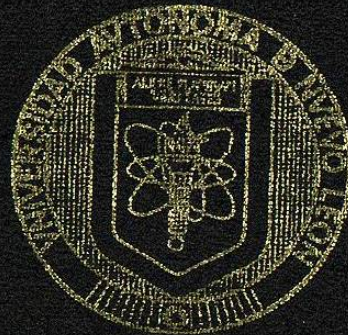


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES PARA UNA CLASE DE
SISTEMAS NO LINEALES, APLICACION AL MOTOR
A PASOS DE MAGNETO PERMANENTE

PRESENTA:
JUAN MANUEL MENDIVIL AVILA

TESIS

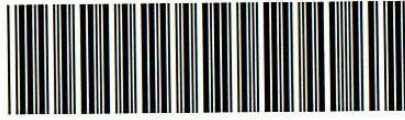
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD
EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. AGOSTO DEL 2002

DISIZNO DE COOITRO CLADOPRES PARA IMA CLASSE DE
SISTEMAS MO LINEALES, APLICACIONES, APPLICACIONES
A PASOS DE MAGNETO PERMANENTE

JUNIA

TM
Z5853
.M2
FIME
2002
,M4



1020148016

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES PARA UNA CLASE DE
SISTEMAS NO LINEALES, APLICACION AL MOTOR
A PASOS DE MAGNETO PERMANENTE

PRESENTA:
JUAN MANUEL MENDIVIL AVILA

TESIS

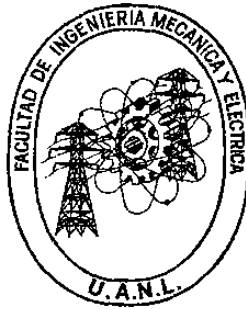
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD
EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. AGOSTO DEL 2002

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES PARA UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES. APLICACION AL MOTOR A PASOS DE MAGNETO PERMANENTE

POR

JUAN MANUEL MENDIVIL AVILA

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA
ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

AGOSTO DEL 2002

972583

TH
Z 5853
.M
FIME
2002
.M

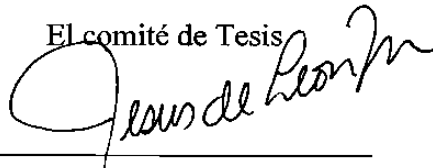


FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**DISEÑO DE CONTROLADORES PARA UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES. APLICACION AL MOTOR A PASOS DE MAGNETO PERMANENTE**” realizada por Juan Manuel Mendivil Avila sea aceptada para su defensa como opción al Grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control.

El comité de Tesis



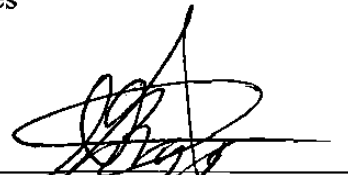
Asesor

Dr. Jesús de León Morales



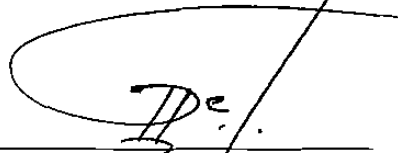
Coasesor

Dr. Marco Tulio Mata Jiménez



Coasesor

Dr. René Galindo Orozco



Vb. Bq.

Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez

División de Estudios de Postgrado

Dedicatoria

A mis padres, José T. Mendivil y Ma. del Rosario Avila, quienes siempre han confiado en mi y han estado a mi lado apoyándome.

A mis hermanos, Carlos, Dilara y Daniela.

A mis amigos y profesores del programa doctoral.

Agradecimientos

A la UANL por ser mi casa de estudio, y al CONACYT por su apoyo económico con la beca crédito.

Al Dr. Jesús de León por su enseñanza y valiosos comentarios.

Al Dr. René Galindo y Dr. Marco Tulio, por sus valiosos comentarios y sugerencias.

A los profesores del programa, en especial al Dr. Jesús de León, Dr. Joaquín Collado Moctezuma, Dr. Krishna K. Busawon, Dr. José Antonio de la O.

A mis compañeros del programa.

Resumen

Diseño de Controladores para una Clase de Sistemas No Lineales. Aplicación al Motor a Pasos de Magneto Permanente.

Publicación No. _____

Juan Manuel Mendivil Avila

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales

Agosto, 2002

En este trabajo, se presentan técnicas de control no lineales basadas en observadores, las cuales son aplicadas a un modelo matemático del motor a pasos de magneto permanente, con el objetivo de regular la posición angular del rotor. Los motores a pasos han venido a formar parte integral de muchos procesos y/o máquinas de posicionamiento preciso, y aunque los motores a pasos son estables en lazo abierto, su desempeño es pobre y últimamente se ha encaminado a utilizarlos en lazo cerrado para obtener mejores resultados. Se utilizarán para tal propósito, las técnicas de perturbaciones singulares y modos deslizantes para el diseño de algoritmos de control, en tiempo continuo y discreto.

Cuando utilizamos la técnica de perturbaciones singulares, descomponemos el sistema original en dos subsistemas de orden menor, descritos en diferentes escalas de tiempo, es decir, obtenemos un subsistema reducido lento y uno rápido. La técnica de modos deslizantes es aplicada a cada uno de los subsistemas.

Para la clase de sistemas considerados, se utiliza un esquema de discretización el cual nos permite obtener el modelo en tiempo discreto, y con ello, en este trabajo se aplican las técnicas de modos deslizantes para sistemas discretos. Tanto para el caso continuo como discreto, bajo la suposición de que los estados del subsistema rápido están disponibles, se diseña un observador de orden reducido para estimar los estados del subsistema lento y obtener así, esquemas de control basados en observadores.

Finalmente, por medio de simulaciones numéricas se verifica el desempeño de las estrategias de control diseñadas, cuando son aplicadas al modelo del motor a pasos de magneto permanente.

Notación

\in	pertenece a
\forall	para todo
\subset	subconjunto de
$ $	evaluado en
$ a $	valor absoluto de a
$\ \cdot\ _p$	norma p
\exists	existe
\rightarrow	tiende a
\mathbb{R}	conjunto de números reales
\mathbb{R}^n	espacio vectorial de n-dimensión con elementos reales
B_r	la bola $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x\ \leq r\}$
\sum	sumatoria
A^T	matriz transpuesta de A
A^{-1}	matriz inversa de A
$L_f^i h$	derivada de Lie
\square	fin de prueba

Índice

1 Introducción.....	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Metodología	3
1.3 Organización de la Tesis	4
2 Motor a pasos: Características y modelo matemático.....	5
2.1 Introducción	5
2.2 Descripción de un motor a pasos y sus principales características	6
2.2.1 Torque de posesión y restauración	7
2.2.2 Características estáticas.....	7
2.2.3 Características dinámicas.....	8
2.2.4 Resolución de los motores a pasos	9
2.3 Clasificación de los motores a pasos.....	10
2.3.1 Motores de reluctancia variable (Motor VR).....	10
2.3.2 Motores de magneto permanente.....	13
2.4 Aplicaciones de los motores a pasos.....	15
2.5 Modelo matemático del motor a pasos	15
2.6 Conclusiones	18
3 Perturbaciones Singulares para Sistemas No Lineales Continuos y Discretos	19
3.1 Introducción	19
3.2 Análisis de Sistemas No Lineales en la Forma Singularmente Perturbada	20
3.2.1 Clase de Sistemas No Lineales a Considerar	21
3.2.2 Comportamiento en Dos Escalas de Tiempo.....	22
3.2.3 Obtención de las Dinámicas Lentas y Rápidas.....	24
3.3 Discretización de Sistemas en la Forma Singularmente Perturbada	26
3.3.1 Esquema de Discretización.....	27
3.3.2 Obtención del Subsistema Discreto Lento.....	30

Índice (continuación)

3.3.3 Obtención del Subsistema Discreto Rápido.....	30
3.4 Conclusiones	31
4 Control por Modos Deslizantes Continuo.....	32
4.1 Introducción	32
4.2 Control Modos Deslizantes.....	32
4.2.1 Método del Control Equivalente.....	35
4.2.2 Control de Atracción.....	36
4.2.2.1 Control de Atracción Utilizando una Retroalimentación No Lineal Continua.....	37
4.2.2.2 Control de Atracción Utilizando Función Signo y Ganancias Constantes	38
4.2.3 Diseño del Control por Modos Deslizantes para el Subsistema Lento.....	39
4.2.4 Diseño del Control por Modos Deslizantes para el Subsistema Rápido.....	43
4.2.5 Obtención del Sistema Completo en Lazo Cerrado con el Control Compuesto	46
4.3 Observador No Lineal de Estados	47
4.3.1 Conceptos Básicos en Estimación No Lineal de Estados.....	48
4.3.2 Diseño de un Observador de Orden Reducido	49
4.4 Estabilidad en Lazo Cerrado	51
4.5 Aplicación al Modelo del Motor a Pasos en tiempo continuo.....	56
4.5.1 El modelo del Motor a Pasos en la Forma Singularmente Perturbada	56
4.5.2 Obtención del Modelo en Variables de Desviación	56
4.5.3 Diseño del Control por Modos Deslizantes.....	58
4.5.3.1 Diseño del Control para el Subsistema Lento.....	58

Índice (continuación)

4.5.3.2 Diseño del Control para el Subsistema Rápido.....	61
4.5.4 Diseño del Observador	61
4.6 Resultado de Simulaciones.....	63
4.6.1 Simulaciones en Lazo Abierto. Estados del Sistema y observador.....	63
4.6.2 Simulaciones Numéricas del Primer Control	66
4.6.3 Simulaciones Numéricas del Segundo Control.....	69
4.6.3.1 Utilizando el Control con la Función Signo	69
4.6.3.2 Utilizando el Control con la Función tanh.....	71
4.7 Análisis de Resultados.....	74
4.8 Conclusiones.....	75
5 Control por Modos Deslizantes Discreto	76
5.1 Introducción.....	76
5.2 Modos Deslizantes en Tiempo Discreto	77
5.3 Primer Controlador por Modos Deslizantes Discreto.....	79
5.3.1 Diseño del Controlador Deslizante Lento.....	79
5.3.2 Diseño del Controlador Deslizante Rápido.....	83
5.4 Segundo Controlador por Modos Deslizantes Discreto	83
5.4.1 Diseño del Controlador Deslizante Lento	83
5.4.2 Diseño del Controlador Deslizante Rápido	84
5.4.3 Control Compuesto y Sistema en Lazo Cerrado	85
5.5 Aplicación al Modelo del Motor a Pasos de Magneto Permanente Discretizado	85
5.5.1 Obtención del Modelo en Tiempo Discreto	86
5.5.2 Diseño del Primer Controlador Deslizante Discreto	88
5.5.3 Diseño del Segundo Controlador Deslizante Discreto.....	90
5.5.4 Diseño de un Observador en Tiempo Discreto.....	90
5.6 Resultado de Simulaciones.....	92

Índice (continuación)

5.6.1 Simulaciones Utilizando el Primer Controlador.....	92
5.6.2 Simulaciones Utilizando el Segundo Controlador	96
5.7 Análisis de Resultados	99
5.8 Conclusiones.....	100
6.1 Conclusiones.....	101
Apéndice.....	103
Referencias.....	106

Lista de Figuras

Fig. 2.1 Características T/ω	8
Fig. 2.2 (a) Características T/I motor VR, (b) Características T/I motor híbrido	8
Fig. 2.3 Características dinámicas	9
Fig. 2.4 Sección transversal de un modelo de un motor VR de tres fases y su arreglo de embobinado	11
Fig. 2.5 Posición de equilibrio cuando la fase 1 excitada.....	12
Fig. 2.6 Líneas curvas del campo magnético creando el torque de restauración	13
Fig. 2.7 Como procede el movimiento del motor al excitarse la F2.....	13
Fig. 2.8 Movimiento del motor cuando se realiza una conmutación continua	13
Fig. 2.9 Motor a pasos elemental.(a) Rotor cilíndrica, (b) Estator y embobinado simbólico.....	14
Fig. 2.10 Circuito básico para controlar un motor de dos fases.....	14
Fig. 2.11 Pasos en un motor a pasos de magneto permanente.....	15
Fig. 2.12 Dibujo esquemático de un motor PM de dos fases.....	16
Fig. 4.1 (a) Fenómeno del chattering, (b) Desplazamiento ideal.....	34
Fig. 4.2 Esquema de un observador	48
Fig. 4.3 Esquema de control utilizando los estados estimados	51
Fig. 4.4 Velocidad angular y su estimado en lazo abierto.....	64
Fig. 4.5 Posición angular y su estimado en lazo abierto	65
Fig. 4.6 Par de carga y su estimado en lazo abierto	65
Fig. 4.7 Respuesta en el tiempo de la velocidad angular aplicando el control	66
Fig. 4.8 Respuesta en el tiempo de la posición angular aplicando el control	67
Fig. 4.9 Respuesta del par de carga al aplicar el control.....	67
Fig. 4.10 Comportamiento del control u	68
Fig. 4.11 Voltaje en la fase A.....	68
Fig. 4.12 Voltaje en la fase B	69
Fig. 4.13 Respuesta de la velocidad angular usando el control con la función signo	70

Lista de Figuras (continuación)

Fig. 4.14	Posición angular al usar el control con la función signo	70
Fig. 4.15	Respuesta del control	71
Fig. 4.16	Velocidad angular al usar el control con la función tanh	72
Fig. 4.17	Respuesta de la posición angular	72
Fig. 4.18	Respuesta del control u	73
Fig. 4.19	Voltaje en la fase A	73
Fig. 4.20	Voltaje en la fase B	74
Fig. 5.1	Velocidad angular y estimado	93
Fig. 5.2	Posición angular y estimado	93
Fig. 5.3	Par de carga y su estimado	94
Fig. 5.4	Voltaje en la fase A	94
Fig. 5.5	Voltaje en la fase B	95
Fig. 5.6	Error de estimación de la posición angular	95
Fig. 5.7	Velocidad angular y estimado	96
Fig. 5.8	Posición angular y estimado	97
Fig. 5.9	Par de carga y su estimado	97
Fig. 5.10	Voltaje en la fase A	98
Fig. 5.11	Voltaje en la fase B	98
Fig. 5.12	Error de estimación de la posición angular	99

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, los sistemas de control automático toman un papel muy importante en el buen desarrollo y funcionamiento de procesos industriales, sistemas robotizados, aeronáutica, etc. Tal es así que se ha desarrollado grandemente la teoría de control contribuyendo con muchas técnicas para el análisis de sistemas dinámicos [1,4]. El tener un buen sistema de control en algún dispositivo o proceso nos puede asegurar un mejor aprovechamiento y rendimiento, incluso incrementar su vida útil. Por lo anterior, el control automático como ciencia ha tenido y seguirá teniendo un gran avance, y cada vez con aplicaciones más diversas.

El campo de estudio del control automático es muy extenso. Aunque todavía hay mucho trabajo por hacer, existen muchos resultados tanto para sistemas lineales como no lineales, continuos y discretos que se han sido empleados con buenos resultados en numerosas aplicaciones [3,4].

El objetivo de este trabajo es diseñar estrategias de control y observación no lineal para cierta clase de sistemas no lineales (ver Cap.3) y aplicar estos resultados a un modelo matemático del motor a pasos.

1.1 Antecedentes

Existe un desarrollo considerable en la teoría de control no lineal, sobretodo en las pasadas tres décadas, contribuyendo con técnicas para el análisis y control de este tipo de sistemas [4]. Sin embargo, las aplicaciones de dichas técnicas en el sector industrial han sido pocas [4,9].

Con la intención de aplicar las recientes técnicas avanzadas de control no lineal, se ha hecho un esfuerzo por estrechar el lazo entre la teoría de control no lineal y aplicarlos a los diferentes procesos eléctricos, mecánicos, etc. En el caso particular de este trabajo, se estudia un sistemas electromecánico particular como lo es el motor a pasos.

En los pasados 15 años se ha venido incrementando el uso de motores a pasos en gran medida, principalmente en áreas de computación, telecomunicaciones, control numérico y robótica [2,3,14]. Lo anterior es debido en gran parte a las características con las que cuentan estos tipos de motores. Los motores a pasos, a diferencia de los motores tradicionales, no tienen un movimiento continuo del rotor, sino que éste lo hace en movimientos discretos o en pasos, lo cual, dependiendo de la velocidad puede convertirse en un movimiento continuo [2]. Esta característica permite posicionar el rotor en alguna posición deseada con una gran exactitud.

Originalmente, los motores a pasos fueron diseñados para operar en lazo abierto, de hecho, en numerosas aplicaciones, estos motores son usados en lazo abierto con muy buenos resultados [2]. La manera de realizar el control en lazo abierto es, aplicando al motor secuencias de avance y retroceso para una cantidad predeterminada de pasos. Este tipo de control es relativamente sencillo pero carece de robustez [2]. Cuando se presenta alguna perturbación, como cambio de carga, se pueden perder pasos y no se alcanza de manera adecuada la tarea de control.

Una manera más especializada de controlar estos motores es usando un sistema de retroalimentación por medio de encoders y sensores especiales que nos permiten monitorear las variables del sistema. De esta forma se puede lograr un control más preciso aun en la presencia de cargas variables. De hecho, en el sector industrial se ha incrementado el uso de los motores a pasos controlados en lazo cerrado, sobre todo para alcanzar tiempos de respuesta mas rápidos y mayor capacidad de resolución [2,14].

En la literatura podemos encontrar algunos trabajos relacionados con el control y estimación de motores a pasos. Por citar algunos ejemplos, en [16], se diseñó un observador no-lineal de orden completo para el motor a pasos de magneto permanente, cuyos resultados fueron validados en laboratorio. Se han utilizado algoritmos de control usando la técnica de linealización por retroalimentación, para alcanzar objetivos como el de seguimiento o regulación de la posición angular del rotor, tomando en cuenta aspectos como la saturación en la entrada y estimación de la velocidad usando un encoder [3,14]. En [18], se hace el estudio de un esquema de estimación de parámetros continuos en el tiempo para

utilizarse en esquemas de control de posición a altas velocidades.

El utilizar motores a pasos no implica que sean mejores que los de CD, de hecho, tienen diferentes características y se comportan de una manera diferente. Los motores a pasos producen grandes torques a bajas velocidades y además pueden arrancar y parar en alguna posición ó ángulo. Entonces, se recomienda usarlos en aplicaciones donde se requiera de un posicionamiento preciso, es decir, fijar el rotor en un ángulo fijo. Además, los motores a pasos por lo general tienen un mayor tiempo de operación debido a la eliminación de escobillas mecánicas, mejor disipación de calor ya que los embobinados están colocados en el estator y no en el rotor, mejor índice de torque-inercia debido a un rotor más ligero, y sobre todo, mejores características de posicionamiento.

1.2 Metodología

En este trabajo, se utilizarán técnicas de control no lineal para alcanzar objetivos típicos de control como seguimiento de trayectorias, estabilización y regulación. Se hará uso de las técnicas de perturbaciones singulares y de modos deslizantes para el desarrollo de estrategias de control. En este caso, dichas técnicas son aplicadas a un modelo matemático del motor a pasos de magneto permanente, con el fin de controlar la posición angular del rotor y mejorar su desempeño, sobretodo en la presencia de incertidumbres paramétricas. Combinar éstas dos técnicas representa una buena posibilidad para obtener esquemas de control robusto [10].

La técnica de perturbaciones singulares nos permite descomponer el sistema original en dos subsistemas de orden menor descritos en diferentes escalas de tiempo [7]. La anterior característica, nos permite que el diseño de leyes de control se facilite puesto que se diseñan en base a los modelos de orden reducido, por lo tanto, la metodología de modos deslizantes se aplicará a ambos sistemas de orden reducido. El desempeño de las leyes de control diseñadas se verificará por medio de simulaciones numéricas.

Aunque la teoría de control no lineal en tiempo discreto no ha sido explotada en gran medida [15], en este trabajo también se diseñarán estrategias de control en tiempo discreto, utilizando las metodologías antes mencionadas.

Se diseñarán entonces, técnicas de control utilizando la técnica de modos deslizantes tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

1.3 Organización de la Tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2, se estudian las propiedades más importantes de los motores a pasos, así como su principio de funcionamiento y se analizan las ventajas y desventajas al usar estos motores para las diferentes aplicaciones. Se estudia un modelo matemático del motor a pasos de magneto permanente, ésto con el fin de aplicar las técnicas estudiadas a este modelo.

En el capítulo 3, se realiza un estudio de la metodología de perturbaciones singulares para la clase de sistemas no lineales que se considerarán en este trabajo. Este estudio se extiende a sistemas discretos, donde se presenta un esquema de discretización para la clase de sistemas estudiados. Se estudian las ventajas de descomponer el sistema en dos subsistemas de orden menor, característica favorable cuando se diseñan controles o se hace el análisis de estabilidad.

Por otro lado, en el capítulo 4, se desarrollan técnicas de control no lineales por medio de la técnica de modos deslizantes en tiempo continuo. Se aprovecha la descomposición del sistema original en dos subsistemas de dimensión menor y se facilita el diseño de los controles. Se realiza la aplicación al modelo del motor a pasos y se analiza el desempeño por medio de simulaciones.

En el capítulo 5, se aplican las técnicas de modos deslizantes al modelo del motor a pasos discretizado. También se utilizan modos deslizantes para realizar los controles. Las leyes de control obtenidas son simuladas numéricamente para verificar su desempeño.

Finalmente, en el capítulo 6 se dan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Motor a Pasos: Características y Modelo Matemático [2]

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta una panorámica general acerca de las principales características de los motores a pasos. Además, se dará una descripción de un modelo matemático del motor a pasos de magneto permanente, el cual será utilizado para aplicar los diferentes esquemas de control diseñados.

En general, los motores de cualquier tipo (corriente directa, alterna, a pasos, etc.) son utilizados ampliamente en muchos sectores, como el industrial, en la aeronáutica, telecomunicaciones, etc. Lo anterior se debe a que los motores han venido a formar parte integral de procesos y de máquinas porque sirven de accionadores y producen desplazamientos lineales ó angulares.

La principal característica de los motores a pasos es su capacidad de posicionamiento en cierto ángulo. Ésto es debido a que este tipo de motores realizan un movimiento angular (ó lineal) en pasos discretos, es decir, dependiendo de la resolución del motor, se necesita cierta cantidad de pasos para realizar una vuelta completa. Además, estos motores pueden ser operados en lazo abierto, es decir, podemos especificar la cantidad de pasos a realizar sin necesidad de un mecanismo de retroalimentación. Sin embargo, operar estos motores en lazo abierto no siempre es suficiente debido a que su desempeño es pobre, sobre todo cuando existen variaciones en la carga, por lo tanto, es necesario realizar esquemas de control en lazo cerrado para mejorar su desempeño.

Tradicionalmente, los motores de CD han sido escogidos en mayor medida que los motores a pasos para aplicaciones industriales debido a su relación entrada/salida lineal, la cual hace posible el uso de estrategias de control estándares. Sin embargo, en los últimos años el uso de motores a pasos se ha incrementado considerablemente [2,16,18].

A continuación, se exponen algunas características generales de este tipo de motores.

2.2 Descripción de un Motor a Pasos y sus Principales Características

De manera general, se puede decir que los motores a pasos son mecanismos que convierten señales de pulso digitales en un movimiento continuo del rotor hasta fijarlo en un determinado paso o posición. Estos motores se diseñan para tener un control de posicionamiento preciso y son estables en lazo abierto para cualquier posición del paso, sin embargo, tienen una respuesta al escalón con un sobreimpulso considerable y un tiempo de establecimiento relativamente grande. Aunque el control en lazo abierto es ventajoso económicamente, no está exento de algunas limitaciones. Por ejemplo, las revoluciones del rotor se tornan inestables en ciertos rangos de velocidad, y debido a esta característica de comportamiento, la velocidad y aceleración de un motor a pasos controlado bajo un esquema en lazo abierto no puede ser tan rápida como en un motor de CD operado bajo un esquema de control en lazo cerrado. Es por esto que es necesario desarrollar estrategias de control para operarlos en lazo cerrado y mejorar su desempeño.

Existen varios tipos de motores a pasos, entre los que podemos encontrar son los motores de reluctancia variable y los motores de magneto permanente. Existe otra categoría denominados híbridos, aunque los dos primeros son los más comunes.

Debido a que estos motores tienen un posicionamiento preciso y confiable, se emplean comúnmente en aplicaciones donde el posicionamiento mecánico resulta ser muy importante. Son ideales cuando se tiene que girar un eje y detenerlo en ciertas posiciones con una precisión de hasta centésimas de milímetros, y dicha posición permanece bloqueada hasta que no se dé una nueva orden para hacerla girar en el sentido que queramos.

Es deseable que un motor a pasos se mueva tan rápido como sea posible en respuesta a un pulso de entrada o tren de pulsos. No sólo se requiere de un rápido arranque, sino que también un rápido paro. Si el tren de pulsos es interrumpido mientras el motor está corriendo, el motor debe ser capaz de parar en la posición especificada por el último pulso. Estas excelentes características dinámicas se deben al alto índice de torque de inercia del

rotor de un motor a pasos comparado con un motor de CD.

2.2.1 Torque de Posesión y Restauración

Las propiedades de torque en un motor a pasos son muy interesantes, debido al alto torque estático que es generado. El torque estático se refiere al torque que se genera estando el motor en reposo. Este torque habilita al motor para arrancar y parar rápidamente y presenta un fuerte torque de restauración cuando ocurre un desplazamiento desde la posición de equilibrio o reposo debido a una carga de torque externa. Ligados al torque estático, se generan los torques de posesión y frenado, los cuales se definen a continuación.

Torque de Posesión (holding torque) : Se define como el máximo torque estático que puede ser aplicado a la flecha de un motor excitado con una corriente sin causar rotación hacia la siguiente posición de equilibrio.

Torque de Frenado (detent torque) : Es el máximo torque estático que puede ser aplicado a la flecha de un motor no excitado sin causar rotación hacia la siguiente posición de equilibrio. Este torque solo aparece en motores que tienen un magneto permanente.

En general, entre más grande es el torque de posesión, es más pequeño el error de posición debido a la carga o variaciones de la misma.

2.2.2 Características Estáticas

Cuando el motor se encuentra en estado estacionario o una posición de equilibrio, se observan algunas características relacionadas con el torque, desplazamiento angular y corriente, éstas son llamadas características estáticas.

Características T/θ : Si tenemos al motor a pasos mantenido en una posición de equilibrio ó estacionaria suministrando una corriente en un modo especificado de excitación (ver sec. 2.3), al aplicar un torque externo a la flecha, un desplazamiento angular ocurrirá. La relación entre torque externo y el desplazamiento puede ser graficada como en la Fig. 2.1. Esta curva es llamada convencionalmente curva característica T/θ , y el valor máximo de torque estático es llamado torque de posesión, el cual ocurre cuando $\theta = \theta_M$ en la Fig 2.1. Para los desplazamientos más grandes a θ_M , el torque estático no actúa en una di-

rección hacia la posición de equilibrio original, pero lo hace en la dirección opuesta hacia la siguiente posición de equilibrio.

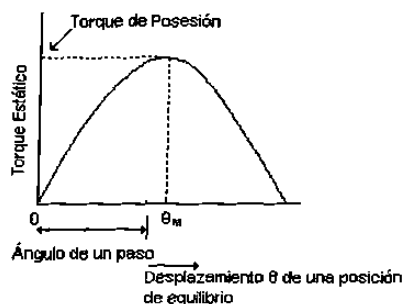


Fig. 2.1 Características T/θ

Características T/I : El torque de posesión se incrementa con la corriente, y esta relación es convencionalmente referida como característica T/I . Como un ejemplo, en la Fig 2.2 se presenta una comparación de esta característica con un motor a pasos híbrido y para uno de reluctancia variable (VR), el ángulo de paso de ambos es de 1.8° (es decir, es la resolución mínima de desplazamiento).

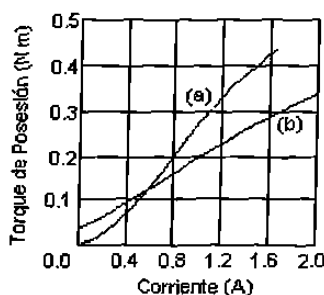


Fig. 2.2 (a) Características T/I de un motor VR.
(b) Características T/I de un motor híbrido.

2.2.3 Características Dinámicas

Las características relacionadas a los motores cuando están en movimiento o inmediatamente después de que arrancan, son llamadas características dinámicas (Fig. 2.3).

Características del torque de atracción (Pull in) : Éstas también son llamadas carac-

terísticas del arranque y se refieren al rango de torque de carga friccional al cual el motor puede arrancar o parar sin perder pasos o varias frecuencias en un tren de pulsos.

Características del torque de arranque (Pull-out) : También es llamada, característica de ejecución. La relación entre la carga friccional de torque y la máxima frecuencia de pulso con la cual el motor se puede sincronizar.

Frecuencia máxima de arranque : Esta definida como la máxima frecuencia de control a la cual un motor sin carga puede arrancar y parar sin perder pasos.

Torque máximo de arranque : También es llamado torque máximo pull-out y es definido como la máxima carga de torque friccional con la cual el motor puede arrancar y sincronizar con un tren de pulsos de una frecuencia tan baja como 10 Hz.

Máximo índice de arranque (Pull-out). Es la máxima velocidad a la cual un motor a pasos puede operar sin perder pasos.

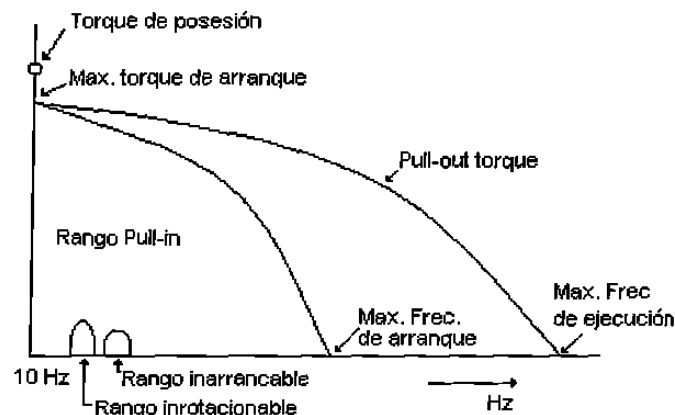


Fig. 2.3 Características dinámicas

2.2.4 Resolución de los Motores a Pasos

Un motor a pasos rota a un ángulo fijo en cada pulso. Este desplazamiento es llamado *paso* y disminuyendo el ángulo de paso se incrementa la resolución de posicionamiento. Una característica de los motores a pasos es que pueden ser hechos para un ángulo de paso pequeño. Para aplicaciones en el área de ingeniería lo que nos interesa de estos motores es

el número de pasos por revolución, los cuales están denotados por S y el ángulo de paso por θ_s y cuya relación con S es como sigue:

$$\theta_s = 360^\circ / S$$

donde S está relacionado al número de dientes en el rotor N_r y al número de fases m . La resolución se calcula:

- Para el caso de motores VR:

$$S = mN_r$$

- Para el caso de motores de magneto permanente o híbridos:

$$S = 2mN_r$$

Así podemos calcular cual es la resolución límite, es decir, el mínimo ángulo de paso del motor que se este utilizando.

2.3 Clasificación de los Motores a Pasos

Los motores a pasos pueden ser clasificados en varios tipos dependiendo de la estructura de la máquina y su principio de operación. Básicamente, podemos decir que vienen en dos variedades, los de reluctancia variable y los de magneto permanente.

2.3.1 Motores de Reluctancia Variable (Motor VR)

El motor a pasos de reluctancia variable puede ser considerado como el tipo más básico de motores a pasos. En la Fig 2.4 se muestra un diagrama seccional de un motor simple en esta categoría para facilitar la explicación de los principios básicos del motor. Es un motor de tres fases que tiene seis dientes en el estator. Cualquier par de dientes opuestos, que están a 180° uno del otro, pertenecen a la misma fase; ésto es, las bobinas en cada diente contrario son conectadas en serie o paralelo, en este caso, en la figura estan conectadas en serie. El rotor esta compuesto en este caso de 4 dientes. Tanto los materiales de rotor como el estator deben tener alta permeabilidad y ser capaces de permitir que fluya sobre ellos un flujo magnético alto, incluso si se aplica una fuerza magnetomotriz baja.

