

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

Dentro de la calidad y la mejora continua va implícita la palabra *filtrado*, como algo que permitirá eliminar lo no deseado y mejorar de esta manera la calidad. Los ruidos, presentes en todos los procesos (químicos, biológicos, mecánicos, etc.) causan disturbios, los cuales afectan al proceso y por lo tanto a los resultados del mismo. En este trabajo se estudia el caso particular de procesos con la presencia de disturbios con la forma de ruidos blancos Gaussianos. El deseo es eliminar o minimizar los disturbios presentes en los procesos. Este aspecto de la calidad es estudiado por la teoría de control para procesos estocásticos y en específico, por la teoría de filtrado. En esta tesis se elaboran algoritmos de filtrado y control óptimo partiendo del método de mínimos cuadrados, el cual ofrece las condiciones mediante las cuales se podrá minimizar el error, para procesos representados por sistemas de ecuaciones polinomiales de grados tres y cuatro, ya que hay algunos procesos técnicos, químicos, que son representados por sistemas de ecuaciones de grados no lineales y no se cuenta con los algoritmos correspondientes.

## 1.2. Antecedentes

Ya que en este trabajo es presentado el control y el controlador para sistemas de Itô-Volterra, se presentarán primero algunos antecedentes al respecto, y posteriormente se tratarán los referentes al filtrado polinomial. Los problemas de filtrado y control óptimos, para sistemas dinámicos con retardos, los cuales representan un caso particular de los sistemas integrales discontinuos, han sido estudiados desde diferentes puntos de vista (ver, por ejemplo, [34],[35],[1]). La aplicación de los sistemas dinámicos con retardos se puede apreciar en conceptos de economía global [40], modelos de mercado [43], sistemas técnicos [32] y otros. El italiano Vito Volterra (1860-1940), en los años 20, elaboró un modelo matemático de la coexistencia entre dos poblaciones ecológicas para analizar las variaciones cíclicas observadas en las poblaciones de tiburones y los peces que les sirven de alimento en el mar Adriático, el cual concluyó con la ecuación integral (la cual puede o no, ser reducida al caso de una ecuación diferencial). En [57] se puede apreciar el caso particular de la integral de Volterra, en el cual se trabajó para obtener los algoritmos de control y filtrado. Esta ecuación, combinada con la integral estocástica de Itô, dió paso a la integral estocástica de Itô-Volterra, la cual es tratada en esta tesis. En 1979, fueron realizados los primeros trabajos sobre existencia y unicidad de la ecuación de Itô-Volterra, por K. It [45]. En 1980, Balakrishnan [4] realizó las primeras aplicaciones de este modelo a la teoría de control óptimo. En 1985, Kleptsina y A. Yu. Veretennikov [51] establecieron el procedimiento para obtener el filtro óptimo del proceso descrito sobre observaciones continuas de una ecuación reducible a una ecuación diferencial en el caso escalar. Un año más tarde, L. E. Shaiket [74] presentó el resultado para el caso vectorial. Finalmente, en [67],[65], se sentaron las bases necesarias para el análisis de filtrado sobre observaciones discretas-continuas. En este trabajo se presenta el control y el controlador óptimos para sistemas de Itô-Volterra con observaciones continuas y discretas en el tiempo. El principio

de dualidad [56] establece la utilización de la estructura de la matriz de ganancia óptima del problema de filtrado dual como la matriz de ganancia en el problema de control, tal como se hizo para sistemas diferenciales estocásticos en [47], [46]. Como un resultado, la ley de control óptima y la matriz de ganancia son obtenidas primero en el caso general en la ecuación de estado de Itô-Volterra, donde la matriz de ganancia satisface la ecuación de Riccati, la cual depende de dos variables de tiempo, como la función matricial de correlación cruzada en el problema dual (ver [26] [27]). También es presentado el caso de la planta dinámica, gobernado por una ecuación diferencial, en el que la función de correlación cruzada coincide con la varianza como puede verse en [25]. En esta situación, la varianza y la matriz de ganancia satisfacen ecuaciones de Riccati, las cuales dependen solo de una variable, el tiempo, similarmente a la varianza en el problema de filtrado para procesos dinámicos sobre observaciones de Itô-Volterra [25], [22].

Las ecuaciones del controlador para sistemas de Itô-Volterra con estado discontinuo sobre observaciones discontinuas son obtenidas usando el procedimiento del filtrado [26],[27], en las cuales, derivando las ecuaciones de filtrado sobre observaciones discontinuas, se conocen las ecuaciones de filtrado sobre observaciones continuas, como un caso particular, y a partir de ellas. son obtenidas en este trabajo las ecuaciones de los algoritmos de control óptimo como un resultado dual del filtro óptimo, para sistemas de Itô-Volterra en el Capítulo 3, con observaciones lineales continuas y discretas en el tiempo.

El inicio de la teoría de filtrado se remonta al año 1949, cuando N. Wiener [77] estudió los problemas de filtrado de sistemas bajo la presencia de ruidos blancos Gaussianos. Wiener utilizó técnicas de interpolación y extrapolación sobre series estacionarias en el tiempo y a este método se le conoce como Filtrado de Wiener. Rudolf Emil Kalman (1930) elaboró en 1958 una aproximación del modelo basado en el problema de filtrado de Wiener, siendo conocido como el Filtro de Kalman [47] . En 1961, R. E. Kalman y R.

S. Bucy [46] presentaron una nueva aplicación a la teoría de filtrado, la cual se conoce como el Filtro de Kalman-Bucy. Los trabajos en [47] y [46] desarrollaron el concepto de filtrado para sistemas lineales en tiempo discreto y en tiempo continuo respectivamente. Posteriormente, la generalización del caso lineal al no lineal, fue hecha por P. Frost y T. Kailath [41] en 1971, utilizando el mismo esquema del filtrado lineal.

La solución general al problema de filtrado óptimo para el estado no lineal y ecuaciones de observación con presencia de disturbios representados por ruidos blancos Gaussianos fue obtenida por Kushner [53] en 1964. La solución que obtuvo Kushner se basa en la densidad condicional de un estado no observable con respecto a las observaciones. Más tarde se obtuvo el filtro finito dimensional no lineal para otros casos, por ejemplo, cuando el vector de estado puede tomar solo un número finito de estados admisibles [78], o si la ecuación de observación es lineal y el término *drift* en la ecuación de estado satisface la ecuación de Riccati  $df/dx + f^2 = x^2$  (ver [29]). La clasificación completa de los casos generales en los cuales existe el algoritmo del filtro óptimo no lineal de dimensión finita es dada en [79].

En 1977 fue planteada la forma abstracta para funciones de densidad de probabilidad condicional que se establece en el Teorema de Correlación de Procesos Gaussianos por R. S. Liptser y A. N. Shiriyayev en [60]. En el artículo [62] de S. K. Mitter (1996) se puede encontrar más información referente a teoría de filtrado.

En 1995, en [67] se elaboraron los algoritmos de filtrado Minimax sobre observaciones continuas y discretas, obteniendo vibraciones de las ecuaciones diferenciales en distribuciones con tiempos discontinuos.

En forma similar fue resuelto el problema de control óptimo o regulador óptimo para el estado de sistemas lineales durante los años 60s. [56], [39]. La función de control óptimo para sistemas no lineales se obtiene usando el principio general de máximo [70] o partiendo de programación dinámica [28] sin embargo, en estos trabajos, no se establece una forma

específica de control óptimo. Hoy en día, tomando en cuenta que el problema de control óptimo en el caso lineal puede ser resuelto mediante la aplicación del principio de dualidad a la solución del problema de filtrado óptimo, en este trabajo se presenta la aplicación de este principio al caso de obtención del control para un sistema polinomial, con entrada de control lineal, usando el filtro óptimo para sistemas polinomiales sobre observaciones lineales. Los resultados obtenidos en virtud del principio de dualidad están basados en los resultados obtenidos por Bellman en 1957 [28], Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, y Mishchenko [70] en 1962, y por Pugachev en 1984 [72] y [71] respectivamente, y pueden ser verificados rigurosamente usando estas referencias. Aplicando el principio de dualidad a un caso polinomial, por medio de la dualidad física se tiene que si el filtro óptimo existe en forma cerrada, el regulador óptimo existe en forma cerrada, y viceversa.

El problema del controlador para una ecuación de estado lineal, no presenta una aplicación muy amplia, ya que, por ejemplo, los procesos químicos son descritos por ecuaciones cuadráticas [64]. El principio de separación para sistemas polinomiales con observaciones lineales y criterio cuadrático es establecido en la misma forma que en el caso lineal [56]. En este trabajo este principio es aplicado a sistemas polinomiales de tercer grado con observaciones lineales y criterio cuadrático a minimizar, para los cuales ya existen el filtro y control óptimos [7].

### 1.3. Motivación

La motivación para la realización de este trabajo radica en la importancia de filtrar señales que contienen ruidos en cualquier proceso y la necesidad de desarrollar algoritmos para la elaboración de filtros y controles óptimos que permitan trabajar con sistemas polinomiales de grados 3 y 4, ya que muchos procesos (principalmente químicos y petroquími-

cos) se representan mediante este tipo de ecuaciones y no se contaba con los algoritmos de filtrado y control correspondientes. Ya que no se contaba con las bases matemáticas necesarias, como son las técnicas de filtrado óptimo para sistemas polinomiales y para sistemas de Itô-Volterra. Además, algunos procesos son representados por medio de las ecuaciones de Itô-Volterra, para las cuales no se contaba con los algoritmos de filtrado y control óptimos y en esta tesis se hace el desarrollo de éstos para el caso de observaciones continuas, y discontinuas (con retardos en el tiempo) y el caso mas simple, las ecuaciones para la planta dinámica.

## **1.4. Aportaciones**

A continuación son presentadas las aportaciones de esta tesis.

### **1.4.1. Control Óptimo en Sistemas de Itô-Volterra**

El contenido de este trabajo es basado en la obtención previa del filtro óptimo para sistemas de Itô-Volterra, presentado en [26], [27], en los cuales es obtenido el filtro óptimo para sistemas de Itô-Volterra, con observaciones continuas y discontinuas. En este trabajo se presenta el control óptimo en sistemas de Itô-Volterra, para observaciones continuas y discontinuas, así como los algoritmos de control óptimo con observaciones continuas y discontinuas, partiendo de las ecuaciones para la planta dinámica (cuando el integrando de la ecuación íntegro-diferencial depende de una sola variable). Los resultados de este capítulo se publicaron en [6], [16].

### 1.4.2. Controlador Óptimo para Sistemas no Observables de Itô-Volterra

Cuando el proceso es no observable, es necesario considerar los algoritmos del filtro [26], [27] y control [6] óptimos ya obtenidos, para elaborar un controlador [8], aplicando el principio de separación para sistemas integrales, el cual es establecido en la misma forma que en las ecuaciones diferenciales dinámicas [56]. Los algoritmos son obtenidos para observaciones continuas y discretas y además se presentan estos casos para las ecuaciones de la planta dinámica (cuando el integrando de la ecuación íntegro-diferencial depende de una sola variable). Los resultados de este capítulo se publicaron en [8], [15].

### 1.4.3. Filtrado Óptimo en Sistemas Polinomiales

Considerando que ya han sido elaborados los algoritmos de filtrado cuando las ecuaciones de estado son lineales, con tiempo continuo y observaciones lineales, por Kalman y Bucy [46], y siendo planteado el caso general de los algoritmos de filtrado por Kushner [53], y considerando la existencia de los algoritmos de filtrado para el caso cuadrático y observaciones lineales, obtenidos por Basin [5], en este trabajo son presentados los algoritmos de filtrado para el caso en el cual las ecuaciones de estado son polinomiales de tercer y cuarto grados, y además es realizada una aplicación donde se muestra la eficacia del filtro polinomial respecto al filtro lineal. Los resultados de este capítulo se publicaron en [7], [13],[14], [18], [21].

#### **1.4.4. Ecuaciones del Filtro para Ecuaciones de Estado Bilineales**

Múltiples procesos (por ejemplo, los de polimerización) son representados mediante ecuaciones de estado bilineales, con observaciones lineales, donde éste es el caso general, (siendo el caso cuadrático un caso particular de éste) y no se contaba con los algoritmos de filtrado correspondientes. En este trabajo son obtenidos los algoritmos de filtrado para el caso de ecuaciones de estado bilineales, con observaciones lineales y se presenta una aplicación a un reactor de polimerización, mostrándose su eficacia respecto al filtro lineal. Los resultados de este capítulo se publicaron en [11], [17], [19], [20].

#### **1.4.5. Control Óptimo en Sistemas Polinomiales**

Una vez obtenidas las ecuaciones de filtrado óptimo para sistemas polinomiales de tercer grado, con observaciones lineales [7], aplicando el principio de dualidad, son obtenidas las ecuaciones del control óptimo para sistemas polinomiales de tercer grado, con observaciones lineales [11], [12]. Se presenta una aplicación a un sistema automotriz [63], representado por un sistema de ecuaciones no lineales y con observaciones lineales, donde se puede apreciar la eficacia del control polinomial óptimo respecto al lineal. Los resultados de este capítulo se publicaron en [7], [11], [12], [18].

#### **1.4.6. Controlador Óptimo en Sistemas Polinomiales**

Cuando el proceso es no observable, es necesario considerar las ecuaciones de los algoritmos de filtrado óptimo, previamente obtenidas [7], el principio de separación para sistemas polinomiales, y reformular el problema para obtener un controlador óptimo para sistemas polinomiales con observaciones lineales y tiempo continuo (ver [9], [10]). Además, se

verifica la eficacia de este controlador polinomial, respecto al controlador lineal, mediante una aplicación al mismo sistema automotriz que se utilizó en el filtro y en el control óptimos. Los resultados de este capítulo fueron sometidos para su publicación en [9],[10].

## 1.5. Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 se presenta una síntesis de la teoría de probabilidad, teoría de análisis funcional, procesos estocásticos, ecuaciones de Itô-Volterra, teoría de filtrado, teoría de control, y teoría de vibrosoluciones, necesarias para dar al lector una idea de los conceptos en los que se fundamentan los resultados obtenidos, así como las referencias en las que se sustenta la base teórica de los mismos. En el Capítulo 3 se presenta la obtención de las ecuaciones de control óptimo para sistemas de Itô-Volterra, con observaciones lineales, para el caso de observaciones continuas y discontinuas, y en la planta dinámica, partiendo de las ecuaciones de filtrado óptimo obtenidas previamente y aplicando el principio de dualidad. Además, se presenta una aplicación de estas ecuaciones de control óptimo al movimiento de un misil con motores jet e impulsivos. En el Capítulo 4 se presenta el caso del controlador óptimo para las ecuaciones de Itô-Volterra, con observaciones lineales, con los casos de observaciones continuas, y discontinuas. Finalmente, se presenta el controlador para la planta dinámica, también con observaciones lineales, continuas y discontinuas y una aplicación al movimiento de un misil con motores jet e impulsivo y velocidad no observable. En el Capítulo 5, tomando como base la existencia de los algoritmos de filtrado óptimo para ecuaciones de estado lineales y cuadráticas, son obtenidos los algoritmos de filtrado para ecuaciones de estado polinomiales de tercer y cuarto grados con observaciones lineales y continuas; además, se presenta una aplicación de estos algoritmos de filtrado óptimo a un sistema automotriz, mostrándose su eficacia respecto a los algoritmos de

# Capítulo 2

## Marco Teórico

El contenido de esta sección fueron tomados de las siguientes referencias bibliográficas: Probabilidad y Estadística [72], [71], Ecuaciones Estocásticas [71], La Teoría de Filtrado Óptimo, [2], [47], [46], [71], Teoría de Control Óptimo [39], [58], [59], [56], y Teoría de Vibrosoluciones [67], [50], [66].

### 2.1. Probabilidad y Estadística

#### 2.1.1. Conceptos Básicos

**Definición** La observación de algún fenómeno bajo algunas condiciones y acciones, la cual es realizada en un período de tiempo, repitiendo un experimento dado, es llamada una *prueba*.

**Definición** Una característica cualitativa de una prueba consiste en registrar si los resultados de un experimento presentan algún efecto o no. Este efecto es llamado *evento*.

**Definición** Una característica cuantitativa de una prueba consiste en determinar los valores de algunas variables obtenidas como un resultado de una prueba. Cada una de

estas variables supone diferentes valores, los cuales son imposibles de predecir. A estas variables se les llama *variables aleatorias*. Los valores específicos que toma una variable aleatoria son llamados *valores simples o realizaciones* de la *variable aleatoria*.

**Definición** La proporción del número de apariciones de un evento respecto al número total de pruebas es llamada la *frecuencia del evento*. Así, si un evento aparece  $m$  veces en  $n$  pruebas, entonces la frecuencia en esta serie de pruebas es igual a  $m/n$ .

**Definición** Dada la estabilidad de la frecuencia de un evento, y suponiendo que a todo evento le es asociado un número, a este número se le llama la *probabilidad* de este evento.

Esto es, el número  $P(A)$  al cual tiende la frecuencia de  $A$ , cuando el número de experimentos tiende a  $\infty$  es la probabilidad del evento  $A$ .

**Definición** Un *evento elemental* es aquel que no contiene sub-eventos, excepto el evento imposible ( $\emptyset$ ) y a sí mismo.

**Definición** El conjunto de todos los posibles resultados de una prueba, es llamado el *espacio muestral* y usualmente es denotado por  $\Omega$ .

**Definición** Sea  $\Omega$  un espacio muestral. Sea  $\Sigma$  un conjunto de subconjuntos de  $\Omega$ .  $\Sigma$  es llamada una  $\sigma$ -álgebra si:

- Para toda  $A_i \in \Sigma$ ,  $A_i^c \in \Sigma$ , donde  $A_i^c = \{x \in \mathbb{R} | x \notin A_i\}$  es el evento complementario al evento  $A_i$ .
- Si  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  es una sucesión contable de elementos de  $\Sigma$ , entonces  $\bigcup A_n \in \Sigma$ .
- $\emptyset \in \Sigma$ .

**Definición** Sea  $\Omega$  un espacio muestral y  $A$  un evento de  $\Sigma$ , la  $\sigma$ -álgebra definida en  $\Omega$ . La función  $P(A)$  es llamada *probabilidad (o medida de probabilidad de  $A$ )* si se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(A) \geq 0$ ;
- $P(\Omega) = 1$ ;
- Si  $A_1, A_2, \dots$  es una sucesión finita o infinita de eventos mutuamente excluyentes  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todas  $i, j$  tales que  $i \neq j$ , entonces:  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

**Definición** Un espacio muestral  $\Omega$  con una álgebra o  $\sigma$ -álgebra dada de conjuntos  $\Sigma$ , y una probabilidad en  $\Sigma$  definida como una medida no negativa  $P(A)$ ,  $A \in \Sigma$ , es llamado un *espacio de probabilidad* y es denotado por  $(\Omega, \Sigma, P)$ . Así, el espacio de probabilidad sirve como un modelo matemático de algún fenómeno aleatorio en la teoría moderna de probabilidad.

**Definición** Al conjunto de eventos, de los cuales es determinada su probabilidad, es llamado  *$\sigma$ -álgebra de eventos* y es denotado por  $\Sigma$ .

**Definición** Un conjunto contable de eventos  $\{A_k\}$  es llamado un *conjunto completo de eventos* si hasta el último de ellos aparece como resultado de una prueba. Es decir, los eventos  $A_1, \dots, A_n, n < \infty$ , forman un conjunto *completo* si  $\bigcup A_k = \Omega$ .

**Definición** Si  $P(B) \neq 0$ ,  $B \in \Sigma$  entonces la *probabilidad condicional* de algún evento  $A \in \Sigma$  relativo al evento  $B$  es determinada por la siguiente fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

El evento  $A$  es *independiente* de  $B$  si  $P(A|B) = P(A)$ , y además:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

### 2.1.2. Variables Aleatorias

**Definición** La  $\sigma$ -álgebra de Borel es definida como la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a los abiertos de un espacio topológico.

**Definición** Una *variable aleatoria*  $X$  es una función real cuyo dominio es  $\Omega$  y el cual es  $\Sigma$  - medible, esto es, para cada número real  $x$ ,  $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \in \Sigma$ .

**Definición** Un *vector aleatorio* es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que, para  $\mathbf{B} \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $X^{-1}(\mathbf{B}) \in \Sigma$  ;

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

donde

$$\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} \in \Sigma, x_i \in \mathbb{R}.$$

**Definición** El valor de una variable aleatoria en algún punto dado  $\omega$  del espacio  $\Omega$  (i.e. el valor que se supone cuando aparece un resultado de la prueba) es llamado una *realización* de esta variable aleatoria.

**Definición** La probabilidad  $P_X$  es llamada la *medida de probabilidad o la distribución de la variable aleatoria*  $X$ , y está dada por:

$$P_X(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A)), A \in \Sigma$$

**Definición** El espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}), P_X)$  es llamado *el espacio de probabilidad de la variable aleatoria*  $X$ .

**Definición** Sea  $P_X$  la medida de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ . La función

$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x]) = P_X((-\infty, x])$  es llamada una *función de distribución de la variable aleatoria*  $X$ .

## Propiedades de la Función de Distribución

- Una función de distribución es una función no decreciente,  $F : [-\infty, \infty] \mapsto [0, 1]$ . (Es considerado el intervalo  $[-\infty, \infty]$  ya que hay variables aleatorias que pueden tomar valores infinitos, y de esta manera quedan representadas.
- $F(-\infty) = 0; F(\infty) = 1$
- $F(x)$  es continua por la derecha, es decir  $F(x) = F(x+)$ .
- La función de distribución de una variable aleatoria discreta con saltos en los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_N$  igual a  $p_1, p_2, \dots, p_N$  respectivamente y es constante en algún intervalo que no contiene alguno de los valores  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , como la probabilidad del evento  $X < x$  no cambia si  $x$  varía en cada intervalo. Entonces, la función de distribución de una variable aleatoria discreta, es representada por una función escalón.
- La función de distribución de una variable aleatoria continua es continua.
- La función de distribución de una variable aleatoria continuo-discreta tiene puntos de discontinuidad  $x_1, x_2, \dots, x_N$  con saltos de longitudes  $p_1, p_2, \dots, p_N$  respectivamente, y es continua y diferenciable en todos los otros puntos del eje numérico y su derivada vale cero.

Diferenciando la fórmula anterior con respecto a  $x$  en el caso de una variable aleatoria continua escalar y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, se obtiene

$$f(x) = F'(x),$$

## Propiedades de la Función de Distribución

- Una función de distribución es una función no decreciente,  $F : [-\infty, \infty] \mapsto [0, 1]$ . (Es considerado el intervalo  $[-\infty, \infty]$  ya que hay variables aleatorias que pueden tomar valores infinitos, y de esta manera quedan representadas.
- $F(-\infty) = 0; F(\infty) = 1$
- $F(x)$  es continua por la derecha, es decir  $F(x) = F(x+)$ .
- La función de distribución de una variable aleatoria discreta con saltos en los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_N$  igual a  $p_1, p_2, \dots, p_N$  respectivamente y es constante en algún intervalo que no contiene alguno de los valores  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , como la probabilidad del evento  $X < x$  no cambia si  $x$  varía en cada intervalo. Entonces, la función de distribución de una variable aleatoria discreta, es representada por una función escalón.
- La función de distribución de una variable aleatoria continua es continua.
- La función de distribución de una variable aleatoria continuo-discreta tiene puntos de discontinuidad  $x_1, x_2, \dots, x_N$  con saltos de longitudes  $p_1, p_2, \dots, p_N$  respectivamente, y es continua y diferenciable en todos los otros puntos del eje numérico y su derivada vale cero.

Diferenciando la fórmula anterior con respecto a  $x$  en el caso de una variable aleatoria continua escalar y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, se obtiene

$$f(x) = F'(x),$$

siempre y cuando  $F(x)$  sea diferenciable en toda  $X$ . Así, la densidad de una variable aleatoria es la derivada Radon-Nikodym [71]  $P_X$  respecto a la medida de Lebesgue [73] de su función de distribución.

**Definición** El límite de la proporción de la probabilidad de la ocurrencia de una variable escalar aleatoria  $X$  en un intervalo  $[x, x + \Delta x)$  con longitud  $\Delta x$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  es llamado *densidad o densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $X$*  en el punto  $x$ .

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x} = F'(x)$$

**Propiedades de la Densidad de Probabilidad**

- $f(x) \geq 0$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- La densidad de  $Y = X + a$  evaluada en  $Y$  está dada por:

$$f(y - a) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < X + a \leq y + \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y - a < X \leq y - a + \Delta y)}{\Delta y}$$

La probabilidad de ocurrencia de una variable aleatoria  $X$  en el dominio  $A$  es determinada por la fórmula

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

si la densidad  $f(x)$  es continua parte por parte y acotada en el dominio  $A$ . La función de distribución de la variable aleatoria  $X$  está dada por  $F(x) = P(X \leq x)$ . Utilizando la densidad,

$$F(x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$$

cuando  $X$  es una variable aleatoria continua escalar.

**Teorema [72]** El *valor esperado* de una función  $\phi(X)$  de la variable aleatoria continua  $X$  con densidad  $f(x)$  está dado por

$$E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx$$

**Definición** La *varianza* de una variable aleatoria escalar es definida como

$$\sigma^2 = E(X - E(X))^2$$

**Definición** La *esperanza condicional* de una función dada  $\varphi(X)$  de una variable o vector aleatorio escalar  $X$ , dado el valor de una variable o vector escalar aleatorio  $Y$ , está dada por:

$$E[\varphi(X)|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x|Y)dx,$$

donde  $f(x|Y)$  es la densidad condicional de la variable aleatoria  $X$ , dada la variable aleatoria  $Y$ .

**Definición** Dado un vector aleatorio  $X$ , el *momento de segundo orden* está dado por  $\Gamma_X = EXX^T$  y la matriz de covarianza es determinada por la fórmula

$$K_X = EX^0X^{0T}$$

donde  $X^0 = X - m_X$  y  $m_X = EX$ . Además

$$\Gamma_X = K_X + m_X m_X^*.$$

Donde el  $*$  indica la transposición de una matriz, cambiando sus elementos complejos por sus conjugados correspondientes. Para dos vectores aleatorios  $X$  y  $Y$ , la matriz del momento de segundo orden  $\Gamma_{XY}$  y la matriz de covarianza cruzada  $K_{XY}$  están dadas por las fórmulas

$$\Gamma_{XY} = EXY^T,$$

$$K_{XY} = EX^0Y^{0T}$$

Y además

$$\Gamma_{XY} = K_{XY} + m_X m_Y^*.$$

**Definición** Para los *momentos centrales e iniciales de órdenes superiores*, la fórmula está dada por

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(X^0)^r, \alpha_r = EX^r, (r = 1, 2, \dots) \\ \alpha_r &= \alpha_{r_1, \dots, r_n} = EX_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}, \\ \mu_r &= \mu_{r_1, \dots, r_n} = E(X_1^0)^{r_1} \dots (X_n^0)^{r_n}, \\ (|r| &= r_1 + \dots + r_n, |r| \in \{1, 2, \dots\}). \end{aligned}$$

**Definición** La *función característica de una variable aleatoria X* está determinada por el valor esperado de la variable aleatoria  $e^{i\lambda^T X}$  y es considerada como una función de la variable real  $\lambda$ . Su fórmula está dada por

$$g(\lambda) = E(e^{i\lambda^T X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T x} f(x) dx.$$

La dimensión de la variable  $\lambda$  coincide con la dimensión de la variable  $X$ .

### Propiedades de la Función Característica

- La función característica es continua y  $|g(\lambda)| \leq 1, g(0) = 1, g(-\lambda) = \overline{g(\lambda)}$ , donde indica el conjugado.
- La función característica es positiva definida, esto es: para algunos valores  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  de una variable  $\lambda$  y algunos números complejos  $\xi_1, \dots, \xi_N$

$$\sum_{p,q=1}^N g(\lambda_p - \lambda_q) \xi_p \bar{\xi}_q \geq 0.$$

- La función característica  $g_2(\mu)$  de una variable aleatoria  $Y = AX + a$  obtenida como el resultado de una transformación de una variable aleatoria  $X$  es expresada en términos de la función característica  $g_1(\lambda)$  de la variable aleatoria  $X$  por

$$g_2(\mu) = e^{i\mu^T a} g_1(A^T \mu)$$

- La función característica de la proyección de un vector aleatorio en algún subespacio  $G$  es igual a la contracción de su función característica en este espacio. Si  $a = 0$  y  $A$  es la matriz proyección en  $G$ , entonces  $A^T = A$ ,  $A\lambda = \lambda$  para algún  $\lambda \in G$  y  $A\lambda = 0$  para algún vector  $\lambda$  ortogonal a  $G$ .
- La función característica  $g(\lambda)$  de la suma de variables aleatorias independientes  $X_1, \dots, X_n$  es igual al producto de sus funciones características  $g_k(\lambda)$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) :

$$g(\lambda) = \prod_{k=1}^n g_k(\lambda).$$

- Si  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes, entonces la función característica correspondiente  $g(\lambda)$ ,  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$  del vector compuesto aleatorio  $X = [X_1^T, \dots, X_n^T]^T$  es igual al producto de las funciones características  $g_k(\lambda_k)$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) de las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  :

$$g(\lambda) = \prod_{k=1}^n g_k(\lambda_k).$$

El inverso también se cumple.

### 2.1.3. Convergencia de Variables Aleatorias

**Definición** La sucesión o red de variables aleatorias  $\{X_r\}$ , con valores en un espacio topológico, es llamada *convergente casi seguramente* (o con probabilidad 1) a la variable

aleatoria  $X$  si la sucesión de las funciones  $\{x_r(\omega)\}$  converge a  $x(\omega)$  casi donde quiera en  $\Omega$  relativamente con la medida  $P$ .

$$P(X_r \rightarrow X) = P(\omega : x_r(\omega) \rightarrow x(\omega)) = 1. \quad (2.1)$$

**Definición** La red de variables aleatorias  $\{X_r\}$  converge en probabilidad a  $X$  si para algún  $\epsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow r_0} P(\|X_r - X\| > \epsilon) = \lim_{r \rightarrow r_0} P(\omega : \|x_r(\omega) - x(\omega)\| > \epsilon) = 0 \quad (2.2)$$

**Definición** Consideremos una red de variables aleatorias  $\{X_r\}$ , con valores en el espacio  $\Omega$ . Se dice que  $X_r$  converge en media cuadrada a la variable aleatoria  $X$ ,  $X_r \xrightarrow{m.s.} X$  si

$$E \|X\|^2, E \|X_r\|^2 < \infty \quad (2.3)$$

y

$$E \|X_r - X\|^2 \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

cuando  $r \rightarrow r_0$ . La convergencia estocástica es la más débil de las tres anteriores:

$$(2.1) \Rightarrow (2.2) \Leftarrow (2.4).$$

#### 2.1.4. Procesos Estocásticos

**Definición** Un proceso estocástico es una red de variables aleatorias,  $\{X_t, t \in T\}$ , definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, donde  $T$  es un conjunto de índices y  $X_t$

es una variable aleatoria para cada  $t$ .  $X_t$  también se denota por  $X(t)$  y los valores que esta variable aleatoria asigna al evento elemental  $\omega$  se denotarán por  $X(t, \omega)$ .

**Definición** Dado el proceso estocástico vectorial  $X(t) = [X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)]$ , se define su *función de densidad multidimensional*  $f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  como la densidad conjunta del vector aleatorio  $X(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$ , la cual toma los valores de  $X_1, \dots, X_n$ , en los tiempos  $t_1, \dots, t_n$ .

Para el proceso estocástico vectorial  $X(t)$  con valores independientes, los valores de las variables  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  son independientes para algún  $t_1, \dots, t_n \in T$  y algún número natural  $n$ . Para la función aleatoria  $X(t)$  con valores independientes para  $n = 1, 2, \dots$  es presentada la siguiente relación

$$f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_1(x_1, t_1) f_1(x_2, t_2) \dots f_1(x_n, t_n)$$

Así, todas las distribuciones multi-dimensionales de una función aleatoria con los valores independientes es determinada únicamente por sus *distribuciones uni-dimensionales*.

**Definición** Dado el proceso estocástico  $X(t)$ ,  $t \in T_1$ , los conjuntos de *funciones características uni-dimensionales*  $g_1(\lambda; t)$  y *multi-dimensionales*  $g_n = g_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n)$ , con los parámetros  $t$  y  $\{t_1, \dots, t_n\}$  son determinados respectivamente por:

$$g_1(\lambda, t) = E(e^{i\lambda^T X(t)}),$$

$$g_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) = E(e^{i\lambda_1^T X(t_1) + \dots + i\lambda_n^T X(t_n)}) (n = 2, 3, \dots)$$

**Definición** Las *funciones del momento de segundo orden* del proceso estocástico  $\{X(t)\}$ ,  $t \in T_1$  (matriz  $\Gamma_X(t_1, t_2)$ ) y la *función de covarianza* (matriz  $K_X(t_1, t_2)$ ) son determinadas por la siguiente fórmula:

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = EX(t_1)X(t_2)^* \tag{2.5}$$

$$K_X(t_1, t_2) = EX^0(t_1)X^0(t_2)^*$$

Además

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + m_X(t_1)m_Y^*(t_2),$$

donde el \* indica la transposición de una matriz, cambiando sus elementos por sus conjugados. El *momento cruzado de segundo orden* (matriz  $\Gamma_{XY}(t_1, t_2)$ ) y la *función de covarianza cruzada* (matriz  $K_{XY}(t_1, t_2)$ ) para dos funciones aleatorias  $X(t), Y(t), t \in T_1$  son determinadas por

$$\begin{aligned}\Gamma_X(t_1, t_2) &= EX(t_1)Y(t_2)^*, \\ K_X(t_1, t_2) &= EX^0(t_1)Y^0(t_2)^*,\end{aligned}\tag{2.6}$$

y además:

$$\Gamma_{XY}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_1, t_2) + m_X(t_1)m_Y^*(t_2).$$

Análogamente, los *momentos superiores para funciones reales, escalares aleatorias*  $X(t), t \in T_1$ , son determinados por las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}\alpha_r(t_1, t_2, \dots, t_r) &= EX(t_1)\dots X(t_r) = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_r f_r(x_1, \dots, x_r; t_1 \dots t_r) dx_1 \dots dx_r \\ \mu_r(t_1, \dots, t_r) &= EX^0(t_1)\dots X^0(t_r) = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)] \dots [x_r - m_r(t_r)] f_r(x_1, \dots, x_r; t_1 \dots t_r) dx_1 \dots dx_r\end{aligned}\tag{2.7}$$

**Definición** El proceso estocástico  $\{X(t)\}$  con esperanza cero y función de covarianza  $K_{XY}$  la cual contiene como un múltiplo la función  $\delta$  de Dirac,

$$\begin{aligned}m_x(t) &= 0, \\ K(t_1, t_2) &= \nu(t_1)\delta(t_1 - t_2)\end{aligned}\tag{2.8}$$

es llamado *ruido blanco*, en sentido amplio.

Tomando en consideración que  $\delta(t_1 - t_2) = 0$  en  $t_1 \neq t_2$  y  $\delta(t_1 - t_2) = 1$  en  $t_1 = t_2$ , el multiplicador  $\nu(t_1)$  puede ser reemplazado por el multiplicador  $\nu(t_2)$  o por el multiplicador simétrico  $\sqrt{\nu(t_1)\nu(t_2)}$ . El multiplicador  $\nu(t)$  de la función  $\delta$  es llamado la intensidad del ruido blanco  $\{X(t)\}$ . La intensidad de un ruido blanco escalar es positiva. La intensidad del ruido blanco vectorial representa una matriz simétrica definida no negativa.

