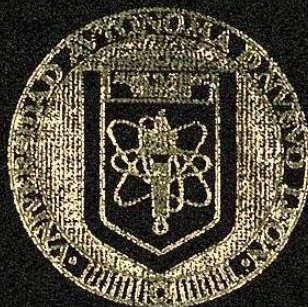


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



REQUERIMIENTOS DE DESEMPEÑO PARA SISTEMAS DE CONTROL LINEALES,
UNA REPRESENTACION EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

P R E S E N T A

ING. NETZAHUALCOYOTL HERNANDEZ RODRIGUEZ

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

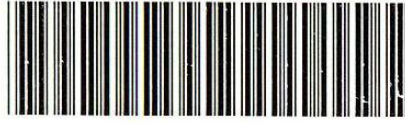
SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DEL 2003

TM
Z5853
.M2
FIME
2003
H4

REGOLAMENTO DELLE
SISTEMAS ON CONTROL
LIMELIGHTS

UNIVERSITÀ DI
PERUGIA

LIBRERIA
L. S. S.



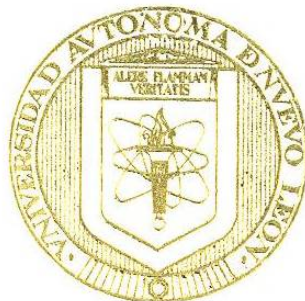
1020148559

m

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



REQUERIMIENTOS DE DESEMPEÑO PARA SISTEMAS DE CONTROL LINEALES:
UNA REPRESENTACION EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

P R E S E N T A

ING. NETZAHUALCOYOTL HERNANDEZ RODRIGUEZ

TESIS

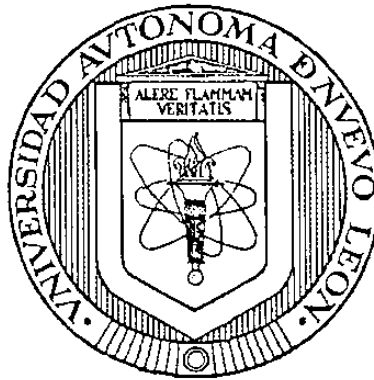
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA. N. L. FEBRERO DEL 2003

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



REQUERIMIENTOS DE DESEMPEÑO
PARA SISTEMAS DE CONTROL LINEALES:
UNA REPRESENTACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

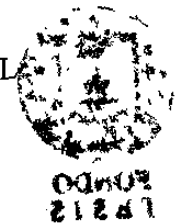
QUE PRESENTA EL

ING. NETZAHUALCÓYOTL HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA N.L. A FEBRERO DEL 2003



975899

TM
Z5853
.M2
FIME
2003
.H4

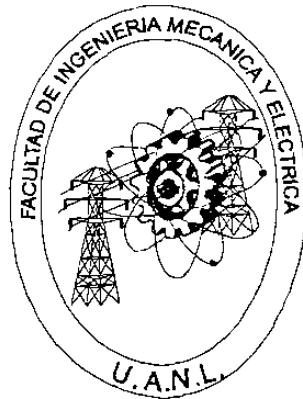


FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



REQUERIMIENTOS DE DESEMPEÑO
PARA SISTEMAS DE CONTROL LINEALES:
UNA REPRESENTACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

QUE PRESENTA EL

ING. NETZAHUALCÓYOTL HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA N.L. A FEBRERO DEL 2003

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis que lleva por título “Requerimientos de Desempeño para Sistemas de Control Lineales: Una Representación en el Dominio de la Frecuencia” realizada por el alumno Ing. Netzahualcóyotl Hernández Rodríguez, matrícula 418002 sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.

El Comité de Tesis



Asesor

Dr. Gerardo Romero Galván



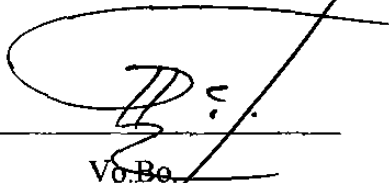
Coasesor

Dr. César Elizondo González



Coasesor

Dr. Efraín Alcorta García



Vó.Bo.

Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez

División de Estudios de Posgrado

Ciudad Universitaria, a Febrero del 2003

PROLOGO

En el ámbito de control automático sin duda uno logro importante fue el desarrollo de H_∞ en los años ochenta. Este documento presenta un conjunto de requerimientos de desempeño, planteados como restricciones matemáticas, mediante técnicas H_∞ . El buen planteamiento de los requerimientos y las restricciones es fundamental para obtener una solución satisfactoria y rápida a problemas de diseño de sistemas de control.

Las especificaciones de desempeño de un sistema de control describen la respuesta deseada de un sistema de control. Estas especificaciones de desempeño se codifican como una serie de requerimientos que son validos desde el punto de vista físico y matemático. Al diseñar el sistema se definen las especificaciones de desempeño de antemano, las cuales deben satisfacerse cuando se encuentra el prototipo del controlador.

Para digerir el material que se presenta se requieren conocimientos básicos en teoría de control además de tener una buena idea de cómo diseñar especificaciones que se codifican como restricciones matemáticas.

Esta tesis puede ser tomada como un escrito básico (apuntes) para estudiantes de ingeniería y estudiantes en general, que motivados por el desarrollo de la tecnología y expansión de los procesos de automatización buscan métodos que puedan ser aplicados en forma fácil y rápida en casos prácticos.

INDICE

Tema	Pagina
Síntesis	1
1 Introducción	3
1.1 Descripción del problema	3
1.2 Objetivo de la tesis	4
1.3 Hipótesis	4
1.4 Límites del estudio	5
1.5 Justificación del trabajo de tesis	5
1.6 Metodología	5
1.7 Revisión bibliográfica	6
2 Requerimientos de desempeño	9
2.1 Introducción	9
2.2 Especificaciones de desempeño en la respuesta transitoria	10
2.3 Especificaciones de desempeño en dominio de la frecuencia	16
2.4 Especificaciones de robustez	19
2.5 Rechazo a perturbaciones y filtración de ruido	21
3 Requerimientos de desempeño expresados en forma de disco	24
3.1 Introducción	25
3.2 Requerimientos de desempeño en el dominio de frecuencia	26
3.2.1 Desigualdades de disco	26
3.3 Medidas de desempeño	27
3.3.1 Margen de ganancia fase	28
3.3.2 Error en estado estacionario	29
3.3.3 Ancho de banda	31
3.3.4 Decaimiento	32
3.3.5 Magnitud de cresta	33

3.3.6	Límite del controlador	34
3.3.7	Límite de la planta	36
3.3.8	Rechazo a perturbación	37
3.3.9	Atenuación	37
3.4	Selección del conjunto de Requerimientos	38
3.5	Separando desigualdades de disco juntas	39
4	Diseño de sistemas de control	40
4.1	Sintonización de controladores PID	40
4.2	Asignación de polos	42
4.3	Técnica de diseño usando Teoría H_∞	44
4.3.1	Función de transferencia diseñable	45
4.3.2	Diseño de sistemas de control	46
4.3.3	Método de solución	47
5	Sistema de control de nivel con tres tanques	50
5.1	Aplicación practica	50
5.2	Modelando el sistema	52
5.2.1	Linealización	53
5.2.2	Función de transferencia	55
5.2.3	Determinación de los coeficientes de la función de transferencia	59
5.2.4	Cálculo de $C'v$	59
5.2.5	Aproximación para $C'v$	61
5.3	Planteamiento en teoría H_∞	63
5.3.1	Formulación de requerimientos	64
5.4	Optimización en OPTDesign	68
5.5	Creando el controlador <i>Cont2</i>	70
5.6	Verificando la respuesta	72
5.7	Controlador <i>Cont2</i> en H_∞ contra PID	73
5.7.1	Controlador PID	73
5.7.2	Comparación entre controladores	74

6 Conclusiones y Recomendaciones	76
6.1 Introducción	76
6.2 Conclusiones	77
6.3 Recomendaciones	78
Bibliografía	80
Listado de Tablas	81
Listado de Figuras	82
Apéndice	84
Resumen Autobiográfico	85

SINTESES

Uno de los principales acontecimientos relacionados con el área de control en los años 80's fue el surgimiento de la teoría de control H_∞ , la cual ha sido ampliamente aplicada en problemas de control robusto, control óptimo y diseño de sistemas de control automático; siendo este último el problema de interés de este trabajo de investigación.

La presente tesis comprende en su primer parte la introducción al problema de diseño de sistemas de control lineal utilizando técnicas basadas en la representación de los sistemas en el dominio de la frecuencia. Posteriormente se aborda el problema de diseño definiendo requerimientos de desempeño expresados en el dominio de la frecuencia utilizando nuevas técnicas presentadas en [Helton and Merino]. Estos requerimientos son adaptados para plantear el problema de diseño donde se busca encontrar un controlador que permita que el sistema de control en lazo cerrado satisfaga dichos requerimientos.

Los requerimientos de desempeño tienen una importancia fundamental, ya que garantizan el funcionamiento adecuado de sistemas de control y se aplican para transformar un problema de diseño de sistemas de control en un problema de optimización de una función H_∞ . El problema matemático formulado puede resolverse en forma sencilla y precisa utilizando la computadora; auxiliándose del software OPTDesign, donde se pueden resolver los problemas matemáticos planteados.

Finalmente se aplican las técnicas de diseño basadas en la teoría H_∞ para una aplicación real: el sistema de control de nivel de tres tanques, ver [Corripio]. Obteniendo la relación del sistema de control en lazo cerrado y el prototipo del controlador adecuado, para la planta del sistema mencionado.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCION

1.1 Descripción del problema

El problema de mayor interés en el área de automatización de procesos industriales es, hacer más eficientes los procesos con la finalidad de obtener mayores ganancias en los sistemas de producción, con menores costos; o lo que es lo mismo una mayor utilidad.

El estudio de los sistemas de control automático considera dos problemas fundamentales: análisis y diseño; el primero busca obtener propiedades cuantitativas y cualitativas de los sistemas de control y el segundo consiste en definir una serie de requerimientos bajo los cuales debe operar el sistema de control y en función de éstos proponer un controlador que satisfaga dichos requerimientos.

En el diseño de sistemas de control mediante técnicas H_∞ , los requerimientos de desempeño tienen una importancia fundamental, ya que éstos garantizan el funcionamiento adecuado de dichos sistemas. La técnica que se usa es describir estos

requerimientos usando estructuras matemáticas, que representen un buen desempeño en un sistema de control, como pueden ser: rechazo a perturbaciones, buen seguimiento, sobrepaso máximo aceptable, etc. Este trabajo de investigación utiliza una metodología presentada recientemente en [Helton and Merino], la cual define los requerimientos de desempeño de tal forma que se simplifique la obtención del controlador que satisfaga dichos criterios mediante la aplicación de la teoría H_∞ .

1.2 Objetivo de la tesis

Aplicar las técnicas de diseño de sistemas de control automático basadas en la teoría H_∞ , al sistema de control de nivel de tres tanques interconectados no interactivos; así como plantear un análisis comparativo de esta técnica, contra la respuesta que presenta un controlador PID convencional.

1.3 Hipótesis

El problema a abordar, forma parte de un problema más general conocido como el problema de diseño de sistemas de control automático lineales. Este problema general, tiene como hipótesis la existencia de controladores que al ser conectados en el sistema de control automático, éste cumpla con los requerimientos previamente establecidos, los cuales tienen relación directa con el desempeño de un sistema de control.

En particular en este trabajo de investigación mediante la aplicación de técnicas de diseño de sistemas de control basadas en la teoría H_∞ , se supone permiten obtener un mejor desempeño en el sistema de control de nivel de tres tanques no interactivos, al obtener el controlador con las características requeridas.

1.4 Límites del estudio

Este trabajo de investigación está restringido a definir, interpretar y aplicar requerimientos de desempeño que tengan alguna relación importante con el buen funcionamiento de un sistema de control automático. El estudio será realizado considerando únicamente sistemas de control que puedan ser expresados mediante funciones racionales propias en el dominio de la transformada de Laplace, también conocida como representación en el dominio de la frecuencia.

1.5 Justificación del trabajo de tesis

La justificación principal de este trabajo de investigación es que el problema de mayor interés en el área de automatización de procesos industriales, es el hacer más eficientes los procesos con la finalidad de obtener mayores ganancias en los sistemas, con menores costos; o lo que es lo mismo una mayor utilidad. El problema de diseño está directamente relacionado con el problema de hacer más eficientes los procesos industriales mediante el planteamiento de un problema de optimización en el dominio de la frecuencia; por lo tanto la definición y aplicación de requerimientos de desempeño juega un papel muy importante en la búsqueda de procesos automatizados que sean más eficientes; lo cual justifica este trabajo de investigación.

1.6 Metodología

- Recopilación de información en revistas, publicaciones y libros.
- Selección de la información de interés.
- Interpretación de los resultados existentes.
- Presentación de los requerimientos de desempeño.
- Simplificación de los requerimientos de desempeño.
- Aplicación al problema de control de nivel de líquidos.

1.7 Revisión bibliográfica

En teoría de control los desarrollos importantes han tenido lugar desde 1980. El control se ha vuelto cada vez más complicado y a la vez su aplicación ha ido en aumento, más lo complicado es para la disciplina de ingeniería que debe llevar claridad y soluciones metódicas a los problemas. La aplicabilidad es una consecuencia de nuevas formulaciones del problema y nuevas soluciones matemáticas a estos problemas. Todavía más, las computadoras y software han cambiado, de tal manera que la ingeniería del diseño se puede realizar con un mínimo de contratiempos. Estos desarrollos hacen pensar en una nueva presentación al problema de diseño de un controlador, una que explota los nuevos desarrollos recalcando su conexión con control clásico.

Este documento se apoya principalmente en cuatro libros, El primero y más importante puesto que es la base para esta investigación es Control Clásico Usando Métodos H_∞ , Este es uno de los pocos los libros que tratan el tema H_∞ de una manera simple y entendible para alumnos de ingeniería, de este libro se toman las ideas principales y el software para dar solución a los sistemas de control.

Las ideas tratadas en este libro son en relación con el diseño de sistemas de control utilizando técnicas H_∞ . Trata el tema de una manera conceptualmente simple y apegado a control clásico. En este libro se intenta dar un método mucho muy preciso (casi axiomático) para el diseño de control lineal. Para solucionarse directamente en un paquete de optimización matemático.

El uso de diferentes técnicas para dar solución a diferentes casos es el objetivo principal de los apuntes que llevan por título Design Methods for Control Systems, hay que destacar que estos apuntes son un compendio de temas realizados en el Instituto de Holanda de Sistemas y Control, con importantes temas de vanguardia en el ámbito de control, estos apuntes presentan una apreciación global madura de varias técnicas de diseño importantes para los sistemas de control lineales, variando de clásico a

“postmoderno”. Dando especial énfasis a ideas, metodología, resultados y puntos débiles de los métodos utilizados, no necesariamente en técnicas de prueba.

En el libro *Control Clásico Usando Métodos H_∞* maneja el software de Mathematica el cual es el encargado de realizar los cálculos matemáticos y gráficas, mientras que en el libro *Design Methods for Control Systems* todos los ejemplos numéricos que se estudian se realizaron en MATLAB.

El libro *Feedback Control Theory* se dirige a los estudiantes de ingeniería que ha tomado cursos anteriormente en sistemas y control, además de una introducción a los métodos del dominio de la frecuencia para analizar sistemas de control retroalimentado, gráficas de Bode y criterio de Nyquist. Para guardar el desarrollo elemental, los sistemas son mono variables, operando en tiempo continuo.

Los sistemas de control son diseñados para tratar ciertas señales, seguimiento de errores, entradas de algún actuador; estas señales no deben exceder niveles especificados, que impidan el buen funcionamiento de la planta a ser controlada (modelos matemáticos que usamos para representar sistemas realmente físicos), los errores en medición de señal (los sensores pueden medir señal con una cierta exactitud) y la incertidumbre que tiene implícitamente, son algunos de los problemas de control. A principios de los años ochenta los investigadores de control restablecieron el lazo entre el trabajo clásico de Bode y otros, formulando una fácil noción matemática de incertidumbre en un sistema de entrada salida y se desarrollaron excelentes técnicas matemáticas para resolverlo. Este libro formula un problema, llamado el problema de desempeño robusto, con la meta de lograr los niveles específicos establecidos ante incertidumbre de la planta.

El libro *Linear Controller Design* es motivado por los desarrollos tecnológicos siguientes: la alta calidad que integran sensores y actuadores, poderosos procesadores de control que pueden llevar a cabo algoritmos de control complejos, el hardware de

computadora y poderosos software's que pueden usarse para diseñar y analizar sistemas de control.

Como puede advertirse estos cuatro libros enlazan las ideas principales del libro base, utilizar nuevas técnicas para la solución de problemas de control de una manera fácil mediante procedimientos no complicados, con la utilización de la computadora para la solución, manejo y cálculo de las ecuaciones de control, en el diseño de sistema de control.

El objetivo del libro Principles an practice of automatic process control es presentar la práctica de proceso automáticos de control junto con los principios fundamentales de teoría de control. Además se presentan un número significativo de aplicaciones prácticas. Las herramientas para llevar a cabo las estrategias de control se han desarrollado mucho, el uso de computadoras para la simulación de la instrumentación y sistemas de control es la norma actual.

Se presentan las definiciones de términos y las herramientas matemáticas usadas en control de procesos. El tema importante es la deducción del modelos de proceso dinámicos y principios básicos para poder obtener la función de transferencia de diseño de sistemas de control.

CAPÍTULO 2

REQUERIMIENTOS DE DESEMPEÑO

En este capítulo se definirán diferentes requerimientos de desempeño expresados en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, para aplicarse en sistemas de control descritos en su forma entrada salida mediante funciones de transferencia.; estas especificaciones pueden ser divididas en dos categorías importantes: especificaciones de desempeño del sistema de control y especificaciones de robustez.

2.1 Introducción

El estudio de los sistemas de control automático está dividido en tres partes importantes que son definidas a continuación:

1. Análisis: Consiste en obtener propiedades cuantitativas y cualitativas del sistema de control automático. Las propiedades cuantitativas están relacionadas con la

obtención de la solución (respuesta transitoria) del sistema de ecuaciones que representa el comportamiento dinámico del sistema de control, el cual es llamado (modelo matemático). Mientras que las propiedades cualitativas de un sistema de control son propiedades que se obtienen sin solucionar el modelo matemático, tales como: estabilidad, controlabilidad, observabilidad, estabilizabilidad, etc.

2. Síntesis: Consiste en proponer una estrategia de control (controlador) que garantice que el sistema de control en lazo cerrado será un sistema de control estable.
3. Diseño: Consiste en buscar un controlador que garantice obtener en lazo cerrado una respuesta transitoria que satisfaga una serie de requerimientos previamente definidos; estos requerimientos están relacionados con el desempeño del sistema de control en lazo cerrado, así como su robustez.