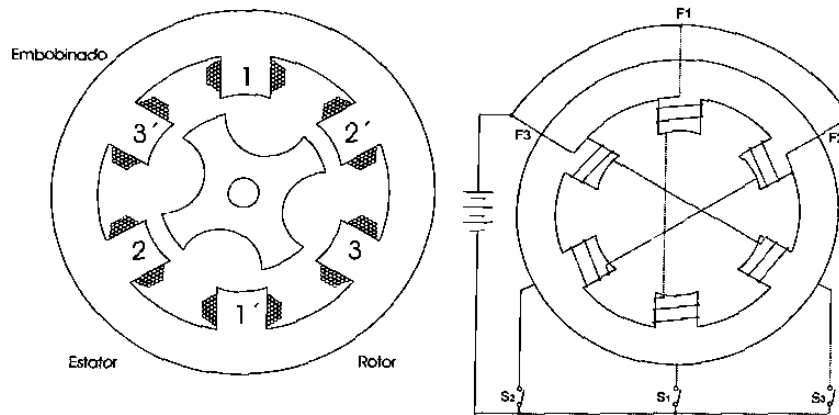


Fig. 2.4 Sección transversal de un modelo de un motor VR de tres fases y su arreglo de embobinado.

Supondremos en este ejemplo que los dos dientes opuestos en el estator tienen polaridad opuesta. Por lo tanto, en la Fig. 2.4, los dientes 1, 2, y 3 forman un polo norte y los dientes 1', 2' y 3' forman el polo sur cuando están excitados. La corriente en cada fase es controlada en un modo ON/OFF por sus respectivos interruptores. Si una corriente es aplicada a las bobinas de la fase 1, o en otras palabras, la fase 1 es excitada, el flujo magnético ocurrirá de la forma mostrada en la Fig. 2.5. El rotor será posicionado entonces tal que los dientes del estator 1 y 1' y cualquiera de los dos dientes del rotor estén alineados. De este modo, cuando los dientes del rotor y los dientes del estator están alineados, la reluctancia magnética es minimizada, y este estado provee una posición de equilibrio.

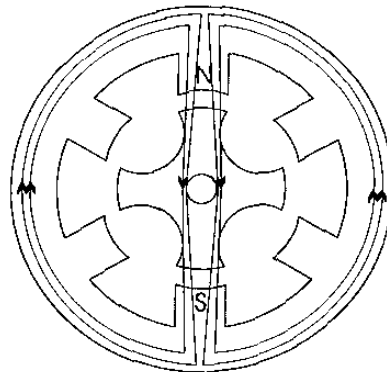


Fig. 2.5 Posición de equilibrio cuando la fase 1 es excitada.

Si el rotor tiende a ser movido de su posición de equilibrio debido a algún torque ex-

terno aplicado a la flecha del rotor, un torque de reestablecimiento será generado como es mostrado en la Fig. 2.6. En esta figura el torque externo es aplicado para girar a favor de las manecillas del reloj y el rotor es desplazado en la misma dirección. Esto resultará en un doblamiento de las líneas de flujo magnético en los bordes de los dientes tanto del rotor como del estator, conocido ésto como tensión de Maxwell, las líneas magnéticas de intensidad tienen fuerte tensión, en otras palabras, las líneas magnéticas tienen tendencia a volverse tan cortas y derechas como sea posible. En la Fig. 2.6 este efecto es observado en los bordes de los dientes, creando un torque en contra de las manecillas del reloj para restaurar al rotor y volverlo a alinear con los dientes del estator. Como se ve en la misma Fig. 2.6, cuando los dientes del rotor y estator están desalineados en una fase excitada, la reluctancia magnética es grande.

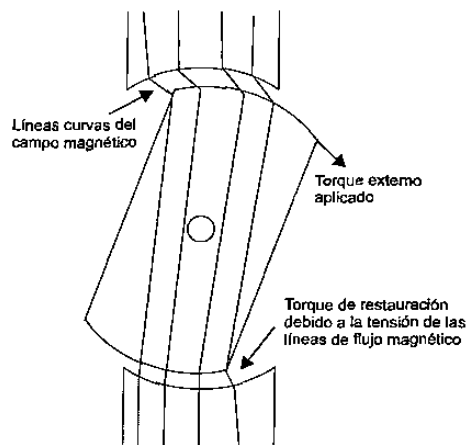


Fig 2.6 Líneas curvas del campo magnético creando el torque de restauración

Ahora veremos que pasa cuando la fase 1 es desenergizada, y la fase 2 es energizada. La reluctancia del motor vista desde la fuentes de poder de CD será de repente incrementada justo después de que la conmutación se realiza. Es obvio que el rotor se moverá en un ángulo de 30° en contra de las manecillas del reloj, como se muestra en la Fig 2.7, para minimizar la reluctancia. Este movimiento a través de un paso de ángulo en cada conmutación de excitación es llamado paso.

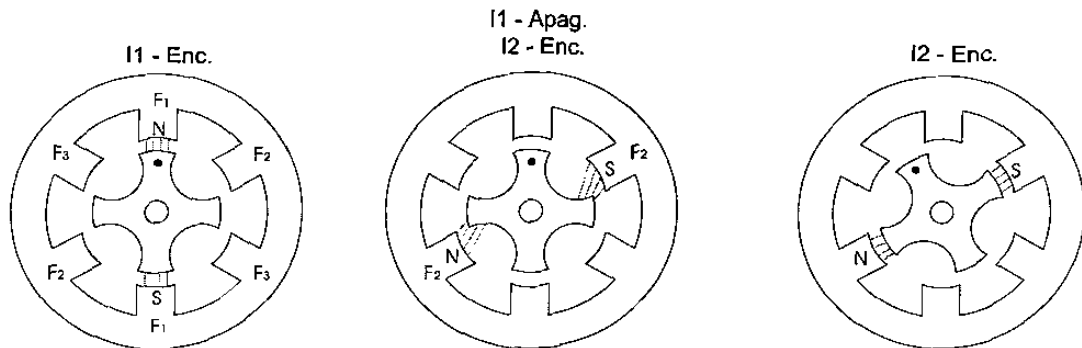


Fig. 2.7 Como procede el movimiento del motor al excitarse la F2.

Después de completar la rotación en tres pasos, el rotor aparentemente volverá a su posición original, ésto se ilustra en la Fig. 2.8:

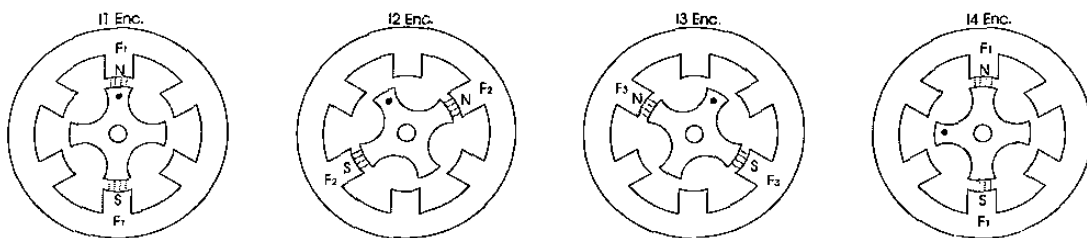


Fig 2.8 Movimiento del motor cuando se realiza una conmutación continua.

2.3.2 Motores de Magneto Permanente

Un motor a pasos que utiliza un magneto permanente en el rotor es llamado motor a pasos de magneto permanente. En la Fig 2.9 podemos observar un motor a pasos elemental de magneto permanente, el cual emplea un magneto permanente cilíndrico como rotor, además posee cuatro dientes o polos en su estator, como se muestra en (a) y (b) respectivamente. En (b) se presenta un arreglo de embobinado simbólico, pero en (c) indica el arreglo real, conocido como esquema bifilar. Dos alambrados sobrepuestos son puestos como un alambrado sobre los polos 1 y 3, y estos dos alambrados son separados uno del otro en las terminales para mantenerlos como alambrados independientes. Lo mismo es para los polos 2 y 4.

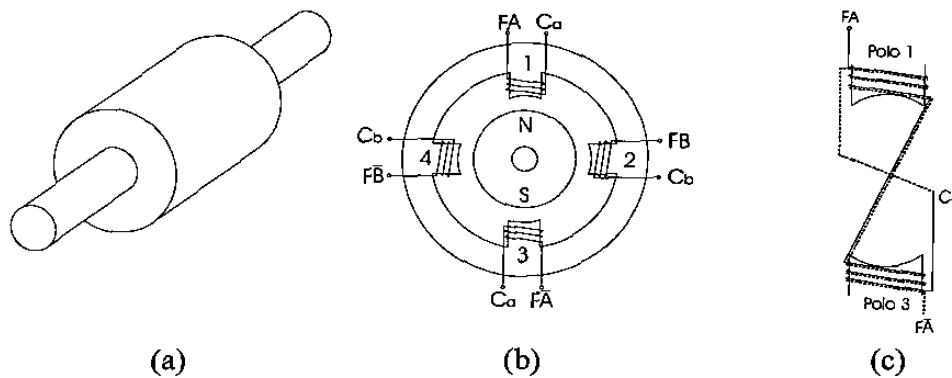


Fig 2.9 Motor a pasos elemental. (a) Rotor cilíndrica, (b) Estator y embobinado simbólico.(c) Ejemplo de embobinado.

Las terminales marcadas C_a y C_b son denotadas como un común a ser conectado a la terminal positiva de la fuente de poder como se muestra en la Fig. 2.10. Cuando el alambrado A mostrado por la línea sólida en (c) es excitado, el polo 1 produce un polo norte y el polo 3 un polo sur. Si el alambrado \bar{A} , que es mostrado por la línea punteada en (c) es excitado, la polaridad se revertirá. Este arreglo de alambrado en los polos es definido como un alambrado de dos fases.

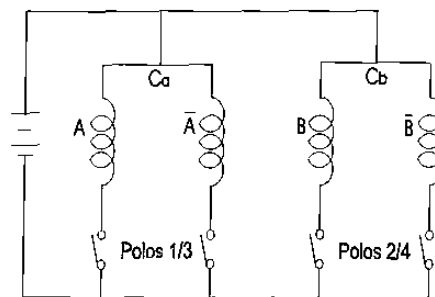


Fig. 2.10 Circuito básico para controlar un motor de dos fases.

Ahora, si los embobinados son excitados en la secuencia $A \rightarrow B \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B} \dots$ el rotor girará en sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la Fig. 2.11. En este ejemplo, el tamaño del paso es obviamente de 90° . Si el número de dientes en el estator y polos magnéticos en el rotor son duplicados, tendríamos un motor de dos fases con un

ángulo de paso de 45° , es decir, estamos aumentando la resolución del motor.

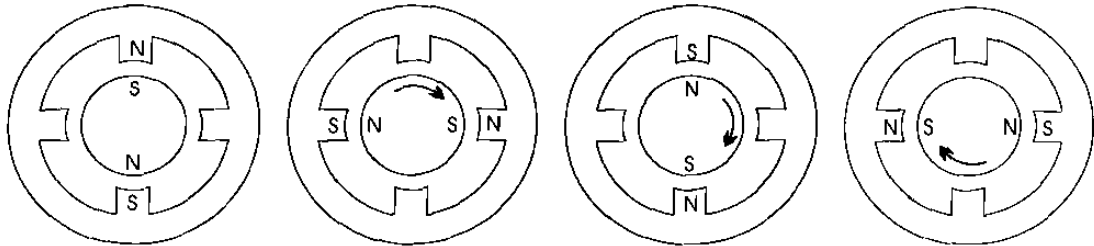


Fig. 2.11 Pasos en un motor a pasos de magneto permanente.

2.4 Aplicaciones de los Motores a Pasos

Como se ha comentado, los motores a pasos cada vez toman una mayor participación en la industria e investigación. Algunas de las aplicaciones más comunes, pero no limitándose a éstas, se mencionan a continuación.

En general, podemos encontrar numerables aplicaciones. Muchas de ellas son realizadas utilizando los motores a pasos en lazo abierto, pero existen aplicaciones donde un control retroalimentado mejora el rendimiento.

Un área donde podría decirse que es donde más se aplican los motores a pasos es la industria de la informática y sus periféricos. Los motores a pasos son usados desde los lectores de disco, discos duros hasta impresoras y graficadores. Por tal motivo, se han desarrollado motores de diferentes tamaños y capacidades dependiendo de la aplicación.

Las máquinas que son controladas por medio de control numérico también usan motores a pasos debido a que requieren de un posicionamiento preciso en su operación. En el área de la robótica, además de requerir de un buen posicionamiento, se requiere que el actuador utilizado responda adecuadamente a variaciones de carga, los motores a pasos operados en lazo cerrado ofrecen un buen desempeño para esta tarea.

También son utilizados en vehículos espaciales y satélites, donde se requiere movimientos precisos.

2.5 Modelo Matemático del Motor a Pasos

Para la aplicación de las leyes de control que serán diseñadas, consideraremos un motor

de magneto permanente (PM) de dos fases. Un esquema simplificado de este motor se presenta en la Fig. 2.12. Los voltajes de entrada (v_a, v_b) controlan las dos corrientes de fase (i_a, i_b). Al fluir corriente por el estator, se genera un campo magnético, el cual interactúa con el magneto permanente del rotor para crear un torque, de tal manera que el rotor tenderá a alinearse con el campo magnético producido por las corrientes.

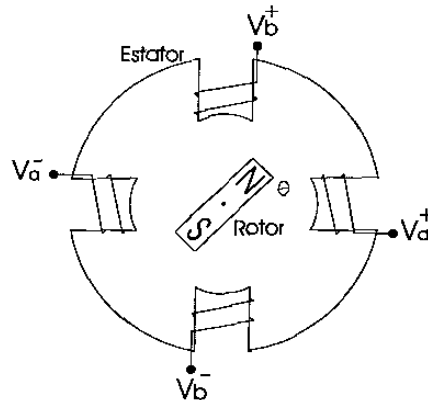


Fig.2.12 Dibujo esquemático de un motor PM de dos fases.

Como se estudió antes, al aplicar una secuencia de voltajes a cada fase en sucesión, provocará al rotor dar un paso. En el caso del dibujo esquemático de la Fig. 2.12 cada paso es de 90° , para el caso general, el tamaño del paso se determina por el número de dientes en el rotor N_r . La fórmula para el tamaño del paso θ del motor de dos fases está dada por:

$$\theta = \frac{90^\circ}{N_r}$$

En este trabajo, se utilizará un modelo matemático del motor a pasos de magneto permanente. En el modelo se hacen las siguientes hipótesis [2]:

- Se desprecia el pequeño acoplamiento que existe entre las fases.
- Se desprecia el pequeño cambio de inductancia como una función de la posición del rotor

- La variación en la inductancia debido a la saturación magnética es despreciada.
- El torque de frenado es despreciado, ya que en general se hace $K_d = 0$.

La ecuación que describe el movimiento del rotor es dada por:

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} + K_m i_a \sin(N_r \theta) - K_m i_b \cos(N_r \theta) + k_d \sin(4N_r \theta) = 0$$

donde los términos $K_m i_a \sin(N_r \theta)$ y $K_m i_b \cos(N_r \theta)$ representan los torques desarrollados en las fases A y B respectivamente. El término $K_d \text{sen}(4N_r \theta)$ representa el torque de frenado debido a la atracción magnética del imán permanente del rotor con el material magnético de los polos del estator.

Las ecuaciones del voltaje para los embobinados A y B del estator son:

$$\begin{aligned} v_a - Ri_a - L \frac{di_a}{dt} - M \frac{di_b}{dt} + K_m \omega \text{sen}(N_r \theta) &= 0 \\ v_b - Ri_b - L \frac{di_b}{dt} - M \frac{di_a}{dt} + K_m \omega \cos(N_r \theta) &= 0 \end{aligned}$$

donde:

v_a, v_b son los voltajes suministrados.

L es la inductancia propia de cada fase.

M es la inductancia mutua.

R es la resistencia en el estator.

En estas ecuaciones se considera que L y M son independientes de θ , y por las hipótesis se considera $M = 0$.

Entonces, el modelo puede ser descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales [2,18]:

$$\begin{aligned} \frac{di_a}{dt} &= [v_a - Ri_a + K_m \omega \text{sen}(N_r \theta)] / L \\ \frac{di_b}{dt} &= [v_b - Ri_b + K_m \omega \cos(N_r \theta)] / L \\ \frac{d\omega}{dt} &= [-K_m i_a \text{sen}(N_r \theta) + K_m i_b \cos(N_r \theta) - B\omega - K_d \text{sen}(4N_r \theta)] / J - \tau_l / J \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

Este modelo esta descrito por cuatro estados $(i_a, i_b, \omega, \theta)$, dos entradas (v_a, v_b) y algunos parámetros, donde i_a, i_b , y v_a, v_b denotan las corrientes y voltajes en las fases A y B, ω es velocidad angular del rotor y θ la posición angular del rotor. La descripción de cada elemento se muestra en la siguiente tabla:

Elemento	Descripción	Unidades
v_a, v_b	Voltajes en las fases <i>A</i> y <i>B</i>	<i>Volts</i>
i_a, i_b	Corrientes en las fases	<i>Amp</i>
ω	Velocidad angular	<i>rad/seg</i>
θ	Posición angular	<i>rad</i>
R	Resistencia	Ω
L	Inductancia	<i>H</i>
J	Constante de inercia	$N \cdot m \cdot s^2$
K_m	Constante de torque	$N \cdot m/A$
B	Coefficiente de fricción viscosa	$N \cdot m \cdot s$
τ_l	Par de carga	$N \cdot m$
N_r	Número de dientes del rotor	-
K_d	Torque de frenado	$N \cdot m$

Tabla 2.1 Descripción de cada elemento del modelo

Los valores nominales de los parámetros del motor seleccionados son los siguientes [3]:

Parámetro	Descripción	Valor
R	Resistencia	10 Ω
L	Inductancia	0.00011 <i>H</i>
J	Inercia del rotor	$5.7 \times 10^{-6} N \cdot m \cdot s^2$
K_m	Constante de torque del motor	0.113 $N \cdot m/A$
B	Constante de fricción viscosa	0.001 $N \cdot m \cdot s$
τ_l	Par de carga	0.05 $N \cdot m$
N_r	Número de dientes del rotor	50
K_d	Torque de frenado	0 $N \cdot m$

Tabla 2.2 Valores de los parámetros del motor a pasos

2.6 Conclusiones

En este capítulo, se han mostrado algunas de las características principales de los motores a pasos, así como su principio de funcionamiento. Se presentó el modelo matemático de un motor a pasos de magneto permanente. Dicho modelo es usado para aplicar las técnicas de control que se estudiarán en los siguientes capítulos.

Podemos notar que para algunas aplicaciones el diseñar estrategias de control en lazo cerrado beneficiará grandemente el desempeño de los motores a pasos, dándonos como resultado un mejor desempeño en la tarea desarrollada.

Capítulo 3

Perturbaciones Singulares para Sistemas no Lineales Continuos y Discretos

3.1 Introducción

Uno de los problemas que frecuentemente nos encontramos al tratar con modelos dinámicos de procesos es que en ocasiones están constituidos por un gran número de ecuaciones diferenciales o ecuaciones de diferencias, lo cual, en ocasiones hace que la tarea de diseño se dificulte, incluso analizar sus propiedades estructurales.

Debido a lo anterior, es necesario indagar en la búsqueda de métodos que nos permitan derivar modelos de orden reducido a partir de modelos de orden elevado. Una técnica que se utiliza para tal propósito es el método de perturbaciones singulares [4,7,17].

Cuando tratamos con el modelado de sistemas dinámicos, es decir, como describir matemáticamente el sistema a ser controlado, en ocasiones se hace uso de pequeñas *perturbaciones singulares*, es decir, la eliminación de pequeñas constantes de tiempo, masas, capacitancias y parámetros similares parásitos que incrementan el orden del modelo, y al eliminarlos no nos afectan en el sistema completo..

La utilización de las técnicas de perturbaciones singulares permite hacer una reducción del modelo original y simplificar la tarea de diseño. La característica principal de esta técnica consiste en descomponer el sistema original en dos subsistemas de dimensión menor, ambos descritos en diferentes escalas de tiempo. Otra ventaja de este método es su aplicabilidad a sistemas no lineales, en particular a sistemas electromecánicos [4].

Al descomponer el sistema dinámico en escalas de tiempo, por lo general, el modelo reducido representa el fenómeno más lento, el cual en la mayoría de las aplicaciones es el dominante [7].

En este capítulo se hace un estudio de las principales características de sistemas que se encuentran en la forma singularmente perturbada, y se estudia un esquema de dis-

cretización para la clase de sistemas considerados.

3.2 Análisis de Sistemas No Lineales en la Forma Singularmente Perturbada [4,7]

El modelo estándar de perturbaciones singulares está en la forma explícita de variables de estado, en el cual las derivadas de algunos de los estados son multiplicadas por un pequeño escalar constante ε , es decir, tiene la forma:

$$\dot{x} = f(x, z, u) \quad x(t_0) = x^0, \quad x \in R^{n_s} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(x, z, u) \quad z(t_0) = z^0, \quad z \in R^{n_f} \quad (3.2)$$

donde se considera que f y g son suficientemente continuamente diferenciables en sus argumentos x, z, u .

Cuando hacemos $\varepsilon = 0$ cambiamos las propiedades dinámicas del sistema y (3.2) se transforma a una ecuación algebraica, es decir:

$$0 = g(x, z, u) \quad (3.3)$$

Además, la dimensión de espacio de estado de (3.1)-(3.2) se reduce de $n_s + n_f$ a n_s . Esta característica, nos permite descomponer el sistema en dos subsistemas de orden menor, uno de ellos con transitorios rápidos (estados z) y el otro con transitorios lentos (estados x).

Las suposiciones siguientes nos aseguran que (3.1)-(3.2) está en la forma estandar de perturbaciones singulares.

Suposición 3.1 (Condición de Existencia): En un dominio de interés D , (3.3) tiene $k \geq 1$ raíces reales distintas (aisladas).

$$z = \bar{\phi}_i(x, u), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.4)$$

Suposición 3.2 : Para toda $x, z, u \in D$, las partes reales de los valores característicos de $\frac{\partial g(x, z, u)}{\partial z}$, son más pequeños que un número negativo fijo $-c$, es decir:

$$\text{Re } \lambda \left\{ \frac{\partial g(x, z, u)}{\partial z} \right\} < -c < 0 \quad (3.5)$$

tal que x y z representan las dinámicas lentas y rápidas respectivamente.

3.2.1 Clase de Sistemas No Lineales a Considerar

En este trabajo, se considerarán una clase de sistemas no lineales en la forma singularmente perturbada que son lineales en el estado rápido y en la entrada de control, y están dados de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f_1(x) + F_1(x)z \quad (3.6)$$

$$\varepsilon \dot{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u \quad (3.7)$$

donde $x \in B_x \in \mathbb{R}^{n_s}$ es el estado lento, $z \in B_z \in \mathbb{R}^{n_f}$ es el estado rápido, $u \in \mathbb{R}^r$ es la entrada de control y ε es un parámetro pequeño y positivo tal que $\varepsilon \in [0, 1)$. Las columnas de las matrices $F_1(x)$ y $F_2(x)$ y las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, y $g_2(x)$, se suponen ser acotadas en sus componentes y ser funciones suaves de x . Los subconjuntos B_x y B_z denotan una bola centrada y acotada en el origen. $F_2(x)$ se supone que es no singular para toda $x \in B_x$. Además, se supone que $f_1(0) = f_2(0) = 0$ y, para $u = 0$, el origen $(x, z) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio aislado.

Considerando que el modelo (3.6)-(3.7) cumple con las suposiciones 3.1, 3.2, y haciendo $\varepsilon = 0$, obtenemos de (3.7) la siguiente expresión algebraica:

$$0 = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u \quad (3.8)$$

Así mismo, obtenemos las raíces de la expresión (3.8), las cuales están dadas por:

$$z_s = \bar{\phi}(x_s, u_s) = -F_2^{-1}(x_s)[f_2(x_s) + g_2(x_s)u_s], \quad (3.9)$$

donde las variables z_s , x_s y u_s denotan las componentes lentas de z , x y u .

El modelo reducido se obtiene al sustituir (3.9) en (3.6),

$$\dot{x}_s = f_1(x_s) + F_1(x_s)\bar{\phi}(x_s, u_s), \quad x_x(t_0) = x^0, \quad (3.10)$$

donde se mantiene la misma condición inicial para la variable de estado $x_s(t)$ y $x(t)$. El modelo (3.10) es llamado modelo de estado-quasi-estacionario, por z , cuya velocidad $\dot{z} = g/\varepsilon$ es grande cuando ε es pequeña, convergiendo rápidamente a una raíz de (3.3), la cual está en la forma estado-quasi-estacionario.

Si la dinámica rápida es estable, entonces, después de un pequeño período de tiempo, converge a una variedad, llamada variedad integral o variedad lenta. Esta variedad es caracterizada por la condición de variedad integral o condición de invarianza.

El objetivo es conducir a $z(t)$ hacia la variedad lenta, entonces buscamos un control u_f que realice lo anterior. De esta manera, el control u que aparece en (3.1)-(3.2), estará compuesto por un control lento y un control rápido, el cual lo podemos denotar de la siguiente manera:

$$u = u_s + u_f \quad (3.11)$$

donde (3.8) es el control compuesto.

3.2.2 Comportamiento en Dos Escalas de Tiempo

Las perturbaciones singulares causan un comportamiento de multi-escala de tiempo caracterizados por la presencia de transitorios lentos y rápidos. Al hacer $\varepsilon = 0$, la respuesta lenta o el estado-quasi-estable, es aproximado por el modelo reducido (3.10), mientras que la discrepancia entre la respuesta del modelo reducido (3.10) y la del modelo completo (3.6)-(3.7), es el transitorio rápido. La variable z , ha sido excluida del modelo reducido (3.10) y sustituida por su estado-quasi-estacionario z_s . Comparando con la variable original z , que empieza en t_0 de un preestablecido z^0 , z_s no es libre para empezar de z^0 , y puede existir una larga discrepancia entre su valor inicial [4]

$$z_s(t_0) = \bar{\phi}(x_s(t_0), u_s(t_0)) \quad (3.12)$$

y la condición inicial z^0 preestablecida. Por tanto, z_s no puede ser una aproximación uniforme de z . La mejor aproximación que podemos esperar es:

$$z(t) = z_s(t) + O(\varepsilon)^1 \quad (3.13)$$

la cual se mantendrá sobre un intervalo excluyendo t_0 , ésto es, para t que este dentro de $[t_1, T]$, donde $t_1 > t_0$. También, podemos limitar el estado-quasi-estacionario x_s para empezar de la condición inicial preestablecida x^0 , y por tanto la aproximación de x por x_s

¹ Ver Apéndice.

pueda ser uniforme. En otras palabras,

$$x(t) = x_s(t) + O(\varepsilon) \quad (3.14)$$

puede mantenerse en un intervalo incluyendo t_0 , ésto es, para cada t que este dentro de $[t_0, T]$, en el cual $x_s(t)$ exista.

La aproximación (3.13) establece que durante un intervalo inicial $[t_0, t_1]$ la variable original z se aproxima a z_s y luego, durante $[t_1, T]$, permanece cerca de z_s , donde $T > t_1 > t_0$. Para describir el comportamiento de z en la escala de tiempo rápida, proseguimos de la siguiente manera. Si fijamos

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau}, \text{ donde } \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.15)$$

y usamos $\tau = 0$ como el valor inicial en $t = t_0$, obtenemos la nueva variable de tiempo:

$$\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}, \tau = 0 \text{ en } t = t_0 \quad (3.16)$$

En (3.16), si ε tiende a cero, τ tiende a infinito aún para un t fijo más grande que t_0 . Por otro lado, mientras z y τ casi cambian instantáneamente, x se mantiene cerca de su valor inicial x^0 . Para describir el comportamiento de z como una función de τ usamos la llamada corrección de capa frontera $\eta = z - \bar{\phi}_0$, es decir, hacemos un cambio de variables para representar la desviación de z de ϕ :

$$\frac{d\eta}{d\tau} = g(x^0, \eta(\tau) + \bar{\phi}_0, u_s(0) + u_f(\tau)) \quad (3.17)$$

con la condición inicial $z^0 - z_s(t_0)$, y x^0, t_0 como parámetros fijos. La solución $\eta(\tau)$ de este problema de valor inicial es usada como una corrección de la capa de frontera de (3.13) para una posible aproximación uniforme de z :

$$z = z_s(t) + \eta(\tau) + O(\varepsilon) \quad (3.18)$$

donde, $z_s(t)$ es el transitorio lento de z , y $\eta(\tau)$ es el transitorio rápido de z .

Para asegurar la convergencia de la aproximación corregida (3.18), después de un período corto, a la aproximación lenta (3.13), el término de corrección $\eta(\tau)$ debe decaer mientras $\tau \rightarrow \infty$ a una cantidad $O(\varepsilon)$. Ésto se supone en la siguiente:

Suposición 3.3: El equilibrio $\eta = 0$ de (3.17) es uniformemente asintóticamente estable x^0 y t_0 , y $\eta(t_0) = z^0 - \phi_0(t_0)$ pertenece a su dominio de atracción, más aún, $\eta(\tau)$ existe para $\tau \geq 0$ y $\lim_{\tau \rightarrow 0} \eta(\tau) = 0$.

Las suposiciones 3.2 y 3.3 aseguran las propiedades de estabilidad del sistema de capa frontera (subsistema rápido) (3.17). Si se supone que z^0 está suficientemente cerca de $z_s(t)$, entonces la suposición 3.2 incluye a la suposición 3.3.

Ahora, podemos definir el siguiente Teorema, conocido como Teorema de Tikhonov:

Teorema 3.1[7]: Bajo las suposiciones 3.2 y 3.3, las aproximaciones (3.14) y (3.17) son válidas para todo $t \in [t_0, T]$, y existe un $t_1 > t_0$ tal que (3.13) es válida para todo $t \in [t, T]$.

3.2.3 Obtención de las Dinámicas Lentas y Rápidas

Cuando hacemos $\varepsilon = 0$ y obtenemos el modelo reducido, lo que estamos haciendo en realidad es una aproximación del modelo reducido lento, el cual tiene la forma:

$$\dot{x}_s = f(x_s) + g(x_s)u \quad (3.19)$$

donde:

$$\begin{aligned} f(x_s) &= f_1(x_s) - F_1 F_2^{-1} f_2(x_s) \\ g(x_s) &= -F_1 F_2^{-1} g_2(x_s) \end{aligned}$$

Sabemos que con $\varepsilon = 0$, $z_s = \bar{\phi}(x, u)$, es una variedad invariante. Ahora, queremos encontrar una variedad invariante para $\varepsilon > 0$, entonces buscamos una variedad de la forma:

$$M_\varepsilon = z = \phi(x, u, \varepsilon); x \in B_x \in \mathbb{R}^{n_s}, z \in B_z \in \mathbb{R}^{n_f} \quad (3.20)$$

en donde suponemos que ϕ es una función suficientemente diferenciable en sus argumentos. Decimos entonces que M_ε es una variedad n-dimensional para el sistema de espacio de estado $(n_s + n_f)$ -dimensional que depende del escalar ε , en este caso $\varepsilon > 0$.