Si la variable

$$\frac{|K_X(t_1, t_2)|}{K_X(t_1, t_1)}$$

para el proceso aleatorio estocástico escalar  $X(t)$  puede suponerse prácticamente igual a cero cuando  $|t_1 - t_2| > \tau_k$  y la variable  $\tau_k$  es suficientemente pequeña, entonces el proceso estocástico  $\{X(t)\}$  puede ser considerado como un ruido blanco no estacionario con intensidad igual a

$$\nu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(t, t + \tau) d\tau$$

### Condiciones para Procesos Independientes y Proceso de Wiener

**Definición** Dos procesos estocásticos  $\{X_t\}, \{Y_t\}, t \in T$  son *independientes* si para todo conjunto de parámetros  $\{t_i\} \in T$ , los vectores aleatorios  $[x_{t_1}, \dots, x_{t_n}]^T, [y_{t_1}, \dots, y_{t_n}]^T$  son independientes.

**Definición** Un proceso  $\{X_t\}, t \in T$  con parámetros continuos tiene *incrementos independientes* si para todo conjunto finito  $\{t_i | t_i < t_{i+1}\} \in T$  los vectores aleatorios  $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

**Definición** El proceso  $\{X_t\}, t \in T$  tiene *incrementos independientes estacionarios* si  $X_{t+h} - X_{\tau+h}$  tiene la misma distribución de  $X_t - X_{\tau}$  para toda  $t > \tau \in T$ .

**Definición** El proceso estocástico  $\{X_t, t \geq 0\}$  es un *proceso de Wiener* o un *proceso de movimiento Browniano* si se cumple lo siguiente:

- $\{X_t, t \geq 0\}$  tiene incrementos independientes estacionarios.
- $\{X_t, t \geq 0\}$  tiene distribución Normal.
- Para toda  $t \geq 0$ ,  $E[X_t] = 0$
- $P(x_0 = 0) = 1$ . y sus realizaciones son continuas con probabilidad 1.

Si  $\{X_t\}$  es una sucesión de variables aleatorias normalmente distribuidas,  $X_t - X_\tau$  también está normalmente distribuida para todos los valores  $t, \tau \geq 0$ . Para encontrar la distribución del proceso de Wiener, hay que encontrar la distribución de  $X_t - X_\tau$ . Dado que  $X_t - X_\tau$  es Gaussiana, su distribución es determinada por su media y su varianza. Por lo tanto, tenemos que  $E(X_t - X_\tau) = 0$ , y ya que el proceso de Wiener tiene incrementos independientes y estacionarios,  $var\{(X_t - X_\tau)\} = \sigma^2(t - \tau)$ ,  $t > \tau$ , donde  $\sigma^2$  es la varianza y es constante. La función de correlación para el proceso de Wiener está dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(t, \tau) &= E(X_t X_\tau) = E\{([X_t - X_\tau] + X_\tau)X_\tau\} & (2.9) \\ &= E\{(X_t - X_\tau)X_\tau\} + E(X_\tau^2) \\ &= 0 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \gamma(t, \tau) &= \sigma^2 \min(t, \tau) & (2.10) \\ &= (\sigma^2)(t), \quad t \leq \tau \\ &= (\sigma^2)(\tau), \quad \tau < t, \end{aligned}$$

para todos valores de  $t, \tau > 0$ . La función  $\min(t, \tau)$  es continua para todos los valores de  $t$  y  $\tau$ , pero  $\frac{\partial^2 \min(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$  no existe en  $(t, t)$ . Pero acerca de la continuidad es posible afirmar

lo siguiente: el proceso de Wiener  $\{X_t\}$  es continuo por media cuadrada, con  $t \in T$ , si y solo si  $\gamma(t, \tau)$  es continua en  $(t, \tau)$ ,  $t = \tau$ . Entonces el proceso de Wiener es continuo por media cuadrada en  $[0, \infty)$ .

**Definición** El proceso estocástico  $\{X_t\}$  es *Integrable por Riemann* en sentido media cuadrada sobre  $[a, b]$  si y solo si  $\gamma(t, \tau)$  es Riemann integrable sobre  $[a, b] \times [a, b]$ . El proceso estocástico  $\{X_t\}$  es Riemann integrable en el sentido de media cuadrada, y es diferenciable en el sentido de media cuadrada, para  $t \in T$  si y solo si  $\frac{\partial^2 \gamma(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$  existe en  $(t, t)$ . Por lo anterior se tiene que el proceso de Wiener no es diferenciable por media cuadrática. Las funciones que cumplen con las condiciones del proceso de Wiener son muy irregulares y diferenciables en ningún punto.

## Proceso Gaussiano

**Definición** Un proceso estocástico  $\{X_t\}$ ,  $t \in T$  es un *proceso Gaussiano o normal* si la ley de probabilidad es normal. Las derivadas e integrales por media cuadrática de procesos Gaussianos son procesos Gaussianos.

El proceso de movimiento Browniano es un proceso normal, ya que dados  $n$  tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , podemos escribir

$$X_{t_k} = (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + (X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}}) + \dots + X_{t_1},$$

para todo  $1 \leq k \leq n$ . Ahora los incrementos en el lado derecho, del movimiento Browniano son independientes y Gaussianos. Por lo tanto las  $X_{t_k}$ s son combinación lineal de variables aleatorias normales.

El movimiento Browniano o proceso de Wiener es un proceso de Markov, dado que

$$\begin{aligned} p(X_{t_n} | X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1}) &= p(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} + X_{t_{n-1}} - X_0 | X_{t_{n-1}} - X_0, \dots, X_{t_1} - X_0) \\ &= p(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} + X_{t_{n-1}} - X_0 | X_{t_{n-1}} - X_0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$= p(X_{t_n}|X_{t_{n-1}})$$

Dado que el proceso de movimiento Browniano es también Gaussiano, es llamado proceso Gauss-Markov. Esto es establecido ya que los incrementos del proceso de Wiener son independientes.

### Ruido Blanco

Un buen modelo del ruido es el ruido blanco.

**Definición** Una sucesión blanca aleatoria  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  es una sucesión de Markov para cada  $p(X_k|X_l) = p(X_k), k > l$ . Una sucesión blanca es completamente aleatoria. Si las variables aleatorias  $X_k$ s son normalmente distribuidos, la sucesión  $\{X_n\}$  es llamada sucesión aleatoria blanca Gaussiana. Podemos decir que el ruido blanco está compuesto por la superposición de un gran número de pequeños, independientes, y aleatorios efectos, y tomando en cuenta el teorema del límite central, es siempre Gaussiano.

Si  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  es una sucesión de vectores aleatorios blancos Gaussianos, la ley de probabilidad es especificada mediante su media  $E(X_n)$  y su matriz de covarianza  $E\{(X_n - E(X_n))(X_m - E(X_m))^T\}, m, n > 1$ .

Y que la sucesión es blanca, entonces:

$$E\{(X_n - E(X_n))(X_m - E(X_m))^T\} = Q_m \delta_{mn} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= 1, n = m \\ &= 0, n \neq m. \end{aligned}$$

Donde  $Q_m$  es una matriz de covarianza semidefinida positiva y  $\delta$  es la función delta de Dirac. Para conocer más propiedades acerca del ruido blanco Gaussiano, consideremos la función de densidad de poder espectral, la cual es definida como la transformada de

o

$$\int_a^b f(t) dW(t)$$

no existe en el sentido usual. Sin embargo, es posible dar un significado a ésta integral.

Una forma de hacer esto es definir la integral como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \left( \frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon} \right) dt,$$

si el límite existe. Al evaluar explícitamente, observemos que

$$\int_a^b f(t) \left( \frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon} \right) dt = \int_a^b f(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} W(s) ds \right) dt.$$

Calculando por partes la integral del lado derecho de la ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) \left( \frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon} \right) dt & (2.16) \\ &= \left[ f(t) \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} W(s) ds \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \left( \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} W(s) ds \right) dt. \end{aligned}$$

Dado que el proceso tiene funciones simples continuas, el lado derecho converge a

$$f(t)W(t)|_a^b - \int_a^b f'(t)W(t)dt,$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Así, definimos

$$\int_a^b f(t) dW(t)$$

como el límite del lado derecho de (2.16), cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , es decir, por la fórmula

$$\int_a^b f(t) dW(t) = f(b)W(b) - f(a)W(a) - \int_a^b f'(t)W(t)dt \quad (2.17)$$

El lado derecho de (2.17) es bien definido y coincide con la fórmula de integración por partes. La derivada del proceso de Wiener es llamada *ruido blanco*. Y no es un proceso estocástico en el sentido usual. Ya que  $dW(t) = W'(t)dt$  es un *funcional* que asigna valores

a la integral que aparece en el lado izquierdo de (2.17). El ruido blanco puede ser usado para definir ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales son usadas en ciencias físicas y especialmente en ciertas áreas de ingeniería. Dado que el proceso de Wiener es Gaussiano, de (2.17) tenemos que

$$\int_a^b f(t)dW(t)$$

se distribuye normalmente. Como es sabido, esta variable aleatoria tiene media cero. Para calcular la varianza, tomemos  $a \leq b$  y  $g$  como otra función continuamente diferenciable en  $[a, b]$ ,

$$E[\int_a^b f(t)dW(t) \int_a^b g(t)dW(t)] = \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t)d(t) \quad (2.18)$$

Si  $f = g$  de (2.18), para  $a \leq b$

$$Var(\int_a^b f(t)dW(t)) = \sigma^2 \int_a^b f^2(t)d(t)$$

### Diferenciación de variables aleatorias

**Definición** La función aleatoria  $X(t)$  es llamada *diferenciable en media cuadrada en  $T_1$*  si esta es diferenciable en media cuadrada para toda  $t \in T_1$ .

**Definición** La *derivada en media cuadrada de  $X(t)$*  esta determinada por

$$\lim_{r \rightarrow 0} E \left\| \frac{X(t+r) - X(t)}{r} - X'(t) \right\|^2 = 0 \quad (2.19)$$

**Teorema [71]** La función escalar aleatoria  $X(t)$  es diferenciable por media cuadrada en  $T_1$  si y solo si existe la derivada finita  $\frac{\partial^2 \Gamma_x(t, t')}{\partial t \partial t'}$  para todos los puntos en la diagonal  $t' = t \in T_1$ .

**Definición**  $L^2(\Omega) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | X \text{ es una variable aleatoria con varianza finita}\}$ .

**Definición** Sea  $V$  un espacio vectorial.  $X$  es un *funcional lineal estocástico* si para cada  $f \in V$ ,  $X(f)$  es una variable aleatoria definida en un espacio muestral  $\Omega$ , tal que  $f \mapsto X(f)(\omega)$  es un funcional lineal para cada  $\omega \in \Omega$ .

**Definición** Una red de variables aleatorias  $\{X_r\}$  *converge débilmente en media cuadrada a un funcional estocástico*  $X$ , si se tiene que  $E|X|^2, E|X_r|^2$  son finitos, y además la red  $\{E|X_r - X|^2\}$  converge a cero.

**Definición** Una red de variables aleatorias  $\{X_r\}$  *converge débilmente* a un funcional lineal  $X$  con dominio en  $L^2(\Omega)$  si para cada  $v f \in L^2(\Omega)$ , se tiene que todo  $E|fX_r|$  es finito y además la red  $\{E(fX_r)\}$  converge a  $X(f)$ .

**Definición** Una red de procesos estocásticos  $\{X_r(t)_{t \geq 0}\}$  *converge débilmente en media cuadrada a un funcional lineal estocástico*  $X$ , si para cada  $f \in L^2(\Omega \times [0, +\infty))$  se tiene que  $X(f) \in L^2(\Omega)$  y además la red

$$\{E|\int_0^\infty f(t)X_r(t)dm(t) - X(f)|^2\}$$

converge a cero.

**Definición** Decimos que  $\frac{W(t+\epsilon)-W(t)}{\epsilon}$  *converge débilmente en media cuadrada al ruido blanco*. Lo anterior significa que el proceso estocástico  $\{(\frac{W(t+\epsilon)-W(t)}{\epsilon})_{t \geq 0}\}_{\epsilon \geq 0}$  converge débilmente en media cuadrada, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , al funcional lineal

$$f = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t)dW(t).$$

**Teorema** [71] Para la existencia de una derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos, de la función aleatoria  $X(t)$  en  $T_1$  es necesaria y suficiente la existencia de la derivada finita  $\frac{\partial^2 \lambda_{\Gamma_x(t, t') \lambda}}{\partial t \partial t'}$  para todos los puntos en la diagonal  $t' = t \in T_1$ , para toda  $\lambda \in \Lambda$  ( $\Lambda$  es un conjunto de funcionales lineales en el espacio lineal). O de otra forma, se necesita la existencia de la derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos,  $m'_x(t) = EX'(t) = m'_x(t)$

y la derivada finita  $\frac{\partial^2 \lambda \Gamma_x(t, t') \lambda}{\partial t \partial t'}$  para todos los puntos en la diagonal  $t' = t \in T_1$ , y para toda  $\lambda \in \Lambda$ . Todo lo anterior es válido si se sustituyen los momentos iniciales  $\Gamma$  por la correspondiente función de covarianza  $K$ .

### Procesos con Incrementos no Correlacionados

**Definición** Un proceso estocástico  $\{X(t)\}$  es llamado *proceso con incrementos no correlacionados* si, para todos los intervalos disjuntos  $[t_1, t_2), [t_3, t_4), \dots, t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4, \dots$ , los incrementos correspondientes  $X_{t_2} - X_{t_1}$ , y  $X_{t_4} - X_{t_3}, \dots$  del proceso  $X(t)$  son no correlacionados.

De la definición resulta que los incrementos de cada proceso o algunos intervalos finitos tienen momentos finitos de segundo orden (y consecuentemente de primer orden). En este caso, el proceso  $X(t)$  mismo puede no tener media ni momento de segundo orden. Pero si en algún instante  $t_0$  el valor del proceso con incrementos no correlacionados  $X(t)$  es igual a cero con probabilidad 1, entonces el proceso  $X(t)$  tiene esperanza finita y momento de segundo orden como el valor  $X_{t_0}$ , que en algún instante coincide con su incremento en el intervalo  $[t_0, t)$  con  $t > t_0$  y con su incremento en el intervalo  $[t, t_0)$ , tomado en forma inversa si  $t < t_0$ . El proceso aleatorio  $Y(t) = X(t) - X_{t_0}$  representa un proceso con incrementos no correlacionados, los cuales tienen la propiedad  $Y_{t_0} = 0$ . Además, si  $X_{t_0} = 0$  (con probabilidad 1), entonces el valor  $X_t$  del proceso  $X(t)$  en algún instante  $t$  es no correlacionado con sus futuros incrementos en los intervalos en los cuales sigue el instante  $t_0$  y con sus previos incrementos en el intervalo que precede al instante  $t_0$ :  $EX_t^0(X_{t_2}^{0*} - X_{t_1}^{0*}) = 0$  con  $t \leq t_1 < t_2, t_1 \geq t_0$  o  $t_1 < t_2 \leq t, t_2 \leq t_0$ , donde  $X_t^0 = X_t - m_t$ ; ( $m_t = EX_t$ ). Consideremos la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} k(t) &= EX_t^0 X_t^{0*}; t > t_0, \\ &= 0; t = t_0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$= -EX_t^0 X_t^{0*}; t < t_0.$$

Donde el asterisco indica el vector transpuesto cuyos componentes son los conjugados. La matriz de covarianza del incremento  $X_{t_2} - X_{t_1}$  del proceso  $X(t)$  en algún intervalo y la función de covarianza del proceso  $X(t)$  son determinadas por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} E(X_{t_2}^0 - X_{t_1}^0)(X_{t_2}^{0*} - X_{t_1}^{0*}) &= k(t_2) - k(t_1), & (2.21) \\ K_x(t_1, t_2) &= k(\min(t_1, t_2)); t_1, t_2 > t_0, \\ &= 0; t_1 \leq t_0 \leq t_2, t_2 \leq t_0 \leq t_1, \\ &= -k(\min(t_1, t_2)); t_1, t_2 < t_0. \end{aligned}$$

El proceso aleatorio con incrementos no correlacionados es continuo por el criterio de media cuadrada si y solo si la función  $k(t)$  es continua.

Por otro lado, si  $k(t)$  es no solo continua, sino además diferenciable; en este caso, la fórmula (2.22) puede ser escrita (con  $t_1, t_2 > t_0$ ) en la forma:

$$k(t) = \int_{t_0}^t \nu(\tau) d\tau, \quad (2.22)$$

donde  $\nu(t)$  es una función no negativa, la cual es llamada la *intensidad de un proceso  $X(t)$  con incrementos no correlacionados*.

## Procesos con Incrementos Independientes

**Definición** Un proceso estocástico  $X(t)$  es un *proceso con incrementos independientes* si para cualquier  $N \in \mathbb{N}$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  las variables aleatorias  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_N} - X_{t_{N-1}}$ , son independientes.

**Teorema [71]** La *función característica del incremento de un proceso con incrementos independientes* está completamente determinada por su función característica en una dimensión, i.e. su distribución uni-dimensional.

**Teorema**[71] Todo proceso con incrementos independientes y con función de covarianza diferenciable tiene una derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos, la cual representa un *ruido blanco*.

**Definición** El ruido blanco obtenido por diferenciación de un proceso con incrementos independientes es llamado un *ruido blanco en el sentido estricto*.

Un escalar o un proceso estocástico real con incrementos independientes  $W(t)$ ,  $t > 0$ , será un *proceso de Wiener* si satisface las siguientes condiciones:

- Casi seguramente las realizaciones  $w(t)$  del proceso  $\{W(t)\}$ ,  $t \geq 0$  son continuas y  $w(0) = 0$ ;
- La distribución uni-dimensional de  $W(t)$  es normal;
- La esperanza de cada proceso  $W(t)$  es cero y su función de covarianza está determinada por la fórmula

$$K_w(t_1, t_2) = \int_0^{\min(t_1, t_2)} \nu(\tau) d\tau,$$

donde  $\nu(t)$  es una función no negativa que representa la intensidad del proceso de Wiener  $W(t)$ . El ruido blanco representando la derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos, de un proceso de Wiener es llamado *ruido blanco normalmente distribuido*. Un proceso de Wiener como un proceso con incrementos independientes el cual posee media cero y momento de segundo orden finito  $k(t)$  para cada instante  $t$ , genera una medida estocástica en el eje real con valores independientes en intervalos disjuntos. Esta medida estocástica es determinada por la fórmula  $Z((t_1, t_2]) = W(t_2) - W(t_1)$ .

## La Integral de Itô

Sea  $W(t)$  un proceso escalar con incrementos independientes con esperanza cero y momento de segundo orden  $k(t)$ ; sea  $X(t)$  un proceso aleatorio continuo por media cuadrada ( $\overline{m.s.}$ ), escalar con momento de segundo orden finito cuyo valor en todo  $t$  es independiente de los incrementos futuros del proceso  $W(t)$ ,  $W(t_2) - W(t_1)$ ,  $t \leq t_1 < t_2$ ; sea  $P_n$  una sucesión de particiones del intervalo  $(a, b]$ ,

$$P_n : (a, b] = \bigcup_{k=1}^{N_n} (t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}], t_0^{(n)} = a, t_{N_n}^{(n)} = b, \quad (2.23)$$

tal que  $\max_k (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definición** El límite por media cuadrática de la sucesión de sumas integrales  $\{\bar{Y}_n\}$ ,

$$\bar{Y}_n = \sum_{k=1}^{N_n} X(t_{k-1}^{(n)}) [W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})],$$

si el límite de la sucesión existe, es llamado la *integral estocástica de Itô* de la función aleatoria  $X$  con respecto al proceso con incrementos independientes  $\{W(t)\}_t$  sobre el intervalo  $(a, b]$ :

$$Y = \int_a^b X(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n$$

**Teorema** [71] La integral estocástica de Itô existe si y solo si la integral

$$\int_a^b E|X(t)|^2 \nu(t) dt = E|Y|^2 = DY$$

existe, en cuyo caso esta es igual a la varianza  $DY$  de la integral de Itô  $Y$ . Siendo un caso particular de la integral de Itô cuando  $\theta = 0$ . La integral  $Y_1$  es el límite por media cuadrática de las sumas integrales

$$Y_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} X(t_k^{(n)}) [W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})],$$

cuando  $n$  tiende a infinito.

Definiendo una  $\theta$ -integral estocástica para algún  $\theta \in [0, 1]$  por la siguiente fórmula:

$$Y_\theta = \int_a^b X(\tau) d_\theta W(\tau) = (1 - \theta)Y + \theta Y_1$$

Cuando  $\theta = 1/2$ , la integral estocástica anterior representa la integral estocástica de Stratonovich.

## 2.2. Ecuaciones Estocásticas

**Definición** La ecuación diferencial

$$\dot{X} = a(X, t) + b(X, t)V \quad (2.24)$$

es llamada *ecuación diferencial estocástica* si la función aleatoria (generalizada)  $V$  representa un ruido blanco en el sentido estricto. Sea  $X_0$  un vector aleatorio de la misma dimensión que  $X(t)$ . La ecuación (2.24) con la condición inicial  $X(t_0) = X_0$  determina el proceso estocástico  $X(t)$ . La ecuación anterior es la representación simbólica de:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a(X(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t b(X(\tau), \tau) V(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

donde la primera integral existe por el criterio de media cuadrática. Introduciendo el proceso con incrementos independientes  $W(t)$  cuyas derivadas son un ruido blanco  $V(t)$ , la ecuación anterior se puede reescribir como

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a(X(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t b(X(\tau), \tau) dW(\tau) \quad (2.26)$$

La ecuación (2.26) tiene un sentido exacto. La ecuación (2.24) con la condición inicial  $X(t_0) = X_0$  es una representación simbólica de la ecuación (2.26). La ecuación (2.26) en la cual la segunda integral es una integral estocástica de Itô, es llamada la *ecuación*

*Integral estocástica de Itô*, y la ecuación (2.24) y la que se forma sustituyendo  $dW$  por  $V$  en (2.24), son llamadas ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô. Un proceso aleatorio  $X(t)$  el cual satisface la ecuación (2.26), en el cual las integrales representan límites por el criterio de media cuadrática de la correspondiente suma de integrales, es llamado solución de la ecuación integral estocástica (2.26) y de la ecuación diferencial estocástica correspondiente (2.24), con la condición inicial  $X(t_0) = X_0$ .

### 2.2.1. Ecuaciones Estocásticas para Densidades

#### Momentos

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{Y} = aY + a_0 + bV, \quad (2.27)$$

donde  $a = a(t)$ ,  $a_0 = a_0(t)$ ,  $b = b(t)$  pueden ser funciones en el tiempo  $t$ , y  $V$  es un ruido blanco cuya intensidad  $\nu$  puede ser una función de tiempo  $t$ . Resolviendo la ecuación (2.27) es obtenido el vector  $Y$ , el cual está dado por la fórmula

$$Y(t) = u(t, t_0)Y_0 + \int_{t_0}^t u(t, \tau)b(\tau)V(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t u(t, \tau)a_0(\tau)d\tau, \quad (2.28)$$

donde  $u(t, \tau)$  es la matriz determinada como una función de  $t$  por la ecuación diferencial homogénea  $\frac{du}{dt} = a(t)u$  y la condición inicial  $u(\tau, \tau) = I$ .

#### Momentos de Segundo Orden

Tomando en cuenta que la esperanza de un ruido blanco es igual a cero, en virtud de (2.28), es encontrada la siguiente fórmula para la esperanza del vector estado del sistema  $Y(t)$

$$m(t) = u(t, t_0)m_0 + \int_{t_0}^t u(t, \tau)a_0(\tau)d\tau \quad (2.29)$$

donde  $m_0$  es la esperanza del valor inicial  $Y_0$  del vector de estado  $Y$ . La función de covarianza del vector de estado  $Y$  es determinada por la fórmula

$$K(t_1, t_2) = u(t_1, t_0)K_0u(t_2, t_0) + \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} u(t_1, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u(t_2, \tau)^* d\tau \quad (2.30)$$

donde  $K_0$  es la matriz de covarianza del valor inicial  $Y_0$  del vector de estado  $Y$ . Dadas las funciones de valores reales  $m(t)$  y  $K(t_1, t_2)$ , se sigue la fórmula para el momento de segundo orden.

$$\Gamma(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2)^T \quad (2.31)$$

La ecuación diferencial para la esperanza del vector  $Y$  es obtenida diferenciando (2.29):

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= u_t(t, t_0)m_0 + \int_{t_0}^t u_t(t, \tau)a_0(\tau)d\tau + a_0(t) \\ &= a(t)[u(t, t_0)m_0 + \int_{t_0}^t u_t(t, \tau)a_0(\tau)d\tau] + a_0(t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

pero la expresión entre corchetes es igual a  $m(t)$  por(2.29). Por tanto, la ecuación (2.32) se puede escribir en la forma

$$\dot{m} = am + a_0. \quad (2.33)$$

Integrando la ecuación (2.33) con la condición inicial  $m(t_0) = m_0$  se puede calcular la esperanza del vector aleatorio  $Y$  en el sistema lineal estocástico (2.27).

La ecuación para la matriz de la varianza  $K(t)$  del vector  $Y$  en (2.30)  $t_1 = t_2 = t$  :

$$K(t) = K(t, t) = u(t, t_0)K_0u^*(t, t_0) + \int_{t_0}^t u(t, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u^*(t, \tau)d\tau \quad (2.34)$$

Derivando esta fórmula respecto a  $t$  y sustituyendo  $u_t(t, \tau) = a(t)u(t, \tau)$ ,  $u_t(t, \tau)^* = u^*(t, \tau)a(t)^T$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & a(t)[u(t, t_0)K_0u^*(t, t_0) + \\ & \int_{t_0}^t u(t, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u^*(t, \tau)d\tau] + [u(t, t_0)K_0u^*(t, t_0) \\ & \int_{t_0}^t u(t, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u^*(t, \tau)d\tau]a(t)^T + b(t)\nu(t)b(t)^T. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dado que la expresión en corchetes es igual a  $K = K(t)$ , entonces

$$\dot{K} = aK + Ka^T + b\nu b^T. \quad (2.36)$$

Integrando la ecuación (2.36) con la condición inicial  $K(t_0) = K_0$  se puede calcular la matriz de la varianza del vector aleatorio  $Y$  para el sistema lineal estocástico (2.27). La ecuación diferencial para el momento de segundo orden  $\Gamma(t)$  del vector  $Y$  con  $t_1 = t_2 = t$  se puede obtener en base a la fórmula

$$\Gamma(t) = K(t) + m(t)m(t)^T, \quad (2.37)$$

diferenciando la fórmula anterior se obtiene

$$\dot{\Gamma} = \dot{K} + \dot{m}m^T + m\dot{m}^T. \quad (2.38)$$

Sustituyendo aquí las expresiones para  $\dot{m}$  y  $\dot{K}$  para las ecuaciones (2.33) y (2.36), y usando la fórmula (2.37) se llega a

$$\dot{\Gamma} = a\Gamma + \Gamma a^T + b\nu b^T + a_0m^T + ma_0^T. \quad (2.39)$$

Integrando la ecuación (2.39) y después la ecuación (2.33), la cual determina la esperanza  $m$  con la condición inicial  $\Gamma(t_0) = \Gamma_0 = K_0 + m_0m_0^T$ , se puede calcular el momento inicial de segundo orden del vector aleatorio  $Y$  en el sistema lineal estocástico (2.27). La

ecuación para la función de covarianza  $K(t_1, t_2)$  del proceso aleatorio  $Y$  considerada como una función de  $t_1$  y algún  $t_1$  fijo, con el caso  $t_1 < t_2$  :

$$K(t_1, t_2) = u(t_1, t_0)K_0u(t_2, t_0)^* + \int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u(t_2, \tau)^* d\tau \quad (2.40)$$

Diferenciando la fórmula anterior respecto a  $t_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= u(t_1, t_0)K_0u_{t_2}(t_2, t_0)^* + \quad (2.41) \\ \int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u(t_2, \tau)^* d\tau &= u(t_1, t_0)K_0u(t_2, t_0)^* a^T(t_2) + \\ &\int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau)b(\tau)\nu(\tau)b(\tau)^T u(t_2, \tau)^* a^T(t_2) d\tau, \\ &= K(t_1, t_2)a(t_2)^T, t_1 < t_2. \end{aligned}$$

con la condición inicial  $K(t_1, t_1) = K(t_1)$ .

Integrando la ecuación (2.41) con varios valores de  $t_1$ , se obtiene el número de secciones de la matriz de covarianza  $K(t_1, t_2)$  con  $t_1 < t_2$ . Al obtener  $K(t_1, t_2)$  con  $t_2 < t_1$  se usa

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)^T$$

## Función Característica Uni-dimensional

Sea considerado el sistema cuyo vector de estado es descrito por la ecuación estocástica diferencial de Itô

$$\dot{Y} = a(Y, t) + b(Y, t)V, \quad (2.42)$$

donde  $V$  es un ruido blanco en el sentido estricto. El problema es encontrar la distribución multidimensional del estado del sistema  $Y(t)$ , suponiendo que la distribución uni-dimensional del proceso con incrementos independientes

$$W(t) = W(t_0) + \int_{t_0}^t V(\tau) d\tau \quad (2.43)$$

es conocida. La ecuación de la función característica uni-dimensional está dada por

$$\frac{\partial g_1(\lambda, t)}{\partial t} = E\{i\lambda^T a(Y, t) + \chi(b(Y, t)^T \lambda; t)\}e^{i\lambda^T Y} \quad (2.44)$$

La ecuación multidimensional de la función característica de un vector estado  $Y$  de un sistema está dada por

$$g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) = E[\exp\{i \sum_{k=1}^n \lambda_k^T Y(t_k)\}] \quad (2.45)$$

Supongamos que la densidad uni-dimensional  $f_1(y, t)$  para el vector estado del sistema existe. Entonces la ecuación (2.44) puede escribirse como

$$\frac{\partial g_1(\lambda, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(y, t) + \chi(b(y, t)^T \lambda; t)]e^{i\lambda^T y} f_1(y, t) dy \quad (2.46)$$

Por la Transformada de Fourier

$$f_1(y, t) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu^T y} g_1(\mu, t) d\mu \quad (2.47)$$

donde  $p$  es la dimensión del vector de estado  $Y$ , y la integral con respecto a todos los componentes del vector  $p$ -dimensional  $\mu$  es asumida como el valor principal de la integral en el sentido de Cauchy si  $g_1(\mu, t)$  es no integrable absolutamente. Sustituyendo la ecuación (2.47) en la ecuación (2.46) es obtenida la ecuación íntegro-diferencial lineal

$$\frac{\partial g_1(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(y, t) + \chi(b(y, t)^T \lambda; t)] \times \quad (2.48)$$

$$e^{i(\lambda^T - \mu^T)y} g_1(\mu, t) d\mu dy$$

Análogamente, suponiendo que la densidad multidimensional del proceso  $Y(t)$  existe, se obtiene la ecuación íntegro-diferencial relativa a  $g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t_n} g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{np}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(y_n, t_n) + \chi(b(y_n, t_n)^T \lambda_n; t_n)]$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left\{i \sum_{k=1}^n (\lambda_k^T - \mu_k^T) y_k\right\} g_n(\mu_1, \dots, \mu_n; t_1, \dots, t_n) \\ & \times d\mu_1 d\mu_n dy_1 dy_n \end{aligned}$$

### Ecuaciones Uni-Dimensionales para las Densidades

Reemplazando en la ecuación (2.46) la variable de integración  $y$  por  $\eta$ , multiplicando esta ecuación por  $(2\pi)^{-p} e^{-i\lambda^T y}$ , e integrando esto con respecto a  $\lambda$ , se obtiene la ecuación integro-diferencial para la densidad de una dimensión  $f_1(y, t)$

$$\frac{\partial f_1(y, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(\eta, t) + \chi(b(\eta, t)^T \lambda; t)] e^{i\lambda^T (\eta - y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda \quad (2.50)$$

### Fórmula para la Función $\chi(\mu, t)$ para el Proceso de Wiener

Una forma específica para la función  $\chi = \chi(\mu; t)$  en las ecuaciones obtenidas para las funciones características es determinada por el carácter del proceso con incrementos independientes  $\{W(t)\}, t \geq 0$ . Aquí es obtenida cuando  $\{W(t)\}$  es un proceso de Wiener, pero se puede calcular para cualquier proceso, aunque este cálculo puede ser más complicado. Si  $\{W(t)\}$  es el proceso de Wiener, entonces su función característica uni-dimensional  $h_1(\mu, t)$  se determina por la fórmula

$$h_1(\mu, t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu^T \int_0^t \nu(\tau) d\tau \mu\right\}, \quad (2.51)$$

ya que la función  $\chi(\mu; t)$  representa la derivada logarítmica de la función característica  $h_1(\mu; t)$  con respecto a  $t$ :  $\chi(\mu; t) = \frac{\partial}{\partial t} [\ln h_1(\mu; t)]$ . Sustituyendo aquí la expresión de la función  $h_1(\mu; t)$ , se obtiene

$$\chi(\mu; t) = -\mu^T \nu(t) \mu / 2 \quad (2.52)$$

## Ecuaciones para las Densidades en el Caso Multi-Dimensional del Proceso de Wiener

En el caso de un proceso de Wiener  $W(t)$ , de acuerdo con (2.46) se obtiene la siguiente ecuación

$$\chi(b(\eta, t)^T \lambda; t) = -\frac{1}{2} \lambda^T b(\eta, t) \nu(t) b(\eta, t)^T \lambda. \quad (2.53)$$

La ecuación (2.52) toma la forma

$$\frac{\partial f_1(y, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^T a(\eta, t) - \frac{1}{2} \lambda^T b(\eta, t) \nu(t) b(\eta, t)^T] \times e^{i\lambda^T (\eta - y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda. \quad (2.54)$$

Tomando en cuenta que  $u^T A u = \text{tr}(u u^T A)$  para un  $n$ -vector  $u$  y una matriz  $A_{n \times n}$ , es obtenida la siguiente fórmula

$$\frac{\partial f_1(y, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda^T a(\eta, t) - \frac{1}{2} \text{tr}[\lambda \lambda^T b(\eta, t) \nu(t) b(\eta, t)^T] \times e^{i\lambda^T (\eta - y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda. \quad (2.55)$$

Utilizando la fórmula integral de la función delta

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T (\eta - y)} d\lambda = \delta(\eta - y) \quad (2.56)$$

Diferenciando (2.56) con respecto a  $\eta$  son obtenidas las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda^T (\eta - y)} d\lambda &= \frac{\partial}{\partial \eta} \delta(\eta - y) = \delta'(\eta - y), \\ -\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \lambda^T e^{i\lambda^T (\eta - y)} d\lambda &= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^T}{\partial \eta} \delta(\eta - y) = \delta''(\eta - y). \end{aligned} \quad (2.57)$$

En base a las últimas tres fórmulas anteriores, es posible escribir

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda^T a(\eta, t) e^{i\lambda^T(\eta-y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda = \quad (2.58) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\eta - y)^T a(\eta, t) f_1(\eta; t) d\eta = -\frac{\partial^T}{\partial y} [a(y, t) f_1(y, t)], \\
& -\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \lambda^T b(\eta; t) \nu(t) b(\eta; t)^T e^{i\lambda^T(\eta-y)} f_1(\eta; t) d\eta d\lambda = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \delta''(\eta - y) b(\eta; t) \nu(t) b(\eta; t)^T f_1(\eta; t) d\eta = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^T}{\partial y} [b(y; t) \nu(t) b(y; t)^T f_1(y; t)]
\end{aligned}$$

Usando las fórmulas (2.58), es posible representar la ecuación (2.55) en la forma

$$\frac{\partial f_1(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^T}{\partial y} [a(y, t) f_1(y, t)] + \frac{1}{2} tr \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^T}{\partial y} [b(y, t) \nu(t) b(y, t)^T f_1(y, t)] \quad (2.59)$$

Esta ecuación (2.59) fue obtenida en el inicio del siglo XX por Fokker, Einstein y Smoluchovsky, los cuales estudiaban el movimiento Browniano y la difusión [37], para el caso de  $Y$  escalar y luego para un vector  $Y$ , y es llamada la *ecuación de Fokker-Planck-Kolgomorov* [52], y se obtiene solo para el proceso de Wiener. La ecuación (2.59) también es válida para la densidad multi-dimensional  $f_n(y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n)$  si la diferenciación con respecto a  $t$  y a  $y$  es considerada como la diferenciación respecto a  $t_n$  y  $y_n$ .

