

# CAPÍTULO 1

## PROCESOS DE FORMADO DE METALES

### 1.1 Introducción

El trabajo en metales consiste en procesos de deformación en los cuales una pieza inicialmente simple es plásticamente deformada por medio de herramientas para obtener una configuración final deseada<sup>[1]</sup>.

Los fenómenos físicos que constituyen las operaciones de formado son difíciles de expresar con relaciones cuantitativas. El flujo del metal, la fricción en la interfase metal-herramienta, la generación y transferencia de calor durante el flujo plástico, así como las relaciones microestructura-propiedades-procesamiento son difíciles de predecir y analizar. Es común que el formado de una pieza de forma inicial “simple” a una forma final “compleja”, necesite de varios pasos u operaciones de formado, de tal manera que se evite la falla del material o la degradación de sus propiedades. Por lo tanto, el principal objetivo de cualquier método de análisis es asistir al ingeniero en el diseño de las secuencias de formado o preformado<sup>[2]</sup>.

## 1.2 Perspectiva histórica

El formado de metales es una de las técnicas más importantes utilizadas para la fabricación de productos; las otras técnicas son la fundición y la metalurgia de polvos. Los primeros registros del formado de metales describen el formado de oro y cobre por medio de un martillo simple en varias regiones del Medio Este alrededor del año 8000 A.C. Para el año 4000 A.C. con el advenimiento de la fundición de cobre, se encontró un método para purificar los metales por medio de reacciones químicas en estado líquido. Después, durante la Edad de Cobre, se encontró que por medio del formado con martillo se incrementaba la resistencia del metal (fenómeno conocido ahora como endurecimiento por deformación). La Edad de Hierro no llegó sino hasta el año 1200 A.C., aproximadamente, cuando se descubrieron métodos para alcanzar las temperaturas necesarias para refinar el mineral de hierro<sup>[1]</sup>.

La mayoría del trabajo sobre metales era hecho a mano hasta el siglo XIII, cuando se inventó una máquina de martillo para forjar barras y placas. El desarrollo de molinos de laminado siguió al equipo de forja. Apuntes de Leonardo da Vinci del año 1480 muestran bosquejos de una máquina diseñada para laminar plomo. En 1495, da Vinci reporta haber laminado hojas delgadas de metales preciosos en un molino operado a mano<sup>[1]</sup>.

Durante la Revolución Industrial a finales del siglo XVIII, nuevos procesos fueron ideados para la producción de hierro y acero en grandes cantidades, en respuesta a la creciente demanda de productos metálicos. Esta necesidad impulsó el desarrollo de martillos de vapor de alta velocidad, prensas hidráulicas, etc<sup>[1]</sup>.

En los últimos 100 años se ha visto el desarrollo de nuevos equipos para el formado de metales, tales como prensas de tornillo, prensas mecánicas, molinos de alta velocidad, etc., y de nuevos materiales con propiedades y aplicaciones especiales. En los últimos 20 años, la aplicación de métodos numéricos para el análisis de los distintos procesos de formado ha conducido a productos de más alta calidad y a un incremento en la eficiencia de la industria del formado de metales<sup>[1]</sup>.

### 1.3 Clasificación de los procesos de formado de metales

Los procesos de formado en metales pueden ser clasificados en dos grandes categorías<sup>[1]</sup>:

1. Procesos de formado masivo
2. Procesos de formado de hojas o láminas

En ambos casos, las superficies del material a deformar y de las herramientas de formado están en contacto y la fricción entre ellas tiene una gran influencia sobre el proceso.

Los procesos que caen en la categoría de formado masivo, se distinguen por las siguientes características<sup>[1]</sup>:

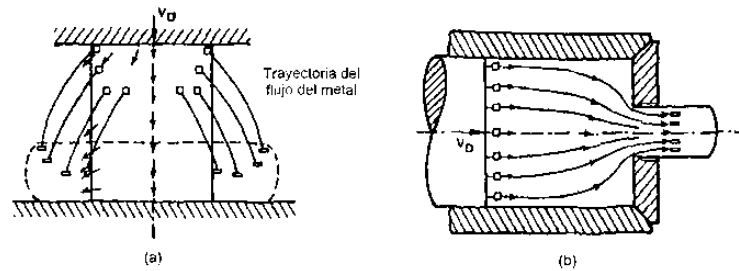
- La pieza de trabajo experimenta gran deformación plástica, resultando en un apreciable cambio en forma y sección transversal.
- La porción de la pieza que experimenta esta deformación permanente es, generalmente, mucho mayor que la porción que experimenta deformación elástica; por lo tanto, la recuperación elástica es despreciable.

Las características de los procesos de formado de hojas o láminas son<sup>[1]</sup>:

- La pieza de trabajo es una lámina o una pieza hecha a partir de una lámina.
- La deformación comúnmente causa grandes cambios en forma, pero no en sección transversal (espesor).
- En algunos casos, las magnitudes de las deformaciones plástica y elástica son comparables; por lo que la recuperación elástica puede ser significativa.

Desde el punto de vista del flujo del material, se pueden distinguir dos tipos de procesos de formado (Figura 1-1)<sup>[2]</sup>:

- Formado con flujo de material en estado no estable, en el cual el campo de velocidad cambia continuamente con el tiempo, como es el caso de forja abierta.
- Formado con flujo de material en estado estable, en el cual el campo de velocidad durante la deformación permanece constante, como en el caso de procesos de extrusión.



**Figura 1-1.** (a) Flujo de metal en estado no estable y (b) en estado estable [2].

Desde un punto de vista más general, cualquier proceso físico en el cual intervengan deformaciones, puede ser clasificado en base al papel que juega la energía cinética en él, es decir, su magnitud con respecto a otro tipo de energía, como energía interna, energía por deformación plástica, etc. Por lo tanto, se pueden distinguir tres tipos de procesos<sup>[3]</sup>:

1. Procesos cuasi-estáticos, en los que la energía cinética es insignificante, menos del 1% de la energía interna del sistema. La mayoría de los procesos de formado caen en esta categoría, lo que puede ser comprobado determinando el orden de magnitud de cada contribución de energía.
2. Procesos a alta rapidez de deformación, o procesos puramente dinámicos, la energía cinética es en gran parte dominante, por lo que las ecuaciones constitutivas del material pueden ser despreciadas, o simplemente consideradas como una ligera perturbación. Este es el caso de procesos con una alta energía de impacto, que ocurren en un lapso de tiempo muy pequeño, como impactos de bala.
3. En la parte intermedia o dinámica, la energía cinética, así como la energía de deformación reversible o irreversible tienen ordenes de magnitud similares. Un buen ejemplo de este caso es la vibración de estructuras, impactos de moderada velocidad como choques de automóviles, procesos de formado de alta velocidad, etc.

Esta última clasificación es útil para determinar el tipo de proceso que se quiere analizar y, en base a esto, determinar la formulación matemática apropiada para tomar ventaja de la situación física. Una de estas formulaciones, la formulación explícita (Capítulo 2), fue originalmente desarrollada para el análisis de impactos a alta

velocidad<sup>[4]</sup>. La otra formulación, implícita, es generalmente más apropiada para el análisis de procesos estáticos y a bajas velocidades.

## **1.4 Variables en los procesos de formado**

El proceso de formado de metales es un sistema<sup>[2]</sup> que comprende todas aquellas variables relacionadas a la pieza inicial (material y geometría), al herramental (material y geometría), a las condiciones en la interfase material-herramienta (fricción, lubricación), a los mecanismos de deformación plástica, al equipo usado, a las características del producto final y por último al ambiente en planta en el que se lleva a cabo el proceso.

La clave para una operación de formado exitosa es el entendimiento y control del flujo del metal. La dirección del flujo, la magnitud de deformación y la temperatura tienen gran influencia en las propiedades de los componentes formados. El flujo del metal determina las propiedades mecánicas relacionadas a deformaciones locales y la formación de defectos como grietas en la superficie o bajo ella. El flujo de metal es a su vez influenciado por las variables del proceso, las cuales se discuten a continuación<sup>[2]</sup>.

### **1.4.1 Variables del material**

Para una dada composición química e historial térmico y de deformación de un material (microestructura), el esfuerzo de fluencia (esfuerzo efectivo) y la formabilidad en distintas direcciones (anisotropía), representan las variables más importantes en el análisis de un proceso de formado de metales.

Para una microestructura dada, el esfuerzo de fluencia es expresado como función de la deformación, la velocidad de deformación y la temperatura. La formabilidad es la capacidad de un material de deformarse sin llegar a la falla; depende de las condiciones durante el proceso de deformación (temperatura, velocidad de deformación, e historia de esfuerzo y deformación) y de las variables atribuidas al material (composición química, poros, inclusiones, microestructura inicial).

#### **1.4.2 Equipo y herramientas**

La selección de una máquina para un proceso de formado dado está en función de las características requeridas de tiempo, exactitud y energía de carga. Las variables en el herramental de formado son el diseño y geometría, acabado superficial, rigidez, y propiedades mecánicas y térmicas bajo condiciones de uso.

#### **1.4.3 Fricción**

Los mecanismos de fricción en la interfase pieza-herramienta son muy complejos. Una manera de expresar la fricción cuantitativamente es a través de un coeficiente de fricción  $\mu$ , o de un factor de fricción de corte  $m$ . Existen varios métodos para evaluar la fricción, es decir, estimar el valor de  $\mu$  o  $m$ . Los métodos más comúnmente usados son las pruebas de compresión en anillos para procesos de formado masivo y la de estirado en deformación plana para procesos de formado de hojas o láminas de metal.

#### **1.4.4 Mecánica de deformación**

En el formado, el material es deformado plásticamente para generar la forma del producto deseado. El flujo del metal está influenciado principalmente por la geometría de las herramientas, las condiciones de fricción, las características del material y las condiciones térmicas en la zona de deformación. El flujo del metal tiene influencia en la calidad y propiedades del producto formado y en la fuerza y energía necesaria para el proceso. La mecánica de la deformación, es decir, el flujo del metal, deformación, velocidad de deformación y esfuerzos, pueden ser analizados por medio de la modelación del proceso.

#### **1.4.5 Propiedades del producto**

La macro y microgeometría del producto, por decir, sus dimensiones y acabado superficial, están influenciadas por las variables del proceso. Las condiciones de procesamiento (temperatura, deformación, velocidad de deformación) determinan las variaciones microestructurales que se llevan a cabo durante la deformación, las cuales tienen influencia en las propiedades finales del producto. Por consecuencia, una aproximación del sistema debe tener en consideración las relaciones entre las

propiedades y microestructura del material formado y las influencias de las condiciones del proceso sobre el flujo del metal y sus microestructuras resultantes de manera cuantitativa.

### 1.5 Métodos de análisis

El diseño, control y optimización de los procesos de formado requieren de conocimiento analítico con respecto al flujo del metal, esfuerzos y transferencia de calor, así como información técnica relacionada a la lubricación, técnicas de calentamiento y enfriamiento, manejo de materiales, diseño y manufactura de herramientas y equipo de formado.

El propósito del análisis de los procesos de formado es investigar la mecánica de los procesos de deformación plástica, con los siguientes objetivos principales<sup>[2]</sup>:

- Establecer las relaciones cinemáticas entre la pieza inicial y la pieza formada, es decir, predecir el flujo del metal durante la operación de formado.
- Establecer los límites de formabilidad, es decir, determinar entre sí es posible llevar a cabo la operación de formado sin causar defectos superficiales e internos en el material.
- Predecir los esfuerzos, fuerzas y energía necesarias para llevar a cabo la operación de formado, para el diseño y selección apropiado del equipo.

Por lo tanto, la mecánica de deformación provee los medios necesarios para determinar como fluye el material, como obtener la geometría deseada por deformación plástica y cuales son las propiedades mecánicas esperadas del producto.

Las ecuaciones que gobiernan la solución de la mecánica de deformación plástica se pueden resumir en las ecuaciones de equilibrio, un criterio de fluencia, ecuaciones constitutivas del material y las condiciones de compatibilidad. Debido a que es muy difícil obtener una solución que satisfaga todas estas ecuaciones, se han desarrollado varios métodos de aproximación numérica.

Algunos de los métodos disponibles para el modelado de los procesos de formado generalmente caen en alguna de las siguientes categorías<sup>[6]</sup>:

- El método de bloque, el cual considera deformación homogénea y restringe el cambio de esfuerzo a una sola dirección.
- El método de energía de deformación uniforme, el cual determina el esfuerzo de formado promedio por medio del trabajo por deformación plástica.
- La teoría de campo de líneas de deslizamiento, la cual permite el cálculo del esfuerzo punto a punto.
- Los métodos de límite superior e inferior, basados en la teoría del límite, los cuales utilizan un campo de esfuerzos y velocidades razonables para el cálculo de los límites dentro de los cuales se encuentra la carga real de formado.
- El método de elementos finitos, el cual permite grandes deformaciones y considera materiales elasto-plásticos y provee de la información necesaria para el diseño y control de procesos de formado.

Todos estos métodos son capaces de obtener soluciones aproximadas a problemas, sin embargo, a excepción del método de elementos finitos, estos métodos están sujetos a un tipo de problema o condiciones específicas, además de tener algunas otras limitaciones. A continuación se discutirán brevemente los métodos mas comúnmente usados, en forma separada del método de elementos finitos.

### **1.5.1 Método de bloque**

Este es uno de los primeros métodos de análisis desarrollado durante la década de 1920 por von Kármán, Hencky, Siebel y después por Sachs<sup>[6]</sup>. En esta aproximación, la deformación es considerada homogénea y las ecuaciones de equilibrio de fuerza son construidas y resueltas utilizando un criterio de fluencia apropiado. Las mayores deficiencias de este método son<sup>[1]</sup>:

- El trabajo redundante, el cual es debido a los procesos de corte internos producidos por la deformación no uniforme y que no contribuyen al cambio de forma en la pieza<sup>[6]</sup>, no se toma en cuenta.



- Los gradientes de esfuerzo y deformación son tomados en cuenta en una sola dirección y se consideran uniformes en la dirección perpendicular.

Este método proporciona una forma rápida de obtener la carga y deformación aproximada en problemas con simetría alrededor de un eje (axisimétricos) y en estado de deformación plana.

### 1.5.2 Método de campo de líneas de deslizamiento

Este método fue la primera aproximación en el análisis de procesos de formado que no supone condiciones de deformación homogénea. Considera al material rígido perfectamente plástico. La teoría se basa en el hecho de que cualquier estado de esfuerzo en deformación plana puede ser representado como la suma de un esfuerzo hidrostático y un esfuerzo de corte puro<sup>[1]</sup>. Dadas las condiciones de fuerza y velocidad, se construye el campo de líneas de deslizamiento. La principal ventaja de este método sobre el método de bloque es que puede proveer cálculos de esfuerzos locales aún cuando la deformación no sea homogénea. Las mayores desventajas de este método son<sup>[1]</sup>:

- Solo es prácticamente útil para problemas en condición de deformación plana.
- Considera al material como rígido perfectamente plástico.
- La solución de problemas en tres dimensiones es demasiado compleja.

### 1.5.3 Método de límite superior e inferior

El método de límite superior provee de un valor sobreestimado de la fuerza requerida para la deformación mientras que la solución por límite inferior subestima este valor de fuerza. El grado de correlación entre las predicciones de las soluciones superior e inferior proveen de un indicativo de cuanto se acercan los valores calculados a la solución exacta<sup>[6]</sup>.

Estos métodos se basan en el teorema del límite. El teorema del límite superior establece que la potencia disipada por las fuerzas de frontera con sus respectivas velocidades es siempre menor o igual a la potencia disipada por las mismas fuerzas bajo cualquier otro campo de velocidad cinemáticamente aceptable. Un campo de velocidad cinemáticamente aceptable debe satisfacer las condiciones de frontera de

velocidad e incompresibilidad del material. Este método permite definir campos de velocidad cinemáticamente admisibles como función de un parámetro desconocido. La potencia es después minimizada con respecto al parámetro desconocido para conducir a un estimado razonable de la carga.

La principal desventaja de este método es que la selección del campo de velocidad es arbitraria y mientras la estimación del campo esté más alejada de la real, la estimación de la carga excederá en mayor medida el valor verdadero de la carga. Otra limitación es que no provee de un campo de esfuerzos locales<sup>[1]</sup>.

La aproximación por límite inferior se basa en el teorema que establece que la potencia disipada por los fuerzas superficiales a sus respectivas velocidades es siempre mayor que la potencia disipada por las tracciones superficiales correspondientes a cualquier otro campo estáticamente admisible de esfuerzos. Un campo de esfuerzos estáticamente admisible debe satisfacer el equilibrio y no violar el criterio de fluencia<sup>[1]</sup>.

## 1.6 Modelos físicos

Siempre que se utilice un método de análisis para el diseño de un proceso físico es esencial que su validez sea probada por algún modelo físico. Estas pruebas proveen de una retroalimentación para el desarrollo y refinamiento del método de análisis y también demuestra la exactitud de las predicciones numéricas o analíticas. Por lo tanto, el modelado físico proporciona una mayor confianza en la aplicación de estas técnicas de análisis en la solución del problema real.

Generalmente se utilizan dos aproximaciones en el diseño de modelos físicos<sup>[1]</sup>. La primera consiste en simular, tan fielmente como sea posible una unidad de procesos de producción a una escala de laboratorio y monitorear o controlar las variables importantes del proceso. La segunda es desarrollar una prueba rápida, fácil y de más bajo costo que un proceso de producción subescalado. Técnicas como el modelado en materiales y el método de visioelasticidad son utilizadas como aproximaciones para analizar el flujo del material.

### 1.6.1 Materiales para modelado

Los materiales para modelado como plastilina, cera y polímeros son usados para la simulación física debido a que<sup>[1]</sup>:

- La fuerza requerida para la deformación es relativamente pequeña.
- La observación de los patrones de deformación es sencilla.
- La producción de especímenes de prueba es fácil y de bajo costo.
- Se pueden utilizar herramientas hechas de materiales baratos como madera y plásticos.
- Los procedimientos experimentales son simples.

La plastilina y la cera son quizás los materiales para modelado más comúnmente usados. La plastilina es ampliamente usada en comparaciones cualitativas en diferentes condiciones de formado en caliente de aceros, especialmente en estudios de los patrones de flujo en extrusión, laminación y forja.

Existen dos métodos para la observación de los patrones de flujo en los materiales de modelado<sup>[1]</sup>. El primero es imprimir una malla o rejilla en la superficie del espécimen, por lo que generalmente la investigación se reduce a dos dimensiones. El segundo método consiste en construir el espécimen con capas del mismo material en diferentes colores. En el primer método algunas veces es posible observar la rejilla a lo largo del experimento y ser fotografiada; en el segundo, los patrones de flujo no pueden ser observados continuamente.

### 1.6.2 Método de visioplasticidad

Para analizar el flujo de metal en los procesos de formado, es necesario determinar la distribución de la deformación efectiva en el cuerpo formado. Las ecuaciones que definen estas deformaciones se derivan en términos de la posición antes y después de la deformación de un elemento<sup>[1]</sup>. Existen diferentes técnicas de visioplasticidad, las cuales se pueden clasificar en base al patrón geométrico utilizado para el cálculo de la deformación:

- Los que utilizan como referencia una rejilla o un arreglo de círculos inscrita en la pieza de análisis<sup>[1]</sup>.
- Los basados en el cambio de forma de los componentes microestructurales<sup>[2]</sup>.

En el primer caso, se inscribe una malla ya sea sobre la superficie o en un plano meridiano de la pieza a analizar, para así calcular los valores de deformación en base a la malla distorsionada después del formado. La principal desventaja de este método es que sólo puede ser aplicado a especímenes que puedan ser seccionados o que experimenten cambios de forma simples<sup>[21]</sup>.

El segundo caso es aplicado cuando la pieza no puede ser seccionada, debido a su geometría o al proceso de deformación. En este caso la distribución de deformación puede ser calculada considerando que la relación característica de la microestructura varía con el cambio de forma del espécimen completo, lo que es válido a menos que ocurra recristalización o deslizamiento de fronteras de grano durante la deformación. Esta desventaja puede ser superada si se utilizan otras características como estructuras alineadas de doble fase o líneas macroscópicas de flujo<sup>[21]</sup>.

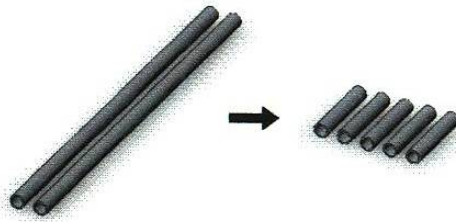
En la mayoría de los procesos de formado en metales la deformación resultante no es homogénea. Por esta razón, el método de visioplasticidad presenta la ventaja de dividir la pieza en un gran número de regiones pequeñas, con respecto al total, por lo que es una buena aproximación considerar que la deformación es homogénea en cada región.

### **1.7 Descripción del proceso de producción de codos sin costura**

A continuación se presenta una descripción del proceso de producción de codos sin costura utilizado por Tubos de Acero de México S.A. (TAMSA), empresa ubicada en el municipio de Ciénega de Flores, Nuevo León.

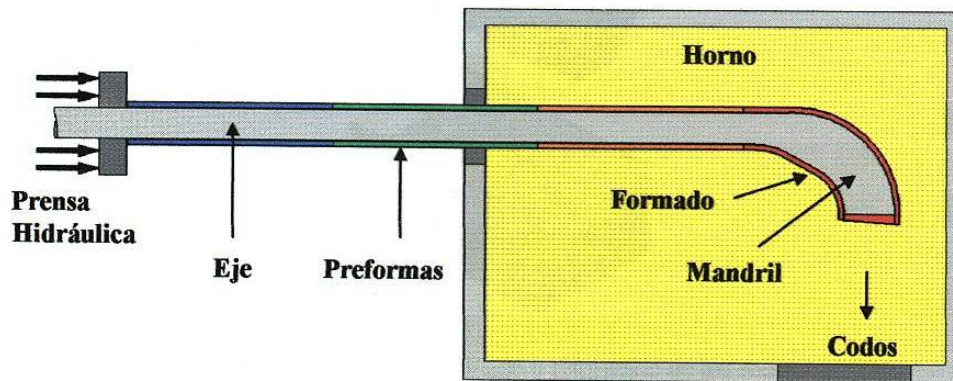
La materia prima utilizada en este proceso es tubería recta sin costura de acero tipo ASTM A-106. El proceso comienza con el traslado de la materia prima al área de corte, donde se obtienen segmentos de tubería de la longitud requerida. Para el caso de estudio, la tubería tiene 48 mm de diámetro interno y 6 mm de espesor, de donde se obtienen segmentos de 317 mm de longitud.