2.2 Especificaciones de desempeño en la respuesta transitoria

En la mayoría de los problemas prácticos los requerimientos de desempeño son especificados en términos de la respuesta transitoria y de estado estacionario del sistema de control automático, cuando se le aplica una entrada de tipo escalón unitario. La razón por la que se utiliza una entrada de tipo escalón unitario es por que la respuesta de un sistema ante una entrada escalón unitario tiene una relación muy cercana al desempeño que tiene un sistema de control en condiciones de operación, además se puede notar que si la respuesta al escalón unitario es conocida, entonces matemáticamente puede obtenerse la respuesta para cualquier entrada.

La respuesta transitoria de un sistema controlado con frecuencia presenta oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar su valor en estado estacionario, si tiene raíces complejo conjugadas. En la respuesta transitoria de un sistema de control generalmente se definen los siguientes parámetros:

1. Tiempo de ascenso (t_a): Es el tiempo requerido por la respuesta transitoria para cambiar de un porcentaje inicial a un porcentaje final de la respuesta transitoria.
2. Tiempo de pico (t_p): Es el tiempo requerido por la respuesta transitoria para alcanzar por primera vez el valor máximo de la respuesta transitoria.
3. Porcentaje de sobrepaso (p_o): Es el sobrepaso que tiene la respuesta transitoria con respecto al valor final en el tiempo de pico.
4. Tiempo de estabilización (t_s): Es el tiempo que tarda la respuesta transitoria para mantenerse en valores muy cercanos a su valor final (típicamente es un 5% o un 2% de variación sobre el valor final), este tiempo está relacionado con la constante de tiempo más grande del sistema de control.
5. Retardo de tiempo (τ): Es el tiempo que tarda la respuesta transitoria en alcanzar por primera vez el 50% de su valor final.

Estos parámetros son identificados en la gráfica de la figura 2.1 que muestra la respuesta transitoria de un sistema de control automático ante una entrada de tipo escalón unitario.

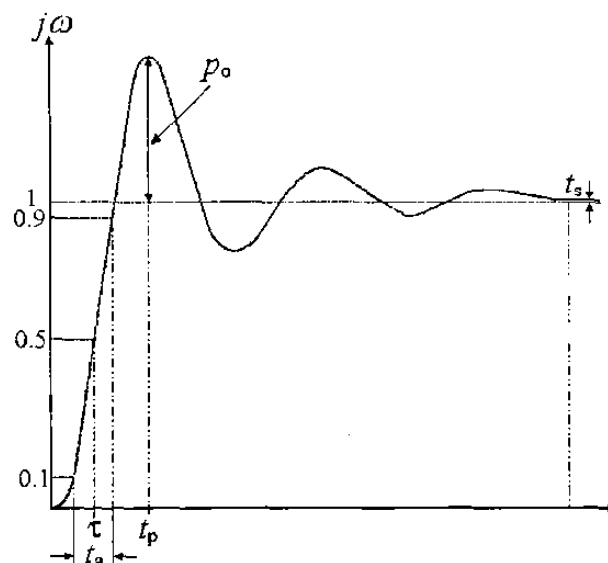


Figura 2.1. Respuesta transitoria.

La respuesta transitoria de un sistema de control puede ser aproximada por la respuesta de un sistema de segundo orden que tiene la siguiente estructura:

$$g(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.1)$$

Donde ω_n y δ son la frecuencia natural del sistema y el factor de amortiguamiento respectivamente. Cuando el sistema de control es aproximado por la ecuación (2.1) y bajo la consideración de que el factor de amortiguamiento esté limitado a los siguientes valores $0 < \delta < 1$ (un sistema subamortiguado), los parámetros definidos previamente pueden ser calculados de la siguiente forma:

$$p_o = e^{-\delta\pi/\sqrt{1-\delta^2}} \quad (2.2)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad (2.3)$$

$$t_s = \frac{4}{\delta\omega_n} (2\%) \quad (2.4)$$

$$t_s = \frac{3}{\delta\omega_n} (5\%) \quad (2.5)$$

el resto de los parámetros no puede ser calculado de manera precisa, sin embargo es posible obtener las siguientes aproximaciones:

$$\tau \cong \frac{1.1 + 0.125\delta + 0.469\delta^2}{\omega_n} \quad (2.6)$$

$$t_a \cong \frac{1 - 0.4167\delta + 2.917\delta^2}{\omega_n} \quad (2.7)$$

Es importante mencionar que estas formulas son solo aproximaciones de los parámetros del tiempo previamente definidos, ya que existen muchos sistemas de control que tienen respuestas transitorias que no corresponden a sistemas de segundo orden; lo anterior implica que deberá tenerse mucho cuidado al momento de usarlas.

Otra forma de definir especificaciones de desempeño es realizada en términos de los polos y ceros de la función de transferencia de lazo cerrado, por ejemplo algunos sistemas pueden requerir tener sus polos en una región del semiplano izquierdo del plano complejo, tal como se muestra en la figura 2.2.

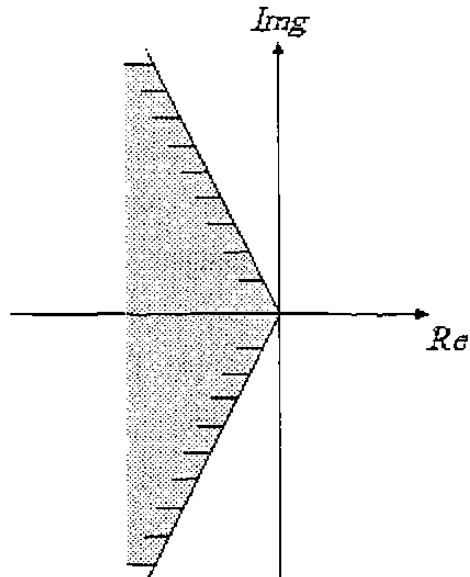


Figura 2.2. Región deseada en el plano complejo.

Para un sistema de segundo orden los polos pueden ser calculados usando las siguientes formulas:

$$p_1 = -\delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \quad (2.8)$$

$$p_2 = -\delta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \quad (2.9)$$

se puede notar que $|p_1| = |p_2| = \omega_n$ y $\arg(p_1) = \arg(p_2) = \pi - \tan^{-1}(\sqrt{1-\delta^2}/\delta)$, entonces las figuras que se obtienen al mantener constante la magnitud de los polos son partes de circunferencias centradas en el origen del plano complejo, mientras que cuando se mantiene constante el ángulo se presentan líneas rectas que parten del origen y que tienen una pendiente igual a la tangente de su ángulo. Con lo anterior es posible relacionar los polos de un sistema de control en lazo cerrado con los parámetros δ y ω_n y por tanto con los parámetros de tiempo previamente definidos (t_a, t_p, t_s, τ, p_o).

La consideración de que el sistema antes analizado es de segundo orden puede ser suprimida por el hecho de que los sistemas de orden mayor siempre pueden ser expresados como un conjunto de subsistemas de primer y segundo orden. Es bien conocido que la ubicación de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de control automático tiene grandes efectos sobre la respuesta transitoria del mismo.

Los polos que están muy cerca del eje imaginario por la parte izquierda, corresponden a respuestas transitorias que decaen lentamente, mientras que los polos que se encuentran muy alejados del eje imaginario en el semiplano izquierdo del plano complejo corresponden a respuestas transitorias que decaen más rápidamente. La relativa dominancia de los polos está determinada por la parte real de los mismos, así como por la magnitud de los residuos evaluados en esos polos; es importante mencionar que la magnitud de los residuos depende tanto de los polos como de los ceros de la función de transferencia de lazo cerrado.

En la práctica se ha establecido que si la parte real de alguno de los polos excede 5 veces la parte real del polo más cercano al eje imaginario, entonces el primero domina en la respuesta transitoria y son llamados polos dominantes del sistema de control. Con frecuencia los polos dominantes de un sistema de control son usados para reducir el orden del sistema de control y de esta forma simplificar su análisis.

Otro parámetro de la respuesta que es considerando como un requerimiento de desempeño es la respuesta en estado estacionario, si la salida en estado estacionario de un sistema no coincide con la entrada, se dice que tiene un error en estado estacionario y éste en general es indeseable.

La mayoría de las entradas pueden ser expresadas como combinaciones de funciones tipo escalón, rampa y aceleración, entonces han sido clasificadas de acuerdo a la habilidad para seguir este tipo de señales. En general el error en estado estacionario depende de la señal de referencia y del tipo de sistema de control, de tal forma que se

han clasificado en sistemas Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3, ..., en función del número de integradores que tiene su función de transferencia de lazo abierto. Otro término que influye directamente en el error en estado estacionario de un sistema de control es la constante de error estático, la cual es definida de la siguiente forma:

$$k_p = \lim_{s \rightarrow \infty} G_{ol}(s) \quad (2.10)$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow \infty} sG_{ol}(s) \quad (2.11)$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2G_{ol}(s) \quad (2.12)$$

donde:

$$G_{ol}(s) = \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{s^N(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (2.13)$$

es la función de transferencia de lazo abierto. Mediante las siguientes formulas es posible calcular el error en estado estacionario para las entradas de tipo escalón, rampa y aceleración, respectivamente:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} \quad (2.15)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} \quad (2.15)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_a} \quad (2.16)$$

de las ecuaciones anteriores se puede observar que el error en estado estacionario está en función de la constante de error estático, la cual depende directamente del sistema en lazo abierto; así es posible decrementar el error en estado estacionario incrementando la constante de error estático. Las especificaciones en la respuesta transitoria que contemplan el error en estado estacionario son presentadas en la gráfica de la figura 2.3.

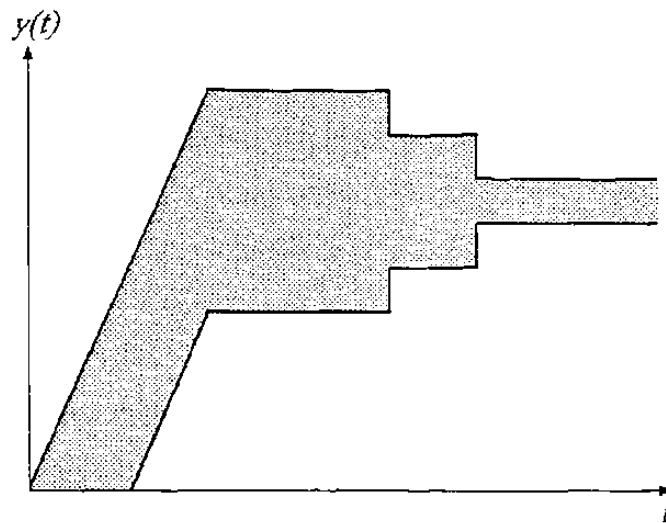


Figura 2.3. Especificaciones generales.

Las especificaciones expresadas en términos de la respuesta transitoria son frecuentemente utilizadas en el diseño de sistemas de control automático, aunque es conveniente decir que la parte más importante en el problema de diseño es determinar como se pueden satisfacer dichas especificaciones.

2.3 Especificaciones de desempeño en dominio de la frecuencia

Un sistema LTI (lineal invariante en el tiempo) representado por una función de transferencia $G_{oL}(s)$ como la mostrada en la ecuación (2.13) en estado estacionario presenta una salida senoidal cuando se le aplica una entrada senoidal. La amplitud y la fase de la salida senoidal del sistema es la única diferencia que existe entre ambas señales. Se puede verificar fácilmente que la amplitud de la salida en estado estacionario de un sistema LTI cuando se le aplica una entrada senoidal está dada por $|G_{oL}(j\omega)|$ donde ω es la frecuencia de la señal de entrada, mientras que el ángulo de desfase entre la salida y la entrada está determinado por $\tan^{-1} (\text{Im}[G_{oL}(j\omega)] / \text{Re}[G_{oL}(j\omega)])$. Lo anterior muestra que la amplitud y fase de la señal de salida son suficientes para determinar la respuesta de un sistema cuando se le aplica una entrada de tipo senoidal.

La función de variable compleja $G_{cl}(j\omega)$ es referida como la respuesta a la frecuencia del sistema de control representado por $G_{cl}(s)$ y la condición que debe satisfacer para ser válida es que el sistema sea estable. Al igual que en la respuesta transitoria, algunos requerimientos relacionados con el desempeño del sistema de control son definidos en términos de la respuesta a la frecuencia de un sistema de control, tales como:

1. Pico de resonancia (M_p): Se define como el máximo valor de la magnitud de la respuesta a la frecuencia del sistema de control en lazo cerrado y la frecuencia a la cual ocurre este valor es conocida como la frecuencia de resonancia denotada por (ω_p).
2. Ancho de banda (Wb): El ancho de banda se define como la frecuencia en la cual la magnitud de la respuesta a la frecuencia del sistema de control en lazo cerrado cae a un valor del 70.7% de su valor a frecuencia cero.

El ancho de banda y el pico de resonancia son mostrados en la gráfica, figura 2.4.

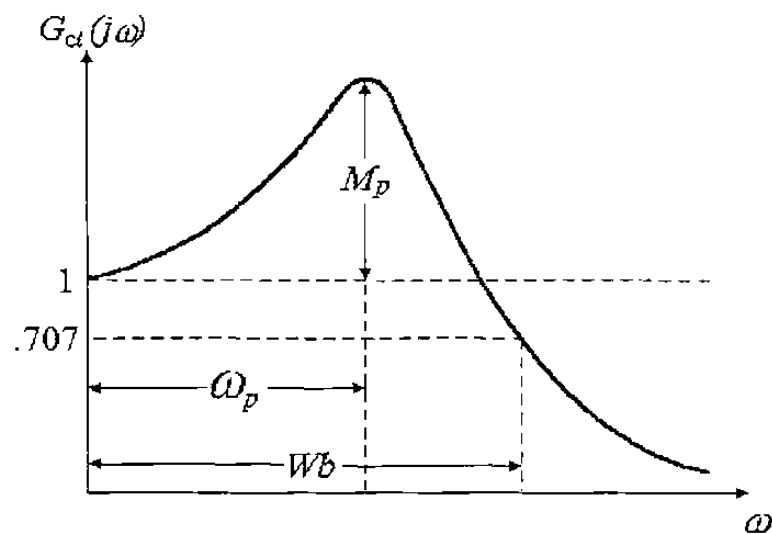


Figura 2.4. Especificaciones de respuesta a la frecuencia.

donde $G_{cl}(j\omega)$ es la respuesta a la frecuencia del sistema de control en lazo cerrado. En general, el pico de resonancia es un indicador de la estabilidad relativa del sistema de control en lazo cerrado. Una magnitud del pico de resonancia grande indica la presencia de un par de polos dominantes en el lazo cerrado con un factor de amortiguamiento

pequeño, lo cual produce una respuesta transitoria inconveniente. En cambio, una magnitud del pico de resonancia pequeña indica la ausencia de un par de polos dominantes en lazo cerrado con un factor de amortiguamiento relativo pequeño, lo cual significa que el sistema está bien amortiguado. Normalmente, un pico de resonancia grande corresponde a un porcentaje de sobrepaso grande en la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado; en la mayoría de los sistemas de control es aceptable tener un pico de resonancia que se encuentre entre 1.1 y 1.5.

El ancho de banda de un sistema de control en lazo cerrado está relacionado con la respuesta transitoria de la siguiente forma: un ancho de banda grande corresponde a una respuesta transitoria rápida mientras que un ancho de banda pequeño corresponde a una respuesta transitoria lenta.

El ancho de banda también es un indicador de la capacidad de un sistema para no ser afectado por el ruido en los sensores. Aunque para la mayoría de los sistemas de primer y segundo orden, las relaciones previamente mencionadas se satisfacen, en general no se cumplen y para sistemas de orden superior prácticamente no existe una relación. Para sistemas de segundo orden, los parámetros de interés son calculados mediante las siguientes formulas:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad \delta \leq 1/\sqrt{2} \quad (2.17)$$

$$M_p = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}} \quad \delta \leq 1/\sqrt{2} \quad (2.18)$$

$$Wb = \omega_n [(1 - \delta^2) + \sqrt{4\delta^4 - 4\delta^2 + 2}]^{1/2} \quad (2.19)$$

al igual que en la respuesta transitoria, en la respuesta a la frecuencia también se definen una especie de requerimientos generales, los cuales son presentados en la figura 2.5.

Es decir la respuesta a la frecuencia del sistema de control en lazo cerrado deberá estar contenida dentro de los límites especificados. Esta clase de especificaciones es frecuentemente utilizada en el diseño de sistemas de control robustos.

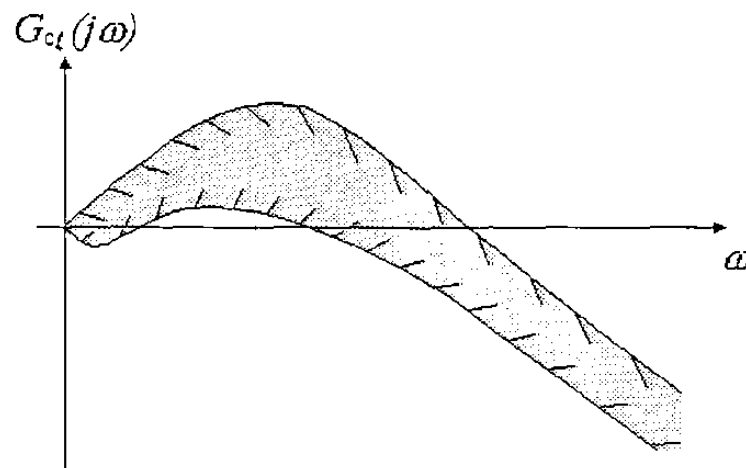


Figura 2.5. Especificaciones generales en el dominio de la frecuencia.

2.4 Especificaciones de robustez

Cuando se diseña un sistema de control automático lo primero que se busca garantizar es la propiedad de estabilidad del sistema de control en lazo cerrado y en general no solo que sea estable sino que también tenga cierta garantía de permanecer estable aun y cuando existan perturbaciones. En la respuesta transitoria la estabilidad relativa es determinada en función del porcentaje de sobrepaso y del factor de amortiguamiento; mientras que en la respuesta a la frecuencia la estabilidad relativa está determinada en términos del pico de resonancia. Sin embargo, dos parámetros que son tradicionalmente usados para indicar robustez de un sistema de control son el margen de fase y el margen de ganancia, los cuales son definidos a continuación:

1. Margen de ganancia (M_g): Es la cantidad de ganancia que puede ser insertada en el lazo de control antes de que alcance la inestabilidad.
2. Margen de fase (M_f): Es el incremento en el ángulo de fase del sistema de control en lazo abierto requerido para que el sistema en lazo cerrado sea inestable cuando tiene una ganancia igual a la unidad.