## 2.3. Teoría de Filtrado Óptimo

### 2.3.1. Filtro de Wiener

#### Planteamiento del Problema

El filtrado de Wiener [77] probablemente representa la primera presentación de terminología en el cual dos importantes ideas han sido rescatadas: sistemas dinámicos y estimación óptima en presencia de ruido. Se considera una señal  $y(\cdot)$ , la cual contiene un

ruido  $v(\cdot)$  y una medida  $z(\cdot)$ .  $y(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$ , y  $z(\cdot)$  pueden originar un problema del tipo continuo o discreto en el tiempo, dependiendo de la naturaleza de las mismas. Las señales de tiempo son consideradas como escalares continuos definidos en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  solamente. Se supone que  $y(\cdot)$ , y  $v(\cdot)$ , son funciones simples de procesos aleatorios estacionarios. Normalmente ellos son independientes y tienen media cero. Posteriormente ellos son considerados para la obtención de  $\phi_{yy}(j\omega)$  y  $\phi_{vv}(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . La tarea del filtro de Wiener es utilizar las mediciones  $z(\cdot)$  para estimar  $y(\cdot)$ . Más precisamente, se requiere que la estimación sea causal, en línea y óptima. *Causal* significa que  $y(t)$  va a ser estimada usando  $z(s)$  para algún  $s < t$ ; en línea significa que al tiempo  $t$  el estimado de  $y(t)$  debería desempeñarse óptimamente. *Óptima* significa que  $\hat{y}(t)$ , debería presentar un error cuadrado mínimo, i.e.  $E[y(t) - \hat{y}(t)]^2$ , el cual debe ser minimizado. Si  $y(\cdot)$ , y  $v(\cdot)$  son Gaussianos, esto significa que  $\hat{y}(t)$  es el estimado condicional,  $E[y(t)|z(s), s \leq t]$ .

## Solución

La solución a este problema está dada en la siguiente explicación: El *filtro de Wiener* es un sistema lineal, invariante en el tiempo, causal, estable, cuya relación entrada-salida está dada por una función de respuesta al impulso  $h(\cdot)$  :

$$\hat{y}(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)z(s)ds \quad (2.60)$$

La señal  $y(\cdot)$  y el ruido  $v(\cdot)$  son representados como la salida de un sistema lineal excitado por ruido blanco. Si  $\varepsilon_y(\cdot)$ ,  $\varepsilon_v(\cdot)$  son ruidos blancos con media cero y la intensidad de la varianza es 1, entonces

$$E[\varepsilon_y(t)\varepsilon_y(s)] = E[\varepsilon_v(t)\varepsilon_v(s)] = \delta(t-s), \quad (2.61)$$

y, por tanto,

$$\phi_{yy}(j\omega) = |W_y(j\omega)|^2, \phi_{vv}(j\omega) = |W_v(j\omega)|^2 \quad (2.62)$$

La clave del problema es la obtención de  $\phi_{yy}(j\omega)$ ,  $\phi_{vv}(j\omega)$  para la función de respuesta al impulso  $h(t)$  o su función de transferencia  $H(j\omega)$ . El paso crucial es la técnica de factorización espectral. El espectro de  $z(\cdot)$  cuando  $y(\cdot)$  y  $v(\cdot)$  son independientes está dado por

$$\phi_{zz}(j\omega) = \phi_{yy}(j\omega) + \phi_{vv}(j\omega) \quad (2.63)$$

La factorización espectral requiere la determinación de una función de transferencia  $W_z(j\omega)$  tal, que  $W_z(s)$  y  $W_z^{-1}(s)$  son analíticas en  $\mathbb{R}$ ,  $s \geq 0$ , y tal que

$$\phi_{zz}(j\omega) = |W_z(j\omega)|^2, \quad (2.64)$$

En [48] esta operación de factorización espectral es presentada como un paso crucial en la obtención de  $H(\cdot)$ , la cual en [47] es la clave para la determinación del filtro óptimo. A continuación se procede de la siguiente manera: Se define una señal  $\varepsilon_z(\cdot)$  como la salida de un sistema lineal de una función de transferencia  $W_z^{-1}(j\omega)$  conducida por  $z(\cdot)$ . Si existe  $W_z^{-1}(\cdot)$ , entonces  $\varepsilon_z(\cdot)$  es equivalente a  $z(\cdot)$ , es decir, la estimación de  $y(t)$  usando  $\varepsilon_z(s)$  para  $s < t$  debería dar el mismo resultado como estimación de  $y(t)$  usando  $z(s)$  para  $s < t$ , y además  $\varepsilon_z(\cdot)$  es un ruido blanco. Esta simplificación es muy importante y es utilizada para la obtención del filtro óptimo en [59].

Además, es notable que la construcción de  $W_z(\cdot)$  satisface las condiciones de estabilidad y (2.64) y es un paso importante para la construcción de  $H(\cdot)$ . La pregunta es ¿Cómo puede hacerse esto? Si  $\phi_{zz}(\cdot)$  es racional, la clave es la factorización polinomial. En otro caso, utilizar:

$$W_z(j\omega_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \phi_{zz}(j\omega)}{-j(\omega - \omega_0) - \varepsilon} d\omega \right\} \quad (2.65)$$

Otra forma de resolver el problema de filtrado, en el dominio del tiempo, es utilizando la función de respuesta al impulso  $h(t)$ , la cual corresponde a la transformada inversa de

Laplace de la función  $H(jw)$ , mediante la ecuación

$$h(t) + \int_0^t h(\tau)K(\tau - s)ds = K(t), t \geq 0, \quad (2.66)$$

donde  $K(\tau)$  es la función de covarianza de  $z(t)$ . Esta ecuación es conocida como la ecuación de Wiener-Hopf.

### 2.3.2. Filtro de Kalman (Tiempo Discreto)

Prácticamente, todo lo establecido para el *filtro de Kalman* en el tiempo continuo, se traslada al caso del filtro con tiempo discreto. La teoría en el caso continuo es más transparente que en el caso discreto, ya que presenta aplicabilidad a más problemas.

#### Planteamiento del problema

El modelo está dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k x_k + G_k w_k \\ z_k &= H^T_k x_k + v_k \end{aligned} \quad (2.67)$$

con

$$E \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l^T & v_l^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} \delta_{kl}$$

y  $\{w_k\}, \{v_k\}$  son sucesiones con media cero. Por convencionalismo, se considera el tiempo inicial  $k = 0$ . Agregando que la media  $\bar{x}_0$  y la varianza  $P_0$  de  $x_0$ , son independientes de  $\{w_k\}, \{v_k\}$ . Todas las variables son Gaussianas. La idea principal es distinguir el efecto de dinámicas y las mediciones en el filtro. Más precisamente, sea  $\hat{x}_{k/k}$  el estimado óptimo, una media estimada de  $x_k$  dada  $z_l, l \leq k$ , y sea  $\hat{x}_{k+1/k}$  dado por  $E[x_{k+1}/z_l, l \leq k]$ , el primer paso en la predicción del estimado.

## Solución

Dado que  $w_k$  es independiente de  $z_l$  para  $l \leq k$ , se tiene

$$\hat{x}_{\frac{k+1}{k}} = F_k \hat{x}_{\frac{k}{k}} \quad (2.68)$$

Esto demuestra la forma de actualizar un estimado como resultado de sistemas dinámicos, cuando no aparecen mediciones extras. (2.68) se apoya en

$$\mathbb{V}_{\frac{k+1}{k}} = F_k \mathbb{V}_{\frac{k}{k}} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (2.69)$$

Aquí  $\mathbb{V}_{\frac{k+1}{k}}$ , y  $\mathbb{V}_{\frac{k}{k}}$  son las covarianzas del error asociadas con  $\hat{x}_{\frac{k}{k}}$  y  $\hat{x}_{\frac{k+1}{k}}$ . Actualizar las ecuaciones de los estimados equivale a pasar de  $\hat{x}_{\frac{k+1}{k}}$  y  $\mathbb{V}_{\frac{k+1}{k}}$  a  $\hat{x}_{\frac{k+1}{k+1}}$  y  $\mathbb{V}_{\frac{k+1}{k+1}}$ . Esto se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\frac{k+1}{k+1}} &= \hat{x}_{\frac{k+1}{k}} + \mathbb{V}_{\frac{k+1}{k}} H_{k+1} [H_{k+1}^T \mathbb{V}_{\frac{k+1}{k}} H_{k+1} + R_{k+1}]^{-1} \\ &\quad \times [z_{k+1} - H_{k+1}^T \hat{x}_{\frac{k+1}{k}}] \\ \mathbb{V}_{\frac{k+1}{k+1}} &= \mathbb{V}_{\frac{k+1}{k}} - \mathbb{V}_{\frac{k+1}{k}} H_{k+1} [H_{k+1}^T \mathbb{V}_{\frac{k+1}{k}} H_{k+1} + R_{k+1}]^{-1} H_{k+1}^T \mathbb{V}_{\frac{k+1}{k}} \end{aligned} \quad (2.70)$$

### 2.3.3. Filtro de Kalman-Bucy (Tiempo Continuo)

#### Planteamiento del Problema

La representación del modelo está dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (2.71)$$

$$z(t) = H^T(t)x(t) + v(t) \quad (2.72)$$

en el cual  $F, G, H$  son matrices  $n \times n, n \times m$ , y  $n \times p$  respectivamente. Los procesos  $w(t)$  y  $v(t)$  son ruidos blancos Gaussianos con media cero, tales que:

$$E \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(s) & v^T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S^T(t) & R(t) \end{bmatrix} \delta(t-s)$$

con  $R(t) = R'(t) > 0$  para toda  $t$ . Muy frecuentemente,  $S(t) \equiv 0$ , i.e.  $w(\cdot)$  y  $v(\cdot)$  son independientes. Entonces  $Q(t) = Q^T(t) \geq 0$ . Se supone un tiempo inicial finito  $t_0$ . Por otro lado,  $x(t_0)$  será considerada como variable aleatoria Gaussiana con media  $x_0$  y varianza  $p_0$ . La tarea de la estimación es usar mediciones de  $z(s)$  para  $s < t$  para estimar  $x(t)$ ; este estimado es llamado  $\hat{x}(t)$ , el cual minimiza  $E[\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2]$ . Esto significa que  $\hat{x}(t)$  es necesariamente una estimación de la media condicional, con respecto a las observaciones.

### Solución

La solución se obtiene de la siguiente manera: Definamos  $P(t) = P^T(t) \geq 0$  como la solución de

$$\dot{P} = PF^T + FP - PHR^{-1}H^TP + GQG^T, P(t_0) = P_0 \quad (2.73)$$

Y  $\hat{x}(t)$  es la solución de

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + P(t)H(t)R^{-1}(t)[z(t) - H^T(t)\hat{x}(t)] \quad (2.74)$$

Donde  $P(t)H(t)R^{-1}(t)$  denota la ganancia de Kalman.  $E[x(t) - \hat{x}(t)][x(t) - \hat{x}(t)]^T = P(t)$ . La efectividad del estimador óptimo es medida por la covarianza del error, la cual es dada por la solución de la ecuación (2.73), y la existencia de la solución a esta ecuación en  $(t_0, \infty)$  está garantizada.

Algunas diferencias del filtro de Kalman con respecto al de Wiener son dadas en la siguiente tabla:

Filtro de Wiener	Filtro de Kalman
$t_0 = -\infty$	$t_0 \geq -\infty$
Estacionario	Acepta no estacionario.
Infinito dimensional	Finito dimensional
Ruido no necesariamente blanco	Ruido blanco
Factorización espectral	Solución de la ecuación de Riccati
Estimación de la señal	Estimación del estado

El problema de predicción es resuelto por la teoría de filtrado. Esto consiste en calcular  $x(t + \Delta)$  para algún  $\Delta$  positivo, dado  $z(s)$  para  $s < t$ . Esto es:

$$\hat{x}(t + \Delta) = \Phi(t + \Delta)\hat{x}(t) \quad (2.75)$$

### 2.3.4. Ecuación General de Filtrado Óptimo

Consideremos el proceso continuo estocástico descrito por la ecuación

$$\dot{X} = \varphi(X, t) + \psi(X, t)V \quad (2.76)$$

donde  $X$  es el vector de estado  $n$ -dimensional del sistema,  $V$  es un vector  $r$ -dimensional que representa el ruido blanco Gaussiano, y  $\varphi(X, t), \psi(X, t)$  son funciones conocidas del estado del sistema y del tiempo. Los valores de la función  $\varphi(X, t)$  son vectores  $n$ -dimensionales y los valores de la función  $\psi(X, t)$  son matrices  $n \times r$ . Si el vector de estado del sistema  $X$  es medido continuamente, entonces el proceso aleatorio  $n$ -dimensional  $Y(t) = X(t) + U(t)$  sería el resultado de las mediciones, donde  $U(t)$  es el error de la medición, el cual representa usualmente una función aleatoria del tiempo. Por otro lado, si esto no se cumple con el vector de estado, pero si algunas funciones del vector de estado son medidas por algunos de los componentes del vector de observación, el resultado de

las mediciones es determinado en forma general por la fórmula

$$Y = Y(t) = \varphi_0(X, U, t), \quad (2.77)$$

donde  $Y$  es un vector  $n_1$ -dimensional,  $U$  es el error de la medición, representando una función vectorial aleatoria de tiempo de dimension  $r \geq n_1$ , y  $\varphi_0(x, u, t)$  es una función conocida del estado del sistema, el error de la medición y del tiempo. El modelo general de las mediciones que se llevan a cabo en un sistema, puede ser descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{Y} = \varphi_1(Y, X, U, t). \quad (2.78)$$

El resultado de las mediciones representa el proceso aleatorio  $Y$ . El problema de filtrado es planteado para el vector de estado del sistema  $X$  en cada instante  $t > t_0$ , usando los resultados de mediciones continuas del proceso  $Y$  determinado por la ecuación (2.78) en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ .

Sea un vector aleatorio de un proceso  $[Y^T X^T]^T$  determinado por las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y, X, t)dt + \psi_1(Y, X, t)dW, \\ dX &= \varphi(Y, X, t)dt + \psi(Y, X, t)dW, \end{aligned} \quad (2.79)$$

donde  $Y$  es un proceso aleatorio  $n_1$ -dimensional,  $X$  es un proceso  $n$ -dimensional,  $W$  es un proceso  $r$ -dimensional,  $\varphi_1(y, x, t)$  y  $\varphi(y, x, t)$  son funciones vectoriales que mapean el espacio  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  en los espacios  $\mathbb{R}^{n_1}$  y  $\mathbb{R}^n$  respectivamente, y  $\psi_1(y, x, t)$  y  $\psi(y, x, t)$  son matrices de funciones conocidas que mapean  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^{n_1 r}$  y  $\mathbb{R}^{nr}$  respectivamente. Esto constituye el planteamiento del problema de filtrado para el vector estado del sistema en algún instante  $t > t_0$  usando los resultados de mediciones continuas del proceso  $Y$  en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ .

La solución general al problema de filtrado óptimo se obtiene de la siguiente propiedad para los momentos de segundo orden: el menor de todos los momentos de segundo orden de una variable aleatoria escalar es su varianza. De aquí resulta que la mejor aproximación de una variable aleatoria por una variable no aleatoria mediante el criterio de media cuadrada es dada por su esperanza condicional con respecto a las observaciones. Sea  $Y_{t_0}^t$  el conjunto de valores del proceso medido en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ ,  $Y_{t_0}^t = \{Y(\tau) : \tau \in [t_0, t]\}$ . Entonces, el estimado óptimo del vector  $X_u = X(u)$ , el cual da la solución del problema para  $u = t$ , es determinado por la fórmula

$$\widehat{X}_u = E[X_u/Y_{t_0}^t] \quad (2.80)$$

Esta fórmula determina el estimado óptimo del valor  $X_u$  para alguna función aleatoria  $X(u)$  usando los resultados de las mediciones de otra función aleatoria  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . También es válida para el caso de un vector con argumento  $t$  y la medición de la función  $Y(t)$  en algún conjunto  $T$  de valores de  $t$ . La aplicación de la fórmula (2.80) es necesaria para encontrar la distribución condicional de  $X_u$ . Este es un problema que en ocasiones no tiene solución. En el caso particular en el que  $Y(t)$  y  $X(t)$  son determinados por las ecuaciones (2.79), el problema puede ser resuelto bajo algunas restricciones adicionales. La fórmula general para el diferencial estocástico del estimado óptimo de una función del vector de estado dado es la base de la teoría de filtrado óptimo. Sea  $f(X_t, t)$  alguna función escalar del vector de estado  $n$ -dimensional de un sistema y de tiempo. Su estimado óptimo usando los resultados de observación  $Y_{t_0}^t$  de acuerdo con (2.80) es determinado por la fórmula

$$\widehat{f}(t) = E[f(X_t, t)|Y_{t_0}^t]. \quad (2.81)$$

Este estimado representa un funcional del proceso aleatorio  $Y(t)$  en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ , y consecuentemente es por sí mismo una función de  $t$ . Un problema matemático

que sirve de ayuda es encontrar la diferencial estocástica de Itô de este proceso aleatorio. Este problema puede ser resuelto bajo la condición de que  $W(t)$  en las ecuaciones (2.79) representa el proceso de Wiener cuya dimensión  $r$  es no menor que  $n_1$ , que es la dimensión del proceso de medición  $Y(t)$ , y que la función  $\varphi_1$  en las ecuaciones (2.79) no depende de  $X$ . Las ecuaciones (2.79) toman la forma

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y, X, t)dt + \psi_1(Y, t)dW, \\ dX &= \varphi(Y, X, t)dt + \psi(Y, X, t)dW, \end{aligned} \quad (2.82)$$

### Diferencial de Itô para una Función del Estimado Óptimo

La ecuación diferencial estocástica del estimado óptimo de la variable aleatoria  $f(X_t, t)$  para las ecuaciones (2.79) es dada por la fórmula

$$\begin{aligned} d\hat{f} &= E[f_t(X, t) + f_x(X, t)^T \varphi(Y, X, t) \\ &+ \frac{1}{2} \text{tr}\{f_{xx}(X, t)(\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)\}|Y_{t_0}^t]dt + E[f(X, t)\{\varphi_1(Y, X, t)^T - \hat{\varphi}_1^T\} \\ &+ f_x(X, t)^T(\psi\nu\psi_1^T)(Y, X, t)|Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \hat{\varphi}_1 dt), \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde

$$\begin{aligned} (\psi\nu\psi^T)(x, y, t) &= \psi(y, x, t)\nu(t)\psi(y, x, t)^T, \\ (\psi\nu\psi_1^T)(y, x, t) &= \psi(y, x, t)\nu(t)\psi_1(y, t)^T, \\ (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(y, t) &= [\psi_1(y, t)\nu(t)\psi_1(y, t)^T]^{-1}, \\ \hat{\varphi}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 p_t(x)dx = E[\varphi_1(X_t, Y_t, t)|Y_{t_0}^t], \end{aligned} \quad (2.84)$$

$p_t(x)$  es la densidad condicional de  $X_t$  relativa a  $Y_{t_0}^t$ ; las derivadas  $f_t, f_x, f_{xx}$  y todas las esperanzas condicionales del lado derecho existen.

### Ecuación para la Función Característica

Sustituyendo  $f(x, t) = e^{i\lambda^T X_t}$  en la ecuación (2.83), se obtendrá la ecuación estocástica para la función condicional característica del vector aleatorio  $X_t$ :

$$g_t(\lambda) = E[e^{i\lambda^T X_t} | Y_{t_0}^t]. \quad (2.85)$$

Haciendo las sustituciones

$$\begin{aligned} f_t &= 0, f_x = i\lambda e^{i\lambda^T x}, f_{xx} = -\lambda\lambda^T e^{i\lambda^T x}, \\ \text{tr}\{\lambda\lambda^T(\psi\nu\psi^T)(y, x, t)\} &= \lambda^T(\psi\nu\psi^T)(y, x, t)\lambda, \end{aligned} \quad (2.86)$$

de la ecuación (2.83) se obtiene

$$\begin{aligned} dg_t(\lambda) &= E\left[i\lambda^T \varphi(Y, X, t) - \frac{1}{2}(\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)\lambda\right] e^{i\lambda^T X} | Y_{t_0}^t dt \\ &+ E\left\{\varphi_1(Y, X, t)^T - \widehat{\varphi}_1^T + i\lambda^T(\psi\nu\psi_1^T)(Y, X, t)\right\} \\ &\times e^{i\lambda^T X} | Y_{t_0}^t (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \widehat{\varphi}_1 dt). \end{aligned} \quad (2.87)$$

El lado derecho representa una función de  $\lambda$ . La distribución condicional del vector aleatorio  $X$  es completa y únicamente determinada por su función característica. Resolviendo la ecuación (2.87) es posible evaluar el estimado óptimo  $\widehat{X}_t$  del vector de estado  $X_t$  determinado por la fórmula (2.80). Mediante estas fórmulas es posible obtener la expresión para la esperanza en términos de la función característica.

$$\widehat{X}_t = E[X_t | Y_{t_0}^t] = \left[\frac{\partial g_t(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} \quad (2.88)$$

### Ecuación para la Densidad Condicional

La ecuación estocástica para la densidad condicional  $p_t(x)$  del vector aleatorio  $X_t$  es derivada a continuación:

$$dp_t(x) = -\frac{\partial^T}{\partial x} [\varphi(Y, x, t)p_t(x)] dt \quad (2.89)$$

$$+\frac{1}{2}tr\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^T}{\partial x}[(\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)p_t(x)]\right\}(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \widehat{\varphi}_1 dt)$$

o

$$dp_t(x) = L^*p_t(x)dt + \{[\psi_1(Y, x, t)^T - \varphi_1^T]p_t(x) - \frac{\partial^T}{\partial x}[(\psi\nu\psi^T)(Y, x, t)p_t(x)]\}(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \widehat{\varphi}_1 dt), \quad (2.90)$$

donde  $L^*$  es el operador adjunto del operador

$$L = \varphi(Y, x, t)^T \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}tr[(\psi\nu\psi^T)(Y, x, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^T}{\partial x}]. \quad (2.91)$$

Observando la última ecuación de (2.84), se concluye que la ecuación (2.89) representa una ecuación íntegro-diferencial relativa a la densidad condicional  $p_t(x)$ . Como el momento inicial  $t_0$ , la función  $p_{t_0}(x)$  sirve como la condición inicial para la ecuación (2.89). Después de resolver la ecuación (2.89), se puede encontrar de acuerdo con la fórmula (2.80) el estimado óptimo  $\widehat{X}_t$  del vector de estado  $X_t$  del sistema

$$\widehat{X}_t = E[X_t/Y_{t_0}^t] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_t(x)dx. \quad (2.92)$$

Como la fórmula (2.79) determina la diferencial estocástica de Itô del proceso aleatorio  $\widehat{f}(t)$ , las ecuaciones (2.87) y (2.89) son ecuaciones estocásticas de Itô. La ecuación (2.89) fue originalmente obtenida en otra forma y bajo restricciones más rígidas en [76], y denominada ecuación estocástica de Stratonovich. Al mismo tiempo, la ecuación para  $p_t$  en la forma de Itô fue obtenida en [55], también bajo restricciones más rígidas. Por lo tanto, es usualmente llamada ecuación de Stratonovich-Kushner.

### Diferencial Estocástica de la Esperanza Matemática

La fórmula (2.80) determinó el estimado óptimo como la esperanza condicional de  $\widehat{X}$  de la variable aleatoria correspondiente  $X$ . El estimado óptimo obtenido como resultado

de mediciones es caracterizado por la matriz de covarianza condicional  $R$ . Estas fórmulas se pueden obtener de la fórmula general (2.83). Como la fórmula (2.83) determina la diferencial estocástica de una función escalar del estado del sistema, es necesario aplicarla para cada elemento de las matrices  $\hat{X}$  y  $R$  por separado. Sustituyendo en (2.83)  $f(X, t) = X_l$ ,  $f_t = 0$ ,  $f_x = [0, \dots, 1, \dots]^T$ ,  $f_{xx} = 0$ , y la fórmula (2.83) toma la forma

$$d\hat{X}_l = \hat{\varphi}_l dt + E[X_l(\varphi_l^T - \hat{\varphi}_l^T)] \\ + (\psi\nu\psi_l^T)_l |Y_{t_0}^t| (\psi_l\nu\psi_l^T)^{-1} (dY - \hat{\varphi}_l dt) \quad (l = 1, \dots, n) \quad (2.93)$$

donde de acuerdo con la última ecuación de (2.83)  $\hat{\varphi}_l = E[\varphi_l(Y, X, t)/Y_{t_0}^t]$ ,  $(\psi\nu\psi_l^T)_l$ , siendo la  $l$ -ésima columna de la matriz  $\psi\nu\psi_l^T$  y los argumentos de las funciones  $\varphi_l$ ,  $\psi\nu\psi_l^T$  y  $(\psi_l\nu\psi_l^T)^{-1}$  son omitidos por brevedad. Entonces, la matriz para el diferencial estocástico del estimado óptimo  $\hat{X}$  del vector de estado del sistema  $X$  está dada por

$$d\hat{X} = \hat{\varphi} dt + E[X\{(\varphi_l(Y, X, t))^T - \hat{\varphi}_l^T\}] \\ + (\psi\nu\psi_l^T)(Y, X, t) |Y_{t_0}^t| (\psi_l\nu\psi_l^T)^{-1}(Y, t) (dY - \hat{\varphi} dt) \quad (2.94)$$

### Diferencial Estocástica del Momento Condicional de Segundo Orden

Sustituyendo en (2.83)  $f(X, t) = X_k X_l$  con  $k < l$ ,  $f_t = 0$ ,  $f_x = [0, \dots, X_l, \dots, X_k, \dots, 0]^T$ ,

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo que las dos columnas y renglones centrales contienen unos, los correspondientes a  $k$ , y  $l$  respectivamente, de la fórmula (2.83) se tiene

$$\begin{aligned} d\Gamma_{kl} = & E[X_k\varphi_l + X_l\varphi_k + (\psi\nu\psi^T)_{kl}|Y_{t_0}^t]dt \\ & + E[X_kX_l(\varphi_l^T - \widehat{\varphi}_l^T) + X_k(\psi\nu\psi_l^T)_l \\ & + X_l(\psi\nu\psi_l^T)_k|Y_{t_0}^t](\psi_l\nu\psi_l^T)^{-1}(dY - \widehat{\varphi}_1 dt)(k, l = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.95)$$

donde  $d\Gamma_{kl} = E[X_kX_l\varphi_k/Y_{t_0}^t]$ , y  $(\psi\nu\psi^T)_{kl}$  es el elemento correspondiente de la matriz  $(\psi\nu\psi^T)$ . Re-escribiendo la fórmula (2.95) como

$$\begin{aligned} d\Gamma_{kl} = & E[X_k\varphi_l + X_l\varphi_k + (\psi\nu\psi^T)_{kl}|Y_{t_0}^t]dt \\ & + \sum_{\rho=1}^r E[X_kX_l a_{\rho} + X_k b_{lk} + X_l b_{k\rho}|Y_{t_0}^t](dY_{\rho} - \widehat{\varphi}_{1\rho} dt), \end{aligned} \quad (2.96)$$

donde  $a_{\rho}$  es el  $\rho$ -ésimo elemento de la matriz  $(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T)(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}$  y  $b_{k\rho}$  es el elemento del  $k$ -ésimo renglón y de la  $\rho$ -ésima columna de la matriz  $\psi\nu\psi_1^T(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}$ . Denotando por  $b_{\rho}$  la  $\rho$ -ésima columna de la matriz  $\psi\nu\psi_1^T(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}$ ,  $b_{\rho} = [b_{1\rho}, \dots, b_{n\rho}]^T$  ( $\rho = 1, \dots, r$ ), se obtiene la siguiente fórmula diferencial estocástica del momento condicional de segundo orden  $\Gamma$  del vector estado del sistema:

$$\begin{aligned} d\Gamma = & E[X\varphi(Y, X, t)^T + \varphi(Y, X, t)X^T \\ & + (\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)|Y_{t_0}^t]dt + \sum_{\rho=1}^r E[XX^T a_{\rho}(Y, X, t) \\ & + Xb_{\rho}(Y, X, t)^T + b_{\rho}X^T|Y_{t_0}^t](dY_{\rho} - \widehat{\varphi}_{1\rho} dt), \end{aligned} \quad (2.97)$$

## Diferencial Estocástica de la Matriz de Covarianza

Para encontrar la diferencial estocástica de la matriz de covarianza condicional  $R$  del vector estado del sistema se usará la fórmula conocida que relaciona la esperanza. el

momento de segundo orden, y la matriz de covarianza del vector aleatorio  $R = \Gamma - \widehat{X}\widehat{X}^T$ , o en la forma escalar  $R_{kl} = \Gamma_{kl} - \widehat{X}_k\widehat{X}_l$ . Derivando en ambos lados de la última fórmula, se obtiene la expresión  $dR_{kl} = d\Gamma_{kl} - d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l)$ . Para encontrar  $d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l)$  se utiliza la fórmula

$$d(Z_1Z_2) = Z_1dZ_2 + Z_2dZ_1 + Y_1\nu Y_2^T dt, \quad (2.98)$$

$Z(t) = [Z_1, Z_2]$  es un proceso de Itô, el cual está dado por

$$dZ(t) = X(t)dt + Y(t)dW(t). \quad (2.99)$$

Aquí  $t_0 > 0$ ,  $W(t)$  es un proceso de Wiener, donde  $Y_1$  y  $Y_2$  representan la primera y segunda columnas de la matriz  $Y = [Y_1, Y_2]$  respectivamente.  $X(t) = [X_1(t), X_2(t)]$ ,  $Y_1(t)$ ,  $Y_2(t)$  son funciones aleatorias que satisfacen sus condiciones de existencia, y  $Z_1, Z_2$  son los componentes del vector aleatorio  $Z(t)$ . De acuerdo con (2.94)

$$E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k | Y_{t_0}^t] (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} \psi_1, \quad (2.100)$$

$$E[X_l(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_l | Y_{t_0}^t] (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} \psi_1,$$

juegan el rol de los renglones  $Y_1, Y_2$  de la matriz; en este caso se llega a:

$$d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l) = \widehat{X}_k d\widehat{X}_l + \widehat{X}_l d\widehat{X}_k \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} & E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k | Y_{t_0}^t] (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} \psi_1 \nu \psi_1^T (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} \\ & \times E[X_l(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi_1\nu\psi^T)_l | Y_{t_0}^t] dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo aquí las expresiones para  $d\widehat{X}_k$  y  $d\widehat{X}_l$  de la ecuación (2.93), se tiene

$$\begin{aligned} d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l) &= \{\widehat{X}_k\widehat{\varphi}_l + \widehat{X}_l\widehat{\varphi}_k \quad (2.102) \\ &+ E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k | Y_{t_0}^t] (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} E[X_l(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_l | Y_{t_0}^t]\} dt \\ &+ E[(\widehat{X}_k X_l + \widehat{X}_l X_k)(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + \widehat{X}_k(\psi\nu\psi_1^T)_l \\ &+ \widehat{X}_l(\psi\nu\psi_1^T)_k | Y_{t_0}^t] (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} (dY - \widehat{\varphi}_1 dt). \end{aligned}$$

Substrayendo esta fórmula de (2.96) y adicionando el término

$$E[(\widehat{X}_k \widehat{X}_l)(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) | Y_{t_0}^t] = \widehat{X}_k \widehat{X}_l (\widehat{\varphi}_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) = 0, \quad (2.103)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} dR_{kl} = & \{E[(X_k - \widehat{X}_k)\varphi_l + (X_l - \widehat{X}_l)\varphi_k + (\psi\nu\psi_1^T)_{kl} | Y_{t_0}^t] \\ & - E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k | Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} E[X_l(\varphi_1 - \widehat{\varphi}_1) \\ & + (\psi\nu\psi_1^T)_l^T | Y_{t_0}^t]\} dt + E[(X_k - \widehat{X}_k)(X_l - \widehat{X}_l)(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) \\ & + (X_k - \widehat{X}_k)(\psi\nu\psi_1^T)_l + (X_l - \widehat{X}_l)(\psi\nu\psi_1^T)_k | Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} \\ & \times (dY - \widehat{\varphi}_l dt)(k, l = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Haciendo algunas transformaciones en la fórmula anterior(2.104), obtenemos la fórmula de la matriz diferencial estocástica para la matriz de covarianza como la solución de

$$\begin{aligned} dR = & \{E[(X - \widehat{X})\varphi(Y, X, t)^T + \varphi(Y, X, t)(X^T - \widehat{X}^T) - E\{X\{(\varphi_1(Y, X, t)^T - \widehat{\varphi}_1^T)\} + \\ & (\psi\nu\psi_1^T)(Y, X, t) | Y_{t_0}^t\}(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)E\{(\varphi_1(Y, X, t) - \widehat{\varphi}_1)\}X^T \\ & + (\psi_1\nu\psi^T)(Y, X, t) | Y_{t_0}^t]\} dt \\ & + \sum_{\rho=1}^r E\{[(X - \widehat{X})(X^T - \widehat{X}^T)a_\rho(Y, X, t) + (X - \widehat{X})b_\rho(Y, X, t)^T \\ & + (X - \widehat{X})^T] | Y_{t_0}^t\} (dY_\rho - \widehat{\varphi}_{l\rho} dt). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Hasta aquí se ha establecido el planteamiento del problema y su solución para el caso de la obtención de los algoritmos de filtrado para un proceso representado por ecuaciones de estado lineales, y de observaciones lineales, con la presencia de disturbios, los cuales se comportan como ruidos blancos Gaussianos, lo cual fue desarrollado por Kalman-Bucy. En esta tesis se presenta el planteamiento del problema del filtro y control para ecuaciones de estado íntegro-diferenciales (del tipo Itô-Volterra) y ecuaciones polinomiales (de grados

3 y 4) con observaciones lineales y con la presencia de ruidos blancos Gaussianos y la obtención de los algoritmos del filtro, regulador y controlador correspondientes.