Después, los segmentos de tubería o preformas, son llevados al área de forja. En este paso, los tubos son alimentados dentro de un eje, el cual tiene soldado en un extremo la herramienta de formado o mandril.



**Figura 1-2.** Corte de la materia prima para la obtención de preformas.

El mandril se encuentra dentro de un horno, en el cual, la pieza alcanza temperaturas de entre 800 a 850 °C, aproximadamente, durante el proceso de deformación. Las preformas son forzadas a pasar a través del mandril por la acción de una prensa hidráulica horizontal, como se muestra en la Figura 1-3.



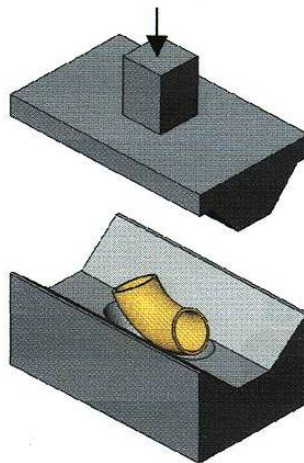
**Figura 1-3.** Esquema del proceso de forja en caliente de codos sin costura.

Las piezas formadas que salen del horno de forja tienen la forma de codos, los cuales pueden tener distintas características según la herramienta que se utilice, pueden ser codos de radio corto o de radio largo, de 45° o de 90°. En la Figura 1-4 se muestra una imagen del mandril.



**Figura 1-4.** Herramienta de formado (mandril) [5].

Una vez fuera del horno las piezas son colocadas en un molde donde reciben un hormado, por medio de una prensa hidráulica vertical (Figura 1-5). En este paso la pieza formada adquiere dimensiones más precisas y se eliminan las diferencias que pudieran tener los diámetros en los extremos del codo, así como a lo largo de su cuerpo. Este paso de formado se lleva a cabo sin un control preciso de la temperatura, ya que depende completamente del tiempo que tarde en llegar del horno de forja a la prensa vertical. La Figura 1-5 muestra un codo a la salida del horno de forja, de donde se lleva manualmente hacia la prensa de hormado.



**Figura 1-5.** Proceso de hormado o reformado de los codos.

En la Figura 1-6 se muestra un codo siendo recolectado mediante una barra para su colocación en la prensa de hormado.



**Figura 1-6.** Codo formado a la salida del horno de forja.



Después del hormado, el codo es llevado a un horno en el cual es recalentado para homogenizar su microestructura. En este paso, los esfuerzos residuales generados durante el proceso de forja en caliente debido a la deformación plástica son eliminados. La siguiente etapa es la de granallado. Durante este paso el codo es liberado del óxido formado durante la etapa de forja en caliente mediante granalla de acero lanzada a alta velocidad. Una vez liberado del óxido, el codo es llevado a la zona de maquinado. En esta última etapa, los extremos del codo son maquinados hasta obtener un perfil recto en las bocas y el ángulo apropiado ( $45^\circ$  ó  $90^\circ$ ), añadiendo un bisel para facilitar el ensamblaje por soldadura en sistemas de tubería a alta presión. La Figura 1-7 muestra las principales operaciones realizadas para la producción de codos sin costura.

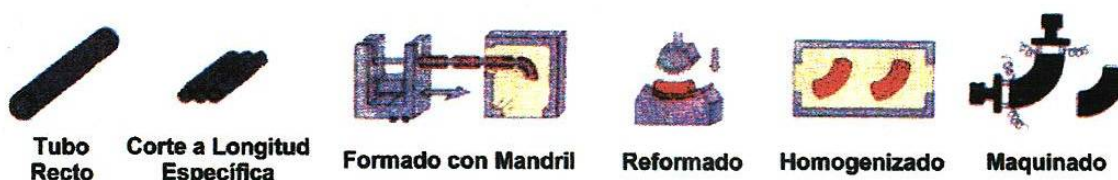


Figura 1-7. Procesos para la fabricación de codos sin costura.

### 1.8 Problemática y objetivo

Algunas características geométricas del codo formado no son totalmente satisfactorias, debido a que representan un aumento en el costo de producción o el rechazo de las piezas por no cumplir con los estándares de calidad. Una de estas características es la variación en el espesor de pared del codo formado, la cual se distingue por la presentación de un adelgazamiento en la zona del radio interno del codo, donde ocurre la mayor parte de la expansión (deformación) durante el formado, lo que puede generar rechazo de piezas por no cumplir las especificaciones de espesor mínimo de pared. Otra característica es que la magnitud del ángulo formado por el radio externo del codo es mayor que la del ángulo formado por el radio interno, teniendo como consecuencia un exceso de material, el cual es eliminado en el proceso de maquinado

y biselado. Este exceso de material incrementa el tiempo de maquinado y el uso de herramientas de corte, así como el mismo desperdicio del material.

El estudio y experiencia en planta han demostrado que un factor muy importante en las características finales de los codos formados es la geometría de la herramienta, es decir, el diseño del mandril.

Por lo tanto, el objetivo del presente trabajo es modelar el proceso de forja en caliente de codos sin costura por medio del método de elementos finitos, con el propósito de utilizar el modelo creado para evaluar distintos diseños de la herramienta de formado.

Los diferentes diseños del mandril se evaluarán con respecto a las dimensiones y distribución de deformación equivalente de los codos formados con cada diseño.

Observando los cambios geométricos y de distribución de deformación en los codos, se determinará la influencia que tienen los diseños del mandril modelados mediante el paquete comercial Abaqus<sup>MR</sup>.

El objetivo de modelar distintos diseños de la herramienta de formado es el de obtener un diseño en el que se mejore el espesor de pared en el radio interno de los codos o que conduzca al ahorro de materia prima.



# CAPÍTULO 2

## MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

### 2.1 Introducción

El método de elementos finitos es una técnica de análisis numérico para la obtención de soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas. Aunque originalmente se desarrolló para estudios sobre el estado de esfuerzos en estructuras complejas, desde entonces se ha extendido y aplicado en el vasto campo de la mecánica del medio continuo.

Actualmente, en cada vez más situaciones o problemas de ingeniería, se encuentra que la obtención de soluciones estrictamente exactas es muy difícil o que estas soluciones involucran simplificaciones, las cuales podrían dejar de describir satisfactoriamente el problema real. Por este motivo se encuentra la necesidad de obtener soluciones numéricas aproximadas en lugar de soluciones exactas.

### 2.2 Historia del método

Aunque el nombre de “Método de Elementos Finitos” apareció por primera vez en 1960, en una publicación sobre problemas de elasticidad plana por Clough<sup>[9]</sup>, las ideas

sobre el análisis por elementos finitos datan de mucho antes. En realidad, su origen proviene de tres puntos de vista distintos: matemáticas aplicadas, física e ingeniería<sup>[8]</sup>.

Los primeros esfuerzos en el uso de funciones continuas sobre dominios triangulares aparecieron en la literatura de matemáticas aplicadas en el trabajo por Courant<sup>[10]</sup> en 1943. Courant utilizó un ensamble de elementos triangulares y el principio de mínima energía potencial para estudiar el problema de torsión de St. Venant.

En 1959, Greenstadt<sup>[11]</sup> mostró una aproximación la cual involucraba celdas en lugar de puntos. Esta teoría describe un procedimiento para representar una función desconocida por medio de una serie de funciones, cada una asociada a una celda, reduciendo un problema continuo a uno discreto.

Por el lado de los físicos, en 1952, los trabajos realizados por Prager y Synge<sup>[12, 13]</sup> los condujo al desarrollo del método del hipercírculo, el cual puede ser aplicado a la solución de problemas del medio continuo en una manera muy similar a las técnicas por elementos finitos.

Desde el punto de vista ingenieril, en 1941 Hrenikoff<sup>[14]</sup> razonó que un problema de una estructura con un número infinito de barras e interconexiones se podía considerar como una estructura con un número finito de barras interconectadas en un número finito de puntos. Bajo esta consideración se reducía el problema a uno que podía ser manejado por los métodos de análisis de estructuras convencionales.

En 1965, el método de elementos finitos recibió una interpretación aún mayor cuando Zienkiewicz y Cheung<sup>[15]</sup> reportaron que es aplicable a todo problema que se pueda representar en forma variacional.

### 2.3 Metodología básica

En un problema del medio continuo de cualquier dimensión, la variable de campo posee un número infinito de valores ya que es función de cada punto en el cuerpo o región de solución. La discretización en elementos finitos reduce el problema a uno con un número finito de valores desconocidos, dividiendo la región de solución en elementos y expresando la variable de campo en términos de funciones de aproximación supuestas en cada elemento. Estas funciones de aproximación o

funciones de interpolación son definidas en términos de los valores de la variable de campo en puntos específicos llamados nodos o puntos nodales. Estos nodos se encuentran comúnmente en las fronteras de los elementos donde otros elementos se conectan. Los valores nodales de la variable de campo y las funciones de interpolación para los elementos definen completamente el comportamiento de la variable de campo dentro de los elementos. Para el problema por elementos finitos los valores nodales de la variable de campo se convierten en los valores desconocidos. Una vez que estos valores son encontrados, las funciones de interpolación definen la variable de campo a través del ensamble de los elementos<sup>[8]</sup>.

El grado de aproximación de la solución depende del tamaño y número de elementos así como de las funciones de interpolación seleccionadas. Una característica importante que distingue al método de elementos finitos de otros métodos es el formular soluciones individuales para cada elemento antes de ponerlos juntos para representar el problema completo. Esencialmente, un problema complejo se reduce a una serie de problemas sencillos.

Otra ventaja es la variedad de formas en que se pueden formular las propiedades de los elementos. Existen básicamente tres tipos de aproximación para derivar las ecuaciones de los elementos: aproximación directa, aproximación variacional y aproximación por el método de residuos ponderados. Estos métodos han sido descritos ampliamente en la literatura<sup>[8,16,23]</sup> y aquí serán descritos de manera simplificada más adelante.

Independientemente de la aproximación utilizada para encontrar las propiedades de los elementos, la solución de un problema en un medio continuo por el método de elementos finitos siempre sigue un proceso ordenado. En términos generales el funcionamiento del método de elementos finitos sigue la siguiente lista de pasos<sup>[8]</sup>:

1. Discretizar el medio continuo.
2. Seleccionar las funciones de interpolación.
3. Determinar el tipo y propiedades de los elementos.
4. Ensamblar las matrices de elementos para obtener el sistema de ecuaciones global.
5. Introducir las condiciones de frontera.
6. Resolver el sistema de ecuaciones.
7. Realizar cálculos adicionales si es necesario.

## 2.4 Método de aproximación directa

Aunque el método de aproximación directa generalmente sólo puede ser utilizado en problemas discretos bastante simples, proporciona una visión general del funcionamiento del método de elementos finitos e introduce a los conceptos básicos de discretización y ensamble de elementos.

Para comprender mejor las ideas fundamentales de cómo resolver un problema por el método de elementos finitos se desarrolla a continuación un ejemplo sencillo utilizando el método de aproximación directa.

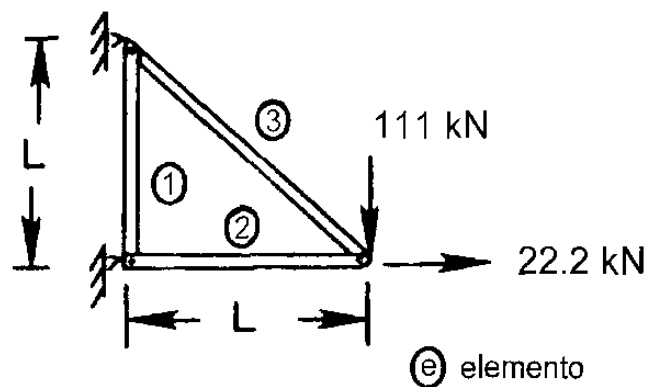


Figura 2-1. Problema de estructura de barras de distintos materiales [8].

Dado el problema que se presenta en la Figura 2-1, resolver por medio del método de elementos finitos siguiendo la metodología anteriormente descrita:

### 1. Discretizar el continuo.

El primer paso es dividir el continuo o región de solución en un determinado número de elementos. En este caso el problema es discreto, por lo que cada barra de la estructura es un elemento. Por lo tanto, el modelo discretizado estará formado por tres elementos, como se muestra en la Figura 2-2.

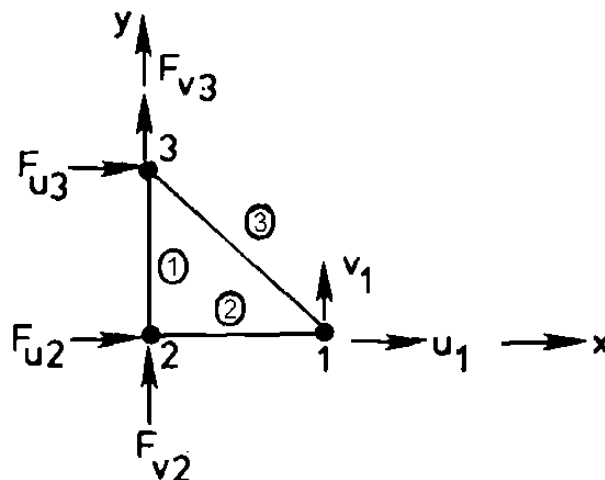


Figura 2-2. Problema discretizado [8].

## 2. Determinar las funciones de interpolación y el tipo de elemento.

En este caso un elemento barra representa exactamente a la barra “real”, que en realidad es un elemento teórico en el análisis de estructuras. Un elemento barra es una línea conectada en dos puntos como se muestra en la Figura 2-3.

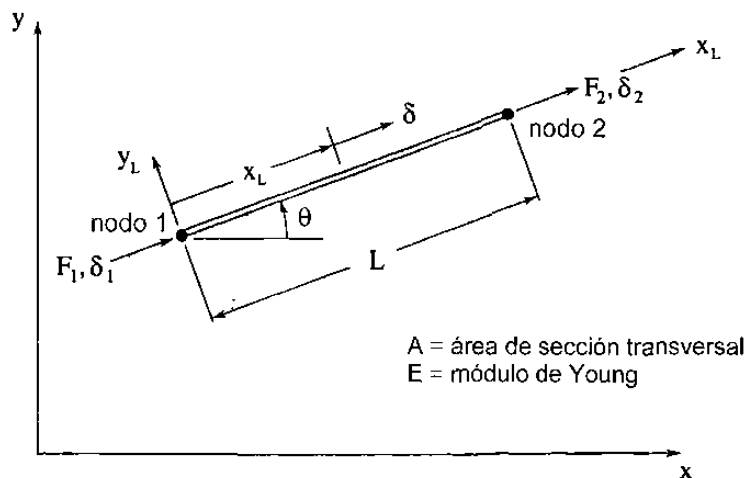


Figura 2-3. Elemento barra [8].

El elemento barra consta de dos nodos en sus extremos, en los cuales puede actuar una fuerza  $F$  y ocurrir un desplazamiento  $\delta$ . El elemento tiene su propio sistema de coordenadas  $(x_L, y_L)$ , y a su vez se encuentra dentro de un sistema de coordenadas globales  $(x, y)$ , con el cual forma un ángulo  $\theta$  respecto a la horizontal. El elemento tiene un área de sección transversal  $A$  y un módulo de Young  $E$ .

El elemento sólo puede tener deformación en dirección axial. Por lo tanto, el desplazamiento  $\delta$  en un punto interior en el elemento varía linealmente en función de  $x_L$ ,

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 x_L \quad (2-1)$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son constantes a determinar. En el nodo 1 el desplazamiento  $\delta$  tiene el valor  $\delta_1$  y en el nodo 2 tiene el valor  $\delta_2$ .

Evaluando la ecuación (2-1) en los nodos se tiene que:

$$\text{Para el nodo 1} \quad \delta(0) = \delta_1 = \alpha_1 \quad (2-2a)$$

$$\text{Para el nodo 2} \quad \delta(L) = \delta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L \quad (2-2b)$$

Sustituyendo en la ecuación (2-1):

$$\delta = \delta_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{L} x_L \quad (2-3)$$

La ecuación (2-3) define el desplazamiento dentro del elemento, por lo que esta ecuación es llamada la función de interpolación del elemento.

Se procede a encontrar la deformación en el elemento, la cual es simplemente la razón del cambio en la longitud del elemento con respecto a la longitud:

$$e = \frac{\delta_2 - \delta_1}{L} \quad (2-4)$$

De la ley de Hooke se tiene que:

$$\sigma = Ee = \frac{E}{L} (\delta_2 - \delta_1) \quad (2-5)$$

La deformación y el esfuerzo en el elemento permanecen constantes.

El paso clave para la derivación de la matriz de rigidez del elemento barra es la obtención de las ecuaciones de equilibrio que relacionan los desplazamientos nodales con las fuerzas nodales. Para una estructura elástica la energía potencial total  $\Pi$  es la suma de la energía interna de deformación  $U$  mas el trabajo realizado por las fuerzas externas  $V$ .

La energía interna de deformación se obtiene al integrar sobre el volumen del elemento:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Vol}} \sigma \epsilon d(\text{Vol}) \quad (2-6)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2-4) y (2-5) en la ecuación (2-6) se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \frac{E}{L^2} (\delta_2 - \delta_1)^2 \int_{\text{Vol}} d(\text{Vol}) \quad (2-7)$$

Integrando y sustituyendo el volumen del elemento AL, se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} (\delta_2 - \delta_1)^2 \quad (2-8)$$

El trabajo debido a las fuerzas aplicadas es:

$$V = F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 \quad (2-9)$$

Entonces la energía potencial total para el elemento está dada por:

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} (\delta_2 - \delta_1)^2 - (F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2) \quad (2-10)$$

donde el superíndice (e) se refiere a la energía potencial total del elemento. El principio de mínima energía potencial establece el equilibrio:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_2} = 0 \quad (2-11)$$

Realizando las derivadas indicadas por la ecuación (2-11) en la ecuación (2-10) conduce a las ecuaciones de equilibrio del elemento:

$$-\frac{EA}{L} (\delta_2 - \delta_1) - F_1 = 0 \quad (2-12a)$$

$$\frac{EA}{L} (\delta_2 - \delta_1) - F_2 = 0 \quad (2-12b)$$

o en forma matricial

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2-12c)$$

La matriz de rigidez para el elemento barra está definida en coordenadas locales, por lo que se tendrá que transformar a coordenadas globales. En general, la matriz de ecuaciones de los elementos tendrán la forma estándar:

$$[K_L]\{\delta_L\} = \{F_L\} \quad (2-12d)$$

El objetivo ahora es cambiar este sistema de ecuaciones a un sistema de coordenadas globales. Para esto, se tienen que transformar las componentes de desplazamiento locales a componentes de desplazamiento globales de la siguiente forma:

$$\{\delta_L\} = [R]\{\delta\} \quad (2-13)$$

donde R es la matriz de transformación o matriz de rotación.

La energía potencial para un elemento en su sistema de coordenadas local está dada como:

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} [\delta_L]^T [K_L] \{\delta_L\} - [\delta_L]^T \{F_L\} \quad (2-14)$$

sustituyendo la ecuación (2-13) en (2-14) se obtiene:

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} [\delta]^T [R]^T [K_L] [R] \{\delta\} - [\delta]^T [R]^T \{F_L\} \quad (2-15)$$

La energía potencial en coordenadas globales resulta ser:

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} [\delta]^T [K] \{\delta\} - [\delta]^T \{F\} \quad (2-16)$$

comparando las ecuaciones (2-15) y (2-16) se observa que:

$$[K]^{(e)} = [R]^T [K_L]^{(e)} [R] \quad (2-17a)$$

y

$$\{F\}^{(e)} = [R]^T \{F_L\}^{(e)} \quad (2-17b)$$

Hasta ahora se ha encontrado la matriz de rigidez y el vector de fuerzas globales, resta sólo encontrar el vector de desplazamientos globales. Observando la Figura 2-4 se puede escribir:

$$\delta_1 = u_1 \cos\theta + v_1 \sin\theta \quad (2-18a)$$

$$\delta_2 = u_2 \cos\theta + v_2 \sin\theta \quad (2-18b)$$



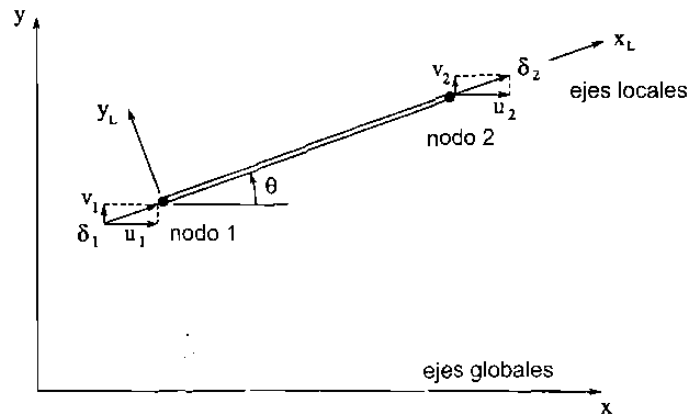


Figura 2-4. Componentes globales de desplazamiento para el elemento barra [8].

o en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (2-18c)$$

La ecuación (2-18c) tiene la forma de la ecuación (2-13), por lo que se puede observar el vector de desplazamientos en coordenadas globales y la matriz de transformación:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

Sustituyendo la ecuación (2-19) en la ecuación (2-17a) se obtiene:

$$[K]^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \quad (2-20a)$$

de donde multiplicando se obtiene finalmente:

$$[K]^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \text{sen}\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta \text{sen}\theta \\ \cos\theta \text{sen}\theta & \text{sen}^2\theta & -\cos\theta \text{sen}\theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta \text{sen}\theta & \cos^2\theta & \cos\theta \text{sen}\theta \\ -\cos\theta \text{sen}\theta & -\text{sen}^2\theta & \cos\theta \text{sen}\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad (2-20b)$$

La ecuación (2-20b) es la matriz de rigidez de un elemento barra en coordenadas globales; sus filas y columnas corresponden a los desplazamientos globales  $u_1, v_1, u_2, v_2$ .