Ambos parámetros son mostrados en la gráfica de respuesta a la frecuencia, también conocida como la curva de Nyquist, figura 2.6.

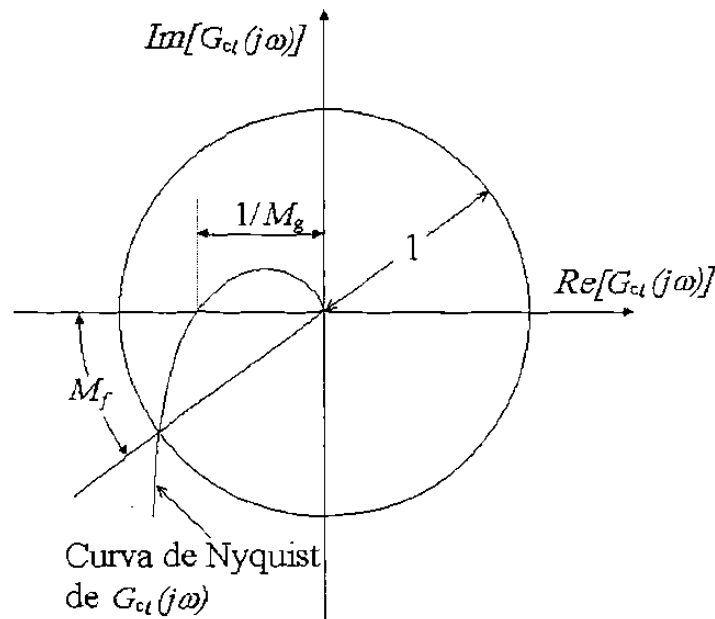


Figura 2.6. Margen de Fase y Ganancia.

El margen de fase y de ganancia también se obtienen a partir de los diagramas de magnitud y fase de Bode del sistema de control en lazo cerrado. De la definición de margen de ganancia y margen de fase se puede concluir que si un sistema de control tiene márgenes de ganancia y fase grandes implica que el sistema puede permanecer estable a pesar de tener grandes cambios en su estructura; esta propiedad es conocida como robustez.

Es importante notar que el margen de ganancia y de fase por sí solos no representan un indicador suficiente de estabilidad relativa, ya que el margen de ganancia no proporciona información completa sobre la respuesta del sistema; un margen de ganancia pequeño indica que la curva de Nyquist del sistema de control en lazo directo $G_o(j\omega)$ está muy cerca del punto $(-1,0)$ en el plano complejo, lo cual significa que tiene una respuesta transitoria oscilatoria independientemente del margen de fase; también un margen de ganancia pequeño indica posibilidad de inestabilidad en presencia de perturbaciones o errores de modelado.

Lo anterior obliga a tomar en cuenta tanto el margen de ganancia como el margen de fase para garantizar estabilidad relativa. En la práctica, para obtener un buen desempeño

en un sistema de control en lazo cerrado se sugiere tener un margen de fase que esté entre $\pi/3$ y $\pi/6$; y un margen de ganancia mayor a 2. Para un sistema de control de segundo orden subamortiguado, el margen de fase puede ser obtenido mediante la siguiente fórmula:

$$M_f = \tan^{-1} \left(\frac{2\delta}{\sqrt{\sqrt{4\delta^4 + 1} - 2\delta}} \right) \quad (2.20)$$

esta ecuación proporciona una relación entre desempeño y robustez, con lo cual se puede considerar un problema de diseño más completo. Nótese que para sistemas de primer y segundo orden la curva de Nyquist nunca cruza la línea de $-\pi$ radianes y por lo tanto tienen un margen de ganancia infinito; en ocasiones el margen de ganancia y fase no son muy útiles para indicar la propiedad de estabilidad, por ejemplo un sistema de control de orden superior puede tener grandes márgenes de ganancia y fase; sin embargo, su curva de Nyquist puede estar lo suficientemente cercano al punto $(-1,0)$ para incurrir en un pico de resonancia demasiado alto. Lo anterior provoca que el diseñador deba tener cuidado cuando utiliza estos parámetros para representar estabilidad relativa.

2.5 Rechazo a perturbaciones y filtración de ruido

Todos los sistemas físicos están sujetos a algún tipo de señales externas o ruido de medición. Las perturbaciones externas, como por ejemplo ráfagas de viento en un avión, son muy comunes en sistemas de control automático; de aquí que sea importante que éstas sean consideradas en el diseño de dichos sistemas.

El efecto que las perturbaciones externas y el ruido eléctrico de medición tienen sobre el desempeño de un sistema de control puede ser visualizado analizando el sistema de control representado en la figura 2.7.

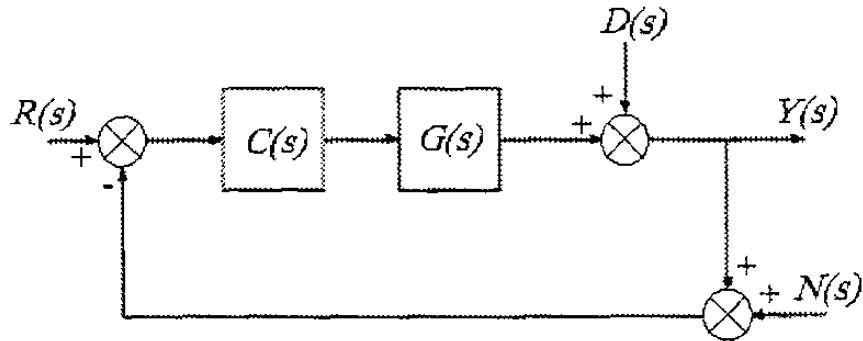


Figura 2.7. Sistema de control con señal de ruido y perturbación externa.

Por simplicidad se asumirá que el efecto de las perturbaciones externas ($d(t)$) se refleja directamente en la planta y que el ruido eléctrico ($n(t)$) es introducido al sistema a través del sensor. Ahora definamos las variables $D(s)$, $N(s)$, $R(s)$ y $Y(s)$ como las transformadas de Laplace de las señales de perturbación, ruido, referencia y salida respectivamente del sistema de control automático. Aplicando álgebra de bloques se puede obtener la siguiente relación:

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}R(s) + \frac{1}{1+C(s)G(s)}D(s) - \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}N(s) \quad (2.21)$$

definiendo el error de seguimiento de señal de referencia como $e(t) = r(t) - c(t)$ con su correspondiente transformada de Laplace se obtiene la siguiente relación:

$$E(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}R(s) + \frac{1}{1+C(s)G(s)}D(s) - \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}N(s) \quad (2.22)$$

ambas ecuaciones pueden ser expresadas en términos de nuevas variables:

$$Y(s) = T(s)R(s) + S(s)D(s) - T(s)N(s) \quad (2.23)$$

$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)D(s) + T(s)N(s) \quad (2.24)$$

donde $S(s)$ es definida como la función de sensibilidad y $T(s)$ la función de sensibilidad complementaria, lo anterior es por el hecho que $S(s) + T(s) = 1$. De las relaciones obtenidas previamente se puede observar que si la función de sensibilidad es pequeña se minimiza el efecto que tiene la perturbación sobre la salida del sistema de control; sin

embargo, el sistema se ve afectado por el ruido de medición debido a la relación que guarda con la sensibilidad complementaria. Afortunadamente las mayoría de las perturbaciones que afectan a los sistemas de control son señales de baja frecuencia, mientras que las señales de ruido aparecen a altas frecuencias; lo anterior permite que sea posible la satisfacción de ambas condiciones (buen rechazo a perturbaciones y rechazo a ruido de medición). Las condiciones anteriores pueden ser expresadas mediante la siguiente figura que muestra la respuesta a la frecuencia ideal de un sistema de control automático.

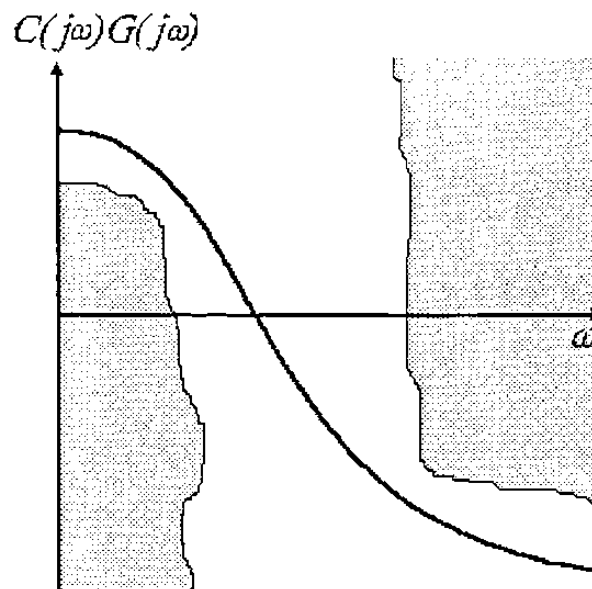


Figura 2.8. Respuesta a la frecuencia de la función de lazo abierto ideal.

La característica de la respuesta a la frecuencia del sistema de control en lazo abierto ideal es que la ganancia a bajas frecuencias sea lo suficientemente grande para tener un buen rechazo a perturbaciones y por otro lado que la ganancia a altas frecuencias sea lo suficientemente pequeña para poder filtrar el ruido de medición.

Establecer especificaciones de desempeño para un sistema de control automático no es un problema sencillo. Los diferentes aspectos de desempeño y robustez de un sistemas de control están interrelacionados y en ocasiones se contraponen; lo anterior provoca que muchas veces la mayoría no existan controladores que satisfagan las especificaciones de desempeño.

CAPÍTULO 3

REQUERIMIENTOS DE DESEMPEÑO EXPRESADOS EN FORMA DE DISCO

En el capítulo anterior se mencionó que existen requerimientos de desempeño en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo; algunos de ellos mantienen una equivalencia muy marcada, mientras que otros se complementan. En este capítulo se presentaran los requerimientos de desempeño más comunes en el diseño de sistemas de control utilizando una estructura uniforme denominada discos con una representación figura conveniente en términos de discos.

Finalmente, en la última sección de este capítulo se discutirán problemas de diseño que involucran restricciones. Hay que aclarar que dos o más restricciones que están activas en las mismas frecuencias y mejorando un diseño con respecto a uno de ellos, trae una degradación de desempeño con respecto a por lo menos uno de los otros.

3.1 Introducción

Considerando el sistema de lazo cerrado mostrado en la figura 3.1. En este sistema, $P(s)$ y $C(s)$ son funciones reales racionales propias del sistema de lazo cerrado. Se toma la planta $P(s)$ por ser una función racional dada y se usa la función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(s)$ para parametrizar los sistemas de lazo cerrado obtenidos con diferentes controladores. Ahora son posibles muchos sistemas de lazo cerrado obtenidos con planta $P(s)$ para permitir que la función de transferencia diseñable $G_{cl}(s)$ tome diferentes valores.

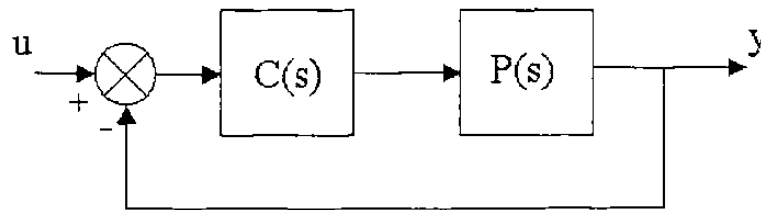


Fig. 3.1. El sistema de lazo cerrado $G_{cl}(s)$.

Las funciones clave son:

- La función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(s) = \frac{P(s)C(s)}{(1+P(s)C(s))}$;
- El controlador $C(s) = \frac{G_d(s)}{(1-G_d(s))P(s)}$;
- La función de sensibilidad $S(s) = \frac{1}{(1+P(s)C(s))}$;
- La planta de lazo cerrado $PS = \frac{C(s)}{(1+P(s)C(s))}$;
- El controlador de lazo cerrado $Q(s) = C(s)S(s)$;
- El error de seguimiento para la entrada u , Su ;
- La función de transferencia de lazo abierto $L(s) = P(s)C(s)$.

3.2 Requerimientos de desempeño en el dominio de frecuencia

Hay dos tipos de requerimientos en el sistema de lazo cerrado discutidos a continuación, estabilidad interna y desempeño. Los requerimientos de desempeño son desigualdades que involucran la función del sistema y se definen a continuación.

Definición 3.2.1 *Un requerimiento de desempeño en el dominio de la frecuencia es una desigualdad que la función de transferencia diseñable $G_{cl}(s)$ debe satisfacer, para un intervalo de frecuencia ω para el que la desigualdad se exige mantener.*

3.2.1 Desigualdades de disco

Todos los requerimientos de desempeño en el dominio de la frecuencia tratados en este capítulo pueden escribirse en la forma de una desigualdad de disco que $G_{cl}(s)$ debe satisfacer, es decir:

$$|K(j\omega) - G_{cl}(j\omega)| \leq R(j\omega), \quad \forall \omega \in [\omega_a, \omega_b] \quad (3.1)$$

Donde:

$K(j\omega) =$ Centro del disco

$R(j\omega) =$ Radio del disco

Donde $K(s)$ y $R(s)$ son funciones racionales estables y representan condiciones de desempeño en un sistema de control e incluyen las especificaciones deseadas del sistema. Las desigualdades de disco son fáciles de trazar como regiones en espacio 3-D (ver figura 3.2) y corresponden al interior de un dominio cúbico.

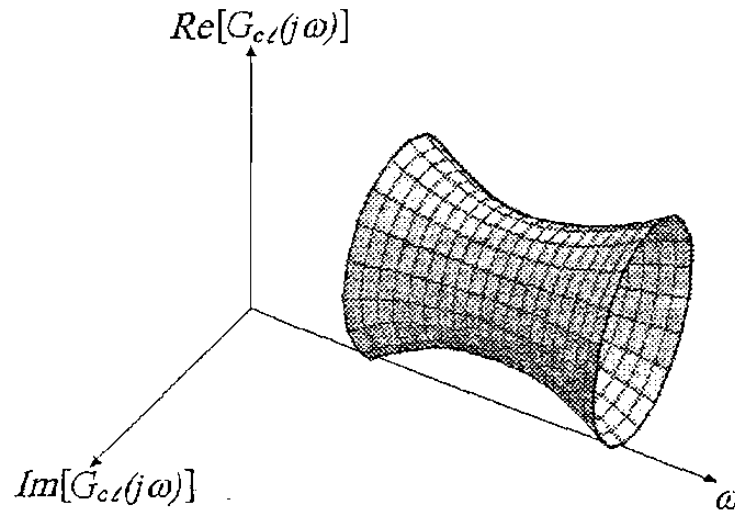


Fig. 3.2. Región tubular formada por un disco.

$$Z_\omega = \{z : |K(j\omega) - z| \leq R(j\omega)\}$$

En muchos casos los requerimientos de desempeño pueden ser representados por una desigualdad de disco en un rango de frecuencia y otras desigualdades de disco en otros rangos de frecuencia. Cuando algunos rangos de frecuencia se traslapan, es posible eslabonar éstas desigualdades de disco juntándolas en una sola, válida para todas las frecuencias, de la forma:

$$|K(j\omega) - G_{c\ell}(j\omega)| \leq R(j\omega) \quad \forall \omega \in [0, \infty] \quad (3.2)$$

Si dos o más desigualdades de disco aplican a la misma frecuencia ω , entonces la región Z_ω es la intersección de los discos que corresponden a la restricción individual. Así en este caso, Z_ω no es un solo disco.

3.3 Medidas de desempeño

En esta sección se presenta un conjunto básico de requerimientos de desempeño en el dominio de la frecuencia.

3.3.1 Margen de ganancia fase

Como se mencionó en el capítulo anterior, el margen de ganancia y margen de fase son las medidas principales con las que se logra estabilidad robusta. Para formular una restricción en términos de la función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(s)$, se usará una medida compuesta de estabilidad que es tan buena como el margen de ganancia y margen de fase tomados juntos. El margen de ganancia fase definido para el sistema de lazo cerrado será:

$$m \triangleq \inf_{\omega} |1 + P(j\omega)C(j\omega)| |P(j\omega)C(j\omega)|. \quad (3.3)$$

Gráficamente m es justo la distancia de la figura de Nyquist de $P(s)C(s)$ al punto -1 en el plano complejo. La ecuación (3.3) también puede ser expresada como:

$$|G_{cl}(j\omega) - 1| \leq \frac{1}{m} \quad \forall \omega. \quad (3.5)$$

Podemos comparar fácilmente el margen de ganancia fase m , con el margen de ganancia g y el margen de fase ϕ observando la curva de Nyquist en la figura 3.3. Distintivamente m es más simple y específico que ϕ ó g .

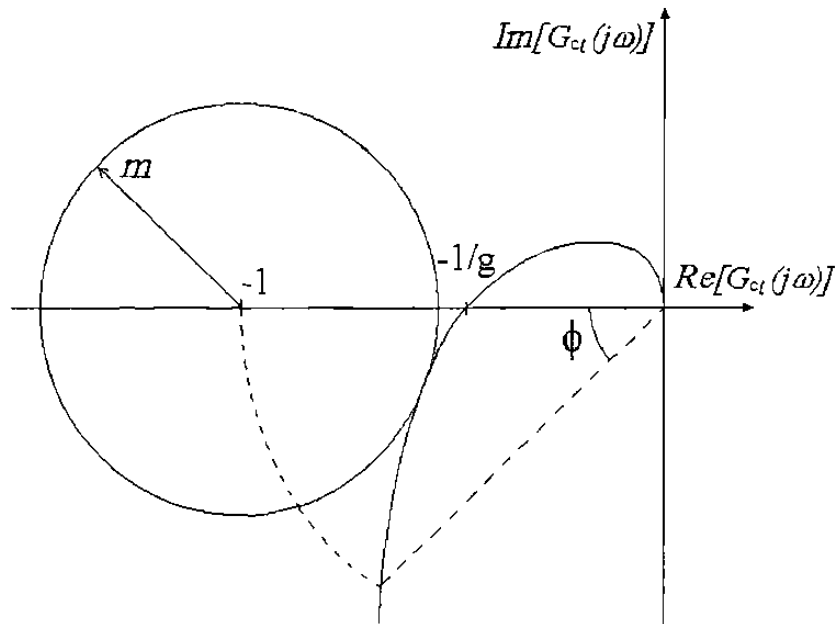


Fig. 3.3. Margen de ganancia fase m .