## 2.4. Teoría de Control Óptimo

### 2.4.1. Principio del Máximo de Pontryagin

#### Planteamiento del Problema

Sea  $\mathcal{U}$  un conjunto de funciones continuas parte por parte  $u(t)$ , con valores en  $U$  donde  $U$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^m$ ; cada función  $u(t)$  es definida en algún intervalo  $[t_0, t_1]$ ;  $f(t, x, u)$  es una función vectorial, la cual es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas con respecto a las coordenadas de  $x$ ;  $\phi$  es una función vectorial de clase  $C^1$ . Una función  $u(t)$  en  $\mathcal{U}$  será llamada control. Para un control  $u(t)$  definido en  $[t_0, t_1]$ , la solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.106)$$

en el intervalo  $[t_0, t_1]$  con condición inicial  $x(t_0) = x_0$  será llamada la trayectoria correspondiente al control  $u(t)$  y la condición inicial  $x_0$ . El valor de  $x(t)$  en el tiempo  $t$  es llamado el estado del sistema en el tiempo  $t$ . La ecuación (2.106) es llamada ecuación de movimiento del sistema. Los términos involucrados más frecuentemente son controles y trayectorias. La función vectorial  $\phi(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))$  será denominada el índice de efectividad del sistema. La efectividad, depende del estado inicial  $x_0 = x(t_0)$  y el control  $u(t)$  y está dada por

$$J(x_0, u) = \phi_1(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)). \quad (2.107)$$

Los siguientes  $k - 1$  componentes de  $\phi$  se definen a través de las ecuaciones

$$\phi_j(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0, j = 2, \dots, k \quad (2.108)$$

y las condiciones para las trayectorias del sistema. Un par  $(x_0, u)$ , se considera realizable, si la solución  $x(t)$  de (2.106) en  $[t_0, t_1]$  con la condición inicial  $x(t_0) = x_0$  y las condiciones (2.108) son satisfechas por  $x(t)$ . Denotemos por  $\mathcal{F}$  la clase de pares realizables  $(x_0, u)$ . El problema de control óptimo consiste en encontrar en la clase  $\mathcal{F}$  un elemento  $(x_0, u)$  tal, que el índice de efectividad sea minimizado. Algunos ejemplos pueden ser vistos en [3]. Un par  $(x_0, u)$  de  $\mathcal{F}$  que alcanza el mínimo, se denomina condición inicial óptima y control óptimo. Algunos métodos computacionales han sido ideados y ampliamente utilizados para la solución de este problema de optimización; algunos de ellos son presentados en [49], [31], [61]. La teoría y el uso de estos métodos numéricos se puede apreciar en [38], [36], [68].

### Solución

La expresión  $H(t, x, u) = P(t)^T f(t, x, u)$  es generalmente llamada el Hamiltoniano, en analogía con una expresión correspondiente de mecánica clásica, ver Goldstein [42]. Las condiciones necesarias para la optimalidad del problema de control óptimo están contenidas en el Principio de Pontryagin. Las condiciones del Principio de Pontryagin reducen el cálculo del control óptimo a la solución de dos problemas de frontera para un conjunto de ecuaciones diferenciales con una condición de minimización.

**Teorema [39]** (Principio de Máximo de Pontryagin)

Las condiciones necesarias, tales que  $(x_0^*, u^*(t))$  sea una condición inicial y un control óptimo para el problema de control óptimo, es la existencia de un vector no cero,  $k$ -dimensional  $\delta$  con  $\delta \leq 0$  y una función vectorial  $n$ -dimensional  $P(t)$ , tal que para  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t)^T &= -P(t)^T f_x(t, x^*(t), u^*(t)), \\ t &\in [t_0, t_1], u \in U. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Esta ecuación es llamada ecuación de co-estado (impulso):

$$P(t)^T [f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t))] \leq 0. \quad (2.110)$$

Esta ecuación es llamada condición de control óptimo; y las siguientes son llamadas condiciones de transversalidad [69]:

$$P(t_1)^T = \delta^T \phi_{x_1}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)); \quad (2.111)$$

$$P(t_0)^T = \delta^T \phi_{x_0}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)); \quad (2.112)$$

$$P(t_1)^T f(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) = -\delta^T \phi_{t_1}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)); \quad (2.113)$$

$$P(t_0)^T f(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) = \delta^T \phi_{t_0}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)); \quad (2.114)$$

donde  $\phi_{x_1}$  significa la derivada parcial de  $\phi$  con respecto a  $x_1$  y así respectivamente  $\phi_{t_1}, \phi_{x_1}, \phi_{t_0}$ . Si  $f(t, x, u)$  tiene una derivada parcial continua  $f_t(t, x, u)$ , entonces la condición

$$P(t)^T f_x(t, x^*(t), u^*(t)) = \delta^T \phi_{t_0}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)) + \int_{t_0}^t P(s)^T f_t(s, x^*(s), u^*(s)) ds \quad (2.115)$$

se cumple para cada  $t \in [t_0, t_1]$ , y esta expresión es la condición de constancia del Hamiltoniano en los puntos óptimos  $(x^*, u^*, t)$ . La condición (2.110) puede ser expresada como

$$\max_{u \in U} H(t, x^*(t), u) = H(t, x^*(t), u^*(t))$$

y es llamado Principio del Máximo de Pontryagin. Un control se denomina extremo si las condiciones del Principio de Pontryagin son satisfechas y la trayectoria correspondiente satisface

$$\dot{o}_j(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0; j = 2, \dots, k. \quad (2.116)$$

Las condiciones (2.111)-(2.114) son generalizaciones de condiciones encontradas en problemas de cálculo de variaciones y de control óptimo [30] ,[70]. Dadas las condiciones del Principio de Pontryagin, las condiciones necesarias de optimalidad pueden ser un control extremo; dado que las condiciones no necesitan ser suficientes, para la optimalidad, puede darse un control extremo que no sea óptimo.

## 2.4.2. Programación Dinámica

El método de Programación Dinámica fue desarrollado por R. E. Bellman a finales de los 1950 s [28]. En este método es considerada una familia de puntos iniciales fijos en los problemas de control. El valor mínimo de la eficacia del criterio es considerado como una función valor de este punto inicial. Si la función valor es diferenciable, esta satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden llamada ecuación diferencial de programación dinámica. Una condición suficiente para la optimalidad puede ser expresada en términos de la solución continuamente diferenciable de la ecuación diferencial de programación dinámica para el problema del regulador lineal.

### Planteamiento del problema

Consideremos un problema de optimización dado por (2.106), (2.107), con las condiciones iniciales establecidas en 2.4.1. Dado el sistema

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

con condición inicial  $x(t_0)$ , conocida y la ecuación (2.107). Nuestro problema consiste en encontrar el control óptimo  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , el cual minimice

$$V(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^T l(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + m(x(T)), \quad (2.117)$$

siendo definido externamente el número de veces que debe de ser diferenciable  $f(x, u, t)$ ,  $l(x(\tau))$ ,  $u(\tau)$  y  $m(x(T))$ .  $f(x, u, t)$  puede ser arbitraria, pero  $l(x(\tau))$  y  $u(\tau)$  deben ser no negativas y pueden suponerse como cantidades físicas que serán minimizadas. El índice de efectividad o criterio depende del estado inicial  $x(t_0)$ , y del tiempo  $t_0$ , y del control  $u(t)$  para toda  $t \in [t_0, T]$ , y se define como

$$V^*(x(t), t) = \min_{u[t, T]} V(x(t), u(\cdot), t),$$

donde  $V^*(x(t), t)$  se denomina la función de Bellman. Si la salida del sistema en el tiempo  $t$  es  $x(t)$ , el valor mínimo de efectividad en (2.117) es  $V^*(x(t), t)$ . Se puede notar que  $V^*(x(t), t)$  es independiente de  $u(t)$ , por que el conocimiento del estado inicial y el tiempo inicial, determina el control particular por el requerimiento de que el control minimice  $V(x(t), u(\cdot), t)$ .

El método de Programación Dinámica pone un interés especial a la función valor, razón por la cual se establecen las siguientes propiedades:

- La función valor evaluada a lo largo de alguna trayectoria correspondiente a un control realizable para las condiciones iniciales de su estado, es una función no decreciente en el tiempo.
- La función valor evaluada a lo largo de una trayectoria óptima es constante.

## Solución

### La Ecuación Diferencial de Programación Dinámica

**Teorema [59]** Sea  $(s, y)$  algún punto interior del conjunto extendido  $Q_0$ , en el cual la función  $V(s, y)$  es diferenciable. Entonces  $V(s, y)$  satisface la desigualdad diferencial

$$V_s + V_y f(s, y, v) \geq 0,$$

para toda  $v \in U$ . Si  $u^*$  es el control óptimo en  $F_{s,y}$ , entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dV^*}{dt} = \min_{v \in U} V_s + V_y f(s, y, v) = 0 \quad (2.118)$$

se satisface. El mínimo en (2.118) es alcanzado por el límite derecho de  $u^*(s)^+$  tanto del control óptimo como de  $s$ . La ecuación diferencial parcial (2.118) es llamada ecuación diferencial parcial de programación dinámica. Para problemas donde el control óptimo existe, el teorema anterior establece que la función valor debe de satisfacer la ecuación diferencial parcial de programación dinámica en cada punto interior de el conjunto alcanzable en el cual esta es diferenciable.

### 2.4.3. Regulador Lineal Óptimo

#### Control en Lazo Abierto

#### Planteamiento del Problema

Dado el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.119)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y entrada de control  $u \in \mathbb{R}^m$  y un criterio cuadrático asociado

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T R u dt. \quad (2.120)$$

La matriz de peso, simétrica, de control  $R$  es elegida de acuerdo con los objetivos de control. Pero  $R$  se supone positiva definida; esto es,  $R$  tiene valores propios positivos, tales que  $u^T R u > 0$  para todo  $u(t) \neq 0$ . En este caso,  $J$  es acotado por debajo por el cero, de tal manera que se obtiene una sensible minimización de los resultados del problema. Dado que hay cuadrados de las entradas de control en (2.120), existe una tendencia a

minimizar la energía general de control. De esta forma, se determinará el control  $u(t)$  que minimice  $J(t_0)$  y conduzca el sistema de un estado inicial  $x(t_0) = x_0$  a un valor de referencia final de  $r_T$  especificado por un valor fijo del tiempo final  $T$ . Es decir, se requiere que

$$x(T) = r_T, \quad (2.121)$$

para un valor dado de  $T$ . Dado que el sistema (2.119) es lineal y el criterio (2.120) es cuadrático, este problema es llamado problema lineal-cuadrático del estado final fijo.

### Solución

La solución a nuestro problema lineal-cuadrático de control es obtenida en la siguiente forma. El Hamiltoniano es

$$H(t) = \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T (A x + B u), \quad (2.122)$$

donde  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$  es un multiplicador no determinado. Las ecuaciones de estado y co-estado son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A x + B u, x(t_0) = x_0 \\ -\dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial x} = A^T \lambda, \lambda(T) = \lambda, \end{aligned} \quad (2.123)$$

y la condición estacionaria

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = R u + B^T \lambda. \quad (2.124)$$

Resolviendo la ecuación anterior, es obtenido el control óptimo en términos del co-estado.

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t), \quad (2.125)$$

y sustituyendo (2.125) en (2.123) se obtiene

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T\lambda. \quad (2.126)$$

Resolviendo el sistema del Hamiltoniano (2.123) y ((2.126), y tomando en cuenta las condiciones de frontera, es posible obtener el control óptimo. Integrando la segunda ecuación de (2.123) se obtiene

$$\lambda(t) = e^{A^T(T-t)}\lambda(T), \quad (2.127)$$

donde  $\lambda(T)$  es aún desconocida. Sustituyendo en (2.126) se obtiene

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T e^{A^T(T-t)}\lambda(T), \quad (2.128)$$

cuya solución es

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^t e^{A(T-\tau)}BR^{-1}B^T e^{A^T(T-\tau)}\lambda(T)d\tau. \quad (2.129)$$

Para encontrar  $\lambda(T)$ , y evaluar (2.129) se obtiene

$$x(T) = e^{A(T-t_0)}x_0 - G(t_0, T)\lambda(T), \quad (2.130)$$

donde el Gramiano  $G(t_0, t)$  es la matriz simétrica

$$G(t_0, t) \equiv \int_{t_0}^t e^{A(T-\tau)}BR^{-1}B^T e^{A^T(T-\tau)}d\tau. \quad (2.131)$$

De acuerdo con la condición (2.121), es posible resolver y obtener

$$\lambda(T) = -G^{-1}(t_0, T)[r_T - e^{A(T-t_0)}x_0]. \quad (2.132)$$

Entonces  $\lambda(T)$  es expresada en términos del estado inicial, teniendo como requisito el estado final. Finalmente, el control óptimo es encontrado, usando este resultado y sustituyendo (2.127) en (2.125) para obtener

$$u(t) = -R^{-1}B^T e^{A^T(T-t)}G^{-1}(t_0, T)[r_T - e^{A(T-t_0)}x_0]. \quad (2.133)$$

Esta es la mínima energía de control que maneja el estado para un  $x_0$  dado, a un valor requerido de  $r_T$  en un tiempo final especificado  $T$ . Una manera más eficiente de obtener el Gramiano es usando la regla de Leibnitz. Para ello, consideraremos la solución de la ecuación

$$\dot{P} = AP + PA^T + BR^{-1}B^T, \quad (2.134)$$

la cual está dada por

$$P(t) = e^{A(t-t_0)}P(t_0)e^{A^T(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{A(T-\tau)}BR^{-1}B^Te^{A^T(T-\tau)}d\tau. \quad (2.135)$$

De esta forma, si (2.135) es resuelta usando  $P(t_0) = 0$ , entonces  $G(t_0, T) = P(T)$ . La ecuación (2.134) es llamada ecuación de Lyapunov, y es lineal en  $P$ . La trayectoria del estado óptimo puede ser determinada sustituyendo (2.132) en (2.129). Esto podría ser utilizado para conocer también el valor óptimo de la función de costo cuadrática, utilizando el control propuesto. Definiendo la diferencia entre los estados final e inicial como

$$d(t_0, T) = r_T - e^{A(T-t_0)}x_0, \quad (2.136)$$

se puede sustituir (2.119) en (2.120) y escribir el criterio cuadrático óptimo como

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T d^T(t_0, T)G^{-1}e^{A(T-t)}BR^{-1}B^Te^{A^T(T-t)}G^{-1}d(t_0, T)dt. \quad (2.137)$$

Usando la definición del Gramiano resulta que la función de costo óptimo está dada por

$$\begin{aligned} J(t_0) &= \frac{1}{2}d^T(t_0, T)G^{-1}(t_0, T)d(t_0, T) \\ &= \frac{1}{2}d^T(t_0, T)P^{-1}(T)d(t_0, T). \end{aligned} \quad (2.138)$$

En la siguiente tabla se presenta un resumen de las características principales del regulador lineal cuadrático de lazo abierto:

<b>Modelo del sistema</b>	$\dot{x} = Ax + Bu, t \geq t_0, x(t_0) = x_0$ dado
<b>Condición final del estado</b>	$x(T) = r_T, r_T$ dado.
<b>Función de costo</b>	$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T R u dt, R > 0$
<b>Control de lazo abierto</b>	
<b>Ecuación de Lyapunov</b>	$\dot{P} = AP + PA^T + BR^{-1}B^T, P(t_0) = 0$
<b>Control de lazo abierto</b>	$u(t) = R^{-1}B^T e^{A^T(T-t)} P^{-1}(T) d(t_0, T)$ donde $d(t_0, T) = r_T - e^{A(T-t_0)} x_0$
<b>Costo óptimo</b>	$J(t_0) = \frac{1}{2} d^T(t_0, T) P^{-1}(T) d(t_0, T)$

## Regulador de Lazo Cerrado

### Planteamiento del problema

Considere el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.139)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y entrada de control  $u \in \mathbb{R}^m$ . En vez de demandar un estado final fijo, solo se requiere que el estado final  $x(T)$  no sea cero en un tiempo específico  $T$ . Así, el estado final es libre y el interés es encontrar el control que minimice la función cuadrática

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x^T(T) S(T) x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt. \quad (2.140)$$

El peso del control  $R$ , el peso del estado  $Q$ , y el peso del estado final  $S(T)$ , son matrices simétricas elegidas de acuerdo a los objetivos de control. Se supone que  $Q$  y  $S(t)$  tienen valores propios no negativos, tales que  $x^T Q x$  y  $x^T(T) S(T) x(T)$  son no negativos para toda  $x(t)$ . De la misma forma,  $R$  también es positiva definida, es decir  $R$  tiene valores propios positivos, tales que  $u^T R u > 0$  para toda  $U(t) \neq 0$ . En este caso  $J$  es siempre acotado por

debajo por el cero, de lo cual resulta un problema sensible de minimización. Dados los cuadrados de los estados y las entradas de control en (2.140), se pretende minimizar una energía generalizada ( se puede considerar el caso en el cual los componentes del estado son velocidades o corrientes y voltajes). Este problema es llamado problema del regulador lineal cuadrático libre del estado final.

### Solución

La solución al problema de control óptimo libre del estado final se obtiene en la siguiente forma. El Hamiltoniano está dado por

$$H(t) = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (A x + B u), \quad (2.141)$$

donde  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$  es un multiplicador no determinado. Las ecuaciones de estado y co-estado son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A x + B u \\ -\dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial x} = Q x + A^T \lambda, \end{aligned} \quad (2.142)$$

y la condición estacionaria

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = R u + B^T \lambda. \quad (2.143)$$

Resolviendo la ecuación anterior, es obtenido el control óptimo

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t). \quad (2.144)$$

Sustituyendo (2.144) en la primera ecuación de (2.143), se obtiene

$$\dot{x} = A x - B R^{-1} B^T \lambda, \quad (2.145)$$

la cual puede ser combinada con la ecuación de co-estado en el sistema homogéneo Hamiltoniano

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

La matriz de coeficientes es llamada matriz Hamiltoniana. La condición inicial es el valor conocido  $x_0$  de  $x(t_0)$ . El tiempo final es fijo. Dado que el estado final  $x(T)$  es libre,  $dx(T)$  no es igual a cero, entonces la condición final está dada por

$$\lambda(T) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{T=} S(T)x(T). \quad (2.146)$$

Para encontrar el control óptimo, se resolverá este problema de frontera. El método de solución utilizado supone que  $x(t)$  y  $\lambda(t)$  satisfacen la relación lineal (2.146) para todo tiempo en el intervalo  $[t_0, T]$  y son tales que

$$\lambda(t) = S(t)x(t) \quad (2.147)$$

para alguna función matricial  $S(t)$  desconocida. Para obtener la función auxiliar  $S(t)$ , se deriva la función de co-estado para obtener

$$\dot{\lambda} = \dot{S}x + S\dot{x} = \dot{S}x + S(Ax - BR^{-1}B^T Sx) \quad (2.148)$$

donde se ha utilizado la ecuación de estado. Por otro lado, con la ecuación de co-estado se verifica que, para todo  $t$ :

$$-\dot{S}x = (A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q)x. \quad (2.149)$$

En base a la ecuación anterior, para alguna condición inicial  $x_0$ , y, por lo tanto, para todas las trayectorias del estado, se podría tener

$$-\dot{S}x = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q, t \leq T. \quad (2.150)$$

Esta es la ecuación matricial de Riccati, la cual es bilineal en  $S$ . En términos de la solución de Riccati  $S(t)$ , la ley de control óptima está dada por

$$u(t) = -R^{-1}B^T S(t)x(t). \quad (2.151)$$

Definiendo la ganancia de Kalman por

$$K(t) = R^{-1}B^T S(t), \quad (2.152)$$

se puede escribir la ley de control de la retroalimentación del estado como

$$u(t) = -K(t)x(t). \quad (2.153)$$

Al determinar el costo óptimo, usando este controlador, es posible notar que

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} (x^T S x) dt = \frac{1}{2} x^T(T) S(T) x(T) - \frac{1}{2} x^T(t_0) S(t_0) x_0. \quad (2.154)$$

Usando (2.140) y (2.154), se obtiene

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u + \dot{x}^T S x + x^T \dot{S} x + x^T S \dot{x}) dt \quad (2.155)$$

La función de costo, tomando en cuenta la ecuación de estado, puede escribirse como

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(x^T (\dot{S} + Q + A^T S + S A) x + x^T S B u + u^T B^T S x + u^T R u)] dt. \quad (2.156)$$

Si  $S(t)$  satisface la ecuación de Riccati, entonces

$$J(t_0) = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \| R^{-1} B^T S x + u \|_R^2 dt. \quad (2.157)$$

Es importante notar que la ecuación de Riccati permite que al integrando se puede escribir como un cuadrado perfecto. Seleccionando el control dado por la fórmula de (2.144), entonces  $J(t_0)$  es minimizado, y su valor óptimo está dado por

$$J(t_0) = \frac{1}{2}x_0^T S(t_0)x_0.$$

La siguiente tabla presenta un resumen de las características principales del regulador lineal cuadrático de lazo cerrado.

<b>Modelo del sistema</b>	$\dot{x} = Ax + Bu, t \geq t_0, x(t_0) = x_0$ dado
<b>Función de costo</b>	$J(t_0) = \frac{1}{2}x^T(T)S(T)x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt.$ con $S(T) \geq 0, Q \geq 0, R > 0$
<b>Ecuación de de Riccati</b>	$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q,$ $t \leq T, S(T)$ dado
<b>Ganancia de Kalman</b>	$K = R^{-1}B^T S$
<b>Retroalimentación variante en el tiempo:</b>	$u = -K(t)x$
<b>Costo óptimo</b>	$J(t_0) = \frac{1}{2}x_0^T S(t_0)x_0.$

#### 2.4.4. Controlador Lineal Óptimo

##### Planteamiento del problema

Dado un proceso que no es posible observar, representado por las ecuaciones diferenciales lineales de estado y de observaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t)x(t) + G(t)u(t) + Kw(t) \\ y(t) &= H^T(t)x(t) + Lv(t), \end{aligned} \tag{2.158}$$

donde  $F, G, H$  son matrices  $n \times n, n \times m, y n \times p$  respectivamente. Los procesos  $w(\cdot)$  y  $v(\cdot)$  son ruidos blancos Gaussianos. El problema consiste en encontrar el control óptimo  $u^*(t)$  que minimice la función cuadrática de costo dada por

$$J(t_0) = E\left\{\frac{1}{2}z_0^T \Phi z_0 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Q_1 x + u^T R u) dt\right\} \quad (2.159)$$

a lo largo de la trayectoria  $x^*(t)$ , generada al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación de estado (2.158).  $\Phi, Q_1$  son matrices no negativas definidas y  $R$  es una matriz positiva definida.

### Principio de Separación

El principio de separación [56], el cual es válido en sistemas de ecuaciones diferenciales lineales estocásticas, establece lo siguiente: puesto que no hay observaciones directas, es posible reemplazar la ecuación del estado del sistema no observable  $x(t)$  por la ecuación de su estimado óptimo  $m(t)$

$$\frac{dm}{dt} = F(t)m(t) + G(t)u(t) + P(t)H(t)L^{-1}(t)[y(t) - H^T(t)m(t)], \quad (2.160)$$

con la condición inicial  $m(t_0) = m_0$ , donde  $P(t)H(t)L^{-1}(t)$  denota la ganancia de Kalman.  $P(t) = E[x(t) - m(t)][x(t) - m(t)]^T$ . Además,  $P(t)$  es la solución de

$$\dot{P} = PF^T + FP - PHL^{-1}H^T P + KK^T, P(t_0) = P_0. \quad (2.161)$$

Entonces, es posible verificar que el problema de control óptimo (2.158) y la función de costo (2.159) son equivalentes al problema de control óptimo para el estimado (2.160) y la función de costo representada por

$$J = E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)Q_1(s)m(s)ds\right\} \quad (2.162)$$

$$+\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \text{tr}[P(s)Q_1(s)]ds + \text{tr}[P(T)\Phi],$$

donde  $\text{tr}[A]$  denota la traza de la matriz  $A$ .

Dado que la última parte de  $J$  es independiente del control  $u(t)$  y del estado  $x(t)$ , la función de costo reducida a ser minimizada  $M$  toma la forma

$$M = E\left\{\frac{1}{2} [m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)Q_1(s)m(s)ds\right\}. \quad (2.163)$$

En conclusión, el principio de separación para sistemas lineales establece que la solución del problema original de control óptimo especificada para (2.158),(2.159) puede encontrarse resolviendo el problema de control óptimo dado por (2.160),(2.163). Además, el valor mínimo del criterio  $J$  debe ser determinado usando (2.162).

### Solución

Tomando como base la solución al problema de control óptimo del estado de un sistema lineal observable, los siguientes resultados son válidos para el problema de control óptimo (2.160), (2.163), donde el estado del sistema (el estimado  $m(t)$ ) es completamente disponible y observable. La ley de control óptimo está dada por

$$u^* = R^{-1}(t)G^T(t)Q(t)m(t), \quad (2.164)$$

donde  $Q(t)$  es la solución de la siguiente ecuación dual de la varianza

$$\dot{Q} = -F^T Q - QF - QGR^{-1}G^T Q + Q_1, t \leq T. \quad (2.165)$$

con la condición terminal  $Q(T) = \Phi$ . Sustituyendo la ley de control óptimo (2.164) en la ecuación (2.160) para el estado reconstruido del sistema  $m(t)$ , se obtiene la ecuación para

el estimado del estado óptimamente controlado:

$$\frac{dm}{dt} = F(t)m(t)G(t)R^{-1}(t)G^T(t)Q(t)m(t) + P(t)H(t)R^{-1}(t)[y(t) - H^T(t)m(t)], \quad (2.166)$$

con la condición inicial  $m(t_0) = m_0$ . En esta forma queda completa la solución al controlador para sistemas lineales, la cual está dada por la ecuación del estado óptimamente controlado (2.166), la ecuación de la matriz de ganancia (2.165), la ley de control óptimo (2.164), y la ecuación para la varianza (2.161).

## 2.5. Teoría de Vibrosoluciones

Antes de enunciar la teoría referente a vibrosoluciones es necesaria la presentación de algunos conceptos importantes.

**Definición** Una función  $f$  definida sobre algún intervalo  $[a, b]$ , se dice de variación acotada, si existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C, \quad (2.167)$$

para toda partición  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  del intervalo  $[a, b]$ .

**Definición** Sea  $f$  una función de variación acotada. Entonces la *variación total* de  $f$  sobre  $[a, b]$  está dada por

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \quad (2.168)$$

donde la mínima cota superior es tomada sobre todas las posibles particiones (finitas) del intervalo  $[a, b]$ .

### Condición de Lipschitz

La condición de Lipschitz puede enunciarse en la siguiente forma:  $f(t, x)$  satisface la

desigualdad

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \| \quad (2.169)$$

para toda  $(t, x)$  y  $(t, y)$  en alguna vecindad de  $(t_0, x_0)$ .

### Planteamiento del Problema

Sea considerada la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) + b(x, u, t)\dot{u}(t), x(t_0) = x_0, \quad (2.170)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x, u, t)$ ,  $b(x, u, t)$  son funciones absolutamente continuas, y  $u(t)$  es una función escalar de variación acotada. Dada la estructura de la ecuación anterior, en la cual se presenta la multiplicación de  $\dot{u}(t)$  por una función discontinua en  $t$ ,  $b(x, u, t)$ , (2.170) no puede tener una solución convencional. Para la obtención de la solución es necesaria la presentación de algunos conceptos importantes.

**Definición** La función continua por la izquierda  $x(t)$  es una vibrosolución de (2.170) si la convergencia \*-débil

$$* - \lim u^k(t) = u(t), k \rightarrow \infty, \quad (2.171)$$

de una sucesión arbitraria de funciones continuas  $u^k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  en el espacio de las funciones de variación acotada implica la convergencia análoga

$$* - \lim x^k(t) = x(t), k \rightarrow \infty, \quad (2.172)$$

de las soluciones correspondientes  $x^k(t)$  de la ecuación

$$\dot{x}^k(t) = f(x^k, u^k, t) + b(x^k, u^k, t)\dot{u}^k(t), x^k(t_0) = x_0, \quad (2.173)$$

independiente de la elección de una sucesión aproximada  $\{u^k(t)\}$ .

**Teorema de Helley [67]** La convergencia \*-débil en el espacio de funciones de variación

acotada

$$* - \lim u^k(t) = u(t), k \rightarrow \infty, t \geq t_0, \quad (2.174)$$

toma lugar si y solo si las siguientes condiciones se cumplen

- $\lim u^k(t_0) = u(t_0), k \rightarrow \infty, t \geq t_0,$
- $\lim u^k(t) = u(t), k \rightarrow \infty, t \geq t_0,$  en todos los puntos de continuidad de la función  $u(t)$ , y
- $\sup_k \text{Var}_{t_0}^t u^k(t) < \infty$  para toda  $t \geq t_0.$

### Solución

Las condiciones de existencia y unicidad para una vibrosolución están dadas por las siguientes proposiciones.

**Proposición 1** Si las funciones  $f(x, u, t), b(x, u, t), \partial b(x, u, t)/\partial x, \partial b(x, u, t)/\partial t$ , son continuas en  $x, u, t$  y satisfacen la condición de Lipschitz en  $x$ , entonces existe una única vibrosolución de (2.170).

De esta manera, una vibrosolución de (2.170) coincide con una solución convencional de la ecuación (2.170) si y solo si  $u(t)$  es una función absolutamente continua. Generalmente una vibrosolución  $x(t)$  es definida como un límite de las soluciones convencionales bajo una aproximación especial de una función  $u(t)$  por funciones absolutamente continuas, y es discontinua como una función de variación acotada, en los puntos de discontinuidad de la función  $u(t)$ . Dado que (2.170) no determina los saltos de la vibrosolución en los puntos de discontinuidad de  $u(t)$  en una forma explícita; la siguiente proposición proporciona una manera de obtener los saltos de la vibrosolución directamente.

**Proposición 2** Sean las funciones  $f(x, u, t), b(x, u, t), \partial b(x, u, t)/\partial x, \partial b(x, u, t)/\partial t$ , tales

que satisfacen las condiciones de la proposición 1. Entonces una vibrosolución de (2.170) es también una solución de la ecuación con una medida

$$dx(t) = f(x, u, t)dt + b(x, u, t)du^c(t) + \sum_{t_i} G(x(t_i-), u(t_i-), \Delta u(t_i), t_i)d\chi(t - t_i), x(t_0) = x_0, \quad (2.175)$$

donde  $G(z, v, u, s) = K(z, v, v + u, s) - z$ ; una función  $K(z, v, u, s)$  es una solución de la ecuación

$$dK/du = b(K, u, s), K(v) = z,$$

$u^c(t)$  es el componente continuo de una función de variación acotada  $u(t)$ ,  $\Delta u(t_i) = u(t_i+) - u(t_i-)$  es el salto de una función  $u(t)$  con discontinuidades en  $t = t_i, i = 1, 2, \dots, t_i$  son puntos de discontinuidad de una función  $u(t)$ , y  $\chi(t - t_i)$  es una función de Heaviside.

## Capítulo 3

# Control Óptimo en Sistemas de Itô-Volterra

### 3.1. Control Óptimo en Sistemas Continuos de Itô-Volterra

#### 3.1.1. Planteamiento del Problema

Sea  $(\Omega, F, P)$  un espacio completo de probabilidad con una familia creciente y continua por la derecha de  $\sigma$ -álgebras  $F_t, t \geq 0$ , y sea  $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$  un  $F_t$ -adaptado proceso de Wiener. Consideremos el proceso  $F_t$ -medible  $x(t)$  gobernado por la ecuación de Itô-Volterra

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + b(t, s)u(t, s))ds + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \quad (3.1)$$

Aquí  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t, s) \in \mathbb{R}^p$  es la variable de control, el proceso de Wiener  $W_1(t)$  representa disturbios aleatorios independientes e idénticamente

distribuidos, y el vector inicial Gaussiano  $x(t_0)$  es independiente de  $W_1(t)$ . La función de costo cuadrática a ser minimizada  $J$  es definida como sigue:

$$J = E\left[\frac{1}{2}[x(T) - x_0]^T \Psi [x(T) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)R(s)u(t, s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)Q(s)x(s)ds\right], \quad (3.2)$$

donde  $x_0$  es un vector dado,  $R$  es una matriz simétrica definida positiva,  $\Psi$  y  $Q$  son matrices simétricas no negativas,  $T > t_0$  es un cierto momento en el tiempo,  $E[f(x)]$  expresa la esperanza matemática (media) de una función  $f$  de una variable aleatoria  $x$ , y  $a^T$  denota la transpuesta de un vector (matriz)  $a$ . El problema de control óptimo consiste en encontrar  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , que minimice el criterio  $J$  a lo largo de la trayectoria  $x^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , generada al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación de estado (3.1).

### 3.1.2. Principio de Dualidad

Para sistemas dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales, la solución del problema de control óptimo puede ser obtenida usando la solución del problema de filtrado y el principio de dualidad [33, 58]. El principio de dualidad para sistemas integrales es introducido a continuación. Consideremos el sistema integral de Volterra:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t (a(t, s)x(s) + b(t, s)u(t, s))ds, \\ y(t) &= \int_{t_0}^t c(t, s)x(s)ds + \int_{t_0}^t d(t, s)u(t, s)ds, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= z(t_0) + \int_{t_0}^t -a^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^t c^T(t, s)v(t, s)ds, \\ \gamma(t) &= \int_{t_0}^t b^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^t d^T(t, s)v(t, s)ds. \end{aligned} \quad (3.4)$$

El principio de dualidad establece que (3.3) es controlable (observable) en  $t_0$ , si y solo si el sistema (3.4) es observable (controlable) en  $t_0$ .

La demostración del principio de dualidad para sistemas integrales [23] es basada en el hecho de que existe la matriz de transición  $\Phi(t, t_0)$ ;  $t, t_0 \in (-\infty, \infty)$ , tal que

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)b(t, \tau)u(t, \tau)d\tau.$$

### 3.1.3. Solución al Problema Dual de Filtrado

La solución al problema de control óptimo para sistemas integrales estocásticos es basada en la aplicación del principio de dualidad a la solución del problema de filtrado óptimo obtenido en [26], [27]. De este modo, consideremos el problema de filtrado, dual al problema de control dado por (3.1),(3.2), para la ecuación de estado

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(t, s) - a^T(t, s)z(s))ds + \int_{t_0}^t Q^{1/2}(s)dW_3(s) \quad (3.5)$$

y la ecuación de observación

$$y(t) = \int_{t_0}^t (b^T(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t R^{1/2}(s)dW_4(s), \quad (3.6)$$

donde  $W_3(s)$  y  $W_4(s)$  son procesos de Wiener independientes uno del otro y del vector inicial Gaussiano  $z(t_0)$ . El problema de filtrado es encontrar el mejor estimado del proceso de Itô-Volterra  $x(t)$  al tiempo  $t$ , basado en el proceso de observación  $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$ , que está dado por la esperanza matemática  $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ . Denotemos la función de correlación del mejor estimado como  $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$ .