Hasta este punto se ha determinado el sistema de ecuaciones globales. El siguiente paso es definir las propiedades físicas de los elementos, las cuales se listan en la Tabla 2-1.

**Tabla 2-1.** Tabla de propiedades físicas de los elementos.

Elemento	Área A (m <sup>2</sup> )	Módulo de Young E (MPa)	Longitud L (m)	Conexiones globales nodales	Ángulo $\theta$ (°)
1	0.003	140	1	2 a 3	90
2	0.004	70	1	2 a 1	0
3	0.002	200	1.4142	1 a 3	135

### 3. Calcular la matriz de rigidez de cada elemento.

Utilizando la matriz de rigidez en coordenadas globales (ecuación 2-18c) y las propiedades definidas en la Tabla 2-1, se procede a calcular la matriz de rigidez para cada elemento:

$$[K]^{(1)} = 420 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix} \text{ MN m} \quad (2-21a)$$

$$[K]^{(2)} = 280 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_1 \\ v_1 \end{matrix} \text{ MN m} \quad (2-21b)$$

$$[K]^{(3)} = 283 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix} \text{ MN m} \quad (2-21c)$$

Las componentes de los desplazamientos globales escritos a la derecha servirán como referencia para el proceso de ensamble de la matriz de rigidez global.

#### 4. Ensamblar las ecuaciones de los elementos.

Una vez determinadas las matrices de rigidez de cada elemento se procede al ensamble de las mismas. El proceso se realiza sumando cada una de estas matrices, teniendo cuidado de colocar cada matriz en las filas y columnas correctas, definidas por las conexiones nodales, de tal manera que se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 280 + 283 & -283 & -280 & 0 & -283 & 283 \\ -283 & 283 & 0 & 0 & 283 & -283 \\ -280 & 0 & 280 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 420 & 0 & -420 \\ -283 & 283 & 0 & 0 & 283 & -283 \\ 283 & -283 & 0 & -420 & -283 & 420 + 283 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{u_1} \\ F_{v_1} \\ F_{u_2} \\ F_{v_2} \\ F_{u_3} \\ F_{v_3} \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

#### 5. Definir condiciones de frontera

En este paso se sustituyen los valores conocidos de fuerza y desplazamiento en el sistema de ecuaciones global. Las variables conocidas y desconocidas se muestran en la Tabla 2-2.

Tabla 2-2. Variables del problema.

	Desplazamiento	Fuerza (kN)
<b>Variables conocidas</b>	$u_2 = 0, v_2 = 0$ $u_3 = 0, v_3 = 0$	$F_{u_1} = 22.2, F_{v_1} = 111$
<b>Variables desconocidas</b>	$u_1, v_1$	$F_{u_2}, F_{v_2}$ $F_{u_3}, F_{v_3}$

Entonces se puede escribir el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{bmatrix} 563 & -283 & -280 & 0 & -283 & 283 \\ -283 & 283 & 0 & 0 & 283 & -283 \\ -280 & 0 & 280 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 420 & 0 & -420 \\ -283 & 283 & 0 & 0 & 283 & -283 \\ 283 & -283 & 0 & -420 & -283 & 703 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0222 \\ -0.111 \\ F_{u_2} \\ F_{v_2} \\ F_{u_3} \\ F_{v_3} \end{Bmatrix} \quad (2-23)$$

## 6. Resolver el sistema de ecuaciones.

El siguiente paso es resolver el sistema de ecuaciones global, de donde se obtiene que:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.709 \\ -0.317 \end{Bmatrix} \text{mm} \quad (2-24)$$

Con los desplazamientos calculados se obtienen las fuerzas de reacción:

$$\begin{Bmatrix} Fu_2 \\ Fv_2 \\ Fu_3 \\ Fv_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -280 & 0 \\ 0 & 0 \\ -283 & 283 \\ 283 & -283 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.709 \\ -0.317 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 198.52 \\ 0 \\ 110.93 \\ -110.93 \end{Bmatrix} \text{kN} \quad (2-25)$$

## 7. Realizar cálculos adicionales.

El último paso es hacer cálculos adicionales en base a los resultados obtenidos de desplazamientos y fuerzas. Para este caso se podría utilizar la ecuación (2-18) para calcular los desplazamientos locales en cada elemento y, en base a estos, obtener las fuerzas, esfuerzos y deformaciones que actúan sobre el elemento.

Como se puede observar, este método está limitado a problemas bastante simples y no puede ser generalizado para cualquier tipo de problemas del medio continuo. Sin embargo, los conceptos básicos como la discretización, transformación de coordenadas y el ensamble de las ecuaciones aplican a todos los análisis de elementos finitos, sin importar los medios utilizados para derivar las ecuaciones de los elementos.

## 2.5 Método variacional

Algunos problemas del medio continuo tienen formulaciones equivalentes, una formulación diferencial y una formulación variacional. En la formulación diferencial el problema consiste en integrar una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales sujetas a condiciones de frontera definidas. En la formulación variacional el problema consiste en encontrar una función o funciones que extremizen (maximizar

ó minimizar) o hagan estacionario a un funcional o sistema de funcionales sujetos a las mismas condiciones de frontera definidas en su formulación diferencial<sup>[8]</sup>.

En otras palabras, este método consiste en evaluar la integral de un funcional, el cual es una función de funciones, cuyo resultado es un escalar. El funcional se evalúa por medio de funciones intento, siendo la función que conduzca al valor escalar menor la que satisfaga la ecuación diferencial específica. Considerar la integral:

$$\frac{1}{2} \int_0^H \left[ D \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy^2 \right] dx = \pi \quad (2-26)$$

El valor numérico de  $\pi$  se obtiene evaluando una función intento específica  $y = f(x)$ .

El cálculo variacional establece que aquella función intento  $y = g(x)$  que conduzca al valor numérico más bajo de  $\pi$  será la solución de la ecuación diferencial, sujeta a las condiciones de frontera definidas:

$$D \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) + Qy = 0 \quad ; \quad y(0) = y_0 \quad ; \quad y(H) = y_H \quad (2-27)$$

## 2.6 Método de residuos ponderados

El método de residuos ponderados es una técnica para obtener soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales. Su relación con el método de elementos finitos es el ofrecer otro medio por el cual formular las ecuaciones de los elementos.

En este método se supone una solución que al ser sustituida en la ecuación diferencial tendrá como resultado un error o residuo. Si se supone que  $y = h(x)$  es una solución aproximada de:

$$D \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) + Q = 0 \quad (2-28)$$

donde al sustituir la solución aproximada se obtiene:

$$D \left( \frac{d^2h(x)}{dx^2} \right) + Q = R(x) \neq 0 \quad (2-29)$$

El método de residuos ponderados requiere que la integral del producto entre la función de ponderación  $W_i(x)$  y el residuo  $R(x)$  sea igual a cero.

$$\int_0^H W_i(x)R(x)dx = 0 \quad (2-30)$$

El subíndice  $i$  de la función de ponderación corresponde al número de coeficientes desconocidos en la solución aproximada.

Existen diversas técnicas de residuos ponderados debido a la amplia variedad de funciones de peso o ponderación que se pueden utilizar. El método de Galerkin es el más usado en la derivación de las ecuaciones de elementos finitos. En este método, las funciones de peso son definidas iguales a las funciones de aproximación utilizadas para representar la solución de la ecuación diferencial. Existen muchas otras opciones para seleccionar las funciones de peso, como el método de mínimos cuadrados, método de colocación, método de subdominios, etc<sup>[8]</sup>.

## 2.7 Formulaciones explícitas e implícitas

Las formulaciones implícitas y explícitas son métodos de integración directa en los cuales las ecuaciones son integradas por medio de un procedimiento numérico paso a paso<sup>[16]</sup>.

Un procedimiento bastante efectivo en la solución de ciertos problemas es el método de diferencias centrales, en el cual el cálculo de los desplazamientos,  $U$ , en el tiempo  $t + \Delta t$ , se basa en las condiciones de equilibrio encontradas en el tiempo  $t$  y  $t - \Delta t$ , es decir, se basa en valores conocidos o que ya han sido calculados. Por esta razón, el procedimiento de integración de diferencias centrales es llamado método de integración explícita<sup>[16]</sup>.

Por otro lado, existen diversos métodos de integración como los de Houbolt, Wilson y Newmark, los cuales emplean métodos de diferencias hacia delante o hacia atrás, y el cálculo de las variables en el tiempo  $t + \Delta t$ , es en base a las condiciones de equilibrio de ese mismo instante de tiempo  $t + \Delta t$ , por lo que estos métodos son llamados implícitos<sup>[16]</sup>.

Desde el punto de vista de un usuario, las características que distinguen a los métodos explícitos e implícitos son<sup>[17]</sup>:

- Los métodos explícitos requieren de un tamaño de incremento de tiempo pequeño, que depende de las frecuencias naturales más altas del modelo y son independientes del tipo y duración de la carga. Las simulaciones por este método toman alrededor de  $10^4$  a  $10^6$  incrementos, sin embargo, el costo de cómputo por incremento es relativamente pequeño.
- Los métodos implícitos no presentan una limitación inherente en el tamaño del incremento de tiempo. Los incrementos de tiempo son generalmente determinados por consideraciones de precisión y convergencia de la solución. Los análisis por el método implícito generalmente toman un número de incrementos de ordenes de magnitud menores a los de un análisis explícito. Sin embargo, debido a que el juego de ecuaciones globales obtenido debe ser resuelto en cada incremento, el costo de cómputo por incremento de un análisis implícito es mucho mayor que en el método explícito.

El conocimiento de estas características de ambos procedimientos puede ayudar a decidir que metodología es la apropiada para la solución de un problema específico.

## 2.8 Análisis explícito

El análisis explícito es una herramienta efectiva para la solución de una amplia gama de problemas de mecánica estructural y de estado sólido no lineales.

El procedimiento explícito realiza un gran número de pequeños incrementos de tiempo. Utiliza una regla de integración explícita de diferencias de tiempo centrales, por lo que cada incremento es de relativo bajo costo de computo, debido a que no es una solución de ecuaciones simultáneas. El operador de diferencias centrales explícito satisface las ecuaciones de equilibrio dinámico en el inicio del incremento de tiempo  $t$ ; las aceleraciones calculadas en el tiempo  $t$  son usadas para avanzar la solución de velocidad al tiempo  $t+\Delta t/2$  y la solución de desplazamiento al tiempo  $t+\Delta t$ <sup>[17]</sup>.

El uso de incrementos de tiempo pequeños (dictados por el límite de estabilidad) es ventajoso debido a que permite a la solución proceder sin iteraciones. El

procedimiento explícito es idealmente adecuado para analizar eventos dinámicos a alta velocidad, sin embargo muchas de las ventajas del procedimiento explícito también aplican en el análisis de procesos más lentos (cuasi-estáticos). Un buen ejemplo es el formado de hojas o láminas de metal, donde las condiciones de contacto dominan la solución y zonas locales no estables se presentan a causa del arrugamiento de la lámina, lo cual produce que el problema sea altamente no lineal y el costo de cómputo por medio de un método implícito sea demasiado elevado.

La exactitud de los resultados en un análisis explícito no es automáticamente revisada como en los métodos implícitos, en los cuales se iteran los resultados hasta que cumplan con el criterio de convergencia, el cual define el grado de exactitud de la solución calculada. En la mayoría de los casos esto no es de cuidado ya que la respuesta dominante del modelo es generalmente en un modo asociado con la respuesta estructural del modelo como un todo. Como resultado, la solución sólo cambia un poco en cada incremento. Mientras que los análisis pueden tomar un número muy grande de incrementos, cada incremento es relativamente de bajo costo, comúnmente resultando en una solución económica. No es raro que un análisis tome alrededor de  $10^6$  incrementos.

### 2.8.1 Estabilidad e incremento de tiempo estable

El procedimiento explícito integra a través del tiempo utilizando una gran cantidad de pequeños incrementos de tiempo, debido a que el operador de diferencias centrales es condicionalmente estable. El límite de estabilidad del operador está dado en términos de la más alta frecuencia del sistema como<sup>[17]</sup>:

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (2-31)$$

Una aproximación al límite de estabilidad comúnmente se escribe como el menor tiempo de tránsito de una onda dilatacional a través de cualquiera de los elementos en la malla<sup>[17]</sup>:

$$\Delta t \approx \frac{L_{\min}}{c_d} \quad (2-33)$$



donde  $L_{\min}$  es la menor dimensión de un elemento en la malla y  $c_d$  es la velocidad de la onda dilatacional en términos de las constantes de Lamé,  $\lambda_0$  y  $\mu_0$ , donde para un material isotrópico elástico se definen en términos del módulo de Young  $E$ , la razón de Poisson  $\nu$ , y la densidad  $\rho$ :

$$c_d = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \quad (2-34a)$$

$$\lambda_0 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2-34b)$$

$$\mu_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2-34c)$$

El incremento de tiempo utilizado en el análisis debe ser menor al límite de estabilidad del operador de diferencias centrales. En el caso de no utilizar un incremento de tiempo lo suficientemente pequeño resultará en una solución inestable. Cuando la solución se vuelve inestable, la respuesta en el tiempo de las variables de solución, tales como desplazamientos, comienzan a oscilar. El balance de energía total también cambia considerablemente.

Si el modelo contiene sólo un tipo de material, el incremento de tiempo inicial es directamente proporcional al tamaño del elemento más pequeño en la malla. Si el modelo contiene un tamaño de elemento uniforme, pero contiene distintos tipos de material, el elemento con la más alta velocidad de onda determinará el incremento de tiempo inicial<sup>[17]</sup>.

En problemas no lineales, es decir, aquellos con grandes deformaciones y/o respuesta no lineal del material, la frecuencia mayor del modelo estará cambiando constantemente, con consecuentes cambios en el límite de estabilidad.

### 2.8.2 Aumento de la velocidad del proceso real

Para reducir el número de incrementos de tiempo requeridos para completar un análisis, se puede acelerar la simulación con respecto a la velocidad del proceso real, es decir, reducir artificialmente el período de tiempo del evento. Esto introduce dos posibles errores. Si la velocidad en la simulación es demasiada, el incremento de las fuerzas de inercia cambiará la respuesta esperada del sistema. La única manera de

evitar esto es seleccionar un aumento de velocidad no muy grande. El otro posible error es cuando las propiedades del sistema sean muy sensibles a los cambios de velocidad<sup>[17]</sup>.

### 2.8.3 Escalamiento de masa

El escalamiento de masa es un artificio matemático utilizado para aumentar el incremento de tiempo estable en un análisis explícito y reducir así el tiempo de cómputo<sup>[17]</sup>. Incrementar artificialmente la densidad del material,  $\rho$ , por un factor  $f^2$ , reduce el número de incrementos de tiempo,  $n$ , a  $n/f$ . De igual manera reduce el tiempo de procesamiento real,  $T$ , a  $T/f$ . El escalamiento de masa reduce la razón del tiempo del evento al tiempo para la propagación de onda a través de un elemento mientras el tiempo del evento permanece fijo, lo que permite incluir comportamientos dependientes de la velocidad en el análisis. El escalamiento de masa tiene el mismo efecto sobre las fuerzas de inercia que en el caso de reducir el tiempo del evento real.

El escalamiento de masa es una opción atractiva porque puede ser usada en problemas dependientes de la velocidad, pero debe ser usado teniendo en cuenta que las fuerzas de inercia no sean dominantes y cambien la solución esperada.

## 2.9 Análisis cuasi-estático y problemas de formado de metales

La solución de un problema por el método explícito es un procedimiento dinámico originalmente desarrollado para modelar eventos de impacto a alta velocidad. Sin embargo, se ha comprobado que este método de solución tiene ventajas sobre el método implícito, principalmenté, la mayor facilidad con que se resuelven condiciones de contacto complejas y el menor uso de recursos del sistema de cómputo.

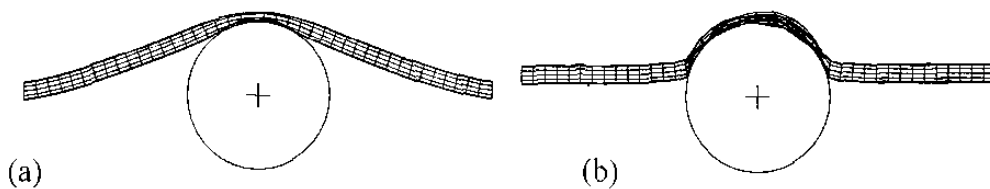
La aplicación del procedimiento explícito a problemas cuasi-estáticos requiere de ciertas consideraciones. Una solución estática, por definición, es una solución en un tiempo largo, por lo que comúnmente es impráctico, desde el punto de vista de tiempo de cómputo, resolver el problema en su escala natural de tiempo. Para obtener una solución económica, el problema debe ser acelerado al periodo de tiempo más corto posible, manteniendo las fuerzas de inercia insignificantes, como se describió en los puntos anteriores.

En el caso del análisis de un proceso de formado de metales se sugiere hacer pruebas para determinar una aceleración razonable, comenzando por una aceleración grande y examinando los resultados obtenidos en busca de indicadores que permitan ver si el proceso sigue siendo cuasi-estático o si pasó a ser un proceso dinámico. Se puede observar la respuesta del material al ser deformado para determinar si se encuentra en la zona dinámica o en la zona estática (Figura 2-5).<sup>[4]</sup>

La forma más general de evaluar si una simulación está produciendo o no una respuesta cuasi-estática es por medio del estudio de las energías involucradas en el proceso. La ecuación (2-35) muestra el balance de energías:

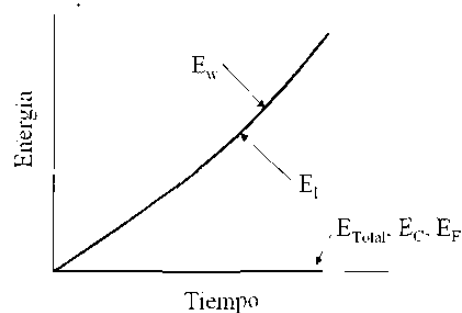
$$E_I + E_C + E_F - E_W = E_{\text{Total}} \quad (2-35)$$

donde  $E_I$  es la energía interna (energía de deformación plástica y elástica),  $E_C$  es la energía cinética,  $E_F$  es la energía absorbida por el efecto de la fricción,  $E_W$  es el trabajo producido por las fuerzas externas y  $E_{\text{Total}}$  es la energía total en el sistema.<sup>[4]</sup>



**Figura 2-5.** (a) Proceso con respuesta estática (baja velocidad) y (b) con respuesta dinámica (alta velocidad).

El historial de energía para un proceso cuasi-estático aparecería muy similar a la gráfica mostrada en la Figura 2-6. Si la simulación es cuasi-estática el trabajo aplicado por las fuerzas externas es casi igual a la energía interna del sistema y la energía cinética es una fracción muy pequeña de la energía interna.<sup>[3,4]</sup>



**Figura 2-6.** Historia de energías típica de un proceso cuasi-estático.

## 2.10 No linealidades del material

Las no linealidades de un material se refieren a la relación no lineal entre el esfuerzo y la deformación, es decir, el esfuerzo es una función no lineal de la deformación. Esta relación también es dependiente de la trayectoria (a excepción del caso de elasticidad no lineal e hiperelásticidad), de manera que el esfuerzo depende de la historia de deformación así como de la deformación misma.<sup>[24]</sup>

La deformación plástica es una no linealidad del material y se caracteriza por la deformación irreversible que ocurre en el material cuando se alcanza un cierto valor de esfuerzo. La teoría de plasticidad establece las relaciones matemáticas que caracterizan la respuesta no lineal de los materiales elasto-plásticos. El caso de la deformación plástica independiente de la velocidad se consideran tres fundamentos básicos: el criterio de fluencia, la regla de flujo y una regla de endurecimiento por deformación.<sup>[24]</sup>

El criterio de fluencia determina el valor de esfuerzo en el que se inicia la cedencia. Un estado de esfuerzos de componentes múltiples se representa como función de los componentes individuales,  $f(\{\sigma\})$ , y puede ser interpretada como el esfuerzo equivalente  $\sigma_e$ :

$$\sigma_e = f(\{\sigma\}) \quad (2-36)$$

Cuando el esfuerzo equivalente es igual al esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) el material desarrollará deformación plástica. Si  $\sigma_e$  es menor a  $\sigma_y$  el material se comportará elásticamente y desarrollará esfuerzos de acuerdo a las relaciones elásticas esfuerzo-deformación.