Dado un sistema estable con m muy cerca de ser 0, se dice entonces que está cerca del caso inestable que es indeseable. Si α_m denota el valor más grande de $1/m$ considerado para ser aceptable en la desigualdad (3.5), se puede formular una restricción en términos de α_m (Fig. 3.5).

$$|1 - G_{cl}(j\omega)| \leq \alpha_m \quad \forall \omega. \quad (3.5)$$

Restricción de margen de ganancia fase

Para una α_m dada en el intervalo (0,1)

$$|1 - G_{cl}(j\omega)| \leq \alpha_m \quad \forall \omega. \quad (3.6)$$

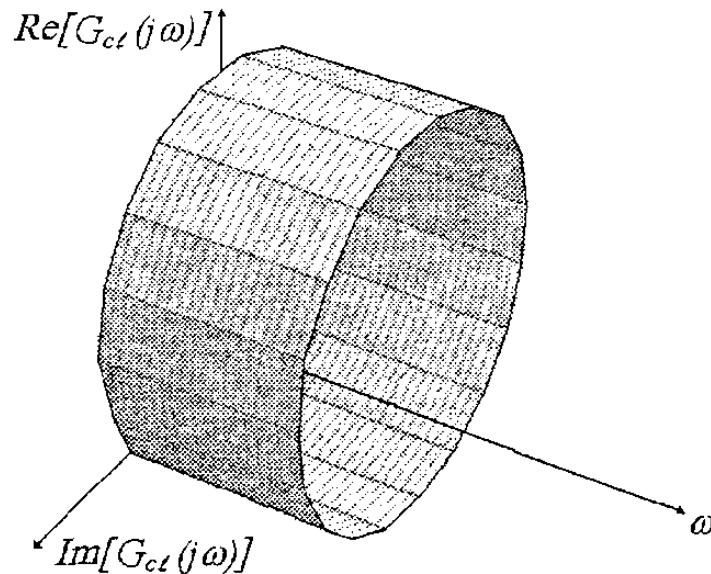


Fig. 3.4. Región definida por la restricción de margen de ganancia fase.

3.3.2 Error en estado estacionario

Fundamentalmente, el error en estado estacionario es un concepto en el dominio del tiempo. El problema es cómo medir la salida $y(t)$ del sistema de lazo cerrado para una entrada $u(t)$. De hecho, se requiere que la función del error sea “pequeña” para la función u , en una amplia clase de posibles entradas.

$$e_{ss}(t) = u(t) - y_u(t) \quad (3.7)$$

Al usar técnicas en el dominio de la frecuencia, se debe trasladar el criterio del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

Considerar el sistema de lazo cerrado con una entrada dada en el dominio del tiempo $u(t)$ salida $y(t)$, $U(s)$ y $Y(s)$ son la Transformada de Laplace de $u(t)$ y $y(t)$. Por lo tanto $Y(s) = G_{cl}(s)U(s)$ y la Transformada de Laplace de e_{ss} es:

$$E_{ss}(s) = (1 - G_{cl}(s))U(s). \quad (3.8)$$

Para $G_{cl} \in \mathcal{RH}_\infty$, una condición que genera un pequeño e_{ss} comparando con el tamaño de u se da cuando α_{tr} es pequeña. El correcto estado estacionario se genera cuando (3.9) se cumple.

$$\sup_{\omega} |1 - G_{cl}(j\omega)| < \alpha_{tr} \quad (3.9)$$

Entonces (3.10) se vuelve muy difícil de obtener en un problema práctico cuando la función $G_{cl}(s)$ decae a frecuencias altas. Lo ideal es requerir que el sistema de seguimiento funcione bien para bajas frecuencias, es decir, se requiere que $G_{cl}(j\omega)$ esté cerca a 1 en algún rango específico de frecuencia $[-\omega_{tr}, \omega_{tr}]$. Está es una de las restricciones claves de control.

Restricción del Error de seguimiento

Para: $\alpha_{tr} > 0$, $\omega_{tr} > 0$

$$|1 - G_{cl}(j\omega)| < \alpha_{tr} \quad (|\Omega| < \omega_{tr}). \quad (3.10)$$

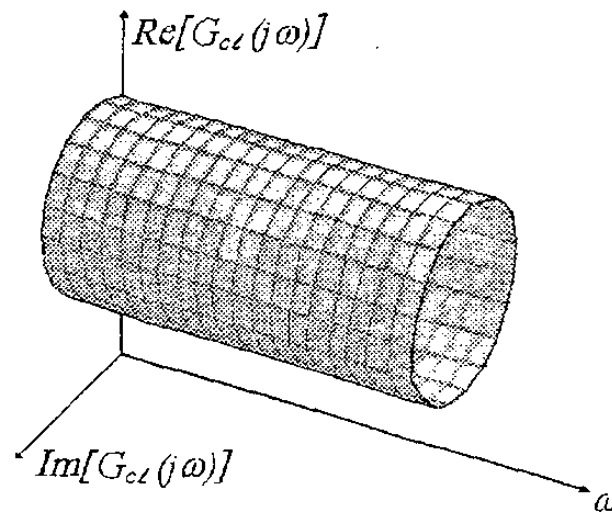


Fig. 3.5. Región definida por la restricción del error de estado estacionario.

3.3.3 Ancho de banda

El ancho de banda de un sistema comúnmente se define como la frecuencia ω_b para la cual $|G_{cl}(j\omega)|$ cae por debajo de un tiempo constante, el valor de baja frecuencia de la entrada. Esta constante normalmente se toma como $\alpha_b = 1/\sqrt{2}$. La frecuencia a la cual la magnitud de la función de transferencia de lazo cerrado decae a un valor de 70.7% de su valor a frecuencia $\omega = 0$. Se requiere un Ancho de banda particular para asegurar que el sistema a frecuencia alta no se perturbe por ruido de medición, incertidumbre del diseño, flaqueza del actuador, etc.

Por lo tanto se requiere un ancho de banda adecuado para que el sistema de control responda adecuadamente a las perturbaciones presentes y por otro lado que también no sea afectada por el ruido de medición.

Restricción de Ancho de banda

Dadas: $\alpha_b > 0$, $\omega_b > 0$

$$|G_{cl}(j\omega)| < \alpha_b \quad \text{para} \quad |\omega| > \omega_b. \quad (3.11)$$

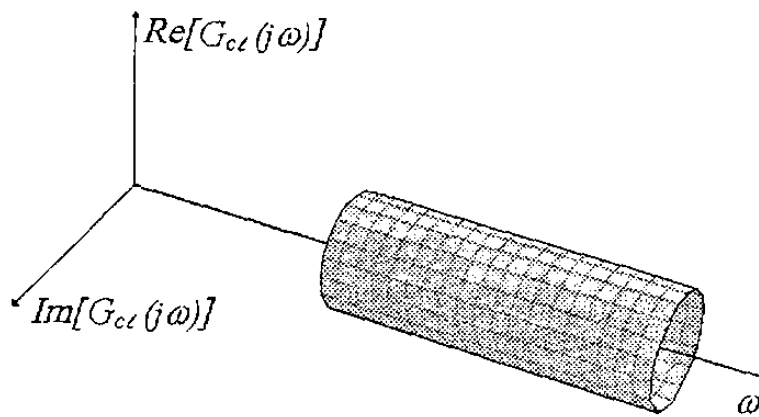


Fig. 3.6. Región definida por la restricción del Ancho de banda.

En la práctica se requiere una restricción más refinada para frecuencias muy altas, ya que es deseable que $G_{cl}(s)$ decaiga a 0.

3.3.4 Decaimiento

La función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(s)$ es una función que generalmente se atenúa a alta frecuencia; es decir, su magnitud decae cuando se incrementa la frecuencia. Si la planta $P(s)$ y el controlador $C(s)$ son estrictamente propios además de que $|P(j\omega)C(j\omega)| \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$.

De la relación:

$$|T(j\omega)| \leq \frac{|P(j\omega)C(j\omega)|}{1 - |P(j\omega)C(j\omega)|} \quad (3.12)$$

$$|T(j\omega)| \approx |P(j\omega)C(j\omega)| \quad |\omega| \text{ muy alta} \quad (3.13)$$

Tenemos que $G_{cl}(s)$ y $P(s)C(s)$ decaen en la misma proporción. Para obtener una desigualdad útil para el proceso de control, debemos eliminar al controlador $C(s)$ del lado derecho de relación (3.13). Para hacer esto, se usa el hecho de que el controlador decae a frecuencia alta de forma asintótica.

$$C(j\omega) \leq \frac{\alpha_r}{|\omega|^n} \quad (3.14)$$

para algún valor de α_r y n . Para establecer la salida del diseño, se debe especificar α_r y n para la clase de controlador que será construido. Cuando α_r y n son especificados, se combinan (3.13) y (3.14) para obtener la restricción de decaimiento en lazo cerrado.

Restricción de decaimiento en lazo cerrado

Para $\omega_r > 0$, $\alpha_r \geq 0$ y $n > 0$

$$|G_{cl}(j\omega)| \leq \frac{\alpha_r |P(j\omega)|}{|\omega|^n} \quad |\omega| > \omega_r \quad (3.15)$$

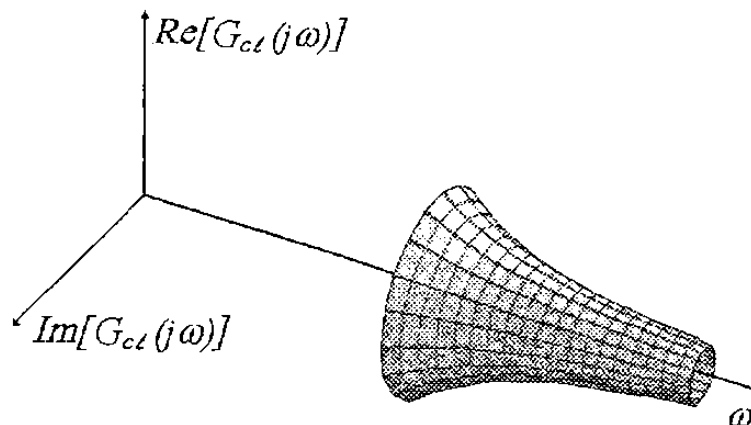


Fig. 3.7. Región definida por la restricción de decaimiento en lazo cerrado

3.3.5 Magnitud de cresta

Una restricción común es la magnitud de lazo cerrado de la función de transferencia $G_{cl}(s)$ que no debe ser demasiado grande; si lo fuera, entonces $G_{cl}(s)$ estará cerca de ser inestable. Además, se ha visto en diseño práctico que la magnitud de cresta de $G_{cl}(s)$ está relacionada a un gran sobrepaso en la función de respuesta escalón. En muchos

casos un valor de la cresta de 1.1 a 1.5 es aceptable, mientras en otros será demasiado alto.

Restricción de magnitud de cresta

Para $\alpha_M > 0$

$$|G_{cl}(j\omega)| \leq \alpha_M \quad \forall \omega. \quad (3.16)$$

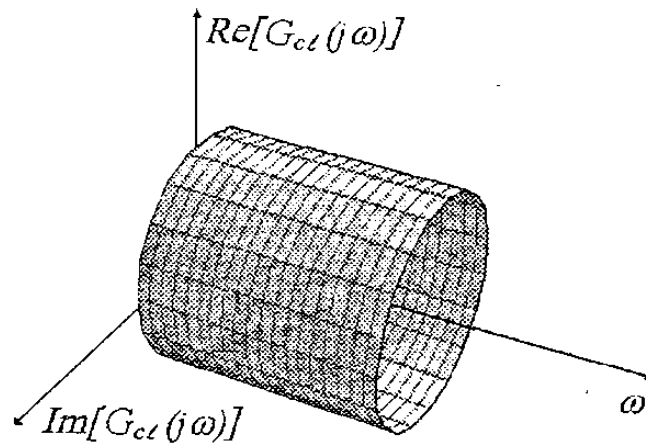


Fig. 3.8. Región definida por la restricción de magnitud de cresta.

3.3.6 Límite del controlador

Desoer y Gustafson proponen un criterio muy sensato para un buen controlador para algunos números α_c prescritos. En términos del sistema de lazo cerrado, se tiene que “el controlador de lazo cerrado” tiene magnitud limitada por α_c . El controlador de lazo cerrado es lo que el controlador da a la salida en respuesta a una entrada al sistema. Ver [Desoer and Gustafson].

$$|C(j\omega)(1 - G_{cl}(j\omega))| \leq \alpha_c \quad \forall \omega. \quad (3.17)$$

La razón de que (3.17) sea impuesta al sistema, es que, si es violada, entonces el sistema de lazo cerrado puede saturarse. La principal preocupación es mantener (3.17) para altas frecuencias; las frecuencias bajas son menos importantes.

Analizando (3.17) en términos de $G_{cl}(s)$. Dado que $P(s)C(s) = G_{cl}(s)/(1 - G_{cl}(s))$ obtenemos:

$$|G_{cl}(j\omega)| \leq \alpha_c |P(j\omega)| \quad \forall \omega. \quad (3.18)$$

Esta restricción no agrega ninguna restricción importante a menos que $|P(j\omega)|$ sea pequeña (cuando $\omega \rightarrow \infty$ o cerca de los ceros de $P(s)$ en el eje de $j\omega$). La desigualdad (3.18) agrega una restricción que está ligada a los ceros cerca de $P(s)$ (incluyendo $\omega = \infty$). El diseñador debe requerir (3.18) para mantener siempre $|\omega - \omega_z| < \eta$, donde $j\omega_z$ es cualquier cero de P en el eje y η es un número positivo pequeño. Note que para ω grande, la desigualdad (3.19) es contenida en la restricción de decaimiento de lazo cerrado (cuando $n = 0$ en (3.15)).

Restricción del límite del controlador

Dados: $\alpha_c > 0$, η_z , para cualquier cero $j\omega_z$ de $P(s)$ en el eje de $j\omega$

$$|G_{cl}(j\omega)| < \alpha_c |P(j\omega)| \quad \text{siempre que } |\omega - \omega_z| < \eta_z. \quad (3.19)$$

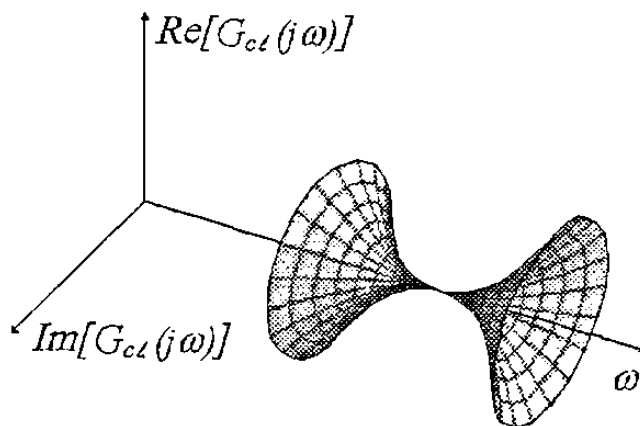


Fig. 3.9. Región definida por la restricción de límite del controlador, si hay un cero de $P(s)$ para $s = j\omega_z$.

3.3.7 Límite de la planta

Otra restricción es la de, la planta en lazo cerrado limitada por un valor específico α_p :

$$|(1 - G_{cl}(j\omega))P(j\omega)| \leq \alpha_p \quad \forall \omega. \quad (3.20)$$

La planta de lazo cerrado es la salida del sistema de lazo cerrado de la figura.3.1 a una entrada para la planta.

La desigualdad (3.20) se analiza en una forma similar a la desigualdad (3.18). La estabilidad interna del sistema implica que $G_{cl}(j\omega) = 1$ cuando $P(j\omega) = \infty$. La desigualdad (3.20) liga los polos cerca de P ; debe mantener siempre $|\omega - \omega_p| < \eta_p$, donde ω_p es cualquier polo de P en el eje de $j\omega$ y η_p es un número positivo pequeño. Con esto se tiene la restricción del límite de la planta, ilustrado en la figura 3.10.

Restricción para el límite de la planta

Para: $\alpha_p > 0$ y $\eta_p > 0$, todos los polos $j\omega_p$ de $P(j\omega)$,

$$|1 - G_{cl}(j\omega)| < \frac{\alpha_p}{|P(j\omega)|} \quad \text{siempre que } |\omega - \omega_p| < \eta_p. \quad (3.21)$$

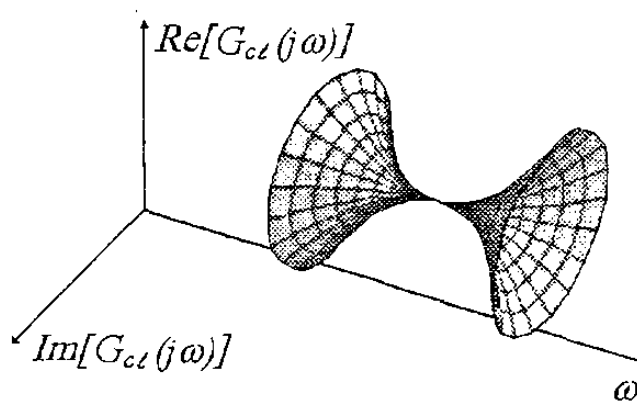


Fig. 3.10. Región definida por la restricción del límite de la planta, si $P(s)$ tiene un polo en $s = j\omega_p$.

3.3.8 Rechazo a perturbaciones

Los sistemas son afectados por perturbaciones, uno de los propósitos de control retroalimentado es minimizar el efecto de estas perturbaciones. Una manera simple de modelar esta situación se muestra en la figura 3.11, donde la perturbación se representa como una entrada sumada al sistema para la salida de la planta.

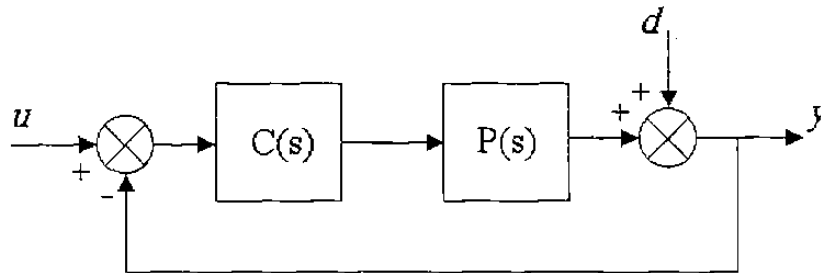


Fig. 3.11. Perturbación en un sistema retroalimentado.

Si no hay ninguna otra entrada al sistema en la figura 3.11, la función de transferencia de perturbación d para la salida de la planta y se puede encontrar mediante.

$$G_{cd}(s)_{d \rightarrow y} = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \quad (3.22)$$

Para el buen comportamiento del sistema retroalimentado es necesario que $G_{cd}(s)_{d \rightarrow y}$ del RHP sea estable. Éste siempre es el caso con sistemas internamente estables. Pero puede requerirse, que haya una restricción en la medida de $G_{cd}(s)_{d \rightarrow y}$. La siguiente desigualdad es una afirmación precisa, donde c es una constante dada:

$$\left| \frac{1}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq c \quad \forall \omega \quad (3.23)$$

3.3.9 Atenuación

La principal atenuación en sistemas de control se da entre la restricción de ancho de banda y las medidas de desempeño como seguimiento o margen de ganancia fase, estas

consideraciones predominan a baja frecuencia. El ancho de banda y decaimiento son restricciones de gran importancia y el error de seguimiento compite con ellos. Un desafío básico en control es conseguir seguimiento en un ancho de banda de frecuencia amplio, causado por las restricciones de decaimiento dadas por la pobreza del actuador, incertidumbre en diseños, sensores y el medio ambiente.