Como fue demostrado en [26], [27] y en artículos previos [51, 74], es imposible obtener un sistema cerrado de ecuaciones para las variables  $m(t)$  y  $P(t)$ , dada la naturaleza de las ecuaciones de Volterra (3.5) y (3.6). Asignar un sistema cerrado de ecuaciones requiere

la introducción adicional de una función de correlación cruzada  $f(t, s)$ , caracterizando la desviación del mejor estimado  $m(t)$  para el estado real  $x(t)$ :

$$f(t, s) = E\{(z_s^t - m_s^t)(z(s) - m(s))^T \mid F_{t,s}^Y\},$$

donde

$$z_s^t = z(t_0) + \int_{t_0}^s (a_0^T(t, r) - a^T(t, r)z(r))dr + \int_{t_0}^s Q^{1/2}(r)dW_3(r),$$

$F_{t,s}^Y$  es la  $\sigma$ -algebra generada por el proceso estocástico  $y_s^t$

$$y_s^t = \int_{t_0}^s b^T(t, s)z(s)ds + \int_{t_0}^s R^{1/2}(s)dW_4(s),$$

$$\text{y } m_s^t = E(z_s^t \mid F_{t,s}^Y).$$

El filtro óptimo para el vector de estado (3.5) sobre el proceso de observaciones continuas (3.6) es dado en [26] por las siguientes ecuaciones para el estimado óptimo  $m(t)$ , su función de correlación  $P(t)$ , y la función de correlación cruzada  $f(t, s)$  :

$$\begin{aligned} m(t) = & m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) - a^T(t, s)m(s))ds + \\ & \int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}[dy(s) - b^T(t, s)m(s)ds], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} P(t) = & P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(t, s)f^T(t, s) - f(t, s)a(t, s) + Q(s)]ds - \\ & \int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s)ds, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} f(t, s) = & P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - \\ & f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr - \int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) + \\ & f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) - \\ & (1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) - \\ & (1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)]dr, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $m(t_0) = E(z(t_0) | F_{t_0}^Y) = x_0$  y  $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$  son las condiciones iniciales.

Por tanto, la solución al problema de control definido por (3.1), (3.2) ahora puede ser obtenida usando la expresión para la matriz de ganancia del filtro óptimo en (3.7) y la ecuación de correlación cruzada (3.9).

### 3.1.4. Solución al Problema de Control Óptimo para Sistemas Continuos de Itô-Volterra

Dado que la matriz de ganancia del filtro en (3.7) es igual a

$$M_f(t, s) = f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1},$$

la matriz de ganancia dual en el problema de control óptimo toma su forma transpuesta

$$M_c(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s).$$

Aquí, la ley de control óptima del problema (3.1),(3.2) es dada por

$$u^*(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s), \quad (3.10)$$

donde  $f(t, s)$  es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$\begin{aligned} f(t, s) = & P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr - \\ & \int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) + \\ & f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) - \\ & (1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) - \\ & (1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)]dr. \end{aligned} \quad (3.11)$$

con la condición terminal  $f(T, T) = P(T) = \Psi$ . Finalmente, sustituyendo la ley de control óptima (3.10) en la ecuación de estado (3.1), es obtenida la ecuación del estado óptimamente controlado

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \quad (3.12)$$

## 3.2. Control Óptimo en Sistemas Discontinuos de Itô-Volterra

### 3.2.1. Planteamiento del problema

Sea  $(\Omega, F, P)$  un espacio completo de probabilidad con una familia de  $\sigma$ -álgebras  $F_t, t \geq 0$ , y sea  $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$  un proceso de Wiener. Consideremos el proceso aleatorio  $F_t$ -medible  $x(t)$  gobernado por la ecuación de Itô-Volterra

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \quad (3.13)$$

En la cual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t, s) \in \mathbb{R}^m$  es la variable de control, el proceso de Wiener  $W_1(t)$  representa disturbios aleatorios, los cuales son independientes entre sí y de la condición inicial o vector Gaussiano  $x(t_0)$ , y además son idénticamente distribuidos. La función de costo cuadrático a minimizar  $J$  es definida como sigue

$$J = E\left[\frac{1}{2}[x(T) - x_0]^T \Psi^{-1} [x(T) - x_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)R(s)u(t, s)dv(s)\right] \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)Q(s)x(s)ds,$$

donde  $x_0$  es un vector dado,  $\Psi$ ,  $R$ ,  $Q$  son matrices simétricas,  $R$  es una matriz positiva y  $\Psi$ ,  $Q$  son no negativas,  $T > t_0$  es un momento en el tiempo,  $E[f(x)]$  es la esperanza matemática de la función  $f$  de una variable aleatoria  $x$ , y  $a^T$  denota la transpuesta de un vector (matriz)  $a$ .

El problema de control óptimo consiste en encontrar el control  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , que minimice el criterio  $J$  a lo largo de la trayectoria  $x^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , generada al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación de estado (3.13).

### 3.2.2. Solución al Problema de Filtrado

La solución al problema de control discontinuo para sistemas integrales estocásticos es basada en la aplicación del principio de dualidad a la solución del problema de filtrado óptimo discontinuo obtenido en [26], [27]. Aplicando el principio de dualidad a los sistemas discontinuos, es obtenida la siguiente solución al problema discontinuo de filtrado, correspondiente a la solución dual del problema de control (3.13), (3.14), para el estado no observable:

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(t, s) - a^T(t, s)z(s))ds + \int_{t_0}^t Q^{1/2}(s)dW_3(s), \quad (3.15)$$

y el proceso de observaciones discontinuas

$$y(t) = \int_{t_0}^t (b^T(t, s)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t R^{1/2}(s)dW_4(v(s)), \quad (3.16)$$

donde  $W_3(s)$  y  $W_4(s)$  son procesos de Wiener independientes entre sí y del vector Gaussiano inicial  $z(t_0)$ .

El problema de filtrado consiste en encontrar el mejor estimado para el proceso de ItôVolterra  $x(t)$  en el tiempo  $t$ , basado en el proceso de observaciones  $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq$

$s \leq t$ }, esto es, la esperanza matemática condicional  $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ . Denotamos la función de correlación del mejor estimado como  $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$ . En esta situación, similarmente al caso de observaciones continuas, es imposible construir un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado para las variables  $m(t)$  y  $P(t)$ , debido a la naturaleza de las ecuaciones de Itô-Volterra (3.15) y (3.16). Para la obtención del filtro en forma cerrada, requerimos introducir una función de correlación cruzada  $f(t, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la cual caracteriza la desviación del mejor estimado  $m(t)$  del estado real  $x(t)$ :

$$f(t, s) = E((z_s^t - m_s^t)(z(s) - m(s))^T | F_{t,s}^Y),$$

donde

$$z_s^t = z(t_0) + \int_{t_0}^s (a_0^T(t, r) - a^T(t, r)z(r))dr + \int_{t_0}^s Q^{1/2}(r)dW_3(r),$$

$F_{t,s}^Y$  es la familia de  $\sigma$ -álgebras generada por el proceso estocástico  $y_s^t$

$$y_s^t = \int_{t_0}^s b^T(t, s)z(s)dv(s) + \int_{t_0}^s R^{1/2}(s)dW_4(v(s)),$$

and  $m_s^t = E(z_s^t | F_{t,s}^Y)$ .

Como resultado tenemos las ecuaciones para el filtro:  $m(t)$ ,  $P(t)$  y  $f(t, s)$

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) - a^T(t, s)m(s))ds + \int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}[dy(s) - b^T(t, s)m(s)dv(s)], \quad (3.17)$$

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(t, s)f^T(t, s) - f(t, s)a(t, s) + Q(s)]ds - \int_{t_0}^t f(t, s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s)dv(s), \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
f(t, s) = & P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr \quad (3.19) \\
& - \int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) + \\
& f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) - \\
& (1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) - \\
& (1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)]dv(r),
\end{aligned}$$

donde  $m(t_0) = E(z(t_0) | F_{t_0}^Y)$  y  $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ ,  $f(t_0, t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$  son las condiciones iniciales. Las funciones  $m(t)$  y  $P(t)$  tienen saltos en los puntos de discontinuidad de la función  $v(t)$ , y la función  $f(t, s)$  es continua en  $t$  y tiene saltos en  $s$  en los mismos puntos de discontinuidad de  $v(t)$ . La solución al problema de control óptimo definido por (3.13),(3.14) puede ser obtenido usando la expresión para la matriz de ganancia del filtro óptimo contenida en la ecuación (3.17) y la función de correlación cruzada (3.19).

### 3.2.3. Solución al Problema de Control

Basado en el principio de dualidad el problema de control obtiene su matriz de ganancia a partir de las ecuaciones de filtrado. Así, la ley de control óptima está dada por

$$u^*(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s), \quad (3.20)$$

y  $f(t, s)$  es la solución de la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned}
f(t, s) = & P(t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr \quad (3.21) \\
& - \int_{t_0}^s [f(t, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) + \\
& f(s, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r) -
\end{aligned}$$

$$(1/2)f(t, r)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r) - \\ (1/2)f(s, r)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r)\}dv(r),$$

con la condición terminal  $f(T, T) = P(T) = \Psi^{-1}$ .

Sustituyendo la ley de control (3.20) en la ecuación de estado (3.13), la ecuación de estado para el controlador óptimo está dada por

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)f^T(t, s)x(s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \quad (3.22)$$

Las ecuaciones obtenidas (3.19)-(3.21) son integrales, con integración con respecto a una medida discontinua generada por una función de variación acotada  $v(t)$ , para la cual las discontinuidades de la función  $v(t)$  corresponden a las discontinuidades en el estado  $x(t)$ . Por otro lado, los saltos pueden ser encontrados resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, donde  $x(t-)$  y  $f(t, s-)$  son valores a la izquierda de  $x(t)$  y de su correlación cruzada  $f(t, s)$  en sus puntos de discontinuidad  $t$  y  $(t, s)$ , respectivamente:

$$\frac{dx}{dv} = b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f^T(t, v)x(v), \quad (3.23) \\ x(0) = x(t-), \quad v \in [0, \Delta v(t)],$$

$$\frac{df(t, v)}{dv} = -[f(t, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) + \\ f(s, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v) - \\ (1/2)f(t, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) - \\ (1/2)f(s, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v)], \quad (3.24) \\ f(t, 0) = f(t, s-), \quad v \in [0, \Delta v(s)].$$

Las expresiones para los saltos están dadas por

$$\Delta x(t) = b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f^T(t, t-)x(t-)\Delta v(t),$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(t, s) = & -[f(t, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)) + & (3.25) \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s) \times \\
& f^T(t, s-) - (1/2)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s) \times \\
& f(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1}b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-) + \\
& f(s, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-) + \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)f(s, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-) + \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\
& b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)f(t, s-)[I + (b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-) + \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, s-) - \\
& (1/2)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\
& b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, s-)]\Delta v(s),
\end{aligned}$$

donde  $I$  es la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ . Las fórmulas para los saltos pueden ser incorporadas en las ecuaciones (3.19)-(3.21), usando la forma equivalente de las ecuaciones

con medida:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + & (3.26) \\
 & a(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s) \times \\
 & f^T(t, s-)x(s-)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \\
 f(t, s) &= \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)f^T(t, r) - f(s, r)a(t, r) + Q(r)]dr - \\
 & \int_{t_0}^s [f(t, r-)[I + (b(s, r)(R(r)))^{-1}b^T(s, r) \times \\
 & f^T(s, r-) + b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r) \times \\
 & f^T(t, r-) - (1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r) \times \\
 & f^T(t, r-) - (1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
 & b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) + \\
 & f(s, r-)[I + (b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) + \\
 & b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
 & (1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
 & (1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
 & b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
 & (1/2)f(s, r-)[I + (b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) + \\
 & b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
 & (1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
 & (1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
 & b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
 & (1/2)f(t, r-)[I + (b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& (1/2)b(s, r)(R(r))^{-1}b^T(t, r)f^T(t, r-) - \\
& (1/2)b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-))\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& b(t, r)(R(r))^{-1}b^T(s, r)f^T(s, r-)]dv(r),
\end{aligned}$$

con la condición terminal  $f(T, T) = P(T) = \Psi^{-1}$ . Aquí  $\Delta v(t)$  es el salto de la función de variación acotada  $v(t)$  en su punto de discontinuidad  $t$ , y  $x(t-)$  y  $f(t, s-)$  son los valores para el lado izquierdo del estado  $x(t)$  y para formar la matriz de ganancia  $f(t, s)$  con sus puntos de discontinuidad  $t$  y  $(t, s)$ , respectivamente.

### 3.3. Control Óptimo en la Planta Dinámica

#### 3.3.1. Planteamiento del Problema

Puede ser significativamente más simple trabajar en el caso de las ecuaciones para la planta dinámica, si la ecuación de estado (3.13) tiene una parte interna diferencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + \\
& a(s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

y la función de costo cuadrático  $J$  es la misma que en la sección 3.2.1. Entonces, el problema dual de filtrado para el estado no observado, podría ser formulado como sigue:

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0^T(s) - a^T(s)z(s))ds + \int_{t_0}^t Q^{1/2}(s)dW_3(s) \tag{3.28}$$

y el proceso de observaciones discontinuas

$$y(t) = \int_{t_0}^t (b^T(t, s)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t R^{1/2}(s)dW_4(v(s)). \tag{3.29}$$

### 3.3.2. Solución

Como fue probado en [22], [25] en el caso de ecuaciones dinámicas (3.28), es posible obtener un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado con respecto a  $m(t)$  y a  $P(t)$ , sin introducir a  $f(t, s)$ . Estas ecuaciones de filtrado toman la forma:

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) - a^T(s)m(s))ds + \int_{t_0}^t P(s)b(t, s)(R(s))^{-1}[dy(s) - b^T(t, s)m(s)dv(s)], \quad (3.30)$$

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + Q(s)]ds - \int_{t_0}^t P(s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s)dv(s), \quad (3.31)$$

donde  $m(t_0) = E(z(t_0) | F_{t_0}^Y)$  y  $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$  son las condiciones iniciales. Tomando como base el principio de dualidad para las matrices de ganancia del filtro y el control, es posible obtener la ley de control óptimo, la cual está dada por

$$u^*(t, s) = R^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)x(s), \quad (3.32)$$

y  $P(s)$  es la solución de la ecuación de Riccati

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + Q(s)]ds - \int_{t_0}^t [P(s)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s)]dv(s), \quad (3.33)$$

con la condición terminal  $P(T) = \Psi^{-1}$ . Sustituyendo la ley de control óptima  $u^*$  en la ecuación de estado (18), la ecuación para el estado óptimo  $x(t)$  está dada por:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s) + b(t, s)R^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)x(s))dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s). \quad (3.34)$$

Los saltos del estado controlado  $x(t)$  y la ecuación de la matriz de ganancia  $P(t)$  con los puntos de discontinuidad de  $v(t)$  toman la forma más simple:

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)P(t-)x(t-)\Delta v(t), \\ \Delta P(t) &= -[P(t-)[I + (b(t, t)(R(t))^{-1} \times \\ &\quad b^T(t, t)P(t-)\Delta v(t)]^{-1}b(t, t)(R(t))^{-1}b^T(t, t)P(t)]\Delta v(t),\end{aligned}\tag{3.35}$$

los cuales pueden ser incorporados a las siguientes ecuaciones con medida

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)R^{-1}(s) \times \\ &\quad b^T(t, s)P(s-)x(s-))dv(s) + \int_{t_0}^t g(s)dW_1(s).\end{aligned}\tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}P(t) &= \int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + Q(s)]ds - \int_{t_0}^t [P(s-)[I + \\ &\quad (b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s-)\Delta v(s)]^{-1}b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)P(s-)]dv(s),\end{aligned}\tag{3.37}$$

con la condición terminal  $P(T) = \Psi^{-1}$ .

## 3.4. Ejemplo: Movimiento de un Misil con Motores Jet e Impulsivo

### 3.4.1. Planteamiento del Problema

Consideremos el problema de control para el movimiento de un misil con dos motores, impulsivo y jet (continuo), cuya tarea es alcanzar la máxima posible altitud en un cierto momento en el tiempo  $T > 0$  con el mínimo consumo de combustible. El movimiento del

misil es gobernado por las siguientes ecuaciones [32]:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= h_0 + \int_0^t v(s) ds, \\
 m(t) &= m_0 + \int_0^t \frac{P_p(s)}{C(t, s)} ds, \\
 v(t) &= \int_0^t \frac{P_p(s) - Q(h, v)}{m(s)} dw(s) - \int_0^t g ds + \int_0^t r(s) dW(s),
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

donde  $t_0 = 0$ ,  $v(t)$  es la velocidad del misil,  $v_0 = v(0) = 0$ ;  $h_0 = h(0) > 0$  es la altura inicial ajustada correspondiente a la posición del misil sobre la superficie de la tierra, y  $h(t)$  es la altitud ajustada;  $m(s)$  es la masa del misil y del combustible,  $m_0 = m_0$ ,  $m_0 \gg 0$ ;  $P_p(t)$  es la fuerza de propulsión;  $C(t, s) < 0$  es el factor de diferencia entre la velocidad ideal del misil en el tiempo  $t$  y la velocidad del salida del flujo de combustible en el tiempo  $s$ , la cual es variante con el cambio de altitud y, consecuentemente, con la temperatura, presión, aceleración de la gravedad, etc.;  $g$  es la aceleración de la gravedad, considerada constante;  $r(s)dW(s)$  es el disturbio estocástico representado por un proceso de Wiener y se presenta como el efecto resultante de disturbios independientes y con distribución desconocida, afectando la dinámica de la velocidad; y  $w(s)$  es una función de variación acotada, la cual representa el funcionamiento de dos motores del misil: el motor jet expulsa combustible gradualmente y el impulsivo hace esto instantáneamente en un momento  $t_1$ ,  $0 \leq t_1 \leq T$ . Además, el funcionamiento de los motores es descrito usando la descomposición de  $w(t)$  en su componente continuo  $w^c(t)$  (jet continuo) y la función de Heaviside  $\chi(t - t_1)$  con salto en el momento  $t_1$  (motor impulsivo), i.e.,  $w(t) = w^c(t) + \chi(t - t_1)$ .

Se supone que no hay resistencia del aire :  $Q(h, v) = 0$ .

Seleccionando la función de la masa  $u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))]$  como control, el problema de control es completamente establecido por el estado del sistema  $x(t) = [h(t), v(t)]$ ,

gobernado por la ecuación

$$x(t) = x_0 + \int_0^t Ax(s)ds + \int_0^t B(t, s)u(s)dw(s) + \int_0^t Gds + \int_0^t R(s)dW(s), \quad (3.39)$$

donde

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B(t, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}, R(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ r(s) \end{bmatrix}, u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))],$$

$$x_0 = [h_0, 0],$$

y la función de costo a ser minimizada

$$J = \frac{1}{2} \left[ x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \psi \left[ x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s)dw(s) \rightarrow \min_{u(\cdot)}$$

donde  $\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $h^* \gg h_0$ , y  $T > 0$  es un cierto momento en el tiempo.

### 3.4.2. Solución

De acuerdo con (3.32), la ley de control óptimo está dada por

$$u^*(t, s) = \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}.$$

Note que la altitud inicial ajustada  $h_0 > 0$  es determinada por las condiciones  $v(0) = 0$  y  $\dot{v}(0) = 0$  (aquí el misil está equilibrado sobre la superficie de la tierra en el momento

inicial); sustituyendo la ley de control óptima  $u^*(t, s)$  en la ecuación de la velocidad, obtenemos  $0 = C(t_0, t_0)u^*(t_0, t_0) - g = C(0, 0)u^*(0, 0) - g$ . Así, la altitud inicial ajustada  $h_0 > 0$  es determinada por la ecuación

$$g = C(0, 0) \begin{bmatrix} 0 & C(0, 0) \end{bmatrix} P(0) \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (3.36)–(3.37), las ecuaciones para la trayectoria óptima  $x(t)$  y la matriz  $P(t)$  toman la forma

$$\begin{aligned} P(t) &= P(0) - \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P(s) ds \\ &- \int_0^t P(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds - \int_0^t P(s-) \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) \Delta w(s) \right]^{-1} \\ &\times \left. \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \right] \left[ \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) dw(s), \end{aligned}$$

con la condición terminal  $P(T) = \psi$ , y

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(s) + G \right\} ds + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \\ &\times \left[ \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) x(s-) dw(s) + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ r(s) \end{bmatrix} dW(s), \end{aligned}$$

con la condición inicial  $x(0) = \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , y sus saltos en el punto  $t_1$ , donde el motor impulsivo es activado, son iguales a  $\Delta P(t_1)$  donde

$$\begin{aligned} \Delta P(t_1) &= P(t_1^-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \times \left. \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1^-) \Delta w(t_1) \right\}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1^-) \Delta w(t_1), \\ \Delta x(t_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1^-) x(t_1) \Delta w(t_1). \end{aligned}$$

De esta manera, el algoritmo completo para resolver este problema de control óptimo es descrito a continuación:

- Resolver la ecuación para la matriz  $P(t)$  con la condición terminal  $P(T) = \psi$  y el salto  $\Delta P(t_1)$  en el punto  $t_1$ ;
- Determinar la condición inicial  $P(0)$ ;
- Calcular la altitud inicial ajustada  $h_0$ ;
- Sustituir  $u^*(t, s)$  en las ecuaciones de estado y resolver estas con las condiciones iniciales  $h(0) = h_0$  y  $v(0) = 0$ , obteniendo la trayectoria óptima  $[h(t), v(t)] = x(t)$ , donde la velocidad  $v(t)$  tiene un salto en el punto  $t_1$ , y la altitud ajustada  $h(t)$  es continua;
- La máxima altitud deseada es determinada como  $h(T) - h_0$ .

## Capítulo 4

# Controlador Óptimo para Sistemas no Observables de Itô-Volterra

### 4.1. Controlador Óptimo para Sistemas Continuos de Itô-Volterra

#### 4.1.1. Planteamiento del Problema

Sea  $(\Omega, F, P)$  un espacio de probabilidad con una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras  $F_t, t \geq 0$ , y sean  $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$  y  $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$  procesos de Wiener  $F_t$  adaptados. Consideremos el proceso aleatorio no observable  $F_t$ -medible  $x(t)$  gobernado por la ecuación de Itô-Volterra

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s) + b(t, s)u(t, s))ds + \int_{t_0}^t g(t, s)dW_1(s) \quad (4.1)$$

y la salida (proceso de observación)

$$y(t) = \int_0^t (A_0(t, s) + A(t, s)x(s))ds + \int_0^t B(t, s)dW_2(s). \quad (4.2)$$

Aquí,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado no observable,  $u(t, s) \in \mathbb{R}^p$  es la variable de control,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  es el proceso de observación, y los procesos de Wiener independientes  $W_1(t)$  y  $W_2(t)$  representan disturbios aleatorios en la ecuación de estado y en la ecuación de observaciones, los cuales son independientes del vector inicial Gaussiano  $x(t_0)$ . Sean  $A(t, s)$  matrices no cero y sea  $B(t, s)B^T(t, s)$  una matriz definida positiva. El criterio de costo cuadrático a ser minimizado  $J$  es definido como sigue:

$$J = E\left[\frac{1}{2}[x(T) - z_0]^T \Phi [x(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds\right], \quad (4.3)$$

donde  $z_0$  es un vector dado,  $\Phi$ ,  $K$ ,  $L$  son matrices simétricas,  $K$  es positiva, y  $\Phi$  y  $L$  son matrices no negativas,  $T > t_0$  es un cierto momento en el tiempo,  $E[f(x)]$  representa el valor esperado o esperanza matemática de una función  $f$  de una variable aleatoria  $x$ , y  $a^T$  denota el transpuesto del vector (matriz)  $a$ .

El problema de control óptimo consiste en encontrar el control óptimo  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , el cual minimice el criterio  $J$  a lo largo de la trayectoria  $x^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , generada al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación de estado (4.1).

#### 4.1.2. Principio de Separación en Sistemas Integrales

Así como el principio de separación es válido en sistemas lineales estocásticos gobernados por ecuaciones diferenciales, también es válido en sistemas integrales lineales estocásticos, gobernados por ecuaciones de Itô-Volterra. Reemplazando el estado del sistema no observable  $x(t)$  por su estimado óptimo  $m(t)$  dado por la ecuación (ver [26], [27])

$$m(t) = m(t_0) + \int_0^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s) + b(t, s)u(t, s))ds + \int_0^t f(t, s).A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))ds], \quad (4.4)$$

con la condición inicial  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$ , donde la ecuación para  $f(t, s)$  toma la forma (ver [26], [27] )

$$\begin{aligned}
f(t, s) = & f(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [a(s, r)f^T(t, r) + f(s, r)a^T(t, r) + \\
& (1/2)(g(t, r)g^T(s, r) + g(s, r)g^T(t, r))]dr - \\
& \int_0^s [f(t, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) + \\
& f(s, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r) - \\
& (1/2)f(t, r)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r) - \\
& (1/2)f(s, r)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r)]dr,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

con la condición inicial  $f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ . Note que, dada  $S(t) = f(t, t)$ , la ecuación para la varianza  $S(t)$  resulta directamente de (4.5):

$$\begin{aligned}
S(t) = & S(t_0) + \int_{t_0}^t [a(t, s)f^T(t, s) + f(t, s)a^T(t, s) + \\
& g(t, s)g^T(t, s)]ds - \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}A(t, s)f^T(t, s)ds,
\end{aligned}$$

donde  $S(t_0) = f(t_0, t_0)$ . De este modo, el problema de control óptimo para el estado del sistema (4.1) y la función de costo o criterio (4.3) son equivalentes al problema de control para el estimado óptimo (4.4) y la función de costo cuadrático  $J$ , representada como:

$$\begin{aligned}
J = & E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] \right. \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s)K(s)u(t, s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T tr[S(s)L(s)]ds + tr[S(T)\Phi]\right\},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde  $tr[A]$  denota la traza de la matriz  $A$ .  $\Phi, K, L$  son matrices simétricas,  $K$  es una matriz positiva definida y  $\Phi$  y  $L$  son matrices no negativas. Dado que la última parte de  $J$

es independiente del control  $u(t)$  y  $x(t)$ , la función reducida de costo  $M$  a ser minimizada toma la forma

$$M = E\left\{\frac{1}{2}[m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s) K(s) u(t, s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s) L(s) m(s) ds\right\}. \quad (4.7)$$

Tomando en cuenta el principio de separación, podemos concluir que para los sistemas integrales de Itô-Volterra, la solución para el problema de control planteado por (4.1)-(4.3) puede ser encontrada resolviendo el problema de control óptimo dado por (4.4),(4.7). Ahora, el valor mínimo del criterio  $J$  debe de ser determinado usando (4.6).

### 4.1.3. Solución del Problema de Control Óptimo

Tomando en cuenta los resultados obtenidos en el capítulo previo, en el caso del estado observable del sistema, los siguientes resultados son válidos para el problema de control dado por (4.4),(4.7), donde el estimado  $m(t)$  del estado del sistema es completamente disponible y observable.

La ley de control óptima está dada por

$$u^*(t, s) = K^{-1}(s) b^T(t, s) q^T(t, s) m(s), \quad (4.8)$$

donde  $q(t, s)$  es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$q(t, s) = q(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r) q^T(t, r) - q(s, r) a(t, r) + L(r)] dr - \int_{t_0}^s [q(t, r) b(s, r) (K(r))^{-1} b^T(s, r) q^T(s, r) + q(s, r) b(t, r) (K(r))^{-1} b^T(t, r) q^T(t, r) - (1/2) q(t, r) b(t, r) (K(r))^{-1} b^T(s, r) q^T(s, r) - (1/2) q(s, r) b(s, r) (K(r))^{-1} b^T(t, r) q^T(t, r)] dr. \quad (4.9)$$

con la condición terminal  $q(T, T) = \Phi$ .

Sustituyendo la ley de control óptima (4.8) en la ecuación (4.4) para el estado reconstruido  $m(t)$ , obtenemos el siguiente estimado del estado óptimamente controlado

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, s)m(s)ds + \int_{t_0}^t b(t, s)K^{-1}(s)b^T(t, s)q(t, s)m(s)ds \quad (4.10)$$

$$+ \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))ds].$$

Así, la ecuación del estado óptimamente controlado (4.10), la ecuación de la matriz de ganancia (4.9), la ley de control óptima (4.8), y la función de correlación cruzada (4.5), conforman la solución completa del problema del controlador para estados no observables de sistemas integrales continuos gobernados por ecuaciones de Itô-Volterra.

## 4.2. Controlador Óptimo en Sistemas no Observables y Discontinuos de Itô-Volterra

### 4.2.1. Planteamiento del Problema

Consideremos el proceso aleatorio  $F_t$ -medible  $x(t)$  gobernado por la ecuación de Itô-Volterra

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)x(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_{t_0}^t g(t, s)dW_1(s) \quad (4.11)$$

y el proceso de salida (observaciones) está dado por:

$$y(t) = \int_0^t (A_0(t, s) + A(t, s)x(s))dw(s) + \int_0^t B(t, s)dW_2(w(s)), \quad (4.12)$$

Donde tanto la ecuación de estado como la de las observaciones son integrales del tipo Volterra con integración por medida discontinua. Las medidas discontinuas en las ecuaciones de estado y de observación son generadas por funciones de variación acotada  $v(t)$  y  $w(t)$ , las cuales pueden coincidir en sus puntos de discontinuidad (saltos). Aquí, la función de observación  $y(t)$  puede ser discontinua debido a la discontinuidad de la integral con medida discontinua  $dw(t)$  en la ecuación (4.12). Esta ecuación de observaciones contempla dos tipos de observaciones: continuas, correspondientes a la parte continua de la función de variación acotada  $w(t)$ , y discretas, correspondientes a su función de saltos.

La función de costo cuadrática a minimizar  $J$  es definida en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 J = & E\left\{\frac{1}{2} [x(T) - z_0]^T \Phi [x(T) - z_0] + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t, s) K(s) u(t, s) dv(s) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s) L(s) x(s) ds\right\},
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde  $z_0$  es un vector dado,  $\Phi$ ,  $K$ ,  $L$  son matrices simétricas,  $K$  es una matriz positiva, y  $\Phi$ , y  $L$  son no-negativas,  $T > t_0$  es un cierto momento en el tiempo. El problema de control para el estado del sistema no observable  $x(t)$  consiste en encontrar el control  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , que minimice el criterio  $J$  a lo largo de la trayectoria  $x^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , generada al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación de estado (4.11). La trayectoria del estado  $x(t)$  podría ser discontinua, por las discontinuidades en la integral donde se encuentra la función  $v(t)$  en el lado derecho de (4.11). Este modelo de sistema considera dos tipos de movimiento (trayectorias), es decir. cambios en el sistema de posición (saltos), y movimientos graduales continuos. El modelado de estados de sistemas de Itô-Volterra a lo largo de observaciones discontinuas del tipo de Volterra en los cuales se consideran sistemas lineales continuos, discretos y con retardos en la forma dada por (4.11),(4.12), fue hecho en [22], [25].

## 4.2.2. Principio de Separación en Sistemas Integrales Discontinuos

El principio de separación para sistemas discontinuos con observaciones discontinuas es basado en el caso continuo. Se efectuarán las siguientes acciones (planteadas en [67]):

- Suponiendo que las funciones  $v(t)$  y  $w(t)$  en las ecuaciones de estado y de observación (4.11) y (4.12) sean absolutamente continuas, se aplicaría el principio de separación obtenido en la subsección 4.1.2, en el cual el problema de control óptimo es modificado por la ecuación de estado (4.4), el criterio (4.7), la función de correlación cruzada (4.5), y el valor del criterio óptimo (4.6);
- En las ecuaciones obtenidas de este modo, suponemos que las funciones  $v(t)$  y  $w(t)$  son de variación acotada, para las cuales sus derivadas  $\dot{v}(t)$  y  $\dot{w}(t)$  pueden ser funciones generalizadas de singularidad de orden cero (por ejemplo,  $\delta$ -función), generando integración con medidas discontinuas  $dv(t)$  y  $dw(t)$ .

Como un resultado de la realización de dichas acciones, el estado no observable  $x(t)$  del sistema (4.11) es reemplazado por su estimado óptimo  $m(t)$ , dado por la ecuación

$$\begin{aligned}
 m(t) = & m(t_0) + \int_0^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s))ds + \\
 & \int_0^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \\
 & \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1} \times \\
 & [dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))dw(s)],
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

con la condición inicial  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$ , donde la función de correlación cruzada  $f(t, s)$  satisface la ecuación de Riccati:

$$f(t, s) = \int_0^s [a(s, r)f^T(t, r) + f(s, r)a^T(t, r) + \dots] \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)(g(t,r)g^T(s,r) + g(s,r)g^T(t,r))]dr - \\
& \int_0^s [f(t,r)A^T(s,r)(B(s,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f^T(s,r) + \\
& (s,r)A^T(t,r)(B(t,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f^T(t,r) - \\
& (1/2)(f(t,r)A^T(t,r)(B(t,r)B^T(s,r))^{-1}A(s,r)f^T(s,r) - \\
& f(s,r)A^T(s,r)(B(s,r)B^T(t,r))^{-1}A(t,r)f^T(t,r))]dw(r).
\end{aligned}$$

con la condición inicial  $f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ . Por otro lado, el problema de control para el sistema (4.11) y la función de costo cuadrático (4.13) son equivalentes al problema de control para el estimado óptimo (4.14) y la función de costo  $J$ , representada como:

$$\begin{aligned}
J = E\{ & \frac{1}{2} [m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t,s)K(s)u(t,s)dv(s) \quad (4.16) \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T tr[S(s)L(s)]ds + tr[S(T)\Phi]\},
\end{aligned}$$

la cual puede ser reducida a la función de costo  $M$

$$\begin{aligned}
M = E\{ & \frac{1}{2} [m(T) - z_0]^T \Phi [m(T) - z_0] \quad (4.17) \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(t,s)K(s)u(t,s)dv(s) \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds\}.
\end{aligned}$$

Así, la solución al problema de control óptimo especificado en (4.11),(4.13) puede ser encontrada resolviendo el problema de control óptimo dado por (4.14),(4.17) y usando (4.16) para el mínimo valor del criterio  $J$ .

### 4.2.3. Solución al Problema de Control para Sistemas Discontinuos

En base a la solución al problema de control óptimo obtenido en el capítulo previo, en el caso de un estado del sistema observable discontinuo, los siguientes resultados son válidos para el problema de control (4.14), (4.17), donde el estado del sistema (el estimado óptimo  $m(t)$ ) es completamente disponible y observable. La ley de control óptimo está dada por

$$u^*(t, s) = K^{-1}(s)b^T(t, s)q^T(t, s)m(s), \quad (4.18)$$

donde  $q(t, s)$  es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$\begin{aligned} q(t, s) = & q(t_0, t_0) + \\ & \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)q^T(t, r) - q(s, r)a(t, r) + L(r)]dr \\ & - \int_{t_0}^s [q(t, r)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r) + \\ & q(s, r)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r) - \\ & (1/2)q(t, r)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r) - \\ & (1/2)q(s, r)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r)]dv(r), \end{aligned}$$

con la condición terminal  $q(T, T) = \Phi$ .