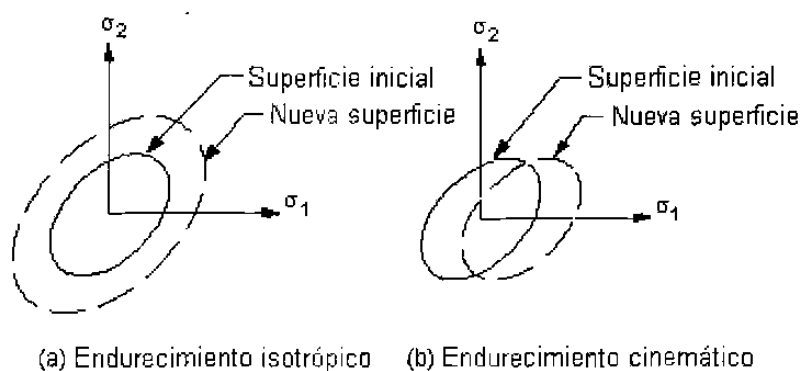
La regla de flujo determina la dirección de la deformación plástica y está dada como<sup>[24]</sup>:

$$\{d\varepsilon^{pl}\} = \lambda \begin{Bmatrix} \partial Q \\ \partial \sigma \end{Bmatrix} \quad (2-37)$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador plástico (determina la cantidad de deformación plástica) y  $Q$  es la función de esfuerzo llamada potencial plástico (determina la dirección de la deformación plástica). Si se considera a  $Q$  como la función de cedencia, la regla de

flujo determina la evolución de la deformación plástica en dirección normal a la superficie de cedencia.

La regla de endurecimiento describe el cambio de la superficie de cedencia debido al cambio progresivo del esfuerzo de cedencia, de manera que las condiciones (estado de esfuerzos) para que ocurra la cedencia subsiguiente pueden ser establecidas. Existen dos reglas de endurecimiento: endurecimiento isotrópico y endurecimiento cinemático<sup>[24]</sup>. En el endurecimiento isotrópico (Figura 2-7a), la superficie de cedencia permanece centrada con respecto a su posición inicial y se expande a medida que se desarrolla la deformación plástica. El endurecimiento cinemático considera que la superficie de cedencia permanece en un tamaño constante y que la superficie se traslada en el espacio de esfuerzos (Figura 2-7b).



**Figura 2-7.** Cambios de la superficie de cedencia: (a) por endurecimiento isotrópico y (b) por endurecimiento cinemático [24].

## 2.11 No linealidades geométricas

Las no linealidades geométricas se refieren a las no linealidades en una estructura o componente debido al cambio en la geometría. Esto significa que la matriz de rigidez es función de los desplazamientos, ya que la rigidez cambia cuando la forma cambia y/o cuando el material rota. Generalmente se pueden observar dos tipos de no linealidades geométricas<sup>[24]</sup>:

- Las grandes deformaciones consideran que las deformaciones no son infinitesimales, son finitas. Los cambios de forma (área, espesor, etc.) son tomados en cuenta.

- Las grandes rotaciones consideran que las rotaciones son grandes, pero las deformaciones mecánicas (que producen esfuerzos) son evaluadas utilizando expresiones linealizadas. Se considera que los cuerpos no cambian de forma, sino que presentan movimiento de cuerpo rígido.

Los cambios considerables en la geometría del modelo constituyen las no linealidades geométricas. Cuando la deformación en el material es mayor a un pequeño porcentaje, los cambios en la geometría no pueden ser despreciados. Los análisis que incluyen este efecto son llamados análisis de grandes deformaciones o de deformaciones finitas.

La teoría del cálculo de deformaciones finitas se basa en conceptos básicos de movimiento, deformación y la relación entre éstos. La cargas que actúan sobre un cuerpo producen movimiento de una posición inicial a una final. El movimiento puede ser definido por medio de vectores de posición en la configuración inicial o sin deformar  $\{X\}$  y la final o deformada  $\{x\}$ <sup>[24]</sup> (Figura 2-8):

$$\{u\} = \{x\} - \{X\} \quad (2-38)$$

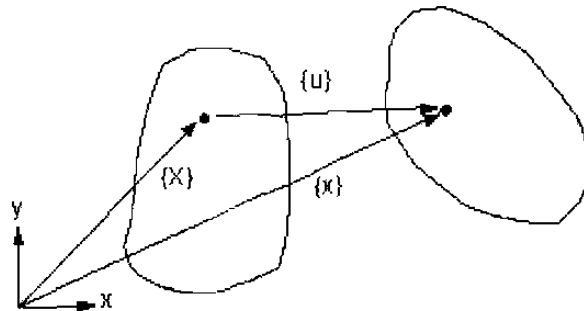


Figura 2-8. Vectores de posición y movimiento de un cuerpo.

El gradiente de deformación se define como:

$$[F] = \frac{\partial \{x\}}{\partial \{X\}} \quad (2-39)$$

El gradiente de deformación contiene información sobre el cambio en volumen, la rotación y el cambio de forma del cuerpo. Puede ser separado en la parte rotacional y en la parte que contribuye al cambio de forma, utilizando el teorema de descomposición polar<sup>[24]</sup>:

$$[F] = [R][U] \quad (2-40)$$

donde  $[R]$  es la matriz de rotación y  $[U]$  es la matriz de cambio de forma (*stretch matrix*). Una vez que la matriz de cambio de forma es conocida, se puede definir la deformación como<sup>[24]</sup>:

$$[\varepsilon] = \ln[U] \quad (2-41)$$

Computacionalmente, la evaluación de la ecuación (2-41) se lleva a cabo mediante uno de dos métodos utilizando una aproximación incremental, el método de Weber o el de Hughes<sup>[24]</sup>, ya que en la solución de un análisis elástico-plástico se utiliza un procedimiento incremental para su solución.

## 2.12 Formulaciones generales de los elementos

Las formulaciones generales de los elementos son aplicables a deformaciones finitas, así como para deformaciones pequeñas, deformaciones pequeñas con grandes rotaciones y otros casos particulares. Estas formulaciones están basadas en el principio de trabajo virtual<sup>[24]</sup>.

Los problemas abordados por deformaciones finitas generalmente tienen las siguientes características<sup>[24]</sup>:

- La geometría cambia durante la deformación. El dominio deformado en un tiempo en particular es, generalmente, diferente al dominio sin deformar o al dominio en cualquier otro tiempo.
- La deformación no es infinitesimal.
- El esfuerzo no puede ser actualizado mediante la suma de su incremento. Debe ser actualizado por medio de un algoritmo que tome en cuenta la deformación finita.
- Es necesario un análisis incremental para simular el comportamiento no lineal.

Si se conocen todas las variables en un tiempo  $t$ , las ecuaciones para encontrar los desplazamientos en un tiempo  $t + \Delta t$  se derivan de formulaciones basadas en el principio del trabajo virtual<sup>[24]</sup>:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i^B \delta u_i dV + \int_S f_i^S \delta u_i dS \quad (2-42)$$

donde  $f_i^B$  es los componentes de fuerza de cuerpo (*body forces*) y  $f_i^S$  es los componentes de fuerza de tracción. El principio de trabajo virtual establece que un cambio virtual (muy pequeño) de la energía de deformación interna debe ser compensado por un cambio idéntico en el trabajo externo, el cual es debido a las fuerzas aplicadas.

El trabajo virtual interno esta dado por<sup>[24]</sup>:

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (2-43)$$

Las formulaciones de los elementos son obtenidas diferenciando el trabajo virtual. En la derivación, solo se toman en cuenta los términos lineales, ignorando los términos de mayor orden, de manera que finalmente se obtiene un juego de ecuaciones lineales. En la formulación de los elementos, las ecuaciones constitutivas del material tienen que ser utilizadas para establecer la relación esfuerzo-deformación.

La formulación general de desplazamiento puro es la mas ampliamente utilizada y es capaz de manejar la mayoría de los problemas no lineales<sup>[24]</sup>. Esta formulación toma a los desplazamientos o velocidades como variables desconocidas primarias. Toda otra cantidad, como deformaciones, esfuerzos y variables de estado en los modelos de material dependiente de la historia, es derivada de los desplazamientos. En esta formulación se obtiene un sistema de ecuaciones lineales en función del cambio en el desplazamiento. Debido a que en la formulación no se hacen consideraciones con respecto a la deformación, puede ser aplicada a cualquier problema de deformación, por lo que es llamada formulación general de elementos.

Otra formulación es la u-P mixta<sup>[24]</sup>. La formulación de desplazamientos puros es muy eficiente computacionalmente. Sin embargo, la exactitud de cualquier formulación por desplazamientos es dependiente de la razón de Poisson o del módulo volumétrico. Bajo condiciones cerca de la incompresibilidad, cualquier pequeño error en el cálculo de la deformación volumétrica aparecerá como un gran error en la presión hidrostática, y subsecuentemente en los esfuerzos. Para superar estas limitaciones se desarrollaron las formulaciones u-P mixtas (desplazamiento-presión hidrostática), las cuales calculan la presión hidrostática a nivel elemento y la resuelven a nivel global, independientemente de los desplazamientos. Estas formulaciones pueden modelar materiales casi y completamente incompresibles.



En general ,la solución completa de un problema que involucra deformación de un sólido involucra<sup>[6]</sup>:

- Las relaciones esfuerzo-deformación (ecuaciones constitutivas).
- Un criterio de fluencia.
- El comportamiento de fluencia del material en términos del esfuerzo efectivo y la deformación equivalente (curva esfuerzo-deformación).
- Las condiciones de equilibrio ( $\frac{d\sigma_{ij}}{dx_i} = 0$ ).
- La relación desplazamiento-deformación (compatibilidad,  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ).
- Las condiciones de frontera del problema.

# CAPÍTULO 3

## DESARROLLO EXPERIMENTAL

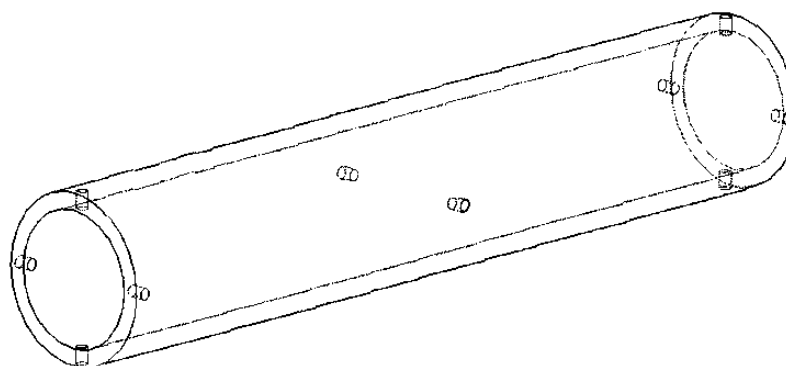
### 3.1 Introducción

En este capítulo se describirán las pruebas que se llevaron a cabo para obtener los datos necesarios para el análisis del proceso. Por una parte, es necesario determinar el comportamiento esfuerzo-deformación del material a la temperatura de trabajo, el cual debe ser alimentado en el programa de elementos finitos Abaqus<sup>MR</sup>. Por otra parte, es necesario determinar la distribución de deformación en el codo formado en planta, la cual servirá como punto de referencia para la validación de los resultados obtenidos por el modelo numérico.

### 3.2 Evolución térmica durante la forja en caliente

El conocimiento de las condiciones en que se lleva a cabo el proceso en planta es fundamental para cualquier análisis que se quiera realizar. En este caso, fue necesario conocer la temperatura a la cual se encuentra la preforma durante el proceso de forja, para de esta manera poder reproducir el comportamiento esfuerzo-deformación del material bajo estas condiciones.

En un trabajo anterior<sup>[5]</sup>, la evolución térmica de la preforma durante la etapa de forja en caliente fue capturada por medio de termopares tipo K (crómel-alúmel), los cuales se insertaron en puntos estratégicos, siguiendo la metodología descrita en la literatura<sup>[20]</sup>. En la Figura 3-1 se muestran los puntos en los cuales fueron insertados los termopares.



**Figura 3-1.** Esquema de la posición de los termopares en la preforma.

La preforma de prueba fue insertada en la línea de producción, de la misma forma que una preforma normal. Los resultados de estos experimentos permitieron determinar la temperatura a la que las preformas son deformadas, 800 °C.

### 3.3 Ensayos de compresión uniaxial

Uno de los ensayos mecánicos más comunes y simples es el ensayo de compresión uniaxial, el cual es utilizado para obtener el comportamiento del esfuerzo de flujo en un material, así como para la estimación de formabilidad para un gran número de procesos de formado masivo. En esta prueba, un espécimen cilíndrico recto es comprimido por medio de la acción de dos herramientas paralelas y planas.

Mediante el análisis del historial térmico se determinó que la temperatura de la preforma en la zona de deformación plástica se encuentra alrededor de los 800 °C. Por lo tanto, se efectuaron ensayos de compresión uniaxial a 800 °C, para de esta manera reproducir el comportamiento esfuerzo-deformación del material a la temperatura de trabajo en planta. Las probetas fueron tomadas del material de la preforma, el cual es un acero tipo ASTM A106 y fueron maquinadas en cilindros de 10 mm de diámetro y 15 mm de largo. La composición química del material se muestra en la Tabla 3-1.

**Tabla 3-1.** Composición química del acero ASTM A106 de la preforma.

Elemento	C	Mn	Si	P	S
% en peso	0.189	0.760	0.270	0.006	0.005

Las relaciones utilizadas para convertir los datos obtenidos de carga-desplazamiento a esfuerzo-deformación, cuando la deformación es uniforme, son las siguientes<sup>[18]</sup>:

$$\text{deformación verdadera axial, } \varepsilon = -\ln(h/h_0) \quad (3-1)$$

$$\text{esfuerzo verdadero axial, } \sigma = (Ph/A_0h_0) \quad (3-2)$$

donde  $h$  y  $h_0$  son la altura instantánea y la altura original del espécimen, respectivamente;  $P$  es la carga instantánea y  $A_0$  es el área de sección transversal original.

Los resultados de las pruebas de compresión fueron utilizados para ajustar una curva de flujo del tipo propuesto por Hollomon<sup>[23]</sup>:

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad (3-3)$$

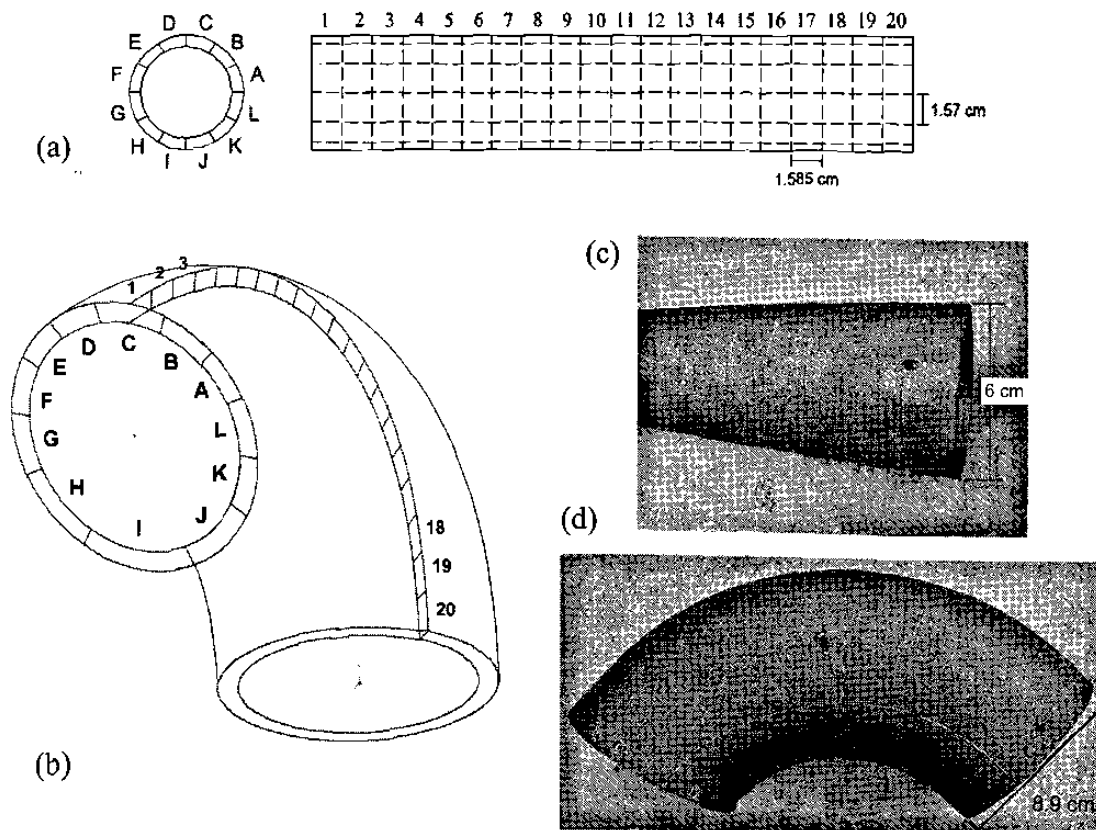
donde  $K$  es el coeficiente de resistencia y  $n$  es el coeficiente de endurecimiento por deformación. La literatura reporta que esta ecuación de flujo ajusta el comportamiento de aceros de bajo carbono en el rango de temperatura de 30 a 1100 °C<sup>[1]</sup>. El ajuste de esta curva a los datos obtenidos tiene como objetivo proporcionar los medios para predecir el comportamiento del material a grandes deformaciones (hasta  $\varepsilon = 1.4$ ).

### 3.4 Metodología para el desarrollo del método de visioelasticidad

Para la determinación de la magnitud de deformación que se lleva a cabo durante el proceso de forja en caliente se utilizó el método de visioelasticidad, descrito en el Capítulo 1. Este método es ampliamente utilizado en el análisis de procesos de formado en frío o en caliente, para determinar y evaluar los gradientes de deformación, y así profundizar en el conocimiento de los mecanismos de deformación plástica del proceso<sup>[19, 21, 22]</sup>.

El método requiere de una referencia geométrica en la pieza a formar, por lo que las preformas fueron maquinadas de tal manera que se obtuvo una cuadrícula en su superficie. El tubo fue dividido en segmentos a cada  $30^\circ$  en la dirección circunferencial y en 20 segmentos en dirección longitudinal, como se muestra en la Figura 3-1.

El siguiente paso fue la medición de cada una de las celdas en la preforma, es decir, antes de la deformación. Después, se procedió a someter esta preforma al proceso normal de producción, para una vez obtenido el codo formado, proceder con las mediciones de las celdas deformadas.



**Figura 3-2.** (a) Diagrama e identificación de las celdas en la preforma y (b) en el codo formado.  
(c) Fotografía de la preforma y (d) del codo formado.

Las mediciones hechas en la dirección longitudinal corresponden a los valores de  $x$ , y las mediciones en la dirección circunferencial corresponden a los valores de  $y$ . La Figura 3-2 muestra un esquema del cambio en la geometría en la rejilla. Entonces, la deformación puede ser calculada en base a los cambios en la geometría de las celdas

por medio de las siguientes ecuaciones. Las componentes normales de deformación se calculan de la siguiente manera<sup>[19]</sup>:

$$\varepsilon_{\theta} = \ln(y_i/y_f) \quad (3-4)$$

$$\varepsilon_z = \ln(x_i/x_f) \quad (3-5)$$

donde los subíndices  $\theta$  y  $z$  corresponden a las componentes de deformación en dirección circunferencial y longitudinal, respectivamente;  $x_i$  y  $y_i$  corresponden a la magnitud de los lados de la celda en la preforma (tubo) y  $x_f$  y  $y_f$  corresponden a los lados de la celda en el producto formado (codo).

El componente radial de deformación se calcula considerando que el volumen es constante de la siguiente manera:

$$\varepsilon_r = -(\varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) \quad (3-6)$$

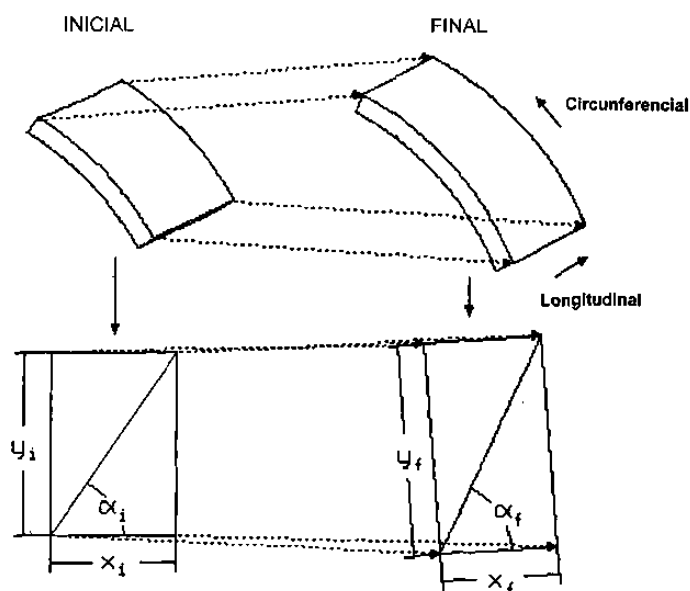


Figura 3-3. Esquema de las celdas utilizadas en el método de viscoplasticidad [19].

El cálculo del componente cortante de deformación requiere del conocimiento de la distorsión angular, y se puede considerar como:

$$\gamma_{\theta z} = 2\Delta\alpha \quad (3-7)$$

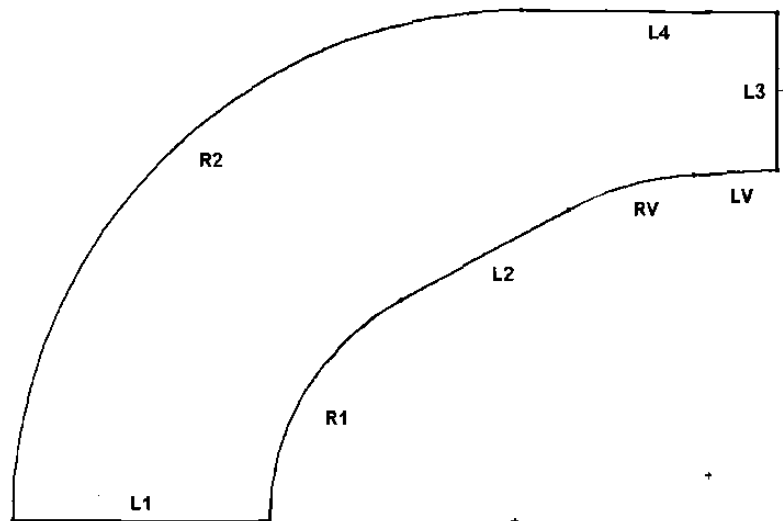
El valor de la deformación equivalente se calcula de la siguiente manera:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\varepsilon_z - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2} \gamma_{\theta z}^2 \right]^{1/2} \quad (3-8)$$

Los valores de deformación equivalente calculados por medio de este método servirán para la validación del modelo numérico.