Tabla 3.1. Compromiso entre requerimientos.

Ancho de banda Decaimiento o Atenuación	Error de seguimiento Margen de ganancia fase
Rango de frecuencias $[\omega_a, \omega_b]$	Rango de frecuencias $[\omega_c, \omega_d]$
Rango de frecuencias alto	Rango de frecuencias bajas

En problemas particulares de ingeniería, para obtener una percepción precisa para la atenuación se requiere el uso de un programa de computadora.

3.4 Selección del conjunto de Requerimientos

Cuando se va a diseñar se debe escoger y formular en orden un conjunto de requerimientos de desempeño para después resolver el problema de control. Este conjunto debe seleccionarse con cuidado, dado que una mala selección traerá problemas que no tienen sentido desde el punto de vista numérico o físico.

Dos principios básicos para escoger un buen conjunto de requerimientos de desempeño en el dominio de la frecuencia son:

- Para cada frecuencia ω , debe haber una restricción en el conjunto de requerimientos que este activo para esta frecuencia.
- El comportamiento del sistema a muy alta frecuencia debe especificarse con una restricción de decaimiento en $G_{cl}(s)$.

Hay casos donde las medidas de desempeño son importantes. En particular, si la planta tiene un cero o un polo al lado derecho del eje $j\omega$ o cerca de él, los límites del controlador y la restricción de límite de la planta deben usarse para establecer el problema correctamente. Ver ejemplo [Helton and Merino]

3.5 Separando desigualdades de disco juntas

Las medidas de desempeño introducidas en sección 3.2 pueden expresarse como desigualdades de disco. Se pueden combinar desigualdades de disco en una sola, habilidad necesaria si se quiere resolver problemas de sistemas de control con los métodos propuestos.

Cuando varias desigualdades de disco se reúnen pueden ser expresadas como una desigualdad del disco que es válida para todas las frecuencias.

Para el caso los discos grandes de una restricción que contengan los discos más pequeños de una o más restricciones se formulan en una sola restricción de disco de las restricciones dadas. Así los discos más pequeños definen la región donde $G_{cl}(j\omega)$ debe quedar para frecuencias ω bajas o altas.

CAPÍTULO 4

DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

Este capítulo se enfoca en la solución del problema de diseño, se presenta un método para la sintonización de controladores PID. Se trata el sistema de lazo cerrado básico y funciones principales para el diseño. Se detalla el problema de diseño y se presenta una descripción del método de diseño para sistemas de control usando teoría H_∞ .

4.1 Sintonización de controladores PID

La combinación de las acciones de control proporcional, integral y derivativa se denomina acción PID. Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales.

El controlador comúnmente utilizado en más de la mitad de los procesos industriales hoy en día, es el esquema de control PID o PID modificado. Los controladores PID

analógicos son, principalmente, de tipo hidráulico, neumático, electrónico, eléctrico o sus combinaciones. En la actualidad muchos de estos se transforman en formas digitales mediante el uso de microprocesadores.

La ecuación de un controlador PID se define de la siguiente forma:

$$m(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4.1)$$

donde K_p , K_i , y K_d son la ganancia proporcional, integral y derivativa del controlador PID. Uno de los problemas de mayor interés en un sistema de control automático es la sintonización del controlador de tal forma que satisfaga los requerimientos de desempeño. Un método que propone una estrategia de sintonización de controladores PID es el método de Ziegler y Nichols, el cual será presentado a continuación.

El método sigue el siguiente procedimiento:

a) Se cancelan las acciones integral y derivativa del controlador, de tal forma que se obtenga un controlador puramente proporcional. Manteniendo el controlador conectado al proceso se incrementa la ganancia proporcional hasta que el sistema de control oscile con amplitud constante; es decir que tenga una respuesta semejante a la siguiente:

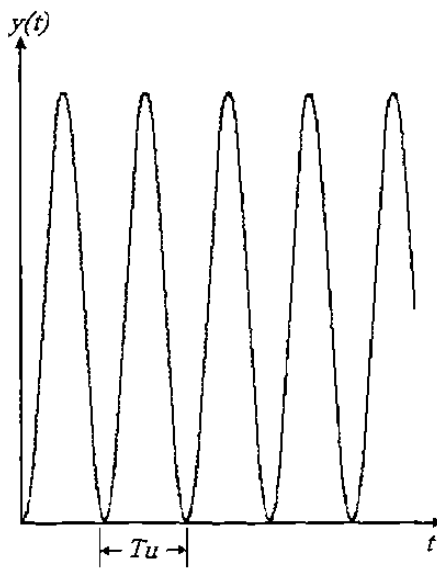


Figura 4.1. Respuesta con amplitud constante.

b) Enseguida se registra la ganancia proporcional a la cual osciló el sistema y se define como la ganancia última, denotada por K_u .

c) De la señal de la salida con oscilaciones sostenidas, se mide el período de la función y se define como el período último, denotado como T_u .

Finalmente, el controlador PID es sintonizado usando las relaciones de la tabla 4.1.

Tabla 4.1. Relaciones para sintonización del controlador PID.

Tipo de Controlador	K_p	τ_i	τ_d
P	$K_u/2$		
PI	$K_u/2.2$	$T_u/1.2$	
PID	$K_u/1.7$	$T_u/2$	$T_u/8$

donde $\tau_i = K_p / K_i$ y $\tau_d = K_p K_d$. Seleccionando los parámetros del controlador de esta forma, se puede obtener una respuesta transitoria con una razón de decaimiento de 1/5.

4.2 Asignación de polos

La presente sección se refiere al método de diseño conocido comúnmente como técnica de asignación de polos. Se supone que todas las variables de estado son medibles y que se pueden retroalimentar. Si el sistema considerado es de estado completamente controlable, los polos del sistema en lazo cerrado se pueden ubicar en cualquier posición deseada mediante una retroalimentación de estado a través de una matriz de ganancias de la retroalimentación de estado.

Seleccionando una matriz de ganancias apropiada para una retroalimentación de estado, es posible obligar al sistema para que tenga los polos en lazo cerrado en las

posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea de estado completamente controlable.

Diseño mediante la ubicación de los polos. En el enfoque convencional del diseño de un sistema de control con una sola entrada y una sola salida, se diseña un controlador tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo δ deseado y una frecuencia natural no amortiguada ω_n . En este enfoque, el orden del sistema aumenta en 1 ó 2, a menos que ocurra una cancelación de polos o ceros. Este enfoque supone que los efectos sobre las respuestas de los polos en lazo cerrado no dominantes son insignificantes.

El enfoque actual de ubicación de polos especifica todos los polos en lazo cerrado. (Sin embargo, hay un costo asociado con ubicar todos los polos en lazo cerrado porque hacerlo requiere de mediciones exitosas de todas las variables de estado, o bien requiere de la inclusión de un observador de estado en el sistema.) También existe un requerimiento en la parte del sistema para que los polos en lazo cerrado se ubiquen en posiciones elegidas en forma arbitraria. El requerimiento es que el sistema sea de estado completamente controlable.

Como se mencionó en el capítulo 2, los polos de la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de control automático determinan en cierta forma la respuesta transitoria del mismo y por lo tanto una buena selección de dichos polos garantiza una respuesta transitoria aceptable.

Se aborda el problema de asignación de polos para sistemas de control descritos en su forma entrada salida mediante funciones de transferencia que tienen la configuración presentada en la figura 4.2

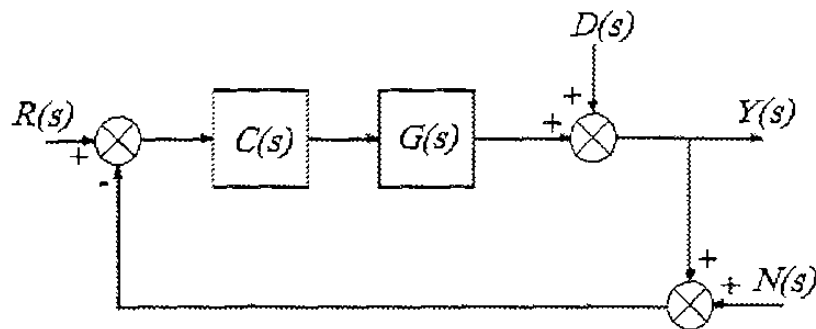


Figura 4.2. Sistema de control con señal de ruido y perturbación externa.

Donde:
$$C(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (4.2)$$

$$G_{o_d}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.3)$$

bajo algunas consideraciones el controlador $C(s)$ puede ser calculado de tal forma que los polos de la función de transferencia del sistema de control en lazo cerrado, coincidan con las raíces de la función $F(s)$ arbitrariamente definida. La forma de calcular el controlador consiste en resolver la siguiente ecuación algebraica:

$$A(s)D(s) + B(s)N(s) = F(s) \quad (4.4)$$

las condiciones para obtener solución única al problema anterior son las siguientes: $\deg(N(s)) < \deg(D(s)) = n$, $\deg(B(s)) < \deg(A(s)) = m$, $\deg(F(s)) > n+m$. El problema también puede ser transformado en resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales.

4.3 Técnica de diseño usando Teoría H_∞

Se considera el sistema de control automático presentado en la figura 4.2. En este sistema de control de lazo cerrado las funciones $P(s)$ y $C(s)$ son funciones racionales, reales, propias y son llamadas la planta y el controlador, respectivamente. Se asume que

la planta no puede modificarse y el controlador tiene varias posibles combinaciones factibles

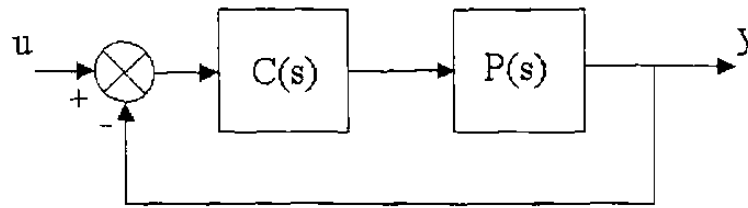


Fig. 4.3. El sistema de lazo cerrado $G_{cl}(s)$.

Además de $P(s)$ y $C(s)$ otras funciones de transferencia asociadas normalmente con el sistema de lazo cerrado, se definen a continuación. De la figura 4.2 se obtienen las ecuaciones:

$$y(s) = P(s)C(s)e(s) \quad (4.5)$$

$$e(s) = u(s) - y(s). \quad (4.6)$$

Combinando las dos ecuaciones (4.5) y (4.6) se obtiene

$$y(s) = P(s)C(s)u(s) - P(s)C(s)y(s). \quad (4.7)$$

Resolviendo para $y(s)$ se obtiene

$$y(s) = (1 + P(s)C(s))^{-1}P(s)C(s)u(s). \quad (4.8)$$

La ecuación (4.8) contiene la función de transferencia de lazo cerrado, definida como:

$$G_{cl}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}. \quad (4.9)$$

4.3.1 Función de transferencia diseñable

Existen diferentes formas de diseñar un sistema de control automático, es aplicada una de ellas, en este trabajo, consiste en encontrar una función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(s)$ que satisfaga los requerimientos de desempeño previamente definidos y

posteriormente basándose en la configuración presentada en la figura 4.2 se calcula el controlador $C(s)$.

Entonces si se requiere calcular $C(s)$, $G_{cl}(s)$ debe tratarse como variable. Si $G_{cl}(s)$ es especificada resolviendo (4.9) se tiene que:

$$C(s) = \frac{G_{cl}(s)}{(1 - G_{cl}(s))P(s)} \quad (4.10)$$

Entonces es posible obtener $C(s)$ y cada función de transferencia asociada al sistema de control de lazo cerrado en términos de $G_{cl}(s)$ y la parte dada $P(s)$. Es decir, para determinar el sistema del lazo cerrado sólo se tiene que escoger un valor particular para $G_{cl}(s)$. En esta situación se hace referencia a $G_{cl}(s)$ como una función de transferencia diseñable.

La función de transferencia diseñable no puede tomar una forma arbitraria. Hay muchas propiedades físicas o matemáticas que el sistema dado debe cumplir. Hay un conjunto de funciones aceptables, las cuales son definidas como I , que la $G_{cl}(s)$ diseñable puede tomar. De hecho, I puede contener funciones que son continuas en el eje imaginario y uniformemente acotadas. Así entonces el conjunto I debe definirse antes que el proceso de diseño empiece. El conjunto I es un subconjunto del conjunto \mathcal{RH}_∞ , el cual se define a continuación.

Definición 2.8.1.1 \mathcal{RH}_∞ es el conjunto de todas aquellas funciones racionales propias con coeficientes reales y estables.

4.3.2 Diseño de sistemas de control

En la solución del problema, el diseñador debe rechazar o aceptar un sistema comparando la característica actual del sistema con un conjunto de necesidades que

describen lo que se espera del sistema. Los dos tipos principales de necesidades que consideraremos son estabilidad interna y desempeño.

El sistema de control de lazo cerrado es *internamente estable* si su función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(s)$ es estable y no hay ninguna cancelación de polos y ceros en el semiplano izquierdo en el producto $P(s)C(s)$.

En objetivos lo más simple posibles, un requerimiento del desempeño en el dominio de la frecuencia, es una desigualdad en términos de la función de transferencia diseñable de lazo cerrado $G_{cl}(s)$.

El problema del diseño se establece como sigue: *Dada una planta $P(s)$, un conjunto de requerimientos de desempeño \mathcal{P} y un conjunto de funciones factibles $I \subset \mathcal{RH}_\infty$, determine si existe $G_{cl}(s) \in I$ que hace que el sistema de lazo cerrado sea internamente estable y satisfaga todos los requerimientos de desempeño \mathcal{P} . Si la respuesta es sí, encontrar $G_{cl}(s)$.*

4.3.3 Método de solución

La solución para el diseño será la siguiente secuencia de pasos:

1. Obtenga una descripción matemática de los requerimientos de desempeño y requerimientos de estabilidad internos.

Requerimientos de desempeño. Cada requerimiento de desempeño es una desigualdad en términos de la función de transferencia diseñable $G_{cl}(s)$.

Requerimientos de estabilidad interna. La función de transferencia diseñable $G_{cl}(s)$ corresponde a sistemas internamente estables, puede ser parametrizada por una fórmula.

2. Obtener una función de desempeño y un índice de desempeño de la función de desempeño.

Combinar las expresiones matemáticas para tener los requerimientos de desempeño y así formar una *función de desempeño* $\Gamma(\omega, G_{cl}(j\omega))$, una función de $G_{cl}(j\omega)$ y ω , que únicamente pueda tomar valores positivos. En muchos casos la función del desempeño se define de modo semejante que una $G_{cl}(j\omega)$ diseñable satisface los requerimientos si y sólo si:

$$\Gamma(\omega, G_{cl}(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega. \quad (4.11)$$

Considerando el desempeño del peor caso para todas las frecuencias, el índice de desempeño depende de la función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(j\omega)$ obtenida:

$$\gamma(T) = \sup_{\omega} \Gamma(\omega, G_{cl}(j\omega)) \quad (4.12)$$

El índice de desempeño es solo un número que da en buena medida una selección de $G_{cl}(j\omega)$. Es decir, es una función del costo: el más pequeño $\gamma(G_{cl}(j\omega))$ será la mejor opción de $G_{cl}(j\omega)$.

3. Minimizar el índice de desempeño para toda $G_{cl}(j\omega)$ que corresponda a un sistema de control de lazo cerrado internamente estable.

Este paso requiere de especial atención para propósito de utilización del programa de optimización por computadora. Al minimizar el índice de desempeño sobre toda posible $G_{cl}(j\omega)$ se producen dos salidas:

- Una respuesta afirmativa o negativa a la pregunta de si existen sistemas de lazo cerrado que reúnan todos los requerimientos.
- Una óptima función de transferencia diseñable $G_{cl}(j\omega)^*$.

La función $G_{cl}(j\omega)^*$ es (entre las funciones de transferencia de lazo cerrado que satisfacen los requerimientos de estabilidad interna) la mejor, en términos de desempeño global como medida por el índice.

Si se determina en el paso 3 que existen soluciones para *Diseñar*, entonces la óptima función de transferencia diseñable $G_{cl}(j\omega)^*$ puede usarse para ejecutar simulaciones, y ser implementadas físicamente, o como será frecuentemente el caso, puede servir como una guía para reiterar el problema con requerimientos de desempeño más exhaustivos. El nuevo problema de diseño se resuelve en consecuencia mediante los pasos 1, 2 y 3.

Si el resultado del paso 3 es que no existe ninguna solución para *Diseñar* nos confrontamos con dos posibles caminos. Uno es redefinir el problema completamente, cambiando las especificaciones radicalmente. El otro es reexaminar los requerimientos para determinar cuáles de ellos pueden cambiarse. En este caso, el problema se formula con el nuevo conjunto de requerimientos y se resuelve mediante los pasos 1, 2 y 3.

Subsecuentemente en práctica es común repetir los pasos 1, 2 y 3 varias veces de la manera descrita anteriormente, se agrega otro paso a esta lista. Con este paso 4 se puede tratar una secuencia de problemas de diseño.

4. Si existen muchos sistemas de lazo cerrado satisfactorios o no existe ninguno, estréchense u hólgen las especificaciones acordemente e ir al paso 1 detenga este proceso si no se logran resultados satisfactorios.

Mathematica se usa para producir $G_{cl}(j\omega)^*$ y $C(s)^*$ asociados, vía ecuación (4.10), dado por un conjunto de valores en el eje $j\omega$. En la mayoría se requerirá representar $C(s)^*$ como función racional. En otros, que esta función racional sea de bajo orden.

Nota: Al diseñar el sistema, puede desearse obtener un controlador que sea estable. En este momento, la teoría y métodos de optimización computacional de H_∞ no manejan estabilidad de controladores. El controlador óptimo $C(s)^*$ no es necesariamente estable.

CAPÍTULO 5

DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL DE NIVEL CON TRES TANQUES

En este capítulo se presenta la aportación principal de este trabajo de investigación, la obtención de un controlador óptimo, aplicando la teoría vista en los capítulos anteriores. Se presenta en un inicio el sistema de control de nivel de tres tanques conectados en serie. El sistema es modelado detalladamente hasta obtener la función de transferencia mínima que es usada como planta en el problema de diseño. Las técnicas de diseño basadas en la teoría H_∞ son aplicadas al sistema de control de nivel. Finalmente se presentan los resultados de la simulación, donde se observan grandes ventajas del controlador obtenido en comparación con un controlador PID.