La función $\phi(x, u, \varepsilon)$ está definida como

$$\begin{aligned} \phi(x, u, \varepsilon) &= -F_2^{-1}(x_s)[f_2(x_s) + g_2(x_s)u_s] \\ &= -F_2^{-1}(x_s)f_2(x_s) - F_2^{-1}(x_s)g_2(x_s)u_s \\ &= \beta(x, \varepsilon) + \varphi(x, \varepsilon)u_{es}(x_s, \varepsilon) \end{aligned}$$

en donde $\beta(x_s, \varepsilon) = -F_2^{-1}(x_s)f_2(x_s)$, $\varphi(x_s, \varepsilon) = -F_2^{-1}(x_s)g_2(x_s)$, y $u_s = u_{es}(x_s, \varepsilon)$, y el subíndice e denota solución exacta. Para que M_ε sea una variedad invariante de (3.6)-(3.7), debe cumplirse lo siguiente²:

$$z(0, \varepsilon) - \phi(x_s(0), \varepsilon) = 0 \Rightarrow z(t, \varepsilon) - \phi(x_s(t), \varepsilon) \equiv 0, \quad \forall t \in T \subset [0, \infty)$$

donde T es cualquier intervalo sobre el cual la solución $[x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)]$ existe. Ahora, si diferenciamos con respecto a t ambos lados de la ecuación anterior y multiplicamos por ε , obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\partial \phi}{\partial x_s} \dot{x}_s \\ \varepsilon \dot{z} &= \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_s} \dot{x}_s \end{aligned}$$

Si sustituimos los valores de $\varepsilon \dot{z}$ y \dot{x}_s , tenemos:

$$f_2 + F_2\beta + F_2\varphi u_{es} + g_2 u_{es} = \varepsilon \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_s} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} u_{es} + \varphi \frac{\partial u_{es}}{\partial x_s} \right) [f_1 + F_1\beta + F_1\varphi u_{es}] \quad (3.21)$$

Esta expresión es conocida como la condición de variedad, donde las funciones β , φ y u_{es} deben de satisfacerla $\forall x_s \in B_x$ y ε suficientemente pequeño.

Analicemos ahora M_ε para $\varepsilon = 0$, es decir, M_0 definido para $\varepsilon = 0$ en (3.20) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} M_0 &= z_s = \bar{\phi}(x_s, u_s, 0) = \bar{\phi}(x_s, u_s) \\ 0 &= f_2(x_s) + F_2(x_s)\phi(x_s) + g_2(x_s)u_s \end{aligned} \quad (3.22)$$

La expresión que obtenemos de la condición de variedad es la misma que obtenemos cuando en el sistema (3.6)-(3.7) hacemos $\varepsilon = 0$.

Es muy complicado obtener un modelo exacto reducido evolucionando sobre M_ε , así que lo que comúnmente se hace es una aproximación [4] usando expansión en series de Taylor de ϕ con respecto a ε :

$$\phi(x_s, u_s, \varepsilon) = \phi_0(x_s, u_s) + \varepsilon \phi_1(x_s, u_s, \dot{u}_s) + O(\varepsilon^2), \quad \text{con } \phi = \phi_0.$$

² Ver [4], pag. 168.

Más precisamente, se hace la expansión de β , φ y u_{es} alrededor de ε , es decir, una aproximación $O(\varepsilon)$, entonces $\phi(x_s, u, \varepsilon) - \phi(x_s, u) = O(\varepsilon)$, o bien, $\beta(x_s, \varepsilon) = -F_2^{-1}(x_s) f_2(x_s) + O(\varepsilon)$, $\varphi(x_s, \varepsilon) = -F_2^{-1}(x_s) g_2(x_s) + O(\varepsilon)$ y $u_{es} = u_s(x_s) + O(\varepsilon)$ y sustituimos estas aproximaciones en la condición de variedad.

La dinámica rápida puede ser obtenida cambiando la escala de tiempo lenta por la rápida, la cual fue definida anteriormente (3.16).

Si representamos la desviación de z de M_ε por una nueva variable de la forma $\eta = z - \phi(x_s, u_s, \varepsilon)$ entonces el sistema nos queda:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \varepsilon [f_1(\tilde{x}) + F_1(\tilde{x})(\eta + \phi(\tilde{x}, \varepsilon))] \quad (3.23)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = f_2(\tilde{x}) + F_2(\tilde{x})(\eta + \phi(\tilde{x}, \varepsilon)) + g_2(\tilde{x})u - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \quad (3.24)$$

donde \tilde{x} denota a la variable x en la escala rápida y la ecuación (3.24) representa la dinámica rápida del sistema.

Si la componente del control u_s y $\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}}$ están acotadas y \tilde{x} permanece relativamente constante con respecto a τ , entonces el término $\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{d\tau}$ puede ser despreciado para un ε pequeño. Puesto que (3.24) define el subsistema reducido rápido, se puede hacer una aproximación $O(\varepsilon)$ utilizando (3.22) y $\varepsilon = 0$ en (3.23) y (3.24), dandonos como resultado el subsistema reducido rápido aproximado:

$$\frac{d\eta_{apx}}{d\tau} = F_2(\tilde{x})\eta_{apx} + g_2(\tilde{x})u_f \quad (3.25)$$

donde, el subíndice $_{apx}$ denota aproximación de la solución.

3.3 Discretización de Sistemas en la Forma Singularmente Perturbada

En esta sección, nos interesa obtener la versión discreta para la clase de sistemas no lineales en la forma singularmente perturbada estudiada previamente. Sabemos que en el proceso de discretización hacemos una aproximación numérica de las ecuaciones diferenciales obteniendo ecuaciones en diferencia. Entonces, discretizar un sistema de ecuaciones diferenciales consiste en tomar muestras en períodos discretos de tiempo, dichas muestras se hacen con un período de muestreo μ . Si $\mu \rightarrow 0$, el sistema muestreado se asemejará más

al sistema continuo.

En esta sección, se presenta el esquema de discretización para la clase de sistemas singularmente perturbados que se consideran en este trabajo, dicho esquema ha sido propuesto por [6], y aquí estudiaremos sus principales características. La razón por la cual nos interesa obtener una versión discreta del sistema singularmente perturbado, es debido al gran avance en las áreas de computadoras digitales, donde cada vez encontramos más implementaciones utilizando tecnología digital [6,13,15]. Por lo anterior, nos interesa diseñar controles por la técnica de modos deslizantes en tiempo discreto.

Cuando se muestrean ecuaciones diferenciales en la forma singularmente perturbada, la propiedad de multi-escala de tiempo se preserva y el modelo muestreado resultante contiene tanto la dinámica lenta como la rápida. El muestreo de un sistema en la forma singularmente perturbada es fuertemente dependiente del períodos de muestreo; ciertamente, períodos de muestreo lentos y rápidos nos llevan a diferentes modelos en tiempo discreto.

3.3.1 Esquema de Discretización [6]

Analícemos ahora, el esquema de discretización mencionado. Para ésto, consideremos el sistema (3.9)-(3.10).

Para obtener un modelo discreto, podemos considerar la siguiente representación:

$$\dot{Y} = (F + \frac{G}{\varepsilon}) \quad (3.26)$$

donde:

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1(x) + F_1(x)z \\ 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Si suponemos que δ es un período de muestreo fijo, entonces, para una entrada de control constante sobre el intervalo de tiempo de amplitud δ , se tiene que $u(t) = u(k)$ y $n\delta \leq t < (k+1)\delta$, para $k \geq 0$.

A instantes de muestreo $t = (k+1)\delta$ la solución de (3.26) está dada por [6]:

$$Y((k+1)\delta) = e^{\delta L_{(F+\frac{G}{\varepsilon})}} I_d |_{Y(k)} \quad (3.28)$$

donde los vectores F y G dependen de $u(k)$, I_d representa la función identidad, $|$ representa la evaluación de la función en ese punto, y $e^{\delta L_{(F+G/\varepsilon)}}$ denota el operador exponencial de la serie de Lie:

$$e^{\delta L_{(F+G/\varepsilon)}} = \sum_{i \geq 0} \frac{\delta^i}{i!} L_{(F+G/\varepsilon)}^i$$

Ahora, designaremos a $\delta = \alpha\varepsilon$ como el muestreo lento, con α cercana a 1 y el muestreo rápido como $\delta = \beta\varepsilon$ con δ fijo y $\varepsilon \rightarrow 0^+$ como $\beta \rightarrow +\infty$. Utilizaremos un muestreo rápido para discretizar nuestro sistema. Supondremos el período de muestreo δ y ε suficientemente pequeños, es razonable escribir δ como $\alpha\varepsilon$ donde α es un número real, manteniéndose $\alpha\varepsilon$ suficientemente pequeño. El modelo con el índice de muestreo rápido puede ser usado para asignar un comportamiento en lazo cerrado rápido y estabilizar la componente del estado rápido z cuando este subsistema es inestable [6].

Si fijamos $\delta = \alpha\varepsilon$ y utilizando $e^{-\alpha L_G} e^{\alpha L_G} = I_d$, la ecuación (3.28) puede ser reescrita de la forma:

$$Y((k+1)\delta) = \{e^{\alpha L_{\varepsilon F+G}} e^{-\alpha L_F}\} e^{\alpha L_F} I_d |_{Y(k)} \quad (3.29)$$

la cual puede ser expandida en series de potencias de ε utilizando las fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff. La discretización exacta del sistema continuo en el tiempo (3.29) está basada en una serie infinita, la cual no es razonable utilizar para propósitos prácticos, que hace necesario una aproximación, truncando la serie de potencias. En muchos casos una aproximación de primer orden nos proporciona un modelo que representa con buena exactitud el comportamiento dinámico del sistema continuo en el tiempo. El siguiente resultado de [6] nos indica como podemos realizar esta aproximación:

Resultado [6]: La aproximación de primer orden en ε de la dinámica rápida discreta en el tiempo está dada por:

$$Y(k+1) = e^{\alpha L_G} I_d |_{Y(k)} + \varepsilon E(\alpha G, \alpha F) e^{\alpha L_G} I_d |_{Y(k)} \quad (3.30)$$

donde $E(\alpha G, \alpha F)$ representan los campos vectoriales correspondientes al álgebra de Lie generada por las funciones F y G [5]. La ecuación (3.30) puede ser descompuesta como:

$$x(k+1) = x(k) + \varepsilon E(\alpha G, \alpha F) e^{\alpha L_F} I_{d_{ns}} \quad (3.31)$$

$$z(k+1) = \{e^{\alpha L_G} I_{d_{n_f}} + \varepsilon E^1(\alpha G, \alpha F) e^{\alpha L_G} I_{d_{n_f}}\} |_{Y(k)} \quad (3.32)$$

donde $I_{d_{n_s}}$ e $I_{d_{n_f}}$ denotan las proyecciones de la identidad desde \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^{n_s} y \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^{n_f} , respectivamente. Además, (3.31) representa el sistema lento y (3.32) el sistema rápido.

Analizando más detalladamente tenemos que:

$$E(\alpha G, \alpha F) I_{d_{n_s}} \mid_{Y(k)} = \sum_{i \geq 1} \frac{\alpha^i}{i!} L_G^{i-1}(f(x, z, u)).$$

$$e^{\alpha L_G}(I_{d_{n_f}}) \mid_{Y(k)} = e^{\alpha L_G(x, z, u)}(z) |_{Y(k)}$$

Entonces, la dinámica:

$$x(k+1) = x(k) + \varepsilon E(\alpha G, \alpha F) I_{d_{n_s}} |_{Y(k)}$$

$$z(k+1) = e^{\alpha L_G}(I_{d_{n_f}})$$

es denominada *dinámica rápida discreta dominante* debido a que enfatiza la dinámica rápida en el contexto del muestreo rápido, donde:

$$E(\alpha G, \alpha F) I_{d_{n_s}} \mid_{Y(k)} = \alpha [f_1(x(k)) + F_1(x(k))z(k)]$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2!} F_1(x(k)) [f_2(x(k)) + F_2(x(k))z(k) + g_2(x(k))u(k)] + O(\alpha^3)$$

$$e^{\alpha L_G}(I_{d_{n_f}}) \mid_{Y(k)} = z(k) + \alpha [f_2(x(k)) + F_2(x(k))z(k) + g_2(x(k))u(k)]$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2!} F_2(x(k)) [f_2(x(k)) + F_2(x(k))z(k) + g_2(x(k))u(k)] + O(\alpha^3)$$

Entonces, la dinámica discreta en el tiempo del sistema (3.6)-(3.7) está dada por:

$$x(k+1) = x(k) + \varepsilon \alpha [f_1(x(k)) + F_1(x(k))z(k)] \quad (3.33)$$

$$+ \frac{\varepsilon \alpha^2}{2!} F_1(x(k)) [f_2(x(k)) + F_2(x(k))z(k) + g_2(x(k))u(k)] + O(\alpha^3)$$

$$z(k+1) = z(k) + (\alpha I_{d_{n_f}} + \frac{\varepsilon \alpha^2}{2!} F_2(x(k)) [f_2(x(k)) + F_2(x(k))z(k) + g_2(x(k))u(k)]$$

$$+ O(\alpha^3) \quad (3.34)$$

Este esquema de discretización se utilizará para discretizar el modelo del motor a pasos de magneto permanente, para posteriormente diseñar un algoritmo de control con la técnica de modos deslizantes.

3.3.2 Obtención del Subsistema Discreto Lento

Ahora, para obtener los subsistemas rápido y lento de (3.33) y (3.34) podemos utilizar un procedimiento intuitivo del estado quasi-estacionario. El subsistema lento es definido al no considerar los modos rápidos, ésto es, se supone que los transitorios rápidos han alcanzado su estado estacionario.

Para obtener el subsistema reducido lento suponemos que el subsistema rápido alcanza el estado quasi-estacionario, es decir, $z(k+1) = z(k) = \bar{z}(k)$ y definimos $x(k) = \bar{x}(k)$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} x_s(k+1) &= x_s(k) + \varepsilon [f_1(x_s(k)) + F_1(x_s(k))z_s(k)] \\ &\quad + \frac{\varepsilon\alpha^2}{2!} F_1(x_s(k)) [f_2(x_s(k)) + F_2(x_s(k))z_s(k) + g_2(x_s(k))u_s(k)] \\ &\quad + O(\alpha^3) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} z_s(k) &= z_s(k) + (\alpha I_{d_{n_f}} + \frac{\varepsilon\alpha^2}{2!} F_2(x_s(k))) [f_2(x_s(k)) + F_2(x_s(k))z_s(k) + g_2(x_s(k))u(k)] \\ &\quad + O(\alpha^3) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Suponiendo que $F_2(x_s(k))$ y $(\alpha I_{d_{n_f}} + \frac{\varepsilon\alpha^2}{2!} F_2(x_s(k)))$ son no-singulares, podemos despejar de (3.36) $z_s(k)$ y nos queda:

$$z_s(k) = F_2(x_s(k))^{-1} [f_2(x_s(k)) + g_2(x_s(k))u_s(k)] + O(\alpha^3) \quad (3.37)$$

Al sustituir (3.37) en (3.35), el subsistema lento está dado por:

$$x_s(k+1) = x_s(k) + \varepsilon\alpha f_s(x_s(k)) + \varepsilon\alpha g_s(x_s(k))u_s(k) \quad (3.38)$$

donde f_s y g_s están dados por:

$$f_s(x_s(k)) = f_1(x_s(k)) - F_1(x_s(k))F_2^{-1}(x_s(k))f_2(x_s(k)) \quad (3.39)$$

$$g_s(x_s(k)) = -F_1(x_s(k))F_2^{-1}(x_s(k))g_2(x_s(k)) \quad (3.40)$$

3.3.3 Obtención del Subsistema Discreto Rápido

Para obtener el subsistema discreto rápido, suponemos que las variables lentas son constantes durante el transitorio rápido, es decir, $x_s(k+1) = x_s(k) = cte$, y $u_s(k+1) =$

$u_s(k) = cte$. Definimos, $z_f(k) = z(k) - z_s(k)$ y $z_f(k+1) = z(k+1) - z_s(k+1)$, y sustituyendo (3.36) en (3.34), obtendremos el subsistema rápido el cual tiene la forma:

$$z_f(k+1) = z_f(k) + \left(\alpha I_{n_f} + \frac{\alpha^2}{2!} F_2(x_s(k)) \right) [F_2(x_s(k))z_f(k) + g_2(x_s(k))u_f(k)] \quad (3.41)$$

3.4 Conclusiones

En este capítulo, se han presentado las características principales de un sistema singularmente perturbado, así como las condiciones que éstos deben de cumplir. Se analizó, que al utilizar esta metodología, descomponemos el sistema original en dos subsistemas de orden menor descritos en diferentes escalas de tiempo. Debido a lo anterior, obtuvimos un subsistema reducido lento y un subsistema rápido, lo cual representa un ventaja al momento de diseñar los controles porque se desarrollan para sistemas de orden menor.

Por otro lado, se hizo una descripción del esquema de discretización para sistemas singularmente perturbados que será utilizado. La ventaja de utilizar este método es que toma en cuenta las propiedades de multi-escala y el modelo aproximado obtenido es más exacto.

Capítulo 4

Control por Modos Deslizantes Continuo

4.1 Introducción

Además de la simplicidad y el buen desempeño que se obtiene en muchas aplicaciones, al aplicar la técnica de perturbaciones singulares, se hace posible el estudio de propiedades dinámicas importantes asociadas al sistema de orden completo tales como su robustez en la presencia de dinámicas no modeladas [7]. Por otro lado, la técnica de modos deslizantes se ha usado extensamente para obtener esquemas de control robusto [10], y en particular ha sido aplicada a máquinas eléctricas con buenos resultados [4]. Por tanto, el combinar estas dos técnicas representa una buena posibilidad para lograr objetivos de control tales como regulación y seguimiento de trayectorias en sistemas que tienen dinámicas no modeladas o incertidumbres paramétricas [4,7].

En este capítulo, se hace uso de ambas técnicas aplicadas a la clase de sistemas no lineales singularmente perturbada, estudiada en el capítulo anterior. En particular, se diseña un esquema control-observador para el modelo del motor a pasos de magneto permanente y se desarrollan simulaciones para mostrar su desempeño.

4.2 Control por Modos Deslizantes

En un contexto general, el propósito de la ley de control por modos deslizantes, es el de conducir a la trayectoria de estado de la planta no lineal dentro de una superficie en el espacio de estado y mantener dicha trayectoria sobre esa superficie para todo tiempo futuro. Esta superficie es llamada *superficie de conmutación* o *superficie de deslizamiento*. Cuando la trayectoria de la planta está por “arriba” de la superficie, el control tiene una ganancia, y esta ganancia es diferente si la trayectoria está por “debajo” de la superficie.

La superficie también es llamada *variedad de deslizamiento*, idealmente hablando, una vez que es interceptada, el control por modos deslizantes mantiene tal trayectoria de estado

sobre la superficie para todo tiempo futuro, entonces, se desliza a través de la superficie.

Como un primer paso, tenemos que diseñar o seleccionar una superficie deslizante tal que el estado de la planta restringido a la superficie tenga la dinámica deseada. Después, se diseña un control deslizante que conducirá al estado de la planta a la superficie deslizante y lo mantendrá sobre ella.

Consideremos la siguiente superficie de conmutación:

$$\sigma(x) = [\sigma(x) \dots, \sigma_r(x)]^T = 0, \quad (4.1)$$

la cual se diseña para que la trayectoria de estado, una vez restringida a $\sigma(x) = 0$, tenga un comportamiento adecuado para estabilidad o seguimiento. Una vez que se hace un diseño adecuado de la superficie de conmutación, se diseña un control $u(x, t)$ cuyo objetivo es llevar a la trayectoria de estado del sistema hacia la superficie de deslizamiento y, una vez que esté dentro de la superficie, mantenerla dentro para todo tiempo futuro. El control $u(x, t)$ se construye de la forma:

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t), & \text{cuando } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t), & \text{cuando } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

donde se indica que el control cambia dependiendo del signo de la superficie de conmutación. Además, no está definido para $\sigma(x) = 0$, que es la superficie de conmutación, fuera de esa superficie los valores del control u son seleccionados de tal forma que la trayectoria del estado es conducida y mantenida en $\sigma(x) = 0$.

Entonces, la trayectoria del estado se puede ver como si se deslizara hacia la superficie de conmutación, por lo tanto decimos que en el sistema existe un modo deslizante. Un modo deslizante ideal existiría sólo cuando la trayectoria $x(t)$ satisficiera $\sigma(x) = 0$ para todo tiempo, pero ésto requeriría de una conmutación muy rápida o infinita (Ver Fig. 4.1 (b)). En realidad, al desplazarse la trayectoria del estado hacia la superficie se hace notoria una oscilación, debido al cambiante valor del control u , esta oscilación es conocida como *castañeo* (chattering) (Ver Fig 4.1 (a)).

La existencia de un modo deslizante requiere estabilidad de la trayectoria de estado a la superficie de conmutación $\sigma(x) = 0$, es decir, después de algún tiempo finito t_1 , $x(t)$ debe

de estar en alguna vecindad aceptable tal que $\|\sigma(x)\| < \mu$, para algún $\mu > 0$.

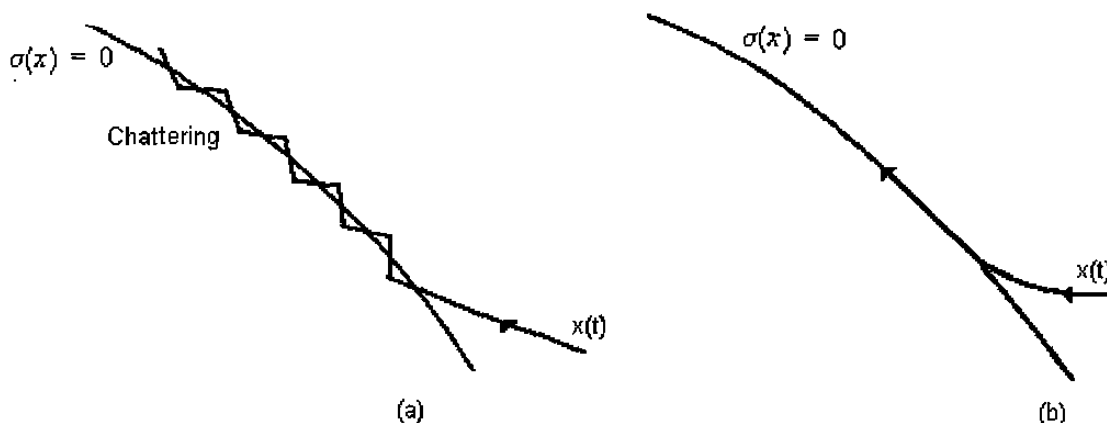


Fig. 4.1: (a) Fenómeno del chattering, (b) Desplazamiento ideal

Podemos decir entonces, que el diseño del control por modos deslizantes consiste en dos fases primordiales. La primera es construir la superficie de conmutación $\sigma(x) = 0$, tal que el sistema restringido a la superficie tenga el comportamiento deseado como regulación, seguimiento, estabilización, etc. La segunda fase es diseñar el control u tal que, estando fuera de la superficie $\sigma(x) = 0$, los vectores tangentes de las trayectorias del estado se dirijan hacia la superficie, es decir, que exista convergencia hacia la superficie de conmutación. Lo anterior se logra definiendo una función de Lyapunov $V(\sigma)$, diferenciando esta función hasta que el control u quede explícito, y asignando ganancias al control tal que la derivada sea negativa definida [10].

Debido a que consideramos un sistema en la forma singularmente perturbada, es decir, descomponemos el sistema en dos subsistemas de orden menor, tendremos que diseñar el control por modos deslizantes en dos etapas. Ésto es, diseñaremos un control por modos deslizantes para cada subsistema. Después los dos controles son combinados para obtener el control compuesto el cual es aplicado al sistema (3.6)-(3.7).

Entonces, para el subsistema lento (3.19) diseñamos u_s , y para el subsistema rápido u_f (3.25), dando como resultado el control compuesto: $u = u_s + u_f$.

Para mantener la trayectoria de estado sobre la superficie de deslizamiento es necesario diseñar un control que la mantenga dentro. Lo anterior se logra por medio del método del control equivalente.

4.2.1 Método del Control Equivalente

Definamos el siguiente sistema:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.3)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ y f y g son continuamente diferenciables en sus argumentos y acotadas, ésto es, para representar de una manera general a los sistemas (3.19) y (3.25).

Como primer paso para el diseño del control por modos deslizantes, consideraremos la superficie de deslizamiento definida por (4.1), y supondremos que existe un modo deslizante sobre $\sigma(x) = 0$. La existencia de un modo deslizante implica que, para todo $t \geq t_1$, $\sigma(x) = 0$, y, por consecuencia $\dot{\sigma}(x) = 0$. Encontraremos ahora un control continuo tal que bajo la posición inicial del vector de estado sobre la variedad, nos lleva a igualar la derivada con respecto al tiempo de (4.1) a lo largo de las trayectorias del sistema (4.3), es decir, partimos de que el estado inicial está sobre la superficie para obtener:

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} \dot{x} = 0 \quad (4.4)$$

y consideramos que la(s) solución(es) de la ecuación algebraica anterior con respecto al control existen, a este control lo llamamos control equivalente u_{eq} , el cual lo sustituiremos en (4.3). Este método es llamado: método del control equivalente, el cual se refiere a una entrada equivalente la cual, al excitar al sistema, determina el movimiento del sistema reducido restringido a la superficie deslizante $\sigma(x) = 0$ cuando el estado inicial este dentro de la superficie. Por lo tanto, utilizando la regla de la cadena, determinamos el control equivalente de la siguiente manera.

Sustituyendo el sistema (4.3) y sabiendo que $\dot{\sigma}(x) = 0$, el control equivalente nos queda:

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u_{eq}) = 0$$

despejando u_{eq} , obtenemos el control equivalente dado por la expresión:

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} f(x) \right] \quad (4.5)$$

El método de control equivalente, implica que debemos de reemplazar el control u considerado en (4.2), con un control continuo el cual dirige la velocidad del vector de estado a lo largo de la superficie.

Para completar el diseño del control, tenemos que agregar al control una parte de atracción, o bien, un control de atracción u_N , el cual se encargará de llevar las trayectorias del sistema a la superficie $\sigma_s(x_s) = 0$, es decir, el control de atracción actúa cuando $\sigma_s(x_s) \neq 0$. Entonces el control completo para (4.3) quedaría:

$$u = u_{eq} + u_N \quad (4.6)$$

De esta manera, el control equivalente actúa cuando la trayectoria de estado está sobre la superficie, mientras que el control de atracción actúa cuando la trayectoria de estado esta fuera de ella, es decir, atrae las trayectorias hacia la superficie de deslizamiento. El diseño del control de atracción se discutirá en la siguiente sección.

4.2.2 Control de Atracción

Como se ha mencionado antes, la estabilidad hacia la variedad de equilibrio la podemos determinar utilizando una función de Lyapunov para obtener condiciones sobre el control u , el cual conducirá la trayectoria del estado hacia la variedad de equilibrio. Usualmente, es suficiente considerar funciones de Lyapunov cuadráticas de la forma:

$$V(x, \sigma) = \sigma^T(x)W\sigma(x) \quad (4.7)$$

donde W es una matriz simétrica definida positiva. Entonces, el control u puede ser seleccionado tal que la derivada de $V(x, \sigma)$ con respecto al tiempo, sea negativa definida para $\sigma(x) \neq 0$. Podemos concluir ésto de la siguiente manera:

$$\dot{V}(x, \sigma) = \sigma^T(x)W\dot{\sigma}(x) + \dot{\sigma}^T(x)W\sigma(x) = 2\sigma^T(x)W\dot{\sigma}(x) \quad (4.8)$$

al sustituir (4.3) y (4.4) obtenemos:

$$\dot{V}(x, \sigma) = 2\sigma^T(x)W\frac{\partial\sigma(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)u) < 0 \quad (4.9)$$

donde $\dot{V}(x, \sigma)$ es definida positiva para un control u apropiado cuando $\sigma(x) \neq 0$.

Ahora, tomando (4.4) y (4.6) y sustituyendo el valor de u_{eq} , de (4.9) obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, \sigma) &= 2\sigma^T(x)W \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)(u_{eq} + u_N)) < 0 \\ &= 2\sigma^T(x)W \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x)u_N < 0\end{aligned}\quad (4.10)$$

lo que nos dice que una condición suficiente para la estabilidad hacia la superficie de equilibrio es seleccionar u_N tal que (4.10) se satisfaga. Es claro notar que una buena selección de u_N sería:

$$u_N = \left[\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \bar{u}_N$$

donde \bar{u}_N denota algún control para cual la función de Lyapunov se cumple. Debido a que $\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x)$ es no singular, y, sustituyendo u_N en (4.10) obtenemos:

$$\dot{V}(x, \sigma) = 2\sigma^T(x) \left[\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x) \right] \left[\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \bar{u}_N = 2\sigma^T(x) \bar{u}_N < 0 \quad (4.11)$$

con $W = I$. A continuación se presentarán algunas opciones para seleccionar u_N .

4.2.2.1 Control de Atracción Utilizando una Retroalimentación No-Lineal Continua

Debido a que deseamos encontrar un control para cuando $\sigma \neq 0$, entonces, proyectamos el movimiento del sistema fuera de $\sigma = 0$ como:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(x) &= -L(x)\sigma(x) \\ \dot{\sigma}(x) &= \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)(u_{eq} + u_N)] = -L(x)\sigma(x)\end{aligned}\quad (4.12)$$

desdejaando u_N y sustituyendo el valor de u_{eq} obtenido en (4.5), obtenemos el control de atracción dado por:

$$u_N = - \left[\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x) \right]^{-1} L(x)\sigma(x) \quad (4.13)$$

donde $L(x)$ es una matriz definida positiva de dimensión $r \times r$ cuyas componentes son funciones no lineales reales C^0 acotadas de x , tal que:

$$\|L(x)\| \leq \rho \quad (4.14)$$

para toda $x \in B$ con $\rho > 0$ constante. El control (4.13) desaparece cuando $\sigma(x) = 0$, es decir, cuando estamos sobre la superficie de deslizamiento.

La ecuación que describe la proyección de movimiento del sistema (4.3) fuera de $\sigma(x) = 0$ es dada por (4.12):

Las propiedades de estabilidad de $\sigma(x) = 0$ en (4.13) pueden ser estudiadas por medio de la función de Lyapunov candidata:

$$V(x) = \frac{1}{2} \sigma^T(x) \sigma(x) \quad (4.15)$$

cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de (4.17) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sigma(x) \sigma^T(x) \dot{\sigma}(x) \\ &= -\sigma^T(x) L(x) \sigma(x) \end{aligned} \quad (4.16)$$

para toda $x \in B_x$. Además, $\sigma(x)$ es diferenciable, por lo que tenemos que:

$$\|\sigma(x) - \sigma(0)\| \leq l_\sigma \|x\|, \quad \forall x \in B_x \quad (4.17)$$

donde l_σ es la constante de Lipschitz de $\sigma(x)$ con respecto a x . Entonces, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\sigma^T(x) L(x) \sigma(x) \\ &\leq -l_\sigma \|x\| \rho l_\sigma \|x\| \\ &\leq -\rho l_\sigma^2 \|x\|^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

entonces, podemos concluir la existencia de un modo deslizante.

4.2.2.2 Control de Atracción Utilizando Función Signo y Ganancias Constantes

En este caso, la proyección del movimiento del sistema fuera de $\sigma = 0$, la seleccionamos de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma}(x) = P \text{sign}(\sigma(x)) \quad (4.19)$$

$$= \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)(u_{eq} + u_N)) = P \text{sign}(\sigma(x))$$

sustituyendo u_{eq} de (4.5) obtenemos:

$$u_N = \left[\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x) \right]^{-1} P \text{sign}(\sigma(x)) \quad (4.20)$$

donde P es una matriz $r \times r$ diagonal dominante negativa y $\text{sign}(\sigma(x))$ ¹ es una función discontinua. La proyección del movimiento fuera de $\sigma = 0$ es dada entonces por (4.19). Las propiedades de estabilidad de $\sigma(x) = 0$ en (4.19) pueden ser estudiadas por medio de la función de Lyapunov candidata:

$$V(x) = \sigma^T(x)\sigma(x) \quad (4.21)$$

cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de (4.19) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2\sigma^T(x)\dot{\sigma}(x) \\ &= 2\sigma^T(x)P \text{sign}(\sigma(x)) \\ &= 2P |\sigma^T(x)| < 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

con lo que (4.22) garantiza estabilidad fuera de $\sigma(x) = 0$, y podemos concluir la existencia de un modo deslizante.