### 3.5 Diseño de la herramienta de formado

Uno de los objetivos de este trabajo es la evaluación del efecto de la geometría del mandril sobre la forma y distribución de deformación en el codo formado. Dada la geometría original del mandril, se identificaron dos características principales en su diseño, las líneas RV y LV, las cuales se muestran en la Figura 3-3.



**Figura 3-4.** Esquema de las principales líneas que conforman la geometría del mandril.

Las líneas LV y RV definen la forma en que el tubo entra al mandril, y la forma en que ocurre la evolución de la deformación. El diseño de los mandriles de prueba fueron elaborados tomando en cuenta las siguientes restricciones:

- La magnitud del ángulo formado por la línea R1 no debe ser menor a 50°. Ya que de esta forma se asegura que el codo adquiriera la curvatura para formar 90°.

- R1 y R2 son concéntricos y su centro permanece fijo, debido a que definen el diámetro final del codo.
- L1, L3 y L4 tienen siempre la misma longitud y permanecen fijas.
- Las líneas guardan la condición de tangencia en sus interconexiones, excluyendo las interconexiones con L1 y L3.

Tomando en cuenta estas restricciones, las únicas líneas que pueden variar son RV, LV, R1 y L2. Por lo tanto, al variar RV se modifica la dimensión y posición de L2, y la magnitud del ángulo formado por R1. Al modificar LV se modifica RV, y a su vez L2 y R1. Los diseños del mandril elaborados siguiendo esta metodología se muestran en el Anexo IV.

Por lo tanto, es posible observar que la parte final del mandril sirve para dar la curvatura y el diámetro que se desea en el codo formado, mas no contribuye en el proceso de expansión que sufren las preformas en la parte inicial del formado. La zona que se modificó para cada diseño del mandril es la parte inicial, donde los tubos experimentan una expansión y doblez simultánea, donde el tubo incrementa su diámetro inicial y va siendo doblado para adquirir curvatura y finalmente tomar la forma de codo.



# CAPÍTULO 4

## DESARROLLO NUMÉRICO

### 4.1 Introducción

En este capítulo se describirán los pasos seguidos para elaborar el modelo numérico del proceso de forja en caliente de codos sin costura. Para lograr esto se utilizó el paquete comercial de elementos finitos Abaqus<sup>MR</sup>, versión 6.3-1. El objetivo de este capítulo es dar al lector una idea de las opciones o comandos utilizados dentro del paquete. Es importante mencionar que algunas de las opciones, comandos o expresiones estarán escritas en el idioma inglés, sin embargo, siempre se tratará de explicar sus significados o funciones.

### 4.2 Equipo de cómputo

El equipo de cómputo utilizado para la elaboración del modelo y el procesamiento de datos cuenta con un procesador AMD Athlon XP 1800+, el cual tiene una velocidad de 1533 MHz, y 1 Gb de memoria RAM tipo DDR con velocidad de 233 MHz. La capacidad del disco duro para el almacenamiento de datos es de 60 Gb, la cual es una cantidad aceptable ya que los datos de una corrida completa para el modelo en

cuestión alcanzan hasta 1 Gb de espacio en disco duro. Es importante mencionar los datos técnicos del equipo de cómputo utilizado, ya que de éste depende en parte la robustez del modelo y, además, marca un punto de referencia para la consulta del presente trabajo en un futuro.

### 4.3 Simplificaciones del modelo

Debido al costo en el tiempo de análisis de los diversos problemas que se pueden tratar por medio del método de elementos finitos, comúnmente se busca simplificar el modelo. Por ejemplo, en análisis donde las piezas tienen vértices redondos, en lugares no considerados como críticos, éstos son cambiados a vértices rectos, debido al gran aumento en el número de elementos necesarios para definir esas curvaturas. Este tipo de simplificaciones al modelo ahorran en gran cantidad el tiempo de análisis, sin sacrificar en gran medida la exactitud de los resultados.

Muchos de los productos obtenidos en los diferentes procesos de formado presentan algún grado de simetría, por lo que es común que al realizar el modelo por elementos finitos se tome la simetría como ventaja para reducir el número de elementos y así reducir considerablemente el tiempo de cómputo. Comúnmente se pueden encontrar procesos que presentan uno, dos o tres planos de simetría, con lo que se obtiene la mitad, un cuarto o un octavo, respectivamente, de la geometría completa de la pieza a modelar. Otro caso especial son las piezas que presentan simetría respecto a un eje, donde el perfil o sección de la pieza es revolucionada alrededor del eje, dando como resultado la pieza a modelar o sólido de revolución. Este caso, conocido como modelo axisimétrico, consiste en una sección en dos dimensiones y un eje de simetría y se utilizan elementos formulados especialmente para este tipo de análisis.

En el caso del proceso de formado en estudio, se presenta un plano de simetría en dirección longitudinal, el cual permite modelar sólo la mitad de la geometría, lo que resulta un ahorro del 50% de los elementos en el modelo y una disminución bastante considerable en el tiempo de cómputo.

Las herramientas en un proceso de formado tienen generalmente una rigidez mucho más alta que la del material a formar. Debido a esto, es común que en los modelos

numéricos las herramientas utilizadas para dar forma al material sean consideradas como superficies rígidas. Esto tiene como ventaja la considerable reducción en el número de elementos utilizados en las herramientas y, de la misma forma, en el tiempo de cómputo.

En el caso de estudio, en todas las simulaciones el mandril fue considerado como una superficie rígida, lo que resulta en un gran ahorro en el número de elementos y una gran disminución en la complejidad del modelo.

Otro aspecto a considerar es la temperatura. Para el caso de estudio, no se tomaron en cuenta los efectos de los cambios de temperatura en el modelo. Las propiedades del material fueron capturadas a partir de ensayos de compresión llevados a cabo a la temperatura de trabajo en planta de aproximadamente 800 °C. Por lo que en el modelo, la temperatura no es tomada en cuenta, sino que las propiedades mecánicas del material definidas en el modelo corresponden al comportamiento obtenido en las pruebas a esa temperatura. Se podría decir que el proceso es simulado a temperatura constante de 800 °C.

Finalmente, en el modelo no fue incluido el efecto de la fricción entre la interfase tubo-herramienta, debido a la complejidad que suma al modelo, que repercute fuertemente en el tiempo de análisis.

La complejidad del modelo está limitada también por la capacidad de cómputo disponible. El uso del escalamiento de masa es necesario para obtener resultados en un periodo de tiempo razonable o práctico, sin embargo, el aumento de la masa en el modelo influye en la acción del coeficiente de fricción en el proceso. Al ser mayor la masa, el efecto de oposición al movimiento es mayor, es decir, la fuerza necesaria para vencer la fuerza de fricción y producir el movimiento es mucho mayor a el valor real. Por lo tanto, el efecto de la fricción sólo puede ser considerada si se elimina el uso del escalamiento de masa en el modelo.

#### 4.4 Elaboración del modelo mediante Abaqus/CAE

Abaqus/CAE es una interfase gráfica mediante la cual se realiza la etapa de pre-procesamiento. Esta interfase está dividida en módulos, dentro de los cuales se seleccionan las condiciones bajo las cuales estará sujeto el modelo numérico.

A continuación se describirán las funciones principales de cada módulo y se explicarán cada uno de las opciones seleccionadas para el desarrollo del modelo. Los módulos serán nombrados en su idioma nativo, que es el inglés.

##### 4.4.1 Módulo *Part*

Este módulo se utiliza para crear las partes o geometría del proceso a analizar. Además, se pueden importar geometrías o partes creadas en otros paquetes de CAD (Diseño Asistido por Computadora, por sus siglas en inglés), como SolidWorks, CATIA, Pro-Engineer, etc., ya que las opciones para crear geometrías en Abaqus<sup>MR</sup> son limitadas y la creación de partes con cierto grado de complejidad es casi imposible.

En el caso presente, el proceso comprende solamente dos partes, el tubo del cual se forma el codo y la herramienta para formarlo. El tubo fue creado directamente en este módulo, dibujando la mitad de la sección transversal y aplicándole una operación de extrusión. Por otra parte, la geometría del mandril fue creada por medio de dos paquetes debido a su complejidad. Primero, se realizó un croquis en dos dimensiones en el paquete SolidWorks 99, de éste se tomaron las coordenadas y radios de los puntos y arcos principales del mandril. Después, estas coordenadas fueron introducidas en el paquete ANSYS, para construir el mandril a partir de sus primitivos, es decir, primero sus puntos, después sus líneas y arcos y, finalmente, sus áreas. La geometría construida se exporta después en formato IGES, el cual es un formato de intercambio estándar entre paquetes de CAD.

Cabe destacar que el programa no utiliza un sistema de unidades específico, por lo que se debe ser consistente en las unidades que se utilicen en todos los datos alimentados al programa. El sistema de unidades utilizado en este trabajo es el Sistema

Internacional. En la Figura 4-1 se muestran las geometrías del tubo y de uno de los diseños del mandril.

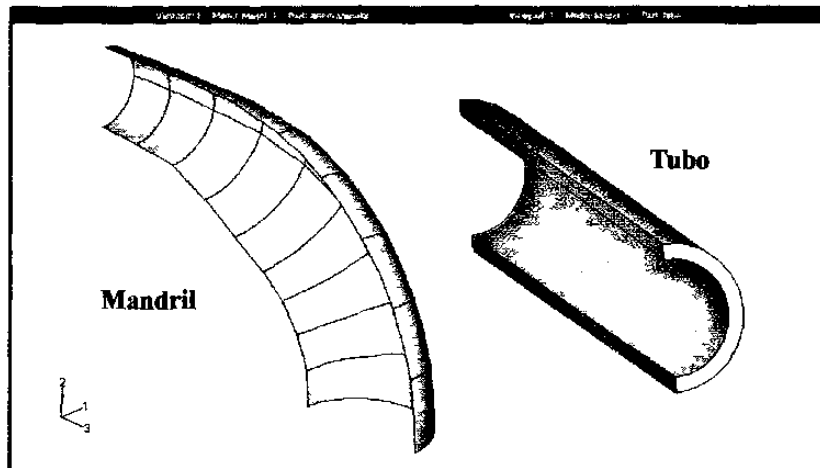


Figura 4-1. Geometría del mandril y tubo para el modelo numérico.

#### 4.4.2 Módulo *Property*

En este módulo se definen las propiedades de los diferentes materiales que estarán presentes en el modelo a crear. Dependiendo del tipo de análisis, se alimentan las propiedades necesarias para hacer los cálculos. Pueden ser propiedades mecánicas, térmicas, eléctricas, electromagnéticas, etc.

Cada material tiene que ser definido por separado, asignándole un nombre, para después ser asignados a la parte del modelo que está hecha de ese material en particular.

En el presente caso, el único material a definir consiste en las propiedades del acero del tubo a la temperatura de trabajo del proceso (800 °C). Para el caso del mandril no se requiere definir ninguna propiedad, ya que se considera un cuerpo perfectamente rígido. Los datos necesarios para llevar a cabo el análisis son la densidad, propiedades elásticas y plásticas. Las propiedades elásticas necesarias son el módulo de Young y la razón de Poisson. Las propiedades plásticas se obtienen de la curva esfuerzo-deformación característica del material de la siguiente manera. Suponiéndose que se cuenta con datos experimentales de un ensayo de tensión de un material isotrópico, se transforman los datos de la curva ingenieril esfuerzo-deformación a esfuerzo verdadero, deformación verdadera elástica y plástica de la siguiente manera:

$$\sigma = s(1 + e) \quad (4-1)$$

$$\varepsilon^{pl} = \ln(1 + e) - \frac{\sigma_y}{E} \quad (4-2)$$

$$\varepsilon^{el} = \frac{\sigma_y}{E} \quad (4-3)$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo verdadero,  $s$  el esfuerzo ingenieril,  $e$  la deformación ingenieril,  $E$  es el módulo de Young y  $\varepsilon^{el}$  y  $\varepsilon^{pl}$  son la deformación elástica y plástica, respectivamente.

#### 4.4.3 Módulo *Assembly*

En este módulo las partes que conforman el modelo son ensambladas, es decir, son puestas en su posición inicial correspondiente para el análisis. En la Figura 4-2 se muestra el arreglo de las piezas en el ensamble.

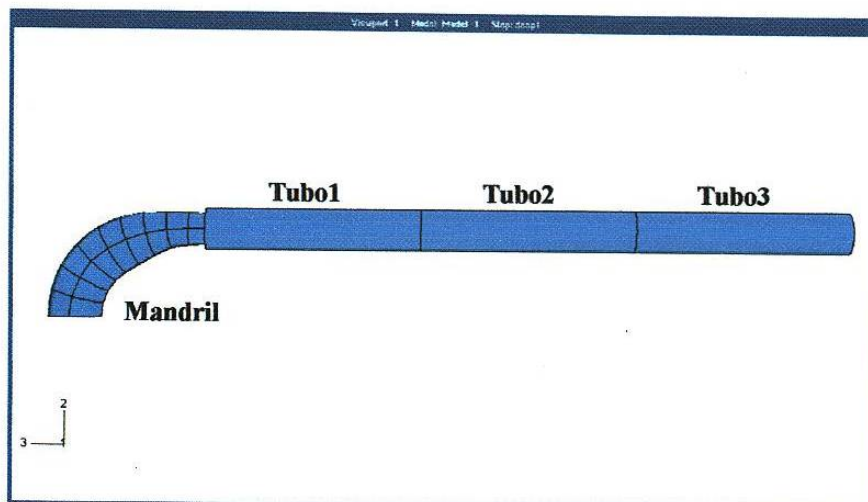


Figura 4-2. Ensamble de las partes que conforman el modelo numérico.

#### 4.4.4 Módulo *Step*

Este es un paso fundamental en el desarrollo del modelo. En este módulo se define el tipo de análisis que se ejecutará. La simulación se lleva a cabo en secciones de análisis llamadas pasos. Para cada paso se puede definir un tipo de análisis que puede ser estático general, dinámico explícito e implícito, de transferencia de calor, dinámico termomecánico, etc. Por ejemplo, en un problema de transferencia de calor, se puede

definir un primer paso en estado transitorio y después un siguiente paso en estado estacionario; de esta manera es posible observar la respuesta del sistema en un determinado intervalo de tiempo y después ver los resultados finales en estado estacionario. Para el caso de pasos dinámicos se debe definir el lapso de tiempo correspondiente al proceso; en el caso de un paso estático o estacionario, el tiempo generalmente se toma en su valor predeterminado de 1, ya que es irrelevante.

En el presente caso, el análisis fue dividido en tres pasos dinámicos explícitos, cada uno de 32 segundos, lo que da como resultado una velocidad del proceso de aproximadamente 10 mm/seg, ya que el tubo mide 317 mm de longitud.

Además, dentro de las opciones que se pueden editar en cada paso se encuentran las del incremento de tiempo para el análisis y el escalamiento de masa. El incremento de tiempo comúnmente se calcula automáticamente. El escalamiento de masa es una opción que se activa para reducir el tiempo de cómputo del análisis.

En este caso, se seleccionó un escalamiento de masa semiautomático, en el cual se definió un incremento de tiempo deseado de  $8.0E-5$  seg, es decir, en automático el programa escalará la masa del modelo para alcanzar el incremento deseado.

Otro de los parámetros que se definen en este módulo es la frecuencia con que se almacenarán los datos para la presentación de resultados. Se definen dos tipos de resultados: los que se muestran gráficamente y los que se almacenan en archivos. Los resultados gráficos, llamados *Field Output* o salida en campo, presentan los resultados sobre la pieza sujeta al análisis en una escala de colores, que representan las magnitudes de la variable en cada parte de la pieza. Los resultados no gráficos, llamados *History Output* o historia de salida, son utilizados para crear gráficas del comportamiento de una o más variables con respecto al tiempo, o de una variable contra otra. Generalmente, este tipo de salida se aplica sólo a una parte del modelo que es de mayor interés y los datos son guardados a una mayor frecuencia que los resultados gráficos.

#### 4.4.5 Módulo *Interaction*

En este módulo se definen las interacciones entre las piezas que conforman el análisis. Dentro de estas interacciones se encuentran las condiciones de contacto, las cuales pueden ser entre partes diferentes o de auto-contacto de una pieza (una pieza se toca a sí misma). Otros tipos de interacción son las condiciones de fricción, condiciones de transferencia de calor, definición de una parte rígida en el modelo, condiciones de transferencia de calor entre piezas, etc.

Existen dos tipos de formulaciones para la definición de las condiciones de contacto, el método de contacto cinemático y el método de contacto por castigo (*penalty*). El método de contacto cinemático refuerza estrictamente las restricciones de contacto, impidiendo la penetración de la superficie esclava en la superficie maestra. El método de contacto por castigo refuerza las condiciones de contacto especialmente en la dirección normal.

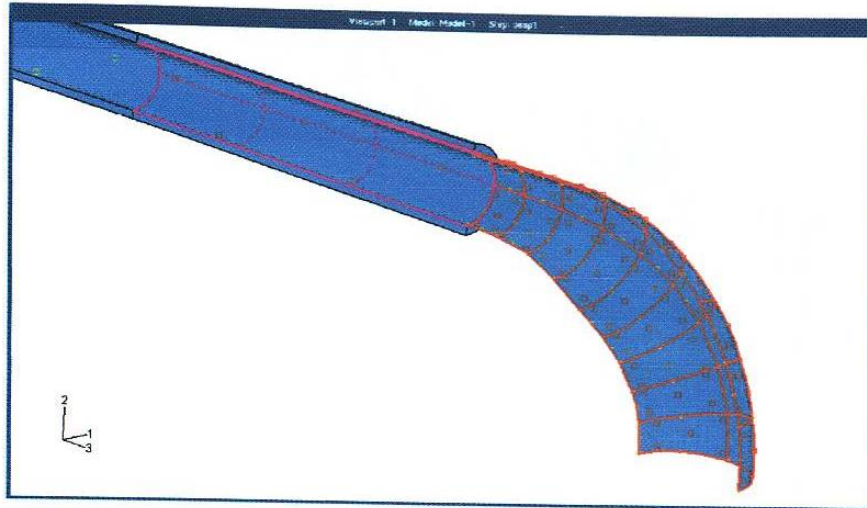
En el caso de estudio se definieron condiciones de contacto superficie a superficie entre cada tubo en el modelo y el mandril, así como los contactos correspondientes entre tubos en sus extremos.

Las condiciones de contacto para el caso de la interfase tubo-mandril fueron definidas sin fricción por el método de contacto cinemático. La definición de un coeficiente de fricción en esta interfase, aunado al escalamiento de masa en el modelo, provoca una fuerza excesiva de oposición al movimiento, lo que en pruebas preliminares al modelo final conducía a resultados no favorables. En la Figura 4-3 se muestran las superficies en contacto de uno de los tubos y el mandril.

Para el caso de la interfase tubo-tubo se definió un coeficiente de fricción de 0.2 por el método de contacto por castigo. La omisión del coeficiente de fricción en la interfase tubo-tubo elimina la oposición al movimiento en la dirección tangencial, lo que durante el desarrollo de la simulación del proceso, explícitamente, cuando un tubo fuerza a otro a pasar por el mandril, provoca el deslizamiento entre las superficies, obteniendo resultados no favorables.



Además, se definió la superficie que conforma al mandril como superficie rígida, asignándole un punto de referencia para la definición de las condiciones de frontera.



**Figura 4-3.** Superficies de contacto: superficie maestra (rojo) y superficie esclava (magenta).

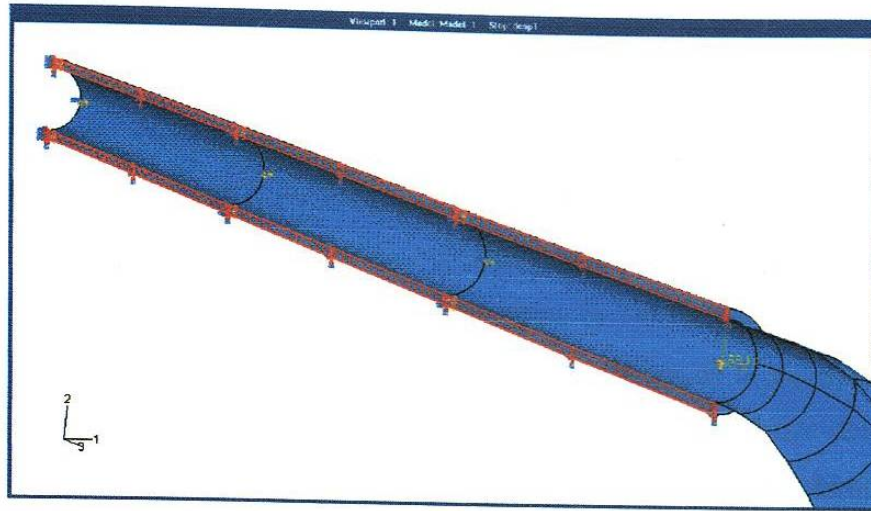
#### 4.4.6 Módulo *Load*

En este módulo se definen las cargas y condiciones de frontera a las que estará sujeto el modelo. Las cargas son definidas como fuerzas externas que actúan sobre el modelo. Las condiciones de frontera principalmente son restricciones a los grados de libertad del modelo.