5.1 Aplicación práctica

El proceso mostrado es un sistema de control de nivel (formado por 3 tanques en serie) no interactivo de tercer orden ya que no hay completa interacción entre las

variables pues el nivel del segundo tanque no afecta el nivel del primer tanque tal como se muestra en la figura 5.1.

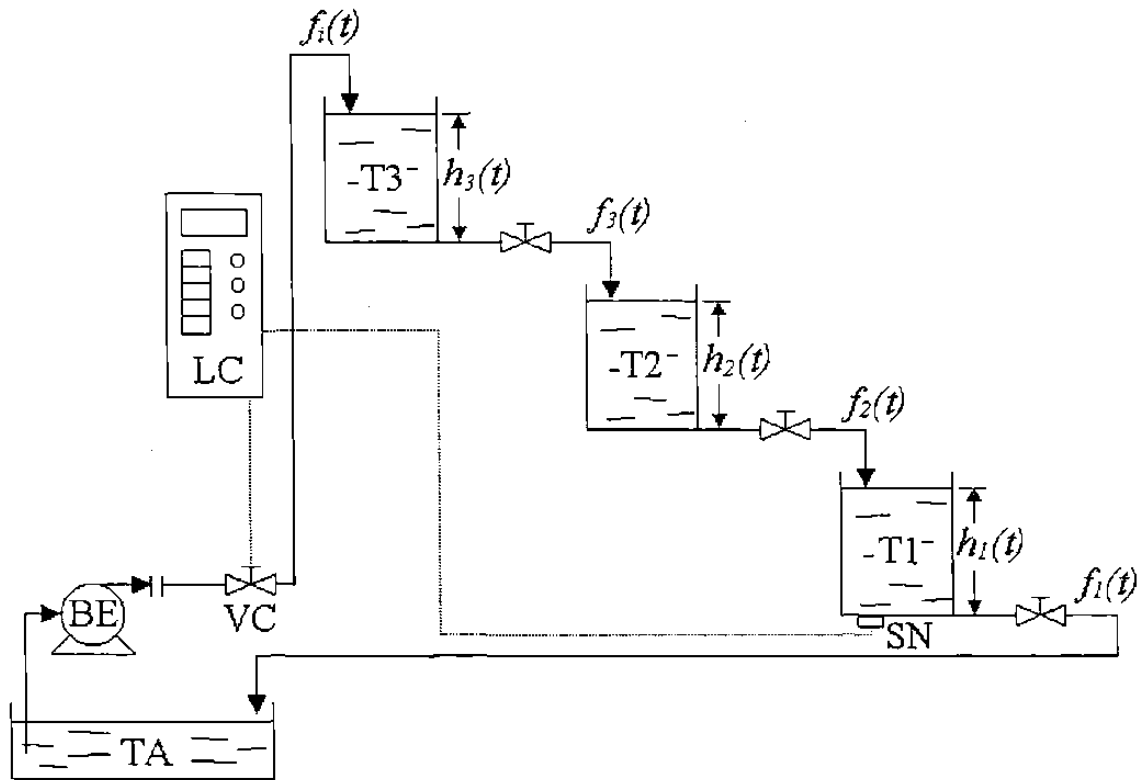


Fig. 5.1. Sistema de control de nivel dinámico de tercer orden no interactivo.

El sistema está compuesto de un tanque de almacenamiento de agua TA el cual suministra líquido al sistema mediante una bomba eléctrica BE. El líquido pasa a través de una válvula de control VC a un primer tanque T3, la salida del tanque T3 desemboca en un segundo tanque T2, al igual que el anterior la salida de T2 desemboca en un tercer tanque T1, este último desfoga en el tanque de almacenamiento antes mencionado. Un sensor de nivel SN está conectado al Tanque T1, cuya señal va al controlador LC para regular la obturación de la válvula VC.

La meta fundamental en este problema es controlar el nivel en el último tanque sin que el líquido se desborde, ésta es una aplicación típica de un sistema no interactivo.

Para determinar el modelo de la planta se comienza por determinar las funciones de transferencia que relacionan los niveles de los tres tanques y el flujo de la bomba, en el sistema todos los tanques están abiertos a la atmósfera y el proceso es isotérmico. Los tanques miden cada uno 15.5 cm de diámetro y su altura es de 23 cm. La apertura de las válvulas permanece constante y el flujo del líquido a través de las válvulas está dado por la siguiente ecuación no lineal.

$$f(t) = C'v \sqrt{h(t)} \quad (5.1)$$

Donde:

$C'v$ = coeficiente de la válvula

5.2 Modelando el sistema

Las siguientes ecuaciones conforman el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del proceso.

Haciendo un balance de masa en estado transitorio para los tanques; la fórmula general para el balance de masa está dada por:

$$\text{Masa de entrada} = \text{Masa de salida} + \text{Masa acumulada} \quad (5.2)$$

La masa acumulada del tanque está dada por:

$$m(t) = \rho A h(t) \quad (5.3)$$

• Tanque 3

$$\rho f_1(t) - \rho f_3(t) = \rho A_3(t) \frac{dh_3(t)}{dt} \quad (5.4)$$

• Tanque 2

$$\rho f_3(t) - \rho f_2(t) = \rho A_2(t) \frac{dh_2(t)}{dt} \quad (5.5)$$

• Tanque 1

$$\rho f_2(t) - \rho f_1(t) = \rho A_1(t) \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (5.6)$$

Para el caso en estado estacionario, se tiene:

- Tanque 3

$$\rho \bar{f}_1 - \rho \bar{f}_3 = 0 \quad (5.7)$$

- Tanque 2

$$\rho \bar{f}_3 - \rho \bar{f}_2 = 0 \quad (5.8)$$

- Tanque 1

$$\rho \bar{f}_2 - \rho \bar{f}_1 = 0 \quad (5.9)$$

De la expresión de la válvula se obtienen las ecuaciones:

- Tanque 3

$$f_3(t) = C'v_3\sqrt{h_3(t)} \quad (5.10)$$

- Tanque 2

$$f_2(t) = C'v_2\sqrt{h_2(t)} \quad (5.11)$$

- Tanque 1

$$f_1(t) = C'v_1\sqrt{h_1(t)} \quad (5.12)$$

5.2.1 Linealización

La técnica de linealización es empleada para aproximar la respuesta de un sistema no lineal con ecuaciones diferenciales lineales, éstas pueden ser analizadas por la transformada de Laplace. La aproximación lineal para las ecuaciones no lineales es válida para una región cerca de algún punto base de operación alrededor del cual se está

haciendo dicha linealización; en este caso, se selecciona el punto base de operación como el estado inicial estacionario y se utilizan variables de desviación.

Aplicando series de Taylor alrededor de un punto base.

$$f[x_1(t), x_2(t), \dots] \cong f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x_1} [x_1(t) - \bar{x}_1] + \frac{\partial f}{\partial x_2} [x_2(t) - \bar{x}_2] + \dots \quad (5.13)$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)}$, y $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$, son los valores bases de cada variable.

La derivada parcial es el cambio con respecto a una variable cuando las otras variables se mantienen constantes. Debido a que las ecuaciones (5.10), (5.11) y (5.12) son ecuaciones no lineales, se linealizan aplicando series de Taylor.

Linealizando $f_1(t)$ ecuación (5.12):

$$f_1(t) \approx \bar{f}_1 + D_1 [h_1(t) - \bar{h}_1] \quad (5.14)$$

Entonces:

$$D_1 = \frac{\partial f_1(t)}{\partial h_1(t)} \Big|_{\bar{h}_1} = \frac{1}{2} C' v_1 (\bar{h}_1)^{-1/2} \quad (5.15)$$

Linealizando $f_2(t)$ ecuación (5.11):

$$f_2(t) \approx \bar{f}_2 + D_2 [h_2(t) - \bar{h}_2] \quad (5.16)$$

Entonces:

$$D_2 = \frac{\partial f_2(t)}{\partial h_2(t)} \Big|_{\bar{h}_2} = \frac{1}{2} C' v_2 (\bar{h}_2)^{-1/2} \quad (5.17)$$

Linealizando $f_3(t)$ ecuación (5.10):

$$f_3(t) \approx \bar{f}_3 + D_3 [h_3(t) - \bar{h}_3] \quad (5.18)$$

Entonces:

$$D_3 = \frac{\partial f_3(t)}{\partial h_3(t)} \Big|_{\bar{h}_3} = \frac{1}{2} C' v_3 (\bar{h}_3)^{-1/2} \quad (5.19)$$

Las ecuaciones (5.4), (5.5), (5.6), (5.14) (5.16) y (5.18) son un conjunto de ecuaciones lineales que describen al proceso alrededor de sus puntos bases de operación utilizándose para su linealización, en este caso h_1 , h_2 y h_3 .

5.2.2 Función de transferencia

• Tanque 3

Sustituyendo (5.18) en (5.4), se obtiene:

$$\rho f_i(t) - \rho \bar{f}_3 - \rho D_3 [h_3(t) - \bar{h}_3] = \rho A_3(t) \frac{dh_3(t)}{dt} \quad (5.20)$$

restando (5.20) de (5.7):

$$\rho f_i(t) - \rho \bar{f}_3 - \rho D_3 [h_3(t) - \bar{h}_3] - \rho \bar{f}_i - \rho \bar{f}_3 = \rho A_3(t) \frac{dh_3(t)}{dt} \quad (5.21)$$

$$F_i(t) - D_3 H_3(t) = A_3(t) \frac{dH_3(t)}{dt} \quad (5.22)$$

dividiendo por D_3 :

$$\tau_3 \frac{dH_3(t)}{dt} + H_3(t) = K_3 F_i(t) \quad (5.23)$$

entonces el modelo (5.23) queda representado por las siguientes variables de desviación:

$$H_3(t) = h_3(t) - \bar{h}_3 \quad (5.24)$$

$$F_i(t) = f_i(t) - \bar{f}_i \quad (5.25)$$

$$\tau_3 = \frac{A_3}{D_3} = \text{seg.} \quad (5.26)$$

$$K_3 = \frac{1}{D_3} = \frac{m}{m^3/s} \quad (5.27)$$

- Tanque 2

Sustituyendo (5.16) en (5.5), se obtiene:

$$\rho f_3(t) - \rho \bar{f}_2 - \rho D_2 [h_2(t) - \bar{h}_2] = \rho A_2(t) \frac{dh_2(t)}{dt} \quad (5.28)$$

restando (5.28) de (5.8):

$$\rho f_3(t) - \rho \bar{f}_2 - \rho D_2 [h_2(t) - \bar{h}_2] - \rho \bar{f}_3 - \rho \bar{f}_2 = \rho A_2(t) \frac{dh_2(t)}{dt} \quad (5.29)$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \bar{f}_3 + D_3 [h_3(t) - \bar{h}_3] \\ f_3(t) - \bar{f}_3 &= D_3 [h_3(t) - \bar{h}_3] \end{aligned} \quad (5.30)$$

la ecuación (5.29) quedará:

$$D_3 H_3(t) - D_2 H_2(t) = A_2(t) \frac{dH_2(t)}{dt} \quad (5.31)$$

dividiendo por D_2 :

$$\tau_2 \frac{dH_2(t)}{dt} + H_2(t) = K_2 H_3(t) \quad (5.32)$$

el modelo (5.32) queda representado por las siguientes variables de desviación:

$$H_2(t) = h_2(t) - \bar{h}_2 \quad (5.33)$$

$$F_3(t) = f_3(t) - \bar{f}_3 \quad (5.34)$$

$$\tau_2 = \frac{A_2}{D_2} = \text{seg.} \quad (5.35)$$

$$K_2 = \frac{D_3}{D_2} = \text{adimensional} \quad (5.36)$$

- Tanque 1

Sustituyendo (5.14) en (5.6), se obtiene:

$$\rho f_2(t) - \rho \bar{f}_1 - \rho D_1 [h_1(t) - \bar{h}_1] = \rho A_1(t) \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (5.37)$$

restando (5.37) de (5.9):

$$\rho f_2(t) - \rho \bar{f}_1 - \rho D_1 [h_1(t) - \bar{h}_1] - \rho \bar{f}_2 - \rho \bar{f}_1 = \rho A_1(t) \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (5.38)$$

se tiene que:

$$f_2(t) = \bar{f}_2 + D_2 [h_2(t) - \bar{h}_2] \quad (5.39)$$

Entonces:

$$f_2(t) - \bar{f}_2 = D_2 [h_2(t) - \bar{h}_2] \quad (5.40)$$

la ecuación (5.38) quedará:

$$D_2 H_2(t) - D_1 H_1(t) = A_1(t) \frac{dH_1(t)}{dt} \quad (5.41)$$

dividiendo por D_1 :

$$\tau_1 \frac{dH_1(t)}{dt} + H_1(t) = K_1 H_2(t) \quad (5.42)$$

el modelo (5.42) queda representado por las siguientes variables de desviación:

$$H_1(t) = h_1(t) - \bar{h}_1 \quad (5.43)$$

$$F_2(t) = f_2(t) - \bar{f}_2 \quad (5.44)$$

$$\tau_1 = \frac{A_1}{D_1} = \text{seg.} \quad (5.45)$$

$$K_1 = \frac{D_2}{D_1} = \text{adimensional} \quad (5.46)$$

Las ecuaciones (5.23), (5.32) y (5.42) relacionan el nivel y los flujos de entrada y salida para cada uno de los 3 tanques. Aplicando la transformada de Laplace para las ecuaciones se tiene que:

- Para la ecuación (5.23)

$$\tau_3 s H_3(s) + H_3(s) = K_3 F_i(s) \quad (5.47)$$

$$H_3(s) [\tau_3 s + 1] = K_3 F_i(s) \quad (5.48)$$

$$H_3(s) = \frac{K_3}{\tau_3 s + 1} F_i(s) \quad (5.49)$$

- Para la ecuación (5.32)

$$\tau_2 s H_2(s) + H_2(s) = K_2 H_3(s) \quad (5.50)$$

$$H_2(s) [\tau_2 s + 1] = K_2 H_3(s) \quad (5.51)$$

$$H_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} H_3(s) \quad (5.52)$$

- Para la ecuación (5.42)

$$\tau_1 s H_1(s) + H_1(s) = K_1 H_2(s) \quad (5.53)$$

$$H_1(s) [\tau_1 s + 1] = K_1 H_2(s) \quad (5.54)$$

$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} H_2(s) \quad (5.55)$$

Sustituyendo (5.55) en (5.52) y éstas a su vez en (5.49) se obtiene la función de transferencia:

$$H_1(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(\tau_3 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_1 s + 1)} F_i(s) \quad (5.56)$$

5.2.3 Determinación de los coeficientes de la función de transferencia

El cálculo de los valores de los coeficientes de la función de transferencia como constantes de tiempo τ_1 , τ_2 y τ_3 ganancias K_1 , K_2 y K_3 , se logran mediante los resultados obtenidos en las prácticas experimentales y la determinación de algunas ecuaciones.

5.2.4 Cálculo de C_v

Una válvula de control actúa como una variable de restricción en procesos de tubería, con el simple hecho de abrir y cerrar; esto cambia la resistencia para el flujo y con esto el flujo mismo también. La señal de salida del controlador posiciona la válvula, determinando la posición de la válvula se determina el grado de restricción de flujo. Por lo tanto, la señal de salida controlada es la entrada para la válvula y el flujo es la salida de la válvula.

Para obtener el coeficiente de la válvula C_v , se procede de manera experimental y la utilización de algunas fórmulas. El valor de C_v depende de la restricción a la salida de cada tanque, para el caso se llenara el tanque a una cierto nivel y sin flujo de entrada se mide el tiempo que tarda en caer el nivel de una altura inicial a un cierto nivel menor.

El modelo de un tanque se muestra en la figura 5.2.

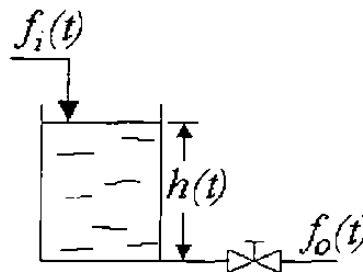


Fig. 5.2. Modelo de un tanque.

Haciendo el balance de masa de la figura 5.2:

$$\frac{1}{A(t)}f_i(t) - \frac{1}{A(t)}f_o(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (5.57)$$

f_o se determina mediante la ecuación (5.1); si $f_i = 0 \therefore$

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{Cv}{A(t)}\sqrt{h(t)} = 0 \quad (5.58)$$

sea $p = \sqrt{h(t)} \therefore h(t) = p^2$, haciendo uso de la regla de la cadena, se obtiene, $h = p \dot{p}$ sustituyendo en la ecuación (5.58):

$$2 p \dot{p} + \frac{Cv}{A(t)} p = 0 \quad (5.59)$$

$$\dot{p} = -\frac{Cv}{2A(t)} t + c \quad (5.60)$$

sustituyendo $h = p^2$:

$$h(t) = \left(-\frac{Cv}{2A(t)} t + c \right)^2 \quad (5.61)$$

Esta última ecuación (5.61), determina como cambia el nivel del tanque (tiende a cero) con una cierta restricción de salida y sin flujo de entrada. El valor de C puede determinarse fácilmente para $t = 0$ en un nivel inicial h_0

$$h_0(t) = \left(-\frac{Cv}{2A(t)} t + C \right)^2 \quad (5.62)$$

Entonces; $C = \sqrt{h_0(t)}$, sustituyendo en la ecuación (5.61):

$$h(t) = \left(-\frac{Cv}{2A(t)} t + \sqrt{h_0(t)} \right)^2 \quad (5.63)$$

Despejando Cv de (5.63) y tomando el tiempo que se llevan vaciarse los recipientes, sea h_f el nivel final y t_f el tiempo de vaciado, se tiene:

$$C_v = \frac{2A(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_f})}{t_f} \quad (5.64)$$

La tabla 5.1 muestra las mediciones obtenidas del sistema real, de un conjunto de pruebas realizadas.

Tabla 5.1 Mediciones experimentales.

	Tanque Numero 1	Tanque Numero 2	Tanque Numero 3
h_0	22.00 cm	25.00 cm	23.00 cm
h_f	2.00 cm	5.00 cm	3.00 cm
t_f	29.00 seg.	16.38 seg.	11.20 seg.

Tabla 5.2 Cálculo de C_v .

C_v	37.31	55.65	90.32
-------	-------	-------	-------

5.2.5 Aproximación para C_v

Las siguientes ecuaciones fijan el comportamiento del nivel cuando se vacía cada uno de los tanques.