4.2.3 Diseño del Control por Modos Deslizantes para el Subsistema Lento

En esta sección diseñaremos el control deslizante correspondiente al subsistema lento (3.21). Para el diseño del control deslizante lento, consideremos la siguiente superficie de deslizamiento lenta definida por :

$$\sigma_s(x_s) = [\sigma_{s1}(x_{s1}), \dots, \sigma_{sr}(x_{sr})]^T = 0, \quad (4.23)$$

¹ La función se define como: $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Supondremos que existe un modo deslizante sobre $\sigma_s(x_s) = 0$. Ahora, encontraremos el control equivalente definido anteriormente, sólo que ahora para el subsistema lento, el cual nos queda

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_s(x_s) &= \frac{\partial \sigma_s(x_s)}{\partial x_s} (f(x_s) + g(x_s)u_{seq}) \\ u_{seq} &= - \left[\frac{\partial \sigma_s(x_s)}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_s(x_s)}{\partial x_s} f(x_s) \right]\end{aligned}\quad (4.24)$$

Ahora tenemos que diseñar un control de atracción para completar el diseño de u_s , ya que está compuesto por:

$$u_s = u_{seq} + u_{sn} \quad (4.25)$$

El control de atracción lento se diseñará conforme a lo estudiado anteriormente.

Primer control de atracción:

Aquí diseñaremos el control de atracción definido en la sección 4.2.2.1. La ecuación que nos define el movimiento del sistema fuera de $\sigma = 0$ está dada por:

$$\dot{\sigma}_s(x_s) = -L_s(x_s)\sigma(x_s) \quad (4.26)$$

donde $L_s(x_s)$ es una matriz definida positiva de dimensión $r \times r$ tal que:

$$\|L_s(x_s)\| \leq \rho_s \quad (4.27)$$

para toda $x_s \in B_x$ con $\rho_s > 0$ constante.

Entonces el control de atracción queda de la forma:

$$u_{sn1} = - \left[\frac{\partial \sigma_s(x_s)}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} L_s(x_s)\sigma(x_s) \quad (4.28)$$

Las propiedades de estabilidad de $\sigma(x_s) = 0$ en (4.26) pueden ser estudiadas por medio de la función de Lyapunov candidata

$$V(x_s) = \frac{1}{2} \sigma^T(x_s)\sigma(x_s) \quad (4.29)$$

cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de (4.26) satisface

$$\dot{V}(x_s) = -\sigma^T(x_s)L_s(x_s)\sigma(x_s) \quad (4.30)$$

para toda $x_s \in B_x$. Además,

$$\|\sigma(x_s) - \sigma(0)\| \leq l_{\sigma_s} \|x_s\|, \quad \forall x_s \in B_x \quad (4.31)$$

donde l_{σ_s} es la constante de Lipschitz de $\sigma(x_s)$ con respecto a x_s . Entonces, obtenemos:

$$\dot{V}(x_s) = -\rho_s l_{\sigma_s}^2 \|x_s\|^2 \quad (4.32)$$

así, podemos concluir la existencia de un modo deslizante.

Segundo control de atracción:

Ahora diseñaremos el control de atracción definido en la sección 4.2.2.2 para el subsistema lento. En este caso, la proyección del movimiento del sistema fuera de $\sigma_s = 0$, lo seleccionamos de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma}_s(x_s) = P_s \text{sign}(\sigma_s(x_s)) \quad (4.33)$$

donde P_s y $\text{sign}(\sigma_s)$ ya fueron definidos antes.

Con lo anterior, obtenemos el control de atracción:

$$u_{\text{mov2}} = \left[\frac{\partial \sigma_s(x_s)}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} P_s \text{sign}(\sigma(x_s)) \quad (4.34)$$

La proyección del movimiento fuera de $\sigma_s = 0$ está dada por (4.33). Podemos estudiar las propiedades de estabilidad de $\sigma_s(x_s) = 0$ en (4.33) por medio de la función de Lyapunov candidata:

$$V_s(x_s) = \sigma_s^T(x_s)\sigma_s(x_s) \quad (4.35)$$

cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de (4.33) es:

$$\dot{V}_s(x_s) = 2P_s |\sigma_s^T(x_s)| < 0 \quad (4.36)$$

por lo tanto, se puede concluir la existencia de un modo deslizante.

Entonces, hemos diseñado dos controladores para el subsistema lento utilizando la técnica de modos deslizantes con diferentes criterios en la elección del control de atracción. Estas leyes de control están dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_{s1} &= u_{seq} + u_{sn1} \\ &= - \left[\frac{\partial \sigma_s(x_s)}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_s(x_s)}{\partial x_s} f(x_s) - L_s(x_s) \sigma(x_s) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

y,

$$\begin{aligned} u_{s2} &= u_{seq} + u_{sn2} \\ &= - \left[\frac{\partial \sigma_s(x_s)}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_s(x_s)}{\partial x_s} f(x_s) + P_s \text{sign}(\sigma_s(x_s)) \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

En general, tenemos que el control compuesto es $u_s = u_{seq} + u_{sn}$, y al sustituirlo en el subsistema reducido lento (3.21), nos lleva al sistema en lazo cerrado reducido lento:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= f(x_s) + g(x_s)u_s \\ &= f(x_s) + g(x_s)(u_{seq} + u_{sn}) \\ \dot{x}_s &= f_e(x_s) + R_s(x_s) \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde $f_e(x_s) = f(x_s) + g(x_s)u_{seq}$ y $R_s(x_s) = g(x_s)u_{sn}$.

Entonces hacemos la siguiente suposición:

Suposición 4.1: El punto de equilibrio $x_s = 0$ de $\dot{x}_s = f_e(x_s) + R_s(x_s)$ es localmente exponencialmente estable.

La anterior suposición nos permite, junto con el Teorema converso de Lyapunov, asegurar la existencia de una función de Lyapunov $V(x_s)$ para el sistema (4.38), la cual satisface [4]:

$$\begin{aligned} c_1 \|x_s\|^2 &\leq V(x_s) \leq c_2 \|x_s\|^2 \\ \frac{\partial V(x_s)}{\partial x_s} (f_e(x_s) + R_s(x_s)) &\leq -c_3 \|x_s\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V(x_s)}{\partial x_s} \right\| &\leq c_4 \|x_s\| \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ahora, podemos hacer uso de la función de Lyapunov candidata $V_s(x_s)$ para investigar la estabilidad del origen $x_s = 0$ como un punto de equilibrio para el sistema (3.21). Usando la suposición 4.1 y las desigualdades (4.40), obtenemos de la prueba del Teorema converso

de Lyapunov [4], la derivada con respecto al tiempo de V a lo largo de las trayectorias de (3.21) satisface:

$$\dot{V}(x_s) \leq -c_3 \|x_s\|^2 \quad (4.41)$$

Entonces, el sistema reducido lento en lazo cerrado (4.39) es exponencialmente estable.

4.2.4 Diseño del Control por Modos Deslizantes Rápido

En esta sección, diseñaremos el control por modos deslizantes para el subsistema rápido (3.26). Para realizar lo anterior, lo haremos de manera similar al realizado para el subsistema lento.

Primero, diseñaremos una superficie deslizante rápida de dimensión $(m - r)$ definida por:

$$\sigma_f(\eta) = (\sigma_{f_1}(\eta), \dots, \sigma_{f_r}(\eta)) = 0 \quad (4.42)$$

El control rápido completo toma la forma:

$$u_f = u_{feq} + u_{fn} \quad (4.43)$$

donde u_{feq} es el control equivalente dado por:

$$u_{feq}(\tilde{x}, \eta) = - \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} F_2(\tilde{x}) \eta \right] \quad (4.44)$$

Primer control de atracción:

$$u_{fn_1}(\tilde{x}, \eta) = - \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} L_f(\eta) \sigma_f(\eta) \quad (4.45)$$

donde $L_f(\eta)$ es una matriz positiva definida de dimensión $r \times r$ tal que:

$$\|L_f(\eta)\| \leq \rho_f \quad (4.46)$$

para toda $(\tilde{x}, \eta_{app}) \in B_x \times B_z$, con $\rho_f > 0$ constante.

La proyección del movimiento del sistema rápido fuera de $\sigma_f(\eta_{apx}) = 0$ es descrita por:

$$\frac{d\sigma_f}{d\tau} = \frac{\partial\sigma_f}{\partial\eta_{apx}} \frac{d\eta_{apx}}{d\tau} = -L_f(\eta_{apx})\sigma_f(\eta_{apx}) \quad (4.47)$$

De forma similar al sistema lento, se puede determinar la existencia de un modo deslizante rápido. Las propiedades de estabilidad de $\sigma_f(\eta_{apx}) = 0$ en (4.47) se pueden estudiar por medio de la función de Lyapunov candidata:

$$W(\eta_{apx}) = \frac{1}{2}\sigma_f^T(\eta_{apx})\sigma_f(\eta_{apx}) \quad (4.48)$$

cuya derivada en el tiempo a lo largo de (4.47) satisface:

$$\dot{W}(\eta_{apx}) = -\sigma_f^T(\eta_{apx})L_f(\eta_{apx})\sigma_f(\eta_{apx}) \quad (4.49)$$

para toda $\eta_{apx} \in B_z$. Además, $\sigma_f(0) = 0$, entonces:

$$\|\sigma_f(\eta_{apx}) - \sigma_f(0)\| \leq l_{\sigma_f} \|\eta_{apx}\|, \quad \forall \eta_{apx} \in B_z \quad (4.50)$$

donde l_{σ_f} es la constante de Lipschitz de $\sigma_f(\eta_{apx})$ con respecto a η_{apx} . Así, obtenemos:

$$\dot{W}(\eta_{apx}) \leq -\rho_f l_{\sigma_f}^2 \|\eta_{apx}\|^2 \quad (4.51)$$

por lo tanto, podemos concluir la existencia de un modo deslizante rápido.

Segundo control de atracción:

Ahora diseñaremos el segundo control de atracción discutido para el subsistema rápido. La proyección del movimiento fuera de la superficie $\sigma_f = 0$ está dada por:

$$\dot{\sigma}_f(\eta_{apx}) = P_f \text{sign}(\sigma_f(\eta_{apx})) \quad (4.52)$$

donde P_f y $\text{sign}(\sigma_f)$ ya fueron definidos antes.

Con lo anterior, obtenemos el control de atracción:

$$u_{fn_2} = - \left[\frac{\partial\sigma_f}{\partial\eta} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} P_f \text{sign}(\sigma_f(\eta_{apx})) \quad (4.53)$$

Podemos estudiar las propiedades de estabilidad de $\sigma_f(\eta_{apx}) = 0$ en (4.52) por medio de la función de Lyapunov candidata:

$$V_f(\eta_{apx}) = \sigma_f^T(\eta_{apx})\sigma_f(\eta_{apx}) \quad (4.54)$$

cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de (4.52) es:

$$\dot{V}_f(\eta_{apx}) = 2P_f |\sigma_f^T(\eta_{apx})| < 0 \quad (4.55)$$

Por lo tanto, podemos concluir la existencia de un modo deslizante.

Entonces, los dos controles diseñados son:

$$\begin{aligned} u_{f1} &= u_{feq} + u_{fN1} \\ &= - \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} F_2(\tilde{x})\eta - L_f(\eta_{apx})\sigma_f(\eta_{apx}) \right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

y,

$$\begin{aligned} u_{f2} &= u_{feq} + u_{fN2} \\ &= - \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} F_2(\tilde{x})\eta + P_f \text{sign}(\sigma_f(\eta_{apx})) \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Al introducir el control compuesto (4.43) en el subsistema rápido (3.26), obtenemos el sistema rápido en lazo cerrado, el cual está dado por:

$$\frac{d\eta_{apx}}{d\tau} = g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}) \quad (4.58)$$

donde:

$$g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}) = F_2(\tilde{x})\eta_{apx} - g_2(\tilde{x}) \left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} u_f \quad (4.59)$$

De igual forma que en el sistema lento en lazo cerrado, hacemos la siguiente suposición:

Suposición 4.2: El punto de equilibrio $\eta_{apx} = 0$ de $\frac{d\eta_{apx}}{d\tau} = g_c(\tilde{x}, \eta_{apx})$ es localmente exponencialmente estable.

Con la suposición 4.2 y el Teorema Converso de Lyapunov, podemos asegurar la existencia de una función de Lyapunov candidata $W(\eta_{apx})$, la cual satisface

$$\begin{aligned}
\bar{c}_1 \|\eta_{apx}\|^2 &\leq W(\eta_{apx}) \leq \bar{c}_2 \|\eta_{apx}\|^2 \\
\frac{\partial W(\eta_{apx})}{\partial \eta_{apx}} g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}) &\leq -\bar{c}_3 \|\eta_{apx}\|^2 \\
\left\| \frac{\partial W(\eta_{apx})}{\partial \eta_{apx}} \right\| &\leq \bar{c}_4 \|\eta_{apx}\|
\end{aligned} \tag{4.60}$$

para algunas constantes positivas $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ y \bar{c}_4 .

Ahora, podemos hacer uso de la función de Lyapunov candidata $W(\eta_{apx})$ para investigar la estabilidad del origen $\eta_{apx} = 0$ como un punto de equilibrio para el sistema (4.58). Usando la suposición 4.2 y las desigualdades (4.60), obtenemos del Teorema converso de Lyapunov [4], la derivada con respecto al tiempo de $W(\eta_{apx})$ a lo largo de las trayectorias de (4.58) satisface

$$\dot{W}(\eta_{apx}) = -\bar{c}_3 \|\eta_{apx}\|^2 \tag{4.61}$$

Por lo tanto, el sistema reducido rápido en lazo cerrado (4.58) es exponencialmente estable.

4.2.5 Obtención del Sistema Completo en Lazo Cerrado con el Control Compuesto

Sabemos que el control compuesto total está dado por:

$$u(x, \eta) = u_s(x) + u_f(x, \eta) \tag{4.62}$$

Cuando (4.62) es sustituido en el siguiente sistema original

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x) + F_1(x)z \\
\varepsilon \dot{z} &= f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u
\end{aligned}$$

y haciendo $\varepsilon = 0$, nos queda de la siguiente forma

$$\dot{x} = f_c(x, \eta) \tag{4.63}$$

$$\varepsilon \dot{\eta} = g_c(x, \eta) + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} f_c(x, \eta) \tag{4.64}$$

donde $\eta = z - \phi(x)$, y

$$f_c(x, \eta) = f(x) + F_1(x)\eta + g(x)u_s(x), \tag{4.65}$$

$$g_c(x, \eta) = F_2(x)\eta + g_2(x)u_f(x, \eta) \quad (4.66)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ están dadas en (3.19).

Las leyes de control diseñadas hasta ahora necesitan la información del vector de estado para su buen funcionamiento. Esta información puede ser obtenida por medio de observadores de estado, lo cual se analizará en la siguiente sección.

4.3 Observador No-Lineal de Estados [8]

La falta de información suficiente en el vector de estado, puede en un momento dado complicar el diseño de controles que dependan de los estados. En nuestro caso, el control diseñado requiere información de todo el vector de estado. Una manera de obtener esa información es por medio de sensores y dispositivos especiales, pero en ocasiones estos dispositivos pueden resultar costosos y algunos de ellos no existen. Es por tal motivo que se desarrollan herramientas para evitar tales problemas. Con base en la propiedad de observabilidad del sistema, es posible determinar relaciones explícitas que permiten determinar el estado del sistema a partir del conocimiento de la salida y de las entradas aplicadas al sistema durante un intervalo de tiempo. El diseño de observadores nos permite estimar los estados del sistema, teniendo de esa manera la información necesaria para los algoritmos de control diseñados.

4.3.1 Conceptos Básicos en Estimación No Lineal de Estados [8,19]

Definición 4.1: Se llama observador de un sistema dinámico:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \forall x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x) \end{cases}$$

a un sistema dinámico auxiliar cuyas entradas están constituidas por las entradas y las salidas del sistema a observar y cuya salida es el estado estimado, ésto es,

$$\Pi : \begin{cases} \dot{\hat{z}} = F(\hat{x}, u), \forall \hat{z} \in \mathbb{R}^n \\ \hat{x} = H(u, y, \hat{z}) \end{cases}$$

tal que $\|e\| = \|x - \hat{x}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La observabilidad de un sistema no lineal depende de la estructura del sistema, las condiciones iniciales y la entradas que son aplicadas. En sistemas lineales en lazo abierto, la observabilidad esta exenta de depender de las entradas aplicadas [1]. En cambio, en sistemas no lineales, debido a que si afectan las entradas aplicadas al sistema, la propiedad de observabilidad puede ser afectada por cierta clase de entradas que hacen al sistema no observable, o bien, pueden existir puntos donde también se pierde observabilidad, estos puntos y entradas se les denotan como puntos singulares y entradas singulares.

Definición 4.2: Considere el sistema no lineal Σ . El espacio de observación Θ de Σ es el espacio lineal sobre R de funciones en una variedad M que contiene a $h(x)$ y a todas las derivadas de Lie repetidas de la forma:

$$L_{\Lambda_k} \cdots L_{\Lambda_2} L_{\Lambda_1} (L_{\Lambda_0} h)$$

con $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ campos vectoriales dentro del conjunto $\{f, g\}$

Un esquema de un observador lo podemos ver en la siguiente figura:

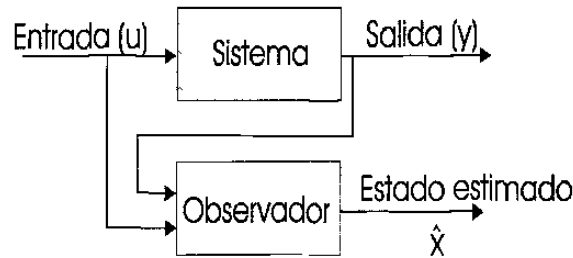


Fig. 4.2 Esquema de un observador.

Consideremos el sistema descrito por

$$\Gamma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = q(x) \end{cases}$$

donde $x \in R^n$ y consideraremos a $\Omega \subset R^n$. Supondremos que el sistema Γ es observable sobre Ω , es decir, con la información obtenida de la salida $q(x)$ en cualquier intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ con $t_1 > t_0$, es posible determinar el estado inicial $x(t_0)$.

Consideremos ahora, que existe un mapeo $T : R^n \rightarrow R^n$ el cual tiene la forma

$$T(x) = \begin{bmatrix} q(x) \\ L_f q(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} q(x) \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

entonces, hacemos las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1: $T(x)$ es un difeomorfismo de Ω sobre $T(\Omega)$ tal que el sistema Γ puede ser escrito de la forma:

$$\Gamma' : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{n-1} \\ \zeta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \vdots \\ \zeta_n \\ \varphi(\zeta) \end{bmatrix} \\ y = \zeta_1 \end{cases} \quad (4.68)$$

Hipótesis 2: $\varphi(\zeta)$ puede ser extendida de Ω a todo \mathbb{R}^n por una función C^∞ , la cual es globalmente Lipschitz sobre \mathbb{R}^n .

Cuando las hipótesis 1 y 2 se cumplen, decimos que Γ es uniformemente observable sobre Ω , o Γ' es uniformemente observable sobre \mathbb{R}^n .

4.3.2 Diseño de un Observador de Orden Reducido

Diseñaremos aquí un observador para la clase de sistemas no lineales descritos por

$$\dot{x} = f_1(x) + F_1(x)z \quad (4.69)$$

$$\varepsilon \dot{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u \quad (4.70)$$

$$y = q(x)$$

donde $y \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema y se supone que la función $q(x)$ es continuamente diferenciable sobre B_x . Para la clase de sistemas considerados, suponemos que los estados rápidos están disponibles y nuestro objetivo se reduce a diseñar un observador para el subsistema lento, y como lo estudiamos en la sección 3.2, el subsistema lento se puede calcular al hacer $\varepsilon = 0$ y sustituir el valor de z en (4.69). Entonces, considerando z como la entrada del sistema (4.69), nuestro problema se reduce a diseñar un observador para el sistema:

$$\Phi : \begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + F_1(x)z \\ y = q(x) \end{cases} \quad (4.71)$$

Entonces, suponiendo que el sistema Γ es uniformemente observable como lo discutimos previamente, hacemos la siguiente:

Hipótesis 3: El sistema Φ es uniformemente observable para cualquier entrada, es decir, en cualquier intervalo finito $[0, T]$, para cualquier entrada medible acotada $u(t)$ definida sobre $[0, T]$, el estado inicial es determinado con la información de la salida $q(x)$ y la entrada $u(t)$.

Cuando se cumple la hipótesis 3 y el sistema Γ es uniformemente observable, decimos que Φ es uniformemente observable para cualquier entrada. Ahora, enunciamos el siguiente Teorema:

Teorema 4.2[8]: El sistema Φ es uniformemente observable para cualquier entrada si es difeomórfico a un sistema de la forma

$$\dot{\zeta} = A\zeta + G(\zeta)u \quad (4.72)$$

$$y = C\zeta \quad (4.73)$$

donde, en nuestro caso, se utiliza z como entrada de control para el subsistema lento, donde $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$, $G(\zeta)$ es una matriz de la forma

$$g_i(\zeta) = \begin{bmatrix} g_{i,1}(\zeta_1) \\ g_{i,2}(\zeta_1, \zeta_2) \\ \vdots \\ g_{i,3}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}) \\ g_{i,4}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n) \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

y las matrices del par (A, C) , están en la forma canónica observable, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (4.75)$$

Ahora, suponemos que los mapeos $g_{i,j}(\zeta) : R^i \rightarrow R$, para $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$ son globalmente Lipschitz. Entonces, el siguiente resultado es dado:

Teorema 4.3 [8] Suponga que el sistema (4.72)-(4.73) es uniformemente observable. Sea K un vector columna de $n \times 1$ constante tal que $\text{Re}\{\lambda(A - KB)\} \in C^1$. Entonces, el sistema:

$$\dot{\zeta} = A\zeta + G(\zeta)u - R^{-1}(\theta)K(C\zeta - y) \quad (4.76)$$

donde $R(\theta) = \text{diag}(1, 1/\theta, \dots, 1/\theta^n)$, siendo $\theta > 0$ una constante, es un observador exponencial para el sistema (4.69) cuya dinámica puede ser arbitrariamente rápida.

La prueba de este Teorema es presentada en el Apéndice.

4.4 Estabilidad en Lazo Cerrado

En esta sección, se obtienen las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad en lazo cerrado del sistema cuando se introduce el observador, es decir, cuando reemplazamos el estado por su estimado en la ley de control (ver Fig. 4.3).

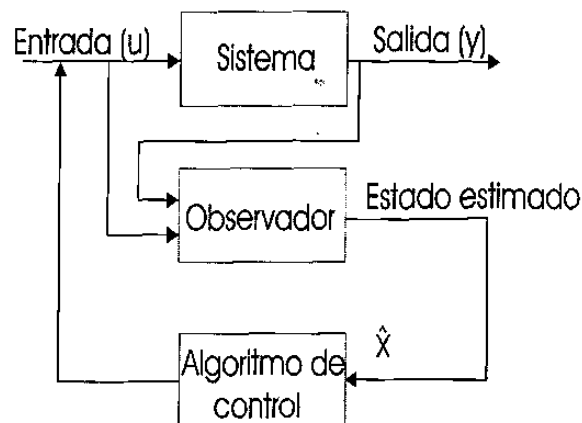


Fig. 4.3 Esquema de control utilizando los estados estimados

Supongamos que ha sido diseñado un control compuesto (4.62) tal que el sistema no lineal singularmente perturbado (3.9)-(3.10) es uniformemente acotado, además, un observador con índice de convergencia exponencial ha sido diseñado.

Consideremos ahora el sistema aumentado no lineal singularmente perturbado en lazo cerrado descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + F_1(x)\eta + g(x)u_s(\hat{x}) \\
\varepsilon\dot{\eta} &= F_2(x)\eta - g_2(x)u_f(\hat{x}, \eta) - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + F_1(x)\eta + g(x)u_s(\hat{x})] \\
\dot{e}_\xi &= \theta(A - KC)e_\xi + R(\theta)\Gamma(\xi, \hat{\xi}, u) \\
y &= C\xi
\end{aligned} \tag{4.77}$$

donde $x(t_0) = x_0$, $\eta(t_0) = z_0 - \phi(x_0)$ y $e_\xi(t_0) = e_{\xi_0}$. El control compuesto ahora depende del estimado del estado \hat{x} . Entonces, el sistema anterior puede ser reescrito de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f_c(x, \eta) + g(x)\Delta u_s(x, \hat{x}) \\
\varepsilon\dot{\eta} &= g_c(x, \eta) + g_2(x)\Delta u_f(x, \hat{x}, \eta) - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} [f_c(x, \eta) + g(x)\Delta u_s(x, \hat{x})] \\
\dot{e}_\xi &= \theta(A - KC)e_\xi + R(\theta)\Gamma(\xi, \hat{\xi}, u) \\
y &= C\xi
\end{aligned} \tag{4.78}$$

donde:

$$\begin{aligned}
f_c(x, \eta) &= f(x) + F_1(x)\eta + g(x)u_s(x), & g_c(x, \eta) &= F_2(x)\eta + g_2(x)u_f(x, \eta) \\
\Delta u_s(x, \hat{x}) &= u_s(\hat{x}) - u_s(x), & \Delta u_f(x, \hat{x}, \eta) &= u_f(\hat{x}, \eta) - u_f(x, \eta)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Por las propiedades de las funciones involucradas en u_s y u_f , tenemos que $\Delta u_s(x, \hat{x})$ y $\Delta u_f(x, \hat{x}, \eta)$ satisfacen las condiciones de Lipschitz locales:

$$\begin{aligned}
\|\Delta u_s(x, \hat{x})\| &\leq m_s \|e_\xi\| \\
\|\Delta u_f(x, \hat{x}, \eta)\| &\leq m_f \|e_\xi\|
\end{aligned} \tag{4.80}$$

para toda $(x, \hat{x}) \in B_x$, $\eta \in B_z$ y $e_\xi \in B_x$, donde m_s y m_f son las constantes de Lipschitz de $u_s(x)$ y $u_f(x, \eta)$ con respecto a x y (x, η) respectivamente. Por el hecho de que las columnas de $g(x)$ y $g_2(x)$ son acotadas, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|g(x)\Delta u_s(x, \hat{x})\| &\leq m_0 m_s \|e_\xi\| \\
\|g_2(x)\Delta u_f(x, \hat{x}, \eta)\| &\leq m_2 m_f \|e_\xi\|
\end{aligned} \tag{4.81}$$

para toda $(x, \hat{x}) \in B_x$, $\eta \in B_z$ y $e_\xi \in B_x$, donde m_0 y m_2 son constantes positivas.

Por otro lado, en vista de las propiedades de todas las funciones involucradas en $f_c(x, \eta)$ tenemos que satisfacer la condición local de Lipschitz:

$$\begin{aligned}
\|f_c(x, \eta) - f_c(x, 0)\| &= \|f(x) + F_1(x)\eta + g(x)u_s(x) - f(x) + g(x)u_s(x)\| \\
&= \|F_1(x)\eta\| \\
&\leq l_{f\eta} \|\eta\|
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$\forall x \in B_x, \eta \in B_x$, donde $l_{f\eta}$ es una constante positiva. También tenemos que $f_c(0,0) = 0$, entonces:

$$\|f_c(x,0)\| \leq l_{fx_1} \|x\| \quad (4.83)$$

$\forall x \in B_x$ siendo l_{fx_1} una constante positiva.

También, por la características de diferenciabilidad continua de $\phi(x)$ tenemos que:

$$\left\| \frac{d\phi}{dx} \right\| \leq l_{h_x} \quad (4.84)$$

para toda $x \in B_x$ con l_{h_x} , una constante positiva.

Ahora podemos presentar el siguiente Teorema, el cual está basado en la prueba de [20] para obtener condiciones suficientes al utilizar el observador y controles estudiados, para asegurar la estabilidad exponencial local del sistema aumentado no lineal singularmente perturbado en lazo cerrado (4.78)..

Teorema 4.4: Considere un sistema no lineal singularmente perturbado dado por (3.9)-(3.10) para el cual se diseña un control compuesto dado por (4.62). Supongamos que se diseña un observador con índice de convergencia exponencial (4.76). Entonces, si existen números positivos $0 < \theta_i < 1, i = 1, 2, 3$ tales que:

$$\mu = \min\{a, b, c\} > 0 \quad (4.85)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \left(c_3 - \frac{c_4 l_{f\eta} \theta_1}{2} - \frac{l_{fx_1} \theta_1}{2} - \frac{c_4 m_0 m_s \theta_2}{2} \right) \\ b &= \left(\frac{\bar{c}_3}{\varepsilon} - \bar{c}_4 l_{h_x} l_{f\eta} - \frac{\bar{c}_4^2 l_{h_x} m_0 m_s \theta_3}{2} + \frac{\bar{c}_4 m_2 m_f \theta_3}{2} \right) \\ c &= \alpha \end{aligned} \quad (4.86)$$

para un ε lo suficientemente pequeño. Entonces, el sistema no lineal aumentado singularmente perturbado es localmente exponencialmente estable.

Prueba:

Consideremos la siguiente función de Lyapunov candidata:

$$L(x, \eta, e_\xi) = V_s(x) + W_f(\eta) + V_{e_\xi} \quad (4.87)$$

Diferenciando $V_s(x)$ a lo largo de la primera dinámica de (4.78), obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_s(x) &= \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} F_1(x)\eta + \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} g(x)\Delta u_s(x, \hat{x}) \\ &\leq \left\| \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} f(x) \right\| + \left\| \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} F_1(x)\eta \right\| + \left\| \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} g(x)\Delta u_s(x, \hat{x}) \right\| \end{aligned} \quad (4.88)$$

Ahora, diferenciando $W_f(\eta)$ a lo largo de la segunda dinámica de (4.78), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{W}_s(\eta) &= \frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \dot{\eta} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) g_c(x, \eta) - \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) f_c(x, \eta) \\ &\quad - \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) g(x)\Delta u_s(x, \hat{x}) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) g_2(x)\Delta u_f(x, \hat{x}, \eta) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) g_c(x, \eta) \right\| + \left\| \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) f_c(x, \eta) \right\| \\ &\quad + \left\| \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) g(x)\Delta u_s(x, \hat{x}) \right\| \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) g_2(x)\Delta u_f(x, \hat{x}, \eta) \right\| \end{aligned} \quad (4.89)$$

De la misma forma, cuando diferenciamos V_{e_ξ} a lo largo de las trayectorias de la tercer dinámica de (4.78), tenemos²

$$\dot{V}_{e_\xi} \leq -\frac{(\theta\tilde{c}_3 - \tilde{c}_4\rho)}{\tilde{c}_2} \|e_\xi\|^2 \quad (4.90)$$

Ahora, de las desigualdades (4.40), (4.60), (4.80), (4.81), (4.82) y (4.83), tenemos que

$$\left\| \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} f(x) \right\| \leq -c_3 \|x\|^2$$

² Ver este resultado en el Apéndice 1

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} F_1(x) \eta \right\| &\leq c_4 l_{f_\eta} \|x\| \|\eta\| \\
\left\| \frac{\partial V_s(x)}{\partial x} g(x) \Delta u_s(x, \hat{x}) \right\| &\leq c_4 m_0 m_s \|x\| \|e_\xi\| \\
\left\| \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) g_c(x, \eta) \right\| &\leq -\bar{c}_3 \|\eta\|^2 \\
\left\| \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) f_c(x, \eta) \right\| &\leq \bar{c}_4 l_{h_x} l_{f_\eta} \|\eta\|^2 + l_{f_{x_1}} \|x\| \|\eta\| \\
\left\| \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) g(x) \Delta u_s(x, \hat{x}) \right\| &\leq \bar{c}_4 l_{h_x} m_0 m_s \|\eta\| \|e_\xi\| \\
\left\| \left(\frac{\partial W_f(\eta)}{\partial \eta} \right) g_2(x) \Delta u_f(x, \hat{x}, \eta) \right\| &\leq \bar{c}_4 m_2 m_f \|\eta\| \|e_\xi\|
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Reemplazando estas desigualdades en (4.88) y (4.89) obtenemos

$$\dot{V}_s(x) \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 l_{f_\eta} \|x\| \|\eta\| + c_4 m_0 m_s \|x\| \|e_\xi\| \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}
\dot{W}_s(\eta) &\leq -\frac{1}{\varepsilon} \bar{c}_3 \|\eta\|^2 + \bar{c}_4 l_{h_x} l_{f_\eta} \|\eta\|^2 + l_{f_{x_1}} \|x\| \|\eta\| \\
&\quad + \bar{c}_4 l_{h_x} m_0 m_s \|\eta\| \|e_\xi\| + \bar{c}_4 m_2 m_f \|\eta\| \|e_\xi\|
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Ahora, usando (4.86) la derivada de $L(x, \eta, e_\xi)$ nos queda:

$$\dot{L}(x, \eta, e_\xi) \leq -a \|x\|^2 - b \|\eta\|^2 - c \|e_\xi\|^2 \leq -\mu L \tag{4.94}$$

lo cual implica que:

$$L(x, \eta, e_\xi) \leq L(x, \eta, e_\xi) e^{-\mu(t-t_0)} \tag{4.95}$$

por lo tanto, los estados x , η y e_ξ son localmente exponencialmente estables. ■

4.5 Aplicación al Modelo del Motor a Pasos en Tiempo Continuo

En esta sección se aplicarán las técnicas de perturbaciones singulares y modos deslizantes al modelo del motor a pasos. Para ésto, tenemos que llevar al modelo original del motor a la forma singularmente perturbada. Ésto es, descomponer al sistema en dos subsistemas reducidos, uno con una dinámica lenta y el otro con dinámica rápida. Posteriormente, se

procede a diseñar los controles para los subsistemas lento y rápido para formar así el control compuesto.