En este caso, se definieron solamente condiciones de frontera. Las cuales se describen a continuación:

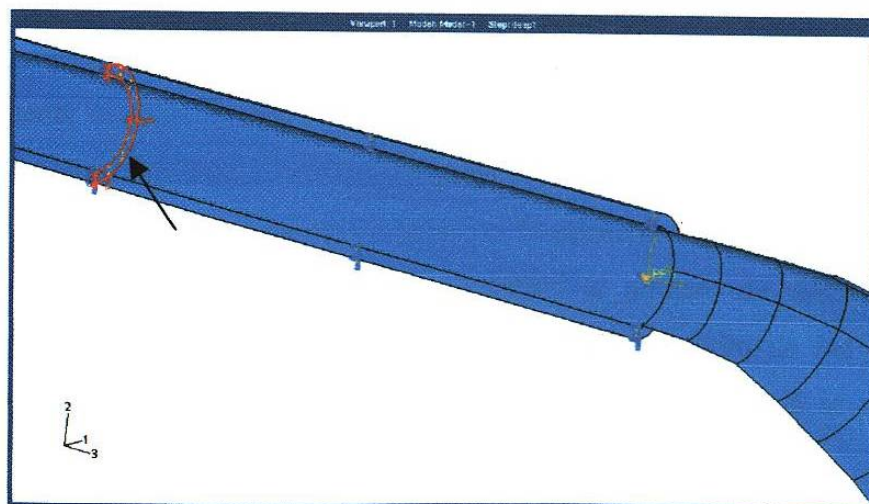
La primera condición es que el mandril tenga una posición fija, por lo que se restringió el movimiento en toda dirección. Las condiciones de frontera se aplican sobre el punto de referencia asignado a la superficie rígida.

La segunda condición es la simetría del modelo. Ésta se definió por medio de una condición de simetría reflejada hacia el eje X a las secciones de tubo longitudinales, como se muestra en la Figura 4-4.



**Figura 4-4.** Condición de frontera de simetría (superficies en rojo).

La tercer condición de frontera es aplicada a cada uno de los tubos en su extremo final, como se muestra en la Figura 4-5. Esta condición corresponde al desplazamiento de los tubos en la dirección Z hacia el mandril. El desplazamiento se aplica con variación lineal al tiempo de tal forma que se lleve a cabo a velocidad constante. Esto se define por medio de una tabla de amplitud. Las tablas de amplitud sirven para definir como se moverá el cuerpo o como se aplicará una carga a lo largo del paso, es decir, a velocidad constante, acelerándose, desacelerándose, carga variable, constante, en forma periódica, etc.



**Figura 4-5.** Condición de frontera de desplazamiento (superficie en rojo).

#### 4.4.7 Módulo *Mesh*

En este módulo se realiza el proceso de discretización del modelo, comúnmente llamado mallado. Para la elaboración del mallado y la asignación de elementos se siguen los siguientes pasos:

1. Asignar *Seeds* o semillas al modelo, las cuales definen el tamaño aproximado del elemento, dividiendo los vértices en segmentos. Se puede asignar un tamaño de elemento de manera global, es decir, en todos los vértices de la pieza; también, se puede asignar manualmente el número de segmentos en un vértice determinado; otras opciones de espaciamiento variable a lo largo del vértice también están disponibles. La asignación manual del tamaño o número de semillas permite definir las zonas en las que se requiere un mallado más fino.
2. Seleccionar la forma del elemento y las opciones de mallado. Se pueden seleccionar elementos tetraédricos, hexaédricos y tipo cuña, para piezas en tres dimensiones y triangulares o cuadrados, para el caso de superficies en tres dimensiones y áreas en dos dimensiones.
3. Seleccionar el tipo de elemento a utilizar, dependiendo del tipo de análisis.
4. Ejecutar el comando de mallado.
5. Revisar la calidad del mallado. Por medio del comando *Verify Mesh* se revisan los ángulos y relaciones entre las dimensiones del elemento, en busca de elementos distorsionados. En caso de obtener una malla de muy baja calidad se tienen que ejecutar los pasos 1 y 4 nuevamente.

En el presente modelo, a cada una de las partes les fue asignada una malla con un número de elementos según su importancia en el análisis. La cantidad de elementos utilizados se muestra en la Tabla 4-1. El número de elementos en los tubos del modelo permaneció constante, mientras que en el mandril el número de elementos varió ligeramente según el diseño. Sin embargo, el tamaño promedio de los elementos determinado por las semillas permaneció constante. En la Figura 4-6 se muestra el modelo discretizado.

Tabla 4-1. Elementos utilizados en el modelo numérico.

Parte	Tipo de elemento	Tamaño de semilla	Numero de elementos
Tubo1	C3D4: tetraedro, 4 nodos	0.0047	8513
Tubo2	C3D4: tetraedro, 4 nodos	0.0046	9944
Tubo3	C3D4: tetraedro, 4 nodos	0.0047	8520
Mandril	R3D4: cuadrilátero, 4 nodos	0.0045	1220-1380

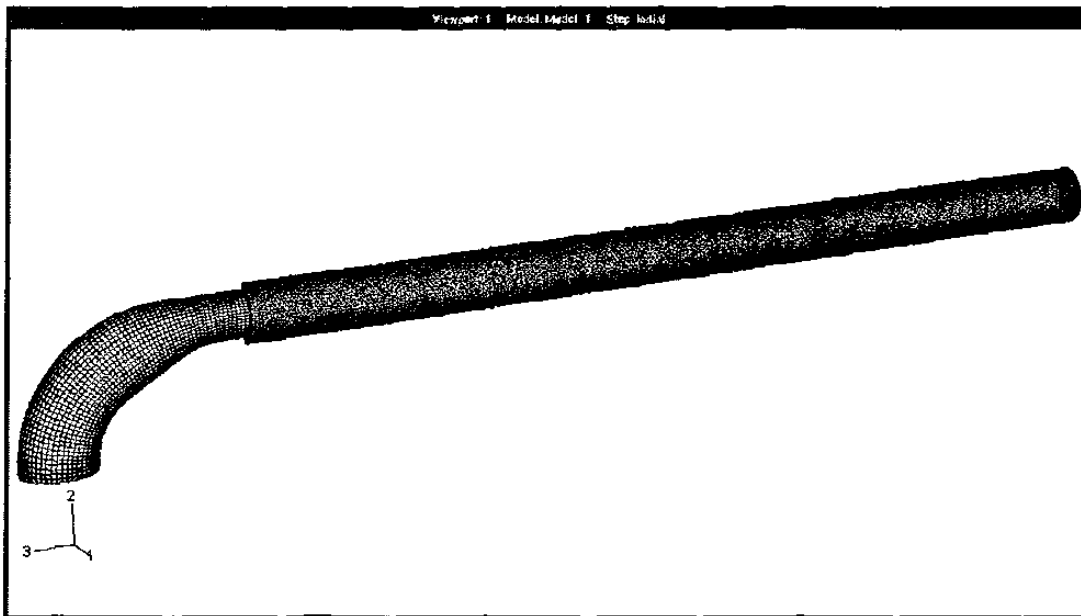


Figura 4-6. Discretización del modelo numérico.

#### 4.4.8 Módulo Job

En este módulo se define el trabajo a realizar, asignando el nombre que tendrán los archivos de resultados del análisis. Existen diferentes tipos de trabajos, los cuales son: análisis completo (*Full Analysis*), chequeo de datos (*Data Check*), y trabajos para continuar un análisis incompleto (*Recover*, *Restart*, *Continue Analysis*). Una vez creado el trabajo se corre el programa para el análisis, mediante la opción *Submit*. Mediante la opción *Monitor* se puede monitorear el avance de la simulación, así como los errores que surjan durante el proceso. Durante la evolución del proceso se pueden observar los resultados preliminares mediante la opción *Results*, con el fin de detectar errores y abortar la simulación en caso de ser necesario, mediante la opción *Kill*.

#### 4.4.9 Módulo *Visualization*

En este módulo se pueden observar gráficamente los resultados del análisis. También se utiliza para llevar a cabo distintas operaciones con los datos almacenados en el *History Output*, como extraer tablas de datos, crear gráficas de la variación en el tiempo de alguna variable de salida, o gráficas del comportamiento de una variable con respecto a otra. Otra de las opciones disponibles es la de crear animaciones para observar la evolución de las variables de interés en el análisis.

La metodología descrita para la elaboración del modelo numérico lleva un proceso de refinamiento y ajuste al modelo, lo que involucra básicamente la selección adecuada del tipo y número de elementos, zonas de refinamiento del mallado, escalamiento de masa, condiciones de frontera, etc. La Figura 4-7 muestra uno de los primeros modelos y el modelo final.

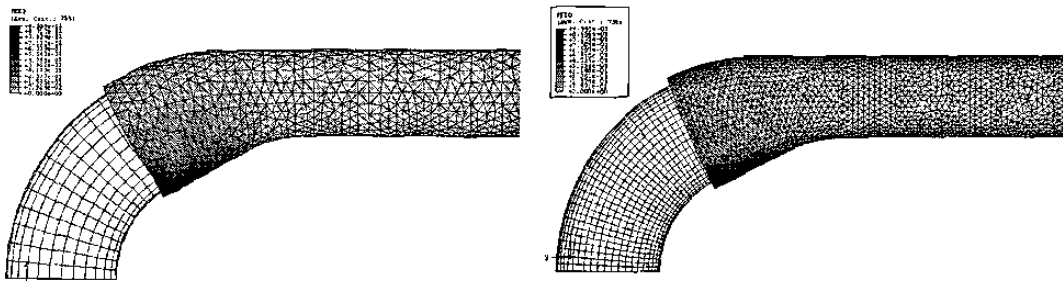


Figura 4-7. Modelo inicial (izquierda) y modelo final (derecha).

Un aspecto importante en el refinamiento del modelo es la determinación del mallado óptimo. La determinación del tamaño de elemento adecuado para las condiciones del modelo y del equipo de cómputo se realiza a prueba y error, aumentando gradualmente el número de elementos en el modelo y observando el cambio en las variables de salida con respecto al modelo anterior. Cuando el cambio en las variables es un porcentaje pequeño se considera que el mallado se encuentra en la zona de la malla óptima. Si el número de elementos se sigue incrementando, se llegará a un punto en el que el problema presente divergencia, obteniendo resultados incorrectos.

# CAPÍTULO 5

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

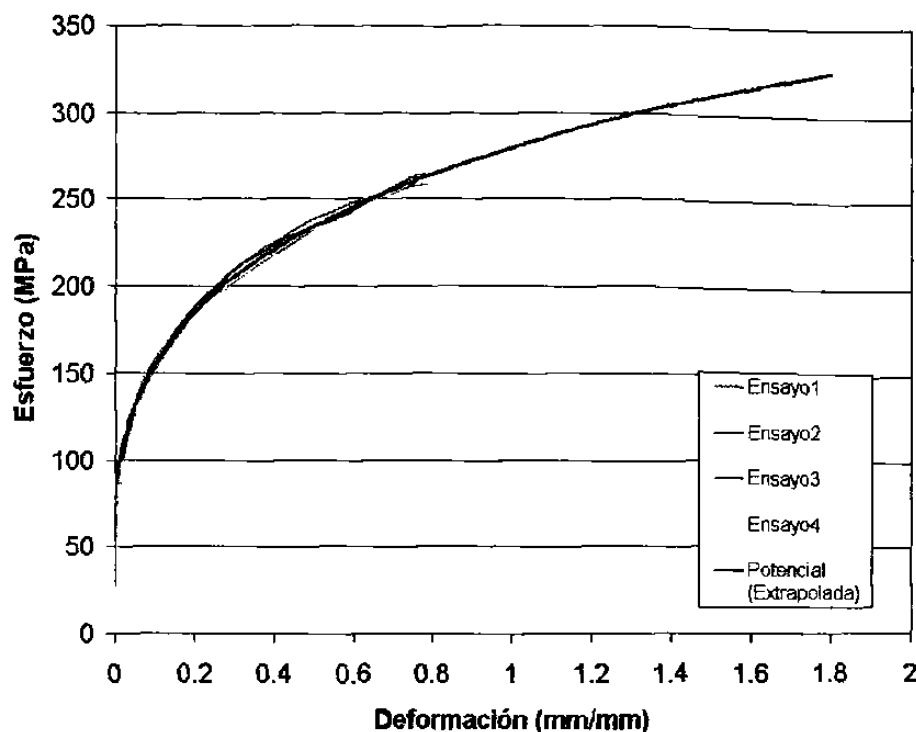
### 5.1 Introducción

En este capítulo se analizarán y discutirán los resultados obtenidos en la experimentación. En primera instancia, se tratarán los temas concernientes a la validación del modelo numérico, la cual se basará en la comparación entre las distribuciones de deformación equivalente obtenidas mediante los modelos visioplástico y numérico, así como en las dimensiones finales de los codos. En segunda instancia, se presentarán los resultados del análisis del efecto de la geometría del mandril sobre las características del codo formado.

### 5.2 Obtención de la curva de fluencia

Después de obtener la información carga-desplazamiento de los ensayos de compresión en caliente se procedió a procesar la información para obtener las curvas esfuerzo-deformación. La magnitud de la deformación obtenida por medio de los ensayos de compresión no es mayor a 0.8. Por lo tanto, se optó por encontrar la curva de fluencia del material del tipo propuesto por Hollomon<sup>[23]</sup>,  $\sigma = K\epsilon^n$ . La literatura

marca que, en general, los aceros de bajo carbono siguen este comportamiento en el rango de temperatura de 30 a 1100 °C<sup>[1]</sup>. Por lo tanto, se procedió a encontrar una ecuación (potencial,  $y = cx^n$ ) que ajustara los valores obtenidos en los ensayos de compresión. La Figura 5-1 muestra las curvas esfuerzo-deformación de los cuatro ensayos de compresión y la curva de fluencia extrapolada.



**Figura 5-1.** Curvas esfuerzo-deformación de cuatro ensayos de compresión y curva de fluencia extrapolada a 1.8 de deformación.

La ecuación fue evaluada para obtener una tabla de datos, la cual fue alimentada al programa de elementos finitos Abaqus<sup>MR</sup>. En el Anexo I se muestran los datos esfuerzo-deformación de los ensayos de compresión, así como los obtenidos de la ecuación de fluencia.

### 5.3 Distribución de deformación por el método de viscoplasticidad

El primer paso para llegar a la validación del modelo numérico es la obtención de la distribución de deformación en el proceso real por medio del método de

visioplaticidad. Como se mencionó anteriormente, el método requiere de la comparación de un patrón geométrico antes y después de la deformación, por lo que cada celda en la pieza fue medida en dirección longitudinal y circunferencial, antes y después de la deformación. Las celdas fueron identificadas por medio de letras y números, en la dirección circunferencial y longitudinal, respectivamente. En el Anexo II se muestran las mediciones antes y después de la deformación, así como la identificación de cada celda.

Una vez obtenidas las mediciones de cada celda se procedió a calcular las componentes de deformación, para después obtener la deformación equivalente en cada celda. En el Anexo III se muestran las componentes de deformación en la dirección longitudinal, circunferencial y radial, así como la deformación equivalente. En la Figura 5-2 se muestra una gráfica de la distribución de deformación equivalente en el codo por el método de visioplaticidad.

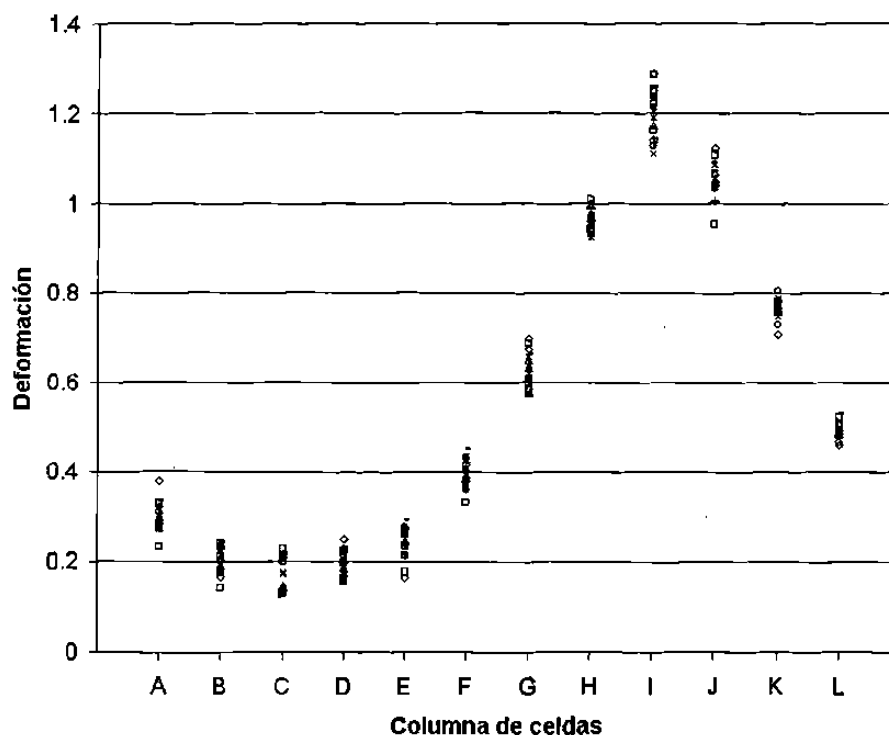


Figura 5-2. Distribución de deformación equivalente por el método de visioplaticidad.



## 5.4 Validación del modelo numérico

El modelo numérico fue creado utilizando el paquete de elementos finitos Abaqus<sup>MR</sup>. Los datos obtenidos en planta utilizados en el modelo numérico fueron el diseño geométrico del mandril, las dimensiones de la preforma, la temperatura de trabajo y la velocidad del proceso. Las propiedades mecánicas del material a la temperatura de trabajo fueron introducidas al paquete de elementos finitos para definir el comportamiento del material. En el Capítulo 4 se describe el proceso de elaboración del modelo numérico.

Dado que en la simulación se incluyó la opción de escalamiento de masa en el modelo, para reducir el tiempo de cómputo, el primer paso fue verificar que las fuerzas de inercia no fueran dominantes durante la simulación del proceso. Para esto se obtuvieron las gráficas del balance de energías del modelo completo y se verificó que la energía cinética del modelo se mantuviera en una fracción de la energía interna, que es la energía debida a la deformación plástica y elástica. La Figura 5-3 muestra el historial de energías en el modelo, se puede observar que tiene la forma típica de un proceso cuasi-estático.

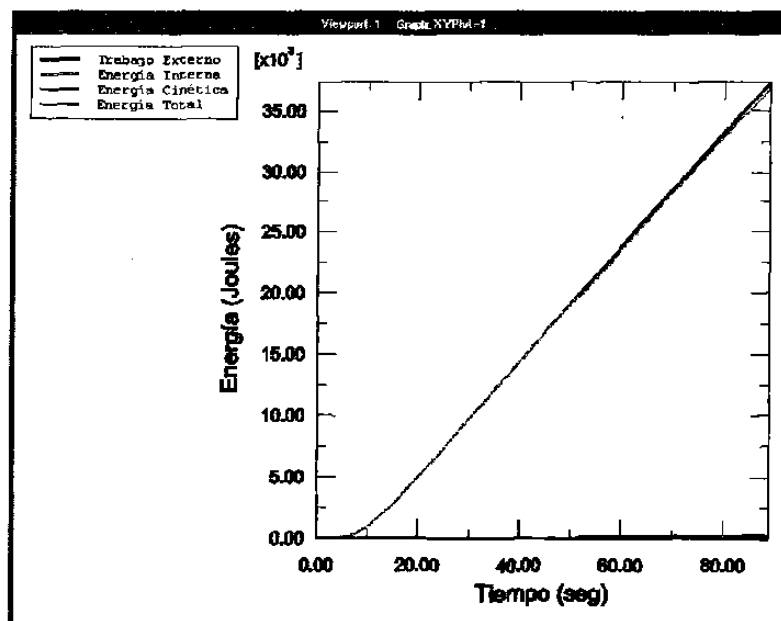


Figura 5-3. Historial de energías de la simulación del proceso.

La Figura 5-4 muestra una imagen de la simulación del proceso al inicio de la entrada del tercer tubo.

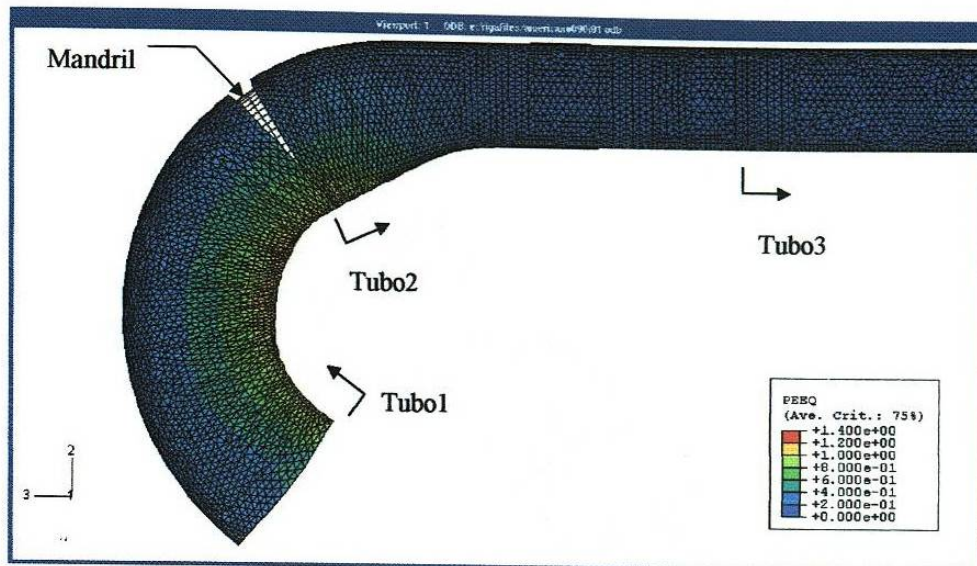


Figura 5-4. Imagen de la simulación del proceso (la escala de colores representa la deformación equivalente).