- Tanque 1

$$h(t) = \left(-\frac{37.31}{2(165)}t + \sqrt{22} \right)^2 \quad (5.65)$$

- Tanque 2

$$h(t) = \left(-\frac{55.65}{2(165)}t + \sqrt{25} \right)^2 \quad (5.66)$$

- Tanque 3

$$h(t) = \left(-\frac{90.32}{2(165)}t + \sqrt{23} \right)^2 \quad (5.67)$$

Calculando el nivel para cada instante. El cambio de nivel multiplicado por el área de los tanques da un volumen que dividido entre el intervalo de tiempo ofrece un valor promedio del flujo de salida para ese nivel.

- Tanque 1

Tabla 5.3 Flujo promedio.

t (seg.)	h (cm.)	$h/t =$ Flujo promedio (cm^3/seg)
0	22.00	170.80
2	19.93	162.37
5	17.96	153.95
6	16.10	155.50
8	15.33	137.07
10	12.67	128.65
12	11.11	120.21

El valor del flujo dividido por la raíz de h permite obtener $C'v$.

Tabla 5.4 $C'v$ aproximado de la válvula.

h (cm.)	f_o	$C'v = f_o / \sqrt{h}$
22.00	170.80	36.51
19.93	162.37	36.37
17.96	153.95	36.31
16.10	155.50	36.26
15.33	137.07	36.20
12.67	128.65	36.13
11.11	120.21	36.05

Para el tanque 1 $C'v_1$ se aproxima a 36

Se obtienen $C'v_2$ y $C'v_3$ mediante el mismo procedimiento, $C'v_2$ se aproxima a 52, $C'v_3$ se aproxima a 80

Después de varias pruebas y simulación en computadora se proponen los valores de nivel como estado estacionario, $h_3 = 11$ cm, $h_2 = 5$ cm y $h_1 = 2$ cm, para el tanque tres, dos y uno respectivamente. Sustituyendo los valores de los coeficientes de las válvulas y los niveles en estado estacionario en las ecuaciones correspondientes se obtienen las constantes de tiempo y ganancias del sistema:

Para el tanque 3:

$$H_3(s) = \frac{0.073}{13.681s+1} F_i(s) \quad (5.68)$$

Para el tanque 2:

$$H_2(s) = \frac{1.037}{14.190s+1} H_3(s) \quad (5.69)$$

Para el Tanque 1:

$$H_1(s) = \frac{0.913}{12.963s+1} H_2(s) \quad (5.70)$$

La función de transferencia será:

$$H_1(s) = \frac{0.069}{(12.963s+1)(14.190s+1)(13.681s+1)} F_i(s) \quad (5.71)$$

5.3 Planteamiento en teoría H_∞

La planta está dada por la ecuación 5.72

$$P(s) = \frac{(0.913)(1.037)(0.073)}{(12.963s+1)(14.190s+1)(13.681s+1)} \quad (5.72)$$

La planta es estable y se muestra la magnitud de la planta en la figura 5.3:

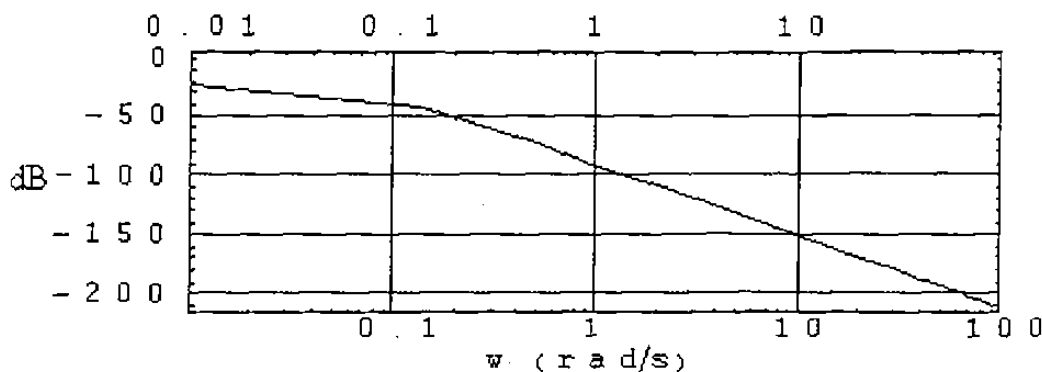


Fig. 5.3. Magnitud de la planta estable.

Con respecto a estabilidad interna, no hay ningún polo o cero en el RHP de la planta $P(s)$. La estabilidad interna del sistema con planta $P(s)$ (y controlador propio) es garantizada simplemente por el requerimiento de la función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(s)$.

5.3.1 Formulación de requerimientos

Se sugiere una función del centro $k(j\omega)$ igual a 1 para bajas frecuencias donde ω puede estar entre 0.5 a 2.5 y después $k(j\omega)$ descienda a 0 cerca de $\omega = 2.5$. Debido al polo de la planta en $s = 0$, la restricción que limita la planta está ligada a bajas frecuencias ($\omega < \omega_p$), el radio es igual $\alpha_p / |p(j\omega)|$, donde $\alpha_p = 0.9$ ($\omega_p \leq 0.3$). Se propone una función de radio con valor 0.7 para la frecuencia de decaimiento $\omega = \omega_r = 4.5$, así se establece el radio para interpolar estos valores linealmente. Para frecuencias más altas, el radio se establece para un múltiplo de la magnitud de la planta, $|P(j\omega)|$.

La restricción de margen de ganancia fase es la única que está ligada al rango medio de frecuencias $0.9 < \omega < 2.5$. El requerimiento de margen de fase se reescribe como una restricción de margen de ganancia fase con $m = 0.32$:

$$|1 - T(j\omega)| < \frac{1}{0.32} = 3.1 \quad \forall \omega \quad (5.73)$$

Los demás requerimientos se obtienen de la teoría vista en el capítulo tres y corridas de otros problemas, ver [Helton and Merino], estos son seguimiento, en la banda $0 \leq \omega \leq 0.9$ con límite 1.3, ancho de banda $0 < \omega < 2.5$, (ver tabla 5.5).

Se debe encontrar un sistema de lazo cerrado que sea internamente estable y que satisfaga los requerimientos de desempeño dados.

La función de desempeño cilíndrica

$$\Gamma(\omega, z) = \frac{1}{R(j\omega)^2} |K(j\omega) - z|^2 \quad (5.74)$$

se forma de los requerimientos de desempeño siguientes:

Tabla 5.5. Requerimientos de desempeño.

Restricción		Banda
Planta	$ T(j\omega) - 1 < \alpha_p$	$0 \leq \omega < \omega_p$
Seguimiento	$ T(j\omega) - 1 < \alpha_t$	$\omega_p \leq \omega < \omega_t$
Ganancia fase	$ T(j\omega) - 1 < \alpha_{gpm}$	$\omega_t \leq \omega < \omega_b$
Ancho de banda	$ T(j\omega) < \alpha_b$	$\omega_b \leq \omega < \omega_r$
Decaimiento	$ T(j\omega) < \alpha_r \quad P(j\omega) $	$\omega_r \leq \omega < \infty$

Teniendo los valores de alfa y ω de la tabla anterior. Se carga el paquete OPTDesign en una sesión de Mathematica, mediante el comando siguiente:

```
<<OPTDesign`
```

Se proporcionan la función de la planta y se introducen directamente la función del centro k_0 y del radio r_0 como funciones escalón, esto en Mathematica se hace usando el comando Which[], esta es la lista de datos de entrada para correr en computadora.

```
p[s_] = (0.913) (1.037) (0.073)/((12.963s + 1) (15.190s + 1)
(13.681s + 1));
pinv[s_] = 1/p[s];
```

```
wp = 0.3;   alphap   = 0.9;
wt = 0.9;   alphas   = 1.3;
           alphagpm  = 3.1;
wb = 2.5;   alphab   = 1.1;
wr = 4.5;   alphas   = 0.70/Abs[p[I wr]];
```

```
k0[w_] = Which [Abs[w] <= wb, 1.0, True, 0.0];
```

```
r0[w_] = Which [Abs[w] < wp, alphap,
                Abs[w] < wt, alphas,
                Abs[w] < wb, alphagpm,
                Abs[w] < wr, alphab,
                True , alphas Abs[p [I w] ] ];
```

```
wpts = Grid[Ngrid ->128,GridSpread -> 1.0];
```

La gráfica en 2D de los requerimientos antes y después del proceso de rectificado dan una idea de cuánta distorsión se introduce en el problema al rectificar las funciones. Se debe tener presente que la solución obtenida mediante OPTDesign será la óptima con respecto al rectificado que se desarrolla.

La gráfica se produce mediante el comando siguiente, figura 5.4.

```
EnvelopePlot[Radius ->r0,Center -> k0,FrequencyBand -> {0,wr+1}
(* ,GridPoints -> wpts *) ];
```

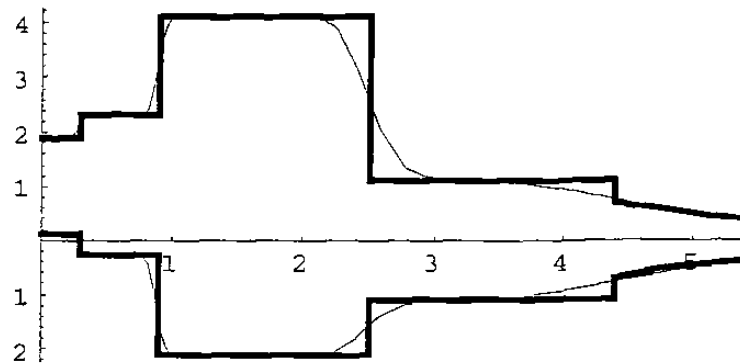


Fig. 5.4. El requerimiento original y el rectificado.

Una gráfica en 3-D de los requerimientos (Fig. 5.5) se produce con:

```
EnvelopePlot3D[Radius ->r0,Center -> k0,FrequencyBand -> {0,wr+1}
(* ,GridPoints -> wpts *)];
```

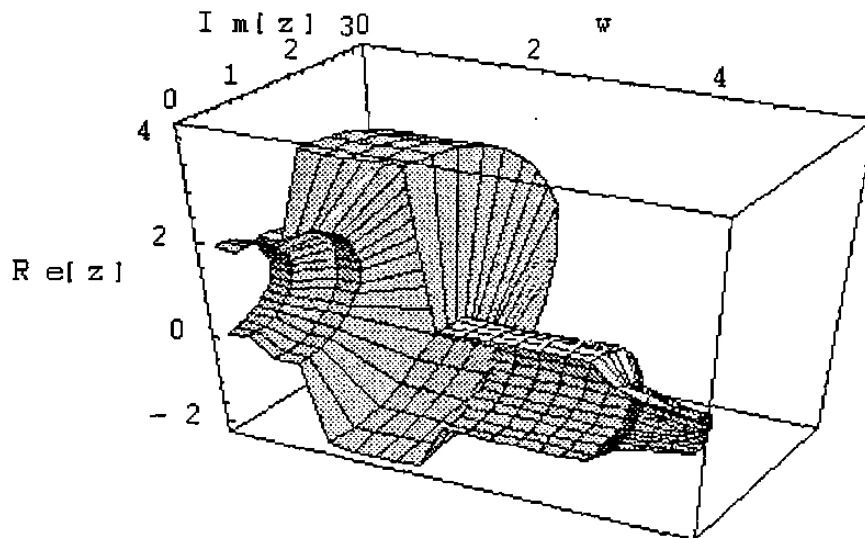


Fig. 5.5. Gráfica 3-D de los requerimientos.

La gráfica del perfil discreto de los requerimientos se usa para juzgar si hay una buena rejilla de puntos en la frecuencia de banda de interés (Fig. 5.6). En el ejemplo la mayoría de la rejilla de puntos está en la banda $0.1 < w < 10.0$ que están donde el centro y funciones de radio tienen sus rasgos distintivos.


```
EnvelopeLogPlot[Radius ->r0,Center -> k0,FrequencyBand -> {0,wr+1},
  Discrete -> True];
```

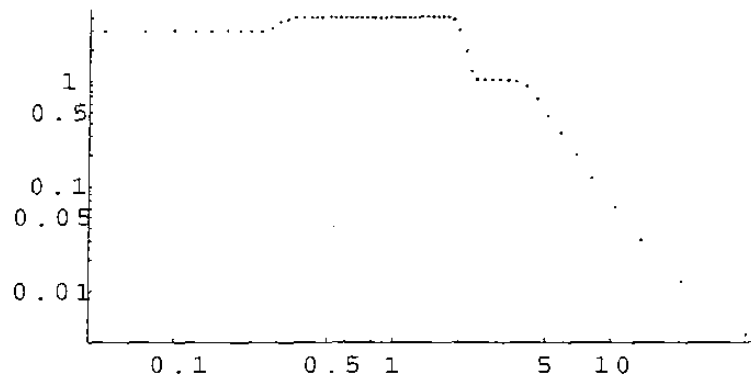


Fig. 5.6. Gráfica del perfil discreto del paquete de requerimientos.

Las gráficas de las figuras 5.4, 5.5 y 5.6 pueden modificarse variando los parámetros de entrada del problema para obtener gráficas más satisfactorias.

5.4 Optimización en OPTDesign

Se procede ahora a correr OPTDesign con los datos dados para la planta P se especifican los discos con radio r_0 y centro k_0 mediante el comando:

```
OPTDesign[p,Radius->r0,Center->k0 (* GridPoints -> wpts *)];
```

Al ejecutar el comando se genera una serie de diagnósticos de optimalidad, algunos de los más importantes son:

- El parámetro γ^* (versión de rectificado) dice que el problema de tipo de disco tiene o no solución. Si γ^* es más pequeña que 1, entonces el problema tiene solución; si γ^* es mucho menor que 1, entonces las restricciones pueden estrecharse. Pero si $\gamma^* > 1$, entonces el problema del diseño no tiene solución y las restricciones deben holgarse para obtener un problema que tenga solución.

- La óptima función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(s)$.

Los diagnósticos e informes de progreso se imprimen rutinariamente en la pantalla según el programa OPTDesign las corre:

```

Parametrization for internal stability:
Gcl = A + B * Gcl1, where Gcl1 is RHP stable and
      1
A [s] = -----
      3
      (2. + s)

      1
B [s] = -----
      2
      (2. + s)
Processing performance function...
Sampling radius and Center...
Smoothing radius and Center...
Optimization routine Anopt now number-crunching...

It: Current value      : Step  :Optimalidad Tests : Error : Sm.  : Grid
   : gammastar         :      : flat  grAlign    : ned   :      :
-----
0  :9.8382002655508E-01: N/A   :10.E-01: 0 E+00   : N/A   : NON  : 128
1  :1.1150300330358E-01:3.3E+01:3.5E-03: 0 E+00   :4.5E-03: NON  : 128

Summary
-----
gammastar = 1.069030033035835E-01
flat      = 3.5353516132E-03
grAlign   = 0                E+00
ned       = 5.52E-03

Calculating output functions ...
Resetting options ...
Done!

```

Se puede observar que el parámetro del rendimiento γ^* (gammastar*) es menor que 1. La columna *ned* de la pantalla da el error numérico de ruido. *Flat* y *GrAlign* son diagnósticos. Si están cercanos a 0, la solución calculada es casi óptima.

Concluyendo, para el problema de diseño planteado si hay soluciones y la exactitud de cómputo es buena. Además, si γ^* es mucho más pequeña que 1, podemos restringir aun más los requerimientos de desempeño y aun así conseguir una buena solución.

5.5 Creando el controlador *Cont2*

El siguiente paso es generar a un controlador racional. Esto se hace mediante las rutinas de computadora, obteniendo una expresión racional para la función de transferencia de lazo cerrado, haciendo una aproximación racional para obtener el controlador, las rutinas no son 100% confiables mas el grado de aproximación es alto. Se propone el grado del controlador racional igual a 5 aunque puede ser diferente.

```
Gclrat[s_] = RationalModel [s, DegreeOfDenominator->5]
```

```
Error = 3.7583
```

$$\frac{1}{(2.+s)^3} + \frac{20.6195 + 15.2759s + 2.8126s^2}{(2.+s)^3 (3.20381+0.631527s+0.165767s^2)}$$

Se obtiene el controlador *Cont1* por la fórmula que relaciona este y la función de transferencia de lazo cerrado $G_{cl}(s)$:

$$C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{G_{cl}(s)}{1 - G_{cl}(s)} \quad (5.75)$$

```
Cont1[s_] = CancelZP[ pinv[s] Gclrat[s]/(1-Gclrat[s]), s, s]
```

```
15.5686(1+12.963s)(1+13.681s)(1+15.19s)(23.8233+15.9063 s+ 2.97736s2)
```

```
-----  
1.8071+28.5908 s+25.1507s2+8.96957s3+1.62003 s5+0.165767 s5
```

Pueden aplicarse técnicas de reducción de orden para obtener a un controlador de más bajo orden que puede ser aceptable y características satisfactorias. Por inspección, se localizan los polos y ceros pares de $Cont1(s)$ que estén cerca y se procede a cancelarlos. Por supuesto, esto produce cambios en la respuesta a la frecuencia de $Cont1(s)$, pero se tiene la certeza de que dichos cambios no causan grandes variaciones (puesto que se cancelan pares muy cercanos, esto es justificado parcialmente mas no es una cancelación perfecta). Procediendo con la cancelación se obtiene el controlador $Cont2(s)$.

Las funciones normales de Mathematica no cancelan términos con notación decimal. Para hacer la cancelación se usara una función proporcionada con OPTDesign:

```
Cont2[s_] = Cont1[0] *
           ((1 - s/zeros[[5]]) (1 - s/zeros[[5]]) (1 - s/zeros[[2]]) (1
- s/zeros[[1]]))/
           ((1 - s/poles[[5]]) (1 - s/poles[[3]]) (1 - s/poles[[2]]) (1
- s/poles[[1]]))
```

El siguiente comando expande el numerador y denominador de $Cont2(s)$.

```
{num,den} = {Numerator[Cont2[s]],Denominator[Cont2[s]]};
Expand [num]
Expand [den]

190.753+(5535.55+0.I)s+(50379.8+0.I)s^2+(23833.9+0.I)s^3+(5627.85+0.I)s^5
1+(0.910998+0.I)s+(0.328886-3.56955*10^-18I)s^2+(0.0597155+0.I)s^3(0.00611505+0.I)s^5
```

Ahora se calcula la función de transferencia de lazo cerrado $Gclrat2$ que corresponde al controlador $Cont2$, se muestra la gráfica de la función de transferencia de lazo cerrado $Gclrat2$ en la figura 5.7.

```
stepGclrat2[t_]=chop[Simplify[InverseLaplaceTransform[Gclrat2[s]/s,s,t]
]];
FigStepGclrat2 = Plot[stepGclrat2[t],{t,0,10},PlotRange -> {0,1}];
```

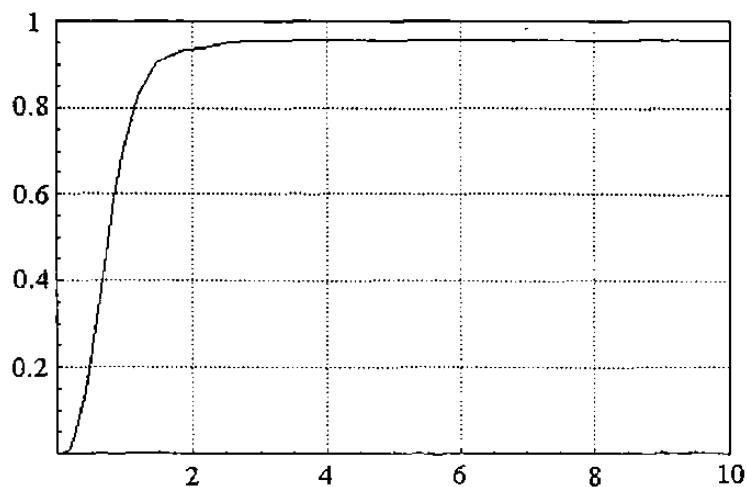


Fig. 5.7. Respuesta de la función de transferencia de lazo cerrado G_{clrat2} .