4.5.1 El Modelo del Motor a Pasos en la Forma Singularmente Perturbada

En las máquinas eléctricas la dinámica del subsistema eléctrico es por lo general más rápida que la del subsistema mecánico. Ésto nos sugiere que seleccionemos las corrientes en los embobinados (i_a, i_b) , como los estados rápidos y, la velocidad y posición angular (ω, θ) , como los estados lentos. Para ello, requerimos encontrar el parámetro de perturbación en los estados rápidos, y debido a que la inductancia L es un parámetro pequeño que no varía durante el funcionamiento del motor, se escoge $\varepsilon = L$. Sabemos que el modelo del motor a pasos está dado por las ecuaciones (2.1).

Entonces, si $\varepsilon = L$, y consideramos a x como los estados lentos y z los rápidos, entonces $x = \text{col}(x_1, x_2) = (\omega, \theta)$ y $z = \text{col}(z_1, z_2) = (i_a, i_b)$. Además, hacemos $k_d = 0$ y realizamos las siguientes asignaciones con fines de simplificar el manejo del modelo:

$$k_1 = R, \quad k_2 = K_m, \quad k_3 = N_r, \quad k_4 = K_m/J, \quad k_5 = B/J, \quad k_6 = K_d/J, \quad k_7 = \tau/J$$

así, el modelo en la forma singularmente perturbada nos quedaría:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_4 z_1 \text{sen}(k_3 x_2) + k_4 z_2 \text{cos}(k_3 x_2) - k_5 x_1 - k_7 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \varepsilon \dot{z}_1 &= v_a - k_1 z_1 + k_2 x_1 \text{sen}(k_3 x_2) \\ \varepsilon \dot{z}_2 &= v_b - k_2 z_2 + k_2 x_1 \text{cos}(k_3 x_2) \end{aligned} \tag{4.96}$$

Los valores nominales de los parámetros del modelo del motor a pasos fueron seleccionados como se muestran en la Tabla 2.2 para obtener el punto de equilibrio.

4.5.2 Obtención del Modelo en Variables de Desviación

Puesto que los resultados obtenidos anteriormente fueron diseñados para operar en el punto de equilibrio cero, es necesario transformar el modelo a uno en variables de desviación para cambiar las coordenadas. Como deseamos obtener un modelo en vari-

ables de desviación del motor a pasos, primero se calcula el punto de equilibrio $x^* = \text{col}(x_1^*, x_2^*) = (\omega^*, \theta^*)$, y $z^* = (z_1^*, z_2^*) = (i_a^*, i_b^*)$ asociado al sistema (2.1) dado un vector de entrada $v = \text{col}(v_1^*, v_2^*) = \text{col}(v_a^*, v_b^*)$, es decir, resolveremos el conjunto de ecuaciones

$$0 = f(x) + g(x)v \quad (4.97)$$

para x^* , z^* y los pares de entrada v^* . Sabiendo que, en el equilibrio la velocidad del motor es cero, es decir, $x_1^* = \omega^* = 0$. De esta manera, (4.96) puede reescribirse de la siguiente manera

$$z_1^* = i_a^* = \frac{1}{k_1} v_a^* \quad (4.98)$$

$$z_2^* = i_b^* = \frac{1}{k_1} v_b^* \quad (4.99)$$

$$x_1^* = \omega^* = 0 \quad (4.100)$$

$$0 = -\frac{k_4}{k_1} v_a^* \sin(k_3 \theta^*) + \frac{k_4}{k_1} v_b^* \cos(k_3 \theta^*) - k_7 \quad (4.101)$$

Resolviendo (4.101), se encuentra que la ecuación tiene dos soluciones para x_2^* , las cuales son

$$x_{21}^* = 2 \times \frac{\arctan \left(\frac{K_m v_a^* + \sqrt{K_m^2 (v_a^*)^2 + K_m^2 (v_b^*)^2 - \tau^2 k_1^2}}{-K_m v_b^* - \tau R} \right)}{k_3} \quad (4.102)$$

$$x_{22}^* = 2 \times \frac{\arctan \left(\frac{K_m v_a^* - \sqrt{K_m^2 (v_a^*)^2 + K_m^2 (v_b^*)^2 - \tau^2 k_1^2}}{-K_m v_b^* - \tau R} \right)}{k_3} \quad (4.103)$$

Ahora, si utilizamos los valores nominales del modelo del motor a pasos y los pares de entrada v_a^* y v_b^* admisibles, se encuentra el siguiente punto de equilibrio.

Utilizando: $v_a^* = 2.1621v$ y $v_b^* = 5.4054$, obtenemos el siguiente punto de equilibrio

$$\begin{aligned} z_1^* &= 0.21621A & z_2^* &= 0.54054A \\ x_1^* &= 0 \text{ rad/seg} & x_2^* &= 0.0065385 \text{ rad}(0.3772^\circ) \end{aligned} \quad (4.104)$$

ahora, haciendo $\tau = 0$ se obtiene el equilibrio

$$\begin{aligned} z_1^* &= 0.21621A & z_2^* &= 0.54054A \\ x_1^* &= 0 \text{ rad/seg} & x_2^* &= 0.023806 \text{ rad}(1.3639^\circ) \end{aligned} \quad (4.105)$$

Si ahora asignamos:

$$\delta x = \text{col}(x_1 - x_1^*, x_2^* - x_2^*) = \text{col}(\delta\omega, \delta\theta) \quad (4.106)$$

$$\delta z = \text{col}(z_1 - z_1^*, z_2^* - x_2^*) = \text{col}(\delta i_a, \delta i_b) \quad (4.107)$$

$$\delta v = \text{col}(v_a - v_a^*, v_b - v_b^*) = \text{col}(\delta v_a, \delta v_b) \quad (4.108)$$

se obtiene el siguiente modelo en variables de desviación:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 = & -k_4(\delta z_1 + z_1^*) \text{sen}(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) \\ & + k_4(\delta z_2 + z_2^*) \text{cos}(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) - k_5 \delta x_1 - k_7 \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\delta \dot{x}_2 = \delta x_1 \quad (4.110)$$

$$\varepsilon \delta \dot{z}_1 = \delta v_1 - k_1 \delta z_1 + k_2(\delta x_1 + x_1^*) \text{sen}(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) \quad (4.111)$$

$$\varepsilon \delta \dot{z}_2 = \delta v_2 - k_2 \delta z_2 + k_2(\delta x_1 + x_1^*) \text{cos}(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) \quad (4.112)$$

4.5.3 Diseño del Control por Modos Deslizantes

Como se ha mencionado antes, el control por modos deslizantes es diseñado en dos etapas, es decir, se diseña un controlador para el subsistema lento y un controlador para el subsistema rápido. Posteriormente, ambos controladores son combinados para obtener un control compuesto, el cual es aplicado al modelo (4.96). El objetivo es diseñar una ley de control tal que δx_2 (ángulo del rotor) se aproxime a una señal de referencia δx_r constante.

4.5.3.1 Diseño del Control para el Subsistema Lento

Primero diseñaremos la ley de control lenta:

$$\delta v_s = \Gamma_s(\delta x_s) \quad (4.113)$$

para el modelo reducido lento asociado al sistema (4.109)-(4.110) de tal manera que $\delta x_2 \rightarrow \delta x_r$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Si hacemos $\varepsilon = 0$, se observa que el subsistema rápido (4.111)-(4.112) tiene una única raíz $\delta z = h(\delta x, \delta v)$, que está dada por:

$$\delta z_1 = \frac{k_2 \delta x_1 \text{sen}(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) + \delta v_1}{k_1} \quad (4.114)$$

$$\delta z_2 = \frac{-k_2 \delta x_1 \text{cos}(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) + \delta v_2}{k_1} \quad (4.115)$$

Ahora, sustituyendo (4.114) y (4.115) en (4.109)-(4.110) para obtener el subsistema reducido lento tenemos que toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_{s_1} = & -\left(\frac{k_4 k_2}{k_1} + k_5\right) \delta x_{s_1} + \frac{k_4}{k_1} [\delta v_{s_1} \text{cos}(k_3(\delta x_{s_2} + x_2^*)) - \delta v_{s_2} \text{sen}(k_3(\delta x_{s_2} + x_2^*))] \\ & -k_7 - k_4 z_1^* \text{sen}(k_3(\delta x_{s_2} + x_2^*)) + k_4 z_2^* \text{cos}(k_3(\delta x_{s_2} + x_2^*)) \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\delta \dot{x}_{s_2} = \delta x_{s_1} \quad (4.117)$$

donde $\delta x_s = \text{col}(\delta x_{s_1}, \delta x_{s_2})$ y $\delta v_s = \text{col}(\delta v_{s_1}, \delta v_{s_2})$ denotan las variables lentas.

Debido a que el parámetro k_3 representa el número de dientes del rotor, éste puede ser conocido en forma precisa y no varía con el tiempo. Ésto nos sugiere hacer la siguiente asignación:

$$\delta v_{s_1} = -\text{sen}(k_3(\delta x_{s_2} + x_2^*)) \delta v_s \quad (4.118)$$

$$\delta v_{s_2} = \text{cos}(k_3(\delta x_{s_2} + x_2^*)) \delta v_s \quad (4.119)$$

donde δv_s es una nueva señal de entrada. La sustitución de (4.118)-(4.119) en (4.120)-(4.121) conduce al sistema reducido lento:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_{s_1} = & k_4 [z_2^* \text{cos}(k_3(\delta x_{s_2} + x_2^*)) - z_1^* \text{sen}(k_3(\delta x_{s_2} + x_2^*))] \\ & -k_7 + \frac{k_4}{k_1} \delta v_s - \left(\frac{k_4 k_2}{k_1} + k_5\right) \delta x_{s_1} \end{aligned} \quad (4.120)$$

$$\delta \dot{x}_{s_1} = \delta x_{s_1} \quad (4.121)$$

Ya que se requiere que $\delta x_2 \rightarrow \delta x_r$ cuando $t \rightarrow \infty$, una selección de la función de conmutación lenta $\sigma_s(\delta x_s)$ es:

$$\sigma_s(\delta x_s) = s_1 \delta x_1 - s_2 \delta e \quad (4.122)$$

donde $\delta e = \delta x_r - \delta x_{s_2}$, con $s_1 > 0$, $s_2 > 0$.

Sobre la superficie $\sigma_s = 0$, se tiene que:

$$\dot{\sigma}_s = s_1 \delta \dot{x}_{s_1} - s_2 \delta \dot{e}$$

$$\begin{aligned}
&= s_1 \left(-\left(\frac{k_4 k_2}{k_1} + k_5\right) \delta x_{s1} - k_7 + \frac{k_4}{k_1} \delta v_s \right) \\
&\quad + s_1 \frac{k_4}{k_1} [v_b^* \cos(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*)) - v_b^* \sin(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*))] - s_2 \delta \dot{e}
\end{aligned}$$

De donde se obtiene el llamado control equivalente, δv_{seq} :

$$\begin{aligned}
\delta v_{seq} &= \frac{k_4}{k_1} \left[\left(\frac{k_4 k_2}{k_1} + k_5\right) \delta x_{s1} + k_7 + \frac{s_2}{s_1} \delta \dot{e} \right] \\
&\quad + \frac{k_4}{k_1} \left[\frac{s_3}{s_1} \delta e - v_b^* \cos(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*)) - v_b^* \sin(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*)) \right]
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Una vez obtenido el control equivalente δv_{seq} , se diseña el control de atracción, δv_{sn} . Diseñaremos los dos controles de atracción estudiados.

Control u_{s1} utilizando el primer control de atracción.

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_s &= s_1 \left(-\left(\frac{k_4 k_2}{k_1} + k_5\right) \delta x_{s1} - k_7 + \frac{k_4}{k_1} \delta v_s \right) \\
&\quad + s_1 \frac{k_4}{k_1} [v_b^* \cos(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*)) - v_b^* \sin(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*))] \\
&\quad - s_2 \delta \dot{e} \\
&= -l_s \sigma_s
\end{aligned} \tag{4.124}$$

donde $l_s > 0$ y δv_{seq} están dadas por (4.123). A partir de (4.124) se obtiene que:

$$\delta v_{sn} = \frac{k_1}{k_4} \left(-l_s \sigma_s + \frac{s_2}{s_1} l_s e \right) \tag{4.125}$$

y el control por modos deslizantes queda de la forma:

$$\begin{aligned}
\delta v_{s1} &= \delta v_{seq} + \delta v_{sn} \\
\delta v_{s1} &= \frac{k_1}{k_4} \left[\left(\frac{k_4 k_2}{k_1} + k_5\right) \delta x_{s1} + k_7 + \frac{s_2}{s_1} l_s \dot{e} - l_s \delta x_{s1} + \frac{s_2}{s_1} l_s \delta e \right] \\
&\quad - [v_b^* \cos(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*)) - v_b^* \sin(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*))]
\end{aligned} \tag{4.126}$$

Control u_{s2} utilizando el segundo control de atracción.

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_s &= s_1 \left(-\left(\frac{k_4 k_2}{k_1} + k_5\right) \delta x_{s1} - k_7 + \frac{k_4}{k_1} \delta v_s \right) \\
&\quad + s_1 \frac{k_4}{k_1} [v_b^* \cos(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*)) - v_b^* \sin(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*))]
\end{aligned} \tag{4.127}$$

$$\begin{aligned}
& -s_2 \delta \dot{e} \\
& = -P_s \text{sign}(\sigma_s)
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que el control de atracción es de la forma:

$$\delta v_{sn} = -\frac{k_1}{s_1 k_4} (P_s \text{sign}(\sigma_s)) \quad (4.128)$$

y el control u_{s2} está dado por:

$$\begin{aligned}
\delta v_{s2} & = \delta v_{seq} + \delta v_{sn} \\
\delta v_{s2} & = \frac{k_1}{k_4} \left[\left(\frac{k_4 k_2}{k_1} + k_5 \right) \delta x_{s1} + k_7 + \frac{s_2}{s_1} l_s \dot{e} + \frac{s_3}{s_1} \delta e - \frac{P_s}{s_1} \text{sign}(\sigma_s) \right] \\
& \quad - [v_b^* \cos(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*)) - v_b^* \sin(k_3(\delta x_{s2} + x_2^*))]
\end{aligned} \quad (4.129)$$

4.5.3.2 Diseño del Control Rápido

Tenemos que de las ecuaciones (4.111)-(4.112) la matriz:

$$\begin{aligned}
A_z & = \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \delta v_1 - k_1 \delta z_1 + k_2(\delta x_1 + x_1^*) \sin(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) \\ \delta v_2 - k_1 \delta z_2 + k_2(\delta x_1 + x_1^*) \cos(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (4.130)$$

Entonces no se necesita de un control rápido debido a que $k_1 = 10$, por lo cual los valores propios de $A_z = -k_1 = -R = -10$, por tanto, el subsistema rápido es asintóticamente estable y seleccionamos $\delta v_f = 0$.

Entonces, los controles compuestos diseñados son:

$$\delta v_1 = \delta v_{s1}$$

$$\delta v_2 = \delta v_{s2}$$

4.5.4 Diseño del Observador

Diseñaremos un observador para el subsistema lento, el cual está dado por (4.109)-(4.110).

Si $x_3 = \tau_l/J$, entonces diseñaremos el observador para $\delta x_1, \delta x_2, x_3$. Podemos escribir el sistema (4.114)-(4.115) de la siguiente forma:

$$\delta \dot{x} = \begin{pmatrix} -k_4 z_1^* \sin(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) + k_4 z_2^* \cos(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) - k_5 \delta x_{m1} - x_3 \\ \delta x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_4 \sin(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) & k_4 \cos(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{pmatrix} \quad (4.131)$$

Haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\zeta_1 = \delta x_2$$

$$\zeta_2 = \delta x_1$$

$$\zeta_3 = -k_4 x_2^* \text{sen}(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) + k_4 x_2^* \cos(k_3(\delta x_2 + x_2^*)) - k_5 \delta x_2 - x_3$$

y derivando en las nuevas variables, resulta el siguiente sistema

$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta + \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_1 \\ -k_5 \Phi_1 + \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (4.132)$$

donde:

$$\Phi_1 = -k_4 \text{sen}(k_m(\zeta_1 + x_2^*)) \delta z_1 + k_4 \cos(k_m(\zeta_1 + x_2^*)) \delta z_2$$

$$\Phi_2 = \zeta_2 k_3 k_4 [i_b^* \text{sen}(k_3(\zeta_1 + x_2^*)) + i_a^* \cos(k_3(\zeta_1 + x_2^*))] - k_5 \zeta_3$$

y, la ecuación (4.132) tiene la forma de (4.72)-(4.73), por tanto es uniformemente observable.

Entonces, el observador para (4.132) está dado por (4.76):

$$\dot{\hat{\zeta}} = \hat{\zeta} + G(\hat{\zeta}) - S_\theta^{-1} C^T (C \hat{\zeta} - y) \quad (4.133)$$

donde el término $-S_\theta^{-1} C^T (C \hat{\zeta} - y)$, es un término de corrección, $S_\theta^{-1} C^T = K$, y S_θ es la solución de: $\dot{S}_\theta = -\theta S - A^T S_\theta - S_\theta A + C^T C$, en estado estacionario.

Para este caso particular,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 0) \quad (4.134)$$

Así, los valores estimados $\delta\hat{x}_1$, $\delta\hat{x}_2$ y $\delta\hat{x}_3$ se sustituirán en el control δv_s al realizar la simulación para poder tener disponible esa información.

4.6 Resultados de Simulaciones

En esta sección, se presentan las simulaciones de los controles y observador diseñados para analizar su desempeño. Las simulaciones fueron llevadas a cabo en el programa Simnon (Versión 1.0).

Los valores de las condiciones iniciales con los cuales se efectuaron las simulaciones, fueron los siguientes:

Modelo del motor a pasos

$$\begin{aligned}i_a(0) &= 0.21261 \text{ A} \\i_b(0) &= 0.54054 \text{ A} \\\omega(0) &= 0 \text{ rad/seg} \\\delta(0) &= 0.031416 \text{ rad}^3\end{aligned}$$

Observador.

$$\begin{aligned}\hat{\omega}(0) &= .001 \text{ rad/seg} \\\hat{\delta}(0) &= 0 \text{ rad} \\\hat{\tau}_l(0) &= 0.045 \text{ N} - m\end{aligned}$$

Los valores de los parámetros del motor fueron seleccionados como en la Tabla 2.2. Para el modelo utilizado en este trabajo, el voltaje permitido en las fases es de $\pm 40 \text{ V}$. Las condiciones iniciales se pueden alejar una cierta región alrededor del punto de equilibrio sin que tengamos problemas de convergencia. Si se aleja demasiado del punto de equilibrio podemos tener tiempos de convergencia largos e incluso caer en otro equilibrio o hacerlo inestable.

4.6.1 Simulaciones en Lazo Abierto. Estados del Sistema y Observador

Aquí se presentan la simulación del modelo del motor a pasos y del observador diseñado en lazo abierto, es decir el control u no se aplica al modelo. En las figuras 1, 2 y 3, se presentan la velocidad angular, posición del rotor y par de carga, respectivamente. Se

³ $\frac{1}{2}(\pi/(2N_r)) = 0.031416 \text{ rad}$, es la resolución límite del motor.

aprecia a detalle que la convergencia del observador hacia los valores reales se hace en un tiempo corto, entonces podemos decir que el observador tiene un buen desempeño.

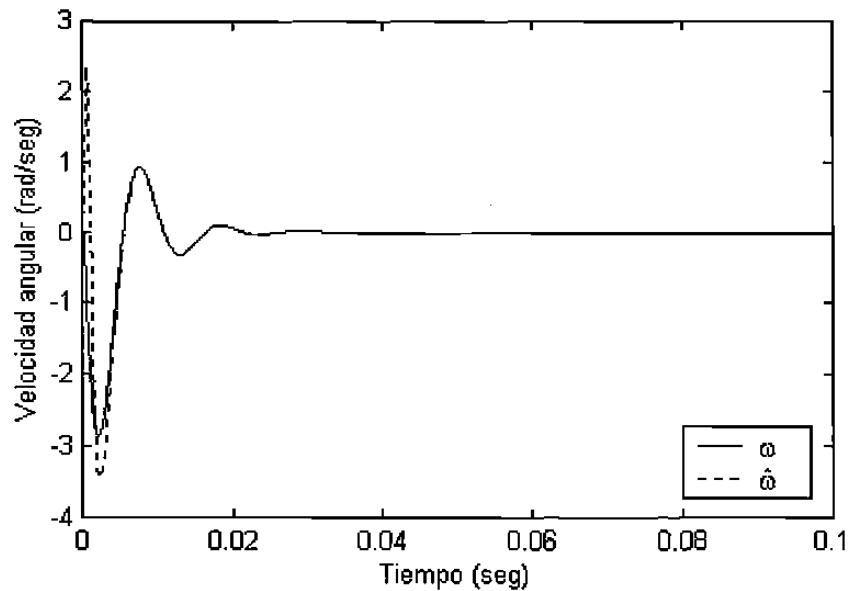


Fig. 4.4 Velocidad angular y su estimado en lazo abierto.

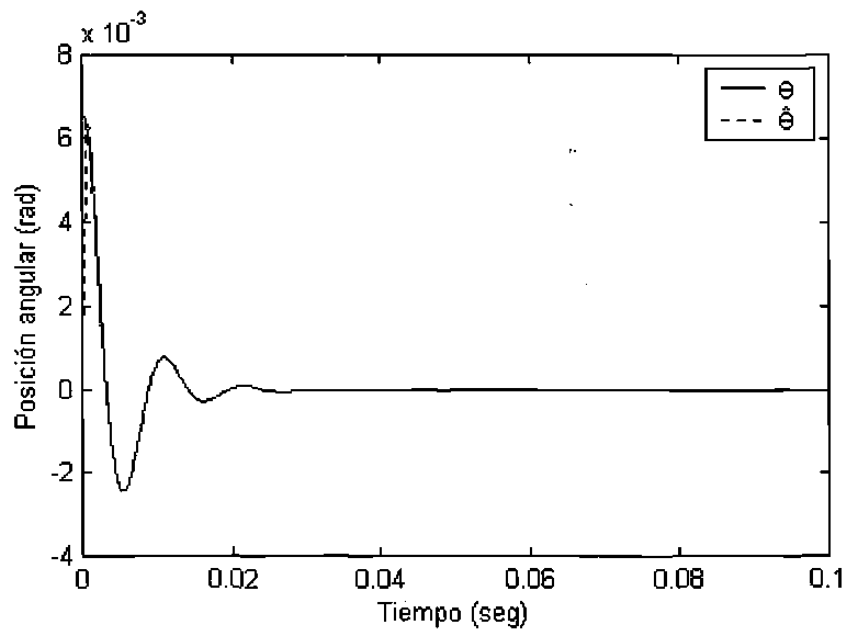


Fig 4.5 Posición angular y su estimado en lazo abierto.

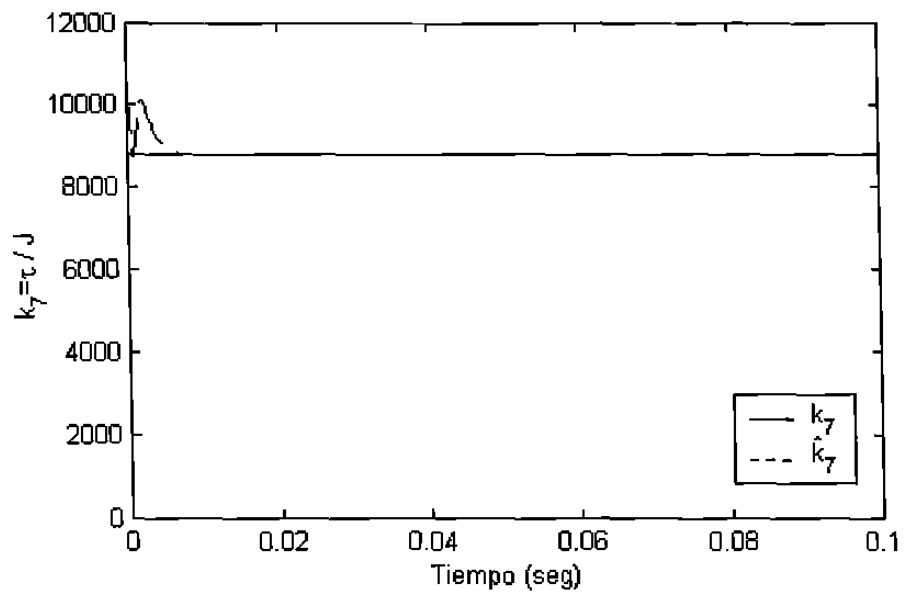


Fig 4.6 Par de carga y su estimado en lazo abierto.

4.6.2 Simulaciones Numéricas del Primer Control

Ahora se presentan las simulaciones introduciendo el algoritmo de control diseñado con el primer control de atracción (4.4.126).

En este caso, se fijaron los valores de los parámetros del algoritmo de control y del observador como siguen: $s_1 = 1$, $s_2 = 40$, $s_3 = 4000$, $l_s = 10000$ y $K = (6, 11, 6)^T$ con $\theta = 1000$. El valor de la referencia es de 0.024875. Además, se introdujeron perturbaciones paramétricas en el torque de carga, con un cambio de 0.5 N-m a 0.6 N-m y k_d se cambió de 0 N-m a 0.0043 N-m, en los tiempos de 0.02 seg y 0.055 respectivamente. Estos cambios corresponden a una variación en el torque del 20% y un valor típico de k_d , es decir, entre 5 y 10% del valor de $k_m i_0$ donde i_0 es el índice de corriente. El desempeño de este controlador lo observamos en las figuras 4.4 - 4.5. El desempeño de este controlador lo observamos en las figuras 4.7 - 4.12, donde podemos notar que por el tipo de control de atracción que se utiliza, el efecto de castaño no se hace visible.

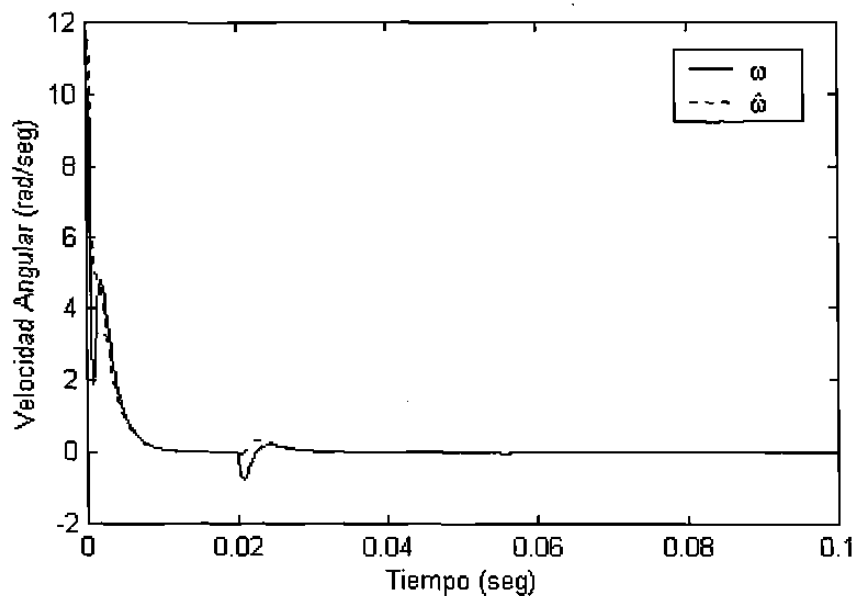


Fig.4.7 Respuesta en el tiempo de la velocidad angular aplicando el control.

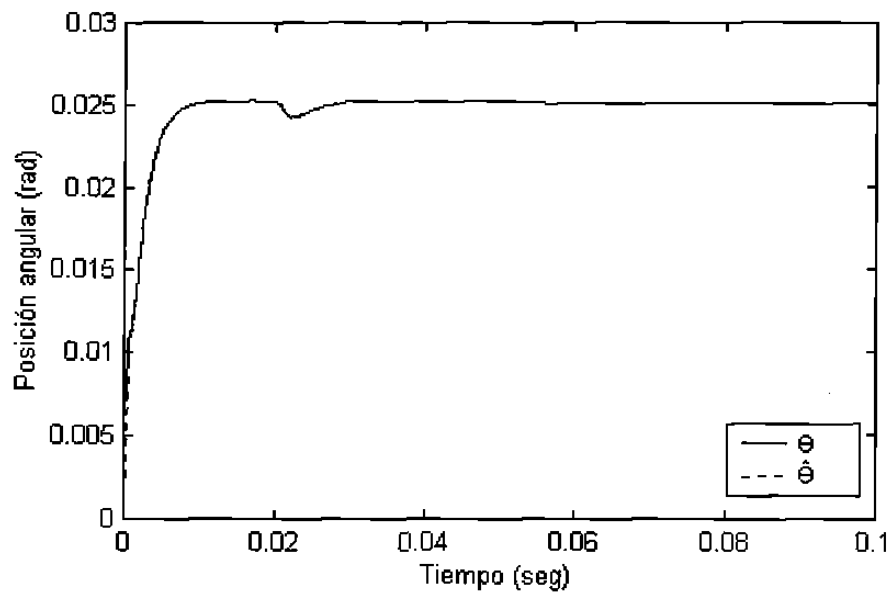


Fig. 4.8 Respuesta en el tiempo de la posición angular aplicando el control.