La distribución de deformación equivalente calculada por el modelo numérico del proceso se muestra gráficamente en la Figura 5-5. Los resultados muestran que la deformación a lo largo de la dirección longitudinal del tubo es relativamente constante, lo que indica que el proceso es estable.

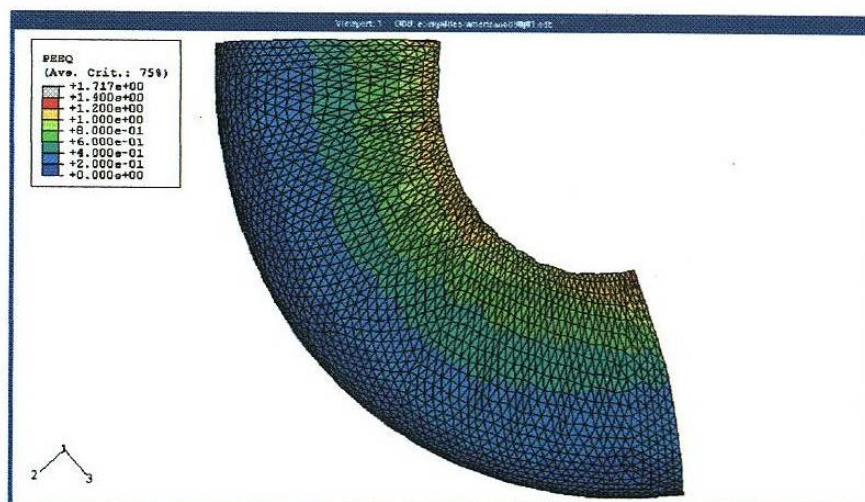
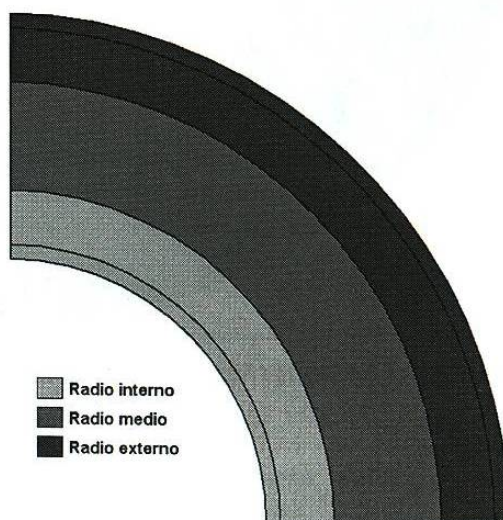


Figura 5-5. Deformación equivalente en el segundo codo del modelo numérico.

Una vez obtenida la distribución de deformación en ambos modelos (visioplástico y numérico), el paso final es comparar los resultados. Para esto, el codo fue dividido en tres zonas, la cuales se muestran en la Figura 5-6, lo cual es válido si se considera que la distribución de deformación es constante en cada perfil del codo, o que la deformación permanece constante en la dirección longitudinal.



**Figura 5-6.** Zonas de comparación.

Estas zonas permiten un punto de comparación entre ambos modelos, asociando las columnas de celdas del modelo visioplástico y los elementos del modelo numérico correspondientes a cada zona. El agrupamiento de columnas de celdas es necesario, en parte, debido a la simetría del modelo numérico, es decir, a que sólo se simuló una mitad del tubo y en el modelo visioplástico se tienen, por así decirlo, dos mitades. Las columnas de celdas que, en el presente caso, pertenecen a cada zona de comparación se muestran en la Tabla 5-1. En el modelo numérico se seleccionaron los elementos pertenecientes a cada zona y se obtuvieron los valores de deformación de cada elemento en un archivo tipo hoja de cálculo (Figura 5-7).

**Tabla 5-1.** Identificación de zonas de comparación en el modelo visioplástico.

<b>Zona</b>	<b>Columnas</b>
<b>Radio interno</b>	H, I, J
<b>Radio medio</b>	F, G, K, L
<b>Radio externo</b>	A, B, C, D, E



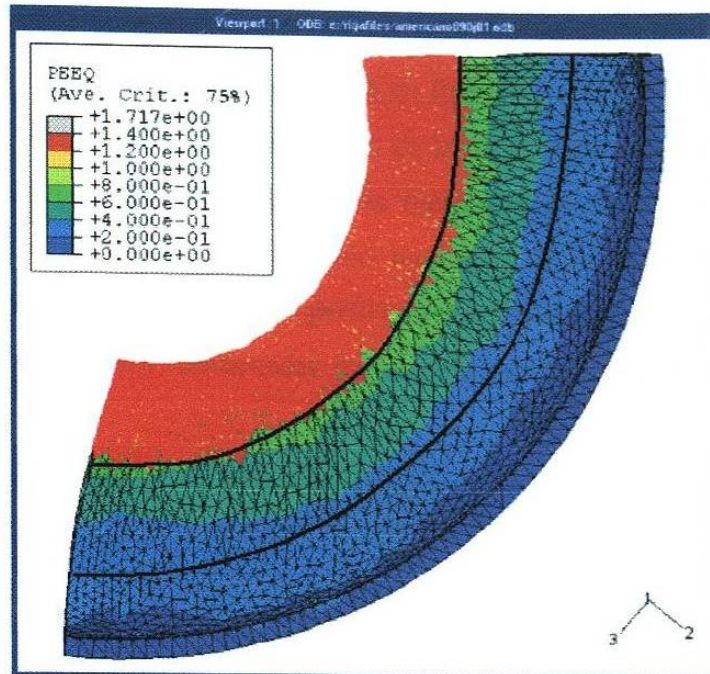


Figura 5-7. Selección de los elementos pertenecientes a la zona del radio interno (rojo).

La Figura 5-8 muestra la deformación máxima, mínima y promedio para cada una de las zonas de comparación del modelo visioelástico y el modelo numérico.

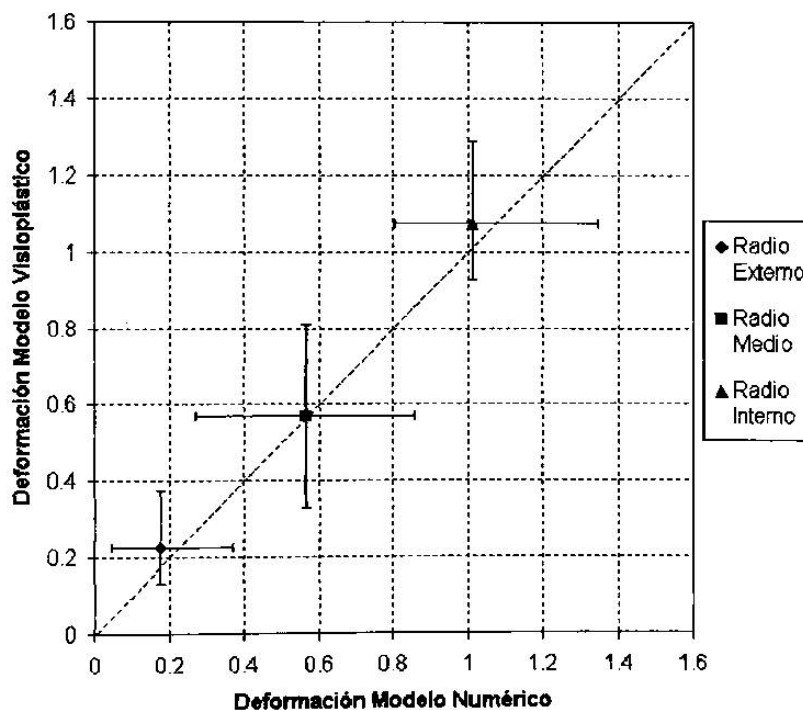


Figura 5-8. Comparación entre la deformación del modelo visioelástico y el de elementos finitos. Los puntos representan el valor promedio de la zona, las barras la dispersión de datos.

Para obtener la distribución de deformación en función de la posición circunferencial (Figura 5-9) fue necesario obtener el ángulo en la parte central de cada celda sobre el plano transversal del codo. Las mediciones fueron hechas desde  $0^\circ$  (radio externo) hasta  $180^\circ$  (radio interno). En el modelo numérico se obtuvieron los valores de deformación para cada nodo en los perfiles de las bocas del codo, así como sus coordenadas. Mediante las coordenadas fue posible determinar el ángulo en el que se encontraba cada nodo.

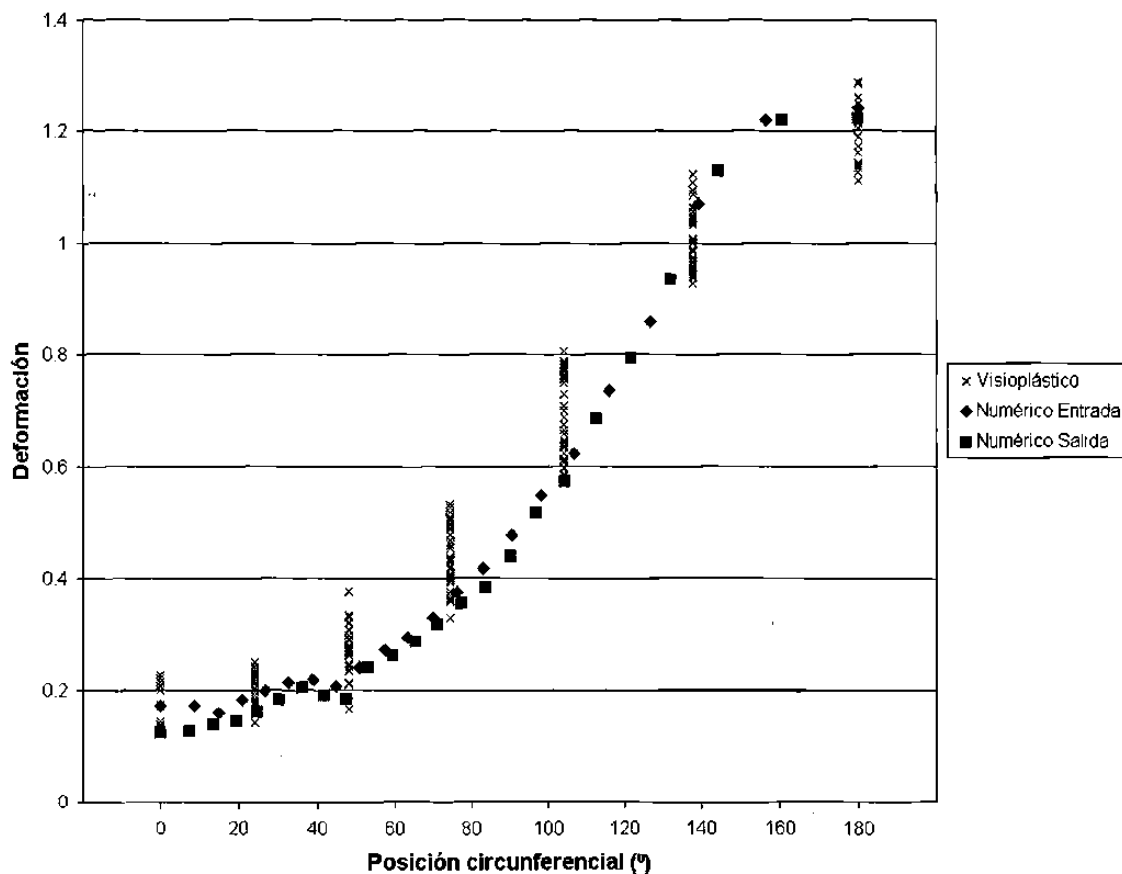


Figura 5-9. Distribución de deformación en función de la posición angular.

La distribución de deformación muestra que existe correlación del modelo numérico con el visioelástico. Las diferencias en el modelo numérico se pueden atribuir a la discretización de ambos modelos. Por esta razón, los valores de deformación en el modelo visioelástico muestran mayores discontinuidades, por ejemplo, en el intervalo entre 0.8 y 0.9 (Figura 5-8). El modelo visioelástico proporciona un valor de

deformación para cada una de las 240 celdas, mientras que el modelo por elementos finitos proporciona un valor para cada uno de los aproximadamente 10000 elementos. Por lo tanto, se puede decir que la distribución de deformación obtenida en el modelo numérico concuerda con la obtenida en el proceso real. Aún cuando el modelo visioelástico proporciona menor información, el modelo numérico necesita del modelo visioelástico para su validación, ya que en este último se tiene la certeza de que la deformación fue calculada a partir de los cambios en la geometría de la preforma en el proceso real.

Además de la distribución de deformación, también fueron comparadas las dimensiones y forma finales del codo. Mediante una inspección visual, se puede observar una gran similitud en la forma del codo del modelo numérico con el real. Una característica que muestran los codos formados en planta es la holgura que se presenta en el frente de la zona del radio externo, misma que reproduce el modelo numérico (Figura 5-10). Esta holgura representa material que tiene que ser removido en procesos de corte posteriores a la forja en caliente, así como material de desecho, por lo tanto ésta es una característica no deseable, ya que involucra mayores costos de producción.

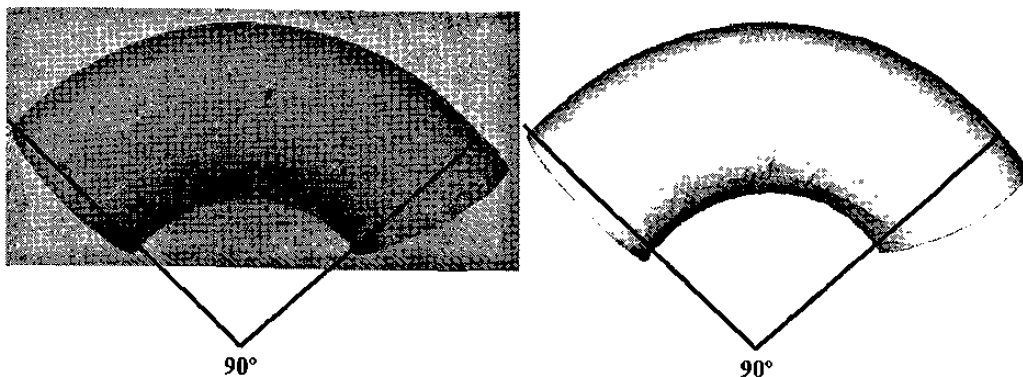
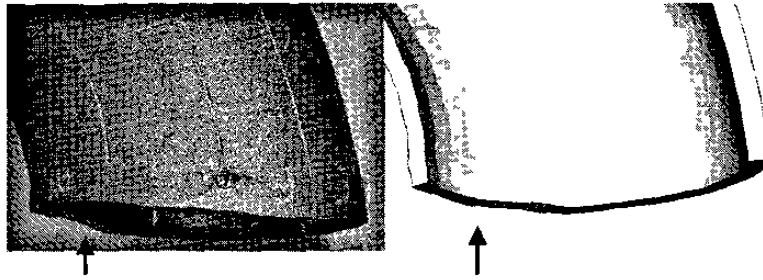


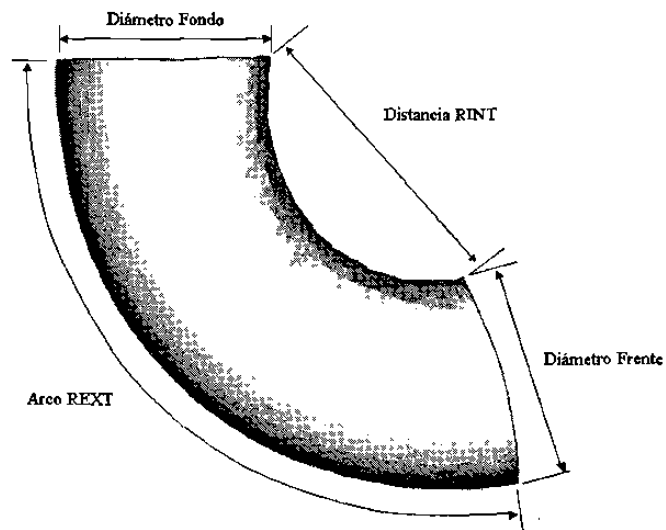
Figura 5-10. Holgura del radio externo.

Una última observación en la forma física del codo es la distorsión o irregularidad en el perfil de la boca frontal (boca que entra primero al mandril) en la zona del radio interno, la cual también se puede apreciar en el modelo numérico, como se muestra en la Figura 5-11.



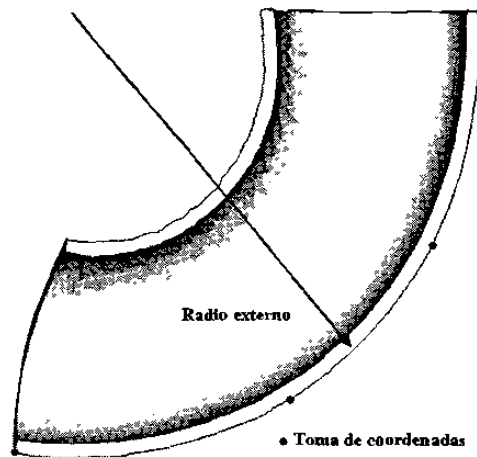
**Figura 5-11.** Distorsión en zona frontal-radio interno.

Desde el punto de vista dimensional, el modelo numérico también mostró muy buena correlación. En la Figura 5-12 se muestran las partes del codo que fueron medidas en ambos modelos para su comparación.



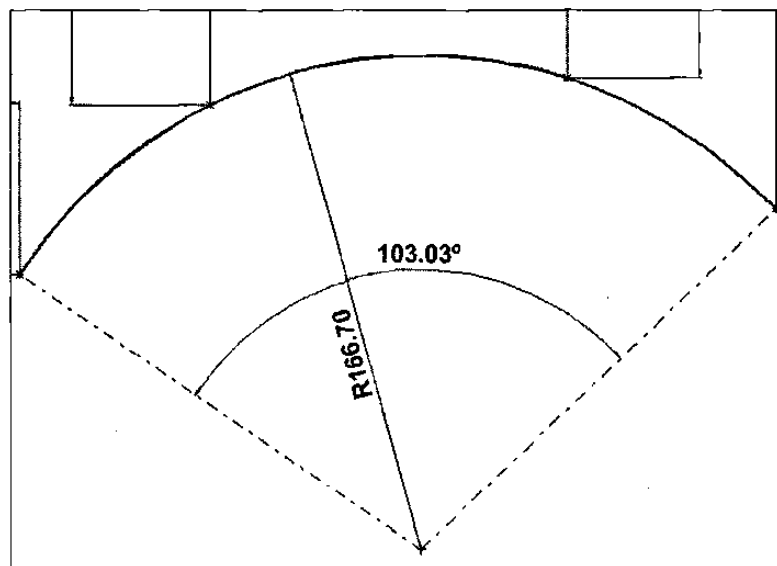
**Figura 5-12.** Mediciones para comparación dimensional.

Las mediciones lineales fueron hechas directamente por distancia nodo a nodo en Abaqus/CAE. La medición de la longitud del arco se hizo obteniendo las coordenadas de cuatro nodos, los dos en los extremos y dos más aproximadamente equidistantes, como se muestra en la Figura 5-13.



**Figura 5-13.** Puntos aproximados en los que se obtuvieron las coordenadas de los nodos.

Los puntos obtenidos fueron dibujados en un plano, por medio del paquete de diseño SolidWorks y, mediante estos puntos, se trazó el arco correspondiente al arco del radio externo del codo (Figura 5-14).



**Figura 5-14.** Obtención de los radios para el cálculo del espesor de pared del codo.

Mediante el arco obtenido por medio del paquete de CAD, es posible medir automáticamente la longitud del arco. En la Tabla 5-2 se listan las mediciones hechas para la comparación dimensional entre el modelo numérico y el codo real, así como el porcentaje de error obtenido.



**Tabla 5-2.** Comparación dimensional entre el codo numérico y el codo real.

Zona	Numérico (cm)	Real (cm)	% Error
<b>Diámetro Frente</b>	9.18636	9.32	1.434
<b>Diámetro Fondo</b>	9.07197	9.07	0.021
<b>Distancia RINT</b>	12.0152	11.80	1.791
<b>Arco REXT</b>	30.008	30.10	0.305

El último punto de comparación dimensional es el espesor de pared. Estas mediciones se llevaron a cabo obteniendo distancias de nodo a nodo sobre las caras planas que representan el corte del tubo. Por lo tanto, el cálculo del espesor sólo se puede realizar en las secciones del radio interno y del radio externo, debido a que sólo en estas zonas se encuentran alineados los nodos sobre un plano. En cualquier otro punto los nodos se encuentran distribuidos de una manera no estructurada y no se cuenta con referencia alguna para llevar a cabo las mediciones.

Los espesores de pared obtenidos para la zona del radio interno y radio externo se muestran en la Tabla 5-3.

**Tabla 5-3.** Comparación de espesores entre el modelo real y el modelo numérico.

	Numérico (mm)	Real (mm)	Error (%)
<b>Radio interno</b>	5.416	5.34	1.403
<b>Radio externo</b>	5.845	5.62	3.849

De acuerdo a lo anterior, se puede decir que el modelo numérico es representativo del modelo real, ya que la distribución de deformación en el modelo numérico se encuentra en el rango de la deformación calculada por medio del método de viscoplasticidad y la correlación dimensional tiene un error menor al 4%.