Sustituyendo la ley de control óptimo (4.18) en la ecuación (4.14) para el estado reconstruido  $m(t)$ , se obtiene la siguiente ecuación para el estimado óptimamente controlado

$$\begin{aligned} m(t) = & m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s))ds + \\ & \int_{t_0}^t b(t, s)K^{-1}(s)b^T(t, s)q^T(t, s)m(s)dv(s) + \\ & \int_0^t f(t, s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1} \times \\ & (dy(s) - (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))dw(s)), \end{aligned} \quad (4.19)$$

con la condición inicial  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$ . Las ecuaciones obtenidas (4.19), (4.19), así como la ecuación (4.15) para la función de correlación cruzada  $f(t, s)$ , son ecuaciones integrales con integración por medidas discontinuas generadas por funciones de variación acotada  $v(t)$  y  $w(t)$ , las cuales no nos indican la forma de encontrar los saltos de las variables del controlador (el estimado  $m(t)$ , su función de correlación cruzada  $f(t, s)$ , y la matriz de ganancia  $q(t, s)$ ). Los puntos de discontinuidad de las funciones  $v(t)$  y  $w(t)$ , corresponden a discontinuidades en el estado del sistema  $x(t)$  y el proceso de observación  $y(t)$ . El método directo para encontrar los saltos fue dado por el Teorema 3 en [26], [27] por medio del cual se establece que los saltos pueden ser encontrados resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, donde  $x(t-)$  y  $f(t, s-)$  son valores a la izquierda del estado del sistema  $x(t)$  y su función de correlación cruzada  $f(t, s)$  y sus puntos de discontinuidad  $t$  y  $(t, s)$  respectivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dv} &= b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f(t, v)x(v), & (4.20) \\
x(0) &= x(t-), \quad v \in [0, \Delta v(t)], \\
\frac{df(t, v)}{dv} &= -[f(t, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) + \\
&\quad f(s, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v) - \\
&\quad (1/2)f(t, v)b(t, s)(R(s))^{-1}b^T(s, s)f^T(s, v) - \\
&\quad (1/2)f(s, v)b(s, s)(R(s))^{-1}b^T(t, s)f^T(t, v)], \\
f(t, 0) &= f(t, s-), \quad v \in [0, \Delta v(s)].
\end{aligned}$$

#### 4.2.4. Ecuaciones de los Saltos

Resolviendo el sistema anterior, las expresiones para los saltos están dadas por:

$$\Delta x(t) = b(t, t)R^{-1}(t)b^T(t, t)f(t, t-)x(t-)\Delta v(t). \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
\Delta m(t) &= f(t, t^-)[I + A^T(t, t)(B(t, t)B^T(t, t))^{-1}A(t, t) \times \\
&\quad f^T(t, t^-)\Delta w(t)]^{-1}A^T(t, t)(B(t, t)B^T(t, t))^{-1} \times \\
&\quad [\Delta y(t) - (A_0(t, t) + A(t, t)m(t^-))\Delta w(t)] + \\
&\quad b(t, t)K^{-1}(t)b^T(t, t)[I + A^T(t, t)(B(t, t)B^T(t, t))^{-1}A(t, t) \times \\
&\quad f^T(t, t^-)\Delta w(t)]^{-1}q(t, t^-)m(t^-)\Delta v(t), \\
\Delta f(t, s) &= -[f(t, s^-)[I + (A^T(s, s)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1} \times \\
&\quad A(s, s)f^T(s, s^-) + A^T(t, s)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s) \times \\
&\quad f^T(t, s^-) - (1/2)(A^T(s, s)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s) \times \\
&\quad f^T(t, s^-) - A^T(t, s)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s)f(s, s^-)) \times \\
&\quad \Delta w(s)]^{-1}A^T(s, s)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s)f^T(s, s^-) + \\
&\quad f(s, s^-)[I + (A^T(s, s)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s) \times \\
&\quad f^T(s, s^-) + A^T(t, s)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s)f^T(t, s^-) - \\
&\quad (1/2)(A^T(s, s)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s)f^T(t, s^-) - \\
&\quad A^T(t, s)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s)f^T(s, s^-))\Delta w(s)]^{-1} \times \\
&\quad A^T(t, s)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s)f^T(t, s^-) - \\
&\quad (1/2)f(s, s^-)[I + (A^T(s, s)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s) \times \\
&\quad f^T(s, s^-) + A^T(t, s)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s)f^T(t, s^-) - \\
&\quad (1/2)(A^T(s, s)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s)f^T(t, s^-) - \\
&\quad A^T(t, s)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s)f^T(s, s^-))\Delta w(s)]^{-1} \times \\
&\quad A^T(s, s)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s)f^T(t, s^-) - \\
&\quad (1/2)f(t, s^-)[I + (A^T(s, s)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s) \times \\
&\quad f^T(s, s^-) + A^T(t, s)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s)f^T(t, s^-) - \\
&\quad (1/2)(A^T(s, s)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, s)f^T(t, s^-) -
\end{aligned}$$

$$A^T(t, s)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s)f^T(s, s-)\Delta w(s)]^{-1} \times \\ A^T(t, s)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, s)f^T(s, s-)]\Delta w(s),$$

donde  $I$  es la matriz identidad  $n \times n$ -dimensional, y

$$\begin{aligned} \Delta q(t, s) = & -[q(t, s-)[I + (b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s) \times \\ & q^T(s, s-) + b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\ & b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-) + \\ & q(s, s-)[I + (b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-) + \\ & b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\ & b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)q(s, s-)[I + (b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-) + \\ & b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \\ & b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)q(t, s-)[I + (b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-) + \\ & b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(s, s)(K(s))^{-1}b^T(t, s)q^T(t, s-) - \\ & (1/2)b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s)]^{-1} \times \end{aligned}$$

$$b(t, s)(K(s))^{-1}b^T(s, s)q^T(s, s-)]\Delta v(s).$$

Siguiendo [25], las expresiones para los saltos pueden ser incorporadas en las ecuaciones del filtrado y el controlador (4.19), (4.21), (4.15) usando la forma equivalente de ecuaciones integrales con integración en medida discontinua

$$\begin{aligned} m(t) = & m_0 + \int_{t_0}^t (a_0(t, s) + a(t, s)m(s))ds + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)ds \\ & + \int_{t_0}^t b(t, s)K^{-1}(s)b^T(t, s)\{I + A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}A(t, s) \\ & \times f(t, s-)\Delta w(s)\}^{-1}q(t, s-)m(s-)dv(s) \\ & + \int_{t_0}^t f(t, s-)\{I + A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}A(t, s)f(t, s-)\Delta w(s)\}^{-1} \\ & \times A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - A(t, s)m(s-)dw(s)], \end{aligned} \quad (4.22)$$

con la condición inicial  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$ ,

$$\begin{aligned} f(t, s) = & f(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [a(s, r)f^T(t, r) + f(s, r)a^T(t, r) + \\ & (1/2)(g(t, r)g^T(s, r) + g(s, r)g^T(t, r))]dr - \\ & \int_{t_0}^s [f(t, r-)[I + (A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-) + \\ & A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\ & (1/2)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\ & (1/2)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-)]\Delta w(r)]^{-1} \times \\ & A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r-) + \\ & f(s, r-)[I + (A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-) + \\ & A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\ & (1/2)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\ & (1/2)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-)]\Delta w(r)]^{-1} \times \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
& A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r-) - \\
& (1/2)f(s, r-)[I + (A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-) + \\
& A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\
& (1/2)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\
& (1/2)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-)]\Delta w(r)]^{-1} \times \\
& A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f^T(t, r-) - \\
& (1/2)f(t, r-)[I + (A^T(s, r)(B(s, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-) + \\
& A^T(t, r)(B(t, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\
& (1/2)A^T(s, r)(B(s, r)B^T(t, r))^{-1}A(t, r)f(t, r-) - \\
& (1/2)A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f(s, r-)]\Delta w(r)]^{-1} \times \\
& A^T(t, r)(B(t, r)B^T(s, r))^{-1}A(s, r)f^T(s, r-)]dw(r),
\end{aligned}$$

con la condición inicial  $f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ , la función  $f(t, s)$  es continua en  $t$ , y

$$\begin{aligned}
q(t, s) = & q(t_0, t_0) + \int_{t_0}^s [-a^T(s, r)q^T(t, r) - q(s, r)a(t, r) + L(r)]dr - \quad (4.24) \\
& \int_{t_0}^s [q(t, r-)[I + (b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-) + \\
& b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-) - \\
& (1/2)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-) - \\
& (1/2)b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-) + \\
& q(s, r-)[I + (b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(s, r)q^T(s, r-) + \\
& b(t, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-) - \\
& (1/2)b(s, r)(K(r))^{-1}b^T(t, r)q^T(t, r-) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-)\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)q(s,r-)[I + (b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-) + \\
& b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)q(t,r-)[I + (b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-) + \\
& b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)b(s,r)(K(r))^{-1}b^T(t,r)q^T(t,r-) - \\
& (1/2)b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-)]\Delta v(r)]^{-1} \times \\
& b(t,r)(K(r))^{-1}b^T(s,r)q^T(s,r-)]\Delta v(r),
\end{aligned}$$

con la condición terminal  $q(T,T) = \Phi$ , la función  $q(t,s)$  es continua en  $t$ . Aquí  $\Delta w(t)$ ,  $\Delta v(t)$ , y  $\Delta y(t)$  son los saltos de las funciones de variación acotada  $w(t)$ ,  $v(t)$ , y el proceso de observaciones  $y(t)$  en el punto  $t$ , respectivamente, y  $m(t-)$ ,  $f(t,s-)$ , y  $q(t,s-)$  son los valores del controlador discontinuo y los parámetros de filtrado (el estimado  $m(t)$ , su función de correlación cruzada  $f(t,s)$ , y la matriz de ganancia  $q(t,s)$ ) en los puntos  $t$  y  $(t,s)$  por la izquierda. La ecuación del estado controlado óptimamente (4.22), la ecuación de la matriz de ganancia (4.24), la ecuación de correlación cruzada (4.23), y la ley de control óptima (4.18) dan la solución completa al problema del controlador óptimo para estados de sistemas integrales no observables, discontinuos, gobernados por ecuaciones de Itô-Volterra, incluyendo expresiones analíticas para los saltos de las variables del filtro y del controlador en los puntos de discontinuidad del estado real del sistema  $x(t)$  y el

proceso de observación  $y(t)$ .

## 4.3. Controlador Óptimo para la Planta Dinámica

### 4.3.1. Planteamiento del Problema

Como ya se vio en la sección anterior, puede ser significativamente más simple trabajar en el caso de las ecuaciones para la planta dinámica si la ecuación de estado (4.11) tiene una parte diferencial interna de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)x(s))ds \\
 & + \int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \\
 & \int_{t_0}^t g(t, s)dW_1(s),
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

y el proceso de observaciones  $y(t)$  (4.12) y la función de costo cuadrático  $J$  (4.13) son los mismos. Como fue probado en [22], [25], en el caso de la ecuación de la planta dinámica (4.25) es posible obtener un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado con respecto solo a dos variables, el estimado óptimo  $m(t)$  y su varianza  $S(t)$ , sin introducir la función de correlación cruzada  $f(t, s)$ . Estas ecuaciones de filtrado toman la forma [22], [25]:

$$\begin{aligned}
 m(t) = & m(t_0) + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)m(s))ds + \\
 & \int_0^t b(t, s)u(t, s)dv(s) + \int_0^t S(s)A^T(t, s) \times \\
 & (B(t, s)B^T(t, s))^{-1}[dy(s) - \\
 & (A_0(t, s) + A(t, s)m(s))dw(s)],
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

con la condición inicial  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$ , donde la función para la varianza  $S(t)$  satisface la ecuación de Riccati (usando como  $S(t) = f(t, t)$ )

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^s [a(s)S(s) + S(s)a^T(s) + g(t, s)g^T(t, s)]ds - \int_{t_0}^t [S(s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1} \times A(t, s)S(s)]dw(s), \quad (4.27)$$

con la condición inicial  $S(t_0) = f(t_0, t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ . Además, el problema de control óptimo para el estado del sistema (4.25) y función de costo (4.13) es equivalente al problema de control óptimo para el estado óptimo (4.26) y la función de costo (4.16), la cual puede ser reducida a la función de costo efectiva (4.17). Así, la solución para el problema de control óptimo especificado por (4.25), (4.13) puede ser encontrado resolviendo el problema de control óptimo dado por (4.26), (4.17) y usando (4.16) para el valor mínimo del criterio.

La ley de control óptimo se obtiene tomando como base los resultados obtenidos en el capítulo previo para el problema de control óptimo en sistemas de Itô-Volterra con parte interna dinámica.

### 4.3.2. Solución

La ley de control óptima es dada por

$$u^*(t, s) = K^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)m(s), \quad (4.28)$$

donde  $P(t)$  es la solución de la ecuación integral de Riccati

$$P(t) = P(t_0) + \quad (4.29)$$

$$\int_{t_0}^t [-a^T(s)P(s) - P(s)a(s) + L(s)]ds$$

$$\int_{t_0}^t [P(s)b(t,s)(K(s))^{-1}b^T(t,s)P(s)]dv(s),$$

con la condición terminal  $P(T) = q(T, T) = \Phi$ .

Sustituyendo el control óptimo (4.27) en la ecuación (4.26) para el sistema reconstruido  $m(t)$ , es obtenida la siguiente ecuación para el estimado óptimamente controlado (siguiendo la ecuación (4.22) y usando  $S(t) = f(t, t)$  y  $P(t) = q(t, t)$  )

$$m(t) = m_0 + \int_{t_0}^t (a_0(s) + a(s)m(s))ds + \tag{4.30}$$

$$\int_{t_0}^t b(t, s)u(t, s)ds +$$

$$\int_{t_0}^t b(t, s)K^{-1}(s)b^T(t, s)P(s)m(s)dv(s)$$

$$+ \int_{t_0}^t S(s)A^T(t, s)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1} [dy(s) -$$

$$A(t, s)m(s-)dw(s)]$$

con la condición inicial  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$ .

Así, en el caso de un sistema de Itô-Volterra con planta dinámica interna, la solución al problema del controlador es dada completamente por la ecuación del controlador óptimo (4.30), la ecuación de la varianza (4.27), la ecuación que constituye la matriz de ganancia (4.29), y la ley de control óptimo (4.28). Obviamente, el caso de ecuaciones de estado y de observaciones continuas en un sistema de Itô-Volterra con planta dinámica interna es resuelto asumiendo  $v(t) = t$  y  $w(t) = t$  en (4.25)–(4.30).

### 4.3.3. Saltos para la Planta Dinámica

Las ecuaciones de los saltos para controlador óptimo toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \Delta m(t) = & S(t-)[I + A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1}A(t,t) \times \\
 & S(t-)\Delta w(t)]^{-1}A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1} \times \\
 & [\Delta y(t) - (A_0(t,t) + A(t,t)m(t-))\Delta w(t)] + \\
 & b(t,t)K^{-1}(t)b^T(t,t)[I + A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1} \times \\
 & A(t,t)S(t-)\Delta w(t)]^{-1}P(t-)m(t-)\Delta v(t), \\
 \Delta S(t) = & -[S(t-)[I + (A^T(t,t)(B(t,t)B^T(t,t))^{-1} \times \\
 & A(t,t)S(t-))\Delta w(t)]^{-1}A^T(t,t) \times \\
 & (B(t,t)B^T(t,t))^{-1}A(t,t)S(t-)]\Delta w(t), \\
 \Delta P(t) = & -[P(t-)[I + (b(t,t)(K(t))^{-1}b^T(t,t)P(t-)) \times \\
 & \Delta v(t)]^{-1}b(t,t)(K(t))^{-1}b^T(t,t)P(t-)]\Delta v(s).
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Notemos finalmente que los resultados de la asignación del controlador óptimo para un sistema con planta dinámica interna se pueden aplicar a la solución del problema del controlador óptimo del lanzamiento de un misil con motores continuos y jet impulsivos y velocidad no observable, logrando la máxima posible altitud con el mínimo consumo de combustible (ver [32] para su planteamiento inicial continuo), como ha sido hecho en el capítulo previo por el correspondiente problema del regulador óptimo. Esta aplicación se presenta en la siguiente sección.

## 4.4. Movimiento de un Misil con Motores Jet e Impulsivo y Velocidad no Observable

### 4.4.1. Planteamiento del Problema

Consideremos el problema de control óptimo para el movimiento de un misil con dos motores, impulsivo y jet (continuo), cuya tarea es alcanzar la máxima altitud posible en un cierto momento en el tiempo  $T > 0$  con el mínimo consumo de combustible. El movimiento del misil es gobernado por las ecuaciones de estado siguientes ([32])

$$h(t) = h_0 + \int_0^t v(s)ds, \quad m(t) = m_0 + \int_0^t \frac{P_p(s)}{C(t, s)} ds,$$

$$v(t) = \int_0^t \frac{P_p(s) - Q(h, v)}{m(s)} dw(s) - \int_0^t g ds + \int_0^t r(s) dW_1(s),$$

donde  $t_0 = 0$ ,  $v(t)$  es la velocidad del misil,  $v_0 = v(0) = 0$ ; la información de la velocidad del misil, es reunida usando la ecuación de medida de la velocidad (observación)

$$y(t) = \int_0^t H(t, s)v(s)dw(s) + \int_0^t F(t, s)dW_2(w(s)).$$

Aquí,  $h_0 = h(0) > 0$  es la altitud inicial ajustada correspondiente a la posición del misil sobre la superficie de la tierra, y  $h(t)$  es la altitud ajustada;  $m(s)$  es la masa del misil,  $m_0 = m(0)$ ,  $m_0 \gg 0$ ;  $P_p(t)$  es la fuerza de propulsión;  $C(t, s) < 0$  es el factor de diferencia entre la velocidad real del misil al tiempo  $t$  y el flujo de salida al tiempo  $s$ , el cual es variante con el cambio de altitud y consecuentemente, con la temperatura, la presión, la aceleración de la gravedad etc.;  $g$  es la aceleración de la gravedad, la cual es considerada constante;  $r(t, s)dW_1(s)$  es una familia de disturbios estocásticos simulados usando un proceso estándar de Wiener  $W_1(s)$  y se presenta como el efecto resultante de disturbios independientes y con distribución desconocida, afectando la dinámica de la

velocidad en el tiempo  $t$ ;  $w(s)$  es una función de variación acotada, la cual representa el funcionamiento de los motores del misil, impulsivo y jet (continuo): el motor jet expulsa combustible gradualmente y el impulsivo lo hace en un cierto momento instantáneo  $t_1$ ,  $0 \leq t_1 \leq T$ . El funcionamiento de los motores es descrito usando la descomposición de  $w(t)$  en su componente continuo  $w^c(t)$  (jet continuo), y la función de Heaviside  $\chi(t - t_1)$  con salto en el momento  $t_1$  (motor impulsivo), i.e.,  $w(t) = w^c(t) + \chi(t - t_1)$ .

Dada la inexactitud del artefacto de medición y por razones naturales (tales como el efecto Doppler), la medición de la velocidad proporciona información en los valores de velocidad, no solo en el tiempo transcurrido  $t$ , sino como una suma de valores en algunos instantes previos de tiempo, presentando un caso clásico de fusión de datos. Este efecto es modelado por el término  $\int_0^t H(t, s)v(s)dw(s)$  en la ecuación de observación, donde, como el último término  $\int_0^t F(t, s)dW_2(w(s))$  toma en cuenta la influencia de una familia de disturbios estocásticos  $F(t, s)dW_2(w(s))$ , se afecta las mediciones de las velocidades  $v(s)$ ,  $0 \leq s \leq t$  en el momento de observación  $t$ . Los disturbios de las observaciones son simulados también usando un proceso estándar de Wiener  $W_2(s)$ , suponiendo que son independientes e idénticamente distribuidos. El término de medida discontinua  $dw(t)$  en la integración contenida en la ecuación de observaciones permite incorporar correctamente el salto en el estado del sistema (velocidad del misil) en el modelo de observaciones, así como también tomar en cuenta que el componente de observación discreta es afectado por disturbios independientemente de las observaciones continuas.

Se supone que la fuerza de resistencia de la atmósfera es ausente:  $Q(h, v) = 0$ .

Seleccionando la función del flujo de salida de masa  $u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))]$  como control, el problema de control óptimo es completamente establecido por el estado del sistema  $x(t) = [h(t), v(t)]$ , gobernado por la ecuación

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A x(s) ds + \int_0^t B(t, s) u(s) dw(s) + \int_0^t G ds + \int_0^t D r(t, s) dW_1(s), \quad (4.32)$$

donde

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B(t, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}, u(s) = \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} = \frac{d}{ds} [\ln(m(s))],$$

$x_0 = [h_0, 0]$ , y la función de costo a ser minimizada

$$J = \frac{1}{2} \left[ x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \psi \left[ x(T) - \begin{bmatrix} h^* \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T u(s)u(s)dw(s) \rightarrow \min_{u(\cdot)}$$

donde

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad h^* \gg h_0, \text{ y } T > 0 \text{ es un cierto momento en el tiempo.}$$

La ecuación de observación toma la forma

$$y(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & H(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix} dw(s) + \int_0^t F(t, s) dW_2(s).$$

#### 4.4.2. Solución

Se puede observar que la ecuación de estado (4.32) satisface la definición de una ecuación de Itô-Volterra con parte interna diferencial (la matriz  $A$  es constante), y podemos usar los resultados simplificados de la sección 4.3. De acuerdo con la sección 4.3.2, la ley de control óptimo está dada por

$$u^*(t, s) = \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} h(s) \\ v(s) \end{bmatrix}.$$

La altitud inicial ajustada  $h_0 > 0$  es determinada por las condiciones  $v(0) = 0$  y  $\dot{v}(0) = 0$  (este es el equilibrio del misil en la superficie de la tierra en el tiempo inicial); sustituyendo el control óptimo  $u^*(t, s)$  en la ecuación de la velocidad, se obtiene:  $0 = C(t_0, t_0)u^*(t_0, t_0) - g = C(0, 0)u^*(0, 0) - g$ . La altitud inicial ajustada se obtiene haciendo  $h_0 > 0$  en la ecuación

$$g = C(0, 0) \begin{bmatrix} 0 & C(0, 0) \end{bmatrix} P(0) \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con (4.30), (4.27), (4.29), las ecuaciones para el estimado de la trayectoria óptimamente controlada  $\hat{x}(t)$ , su varianza  $S(t)$ , y la matriz de ganancia  $P(t)$  toman la forma

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S(s) ds + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} ds + \int_0^t S(s) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ds \\ &- \int_0^t S(s-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t, s) \end{bmatrix} (F(t, s)F^T(t, s))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t, s) \end{bmatrix} S(s-) \Delta w(s) \right\}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 0 \\ H(t, s) \end{bmatrix} (F(t, s)F^T(t, s))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t, s) \end{bmatrix} S(s-) dw(s), \end{aligned}$$

con la condición inicial  $S(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} P(t) &= P(0) - \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P(s) ds - \int_0^t P(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \\ &- \int_0^t P(s-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) \Delta w(s) \right\}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} P(s-) dw(s), \end{aligned}$$

con la condición terminal  $P(T) = \psi$ , y

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = & x_0 + \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(s) + G \right\} ds + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ C(t, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t, s) \end{bmatrix} \\ & \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t, s) \end{bmatrix} (F(t, s)F^T(t, s))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t, s) \end{bmatrix} S(s-) \Delta w(s) \right\}^{-1} \\ & \times P(s-) \hat{x}(s-) dw(s) + \int_0^t S(s-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t, s) \end{bmatrix} (F(t, s)F^T(t, s))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t, s) \end{bmatrix} S(s-) \Delta w(s) \right\}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} 0 \\ H(t, s) \end{bmatrix} (F(t, s)F^T(t, s))^{-1} \left[ dy(s) - \begin{bmatrix} 0 & H(t, s) \end{bmatrix} \hat{x}(s-) dw(s) \right], \end{aligned}$$

con la condición inicial  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , y sus saltos en el tiempo  $t_1$ , donde el motor impulsivo es utilizado, son iguales a

$$\begin{aligned} \Delta S(t_1) = & S(t_1-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1, t_1) \end{bmatrix} (F(t_1, t_1)F^T(t_1, t_1))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t_1, t_1) \end{bmatrix} \right. \\ & \left. \times S(t_1-) \Delta w(t_1) \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1, t_1) \end{bmatrix} (F(t_1, t_1)F^T(t_1, t_1))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t_1, t_1) \end{bmatrix} S(t_1-) \Delta w(t_1), \\ \Delta P(t_1) = & P(t_1-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1-) \Delta w(t_1) \right\}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} P(t_1^-) \Delta w(t_1), \\
\Delta \hat{x}(t_1) = & \begin{bmatrix} 0 \\ C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C(t_1, t_1) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\
+ & \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1, t_1) \end{bmatrix} (F(t_1, t_1) F^T(t_1, t_1))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t_1, t_1) \end{bmatrix} S(t_1^-) \Delta w(t_1) \left. \right\}^{-1} P(t_1^-) \hat{x}(t_1^-) \Delta w(t_1) \\
+ S(t_1^-) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1, t_1) \end{bmatrix} (F(t_1, t_1) F^T(t_1, t_1))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & H(t_1, t_1) \end{bmatrix} S(t_1^-) \Delta w(t_1) \right\}^{-1} \\
& \times \begin{bmatrix} 0 \\ H(t_1, t_1) \end{bmatrix} (F(t_1, t_1) F^T(t_1, t_1))^{-1} \left[ \Delta y(t_1) - \begin{bmatrix} 0 & H(t_1, t_1) \end{bmatrix} \hat{x}(t_1^-) \Delta w(t_1) \right].
\end{aligned}$$

El algoritmo completo para resolver este problema de control óptimo es descrito a continuación:

- Resolver la ecuación para la matriz de varianza  $S(t)$  con la condición inicial  $S(0) = 0$  y el salto  $\Delta S(t_1)$  en el punto  $t_1$ ;
- Resolver la ecuación para la matriz de ganancia  $P(t)$  con la condición terminal  $P(T) = \psi$  y el salto  $\Delta P(t_1)$  en el punto  $t_1$ ;
- Determinar la condición inicial  $P(0)$ ;
- Calcular la altitud inicial ajustada  $h_0$ ;
- Sustituyendo  $u^*(t, s)$  en las ecuaciones del estimado óptimo y resolviendo estas con las condiciones iniciales  $\hat{h}(0) = h_0$  y  $\hat{v}(0) = 0$ , se obtiene la ecuación de la trayectoria

óptimamente controlada  $[\hat{h}(t), \hat{v}(t)] = \hat{x}(t)$ , donde el estimado óptimamente controlado de la velocidad  $\hat{v}(t)$  tiene un salto en el punto  $t_1$ , y el estimado óptimamente controlado de la altitud ajustada  $\hat{h}(t)$  es continuo;

- El estimado óptimamente controlado de la altitud máxima deseada es determinado como  $\hat{h}(T) - h_0$ .

Como se puede verificar, los algoritmos obtenidos para el controlador contienen la ecuación para la matriz de varianza, la ecuación para la matriz de ganancia, la ecuación para el estimado y las ecuaciones para los saltos de las matrices de ganancia y de varianza. Ya que para este caso, no hay observaciones. Mientras que los algoritmos del control contienen solo las ecuaciones del estimado óptimo, de la matriz de ganancia y de los saltos para la matriz de varianza.

## Capítulo 5

# Filtrado Óptimo en Sistemas Polinomiales

### 5.1. Filtrado Óptimo para Ecuaciones de Estado y de Observaciones Lineales

#### 5.1.1. Planteamiento del Problema

Previo al caso polinomial, esta sección trata del caso lineal, correspondiente al filtro de Kalman-Bucy [46]. es decir, con ecuaciones de estado y de observación lineales. Sea un proceso aleatorio no observable  $x(t)$  que satisface la ecuación lineal

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), x(t_0) = x_0, \quad (5.1)$$

y las observaciones lineales son dadas por :

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (5.2)$$

donde  $W_1(t)$  y  $W_2(t)$  son procesos de Wiener, para los cuales su derivada en sentido de la convergencia débil en media cuadrada para procesos estocásticos, es un ruido blanco Gaussiano, que son independientes uno del otro y del valor inicial Gaussiano  $x_0$ . El problema de filtrado consiste en encontrar las ecuaciones dinámicas para el mejor estimado del proceso real  $x(t)$  al tiempo  $t$ , basado en las observaciones  $Y(t) = [y(s)|0 \leq s \leq t]$ , el cual es la esperanza condicional  $m(t) = E[x(t)|Y(t)]$  del proceso real  $x(t)$  con respecto a las observaciones  $Y(t)$ . Sea  $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)]$  la varianza del error (función de correlación).

### 5.1.2. Solución

La solución a este problema es dada por el siguiente sistema de ecuaciones, el cual es cerrado con respecto a las variables  $m(t)$  y  $P(t)$ :

$$\begin{aligned}
 dm(t) &= (a_0(t) + a(t)m(t))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times & (5.3) \\
 & \quad [dy(A_0(t) + A(t)m(t))]dt, \\
 m(t_0) &= E[x(t_0)|y(t_0)], \\
 dP(t) &= (a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + b(t)b^T(t))dt - P(t) \times \\
 & \quad A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt, \\
 P(t_0) &= E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T|y(t_0)].
 \end{aligned}$$

## 5.2. Ecuación de Kushner para el Estado no Lineal y Observaciones lineales

### 5.2.1. Planteamiento del Problema

En el caso de la ecuación de estado no lineal, el problema es más complicado. Sea un proceso aleatorio no observable  $x(t)$  que satisface la ecuación

$$dx(t) = (f(x(t)))dt + b(t)dW_1(t), x(t_0) = x_0, \quad (5.4)$$

y las observaciones lineales son dadas por

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t), \quad (5.5)$$

donde  $W_1(t)$  y  $W_2(t)$  son procesos de Wiener independientes uno del otro y del valor inicial Gaussiano  $x_0$ . Todos los coeficientes en (5.4) y en (5.5) se consideran funciones determinísticas dependientes solo del tiempo  $t$ . El mejor estimado es la esperanza condicional  $m(t) = E[x(t)|Y(t)]$  del proceso real  $x(t)$  con respecto de las observaciones  $Y(t)$ , y  $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)]$  es la varianza condicional del error (función de correlación).

### 5.2.2. Solución

Dado que la ecuación de observaciones es lineal, el proceso de innovación está dado por

$$\begin{aligned} \nu(t) &= y(t) - (A_0(t) + A(t)m(t)) \\ &= (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t) - (A_0(t) + A(t)m(t)) \\ &= A(t)(x(t) - m(t)) + B(t)dW_2(t) \end{aligned}$$

es un proceso de Wiener en el caso de disturbios Gaussianos (ver [62]), y  $B(t)dW_2(t)$  es también un proceso de Wiener, entonces la variable aleatoria  $A(t)(x(t) - m(t))$  es condicionalmente Gaussiana con respecto a las observaciones para cada tiempo  $t$  [72]. Si la matriz  $A^{-1}$  existe, entonces la variable aleatoria  $(x(t) - m(t))$  es también condicionalmente Gaussiana [72]. En este caso, la ecuación de Kushner para el estimado óptimo  $m(t) = E[x(t)|Y(t)]$  toma la forma que se obtiene de la ecuación general de Kushner (ver [62]) y la ecuación de observación (5.5):

$$\begin{aligned} dm(t) &= E[f(x(t))|y(t)] + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times & (5.6) \\ & [dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt], \\ m(t_0) &= E[x(t_0)|y(t_0)]. \end{aligned}$$

Ahora, si la función  $f(x(t)) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + \dots$  es polinomial, debe ser posible encontrar un filtro finito-dimensional en forma cerrada para las variables  $m(t)$  y  $P(t)$ , usando el hecho de que la variable  $(x(t) - m(t))$  es condicionalmente Gaussiana. Esto implica que todos los momentos centrales impares de esta variable Gaussiana  $m_1 = E[(x(t) - m(t))|Y(t)]$ ,  $m_3 = E[(x(t) - m(t))^3|Y(t)]$ ,  $m_5 = E[(x(t) - m(t))^5|Y(t)]$ , ... son iguales a 0, y todos los momentos centrales pares  $m_2 = E[(x(t) - m(t))^2|Y(t)]$ ,  $m_4 = E[(x(t) - m(t))^4|Y(t)]$ , ... pueden ser representados a partir de la varianza  $P(t)$ . Por ejemplo:  $m_2 = P$ ,  $m_4 = 3P^2$ ,  $m_6 = 15P^3$ , ... etc. Además, todos los momentos superiores de  $x(t) - m(t)$  con respecto a  $Y(t)$  pueden ser expresados usando  $P(t)$ , y esto indica que debe existir la posibilidad de obtener el filtro óptimo para el caso polinomial.

## 5.3. Filtro Óptimo Polinomial para la Ecuación de Estado de Tercer Grado y Observaciones Lineales

### 5.3.1. Planteamiento del Problema

En esta sección se aplica el procedimiento anterior, para obtener el filtro óptimo para el caso en que la ecuación de estado es polinomial de tercer orden:  $f(x) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t)$  :

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + \\ &\quad b(t)dW_1(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

y las observaciones lineales están dadas por

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t), \tag{5.8}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ ,  $x^2(t) = [x_1^2(t) \ x_2^2(t) \ x_3^2(t) \ \dots \ x_n^2(t)]^T$ ,  
 $x^3(t) = [x_1^3(t) \ x_2^3(t) \ x_3^3(t) \ \dots \ x_n^3(t)]^T$ .

### 5.3.2. Solución

Dado que todos los momentos centrales impares  $(x(t) - m(t))$  son iguales a 0 y todos los momentos centrales pares pueden ser representados como funciones de  $P(t)$ , los mayores momentos iniciales del estado  $x(t)$  con respecto a las observaciones  $Y(t)$  pueden ser expresados también como funciones de  $m(t)$  y  $P(t)$ , como se hará a continuación. Sea

$m(t) \in \mathbb{R}^n$  el vector del estimado óptimo  $m(t) = [m_1(t) \ m_2(t) \ \dots \ m_n(t)]^T$ ;  $P(t) \in \mathbb{R}^n$  es la matriz del error;  $p(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector cuyos componentes son las varianzas de los componentes de  $x(t)$ , i.e., los elementos de la diagonal de la matriz  $P(t)$ ;  $m^2(t)$  es definido como el vector cuyos componentes son los cuadrados de los componentes del vector  $m(t)$ :  $m^2(t) = [m_1^2(t) \ m_2^2(t) \ \dots \ m_n^2(t)]^T$ ;  $P(t)m(t)$  es el producto convencional de una matriz  $P(t)$  por un vector  $m(t)$ ; y  $p(t) * m(t)$  es el producto de dos vectores por sus componentes:  $p(t) * m(t) = [p_1(t)m_1(t) \ p_2(t)m_2(t) \ \dots \ p_n(t)m_n(t)]^T$ . Usando la notación anterior, la expresión para el segundo momento inicial está dada por

$$E[x^2(t)|Y(t)] = p(t) + m^2(t). \quad (5.9)$$

Dado que  $E[(x(t) - m(t))^3|Y(t)] = 0$ , entonces  $E[(x(t) - m(t))^3|Y(t)] = E[x^3(t)|Y(t)] - 3m(t) * E[x^2(t)|Y(t)] + 3m^2(t) * E[x(t)|Y(t)] - m^3(t) = 0$ . Sustituyendo (5.9) en la ecuación anterior, se obtiene la expresión para el tercer momento

$$E[x^3(t)|Y(t)] = 3p(t) * m(t) + m^3(t). \quad (5.10)$$

Tomando en cuenta que  $E[(x(t) - m(t))^4|Y(t)] = 3p^2(t)$ , la siguiente igualdad es válida:

$$\begin{aligned} E[(x(t) - m(t))^4|Y(t)] &= E[x^4(t)|Y(t)] - 4m(t) * E[x^3(t)|Y(t)] + \\ &6m^2(t) * E[x^2(t)|Y(t)] - 4m^3(t) * E[x(t)|Y(t)] + m^4(t) = 3p^2(t), \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde  $m^3(t) = [m_1^3(t) \ m_2^3(t) \ \dots \ m_n^3(t)]^T$  y  $m^4(t) = [m_1^4(t) \ m_2^4(t) \ \dots \ m_n^4(t)]^T$ .