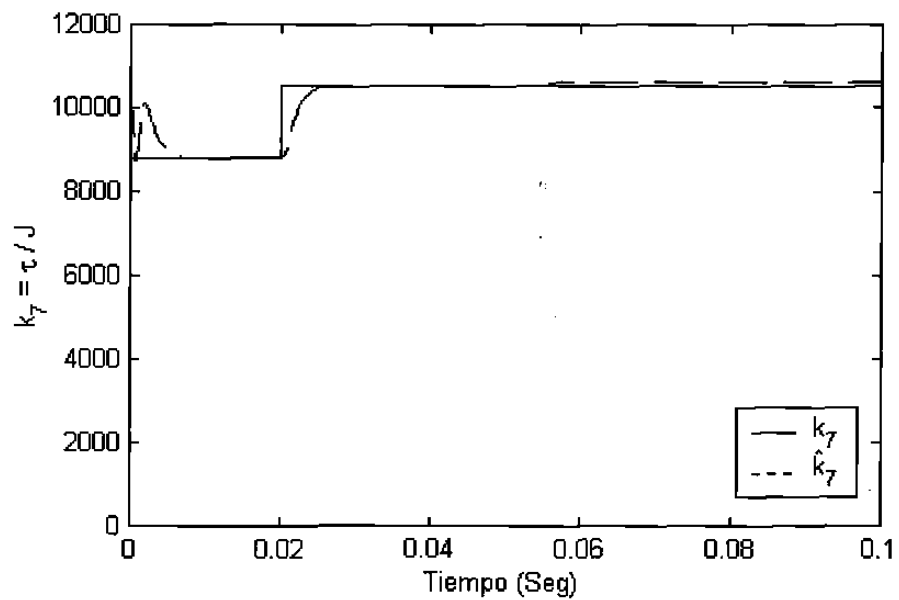


Fig.4.9 Respuesta del par de carga al aplicar el control.

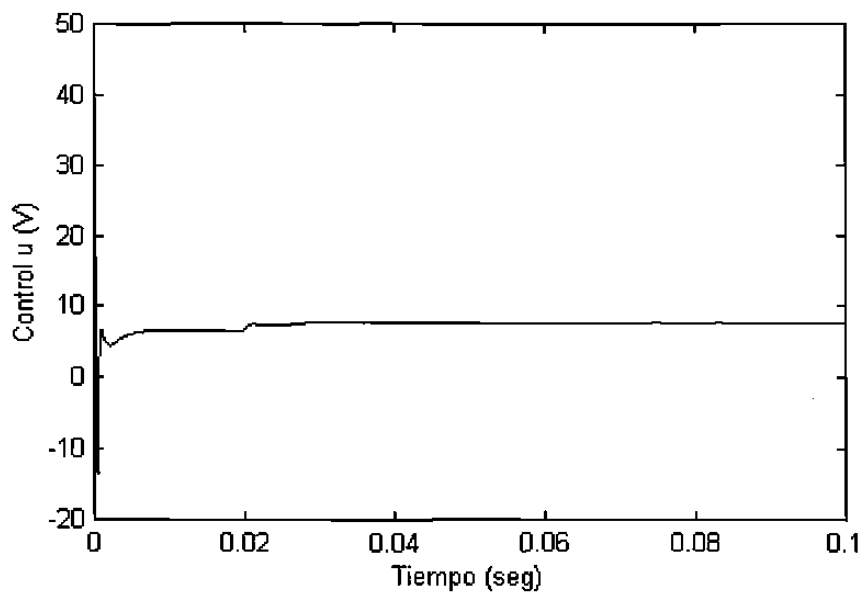
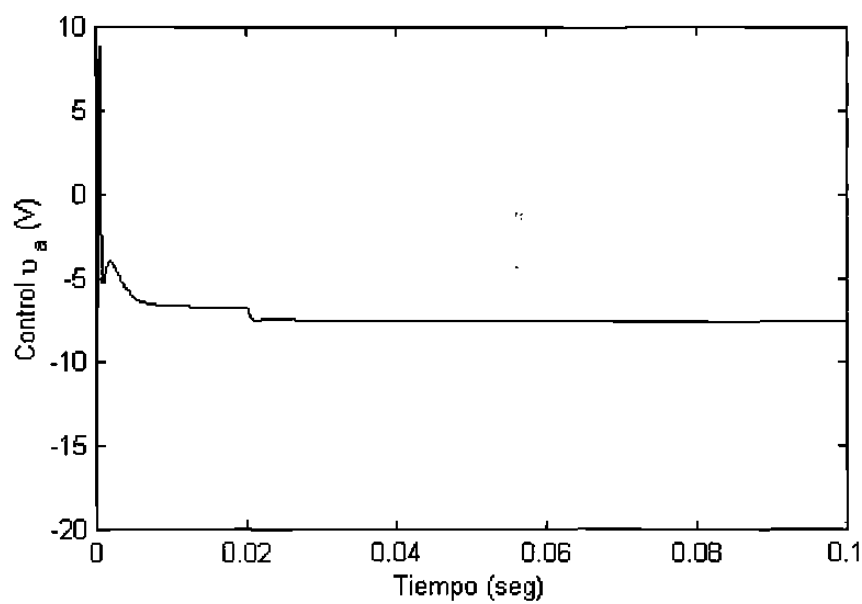
Fig.4.10 Comportamiento del control u .

Fig.4.11 Voltaje en la fase A.

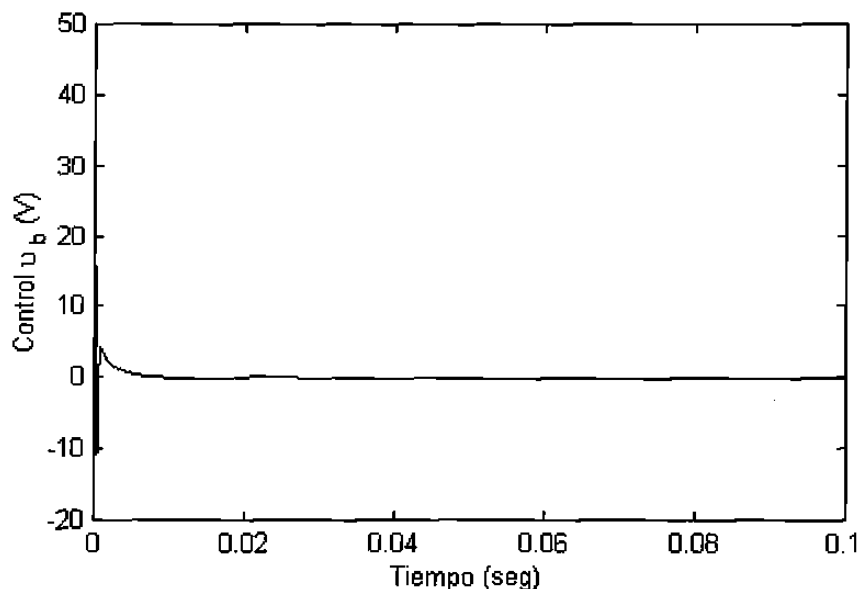


Fig.4.12 Voltaje en la fase B.

4.6.3 Simulaciones Numéricas del Segundo Control

4.6.3.1 Utilizando el Control con la Función Signo:

Aquí se presentan simulaciones del segundo control al usar la función signo. Los valores en los parámetros del algoritmo de control se seleccionaron como siguen: $s_1 = 3$, $s_2 = 550$ y $l_s = 10000$, el observador se dejó con las mismas ganancias.

Se puede notar en las figuras 4.13 y 4.15 que la discontinuidad de este control se manifiesta en gran medida provocando un castaño notorio en la velocidad angular y en el control mismo. Lo anterior se debe precisamente por utilizar un control discontinuo como lo es la función signo. Ésto podría provocar en un sistema físico alguna falla en el accionador ó desgaste, debido a los cambios tan bruscos en el control.

Aunque la posición angular alcanza la referencia en un tiempo aceptable, el problema del control discontinuo se puede resolver utilizando una saturación y dando una pendiente adecuada para que el cambio no sea muy notorio, ésto se analiza en la siguiente sección.

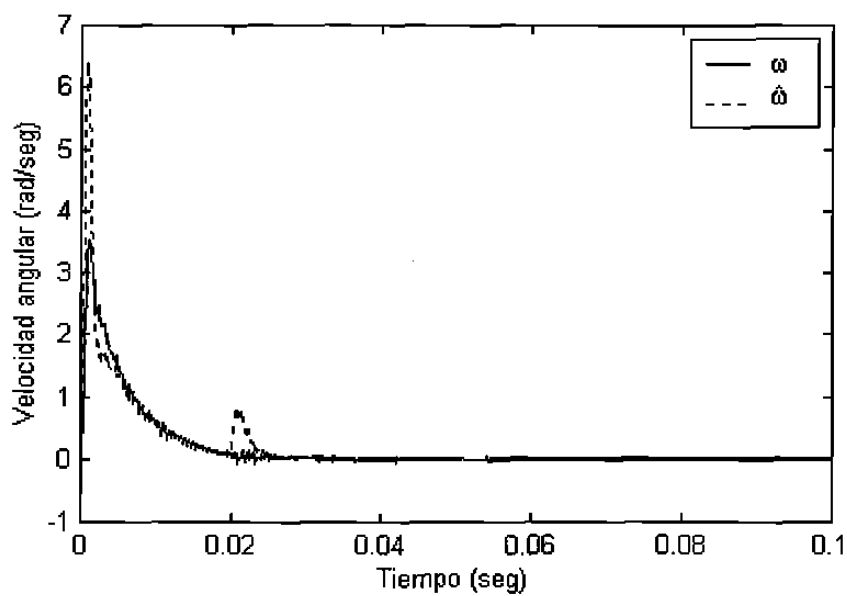


Fig.4.13 Respuesta de la velocidad angular al utilizar el control con la función signo

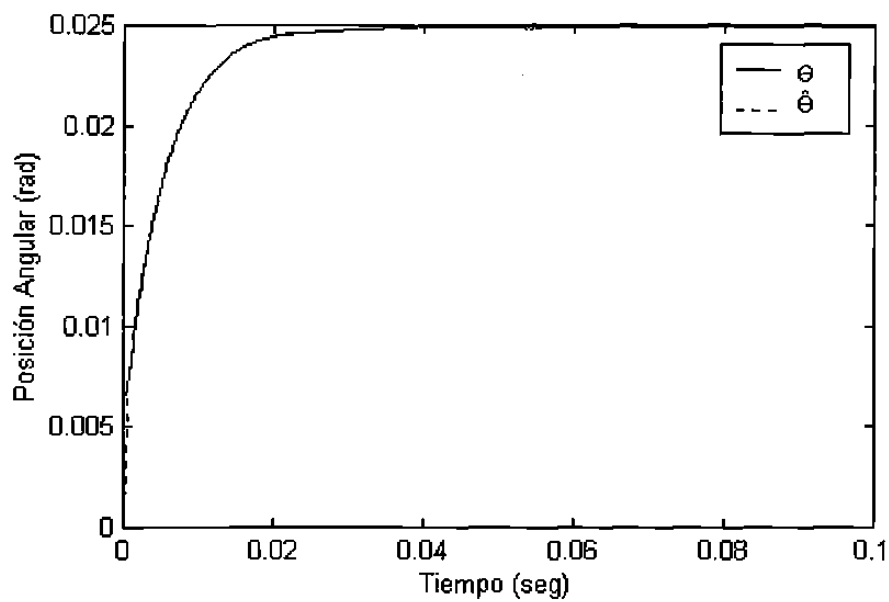


Fig. 4.14 Posición angular al usar el control con la función signo.

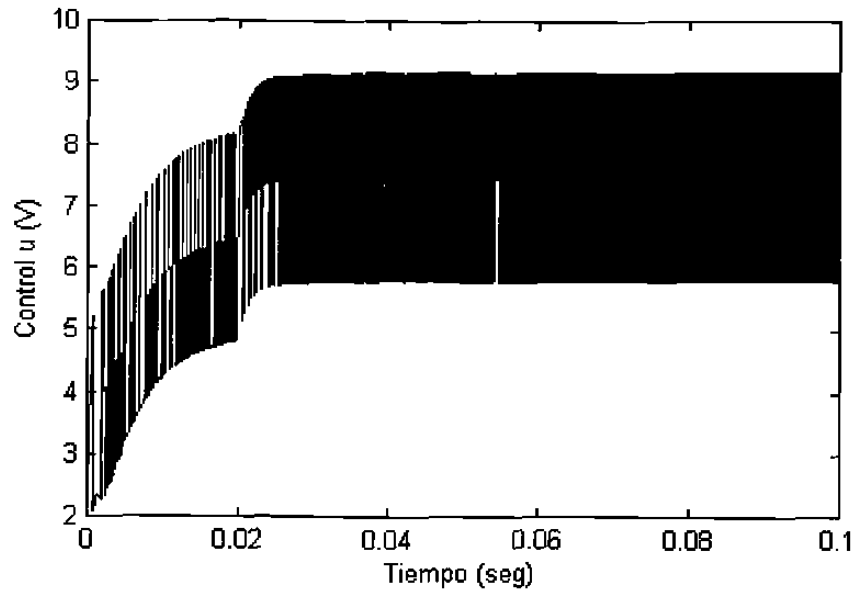


Fig. 4.15 Respuesta del control u .

4.6.3.2 Utilizando el Control con la Función tanh:

Como se mencionó antes, utilizar un control discontinuo provoca una oscilación en el control que no es agradable para un sistema físico. Aquí se utiliza el mismo control anterior, con los mismos valores en los parámetros tanto del control como del observador, sólo que la función signo es remplazada por la función tangente hiperbólica, la cual, para fines de simulación, puede representar de una manera satisfactoria a una saturación.

De esta manera, utilizando una función saturación en lugar de la función signo, podemos minimizar bastante el castaño presentado en el control y de esa forma para propósitos prácticos es mas aplicable.

Los resultados obtenidos se reflejan en las gráficas siguientes 4.16 - 4.20, donde podemos notar que el castaño en la velocidad angular y sobretodo en el control se han reducido bastante.

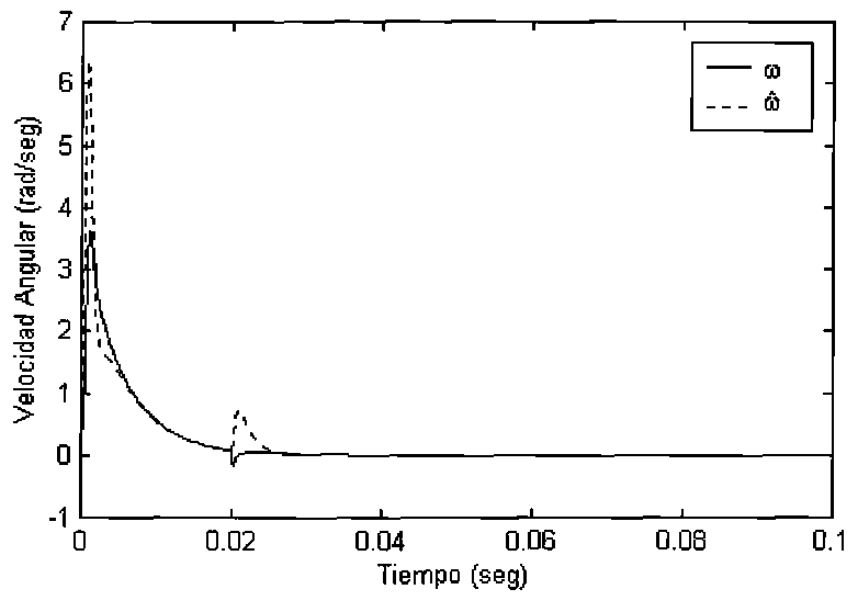


Fig. 4.16 Velocidad angular al usar el control con la función \tanh .

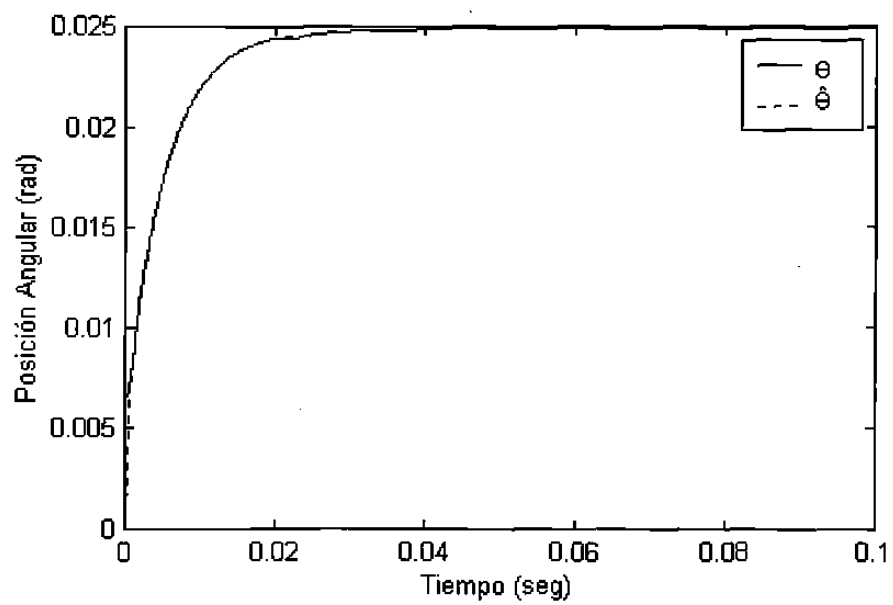


Fig. 4.17 Respuesta de la posición angular.

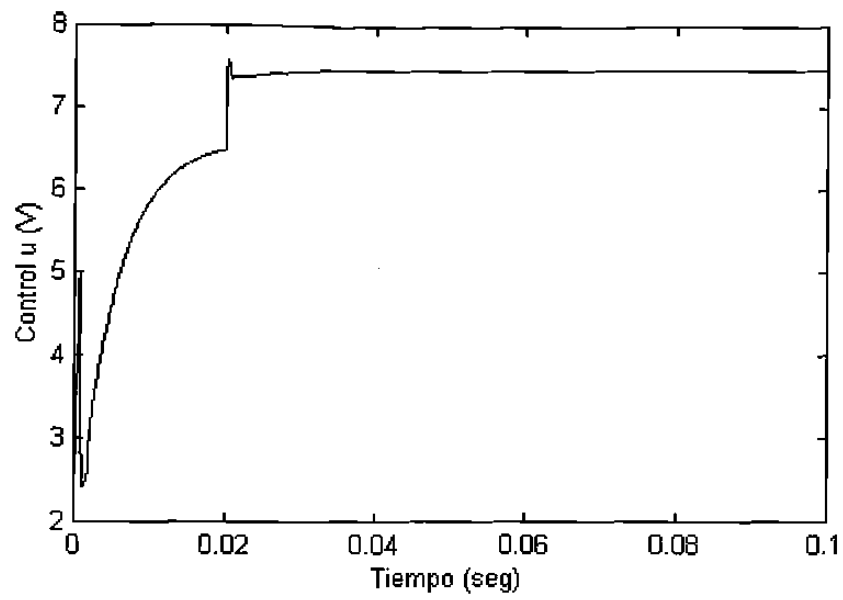
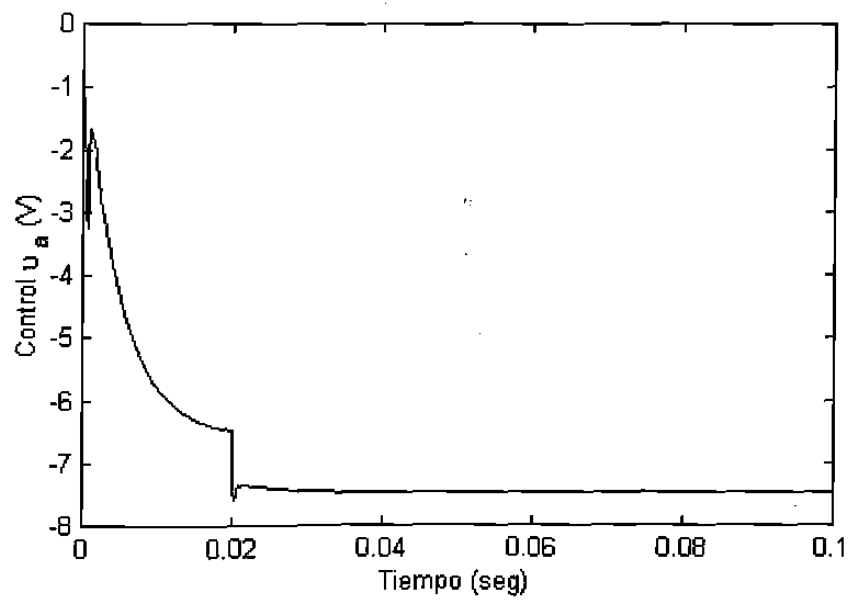
Fig. 4.18 Respuesta del control u .

Fig. 4.19 Voltaje en la fase A.

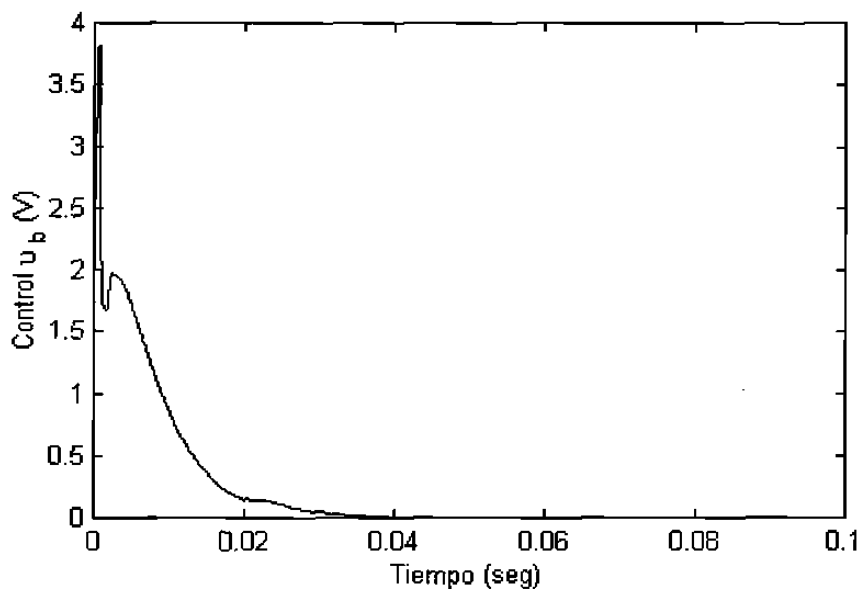


Fig. 4.20 Voltaje en la fase B.

4.7 Análisis de Resultados

En esta sección se presenta un análisis y comparación de los resultados obtenidos al aplicar los diferentes esquemas control-observador diseñados.

Los elementos que se toman en cuenta para analizar el desempeño de estos esquemas son los siguientes:

- A) Tiempo de convergencia hacia la referencia dada (seg).
- B) Desempeño ante la presencia de perturbaciones en los parámetros (tiempo de recuperación seg.).
- C) Fidelidad en el control, es decir, si existe castaño o no.
- D) Error de sobrepaso máximo (0-100%).
- E) Convergencia del observador (seg.).
- F) Voltaje máximo en la ley de control (V).

En general, se busca obtener un tiempo de respuesta rápido, es decir, alcanzar la referencia entre 0.01 y 0.03 seg . y que tengan un error de estado estable mínimo. Se desea también que al presentarse perturbaciones en los parámetros las trayectorias convergan de

nuevo a su posición de equilibrio rápidamente. El análisis de los resultados pueden ser observados en la siguiente tabla comparativa.

Ley de Control	A	B	C	D	E	F
1 ^{er} Control	0.01	<0.01	NO	0.04 %	<0.01	42
2 ^{do} Control (fn. Signo)	0.038	<0.01	SI	0.044 %	<0.01	9.3
2 ^{do} Control (fn. tanh)	0.04	<0.01	NO	0.002 %	<0.01	7.5

Tabla 4.1 Comparación de los esquemas control observador continuos.

4.8 Conclusiones

En este capítulo se han presentado dos controladores por modos deslizantes en tiempo continuo, además del diseño de un observador de orden reducido, para estimar los estados lentos bajo la suposición de que los estados rápidos están disponibles.

Ambos controles resultaron tener muy buenos resultados y además respondieron bien al introducir perturbaciones paramétricas, sin embargo, el primer control tuvo un tiempo de respuesta más rápido y con error de estado estable casi nulo, además, no presenta el problema de castaño y utiliza menos energía que el segundo. Este problema se presentó al utilizar la función signo en el control de atracción, en donde el castaño fue notorio pero logró reducirse al cambiar la función signo por una saturación.

Por otro lado, se han dado condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, mediante un control basado en observador.

El observador de estados diseñado para los estados lentos tuvo un tiempo de convergencia rápido, y respondió rápido al presentarse perturbaciones en los parámetros, por lo que podemos decir que se tuvo un buen desempeño.

Capítulo 5

Control por Modos Deslizantes Discreto

5.1 Introducción

La teoría de control para el diseño de leyes de control y esquemas de observación en tiempo discreto se ha desarrollado notablemente en los últimos años [1,4]. Si bien, la mayoría de los sistemas físicos son modelados por ecuaciones diferenciales, los controladores son implementados por computadoras digitales. En el caso lineal, los sistemas discretos han sido muy estudiados [15]. En el caso no lineal existen muchos resultados, pero todavía es un problema abierto.

El control por modos deslizantes fue utilizado en la sección anterior para sistemas continuos con buenos resultados. Ahora utilizaremos dichas metodologías en combinación con el esquema de discretización para sistemas singularmente perturbados estudiado en el capítulo 3.

En este capítulo, se diseñan leyes de control estabilizantes capaces de realizar regulación a una referencia basadas en los principios de modos deslizantes y la técnica de perturbaciones singulares, ambas en tiempo discreto. Podríamos decir, que obtendremos una versión discreta de los resultados obtenidos para tiempo continuo. En la aplicación, también se considerará el modelo del motor a pasos, sólo que ahora en su forma discreta, donde el objetivo principal, al igual que en el caso continuo, es la estabilización y seguimiento del ángulo del rotor del motor a pasos.

Se diseñarán dos controladores deslizantes, siguiendo la misma metodología del control equivalente como en el caso continuo y con diferentes criterios para el diseño del control de atracción.

Se consideran la misma clases de sistemas consideradas en el caso continuo, es decir, el control por modos deslizantes discreto se diseñará para (3.6)-(3.7), y será diseñado en dos etapas, un controlador deslizante discreto es diseñado para el subsistema lento y otro

para el subsistema rápido. Las dinámicas de los subsistemas lento y rápido en tiempo discreto fueron obtenidas en el capítulo 3 con el esquema de discretización utilizado, y sus dinámicas están dadas por (3.38) y (3.41).

5.2 Modos Deslizantes en Tiempo Discreto

En el capítulo 3, estudiamos como un sistema en tiempo continuo en la forma singularmente perturbada podía ser transformado a una versión en tiempo discreto utilizando un esquema de discretización. Al discretizar el modelo, las características de multi-escala de tiempo son preservadas. Debido a lo anterior, se obtiene un sistema reducido lento y uno rápido, ambos en tiempo discreto. El objetivo ahora, será diseñar dos controladores por modos deslizantes para cada subsistema reducido en tiempo discreto, es decir, controles lentos y rápidos en tiempo discreto.

En general, la metodología de modos deslizantes se puede extender a sistemas en tiempo discreto y se rige bajo el mismo criterio, es decir, se diseñará un control equivalente el cual se encargará de mantener las trayectorias sobre la superficie deslizante y un control de atracción para atraer las trayectorias hacia la superficie.

Para diseñar el control, consideraremos la superficie deslizante de la forma:

$$\sigma(k) = [\sigma_1(k), \dots, \sigma_r(k)]^T$$

donde k representa períodos muestreados de tiempo.

Como en el caso continuo, se utiliza el método de control equivalente para determinar el movimiento de las trayectorias del sistema restringido a la superficie $\sigma(t) = 0$. En el caso discreto se utiliza la aproximación de Euler hacia adelante, entonces, las trayectorias son restringidas a la superficie $\sigma(k+1) = 0$. Con este método, se obtiene una expresión $u(k) = u_{eq}(k)$, que es precisamente llamada control equivalente porque es el equivalente al valor promedio de $u(k)$ que mantiene la trayectoria del estado sobre $\sigma(k+1) = 0$.

De manera similar al caso continuo, el control equivalente debe ser complementado con un control llamado control de atracción, cuyo objetivo es el de actuar cuando $\sigma(k+1) \neq 0$, es decir, es el encargado de llevar las trayectorias de estado sobre la superficie $\sigma(k+1) = 0$.

En tiempo continuo, la condición que garantiza la convergencia de las trayectorias hacia la superficie de equilibrio está dada por [11,12]:

$$\dot{\sigma}(t)\sigma(t) < 0 \quad (5.1)$$

En el caso de los sistemas en tiempo discreto, al implementar la metodología de modos deslizantes, los elementos de conmutación son reemplazados por dispositivos electrónicos o computarizados, los cuales cambian la estructura del sistema a instantes discretos de tiempo. Además, la entrada de control es calculada a instantes discretos de tiempo y aplicada al sistema durante un intervalo de muestreo, lo que nos ocasiona un modo deslizante no ideal. En el caso de los sistemas en tiempo continuo la conmutación de la estructura del sistema es hecha en cualquier instante, tan pronto como las trayectorias cruzan la superficie de conmutación, evitando ese problema.

Entonces, la condición que garantiza la existencia de un modo deslizante debe ser diferente para sistemas en tiempo discreto. En [12], sustituyen la derivada por la diferencia Euler hacia adelante de la condición (5.1), quedando de la forma:

$$[\sigma(k+1) - \sigma(k)]\sigma(k) < 0 \quad (5.2)$$

La condición (5.2) asegura el movimiento sobre la superficie deslizante. Sin embargo, (5.2) es una condición necesaria pero no suficiente, ya que no asegura la convergencia de las trayectorias de estado hacia la superficie y puede incrementar la amplitud del castaño de las trayectorias del sistema sobre la superficie, llevando al sistema a la inestabilidad. Una condición necesaria y suficiente para sistemas discretos dada en [12] es:

$$|\sigma(k+1)| < |\sigma(k)| \quad (5.3)$$

Esta condición es la condición de deslizamiento en tiempo discreto, la cual, con una buena selección del control $u(k)$ que satisfaga (5.3) garantizará que todas las trayectorias entrarán a la superficie de deslizamiento y permanecerán en ella para todo tiempo futuro.

En las siguientes secciones, diseñaremos dos controladores en modos deslizantes discretos. Para cada uno de ellos se diseñará el control compuesto de la forma:

$$u(k) = u_s(k) + u_f(k) \quad (5.4)$$

el cual es aplicado al sistema discretizado.

5.3 Primer Controlador por Modos Deslizantes Discreto

En esta sección, se diseña un primer control deslizante discreto. Como ya ha sido comentado, se diseña en dos etapas. Un controlador por modos deslizantes es diseñado para cada uno de los subsistemas lento y rápido, y ambos controles son combinados para formar el control compuesto. El objetivo es diseñar el control deslizante para los subsistemas (3.38)-(3.41) obtenidos en el capítulo 3.

5.3.1 Diseño del Controlador Deslizante Lento

Diseñaremos primero el control deslizante lento para el subsistema lento (3.38), para ésto consideraremos la siguiente superficie deslizante:

$$\sigma_s(k) = c_s^T [x_s(k) - x_{sref}(k)] \quad (5.5)$$

donde $c_s^T = (c_{s1} \cdots c_{sn_s})$ es un vector de coeficientes y $x_{sref}(k)$ es una señal constante de referencia.