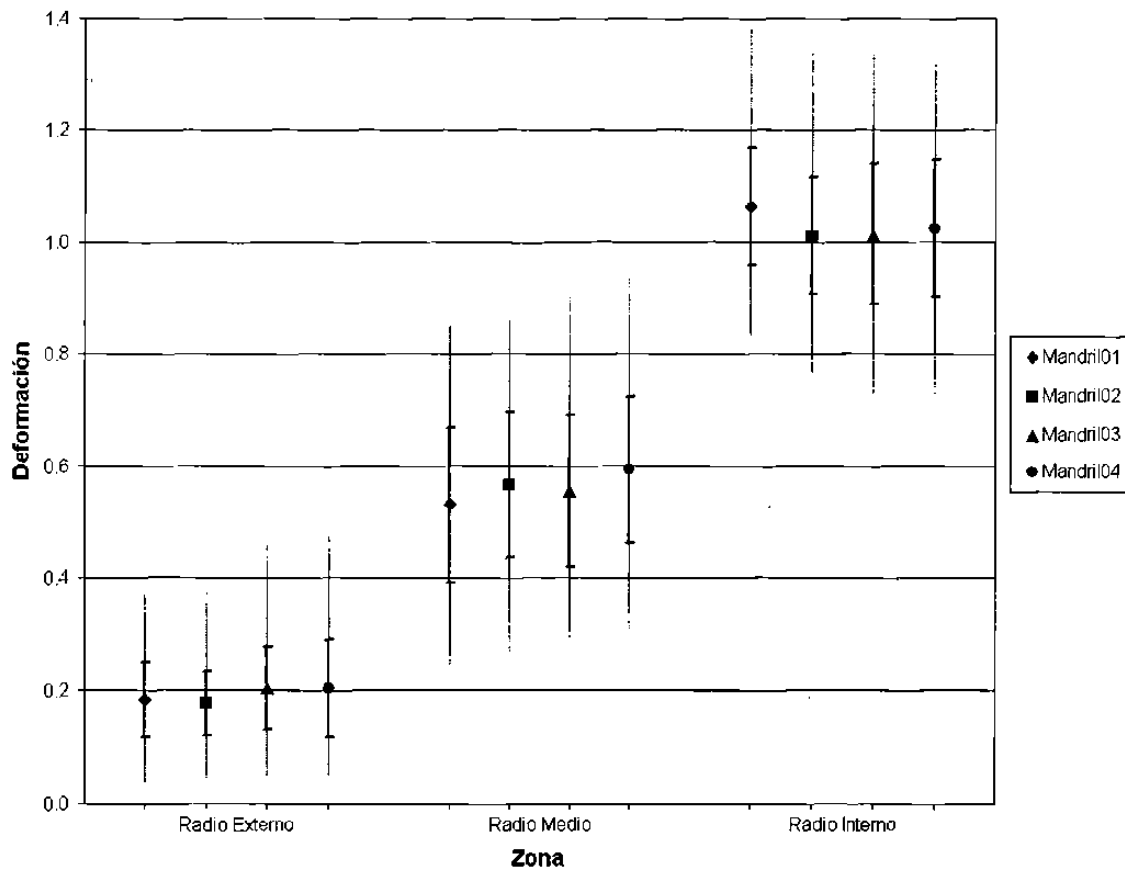
### 5.5 Evaluación de la geometría del mandril

Una vez concluida la etapa de validación del modelo numérico, se puede proceder a hacer modificaciones al modelo original. En este caso, el parámetro a variar es el diseño del mandril. Los diseños de prueba se muestran en el Anexo IV, así como la identificación de las líneas que conforman la geometría del mandril.

El modelo numérico fue modificado cambiando únicamente la geometría del mandril, los demás parámetros (número de elementos, condiciones de frontera, condiciones de contacto, escalamiento de masa, etc.) permanecieron constantes.

En cada uno de los modelos se obtuvieron los valores de deformación por zonas, como se describió anteriormente, y éstos fueron comparados para observar el efecto del cambio en la geometría del mandril sobre la distribución de deformación.

En los diseños Mandril01, Mandril03 y Mandril04, se modificó el radio de la línea RV, a 80 mm, 100 mm y 110 mm, respectivamente, siendo el radio original de 90.6272 mm (Mandril02). La distribución de deformación equivalente obtenida por medio de estos diseños se muestra en la Figura 5-15.

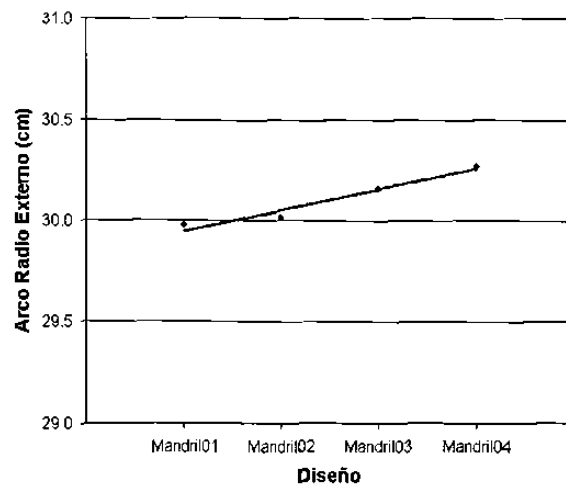


**Figura 5-15.** Distribución de deformación por zonas obtenidas mediante los diseños Mandril01, 02, 03 y 04. Las barras representan la desviación estándar y las líneas la dispersión de datos.

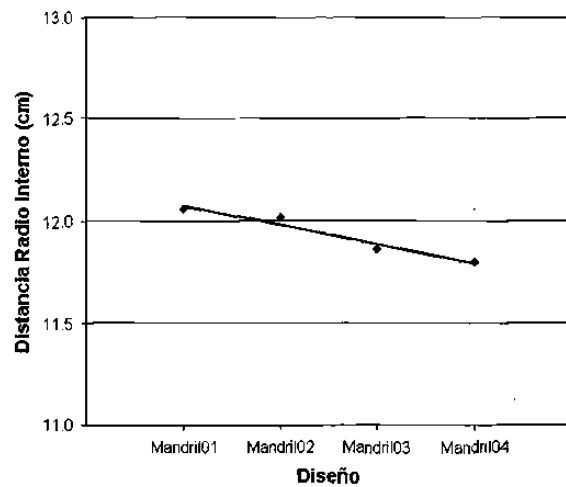
Se puede observar que en cuanto aumenta el radio de la línea RV, la deformación tiende a disminuir en la zona del radio interno, mientras que en las zonas del radio

externo y radio medio la deformación tiende a aumentar. Esto da como resultado menor concentración de deformación en la zona del radio interno.

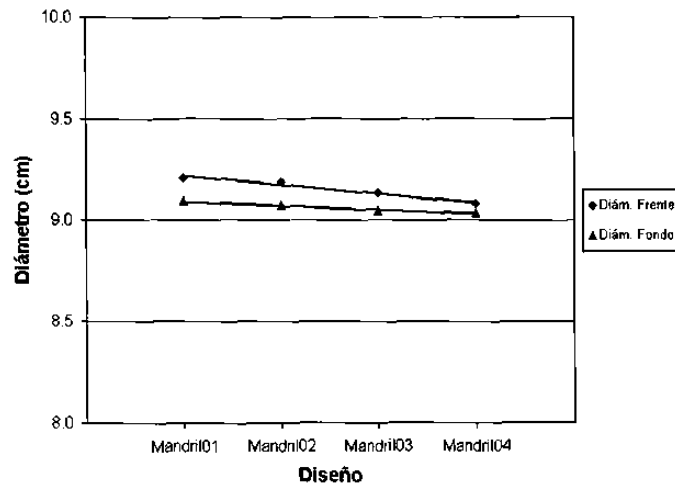
Las dimensiones obtenidas de los codos formados mediante los diferentes diseños del mandril se muestran en las Figuras 5-16 a la 5-19.



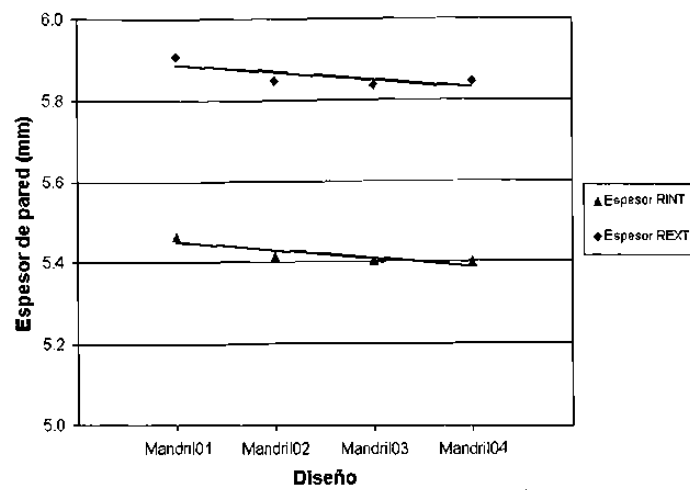
**Figura 5-16.** Dimensiones del arco del radio externo (Arco REXT) para los diferentes diseños del mandril.



**Figura 5-17.** Dimensiones la distancia entre extremos del radio interno (Dist. RINT) para los diferentes diseños del mandril.



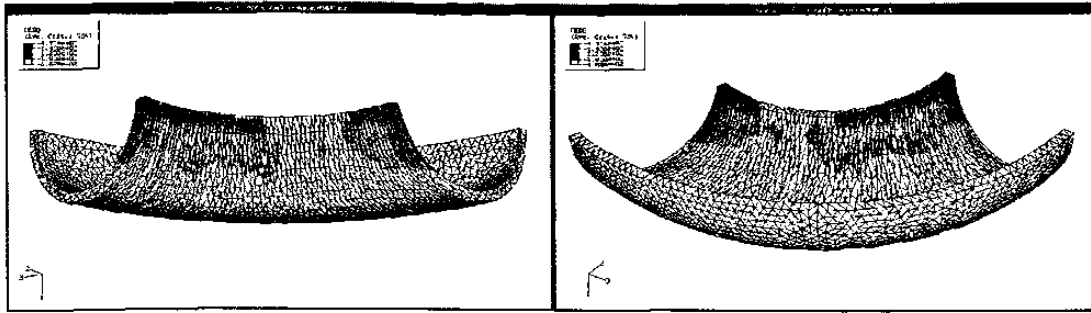
**Figura 5-18.** Dimensiones de los diámetros de las bocas del codo obtenidos mediante los diseños del mandril.



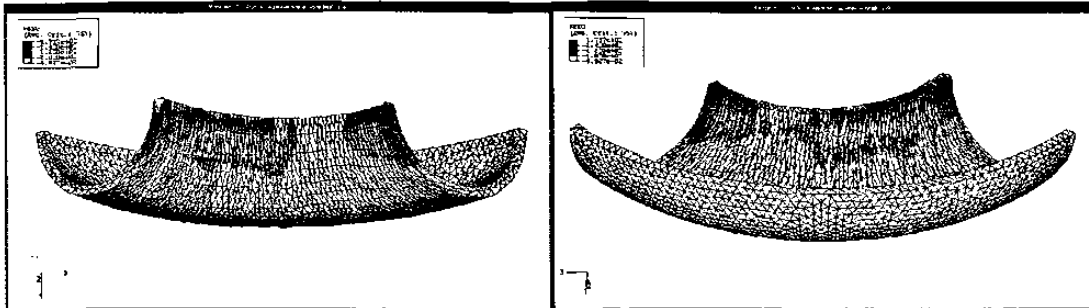
**Figura 5-19.** Dimensiones de los espesores de pared obtenidos mediante los diseños del mandril.

Aunque los resultados muestran pequeños cambios en las dimensiones de los codos formados mediante los diferentes diseños, se puede observar relación entre éstos. A medida que aumenta el radio de RV, la longitud del arco del radio externo aumenta, mientras que la distancia entre extremos del radio interno disminuye. También, a medida que aumenta el radio de RV se observa una disminución en los diámetros de las bocas del codo, así como una ligera reducción en el espesor de pared.

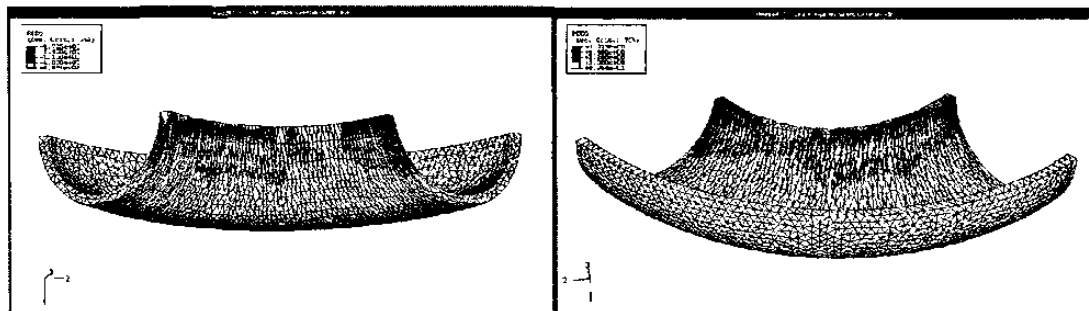
La Figura 5-20 muestra las zonas con deformación equivalente mayor a la unidad obtenidas mediante los diferentes mandriles.



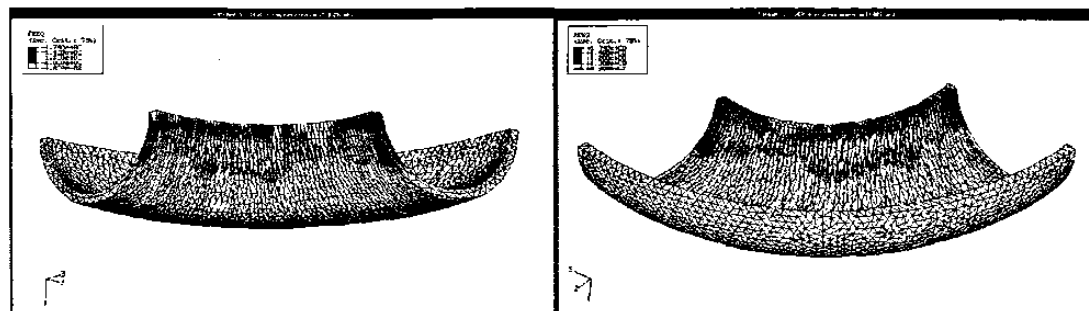
Mandril01



Mandril02



Mandril03



Mandril04

**Figura 5-20.** Zonas de deformación equivalente mayor a 1.0 (zonas a color).

Se pueden hacer las siguientes observaciones en base a los resultados obtenidos:

- El diseño Mandril01 proporciona el mejor espesor de pared, mientras que el Mandril04 produce el espesor más delgado.
- La longitud del arco del radio externo es menor con el Mandril01; con el Mandril04 se produce el máximo.
- El área de deformación mayor a la unidad, es menor en el Mandril01 y se incrementa hacia el Mandril04.
- Los diámetros de las bocas tienden a ser mas grandes y desiguales en el Mandril01, mientras que en el Mandril04 sus dimensiones son menores y con menor desigualdad.

Las Tablas 5-4 a 5-7 presentan los datos usados para construir las gráficas en las Figuras 5-15 a 5-19.

**Tabla 5-4.** Resumen de la deformación obtenida mediante los diferentes mandriles en el radio externo.

Diseño	Deformación en Radio Externo			
	Mínima	Máxima	Promedio	D. Est.
Mandril01	0.0390	0.3688	0.1826	0.0645
Mandril02	0.0470	0.3728	0.1759	0.0558
Mandril03	0.0503	0.4570	0.2031	0.0730
Mandril04	0.0531	0.4713	0.2031	0.0844

**Tabla 5-5.** Resumen de la deformación obtenida mediante los diferentes mandriles en el radio medio.

Diseño	Deformación en Radio Medio			
	Mínima	Máxima	Promedio	D. Est.
Mandril01	0.2470	0.8497	0.5303	0.1388
Mandril02	0.2688	0.8591	0.5664	0.1309
Mandril03	0.2940	0.9022	0.5556	0.1369
Mandril04	0.3081	0.9329	0.5934	0.1318

**Tabla 5-6.** Resumen de la deformación obtenida mediante los diferentes mandriles en el radio interno.

Diseño	Deformación en Radio Interno			
	Mínima	Máxima	Promedio	D. Est.
Mandril01	0.8341	1.3815	1.0637	0.1045
Mandril02	0.8020	1.3492	1.0112	0.1054
Mandril03	0.7324	1.3355	1.0138	0.1249
Mandril04	0.7314	1.3155	1.0251	0.1228

**Tabla 5-7.** Dimensiones de los codos formados mediante los diferentes diseños.

<b>Diseño</b>	<b>Dist RINT (cm)</b>	<b>D. Frente (cm)</b>	<b>D. Fondo (cm)</b>	<b>Espesor RINT (mm)</b>	<b>Espesor REXT (mm)</b>	<b>Long. Arco (cm)</b>
<b>Mandril01</b>	12.060	9.208	9.09179	5.462	5.909	29.973
<b>Mandril02</b>	12.015	9.186	9.07197	5.416	5.845	30.008
<b>Mandril03</b>	11.861	9.132	9.04543	5.403	5.836	30.161
<b>Mandril04</b>	11.799	9.081	9.03393	5.398	5.844	30.272

Entonces, se puede observar que el efecto de la geometría del mandril sobre las propiedades finales de los codos conduce en dirección opuesta dos de las características dimensionales más importantes: la reducción del espesor de pared y la holgura del radio externo. Por un lado, una mejora en el espesor de pared en los codos ayudaría a reducir las piezas de rechazo. Por el otro, una mayor holgura permitiría reducir la longitud de las preformas, ahorrando materia prima y reduciendo costos, pero se tendría que tener especial cuidado de no comprometer el espesor de pared.

# CAPÍTULO 6

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 6.1 Conclusiones

De los resultados obtenidos podemos concluir lo siguiente:

Los ensayos de compresión en caliente son indispensables para obtener el comportamiento esfuerzo-deformación del material a la temperatura de trabajo. Sin embargo, debido a limitaciones en el equipo utilizado para llevar a cabo los ensayos, la magnitud de deformación obtenida no fue suficiente para alcanzar la magnitud de deformación que sufren los codos en planta. Por lo tanto, fue necesario encontrar las propiedades mecánicas del material por medio de la ecuación propuesta por Hollomon, ajustándola a los datos obtenidos en los ensayos. De esta manera se obtuvo la magnitud de deformación necesaria para modelar el proceso.

La simulación de procesos por el método de elementos finitos es una herramienta muy útil para el análisis de procesos de formado en metales. Sin embargo, todo modelo numérico tiene que ser validado mediante la comparación de algún parámetro medido en el proceso real o calculado directamente a partir de éste.



El método de visioelasticidad demuestra ser una opción confiable para la obtención de una aproximación real a la distribución de deformación que adquieren las piezas al ser deformadas en el proceso en planta. Los datos calculados por medio de este método son de vital importancia para la validación del modelo numérico. La exactitud del método de visioelasticidad recae en el grado en que la pieza sea discretizada y en la exactitud en que sean medidas las dimensiones de las celdas.

La traducción del proceso de formado real al modelo numérico lleva consigo simplificaciones. Algunas simplificaciones pueden ser omitidas, aumentando la complejidad del modelo, mientras que otras pueden ser incluidas sin afectar considerablemente la exactitud del modelo. En el caso de estudio, la omisión del coeficiente de fricción en la interfase tubo-mandril, se debe principalmente a que su uso, junto con el escalamiento de masa, proporciona resultados no favorables, sin embargo, el escalamiento de masa es necesario para obtener resultados en períodos de tiempo razonables. Por otro lado, la condición de frontera de simetría reduce el tiempo de cómputo en por lo menos la mitad y no afecta la calidad de los resultados obtenidos.

Los resultados obtenidos de la comparación dimensional y de distribución de deformación probaron que el modelo numérico es representativo del proceso real.

La modificación del modelo numérico con el diseño de mandril original para la prueba de las distintas geometrías del mandril no afectan su validez original, ya que sólo cambian las condiciones geométricas, es decir, el diseño de la herramienta.

Los resultados de la evaluación de los diseños de prueba del mandril muestran una relación inversa entre la longitud del arco externo y el espesor de pared, características de gran importancia en los codos.

Si la prioridad es mantener un espesor de pared mayor en la zona del radio interno, el diseño Mandril01 predice los mejores resultados, obteniendo un espesor de pared mayor al original (Mandril02) y reduciendo la longitud del arco externo. Esto se traduce en un codo con mayor espesor de pared y menos material de exceso, el cual es maquinado en un proceso posterior.

Si la prioridad es ahorrar material y reducir el maquinado final en los codos, el diseño Mandril04 podría utilizarse con preformas mas cortas a la original, ya que utilizando

este diseño aumenta la longitud del arco externo en los codos formados con preformas del tamaño actual. Al utilizar preformas mas cortas se eliminaría el exceso en la longitud del arco. Esta opción representa la fabricación del mismo producto utilizando menos material, pero con un espesor de pared menor al original. Sin embargo, es necesario comprobar esta posibilidad modelando el proceso con preformas mas cortas.

## **6.2 Recomendaciones**

Para trabajos futuros sobre el mismo tema o similares se recomienda usar la metodología descrita en el presente trabajo. En el caso particular del proceso de forja en caliente de codos sin costura, se puede aplicar directamente para el análisis de los distintos tamaños de codos fabricados en planta.

A medida que mayor poder de cómputo este disponible, es importante incluir en el modelo numérico los efectos de la fricción en la interfase tubo-mandril, determinando el coeficiente de fricción por medio de pruebas de compresión de anillos a la temperatura de trabajo. La introducción del coeficiente de fricción requiere de la disminución o eliminación del escalamiento de masa en el modelo.

Por último, se recomienda modelar otros diseños de la herramienta e involucrar otras variables como la longitud de la preforma. Aunque la prueba y error en planta de distintos diseños de mandril puede ser eliminada por medio del análisis por elementos finitos, la prueba y error sigue existiendo en el análisis por computadora. Las nuevas tendencias se inclinan hacia el uso de paquetes computacionales que utilizan métodos de optimización, con los que se puede determinar los parámetros óptimos del proceso sujeto a ciertas condiciones o restricciones. De esta manera la prueba y error se realiza de una manera lógica y automática, que avanza hacia la obtención de las condiciones óptimas del proceso.