Sustituyendo (5.9) y (5.10) y haciendo las operaciones algebraicas correspondientes, se obtiene la expresión para el cuarto momento inicial

$$E[x^4(t)|Y(t)] = 3p^2(t) + 6p(t) * m^2(t) + m^4(t). \quad (5.12)$$

La representación del quinto momento inicial puede ser obtenida análogamente usando la igualdad  $E[x^5(t)|Y(t)] = 0$  y sustituyendo en las expresiones obtenidas previamente

(5.9)-(5.12):

$$E[x^5(t)|Y(t)] = 15m(t) * p^2(t) + 10p(t) * m^3(t) + m^5(t), \quad (5.13)$$

donde  $m^5(t) = [m_1^5(t) \ m_2^5(t) \ \dots \ m_n^5(t)]^T$ . Además, en el caso de la ecuación de estado de tercer grado,  $f(x(t)) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t)$ , la ecuación de Kushner (5.6) para el estimado óptimo  $m(t) = E[x(t)|Y(t)]$  puede ser reducida a

$$\begin{aligned} dm(t) &= E[f(x(t))|Y(t)]dt + P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ &\quad (dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) \\ &= (E[a_0(t)|Y(t)] + E[a_1(t)x(t)|Y(t)] + E[a_2(t)x^2(t)|Y(t)] + \\ &\quad E[a_3(t)x^3(t)|Y(t)])dt + \\ &\quad P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Usando las representaciones (5.9) y (5.10) para el segundo y tercer momento, la ecuación del estimado óptimo toma la forma

$$\begin{aligned} dm(t) &= (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + \\ &\quad a_3(t)(3p(t) * m(t) + m^3(t))dt + P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ &\quad (dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), \\ m(t_0) &= E[x(t_0)|y(t_0)]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

El siguiente paso es obtener la matriz de covarianza  $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)]$ . Diferenciando la igualdad anterior respecto a  $t$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)] \\ dP(t) &= dE((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T|Y(t)) \\ &= E(d[x(t)(x(t) - m(t))^T - m(t)(x(t) - m(t))^T]|Y(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[(dx(t))(x(t) - m(t))^T + x(t)d(x(t) - m(t))^T] | Y(t) \\
&= E[(dx(t))(x(t) - m(t))^T + x(t)(dx(t) - dm(t))^T | Y(t)] \\
&= E[(dx(t))(x(t) - m(t))^T | Y(t)] + E[x(t) \times \\
&\quad (dx(t) - dm(t))^T | Y(t)]
\end{aligned}$$

y sustituyendo las expresiones para  $dx(t)$  y  $dm(t)$  dadas por (5.4) y (5.15), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
dP(t) = & E((a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + b(t) \times \\
& dW_1(t))(x(t) - m(t))^T dt + x(t)(a_0(t) + a_1(t)x(t) + \\
& a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + b(t)dW_1(t) - a_0(t) - a_1(t)m(t) - \\
& a_2(t)p(t) - a_2(t)m^2(t) + 3a_3(t)p(t) * m(t) - \\
& a_3(t)m^3(t))dt - Kd\nu)^T | Y(t)), \tag{5.16}
\end{aligned}$$

donde  $K(t) = P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}$  y  $\nu(t)$  es el proceso de innovación,  $d\nu(t) = dy(t) - (A_0(t) + A_1(t)m(t))dt$ . Entonces la ecuación anterior es transformada en

$$\begin{aligned}
dP(t) = & (a_0(t)E[(x(t) - m(t))^T | Y(t)] + a_1(t)E[(x(t)(x(t)m(t))^T | \\
& Y(t)] + a_2(t)E[x^2(t)(x(t)m(t))^T | Y(t)] + a_3(t)E[(x^3(t) \times \\
& (x(t)m(t))^T | Y(t)] + E[x(t)(a_1(t)x(t))^T | Y(t)] + \\
& E[x(t)(a_2(t)x^2(t))^T | Y(t)] + E[x(t)a_3(t)x^3(t))^T | Y(t)] - \\
& E[x(t)(a_1(t)m(t))^T | Y(t)] - E[x(t)(a_2(t)p(t))^T | Y(t)] - \\
& E[x(t)(a_2(t)m^2(t))^T | Y(t)] - E[x(t)(a_3(t)p(t) * m(t))^T | Y(t)] - \\
& E(x(t)(a_3(t)m^3(t))^T / Y(t)) + \tag{5.17} \\
& b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt.
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo (5.9)-(5.12) y haciendo las operaciones algebraicas correspondientes, la ecuación para la varianza toma la forma

$$\begin{aligned}
 dP(t) = & (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t) * P(t) + & (5.18) \\
 & 2(P(t) * m^T(t))a_2^T(t) + 3a_3(t)(p(t) * P(t)) + \\
 & 3(p(t) * P(t))^T a_3^T(t) + 3a_3(t)(m^2(t) * P(t)) + \\
 & 3(P(t) * (m^2(t))^T) a_3^T(t) + (b(t)b^T(t)) - \\
 & P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt,
 \end{aligned}$$

con:  $P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0))$ .

**Definición** El producto  $m(t) * P(t)$  entre un vector  $m(t)$  y una matriz  $P(t)$  es definido como el vector cuyos renglones son iguales a los renglones de  $P(t)$ , multiplicados por el correspondiente elemento del vector  $m(t)$  :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_1(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots & P_{1n}(t) \\ m_2(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots & P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(t) & P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \cdots & P_{nn}(t) \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} m_1(t)P_{11}(t) & m_1(t)P_{12}(t) & \cdots & m_1(t)P_{1n}(t) \\ m_2(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) & \cdots & m_2(t)P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(t)P_{n1}(t) & m_n(t)P_{n2}(t) & \cdots & m_n(t)P_{nn}(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**Definición** La matriz transpuesta  $P(t) * m^T(t) = (m(t) * P(t))^T$  es definida como la matriz cuyas columnas son iguales a las columnas de la matriz  $P(t)$ , multiplicadas por el elemento correspondiente de  $m(t)$  :

$$\begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) & \cdots & m_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots & P_{1n}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots & P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \cdots & P_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(t)P_{11}(t) & m_2(t)P_{12}(t) & \cdots & m_n(t)P_{1n}(t) \\ m_1(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) & \cdots & m_n(t)P_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1(t)P_{n1}(t) & m_2(t)P_{n2}(t) & \cdots & m_n(t)P_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Así, la ecuación (5.15) para el estimado óptimo  $m(t)$  y la ecuación (5.18) para la matriz de covarianza  $P(t)$  forman un sistema cerrado de ecuaciones de filtro óptimo en el caso de una ecuación de estado polinomial de tercer grado y observaciones lineales, dadas por las ecuaciones (5.7) y (5.8), respectivamente.

## 5.4. Filtro Óptimo para Ecuaciones de Estado Polinomial de Cuarto Grado y Observaciones Lineales

### 5.4.1. Planteamiento del Problema

Generalizando el resultado de la sección anterior, el procedimiento es aplicado para obtener el filtro óptimo para el caso en el cual la ecuación de estado es polinomial de cuarto grado, obtenido de (5.4) si  $f(x) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + a_4(t)x^4(t)$  :

$$dx(t) = (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + a_4(t)x^4(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad (5.19)$$

$$x(t_0) = x_0,$$

y las observaciones lineales (5.8), donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^4(t) = [x_1^4(t) \ x_2^4(t) \ x_3^4(t) \ \dots \ x_n^4(t)]^T$ .

### 5.4.2. Solución

Siguiendo el esquema previo y sustituyendo las expresiones (5.9)-(5.12) para el momento inicial condicional de  $x(t)$  en la ecuación de Kushner (5.6), se obtiene la siguiente ecuación para el estimado óptimo:

$$\begin{aligned} dm(t) = & (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + 3a_3(t) \times \\ & p(t) * m(t) + a_3(t)m^3(t) + 3a_4(t)p^2(t) + \\ & 6a_4(t)p(t) * m^2(t) + a_4(t)m^4(t))dt + P^T(t)A^T(t)(B(t) \times \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt),$$

$$m(t_0) = E[x(t_0)|y(t_0)]$$

En la misma forma, la ecuación de la varianza toma la forma:

$$\begin{aligned} dP(t) = & (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)(m(t) * P(t)) + 2(P(t) * \\ & m^T(t))a_2^T(t) + 3a_3(t)(p(t) * P(t)) + \\ & 3(p(t) * P(t))^T a_3^T(t) + 3a_3(t)(m^2(t) * P(t)) + 3(P(t) * \\ & (m^2(t))^T) a_3^T(t) + 12a_4(t)((m(t) * p(t)) * P(t)) + \\ & 12(P(t) * (m(t) * p(t))^T)(a_4(t))^T + 4a_4(t)(m^3(t) * \\ & P(t)) + 4(P(t) * (m^3(t))^T)(a_4(t))^T + (b(t)b^T(t)) - \\ & P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0)].$$

*Nota. Si continuamos obteniendo filtros para ecuaciones de estados polinomiales de quinto, sexto grados, etc., las ecuaciones correspondientes al estimado  $m(t)$  y la varianza  $P(t)$  contendrán los términos de las ecuaciones de los grados anteriores, además de los nuevos términos correspondientes a ese grado. En otras palabras, las ecuaciones de filtrado para el estado cuadrático contienen todos los términos de las ecuaciones del filtrado lineal, más los términos cuadráticos; las ecuaciones de filtrado para el estado cúbico contienen todos los términos del filtro lineal y cuadrático, más los nuevos términos cúbicos, y así sucesivamente.*

## 5.5. Aplicación del Filtro Óptimo Polinomial a un Sistema Automotriz

### 5.5.1. Planteamiento del Problema

Esta sección presenta la aplicación del filtro obtenido para ecuaciones de estado polinomiales de tercer grado sobre observaciones lineales para estimar las variables de estado, de orientación y de velocidad angular, en un modelo cinemático no lineal de un carro en movimiento [63], donde las ecuaciones de estado son:

$$\begin{aligned}
 dx(t) &= v \cos \phi(t) dt \\
 dy(t) &= v \sin \phi(t) dt \\
 d\phi(t) &= (v/l) \tan \delta(t) dt \\
 d\delta(t) &= u(t) dt
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

Aquí,  $x(t)$  y  $y(t)$  son las coordenadas cartesianas del centro de masa del carro,  $\phi(t)$  es el ángulo de orientación.  $v$  es la velocidad,  $l$  es la longitud entre los dos ejes del carro,  $\delta(t)$

es el ángulo del volante, y  $u(t)$  es la variable de control (velocidad angular del volante). Todas las variables tienen condición inicial cero. El problema es encontrar los estimados óptimos de las variables  $\phi(t)$  y  $\delta(t)$ , usando las observaciones directas, las cuales contienen disturbios modelados como ruidos blancos Gaussianos, que se asumen independientes e idénticamente distribuidos

$$\begin{aligned} dz_\phi(t) &= \phi(t)dt + f_1(t)dt \\ dz_\delta(t) &= \delta(t)dt + f_2(t)dt \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde  $z_\phi(t)$  es la variable de observación para  $\phi(t)$ ,  $z_\delta(t)$  es la variable de observación para  $\delta(t)$ , y  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son ruidos blancos Gaussianos independientes uno del otro.

Aplicando los algoritmos de filtrado al sistema no lineal (5.22) y observaciones lineales (5.23), se obtendrá la expansión en series de Taylor (con  $t = 0$ ) para las últimas dos ecuaciones (5.22), para formar un polinomio de tercer grado (el cuarto grado no aparece en la expansión de Taylor para la tangente)

$$\begin{aligned} d\phi(t) &= \left(\frac{v}{l}\right)\delta(t) + \left(\frac{v}{l}\right)\left(\frac{\delta^3(t)}{3}\right)dt \\ d\delta(t) &= u(t)dt \end{aligned} \quad (5.24)$$

### 5.5.2. Solución

Las ecuaciones de filtrado (5.15) y (5.21) para el estado polinomial de tercer grado (5.24) sobre observaciones lineales (5.23) toman la forma

$$\begin{aligned} dm_\phi &= \left(\frac{v}{l}\right)m_\delta + \left(\frac{v}{3l}\right)(3p_\delta + m_\delta^3) + p_{\phi\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\phi\delta}(z_\delta - m_\delta) \\ dm_\delta &= u(t) + p_{\delta\phi}(z_\phi - m_\phi) + p_{\delta\delta}(z_\delta - m_\delta) \\ dp_{\phi\phi} &= (2v/l)p_{\delta\phi}p_{\delta\delta} + \frac{2v}{l}p_{\delta\phi} + \frac{2v}{l}m_\phi^2p_{\delta\phi} - p_{\phi\phi}^2 - p_{\phi\delta}^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\phi\delta} &= \frac{v}{l} p_{\delta\delta} + \frac{v}{l} m_{\delta}^2 p_{\delta\delta} - p_{\phi\phi} p_{\phi\delta} - p_{\phi\delta} p_{\delta\delta} \\ \dot{p}_{\delta\delta} &= -p_{\delta\phi}^2 - p_{\delta\delta}^2 \end{aligned}$$

donde  $m_{\phi}$  y  $m_{\delta}$  son los estimados para las variables  $\phi$  y  $\delta$ , y  $p_{\phi\phi}, p_{\phi\delta}, p_{\delta\delta}$  son elementos de la matriz simétrica de covarianza  $P$ .

Los estimados obtenidos resolviendo las ecuaciones (5.25) son comparados con los estimados convencionales de Kalman-Bucy que satisfacen las ecuaciones de filtrado de Kalman-Bucy para un estado del sistema linealizado (solo el término lineal está presente de la expansión de Taylor para la tangente) sobre observaciones lineales (5.23)

$$\begin{aligned} dm_{\phi} &= \frac{v}{l} m_{\delta} + p_{\phi\phi}(z_{\phi} - m_{\phi}) + p_{\phi\delta}(z_{\delta} - m_{\delta}) \\ dm_{\delta} &= u(t) + p_{\delta\phi}(z_{\phi} - m_{\phi}) + p_{\delta\delta}(z_{\delta} - m_{\delta}) \\ dp_{\phi\phi} &= \frac{2v}{l} p_{\delta\phi} - p_{\phi\phi}^2 - p_{\phi\delta}^2 \\ dp_{\phi\delta} &= \frac{v}{l} p_{\delta\delta} - p_{\phi\phi} p_{\phi\delta} - p_{\phi\delta} p_{\delta\delta} \\ dp_{\delta\delta} &= -p_{\delta\phi}^2 - p_{\delta\delta}^2 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones de filtrado (5.25) y (5.26), por medio de simulación numérica son obtenidos los resultados. Los valores obtenidos de los estimados  $m_{\phi}$  y  $m_{\delta}$  son comparados, en ambos casos, con el valor real de las variables  $m_{\phi}$  y  $m_{\delta}$  en el sistema original (5.22) y su aproximación polinomial (5.24). Entonces, obtenemos dos conjuntos de gráficas.

- Gráficas de las variables  $\phi$  y  $\delta$  para la aproximación polinomial del sistema (5.24); gráficas de los estimados del filtro de Kalman-Bucy  $m_{\phi}$  y  $m_{\delta}$  que satisfacen las ecuaciones (5.26); y gráficas de los estimados del filtro polinomial de tercer grado  $m_{\phi}$  y  $m_{\delta}$  que satisfacen las ecuaciones (5.25) (Figuras 5.1 y 5.2).

- Gráficas de las variables  $\phi$  y  $\delta$  para el sistema original (5.22); gráficas de los estimados del filtro de Kalman-Bucy  $m_\phi$  y  $m_\delta$  que satisfacen las ecuaciones (5.26); y gráficas de los estimados del filtro polinomial de tercer grado  $m_\phi$  y  $m_\delta$  que satisfacen las ecuaciones (5.25) (Figuras 5.3 y 5.4).

Para cada uno de los cuatro filtros y los dos sistemas de referencias involucrados en la simulación, fueron asignados los siguientes valores iniciales:

$$u = 1, l = 1m, u(t) = 0.05, m_\phi(0) = 10, m_\delta(0) = 0.1, \phi(0) = \delta(0) = 0,$$

$$P_{\phi\phi}(0) = 100, P_{\phi\delta}(0) = 10, P_{\delta\delta}(0) = 1.$$

Para la realización de los disturbios Gaussianos  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  en (5.23) y todas las simulaciones en adelante, es utilizado el block correspondiente al ruido blanco que aparece en el *MatLab 6, versión 1.2*. Cabe mencionar que el bloque que aparece como ruido blanco en el *MatLab 6, versión 1.2*, corresponde a una aproximación del ruido blanco, ya que por su naturaleza, es físicamente no representable. Se puede decir que este bloque, que representa al ruido blanco, está formado por una secuencia de impulsos en tiempos discretos, donde la amplitud de los impulsos es proporcional al tiempo de discretización  $\Delta t$  [75].

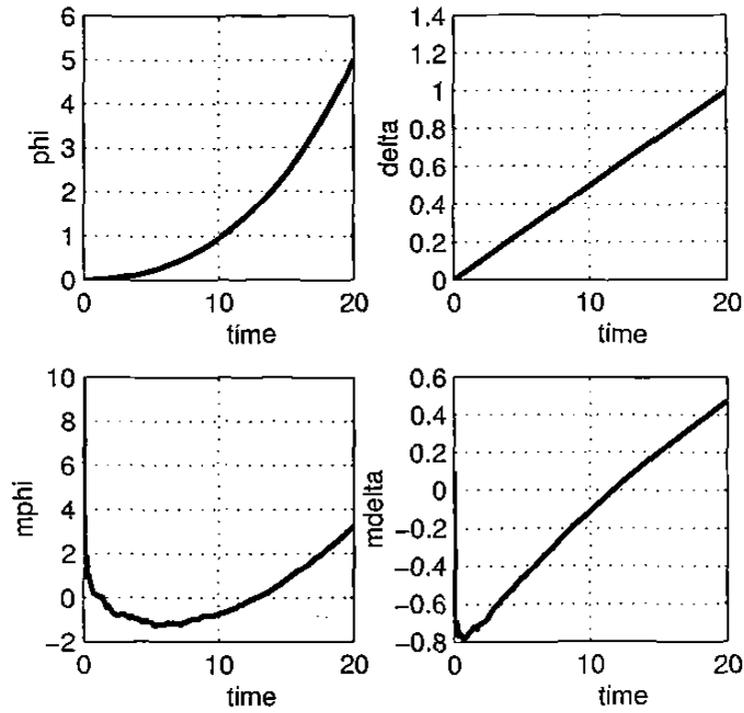


Figura 5.1: Gráficas de las variables  $\phi$  y  $\delta$  para la aproximación polinomial del sistema (5.24); Gráficas del filtro de Kalman-Bucy; los estimados  $m_\phi$  y  $m_\delta$  satisfacen las ecuaciones (5.23).  $\phi = \text{phi}$  y  $\delta = \text{delta}$ ,  $m_\phi = \text{mphi}$  y  $m_\delta = \text{mdelta}$ .

Los valores obtenidos de las variables de referencia  $\phi$  y  $\delta$  (aproximación polinomial (5.24)) son comparados con el filtro de Kalman-Bucy y los estimados para el filtro polinomial de tercer grado  $m_\phi$  y  $m_\delta$ , en el tiempo terminal  $T = 20\text{min}$ , y son presentados en la siguiente tabla (correspondiente a las Figuras 5.1 y 5.2):

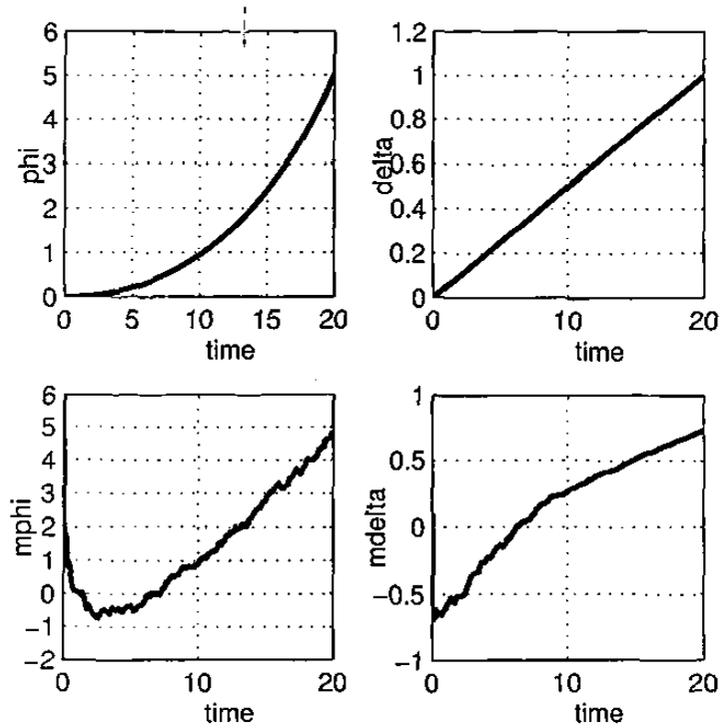


Figura 5.2: Gráficas de las variables  $\phi$  y  $\delta$  para la aproximación polinomial del sistema (5.24); Gráficas del filtro polinomial de tercer grado; los estimados  $m_\phi$  y  $m_\delta$  satisfacen las ecuaciones (5.25).  $\phi = \text{phi}$  y  $\delta = \text{delta}$ ,  $m_\phi = \text{mphi}$  y  $m_\delta = \text{mdelta}$ .

Filtro de Kalman-Bucy	Filtro polinomial de grado 3
$\phi(20) = 5rad$	$\phi(20) = 5rad$
$\delta(20) = 1rad$	$\delta(20) = 1rad$
$m_\phi(20) = 3.25$	$m_\phi(20) = 4.84$
$m_\delta(20) = 0.475$	$m_\delta(20) = 0.73$

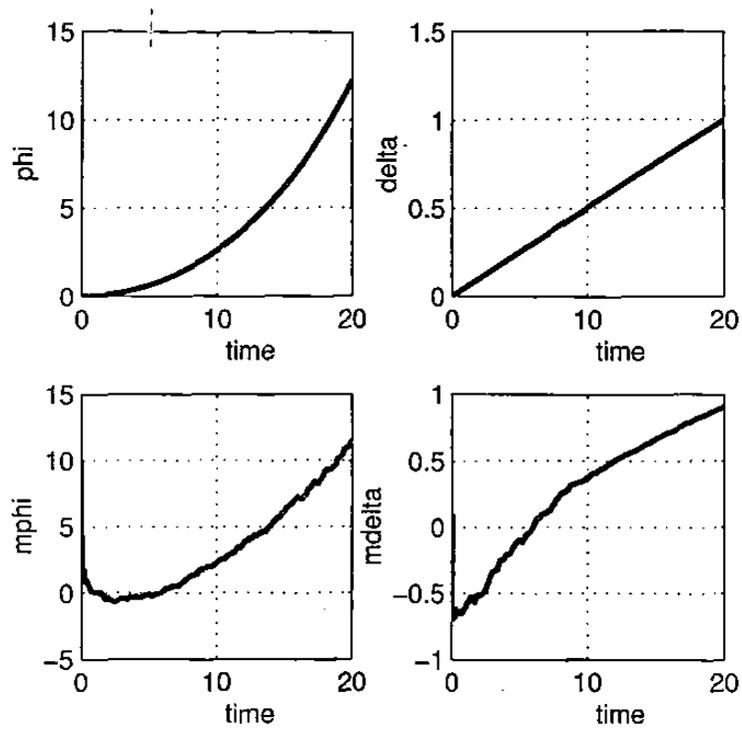


Figura 5.3: Gráficas de las variables  $\phi$  y  $\delta$  para el sistema original (5.22); Gráficas de los estimados  $m_\phi$  y  $m_\delta$  del filtro de Kalman-Bucy, los cuales satisfacen las ecuaciones (5.26).  $\phi = \text{phi}$  y  $\delta = \text{delta}$ ,  $m_\phi = \text{mphi}$  y  $m_\delta = \text{mdelta}$ .

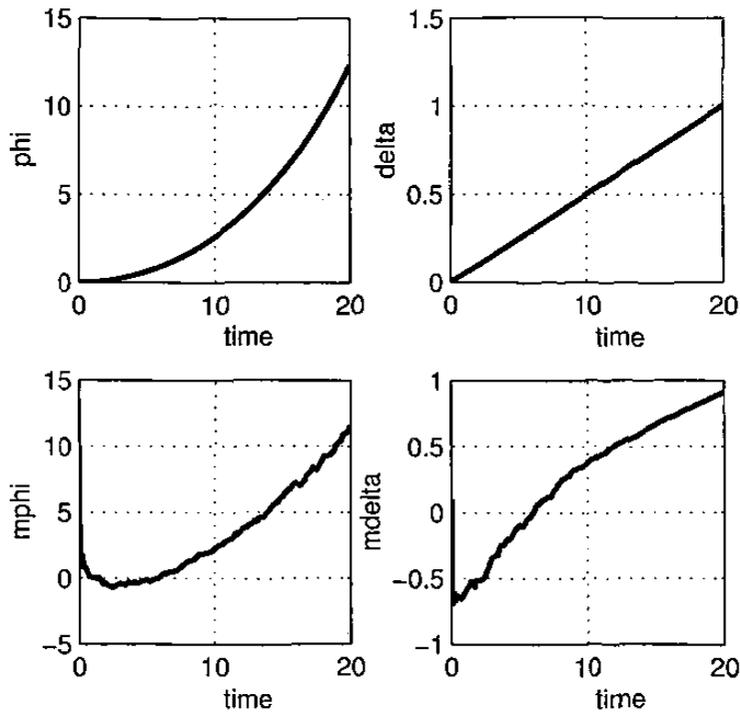


Figura 5.4: Gráficas de las variables  $\phi$  y  $\delta$  para el sistema original (5.22); Gráficas del filtro polinomial de tercer grado; los estimados  $m_\phi$  y  $m_\delta$  satisfacen las ecuaciones (5.25).  $\phi = \text{phi}$  y  $\delta = \text{delta}$ ,  $m_\phi = \text{mphi}$  y  $m_\delta = \text{mdelta}$ .

Los valores de las variables  $\phi$  y  $\delta$  obtenidos que satisfacen el sistema original (5.22), son comparados con los estimados del filtro de Kalman-Bucy y con los estimados del filtro polinomial óptimo de tercer grado  $m_\phi$  y  $m_\delta$  en el tiempo terminal  $T = 20\text{min}$ , en la siguiente tabla (correspondiente a las Figuras 5.3 y 5.4):

Filtro de Kalman-Bucy	Filtro polinomial de tercer grado
-----------------------	-----------------------------------

$$\phi(20) = 12.3rad$$

$$\delta(20) = 1rad$$

$$m_{\phi}(20) = 7.08$$

$$m_{\delta}(20) = 0.608$$

$$\phi(20) = 12.5rad$$

$$\delta(20) = 1rad$$

$$m_{\phi}(20) = 11.5$$

$$m_{\delta}(20) = 0.91$$

Los resultados obtenidos mediante simulación ilustran los resultados obtenidos matemáticamente para los algoritmos de filtrado polinomial. Mostrando que estos algoritmos presentan mejoría respecto a los algoritmos de filtrado lineal de Kalman-Bucy.

## Capítulo 6

# Ecuaciones del Filtro para Ecuaciones de Estado Bilineales y su Aplicación a la Estimación de un Proceso de Polimerización

### 6.1. Ecuaciones del Filtro para Ecuaciones de Estado Bilineales

#### 6.1.1. Planteamiento del Problema

Dada la función  $f(x)$  de la forma:

$$f(x) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T \quad (6.1)$$

donde  $x$  es un vector  $n$ -dimensional,  $a_1$  es una matriz  $n \times n$ , y  $a_2$  es un tensor de 3 dimensiones  $n \times n \times n$ .

### 6.1.2. Solución

Bajo las hipótesis para el caso polinomial, y repitiendo los procedimientos anteriores, las ecuaciones del filtro para el caso bilineal toman la forma:

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + \quad (6.2)$$

$$P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt],$$

$$m(t_0) = E(x(t_0) | Y(t_0)),$$

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + \quad (6.3)$$

$$2(a_2(t)m(t))P(t) + 2P(t)(a_2(t)m(t))^T +$$

$$b(t)b^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt,$$

$$P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | Y(t_0)),$$

dado que el tercer momento central  $\mu_3$  es igual a 0, y el tercer momento inicial de  $x(t)$  puede ser expresado usando el segundo y primer momentos, i.e.,  $P(t)$  y  $m(t)$ . En este caso lineal-bilineal, la ecuación de la varianza es también independiente de las observaciones  $y(t)$ , pero contiene términos bilineales  $m(t)P(t)$  en su lado derecho y depende de  $m(t)$ ; haciendo una conexión entre ambas ecuaciones, la ecuación del estimado es bilineal con respecto a  $m$ , como se esperaba.

## 6.2. Aplicación del Filtro Bilineal a la Estimación de un Proceso de Polimerización

### 6.2.1. Planteamiento del Problema

A continuación se desea aplicar el algoritmo de filtrado bilineal a un sistema mayor de dos ecuaciones. Después de revisar algunos trabajos, se encontró un modelo matemático de un proceso de polimerización, el cual es dado por Ogunnaike [64], y son consideradas para trabajar solo diez ecuaciones; a través de las cuales se pretende mostrar la eficacia de los algoritmos de filtrado obtenidos en esta tesis comparándolos con los algoritmos del filtro de Kalman-Bucy, haciendo la aclaración de que no se pretende resolver el problema físico-químico del reactor de Ogunnaike, solo mostrar la eficacia de los algoritmos de filtrado bilineal. Cabe mencionar que queda como trabajo a futuro, que en el área de Química, primero se determinara el grupo mínimo de ecuaciones que representan el proceso, para así aplicar el algoritmo en forma computacionalmente sensata (para una computadora de escritorio), o de otra manera, se requiere contar con una estación de trabajo para aplicar el algoritmo a el total de las 29 ecuaciones. Debe de notarse que la sola reducción del modelo pudiera ser el desarrollo de una tesis doctoral, que queda fuera de los objetivos de la presente investigación. Un proceso de polimerización consiste en la unión de varias moléculas idénticas para formar otra mayor. Un reactor es el recipiente en el cual se efectúa una reacción química, en este caso, la polimerización, en presencia de un catalizador. Un catalizador es una sustancia que provoca y fija una reacción. Las variables consideradas son: las concentraciones de los reactivos de entrada, los momentos de orden cero de la distribución del peso molecular (MWD), y sus primeros momentos de masa. Estas ecuaciones son intrínsecamente no lineales (bilineales), y su linealización produce grandes desviaciones de la dinámica del sistema real, como podrá verse en los resultados de

la simulación. Por supuesto, la hipótesis de que los momentos MWD pueden ser medidos en tiempo real es ficticia, dado que esto puede hacerse solo con grandes retardos de tiempo; por otro lado, nuestro objetivo es verificar el desempeño de los algoritmos de filtrado no lineal para un sistema no lineal y comparar éste con los algoritmos de filtrado lineal correspondientes al modelo linealizado. Las diez ecuaciones seleccionadas del modelo del proceso de polimerización de Ogunnaike [64] son las siguientes:

$$\begin{aligned}
dC_{m1}/dt &= [(1/V)d\Delta_{m1}/dt - ((1/\theta) + K_{L1}C^* + K_{11}\mu_P^o + K_{21}\mu_Q^o + K_{31}\mu_R^o)C_{m1}] \quad (6.4) \\
dC_{m2}/dt &= (1/V)d\Delta_{m2}/dt - ((1/\theta) + K_{L2}C^* + K_{12}\mu_P^o + K_{22}\mu_Q^o)C_{m2}; \\
dC_{m3}/dt &= (1/V)d\Delta_{m3}/dt - ((1/\theta) + K_{13}\mu_P^o)C_{m3}; \\
dC_{m4}/dt &= (1/V)d\Delta_{m^*}/dt - ((1/\theta) + K_d + K_{L1}C_{m1} + K_{L2}C_{m2})C^*; \\
d\mu_P^o/dt &= (-1/\theta - K_{t1})\mu_P^o + K_{L1}C_{m1}C^* - (K_{12}C_{m2} + K_{13}C_{m3})\mu_P^o + \\
&\quad K_{21}C_{m1}\mu_Q^o + K_{31}C_{m1}\mu_R^o; \\
d\mu_Q^o/dt &= (-1/\theta)\mu_Q^o + K_{L2}C_{m2}C^* - (K_{21}C_{m1} + K_{t2})\mu_Q^o + K_{12}C_{m2}\mu_P^o; \\
d\mu_R^o/dt &= (-1/\theta)\mu_R^o - (K_{31}C_{m1} + K_{t3})\mu_R^o + K_{13}C_{m3}\mu_P^o; \\
d\lambda_1^{100}/dt &= (-1/\theta)\lambda_1^{100} + K_{L1}C_{m1}C^* + K_{L2}C_{m2}C^* + K_{11}C_{m1}\mu_P^o + \\
&\quad K_{21}C_{m1}\mu_Q^o + K_{31}C_{m1}\mu_R^o; \\
d\lambda_1^{010}/dt &= (-1/\theta)\lambda_1^{010} + K_{L1}C_{m1}C^* + K_{L2}C_{m2}C^* + \\
&\quad K_{12}C_{m2}\mu_P^o + K_{22}C_{m2}\mu_Q^o; \\
d\lambda_1^{001}/dt &= (-1/\theta)\lambda_1^{001} + (K_{L1}C_{m1} + K_{L2}C_{m2})C^* + K_{13}C_{m3}\mu_P^o;
\end{aligned}$$

Aquí, las variables de estado:  $C_{m1}$ ,  $C_{m2}$ , y  $C_{m3}$  corresponden a las concentraciones del reactivo (monómero, o sea el compuesto constituido por moléculas simples);  $C^*$  es la concentración del catalizador activo;  $\mu_P^o$ ,  $\mu_Q^o$ , y  $\mu_R^o$  son los momentos de orden cero del peso molecular del producto (MWD); y  $\lambda_1^{100}$ ,  $\lambda_1^{010}$ , y  $\lambda_1^{001}$  son los primeros momentos de

masa. El volumen del reactor  $V$  y el tiempo de residencia  $\theta$ , y todos los coeficientes  $K$  s, son parámetros conocidos, y  $\Delta_{m1}, \Delta_{m2}, \Delta_{m3}, \Delta_{m^*}$  corresponden a las velocidades de flujo de los reactivos y del catalizador activo en el reactor.

El problema de filtrado consiste en encontrar el estimado óptimo del estado no observable (6.4), suponiendo que las observaciones  $Y_i$  son directas y contienen ruidos blancos Gaussianos  $\psi_{2i}, i = 1, \dots, 10$ :

$$y_i = x_i + \psi_{2i}.$$

De este modo,  $x_1$  denota  $C_{m1}$ ,  $x_2$  denota  $C_{m2}$ , y así sucesivamente, hasta  $x_{10}$ .