Utilizando el método de control equivalente, diseñamos el control $u_{eq}(k)$ para restringir el movimiento de las trayectorias del subsistema reducido lento sobre la superficie de conmutación (5.5). Ésto es, calculamos el control equivalente para cuando $\sigma_s(k+1) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_s(k+1) &= c_s^T [x_s(k+1) - x_{sref}(k+1)] = 0 \\ 0 &= c_s^T [x_s(k) + \varepsilon \alpha f_s(x_s(k)) + \varepsilon \alpha g_s(x_s(k)) u_s(k) - x_{sref}(k+1)] \\ 0 &= c_s^T [x_s(k) - x_{sref}(k+1)] + c_s^T \varepsilon \alpha f_s(x_s(k)) + c_s^T \varepsilon \alpha g_s(x_s(k)) u_s(k) \end{aligned}$$

Suponiendo que $c_s^T g_s(x_s(k))$ es no-singular, y despejando $u_s(k) = u_{seq}(k)$, obtenemos el control equivalente lento:

$$u_{seq}(k) = \frac{-1}{\varepsilon\alpha} [c_s^T g_s(x_s(k))]^{-1} [c_s^T [x_s(k) - x_{sref}(k)] + c_s^T \varepsilon\alpha f_s(x_s(k))] \quad (5.6)$$

Ahora, se necesita diseñar un control de atracción, el cual actuará cuando $\sigma_s(k+1) \neq 0$. De acuerdo con (5.3), se debe de satisfacer la condición de deslizamiento:

$$|\sigma_s(k+1)| < |\sigma_s(k)| \quad (5.7)$$

para que exista un modo deslizante, es decir, para que las trayectorias del estado intercepten la superficie de conmutación y permanezcan en ella para todo tiempo futuro.

Si escogemos la superficie deslizante de la forma:

$$\sigma_s(k+1) = \eta_s c_s^T [x_s(k) - x_{sref}(k)] = \eta_s \sigma_s(k) \quad (5.8)$$

donde $0 < \eta_s < 1$. Es claro ver que la condición (5.7) se cumple, ya que:

$$\eta_s |\sigma_s(k)| < |\sigma_s(k)| \quad (5.9)$$

Entonces, el control de atracción $\Delta u_s(k)$ puede ser determinado de (5.8) como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_s(k+1) &= \eta_s c_s^T (x_s(k) - x_{sref}(k)) = \eta_s \sigma_s(k), \\ \eta_s \sigma_s(k) &= c_s^T (x_s(k) - x_{sref}(k+1)) + c_s^T \varepsilon\alpha f_s(x_s(k)) \\ &\quad + c_s^T \varepsilon\alpha g_s(x_s(k)) [u_{eq}(k) + \Delta u_s(k)] \end{aligned}$$

donde $\Delta u_s(k) = u_s - u_{eq}$, y el control de atracción queda de la forma:

$$\Delta u_s(k) = \frac{-1}{\varepsilon\alpha} [c_s^T g_s(x_s(k))]^{-1} [\eta_s c_s^T (x_s(k) - x_{sref}(k))] \quad (5.10)$$

Una vez obtenidos el control equivalente y el control de atracción, se construye el control discreto lento que esta dado por:

$$\begin{aligned} u_s(k) &= u_{es}(k) + \Delta u_s(k) \quad (5.11) \\ &= \frac{-1}{\varepsilon\alpha} [c_s^T g_s(x_s(k))]^{-1} [c_s^T (x_s(k) - x_{sref}(k)) + c_s^T \varepsilon\alpha f_s(x_s(k))] \\ &\quad + \frac{-1}{\varepsilon\alpha} [c_s^T g_s(x_s(k))]^{-1} [\eta_s c_s^T (x_s(k) - x_{sref}(k))] \end{aligned}$$

Las propiedades de estabilidad de $\sigma_s(k) = 0$ en la ecuación (5.8) pueden ser estudiadas por medio de la función de Lyapunov candidata:

$$V(\sigma_s(k)) = \sigma_s^T(k)\sigma_s(k) \quad (5.12)$$

entonces, a lo largo de las trayectorias de el sistema (3.34), tenemos que:

$$\begin{aligned} V(\sigma_s(k+1)) - V(\sigma_s(k)) &= \sigma_s^T(k+1)\sigma_s(k+1) - \sigma_s^T(k)\sigma_s(k) \\ &= -(1 - \eta_s^2)\sigma_s^T(k)\sigma_s(k) < 0 \\ V(\sigma_s(k+1)) &= \eta_s^2 V(\sigma_s(k)) = (\eta_s^2)^k V(\sigma_s(0)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Por lo tanto, $V(\sigma_s(k+1)) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, y la condición de deslizamiento se garantiza para la condición (5.7).

5.3.2 Diseño del Controlador Deslizante Rápido

El diseño del control deslizante rápido se obtiene de manera similar al control lento. Para ésto, se escoge la siguiente superficie de deslizamiento rápida:

$$\sigma_f(k) = c_f^T [z_f(k) - z_{fref}(k)] \quad (5.14)$$

donde $c_f^T = (c_{f1} \cdots c_{fn_f})$ es un vector de constantes y $z_{fref}(k)$ es una señal de referencia constante y diseñaremos el control deslizante para el subsistema (3.40)

De manera similar al control lento, se diseña primero el control equivalente y posteriormente el control de atracción. El control equivalente lo podemos calcular haciendo $\sigma_f(k+1) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_f(k+1) &= c_f^T (z_f(k+1) - z_{fref}(k+1)) \\ 0 &= c_f^T (z_f(k) + M_f [F_2(\tilde{x}(k))z_f(k) + g_2(\tilde{x}(k))u_f(k)] - z_{fref}(k+1)) \\ 0 &= c_f^T (z_f(k) - z_{fref}(k+1)) + c_f^T M_f F_2(\tilde{x}(k))z_f(k) + c_f^T M_f g_2(\tilde{x}(k))u_f(k) \end{aligned}$$

donde consideramos que $c_f^T M_f g_2(\tilde{x}(k))$ es no-singular, entonces el control equivalente rápido nos queda:

$$u_{feq}(k) = - [c_f^T M_f g_2(\tilde{x}(k))]^{-1} [c_f^T (z_f(k) - z_{fref}(k)) + c_f^T M_f F_2(\tilde{x}(k)) z_f(k)] \quad (5.15)$$

Para el caso del control rápido, la condición de deslizamiento está dada por:

$$|\sigma_f(k+1)| < |\sigma_f(k)| \quad (5.16)$$

Entonces, para diseñar el control de atracción podemos seleccionar la superficie deslizante de la forma:

$$\sigma_f(k+1) = \eta_f c_f^T (z_f(k) - z_{fref}(k)) = \eta_f \sigma_f(k) \quad (5.17)$$

donde $0 < \eta_f < 1$, y cumple con la condición (5.16).

Con la anterior selección, el control de atracción $\Delta u_s(k)$ queda de la siguiente manera:

$$\Delta u_f(k) = - [c_f^T M_f g_2(\tilde{x}(k))]^{-1} [\eta_f c_f^T (z_f(k) - z_{fref}(k))] \quad (5.18)$$

Las propiedades de estabilidad de $\sigma_f(k) = 0$ en la ecuación (5.17) pueden ser estudiadas por medio de la función de Lyapunov candidata:

$$W(\sigma_f(k)) = \sigma_f^T(k) \sigma_f(k) \quad (5.19)$$

Entonces, a lo largo de las trayectorias de el sistema (3.37), tenemos que:

$$\begin{aligned} W(\sigma_f(k+1)) - W(\sigma_f(k)) &= \sigma_f^T(k+1) \sigma_f(k+1) - \sigma_f^T(k) \sigma_f(k) \\ &= -(1 - \eta_f^2) \sigma_f^T(k) \sigma_f(k) < 0 \\ W(\sigma_f(k+1)) &= \eta_f^2 V(\sigma_f(k)) = (\eta_f^2)^k V(\sigma_f(0)) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Por lo tanto, $W(\sigma_f(k+1)) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, y la condición de deslizamiento se garantiza para la condición (5.16).

El control discreto rápido estará dado entonces por:

$$\begin{aligned} u_f(k) &= u_{feq}(k) + \Delta u_f(k) \\ &= - [c_f^T M_f g_2(\tilde{x}(k))]^{-1} [c_f^T (z_f(k) + z_{fref}(k)) + c_f^T M_f F_2(\tilde{x}(k)) z_f(k)] \\ &\quad - [c_f^T M_f g_2(\tilde{x}(k))]^{-1} [\eta_f c_f^T (z_f(k) - z_{fref}(k))] \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.4 Segundo Controlador por Modos Deslizantes Discreto

En esta sección, se diseña un controlador por modos deslizantes utilizando otro criterio para diseñar el control de atracción hacia la superficie deslizante. Se utiliza el paradigma de la dinámica no lineal propuesto en [13], el cual lo podemos analizar de la siguiente manera.

Sean K, A, B tres números estrictamente positivos con $A > B$. Considere un sistema dinámico escalar discreto en el tiempo dado por las siguientes relaciones:

$$\sigma(k+1) = \Gamma(\sigma(k)) = \begin{cases} K \text{sign}(\sigma(k)) & , |\sigma(k)| > A \\ \frac{K}{A-B} (|\sigma(k)| - B) \text{sign}(\sigma(k)) & , B < |\sigma(k)| < A \\ 0 & , |\sigma(k)| < B \end{cases} \quad (5.22)$$

donde sign es la función signo. Entonces tenemos el siguiente Teorema:

Teorema 5.1 [13]: Las trayectorias del sistema (5.22) son globalmente asintóticamente estables a cero en tiempo finito si y solo si,

$$K > A \quad (5.23)$$

Además, $\sigma(k)$ converge globalmente a cero en un solo paso, si y sólo si $K < B$.

5.4.1 Diseño del Controlador Deslizante Lento

Diseñaremos primero el control deslizante lento para el subsistema (3.37), para esto consideraremos la superficie de deslizamiento (5.5):

Se desea imponer sobre la evolución de $\sigma_s(x_s(k))$ el paradigma propuesto en el Teorema 5.1. Entonces, nuestro objetivo de control es alcanzar la superficie $\sigma_s(x_s(k+1)) = c_s^T x_s(k)$, con esto, podemos encontrar el control lento deslizante discreto de la siguiente manera.

De acuerdo con el Teorema 5.1, definimos el siguiente sistema para el subsistema lento:

$$\sigma_s(k+1) = \Gamma_s(\sigma_s(k)) = \begin{cases} K \text{sign}(\sigma_s(k)) & , |\sigma_s(k)| > A \\ \frac{K}{A-B} (|\sigma_s(k)| - B) \text{sign}(\sigma_s(k)) & , B < |\sigma_s(k)| < A \\ 0 & , |\sigma_s(k)| < B \end{cases} \quad (5.24)$$

donde, usando (5.5) encontramos el control lento para (3.37).

El control lento puede ser determinado haciendo $\sigma_s(k+1) = \Gamma_s(\sigma_s(k))$, entonces:

$$\begin{aligned}\sigma_s(k+1) &= c_s^T(x_s(k+1) - x_{sref}(k+1)) \\ &= c_s^T(x_s(k) + \varepsilon\alpha f_s(x_s(k)) + \varepsilon\alpha g_s(x_s(k))u_s(k) - x_{sref}(k+1)) \\ &= c_s^T(x_s(k) - x_{sref}(k+1)) + c_s^T\varepsilon\alpha f_s(x_s(k)) + c_s^T\varepsilon\alpha g_s(x_s(k))u_s(k)\end{aligned}$$

Suponiendo que $c_s^T g_s(x_s(k))$ es no-singular, y despejando $u_s(k)$, obtenemos el control lento:

$$u_s(k) = \frac{1}{\varepsilon\alpha} [c_s^T g_s(x_s(k))]^{-1} [\Gamma_s - c_s^T(x_s(k) - x_{sref}(k)) - c_s^T\varepsilon\alpha f_s(x_s(k))] \quad (5.25)$$

donde Γ_s está dada por el paradigma de la dinámica no lineal (5.24) y corresponde al control de atracción que actuará cuando $\sigma_s(k+1) \neq 0$.

5.4.2 Diseño del Controlador Deslizante Rápido

El diseño del control para el subsistema rápido se obtiene de una manera similar. Consideremos la superficie deslizante rápida (5.14).

De forma análoga, consideramos ahora para el subsistema rápido el siguiente sistema:

$$\sigma_f(k+1) = \Gamma_f(\sigma_f(k)) = \begin{cases} K \text{sign}(\sigma_f(k)) & , |\sigma_f(k)| > A \\ \frac{K}{A-B} (|\sigma_f(k)| - B) \text{sign}(\sigma_f(k)) & , B < |\sigma_f(k)| < A \\ 0 & , |\sigma_f(k)| < B \end{cases} \quad (5.26)$$

con la superficie (5.14) la ley de control rápida está dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_f(k+1) &= c_f^T(z_f(k+1) - z_{fref}(k+1)) \\ &= c_f^T(z_f(k) + M_f(F_2(\tilde{x}(k))z_f(k) + f_2\tilde{x}(k)u_f(k) - z_{fref}(k))) \\ &= c_f^T(z_f(k) - z_{fref}(k)) + M_f c_f^T(F_2(\tilde{x}(k))z_f(k) + M_f f_2\tilde{x}(k)u_f(k))\end{aligned}$$

donde suponemos que $M_f f_2\tilde{x}(k)$ es no-singular, se despeja el control rápido quedando de la siguiente manera:

$$u_f = [c_f^T M_f f_2 \bar{x}(k)]^{-1} [\Gamma_f + c_f^T (z_f(k) - z_{fref}(k)) + c_f^T M_f F_2(\bar{x}(k)) z_f(k)] \quad (5.27)$$

donde $\Gamma_f = \sigma_f(k+1)$ y está dado por (5.26).

5.4.3 Control Compuesto

Una vez diseñados los controles lentos y rápidos, se obtiene el control compuesto, el cual está formado por los controles lentos y rápidos diseñados previamente, y está dado de la siguiente forma:

$$u(k) = u_s(x_s) + u_f(z_f) \quad (5.28)$$

Si consideramos el siguiente cambio de variables:

$$\eta(k) = z(k) - \bar{z}(k), \quad (5.29)$$

el sistema no lineal singularmente perturbado se puede obtener al sustituir el control compuesto (5.28) en el sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + \varepsilon \alpha [f_1(x(k)) + F_1(x(k))z(k) + g_1(x(k))u(k)] \\ &\quad + \frac{\varepsilon \alpha^2}{2!} F_1(x(k)) [f_2(x(k)) + F_2(x(k))z(k) + g_2(x(k))u(k)] \\ z(k+1) &= z(k) + (\alpha I_{d_{n_f}} + \frac{\varepsilon \alpha^2}{2!} F_2(x(k))) [f_2(x(k)) + F_2(x(k))z(k) + g_2(x(k))u(k)] \end{aligned}$$

De donde el sistema el lazo cerrado resulta ser:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + \varepsilon \alpha f_s + \varepsilon \alpha g_s u_s + \varepsilon \alpha F_1 \left[I + \frac{\alpha}{2} F_2 \right] \eta \\ &\quad + \varepsilon \alpha \left[g_1 + \frac{\alpha}{2} F_2 \right] u_f \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\eta(k+1) = \eta + \left[\alpha I + \frac{\alpha^2}{2} F_2 \right] [F_2 \eta + g_s u_f] \quad (5.31)$$

En la sección siguiente, aplicaremos las técnicas de control estudiadas al modelo matemático del motor a pasos de magneto permanente.

5.5 Aplicación al Modelo del Motor a Pasos de Magneto Permanente Discretizado

En esta sección aplicaremos las leyes de control por modos deslizantes en tiempo dis-

creto al modelo del motor a pasos discretizado y analizaremos su desempeño. La discretización del modelo se hará con el esquema de discretización estudiado en el capítulo 3. En el capítulo 4 obtuvimos el modelo del motor en la forma singularmente perturbada en tiempo continuo (4.131).

Reescribiendo el modelo (4.131) para darle la forma de (3.9)-(3.10), tenemos que:

$$\dot{x} = f_1(x) + F_1(x)z \quad (5.32)$$

$$\varepsilon \dot{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u \quad (5.33)$$

donde:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{pmatrix} -k_5 x_1 - \tau_l/J \\ x_1 \end{pmatrix}, & f_2(x) &= \begin{pmatrix} k_2 x_1 \text{sen}(k_3 x_2) \\ -k_2 x_1 \text{cos}(k_3 x_2) \end{pmatrix} \\ F_1(x) &= \begin{pmatrix} -k_4 \text{sen}(k_3 x_2) & k_4 \text{cos}(k_3 x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & F_2(x) &= \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix} \\ g_2(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.5.1 Obtención del Modelo en Tiempo Discreto

Para obtener el modelo en tiempo discreto a partir de (5.32)-(5.33) usamos la aproximación de primer orden (Resultado 3.1). Entonces, la dinámica discreta rápida del sistema no lineal (4.131) está dada por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \\ &+ \varepsilon \alpha \left[\begin{pmatrix} -k_5 x_1 - k_7 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_4 \text{sen}(k_3 x_2) & k_4 \text{cos}(k_3 x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon \alpha^2}{2} \begin{pmatrix} -k_4 \text{sen}(K_3 x_2) & k_4 \text{cos}(k_3 x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\left[\begin{pmatrix} k_2 x_1 \text{sen}(k_3 x_2) \\ -k_2 x_1 \text{cos}(k_3 x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(k) \right] \\ z(k+1) &= \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} \\ &+ \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^2}{2} \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix} \right] \times \\ &\left[\begin{pmatrix} k_2 x_1 \text{sen}(K_3 x_2) \\ -k_2 x_1 \text{cos}(K_3 x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas y simplificando términos obtenemos:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= x_1(k) + \varepsilon\alpha(-k_5x_1 - k_7 - z_1(k)k_4\text{sen}(k_3x_2) + z_2(k)k_4\cos(k_3x_2)) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon\alpha^2}{2}(-k_4k_mx_1 - k_4\text{sen}(k_3x_2)(-k_1z_1(k) + v_a) \\
 &\quad + k_4\cos(k_3x_2)(-k_1z_2(k) + v_b)) \\
 x_2(k+1) &= x_2(k) + \varepsilon\alpha x_1
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
 z_1(k+1) &= z_1(k) + \left(\alpha - \frac{k_1\alpha^2}{2}\right)(k_2x_1\text{sen}(k_3x_2) - k_1z_1(k) + v_a) \\
 z_2(k+1) &= z_2(k) + \left(\alpha - \frac{k_1\alpha^2}{2}\right)(-k_2x_1\cos(k_3x_2) - k_1z_2(k) + v_b)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Para obtener los subsistemas lento y rápido utilizamos el método del estado-quasi-estacionario como fue estudiado en el capítulo 3. Usando (3.38) para obtener el subsistema lento, tenemos:

$$\begin{aligned}
 f_s(x_s(k)) &= \begin{pmatrix} -k_5x_1 - k_7 \\ x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -k_4\text{sen}(k_3x_2) & k_4\cos(k_3x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{-k_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-k_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2x_1\text{sen}(k_3x_2) \\ -k_2x_1\cos(k_3x_2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -k_5x_1 - k_7 - \frac{1}{k_1}k_4k_2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
 g_s(x_s(k)) &= - \begin{pmatrix} -k_4\text{sen}(k_3x_2) & k_4\cos(k_3x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{-k_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-k_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} \frac{1}{-k_1}k_4\text{sen}(k_3x_2) & \frac{1}{k_1}k_4\cos(k_3x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Entonces, el subsistema lento tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 x_s(k+1) &= x_s(k) + \varepsilon\alpha \begin{pmatrix} -k_5x_1 - k_7 - \frac{1}{R}k_4K_mx_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \varepsilon\alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{-R}k_4\text{sen}(k_3x_2) & \frac{1}{R}k_4\cos(k_3x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

o bien, escrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x_{s1}(k+1) &= x_{s1}(k) + \varepsilon\alpha(-k_5x_1 - k_7 - \frac{1}{k_1}k_4k_2x_1) \\
&\quad + \varepsilon\alpha(\frac{1}{-k_1}k_4\text{sen}(k_3x_2) + \frac{1}{k_1}k_4\text{cos}(k_3x_2)) \\
x_{s2}(k+1) &= x_{s2}(k) + \varepsilon\alpha x_{s1}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Ahora, para obtener el subsistema rápido usamos (3.41) y obtenemos:

$$\begin{aligned}
z_f(k+1) &= \begin{pmatrix} z_{f1}(k) \\ z_{f2}(k) \end{pmatrix} \\
&\quad + \left[\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \frac{-\alpha^2}{2} \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix} \right] \times \\
&\quad \left[\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{f1}(k) \\ z_{f2}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{f1}(k) \\ u_{f2}(k) \end{pmatrix} \right] \\
z_f(k+1) &= \begin{pmatrix} z_{f1}(k) \\ z_{f2}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha + \frac{\alpha^2}{2}k_1 & 0 \\ 0 & \alpha + \frac{\alpha^2}{2}k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_1z_{f1}(k) + u_{f1}(k) \\ -k_1z_{f2}(k) + u_{f2}(k) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas obtenemos el sistema reducido rápido:

$$\begin{aligned}
z_{f1}(k+1) &= (1 - \alpha k_1 - \frac{\alpha^2}{2}k_1^2)z_{f1}(k) + (\alpha - \frac{\alpha^2}{2}k_1)v_{af} \\
z_{f2}(k+1) &= (1 - \alpha k_1 - \frac{\alpha^2}{2}k_1^2)z_{f2}(k) + (\alpha - \frac{\alpha^2}{2}k_1)v_{bf}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

El diseño del controlador por modos deslizantes es realizado en dos etapas, se diseña un controlador deslizante para cada subsistema y ambos controles se combinan para obtener la ley de control de el modelo de orden completo (5.28)

Utiliando las asignaciones (4.152) y (4.153), el subsistema lento de orden reducido nos queda:

$$\begin{pmatrix} x_{s1}(k+1) \\ x_{s2}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ \varepsilon\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{s1}(k) \\ x_{s2}(k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon\alpha k_7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon\alpha \frac{k_4}{k_1} \\ 0 \end{pmatrix} v \tag{5.41}$$

donde $\Psi = (1 - \varepsilon\alpha k_5 - \frac{\varepsilon\alpha k_4 k_2}{k_1})$.

5.5.2 Diseño del Primer Controlador Deslizante Discreto

Diseñaremos ahora el primer control por modos deslizantes para el modelo discretizado del motor a pasos. Primero diseñamos el control lento. Para ésto, seleccionamos la superficie de conmutación lenta (5.5).

Obteniendo el control equivalente sobre la superficie $\sigma(k+1) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}\sigma(k+1) &= c_1 x_{s1}(k+1) + c_2 [x_{s2}(k+1) - x_{ref}(k)] = 0 \\ 0 &= c_1 [\Psi x_{s1}(k) - \varepsilon \alpha k_7 + \frac{\varepsilon \alpha k_4}{k_1} v_{eq}] \\ &\quad + c_2 [x_{s2}(k) + \varepsilon \alpha x_{s1}(k)]\end{aligned}$$

Despejando v_{eq} obtenemos el control equivalente dado por:

$$v_{eq} = \frac{-k_1}{c_1 \varepsilon \alpha k_4} \left[\frac{c_2}{c_1} (\varepsilon \alpha x_{s1}(k) + x_{s2}(k)) + \Psi x_1(k) - \varepsilon \alpha k_7 \right] \quad (5.42)$$

Ahora, para el control de atracción tomamos la superficie de deslizamiento (5.8), donde:

$$\begin{aligned}\sigma(k+1) &= c_1 \Psi x_{s1}(k) - c_1 \varepsilon \alpha k_7 + \frac{c_1 \varepsilon \alpha k_4}{k_1} (v_{eq} + \Delta u_s) + c_2 x_{s2}(k) + c_2 \varepsilon \alpha x_{s1}(k) \\ &= \eta_s \sigma(k)\end{aligned}$$

y el control de atracción está dado por:

$$\Delta u_s = \frac{k_1}{c_1 \varepsilon \alpha k_4} [\eta_s \sigma(k)] \quad (5.43)$$

Entonces, el control completo para el subsistema reducido lento está dado por:

$$\begin{aligned}u_s(k) &= v_{eq} + \Delta u_s \\ &= \frac{-k_1}{c_1 \varepsilon \alpha k_4} \left[\frac{c_2}{c_1} (\varepsilon \alpha x_{s1}(k) + x_{s2}(k)) + \Psi x_{s1}(k) - \varepsilon \alpha k_7 - \eta_s \sigma(k) \right]\end{aligned} \quad (5.44)$$

En el caso del modelo del motor a pasos, tenemos que en el subsistema rápido

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix}$$

y como $k_1 = 10$ y $\alpha = 0.1$ el subsistema rápido es asintóticamente estable, por lo tanto, no es necesario diseñar un controlador rápido. Entonces, haciendo $v_f = 0$ el controlador compuesto nos queda:

$$u_1(k) = u_s(k) \quad (5.45)$$

donde $u_s(k)$ está dado por (5.44)

5.5.3 Diseño del Segundo Controlador Deslizante Discreto

Ahora, se hará uso del segundo criterio para diseñar el control para el motor a pasos. Diseñaremos primero el control para el subsistema lento considerando superficie de conmutación (5.5).

De acuerdo al Teorema 5.1, consideraremos el siguiente sistema:

$$\sigma_s(k+1) = \Gamma_s(\sigma_s(k)) = \begin{cases} K \text{sign}(\sigma_s(k)) & , |\sigma_s(k)| > A \\ \frac{K}{A-B} (|\sigma_s(k)| - B) \text{sign}(\sigma_s(k)) & , B < |\sigma_s(k)| < A \\ 0 & , |\sigma_s(k)| < B \end{cases}$$

y usaremos la superficie (5.5) para calcular el control lento donde:

$$\sigma_s(k+1) = c_1 x_{s1}(k+1) + c_2 (x_{s2}(k+1) - x_{ref}(k+1))$$

$$\sigma_s(k+1) = c_1 \Psi x_{s1}(k) + c_2 [\varepsilon \alpha x_{s1}(k) + (x_{s2}(k) - x_{ref}(k))] - c_1 \varepsilon \alpha k_7 + c_1 \varepsilon \alpha \frac{k_4}{k_1} v_s$$

despejando v_s , tenemos

$$v_s = \frac{k_1}{\varepsilon \alpha k_4} \left(\frac{1}{c_1} \Gamma_s - (\Psi - \varepsilon \alpha \frac{c_2}{c_1}) x_{s1}(k) + \frac{c_2}{c_1} x_{s2}(k) + \varepsilon \alpha k_7 \right) \quad (5.46)$$

y el control compuesto está dado por:

$$\begin{aligned} v &= v_s \\ &= \frac{k_1}{\varepsilon \alpha k_4} \left(\frac{1}{c_1} \Gamma_s - (\Psi - \varepsilon \alpha \frac{c_2}{c_1}) x_{s1}(k) + \frac{c_2}{c_1} x_{s2}(k) + \varepsilon \alpha k_7 \right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

5.5.4 Diseño de un Observador en Tiempo Discreto

El control que fue previamente diseñado, requiere la información de los estados ω y θ para realizar los cálculos. Sin embargo, en la práctica, solamente las corrientes y posición del rotor están disponibles para la medición. Además, necesitamos estimar el par de carga τ_l . Por lo anterior resulta conveniente diseñar un observador para estimar el torque y la velocidad. Para lograr lo anterior, se diseña un observador lineal basado en la dinámica reducida lenta.

Consideremos un modelo discreto en el tiempo descrito por las siguientes ecuaciones:

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) \quad (5.48)$$

$$y = Hx(k) \quad (5.49)$$

donde $x(k)$ es el vector de estado, $u(k) \in \mathcal{R}$ es la entrada del sistema y $y \in \mathcal{R}$ es la salida. Las matrices F , G y H se supone que son de dimensiones apropiadas y son constantes. El par (F, H) se supone que es observable.

Para el sistema (5.48)-(5.49) se diseña un observador de Luenberger, es decir, un sistema dinámico lineal con las variables u e y como entradas tal que el sistema construye un estimado del estado \hat{x} para el estado x . El observador en tiempo discreto está dado por:

$$\hat{x}(k+1) = F\hat{x}(k) + Gu(k) + K[y(k) - \hat{y}(k)] \quad (5.50)$$

donde H es la ganancia del observador. El error de estimación está dado por:

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (5.51)$$

La dinámica del error se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) &= (F - KG)e(k) \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde el índice para que el estado estimado alcance el estado original puede ser seleccionado arbitrariamente, siempre y cuando los valores característicos de (5.52) estén dentro del círculo unitario.

Ahora, volviendo al modelo reducido lento del motor a pasos, si consideramos un nuevo estado $x_3 = \tau_l$. El modelo reducido lento lo representamos con la siguiente $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3) = (\omega, \theta, \tau_l)$ entonces tenemos la forma de (5.48) y las matrices F y G están dadas por:

$$F = \begin{pmatrix} \Psi & 0 & -\frac{\varepsilon\alpha}{j} \\ \varepsilon\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \varepsilon\alpha \frac{k_A}{k_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Entonces, (5.50) es un observador lineal para el subsistema reducido lento.

5.6 Resultados de Simulaciones

En esta sección se presentan simulaciones numéricas utilizando los controles diseñados (5.45) y (5.47), aplicados al modelo discretizado (5.35)-(5.36), para analizar el desempeño.

Las condiciones iniciales para las simulaciones fueron seleccionadas con los valores:

Modelo del motor a pasos

$$\begin{aligned}i_a(0) &= 0.21261 \text{ A} \\i_b(0) &= 0.54054 \text{ A} \\\omega(0) &= 0 \text{ rad/seg} \\\delta(0) &= 0.006385 \text{ rad}\end{aligned}$$

Observador

$$\begin{aligned}\hat{\omega}(0) &= .001 \text{ rad/seg} \\\hat{\delta}(0) &= 0.0007 \text{ rad} \\\hat{\tau}_l(0) &= 0.045 \text{ N} - m\end{aligned}$$

Los valores de los parámetros del motor son los mismos que se utilizaron para el caso continuo (ver Tabla 2.2). El período de muestreo fue seleccionado como 0.0011, como se sugiere en el esquema de discretización visto en el capítulo 3.

5.6.1 Simulaciones Utilizando el Primer Controlador

Aquí se presenta el desempeño obtenido con el primer controlador deslizante diseñado. Los valores de los parámetros del controlador se fijaron en $c_1 = -0.001$, $c_2 = 11$, $\eta_s = 0.85$, y en el observador $K_1 = 3000$, $K_2 = 2$, $K_3 = -10$.

Los resultados de las simulaciones se pueden observar en las siguientes gráficas. El control diseñado es capaz de estabilizar la salida a cero y de seguir una referencia dada. En este caso se dió una señal constante de referencia fijada en 0.024778, a lo cual el controlador respondió satisfactoriamente y el ángulo del rotor siguió la referencia (Fig. 5.2). En cuanto al observador, podemos ver que los estimados convergen rápidamente hacia el valor original del estado. Se hizo una perturbación en el torque de carga, se cambió el valor de $0.5 \text{ N} - m$ a $0.55 \text{ N} - m$. en $t = 0.02 \text{ seg.}$, y el control respondió satisfactoriamente.

