incluyen considerables cantidades de energía, el producto de energía disponible durante la fermentación es bajo.

Respiración aerobia

Es la oxidación biológica en que el oxígeno molecular es el último aceptor de hidrógeno. Algunos microorganismos obtienen la energía al oxidar sustancias inorgánicas como el ácido sulfhídrico, azufre, hierro, amoníaco, etc. Mientras que otros por ejemplo convierten la glucosa a ácido pirúvico y después a bióxido de carbono y agua.

Respiración anaerobia

La respiración anaerobia es un fenómeno oxidativo en que sustancias inorgánicas distintas del oxígeno sirven como aceptor terminal de hidrógeno y electrones. Muchos microorganismos oxidan la glucosa completamente incluso sin oxígeno atmosférico cuando disponen de un agente oxidante (por ejemplo el nitrato de potasio KNO_3).

Enzimas

La actividad de las células vivas, bacterias, plantas o animales, son llevadas a cabo con la participación de las enzimas. Cada célula incluye varias de ellas, y su tipo y número dependen de las capacidades genéticas del organismo. Las enzimas son proteínas y son producidas solo por células vivas.

Una enzima es un catalizador orgánico que modifica el índice o velocidad de una reacción química y que permanece prácticamente inalterado al terminar la reacción. Su función es aproximar los substratos y orientarlos en forma tal que reaccionen lo mas cerca posible. Además de ello, la enzima forma un complejo con el substrato, que lleva a acabo una redistribución energética con el mismo, y en esta forma se necesitan cantidades menores de energía para que ocurra la reacción.

Crecimiento y muerte de las bacterias

El estudio del crecimiento de las bacterias se lleva a cabo mediante el conteo de los microorganismos en un cultivo a intervalos de tiempo.

Existen métodos que permiten cuantificar con relativa exactitud la población total, que incluyen células vivas y muertas, y así poder verificar su comportamiento.

Curvas de población bacteriana

Después de efectuar el conteo de los microorganismos que se encuentran en un cultivo se realiza una gráfica para conocer su comportamiento en el tiempo. Se emplean logaritmos para representar claramente el número de microorganismos y en esta forma presentar con exactitud los cambios de población.

La fig. A.3 muestra una curva típica de crecimiento en donde se puede observar que después de un período breve de lactancia aumenta la población rápidamente al máximo, y después de ello se estabiliza. Por último, la población viva disminuye hasta cero.

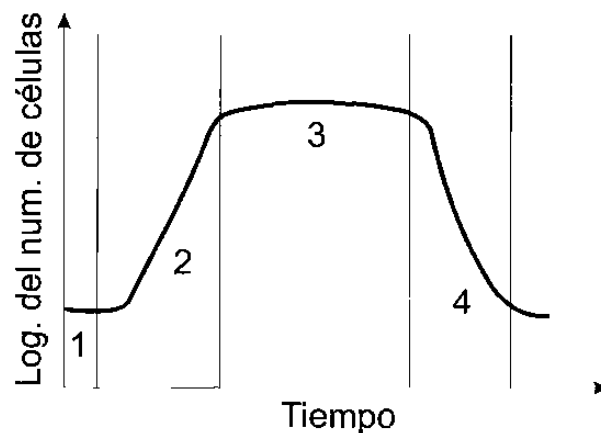


Fig. A.3. Curva de crecimiento. 1, fase de aumento de tamaño de las células; 2, fase de multiplicación logarítmica; 3, nivel estacionario máximo; 4, fase de muerte logarítmica.

1. Fase de aumento de tamaño de las células

La primera fase de la curva de población en un cultivo bacteriano es el aumento de tamaño celular, conocida como "fase de retardo".

Cuando las células son transferidas de un medio a otro, no hay un aumento del número de células. Sin embargo, el tamaño de las células cambia y esto se debe a que el microorganismo se adapta a su nuevo medio.

2. Fase de multiplicación logarítmica

La división celular ocurre rápidamente con velocidad constante durante esta fase, es decir cada división sucesiva necesita el mismo tiempo que la que le antecedió.

La población se duplica en forma tal que el número de bacterias aumenta en forma exponencial o logarítmica.

Durante esta fase la tasa de crecimiento permanece constante. La tasa de crecimiento es independiente del substrato mientras que este un exceso presente. La razón de incremento en la concentración de microorganismos está correlacionada con la tasa de crecimiento específica y la concentración de microorganismos.

3. Nivel estacionario máximo

Tan pronto como el substrato es metabolizado o sustancias tóxicas se formen, el crecimiento decrece o se detiene completamente. La concentración de microorganismos solo se incrementa gradualmente o permanece constante durante esta fase.

4. Fase de muerte logarítmica

En esta fase la energía de reserva de las células se agota y la muerte de las células tiende a seguir una curva exponencial o logarítmica, en la que la mitad de las células sobrevivientes mueren en cada intervalo cronológico igual.