5.6 Verificando la respuesta

Para verificar que se han reunido los requerimientos de desempeño se trazan simultáneamente la función de transferencia de lazo cerrado y el desempeño. El cuadro en 3-D en la figura 5.8 muestra los requerimientos junto con la gráfica de G_{clrat2} , esta se produce con el comando siguiente.

```
EnvelopePlot3D[Radius -> r0, Center -> k0, FrequencyBand -> {0, wr+1}
(* , GridPoints -> wpts *), ClosedLoop -> T, PlotJoined -> True];
```

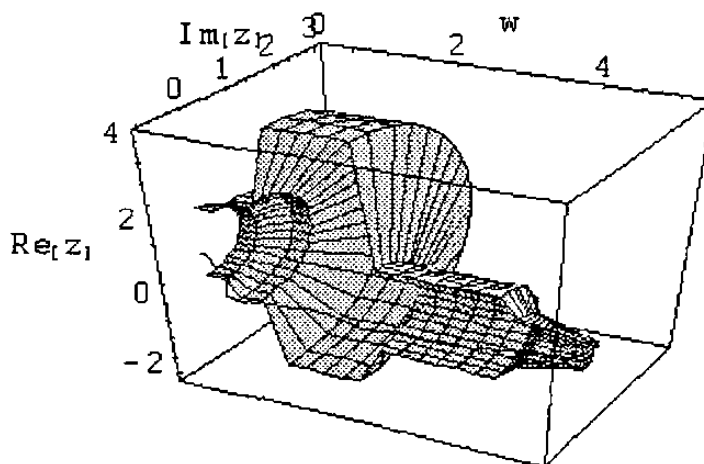


Fig. 5.8. Gráfica 3-D de G_{clrat2} , con los requerimientos envueltos dentro.

5.7 Controlador $Cont2$ en H_∞ contra PID

Aplicando el método descrito en el capítulo 4 para sintonización de controladores, se procede a la sintonización del controlador PID con la planta descrita, la simulación se hace en Matlab, se hace una comparación entre los controladores obtenidos.

5.7.1. Controlador PID

La gráfica de control en lazo cerrado de la figura 5.9 fue creada en el simulink de matlab, para realizar la sintonización del controlador PID.

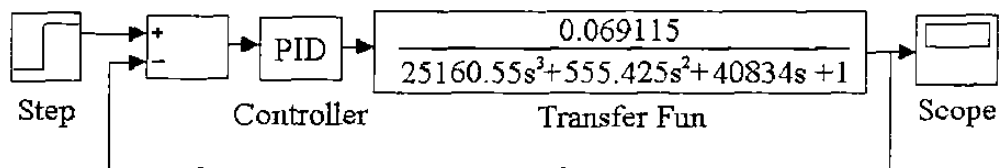


Fig. 5.9. Diagrama a bloques del sistema con controlador PID.

Para sintonizar el controlador PID, se suprimen las acciones integral y derivativa, se incrementa la ganancia proporcional hasta que el sistema oscile, de la grafica se obtienen las ganancias K_p , K_i y K_d . La figura 5.10 muestra la señal de salida del controlador PID ante una entrada escalon unitario.

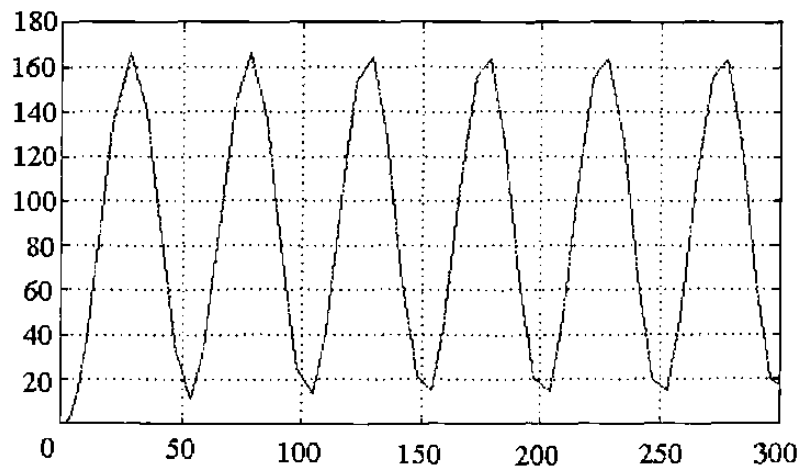


Fig. 5.10. Controlador PID sintonizado.

En la figura 5.11 se muestra la gráfica de la función de transferencia de lazo cerrado que corresponde al controlador PID, ante un escalón unitario.

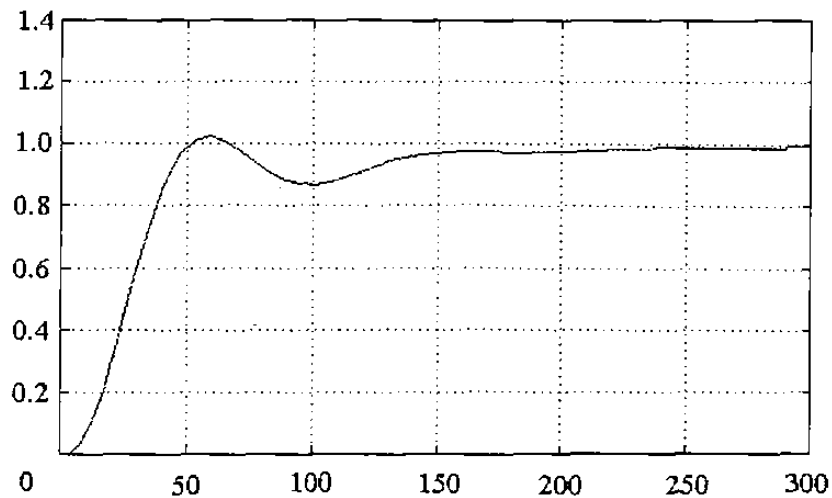


Fig. 5.11. Respuesta de la función de transferencia de lazo cerrado PID.

5.7.2. Comparación entre controladores

La tabla 5.7 muestra la comparación entre las gráficas de las funciones de transferencia en lazo cerrado de los dos controladores obtenidos por los 2 métodos, la gráfica del controlador *Cont2* obtenido mediante H_∞ mostrado de la figura 5.15 y la del controlador PID de la figura 5.11.

Tabla 5.6 Respuesta comparativa entre controladores PID y H_∞ .

	Controlador H_∞	Controlador PID
Tiempo de ascenso (t_a) Desde 0.2 a 0.6	0.4 seg.	15 seg.
Porcentaje de sobrepaso (p_o)	No existe	0.06
Tiempo de pico (t_p)	No existe	59 seg.
Tiempo de estabilización (t_s)	3.5 seg.	240 seg.
Retardo de tiempo (τ)	1 seg.	27 seg.

Conclusiones:

La comparación de tiempos entre controladores es muy discordante, la respuesta de la función de transferencia ante un escalón para el controlador PID registra un pequeño sobrepaso mientras que en el H_∞ ni siquiera existe, por lo tanto no hay un tiempo de pico. El controlador PID se estabiliza en $t = 200\text{seg.}$ aproximadamente y el controlador en H_∞ responde mucho más rápido en $t = 3.5$ segundos ante una entrada escalón unitario, la diferencia es notoria. En la figura 5.15 de la respuesta de la función de transferencia de laso cerrado G_{clrat2} ante un escalón unitario se puede apreciar que la respuesta no alcanza la unidad esto es debido al error en estado estacionario.

El controlador encontrado utilizando los requerimientos de desempeño descritos, mediante el método en teoría H_∞ se presenta como la mejor opción.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se hace una exposición del trabajo realizado aplicando requerimientos de desempeño al problema de diseño de un sistema de control de nivel, mediante la técnica conocida como H_∞ . Se hace un análisis de los resultados obtenidos al aplicar el método de diseño, también se analiza la confrontación con los resultados obtenidos de un controlador PID. Se presentan sugerencias para futuras investigaciones y recomendaciones acerca de algunos otros requerimientos de desempeño, relacionados con teoría H_∞ .

6.1 Introducción

Se presenta esta tesis como un documento para estudiantes de ingeniería que quieren iniciarse en el amplio campo de estudio de la teoría H_∞ , utilizando requerimientos de desempeño en el dominio de la frecuencia.

Se presentan los requerimientos de desempeño en forma sencilla, ya que no son utilizadas técnicas matemáticas a nivel avanzado y la solución de las ecuaciones propuestas en teoría H_∞ se realiza mediante software de computadora. Además la aplicación de métodos clásicos en el dominio de la frecuencia, asocia el método de diseño de sistemas con el control clásico.

Como se planteó al inicio del documento, se aborda el problema de diseño utilizando técnicas basadas en la representación de los sistemas en el dominio de la frecuencia, explicando en forma breve el diseño de sistemas de control usando la técnica H_∞ , definiendo los requerimientos de desempeño expresados en el dominio de la frecuencia utilizando nuevas técnicas y algunos métodos numéricos para la optimización de problemas de una forma simple, estos métodos pueden ser aplicados en forma fácil y rápida en la solución de casos prácticos.

6.2 Conclusiones

El diseño del sistema de control de nivel se finca en las especificaciones de desempeño previamente definidas, las cuales deben satisfacerse una vez que se encuentra el controlador prototipo. Las especificaciones de desempeño de un sistema de control describen la respuesta deseada de un sistema de control.

El buen planteamiento de los requerimientos y las restricciones es fundamental para obtener una solución satisfactoria y una rápida solución.

El problema de diseño del sistema de control de nivel es tratado usando la teoría H_∞ la cual muestra que es una buena herramienta para resolver problemas físicos en forma rápida, formulando el problema de diseño del sistema de control, como un problema de optimización matemático.

El conjunto de requerimientos de desempeño y las reglas específicas, que se aplicaron para convertir el problema de diseño particular en un problema de optimización de control H_∞ , simplifica el problema matemático formulado el cual puede resolverse en forma sencilla mediante una computadora.

El software que es la herramienta para realizar los cálculos de una manera fácil es el OPTDesign, sin este algoritmo para la solución de ecuaciones, la solución del problema no fuera posible, aun el método de diseño tiene sus limitaciones y no siempre se encuentra la mejor solución al usarlo pero si en última instancia la solución obtenida no fuera satisfactoria y se requiriera replantear el problema, la aproximación que se hace reduciría el problema de manera considerable.

En una comparación específica del controlador obtenido, aplicando los requerimientos de desempeño y el método de diseño en H_∞ , frente a un controlador PID, los resultados obtenidos al utilizar el método H_∞ son alentadores, ya que se dan de manera fácil e inmediata y la respuesta del controlador es con mucho la mejor opción, al solucionar el diseño de sistema de control de nivel.

6.3 Recomendaciones

Los requerimientos de desempeño son la herramienta esencial para solucionar el problema de diseño de control de nivel mediante teoría H_∞ .

En la actualidad existen diferentes tipos de requerimientos de desempeño que son utilizados para solucionar problemas de diseño, cada uno de estos es una restricción en un problema de diseño determinado, pero cada caso es peculiar y existen planteamientos diferentes para situaciones diferentes; es posible restringir un determinado sistema tanto como los requerimientos lo permitan, se pueden plantear por lo tanto otras restricciones que no existen todavía como requerimientos de desempeño.

Es posible entonces plantear en futuras investigaciones la posibilidad de presentar otros tipos de requerimientos de desempeño, que sean capaces de hacer más robusto un sistema de control.

En este documento se presentaron algunos de los requerimientos básicos, el caso del requerimiento de estabilidad interna solamente se muestra y es usado en forma inherente en la ecuación de la planta, pero puede utilizarse posteriormente como uno más de los requerimientos de desempeño para la solución en problemas de diseño diferentes, este requerimiento de estabilidad interna es importante ya que asegura la estabilidad de un sistema, aún cuando se induzcan señales de error que harían variar la señal de salida, haciendo el sistema más robusto.

En la aplicación práctica presentada en este trabajo pueden cambiarse los valores dados para entender aún más el método utilizado para la solución de problemas prácticos.

En este documento solo se ha presentado el caso de un sistema monovariante (SISO). En posteriores investigaciones pueden abarcarse los métodos a utilizar para tratar los sistemas multivariante (MIMO).

Bibliografía

- Bosgra, Okko H. Kwakernaak, Huibert **[Bosgra and Kwakernaak]**
Design Methods for Control Systems
Instituto Holandés de Sistemas y Control
Notas del curso de invierno 1999–2000
- Boyd, Stephen P. Barratt, Craig H **[Boyd, Barratt and Craig]**
Linear Controller Design Limits of Performance
Prentice Hall, 1991
- C. A. Desoer and C. L. Gustafson **[Desoer and Gustafson]**
Design of Multivariable Feedback System with Simple Unstable Plant
Berkley ERL, 1982
- Carlos A. Smith Armando B. Corripio **[Smith and Corripio]**
Principles and Practice of automatic process control
John Wiley & Sons Inc. 1997
- Helton, William Merino, Orlando **[Helton and Merino]**
Classical Control Using H^∞ Methods
SIAM, 1998
- Keminzhou, Doyle, J.C. Glover, Keith **[Keminzhou, Doyle and Glover]**
Robust and Optimal Control
Prentice Hall, 1996

Listado de Tablas

3.1	Compromiso entre requerimientos.	38
4.1	Relaciones para sintonización del controlador PID.	42
5.1	Mediciones experimentales.	61
5.2	Cálculo de C_v .	61
5.3	Flujo promedio.	62
5.4	C_v aproximado de la válvula.	62
5.5	Requerimientos de desempeño.	65
5.6	Respuesta comparativa entre controladores PID y H_∞ .	74

Listado de figuras

2.1	Respuesta transitoria.	11
2.2	Región deseada en el plano complejo.	13
2.3	Especificaciones generales.	16
2.4	Especificaciones de respuesta a la frecuencia.	17
2.5	Especificaciones generales en el dominio de la frecuencia.	19
2.6	Margen de Fase y Ganancia.	20
2.7	Sistema de control con señal de ruido y perturbación externa.	22
2.8	Respuesta a la frecuencia de la función de lazo abierto ideal.	23
3.1	El sistema de lazo cerrado $G_{cl}(s)$.	25
3.2	Región tubular formada por un disco.	27
3.3	Margen de ganancia fase m .	28
3.4	Región definida por la restricción de margen de ganancia fase.	29
3.5	Región definida por la restricción del error de estado estacionario.	31
3.6	Región definida por la restricción del Ancho de banda.	32
3.7	Región definida por la restricción de decaimiento en lazo cerrado.	33
3.8	Región definida por la restricción de magnitud de cresta.	34
3.9	Región definida por la restricción de límite de controlador, si hay ceros de $P(s)$ para $s = j\omega_z$.	35
3.10	Región definida por la restricción del límite de la planta, si $P(s)$ tiene un polo en $s = j\omega_p$.	36
3.11	Perturbación en un sistema retroalimentado.	37
4.1	Respuesta con amplitud constante.	41
4.2	Sistema de control con señal de ruido y perturbación externa.	44
4.3	El sistema de lazo cerrado $G_{cl}(s)$.	45
5.1	Sistema de control de nivel dinámico de tercer orden no interactivo.	51
5.2	Modelo de un tanque.	59
5.3	Magnitud de la planta estable.	64
5.4	El requerimiento original y el rectificado.	67
5.5	Gráfica 3-D de los requerimientos.	67

	83
5.6 Gráfica del perfil discreto del paquete de requerimientos.	68
5.7 Respuesta de la función de transferencia de lazo cerrado G_{clrat2} .	72
5.8 Gráfica 3-D de G_{clrat2} , con los requerimientos envueltos dentro.	72
5.9 Diagrama a bloques del sistema con controlador PID.	73
5.10 Sistema de lazo cerrado sintonizado.	73
5.11 Respuesta de la función de transferencia de lazo cerrado (PID).	74

Apéndice

Bajando OPTDesign y Anopt

Si se está usando un navegador *web*. Vaya a <http://anopt.ucsd.edu> y siga las direcciones en la página *web*.

Aquellos que prefieran, pueden bajar los paquetes OPTDesign y Anopt a través de ftp anónimo.

Teclee:

```
ftp anopt.ucsd.edu
```

Cuando el sistema remoto pide el accountname, contestar:

```
anonymous
```

Cuando el sistema pide la contraseña, teclee su dirección de email:

```
myadress.edu
```

Después teclear:

```
cd pub/anopt
```

Este es el directorio correcto. Hay dos tipos de archivos, `.tar.gz` (para Unix) y `.zip` (para MSWindows). Escoger el archivo requerido para el tipo de sistema con la última fecha, hay que bajarlo a la computadora y descomprimirlo.

Resumen autobiográfico

Grado a obtener: Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control

Título de la tesis: Requerimientos de Desempeño para Sistemas de Control Lineales: Una Representación en el Dominio de la Frecuencia

Campo: Docencia (especialidad en electrónica y computación)

Lugar de nacimiento: Monterrey, Nuevo León

Fecha de nacimiento: 13 de abril de 1968

Nombre de mis padres: Benjamín Hernández Aguilar y Josefina Rodríguez de Hernández

Estudios: UANL-FIME

Grados obtenidos: Ingeniero en Control y Computación
Ingeniero en electrónica y Comunicaciones (Pasante)

Experiencia: Docente de electrónica (INSUCO)
Docente de electrónica y computación (CONALEP)
Ingeniero en Mantenimiento de equipo de computo (MSC)
Docente de electrónica y computación (UANL-EIAO)