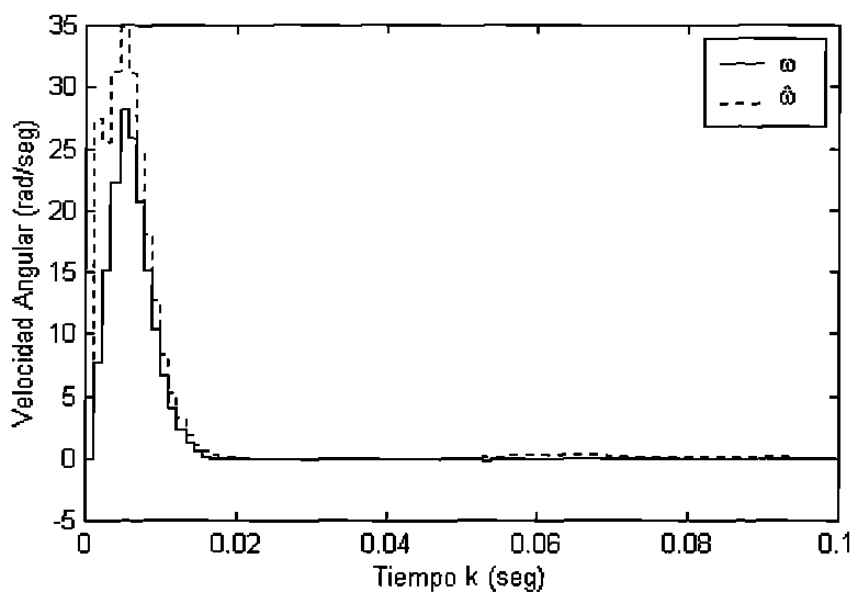


Fig.5.1 Velocidad Angular y estimado

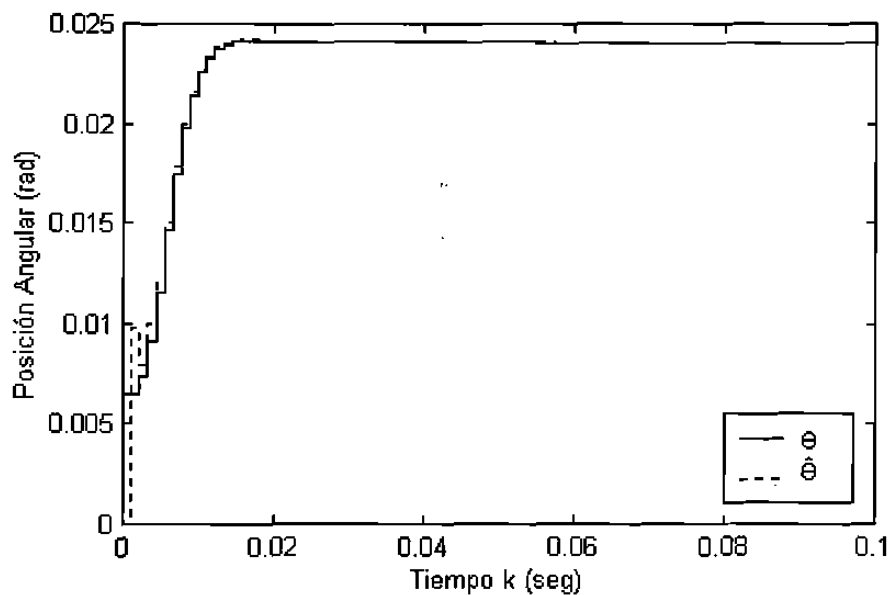


Fig.5.2 Posición angular y estimado.

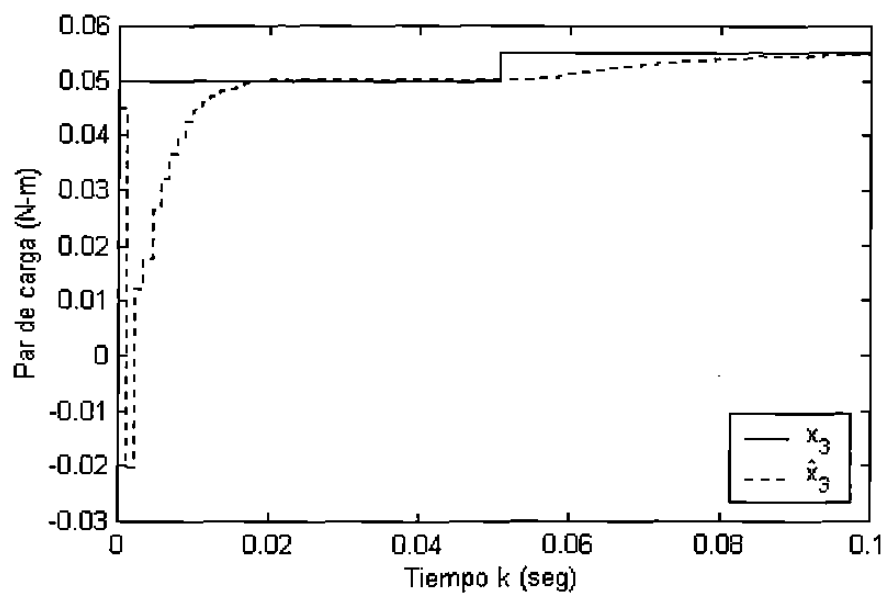


Fig.5.3 Par de carga y su estimado.

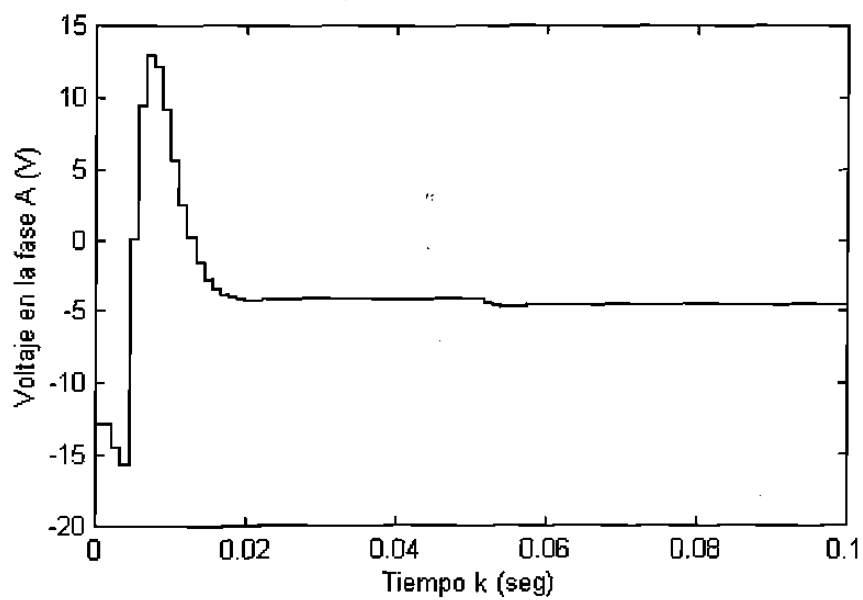


Fig. 5.4 Comportamiento del voltaje en la fase A.

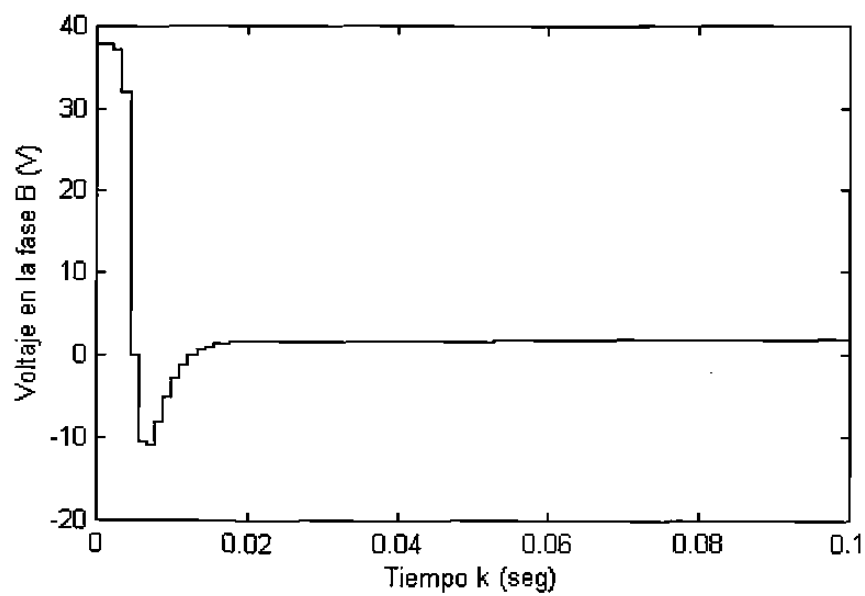


Fig.5.5 Comportamiento del voltaje en la fase B.

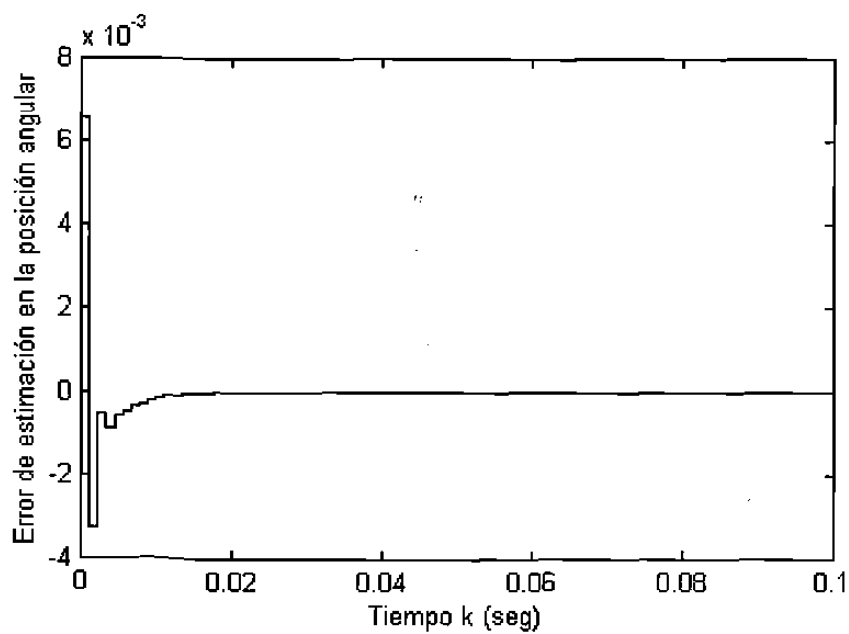


Fig.5.6 Error de estimación de la posición angular.

5.6.2 Simulaciones Utilizando el Segundo Controlador

Las simulaciones del segundo controlador son dadas a continuación. Las condiciones iniciales del sistema y observador son iguales que en el caso anterior. En este caso, los parámetros del control fueron seleccionados: $A = 2.5$, $B = 2$, $K = 1.5$, $c_1 = .2$ y $c_2 = -2$, también se introdujo la misma perturbación paramétrica que se hizo en el primer control. La posición angular regulada a 0.024778 es mostrada en la Fig. 5.8.

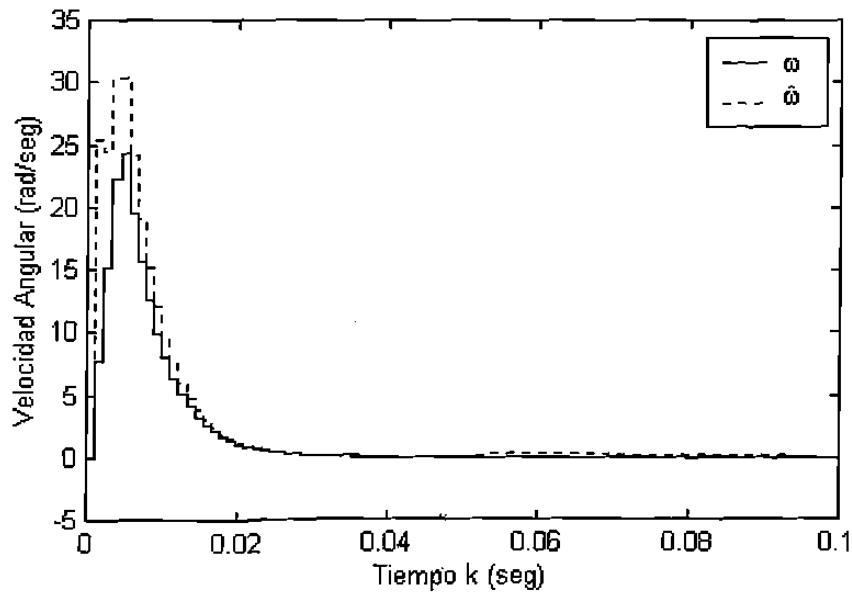


Fig. 5.7 Velocidad angular y su estimado.

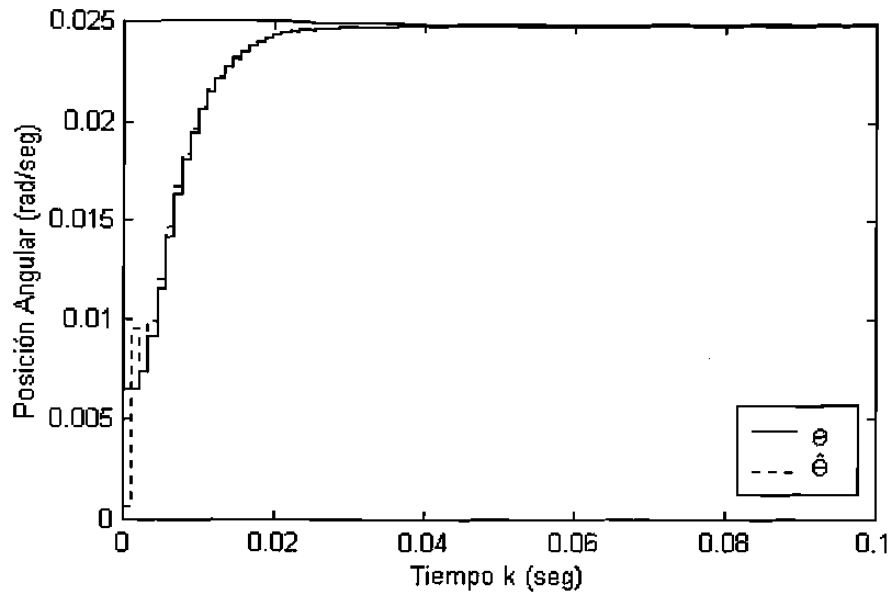


Fig. 5.8 Posición angular y estimado

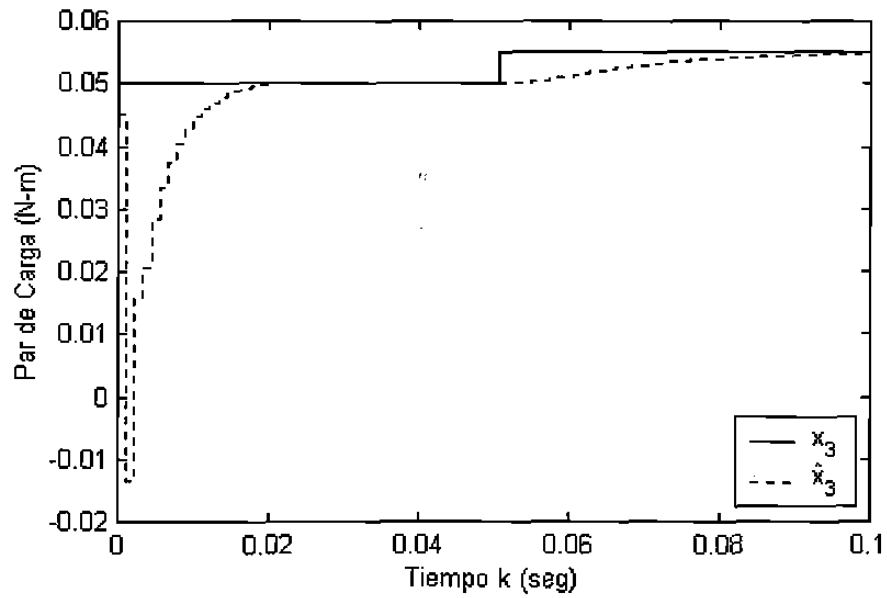


Fig. 5.9 Par de carga y su estimado.

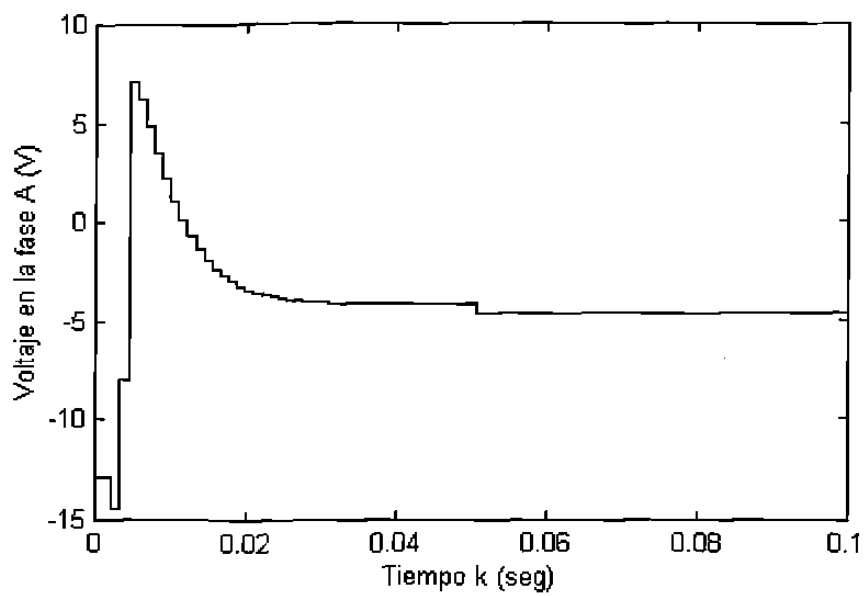


Fig. 5.10 Voltaje en la fase A.

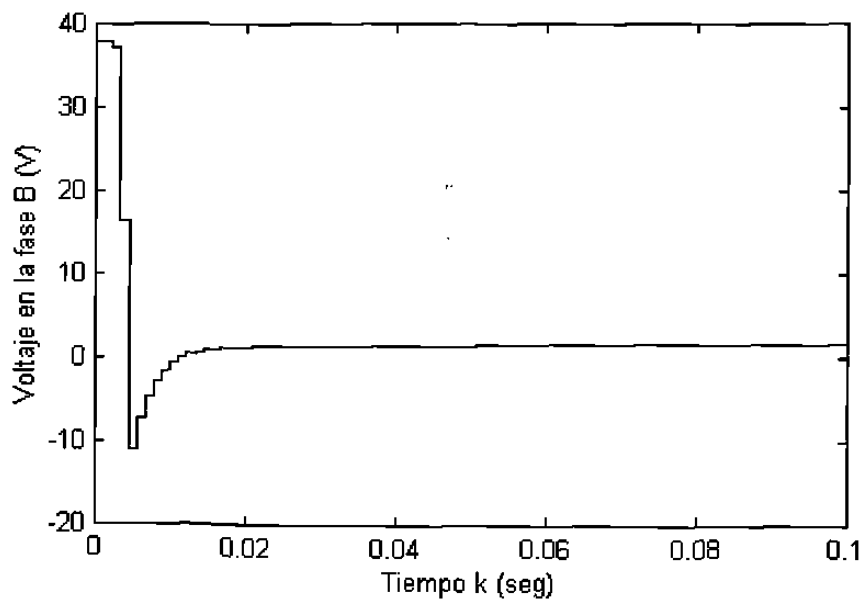


Fig. 5.11 Voltaje en la fase B.

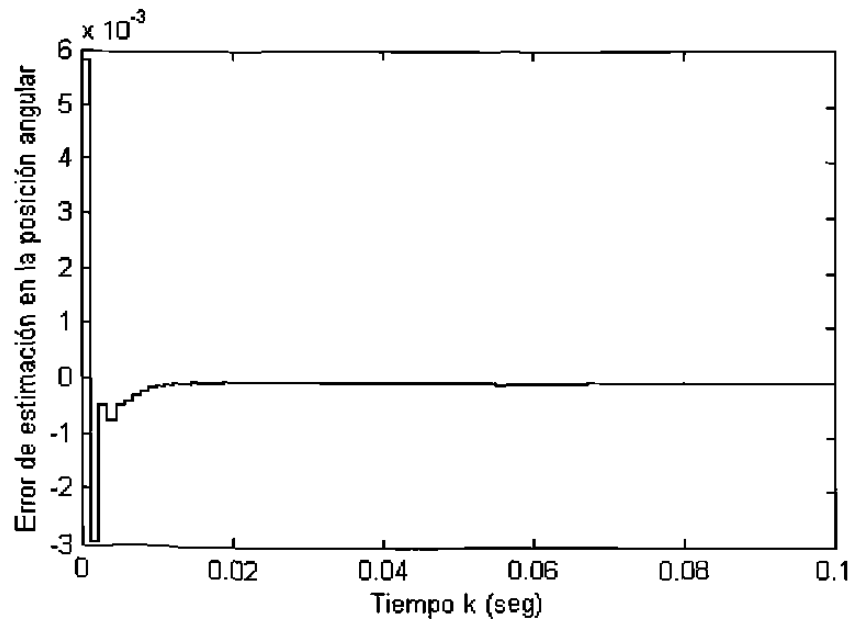


Fig. 5.12 Error de estimación del ángulo del rotor.

5.7 Análisis de Resultados

En esta sección se presenta un análisis y comparación de los resultados obtenidos al aplicar los diferentes esquemas control-observador diseñados. Los elementos y criterios para analizar su desempeño son los mismos usados para el caso continuo, los cuales son:

- A) Tiempo de convergencia hacia la referencia dada (seg).
- B) Desempeño ante la presencia de perturbaciones en los parámetros (tiempo de recuperación seg.).
- C) Fidelidad en el control, es decir, si existe castaño o no.
- D) Error de sobrepaso máximo (0-100%).
- E) Convergencia del observador (seg.).
- F) Voltaje máximo en la ley de control (V)

Estos elementos pueden ser observados en la siguiente tabla comparativa.

Ley de Control	A	B	C	D	E	F
1 ^{er} Control	0.02	<0.01	NO	4%	<0.01	40
2 ^{do} Control	0.04	<0.01	NO	0.04 %	<0.01	38

Tabla 5.1 Comparación de los esquemas control observador discretos.

5.8 Conclusiones

En este capítulo se han presentado esquemas de control basados en la técnica de modos deslizantes y perturbaciones singulares, además se diseñó un observador lineal en tiempo discreto para el subsistema reducido lento.

Se aplicaron los esquemas control observador al modelo del motor a pasos discretizado y se realizaron simulaciones numéricas para verificar su desempeño. La regulación a una referencia dada fueron satisfactorias con ambos controladores, aunque el desempeño del primer controlador fue mejor debido a que respondió más rápido al alcanzar la referencia.

El estudio de sistemas no lineales en tiempo discreto es un problema abierto con mucho donde investigar. En este trabajo, un trabajo futuro sería encontrar las condiciones que permitan asegurar la estabilidad al introducir los estados estimados en el control, es decir, es necesario un análisis del sistema en lazo cerrado con control y observador en tiempo discreto.

Capítulo 6

Conclusiones.

En esta tesis, fueron presentados esquemas de control-observador utilizando las técnicas de perturbaciones singulares y modos deslizantes para el diseño de controladores. Los esquemas fueron presentados tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. Dichos esquemas fueron aplicados a un modelo matemático de un motor a pasos de magneto permanente, con el fin de alcanzar el objetivo de regulación de la posición angular del rotor.

Se aprovecharon las ventajas que ofrece el usar perturbaciones singulares para tratar con modelos de orden reducido, así mismo, se presentaron diferentes alternativas al utilizar la técnica de modos deslizantes en el diseño de controladores, mostrando ser una buena técnica de control, tanto para el caso continuo como discreto.

Al aplicar los esquemas al modelo del motor a pasos, presentaron un buen comportamiento, incluso, con cierto grado de robustez, ya que al introducirse perturbaciones en la carga suministrada al rotor, respondieron satisfactoriamente, y se resolvió el problema de regulación a una señal de referencia constante.

Los resultados obtenidos anteriormente fueron validados por simulaciones numéricas, y podemos ver como la teoría de control no lineal puede ser aplicada para resolver problemas del sector industrial. Un trabajo futuro podría ser encaminado hacia la búsqueda de otras aplicaciones donde se puedan utilizar los esquemas de control propuestos.

Por otro lado, para el caso continuo, se dieron condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado cuando el estado lento es reemplazado por su estimado. Para el caso discreto, se necesita un estudio detallado de la estabilidad en lazo cerrado, sobretodo cuando es reemplazado el vector de estado lento por su estimado.

Además, en este trabajo, se consideró una clase específica de sistemas no lineales en la forma singularmente perturbada. Dicha clase de sistemas tiene como principal característica que es lineal en los estados rápidos y en el control. Una expansión tanto para el caso continuo como discreto, sería el tratar de aplicar estos esquemas a una clase más general

de sistemas no lineales en la forma singularmente perturbada, incluso, tratar con sistemas donde el vector de estado completo necesite ser estimado, dando así, la oportunidad de aplicar estos esquemas a otro tipo de dispositivos y/o procesos.

Apéndice

Definición de $O(\varepsilon)$:

Una función $f(t, \varepsilon)$ se dice ser $O(\varepsilon)$ sobre un intervalo $[t_1, t_2]$, si existe una constante positiva k y ε^* tal que:

$$\|f(t, \varepsilon)\| \leq k\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^*], \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclideana.

Prueba del Teorema 4.3.

Consideremos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\xi = R(\theta)\zeta \tag{A.1}$$

Entonces el sistema (4.76) puede ser escrito de la forma:

$$\dot{\xi} = R(\theta)AR^{-1}(\theta)\xi + R(\theta)G(R^{-1}(\theta)\xi)u \tag{A.2}$$

$$y = CR^{-1}(\theta)\xi \tag{A.3}$$

donde, se tienen las siguientes relaciones $R(\theta)AR^{-1}(\theta) = \theta A$ y $CR^{-1}(\theta) = C$, debido a la estructura de la matriz A y el vector C .

Dado lo anterior, el sistema (A.2)-(A.3) puede ser reescrito como

$$\dot{\xi} = \theta A\xi + R(\theta)G(R^{-1}(\theta)\xi)u \tag{A.4}$$

$$y = C\xi \tag{A.5}$$

De igual forma, el observador (4.76) puede ser expresado en la nuevas coordenadas

$$\dot{\hat{\xi}} = \theta A\hat{\xi} + R(\theta)G(R^{-1}(\theta)\hat{\xi})u - \theta KC(\xi - c) \tag{A.6}$$

$$y = C\hat{\xi} \tag{A.7}$$

Definamos ahora el error de estimación como:

$$e_\xi = \xi - \hat{\xi} \tag{A.8}$$

cuya dinámica está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{e}_\xi &= \dot{\xi} - \dot{\hat{\xi}} \\ &= \theta(A - KC)e_\xi + R(\theta)\Gamma(\xi, \hat{\xi}, u)\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

donde

$$\Gamma(\xi, \hat{\xi}, u) = G(R^{-1}(\theta)\xi)z - G(R^{-1}(\theta)\hat{\xi})u \quad (\text{A.10})$$

Por otro lado, si suponemos que el sistema $\dot{e}_\xi = \theta(A - KC)e_\xi$ es asintóticamente estable, por el Teorema 4.1 aseguramos la existencia de una función de Lyapunov $V_{e_\xi} = e_\xi^T P_e e_\xi$, donde P_e es una matriz definida positiva simétrica, la cual es solución única de la ecuación de Lyapunov

$$(A - KC)^T P_e + P_e (A - KC) = -Q_e \quad (\text{A.11})$$

donde Q_e es una matriz arbitraria simétrica positiva tal que:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_1 \|e_\xi\|^2 &\leq V_{e_\xi} \leq \tilde{c}_2 \|e_\xi\|^2 \\ \frac{\partial V_{e_\xi}}{\partial e_\xi} \theta(A - KC)e_\xi &\leq -\tilde{c}_3 \|e_\xi\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V_{e_\xi}}{\partial e_\xi} \right\| &\leq \tilde{c}_4 \|e_\xi\|\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

donde $\tilde{c}_1 = \lambda_{\min}(P_e)$, $\tilde{c}_2 = \lambda_{\max}(P_e)$, $\tilde{c}_3 = \lambda_{\min}(Q_e)$ y $\tilde{c}_4 = \lambda_{\max}(Q_e)$.

La derivada con respecto al tiempo de V_{e_ξ} a lo largo de las trayectorias del error de estimación (A.9) es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{e_\xi} &= -\theta\tilde{c}_3 \|e_\xi\|^2 + 2e_\xi^T P_e R(\theta)\Gamma(\xi, \hat{\xi}, u) \\ &\leq -\theta\tilde{c}_3 \|e_\xi\|^2 + \tilde{c}_4 \|e_\xi\| \left\| R(\theta)\Gamma(\xi, \hat{\xi}, u) \right\|\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Puesto que los mapeos $g_{i,j}$'s son globalmente Lipschitz, tenemos que:

$$\left\| R(\theta)\Gamma(\xi, \hat{\xi}, z) \right\| \leq \rho \|e_\xi\| \quad (\text{A.14})$$

donde ρ es la constante de Lipschitz. Por tanto,

$$\dot{V}_{e_\xi} \leq -(\theta\tilde{c}_3 - \tilde{c}_4\rho) \|e_\xi\|^2 \quad (\text{A.15})$$

Entonces, el sistema (A.4)-(A.5) es exponencialmente estable. Más aún, si ρ es suficientemente pequeña y satisface la cota:

$$\rho \leq \bar{\rho} \leq \frac{\theta \tilde{c}_3}{\tilde{c}_4} \quad (\text{A.16})$$

entonces, el sistema observador (A.4)-(A.5) es exponencialmente estable con un índice de convergencia que puede ser arbitrariamente rápido, esto es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e\xi} &\leq -\frac{(\theta \tilde{c}_3 - \tilde{c}_4 \rho)}{\tilde{c}_2} \|e_\xi\|^2 \\ &\leq -\mu V_{e\xi} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Referencias

- [1] Chen Chi-Tsong. "Linear System Theory and Design". Holt, Rinehart and Winston. 1984.
- [2] Kenjo, T., Sugawara, A., "Stepping Motors and Their Microprocessor Controls", Oxford Science Pub, 1994.
- [3] M. Zribi and J. Chiasson, "Position control of a PM stepper motor by exact linearization", IEEE Transactions on AC, AC-36, No. 5, pp 620-625, 1991
- [4] Khalil, Hassan K. "Nonlinear Systems". Prentice-Hall 1995.
- [5] Barbot J. P., Djemai M., Monaco S. y Normand-Cyrot D. "Analysis and Control of Nonlinear Singularly Perturbed Systems under sampling". Control and Dynamics Systems, Vol. 79, 1996.
- [6] Barbot J. P., Monaco S., Normand-Cyrot D., Pantanos N. "Discretization schemes for nonlinear singularly perturbed systems".
- [7] Kokotovic P.V., Khalil H.K. y O'Reilly. "Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design". Academic Press. 1986
- [8] Ghautier J. P., H. Hammouri, Othman S. "A simple observer for nonlinear systems: Application to bioreactors", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, pp. 875-880, 1992.
- [9] Sastry, Shankar. "Nonlinear systems: Analysis, Stability and Control" Springer, 1999.
- [10] Utkin, V. I. "Sliding Modes in Control Optimization", Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [11] De Carlo, R.A., Zak, S.H., Drakunov, S.V., "Variable Structure, Sliding-Mode Controller Design", The Control Handbook, 1995. pp 941-951.
- [12] Sarpturk, S.Z., Stefanopoulos, Y., Kaynak, O., "On the stability of discrete-time Sliding Mode Control Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol AC-32, No. 10, Octubre 1987.
- [13] Sira-Ramirez H., Castro-Linares R., "Sliding Mode Rest-to-Rest Stabilization and Trajectory Tracking for a Discretized Flexible Joint Manipulator", Dynamics and Control. 2000.
- [14] Bodson, M., Chiasson, N., Novotnak, R.T., Rekowski, R.B., "High-Performance nonlinear feedback control of a Permanent Magnet Stepper Motor", IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 1, 1993.

- [15] Franklin Gene F., Powell J. David, Workman Michael L. "Digital Control of Dynamic Systems". Addison-Wesley Publishing, 1990.
- [16] Chiasson, J.N., Novotnak, R.T., "Nonlinear speed observer for the PM stepper motor", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 38, 1993. 10:1584-1588
- [17] Khalil Hassan K. "Two time scale and averaging methods". The control handbook 1995. pp 873-879.
- [18] Blauch A.J, Bodson M., Chiasson, J. " High-Speed Parameter Estimation of Stepper Motors", IEEE Transactions on Control Systems Tech, vol. 1, no. 4, pp 270-278, Diciembre 1993.
- [19] Friedland, Bernard, "Observers". The control handbook, 1995. pp 607-618.
- [20] De León-Morales J., Alvarez-Leal G., Castro Linares R. "Control of a flexible joint robot manipulator via a non-linear contro-observer scheme", Int. Journal of Control, 2001, Vol. 74, No. 3, pp. 290-302.