Re-escribiendo las ecuaciones de estado bilineales (6.1) y las ecuaciones de observación lineales (5.8), utilizando la notación de sumatorias y subíndices, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} dx_k(t)/dt &= a_{0k}(t) + \sum_i a_{1ki}(t)x_i(t) + & (6.5) \\ &\sum_{ij} a_{2kij}(t)x_i(t)x_j(t) + \sum_i b_{ki}(t)\psi_{1i}(t), \quad k = 1, n, \\ y_k(t) &= A_{0k} + \sum_i A_{ki}(t)x_i(t) + \sum_i B_{ki}(t)\psi_{2k}(t), \end{aligned}$$

donde  $\psi_1(t)$  y  $\psi_2(t)$  son ruidos blancos Gaussianos. Entonces, las ecuaciones de filtrado (6.2),(6.3) pueden ser re-escritas como sigue:

$$\begin{aligned} dm_k(t)/dt &= a_{0k}(t) + \sum_i a_{1ki}(t)m_i(t) + \sum_{ij} a_{2kij}(t)m_i(t)m_j(t) + & (6.6) \\ &\sum_{ij} a_{2kij}(t)P_{ij}(t)dt + \sum_{ijlps} P_{kj}(t)A_{jl}^T(t)(B_{lp}(t)B_{ps}(t))^{-1}[dy_s - \\ &A_{0s} - \sum_r A_{sr}(t)m_r(t)dt] \\ m_k(t_0) &= E[x_k(t_0)|Y(t_0)], \\ dP_{ij}(t) &= \sum_k a_{1ik}(t)P_{kj}(t) + \sum_j P_{kj}(t)a_{1jk}(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{kl} a_{2iki}(t)m_i(t)P_{kj} + 2 \sum_{kl} a_{2jkl}(t)m_l(t)P_{ki}(t) + \\
& \sum_k b_{ik}(t)b_{kj}(t) - \sum_{klpsr} P_{ik}(t)A_{kl}^T(t)(B_{lp}(t)B_{ps}(t))^{-1}A_{sr}(t)P_{rj}(t), \\
P_{ij}(t_0) &= E[(x_i(t_0) - m_i(t_0))(x_j(t_0) - m_j(t_0))^T | Y(t_0)].
\end{aligned}$$

### 6.2.2. Solución

En esta situación, las ecuaciones bilineales de filtrado (6.6) para el vector de estimados óptimos  $m(t)$  toman la forma:

$$\begin{aligned}
dm_1(t)/dt &= (1/V)d\Delta_{m1}/dt - ((1/\theta) + K_{L1}m_4(t) + K_{11}m_5(t) + & (6.7) \\
& K_{21}m_6(t) + K_{31}m_7(t))m_1(t) - K_{L1}P_{14}(t) - K_{11}P_{15}(t) - \\
& K_{21}P_{16}(t) - K_{31}P_{17}(t) + \sum_j P_{1j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_2(t)/dt &= (1/V)d\Delta_{m2}/dt - ((1/\theta) + K_{L2}m_4(t) + K_{12}m_5(t) + \\
& K_{22}m_6(t))m_2(t) - K_{L2}P_{24}(t) - K_{12}P_{25}(t) - K_{22}P_{26}(t) + \\
& \sum_j P_{2j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_3(t)/dt &= (1/V)d\Delta_{m3}/dt - ((1/\theta) + K_{13}m_5(t))m_3(t) - \\
& K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{3j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_4(t)/dt &= (1/V)d\Delta_{m^*}/dt - ((1/\theta) + K_d + K_{L1}m_1(t) + \\
& K_{12}m_2(t))m_4(t) - K_{L1}P_{14}(t) - K_{12}P_{24}(t) + \\
& \sum_j P_{4j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_5(t)/dt &= (-1/\theta - K_{t1})m_5(t) + K_{L1}m_4(t)m_1(t) - \\
& K_{12}m_2(t)m_5(t) + K_{21}m_6(t)m_1(t) + \\
& K_{31}m_7(t)m_1(t) - K_{13}m_5(t)m_3(t) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_{L1}P_{14}(t) + K_{21}P_{16}(t) + K_{31}P_{17}(t) - K_{12}P_{25}(t) - \\
& K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{5j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_6(t)/dt &= (-1/\theta - K_{t2} - K_{21}m_1(t))m_6(t) + \\
& K_{L2}m_4(t)m_2(t) + K_{12}m_5(t)m_2(t) \\
& - K_{21}P_{16}(t) + K_{L2}P_{24}(t) + K_{12}P_{25}(t) + \\
& \sum_j P_{6j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_7(t)/dt &= (-1/\theta - K_{t3} - K_{31}m_1(t))m_7(t) + K_{13}m_5(t)m_3(t) - \\
& K_{31}P_{17}(t) + K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{7j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_8(t)/dt &= (-1/\theta)m_8(t) + (K_{L1}m_4(t) + K_{11}m_5(t) + \\
& K_{21}m_6(t) + K_{31}m_7(t))m_1(t) + K_{L2}m_4(t)m_2(t) + \\
& K_{L1}P_{14}(t) + K_{11}P_{15}(t) + K_{21}P_{16}(t) + K_{31}P_{17}(t) + \\
& K_{L2}P_{24}(t) + \sum_j P_{8j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_9(t)/dt &= (-1/\theta)m_9(t) + K_{L1}m_4(t)m_1(t) + K_{L2}m_4(t)m_2(t) + \\
& K_{12}m_5(t)m_2(t) + K_{22}m_6(t)m_2(t) + K_{L1}P_{14}(t) + \\
& K_{L2}P_{24}(t)K_{12}P_{25}(t) + K_{22}P_{26}(t) + \sum_j P_{9j}[dy_j/dt - m_j]; \\
dm_{10}(t)/dt &= (-1/\theta)m_{10}(t) + K_{L1}m_4(t)m_1(t) + K_{L2}m_4(t) \times \\
& m_2(t) + K_{13}m_5(t)m_3(t) + K_{L1}P_{14}(t) + K_{L2}P_{24}(t) + \\
& K_{13}P_{35}(t) + \sum_j P_{10j}[dy_j/dt - m_j].
\end{aligned}$$

Aquí,  $m_1(t)$  es el estimado óptimo para  $C_{m1}$ ,  $m_2(t)$  para  $C_{m2}$ , y así sucesivamente, hasta  $m_{10}(t)$ . Las 55 componentes de las ecuaciones de la varianza son similarmente generadas por las ecuaciones (6.7). A continuación se presentan las diez ecuaciones de los elementos

de la diagonal de la matriz de varianza, que son:

$$\begin{aligned}
P_{11}(t) &= ((-2/\theta) - 4(K_{L1}m_4(t) + K_{11}m_5(t) + K_{21}m_6(t) + K_{31}m_7(t)))P_{11} - \quad (6.8) \\
&\quad P_{11}^2 - P_{12}^2 - P_{13}^2 - P_{14}^2 - P_{15}^2 - P_{16}^2 - P_{17}^2 - P_{18}^2 - P_{19}^2 - P_{110}^2; \\
P_{22}(t) &= ((-2/\theta) + 4(-K_{L2}m_4(t)) - K_{12}m_5(t) - K_{22}m_6(t))P_{22} \\
&\quad - P_{21}^2 - P_{22}^2 - P_{23}^2 - P_{24}^2 - P_{25}^2 - P_{26}^2 - P_{27}^2 - P_{28}^2 - P_{29}^2 - P_{210}^2; \\
P_{33}(t) &= (-2/\theta - 4(K_{13}m_5(t)))P_{33} - P_{31}^2 - P_{32}^2 - P_{33}^2 - P_{34}^2 - P_{35}^2 - \\
&\quad P_{36}^2 - P_{37}^2 - P_{38}^2 - P_{39}^2 - P_{310}^2; \\
P_{44}(t) &= (-2(1/\theta + K_d))P_{44} - 4(K_{L1}m_4(t)P_{41} + K_{12}m_4(t))P_{42} - \\
&\quad P_{42}^2 - P_{42}^2 - P_{43}^2 - P_{44}^2 - P_{45}^2 - P_{46}^2 - P_{47}^2 - P_{48}^2 - P_{49}^2 - P_{410}^2; \\
P_{55}(t) &= 2(-1/\theta + K_{t1})P_{55} + 4(K_{L1}m_4(t))P_{51} + K_{21}m_6(t)P_{51} + \\
&\quad K_{31}m_7(t)P_{51} - K_{12}m_5(t)P_{52} - K_{13}m_5(t)P_{54} - P_{51}^2 - P_{52}^2 - \\
&\quad P_{53}^2 - P_{54}^2 - P_{55}^2 - P_{56}^2 - P_{57}^2 - P_{58}^2 - P_{59}^2 - P_{510}^2; \\
P_{66}(t) &= 2(-1/\theta + K_{t2})P_{66} + 4(-K_{21}m_6(t)P_{61} + K_{L2}m_4(t)P_{62} + \\
&\quad K_{12}m_5(t)P_{62}) - P_{61}^2 - P_{62}^2 - P_{63}^2 - P_{64}^2 - P_{65}^2 - P_{66}^2 - \\
&\quad P_{67}^2 - P_{68}^2 - P_{69}^2 - P_{610}^2; \\
P_{77}(t) &= 2(-1/\theta + K_{t3})P_{77} + 4(-K_{31}m_7(t)P_{71} + K_{13}m_5(t)P_{73}) - P_{71}^2 - \\
&\quad P_{72}^2 - P_{73}^2 - P_{74}^2 - P_{75}^2 - P_{76}^2 - P_{77}^2 - P_{78}^2 - P_{79}^2 - P_{710}^2; \\
P_{88}(t) &= 2(-1/\theta)P_{88} + 4(K_{L1}m_4(t)P_{81} + K_{11}m_5(t)P_{81} + K_{21}m_6(t)P_{81} + \\
&\quad K_{31}m_7(t)P_{81} + K_{L2}m_4(t)P_{82}) - P_{81}^2 - P_{82}^2 - P_{83}^2 - P_{84}^2 - \\
&\quad P_{85}^2 - P_{86}^2 - P_{87}^2 - P_{88}^2 - P_{89}^2 - P_{810}^2; \\
P_{99}(t) &= 2(-1/\theta)P_{99} + 4(K_{L1}m_4(t)P_{91} + K_{L2}m_4(t)P_{92} + \\
&\quad K_{12}m_5(t)P_{29} + K_{22}m_6(t)P_{29}) - P_{91}^2 - P_{92}^2 - P_{93}^2 - P_{94}^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_{95}^2 - P_{96}^2 - P_{97}^2 - P_{98}^2 - P_{99}^2 - P_{910}^2; \\
P_{10-10}(t) = & 2(-1/\theta)P_{10-10} + 4(K_{L1}m_4(t)P_{10-1} + K_{L2}m_4(t)P_{10-2} + \\
& K_{L3}m_5(t)P_{10-3}) - P_{10-1}^2 - P_{10-2}^2 - P_{10-3}^2 - P_{10-4}^2 - P_{10-5}^2 - P_{10-6}^2 - \\
& P_{10-7}^2 - P_{10-8}^2 - P_{10-9}^2 - P_{10-10}^2].
\end{aligned}$$

En el proceso de simulación, las condiciones iniciales en  $t = 0$  son iguales a cero para las variables de estado  $C_{m1}, \dots, \lambda_1^{001}$ , son 0.5 para los estimados  $m_1(t), \dots, m_{10}(t)$ , toman el valor de 1 para los componentes diagonales de la matriz de varianza, y cero para sus otros componentes. Los parámetros del sistema son asignados con el valor de 1:  $V = 1; d\Delta_{m1}/dt = 1; K_{L1} = 1; K_{11} = 1; K_{21} = 1; K_{31} = 1; K_{32} = 1; d\Delta_{m2}/dt = 1; d\Delta_{m3}/dt = 1; d\Delta_{m4}/dt = 1; K_{L2} = 1; K_{L3} = 1; K_{12} = 1; K_{13} = 1; K_{22} = 1; K_d = 1; K_{t1} = 1; K_{t2} = 1; K_{t3} = 1; \theta = 1$ . Los ruidos blancos Gaussianos en las ecuaciones (6.7) son tomados de la función de *MatLab 6, versión 1.2*.

En la Figura 6.1, los valores obtenidos de las variables de estado  $C_{m1}, \dots, \lambda_1^{001}$  están representados por una línea continua delgada, y los valores de los estimados del filtro óptimo bilineal  $m_1(t), \dots, m_{10}(t)$  son mostrados por la línea delgada empalmada con la línea punteada gruesa (que corresponde al filtro polinomial mixto).

El desempeño del filtro bilineal óptimo dado por las ecuaciones (6.6), (6.7) es comparado con el desempeño del filtro lineal óptimo de Kalman-Bucy, el cual es obtenido de la linealización del sistema. Este filtro lineal contiene sólo los términos lineales y el proceso de inovación de las ecuaciones (6.6) ó (6.7) para los estimados óptimos, y los términos correspondientes a las ecuaciones de Riccati para componentes de las ecuaciones de la matriz de varianza (6.7):

$$dm_k(t)/dt = (a_{0k}(t) + \sum_i a_{1ki}(t)m_i(t) + \quad (6.9)$$

$$\sum_{jlp s} P_{kj}(t) A_{jl}^T(t) (B_{lp} B_{ps})^{-1}(t) [dy_s - \sum_r A_{sr}(t) m_r(t) dt],$$

$$m_k(t_0) = E[x_k(t_0) | Y(t_0)];$$

$$dP_{ij}(t)/dt = \sum_k a_{ik}(t) P_{kj}(t) + \sum_k P_{ki}(t) a_{jk}(t) + \sum_k b_{ik}(t) b_{kj}(t) - \sum_{klpsr} P_{ik}(t) A_{kl}^T(t) (B_{lp} B_{ps})^{-1} A_{sr} P_{rj}(t), \quad (6.10)$$

$$P_{ij}(t_0) = E[(x_i(t_0) - m_i(t_0))(x_j(t_0) - m_j(t_0))^T | Y(t_0)].$$

Las gráficas de los estimados obtenidos usando el filtro lineal de Kalman-Bucy son mostradas por una línea segmentada en la Figura 6.1.

Finalmente, el desempeño del filtro bilineal óptimo (6.6),(6.7) es comparado con el desempeño del filtro mixto, el cual es compuesto por la siguiente estructura: Las ecuaciones del estimado óptimo en este filtro coinciden con las ecuaciones (6.6) o (6.7) para el filtro bilineal óptimo, y las ecuaciones de la varianza coinciden con las ecuaciones (6.10) para el filtro lineal de Kalman-Bucy. Las gráficas de los estimados obtenidos usando el filtro mixto son mostradas en la Figura 6.1 por una línea punteada gruesa (empalmada con una delgada, la cual corresponde a los estimados del filtro bilineal óptimo). Las condiciones iniciales y los ruidos blancos Gaussianos son realizados en la misma forma que en los filtros estudiados en el capítulo anterior. En la gráfica siguiente se muestran los resultados de la simulación, basados en los algoritmos obtenidos matemáticamente. Se puede ver que los resultados obtenidos para el filtro bilineal óptimo proporcionan el mejor estimado. Además se puede decir que el filtro mixto presenta valores muy cercanos al bilineal, y en algunas variables, es mejor, lo cual se debe a que el filtro mixto tiene mayor realizabilidad.

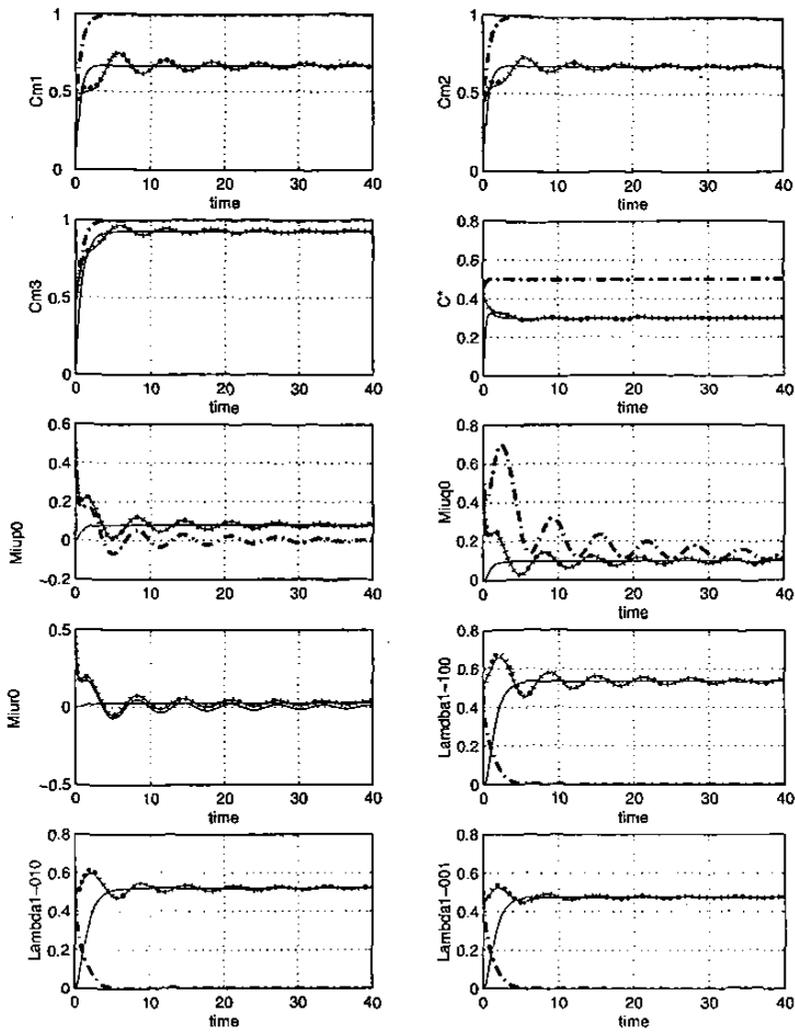


Figura 6.1: Gráficas de las diez variables de estado (6.4) (línea continua a la cual convergen las demás), los estimados obtenidos mediante el filtro bilineal (6.6),(6.7) (línea delgada empalmada con la línea punteada gruesa), los estimados obtenidos mediante el filtro lineal de Kalman-Bucy (6.9),(6.10) (línea segmentada), y los estimados obtenidos mediante el filtro mixto (6.6),(6.10) (línea punteada gruesa).

# Capítulo 7

## Control Óptimo en Sistemas Polinomiales

### 7.1. Control Óptimo para un Estado Polinomial de Tercer Grado con Entrada Lineal de Control

#### 7.1.1. Planteamiento del Problema

Consideremos el siguiente sistema polinomial:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + & (7.1) \\ & B(t)u(t)dt \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema,  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^2(t) = [x_1^2(t) \ x_2^2(t) \ \dots \ x_n^2(t)]^T$ ,  $x^3(t) = [x_1^3(t) \ x_2^3(t) \ \dots \ x_n^3(t)]^T$ , y  $u(t)$  es la variable de control. La

función de costo cuadrático a ser minimizada está dada por:

$$J = \frac{1}{2}(x(T) - x_1)^T \Psi^{-1}(x(T) - x_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s) R(s) u(s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s) L(s) x(s) ds, \quad (7.2)$$

donde  $x_1$  es un vector dado,  $\Phi$ ,  $K$ ,  $L$  son matrices simétricas,  $K$  es una matriz positiva, y  $\Phi$  y  $L$  son no-negativas,  $T > t_0$  es un cierto momento en el tiempo. El problema de control óptimo consiste en encontrar el control  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , que minimice el criterio  $J$  a lo largo de la trayectoria  $x^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , generada al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación de estado (7.1).

### 7.1.2. Solución

Para encontrar la solución al problema de control óptimo, es necesaria la aplicación del principio de dualidad [56], el cual establece que si el control óptimo existe para sistemas lineales, con función de costo cuadrático  $J$ , el filtro óptimo existe para el sistema lineal dual con disturbios Gaussianos, y puede ser encontrado partiendo de la solución al problema de control óptimo, usando simples transformaciones algebraicas (dualidad entre las matrices de ganancia y de varianza), y viceversa. Tomando en cuenta la dualidad física existente entre los problemas de filtrado y control, las conjeturas anteriores deberían ser válidas para todos los casos donde el control óptimo existe en forma cerrada y finito-dimensional. Se llevará a cabo la aplicación de este principio a un sistema polinomial de tercer orden, para el cual el filtro óptimo ya ha sido obtenido en el Capítulo 5, para posteriormente retornar al problema de control óptimo para el estado polinomial (7.1) con entrada de control lineal y función de costo cuadrático (7.2). Partiendo del filtro, y tomando en cuenta que el filtro óptimo polinomial de tercer grado existe en forma cerrada, tenemos que la

matriz de ganancia en el filtro polinomial (5.15) es igual a

$$K_f = P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1},$$

la matriz de ganancia en el problema de control óptimo toma la forma de su transpuesta dual

$$K_c = (R(t))^{-1}B(t)Q(t),$$

y la ley de control óptima está dada por

$$u^*(t) = K_c x = (R(t))^{-1}B(t)Q(t)x(t), \quad (7.3)$$

donde la matriz  $Q(t)$  es la solución de la siguiente ecuación dual (5.18) de la ecuación de varianza:

$$\begin{aligned} dQ(t) = & (-a_1^T(t)Q(t) - Q(t)a_1^T(t) - 2a_2^T(t)Q(t) * x^T(t) - \\ & 2x(t) * Q(t)a_2(t) - 3a_3^T(t)Q(t) * q^T(t) - \\ & 3q(t) * Q(t)a_3(t) - 3a_3^T(t)Q(t) * ((x^2)^T(t)) - 3(x^2(t) * \\ & Q(t))a_3(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t))dt, \end{aligned} \quad (7.4)$$

con la condición terminal  $Q(T) = \psi$ . La operación binaria  $*$  ha sido introducida en la Sección 5.3, y  $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]^T$  denota el vector formado por los elementos de la diagonal de la matriz  $Q(t)$ .

Sustituyendo el control óptimo (7.3) en la ecuación de estado (7.1), se obtiene la ecuación del estado óptimamente controlado:

$$\begin{aligned} dx(t) = & (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t))dt + \\ & B(t)(R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)x(t)dt, \\ x(t_0) = & x_0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

Note que si el vector del estado real  $x(t)$  es desconocido (no-observable), el controlador óptimo es obtenido agrupando las ecuaciones del filtro óptimo y del regulador. Esta agrupación es posible, gracias al principio de separación [56] para sistemas polinomiales, el cual establece que esto es posible si las soluciones al problema del filtro y el control existen en forma cerrada y finito-dimensional.

Los resultados obtenidos en esta sección por virtud del principio de dualidad pueden ser rigurosamente verificados usando el Principio del Máximo de Pontryagin [70] o la programación dinámica de Bellman [28].

## 7.2. Aplicación del Regulador Óptimo Polinomial de Tercer Grado a un Sistema Automotriz

### 7.2.1. Planteamiento del problema

Esta sección presenta la aplicación del regulador óptimo para un sistema polinomial de tercer grado con entrada de control lineal y criterio cuadrático para controlar las variables de estado, y los ángulos de orientación del automóvil y de dirección del volante, en el modelo cinemático de un carro en movimiento [63], dadas las ecuaciones (7.7) para el caso no lineal. El problema de control consiste en maximizar el ángulo de orientación usando la mínima energía de control  $u$ . El criterio cuadrático a ser minimizado  $J$  toma la forma

$$J = 1/2[\phi(t) - \phi^*(T)]^2 + 1/2 \int_0^T u^2(t)dt, \quad (7.6)$$

Donde  $T = 0.1min$ , y  $\phi^* = 1rad$  es un valor grande de  $\phi(t)$  (inalcanzable en el tiempo  $T$ ). Las ecuaciones de estado ya han sido presentadas en la sección de la aplicación del

filtro óptimo polinomial, pero se presentarán de nuevo para hacer más fácil la lectura y comprensión del texto. Estas toman la forma

$$\begin{aligned}
 dx(t) &= v \cos \phi(t) dt, \\
 dy(t) &= v \sin \phi(t) dt, \\
 d\phi(t) &= (v/l) \tan \delta(t) dt, \\
 d\delta(t) &= u(t) dt.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Aquí,  $x(t)$  y  $y(t)$  son las coordenadas cartesianas del centro de masa del carro,  $\phi(t)$  es el ángulo de orientación,  $v$  es la velocidad,  $l$  es la longitud entre los dos ejes del carro,  $\delta(t)$  es el ángulo del volante, y  $u(t)$  es la variable de control (velocidad angular del volante). Usando la expansión en series de Taylor de las ecuaciones originales para  $\phi(t)$  y  $\delta(t)$  (7.7), obtenemos un sistema polinomial de ecuaciones de tercer grado (el cuarto grado no aparece en la expansión de Taylor para la tangente), el cual toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 d\phi(t) &= (v/l)(\delta(t) + \delta^3(t)/3) dt, \\
 d\delta(t) &= u(t) dt.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Las observaciones son directas, y contienen disturbios modelados como ruidos blancos Gaussianos, que son independientes e idénticamente distribuidos. Las ecuaciones de las observaciones están dadas por:

$$\begin{aligned}
 dz_\phi(t) &= \phi(t) dt + f_1(t) dt \\
 dz_\delta(t) &= \delta(t) dt + f_2(t) dt
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

donde  $z_\phi(t)$  es la variable de observación para  $\phi(t)$ ,  $z_\delta(t)$  es la variable de observación para  $\delta(t)$ , y  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son ruidos blancos Gaussianos independientes uno del otro. Se asignó  $v = 17m/min$  y  $l = 2m$  y el tiempo final es  $T = 0.1min$ , lo cual corresponde

al movimiento angular de un carro de tamaño mediano en un intervalo de tiempo de 6 segundos. En otras palabras, el problema es hacer el giro máximo de las ruedas de su posición inicial, usando el mínimo de energía en el volante. Las condiciones iniciales para los ángulos son  $\phi(0) = 0.1rad$  y  $\delta(0) = 0.1rad$ .

### 7.2.2. Solución

Sustituyendo las ecuaciones de estado (7.7) en las ecuaciones generales para el control óptimo (7.3)-(7.5) son obtenidas las ecuaciones para el control óptimo en esta aplicación. Considerando los valores para  $R = 1$  y para  $G^T = [0, 1]$ , el control óptimo  $u^*(t) = (R(t))^{-1}G^T(t)Q(t)x(t)$  toma la forma  $u^*(t) = q_{21}(t)\phi(t) + q_{22}(t)\delta(t)$ , donde los elementos  $q_{11}(t), q_{21}(t), q_{22}(t)$  de la matriz simétrica  $Q(t)$  satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} dq_{11}(t) &= -q_{21}^2(t) \\ dq_{12}(t) &= -\frac{v}{l}q_{11}^2(t) - q_{12}(t)q_{22}(t) - \frac{v}{l}q_{11}(t) - \frac{v}{l}\phi^2(t)q_{11}(t) \\ dq_{22}(t) &= -\frac{2v}{l}q_{12}(t) - \frac{2v}{l}q_{12}(t)q_{22}(t) - \frac{2v}{l}\delta^2(t)q_{12}(t) - q_{22}^2(t). \end{aligned} \quad (7.10)$$

con condiciones terminales  $q_{11}(T) = 1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$ . El sistema compuesto por los sistemas de ecuaciones anteriores (7.7) y (7.10) debe ser resuelto con condiciones iniciales  $\phi(0) = 0.1rad, \delta(0) = 0.1rad$  y con las condiciones terminales anteriores. Este problema de frontera es resuelto numéricamente usando el método iterativo mediante el cual se pasa de las ecuaciones en tiempo directo a las ecuaciones en tiempo inverso, como se describe a continuación. Las primeras condiciones iniciales para  $q/s$  son evaluadas y el sistema es resuelto en tiempo directo con las condiciones iniciales en  $t = 0$ ; así son obtenidos los valores de  $\phi$  y de  $\delta$  en el punto terminal  $T = 0.1min$ . Después el sistema es resuelto en tiempo inverso (sustituyendo  $-t$  en lugar de  $t$ ) tomando los valores obtenidos de  $\phi$  y  $\delta$  del sistema en tiempo directo como valores iniciales en tiempo inverso; así ob-

tendremos valores para las  $q$ 's en el punto inicial  $t = 0$ , los cuales son tomados como valores iniciales en las ecuaciones en tiempo directo, y así sucesivamente. Las condiciones iniciales dadas  $\phi(0) = 0.1rad$  y  $\delta(0) = 0.1rad$  son mantenidas fijas en el sistema en tiempo directo y las condiciones terminales  $q_{11}(T) = 1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$  son mantenidas fijas en el sistema en tiempo inverso. El algoritmo se detiene cuando el sistema alcanza los valores  $q_{11}(T) = 1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$  en el sistema en tiempo directo y los valores  $\phi(0) = 0.1rad, \delta(0) = 0.1rad$  en el sistema en tiempo inverso.

Las condiciones iniciales para las  $q$ 's en la iteración final en tiempo directo son  $q_{11}(0) = 1.32, q_{12}(0) = 16, q_{22}(0) = 1640$ . Los valores obtenidos para  $\phi$  y el criterio  $J$  mediante la simulación se presentan en la Figura 7.3. Estos resultados para el regulador polinomial de tercer grado son comparados con los resultados obtenidos usando el regulador lineal para el cual los elementos de la matriz  $Q(t)$  satisfacen las ecuaciones de Riccati:

$$\begin{aligned} dq_{11}(t) &= -q_{12}^2(t) \\ dq_{12}(t) &= -q_{12}q_{22} - \frac{v}{l}q_{11} \\ dq_{22}(t) &= -\frac{2v}{l}q_{12} - q_{22}^2, \end{aligned} \tag{7.11}$$

con condiciones terminales  $q_{11}(T) = 1, q_{12}(T) = 0, q_{22}(T) = 0$ . Note que en el caso lineal es necesaria solo una iteración con la ecuación en tiempo inverso ( $-t$ ) para  $q$ 's, porque el sistema (7.11) no depende de  $\phi$  ni de  $\delta$ , y los valores iniciales para  $q$ 's en  $t = 0$  son obtenidos después de una iteración con la ecuación en tiempo inverso. Las condiciones iniciales para las  $q$ 's en la iteración en tiempo directo son  $q_{11}(0) = 1.025, q_{12}(0) = 0.87, q_{22}(0) = 0.74$ . Las gráficas de la simulación para el caso lineal se muestran en la Figura 7.1. Así, son obtenidas dos conjuntos de gráficas.

1. Gráfica de la variable  $\phi$  que satisface el sistema original (7.7) controlado por el regulador lineal óptimo definido por (7.11); gráfica de los valores correspondientes del

criterio  $J$  (7.6); gráfica del control lineal  $u^*(t)$  correspondiente a las ecuaciones (7.11) (Figuras 7.1 y 7.2).

2. Gráfica de la variable  $\phi$  que satisface el sistema original (7.7) controlado por el regulador polinomial de tercer grado definido por (7.10); gráfica de los valores correspondientes de  $J$  (7.6); gráfica del control polinomial  $u^*(t)$  correspondiente a las ecuaciones (7.10) (Figs. 7.3 y 7.4).

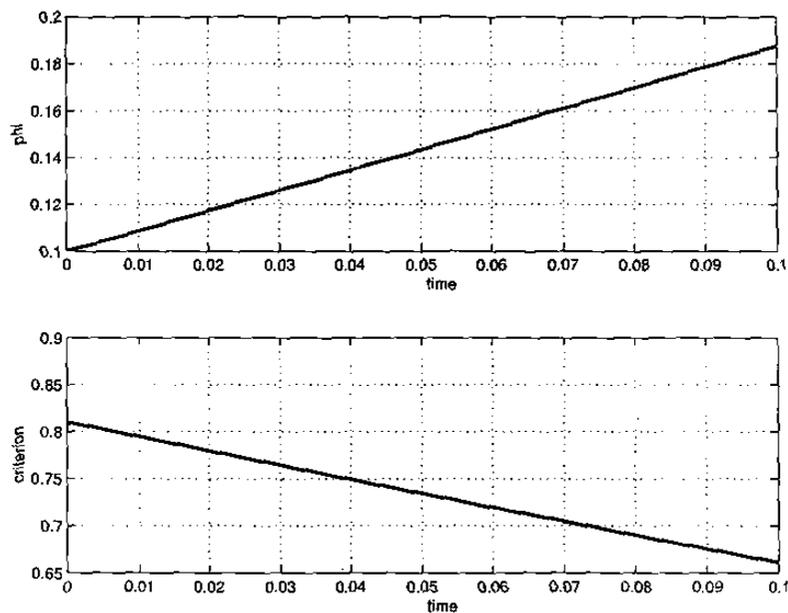


Figura 7.1: Gráficas del regulador lineal correspondiente a las ecuaciones (7.11).  $\phi = \phi$ ,  $\text{criterion} = J$ .

Los valores obtenidos de la variable controlada  $\phi$  y el criterio  $J$  son comparados en el tiempo terminal  $T = 0.1 \text{ min}$  en la siguiente tabla (correspondiente a las Figuras 7.1 y 7.3).

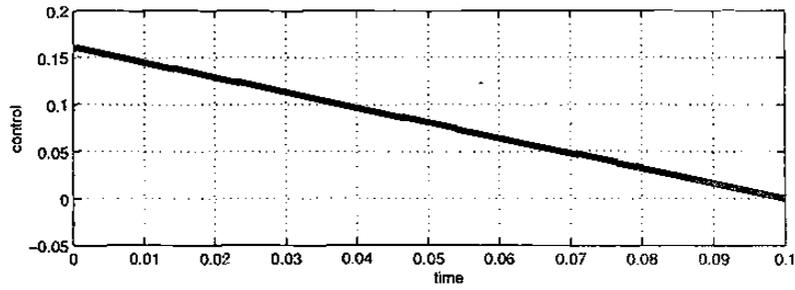


Figura 7.2: Gráfica del control lineal  $u^*(t)$  correspondiente a las ecuaciones (7.11) con  $u(0) = u^*$ .

Control lineal	Control polinomial de tercer grado
$\phi(0.1) = 0.1875rad$	$\phi(0.1) = 0.989rad$
$J = 0.661$	$J = 0.065$

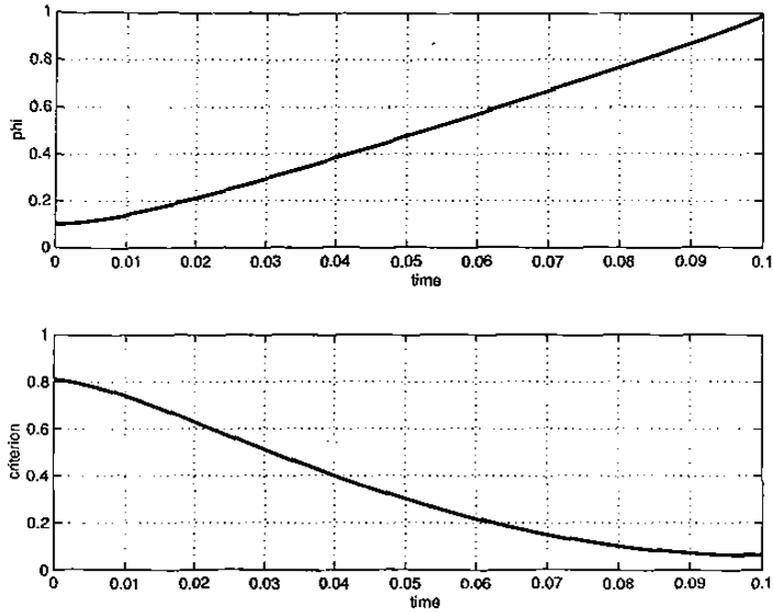


Figura 7.3: Gráficas del regulador polinomial de tercer grado correspondiente a las ecuaciones (7.10).  $\text{phi} = \phi$ ,  $\text{criterion} = J$ .

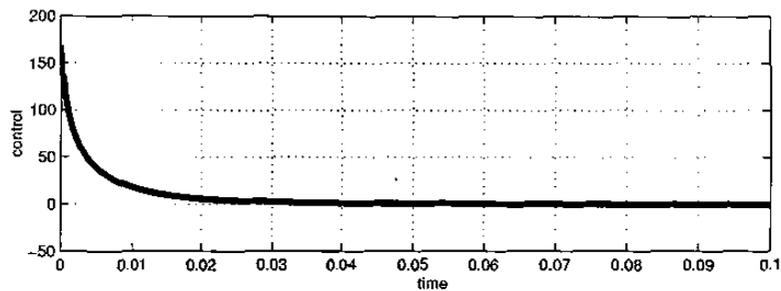


Figura 7.4: Gráfica del control polinomial  $u^*(t)$  correspondiente a las ecuaciones (7.10).  $\text{control} = u^*$ .