Apéndice B

Geometría diferencial

Considere el siguiente cambio de coordenadas no lineal descrito de la siguiente forma:

$$z = \Phi(x)$$

donde $\Phi(x)$ representa una función valuada en \mathbb{R}^n de n variables, es decir

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \dots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \phi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

con las siguientes propiedades

(i) $\Phi(x)$ es biyectiva, es decir, es invertible, y por lo tanto, existe una función $\Phi^{-1}(z)$ tal que

$$\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x$$

para todo x en \mathbb{R}^n .

(ii) $\Phi(x)$ y $\Phi^{-1}(z)$ ambos son mapeos suaves, es decir tienen derivadas parciales continuas de cualquier orden.

Una transformación de este tipo es llamado un **difemorfismo global** en \mathbb{R}^n .

Suponga que $\Phi(x)$ es una función suave definida en algún subconjunto U de \mathbb{R}^n . Suponga que la matriz jacobiana de Φ es no singular en el punto $x = p$. Entonces, en un subconjunto abierto adecuado V de U , que contiene a p , $\Phi(x)$ define un **difemorfismo local**.

Teorema B.1 (Función inversa) Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo suave. Si la matriz jacobiana

$$\frac{d\Phi}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

es no singular en algún punto $p \in U$, entonces existe un vecindad $V \subset U$ de p tal que $\Phi : V \rightarrow \Phi(V)$ es un difemorfismo.

Sea p un punto de E^n , el espacio n dimensional Euclidiano, y U una vecindad de p . Sea $h : U \subset E^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función valuada en los reales definida en U . Dependiendo de las vecindades de coordenada (carta de coordenadas) (U, Φ) escogidas, la función h es expresada en coordenadas locales como

$$h_\Phi = h \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

La expresión h_Φ depende de la elección de las coordenadas locales.

La diferencial de una función suave $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es definida en coordenadas locales como

$$w = dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n$$

y puede ser expresada como vector gradiente fila

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right].$$

Dadas r funciones suaves valuadas en los reales ϕ_1, \dots, ϕ_r en $U \subset \mathbb{R}^n$, $\text{rango} \{d\phi_1, \dots, d\phi_r\} = r$ en $p \in U$ es equivalente a

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = r$$

para $x = p$ (para todo $x \in U$).

Teorema B.2 Si el $\text{rango} \{d\phi_1, \dots, d\phi_n\} = n$ en algún punto $p \in U$, un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , entonces existe una vecindad $V \subset U$ de p tal que $\Phi : V \rightarrow \Phi(V)$ es un difeomorfismo.

Campo vectorial: Un mapeo suave $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio, se dice ser un campo vectorial en D . Un campo vectorial es una columna n dimensional.

Derivada de Lie: Sean $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mapeos suaves. La derivada de Lie de h con respecto a f o a lo largo de f , se expresa como $L_f h$, se define por

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x).$$

La derivada de Lie repetida a lo largo del mismo campo vectorial o de uno nuevo se denota como sigue:

$$\begin{aligned} L_g L_f h(x) &= \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g(x), \\ L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x), \\ L_f^1 h(x) &= L_f h(x), \\ L_f^0 h(x) &= h(x). \end{aligned}$$

Corchete de Lie: Sean f y g dos campos vectoriales en $D \subset \mathbb{R}^n$. El corchete de Lie de f y g , expresado como $[f, g]$, es un tercer campo vectorial definido por

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

donde $[\partial g / \partial x]$ y $[\partial f / \partial x]$ son matrices Jacobianas. Se puede repetir el corchete de Lie de f con g . La siguiente notación es utilizada para simplificar este proceso:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g(x) &= g(x), \\ ad_f g(x) &= [f, g](x), \\ ad_f^k g(x) &= [f, ad_f^{k-1} g](x), \end{aligned}$$

y satisface las siguientes propiedades:

(i) **Bilineal:** Sean f_1, f_2, g_1 y g_2 campos vectoriales y sean r_1 y r_2 números reales. Entonces,

$$\begin{aligned} [r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] &= r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1], \\ [f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] &= r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2]. \end{aligned}$$

(ii) **Anti conmutatividad:** $[f, g] = -[g, f]$.

(iii) **Identidad de Jacobi:** Si f y g son campos vectoriales y h es una función valuada en los reales, entonces

$$L_{[f, g]} h(x) = L_f L_g h(x) - L_g L_f h(x).$$

Referencias

- [1] J. Birk and M. Zeitz, "*Program for symbolic and ruled analysis and design of nonlinear systems*", First European Conference, Paris, 1991.
- [2] N. Blakebrough, "*Biochemical and biological engineering science*", Academic Press London/NY, 1967.
- [3] K. Busawon, M. Farza and H. Hammouri, "*Observer's synthesis for a class of nonlinear systems with application to state and parameter estimation in bioreactors*", Proceedings of the 36th IEEE CDC, pp. 5060-5061, 1997.
- [4] K. Busawon and Pousga Kabore, "*Disturbance attenuation using proportional integral observers*", Int. J. Control, Vol. 74, No. 6, pp. 618-627, 2001.
- [5] P. Carpenter, "*Microbiology*", W. B. Saunders Company, 1961.
- [6] L. Cazzador, "*On the optimal control of fed-batch reactors with substrate-inhibited kinetics*", Biotechnology and Bioengineering, Vol. 31, pp. 670-674, 1988.
- [7] L. Cazzador and V. Lubenova, "*Nonlinear Estimation of specific growth rate for aerobic fermentation processes*", Biotechnology and Bioengineering, Vol. 47, pp. 626-632, 1995.
- [8] C. T. Chen, "*Linear systems theory and design*", Third edition, Oxford University Press, 1999.
- [9] W. Crueger and A. Crueger, "*Biotechnology: A textbook of industrial Microbiology*", Second edition, Sinaver Associates incorporated, 1990.
- [10] D. Dochain and G. Bastin, "*Adaptive control of fedbatch bioreactors*", Chem. Eng. Comm., Vol. 87, pp. 67-85, 1990.
- [11] M. Farza, H. Hammouri, S. Othman and K. Busawon, "*Nonlinear observers for parameter estimation in bioprocesses*", Chemical Engineering Science, Vol. 52, No. 23, pp. 4251-4267, 1997.
- [12] A. J. Fossard and D. Normand-Cyrot, "*Modelling and estimation*", Nonlinear systems series, Chapman & Hall, 1995.
- [13] V. Fromion, G. Ferreres, "*An incremental framework for the extended Kalman filter*", Proc. 4th European Control Conf., 1997.
- [14] J. P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman, "*A simple observer for nonlinear system. Application*

- to bioreactors*”, IEEE Trans. Aut. Control, Vol.37, No.6, pp. 875-880, 1992.
- [15] A. Isidori, *“Nonlinear control systems”*, Second edition, Springer-Verlag, 1989.
- [16] M. R. James, *“Controllability and observability of nonlinear systems”*, Institute for Systems Research T.R. 87-195, 1987.
- [17] R. Katebi, M. A. Johnson and J. Wilkie, *“Control and instrumentation for wastewater treatment plants”*, Springer-Verlag, 1999.
- [18] H. K.Khalil, *“Nonlinear systems”*, Second edition, Prentice Hall, 1996.
- [19] R. Marino and P. Tomei, *“Nonlinear control design”*, Prentice Hall, 1995.
- [20] J. Moreno and G. Buitrón, *“Respirometry based optimal control of an aerobic bioreactor for the industrial waste water treatment”*, Wat. Sci. Tech. Vol. 38, No. 3, pp. 219-226, 1998.
- [21] J. Moreno, *“Optimal time control of bioreactors for the wastewater treatment”*, Optim. Control Appl. Meth., 20, pp. 145-164, 1999.
- [22] J. Moreno and A. Vargas, *“Nonlinear observer design and observability of an aerobic bioreactor using respirometry”*, European Control Conference, paper ID F543, 1999.
- [23] H. Nijmeijer and A. J. Vander Schaft, *“Nonlinear dynamical control systems”*, Springer-Verlag, 1991.
- [24] K.Y. San and G. Stephanopoulos, *“Studies on on-line bioreactor identification. Numerical and experimental results”*, Biotechnology and Bioengineering, Vol. 26, pp. 1189-1197, 1984.
- [25] K.Y. San and G. Stephanopoulos, *“A note on the optimality criteria for maximum biomass production in a fed-batch fermentor”*, Biotechnology and Bioengineering, Vol. 26, pp. 1261-1264, 1984.
- [26] K.Y. San and G. Stephanopoulos, *“The effect of growth rate delays in substrate-inhibited kinetics on the optimal profile of fed-batch reactors”*, Biotechnology and Bioengineering, Vol. 28, pp. 356-361, 1986.
- [27] H. Shimizu, T. Takamatsu, S. Shioya and K. I. Suga, *“An algorithmic approach to constructing the on-line estimation system for the specific growth rate”*, Biotechnology and Bioengineering, Vol. 33, pp. 354-364, 1989.
- [28] G. Stephanopoulos and K.Y. San, *“Studies on on-line bioreactor identification”*, Biotechnology and Bioengineering, Vol. 26, pp. 1176-1188, 1984.

- [29] M. Vidyasagar, "*Nonlinear systems analysis*", Second edition, Prentice-Hall, 1993.
- [30] B. L. Walcott, S. H. Zak, "*State observation of nonlinear uncertain dynamical systems*", Int. J. Control IEEE Trans. Automatic Control, AC-32(2): 166-169, 1987.
- [31] A. Wiseman, M.A. Winkler, "*Fermentation process design*", Handbook of Enzyme Biotechnology, Ellis Horwood, 3rd edn, pp. 9-30, 1996.

