UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

PROPUESTA DIDACTICA

"LA MODELACION MATEMATICA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CALCULO DIFERENCIAL

Que para obtener el Grado de
Maestría en la Enseñanza de las Ciencias
Con especialidad en Matemáticas

PRESENTA

Lilia Guadalupe García Figueroa

San Nicolás de los Garza, N. L. Marzo de 2004

MAE

MATEMATICAS

MARZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Propuesta Didáctica

"LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL"

Que para obtener el Grado de
Maestría en la Enseñanza de las Ciencias
Con especialidad en Matemáticas.

Presenta:

Lilia Guadalupe García Figueroa

Ciudad Universita **San Nicolás de los Garza, N.L, a 9 de marzo de 2004**

Propuesta Didáctica

"LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL"

Que para obtener el Grado de
Maestría en la Enseñanza de las Ciencias
Con especialidad en Matemáticas.

Presenta:

Lilia Guadalupe García Figueroa

Asesora: Dra. Olga Lidia Pérez González

A mis padres
Alberto García Tavizón (†)
Guadalupe Figueroa Avendaño (†)
Con infinito agradecimiento, ya que gracias a ellos soy una persona de bien

A mis suegros
Ascensión Urbano Urbano (†)
Esperanza Arévalo Contreras (†)
Por su apoyo incondicional

A mis queridos hermanos
Bella Consuelo
Alberto
Maricela
Oscar
Nelly

A mi asesora
Dra. Olga Lidia Pérez González

Por su valiosa ayuda

A todos mis maestros y compañeros
Por la gran ayuda que me brindaron

A mi esposo
Raymundo

A mis hijos
Raymundo
Carlos Alberto
José Luis

A mis nueras
Aurora María
María de la Luz

A mi nieto
Raymundo Alfonso

Por su gran ayuda, paciencia, comprensión y por el tiempo
que me cedieron
¡Muchas gracias!

RESUMEN

En el proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática es necesario, además, que se desarrollen habilidades y capacidades matemáticas que contribuyan a la comprensión y el avance de las ciencias aplicadas (en ingeniería). Sin el desarrollo de las ciencias básicas no sería posible el avance de las ciencias aplicadas. Ellas desempeñan una función indispensable en la generación de las nuevas tecnologías. Pero el proceso de enseñanza-aprendizaje en lo que se refiere a la enseñanza de la matemática está afectado. Para poder influir positivamente en este sentido, primero es imprescindible sensibilizar a los profesores en la necesidad de un cambio en el desarrollo de las asignaturas de Matemática y, consecuentemente, en la necesidad de aplicar estrategias metodológicas que les permitan, con el mismo presupuesto de tiempo, mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje, dichas estrategias deben contemplar la modelación; pero ocurre que a pesar de que en los últimos años los investigadores en educación matemática han estado dedicando algunos de sus trabajos a la modelación, no existen todavía procedimientos adecuados para la modelación conceptual. El desarrollo de habilidades de modelación es un proceso largo que requiere de un sistema educativo, que proporcione elementos para que los estudiantes desarrollen sus potencialidades de manera tal que le permitan pensar crítica e independientemente. Es importante que se contemplen acciones en este sentido desde la primaria, con un concepto amplio de la modelación, para que en el nivel universitario puedan modelar situaciones necesarias en su carrera, que a la humanidad le ocupó siglos. Por tanto, se afirma la existencia del problema siguiente:

Problema: ¿Cómo concebir una estrategia metodológica que permita a los profesores de matemática contribuir a mejorar el desempeño de los estudiantes universitarios, en la solución de problemas relacionados con su especialidad?. La Disciplina de Matemática

contempla el desarrollo del cálculo diferencial, que es una de las partes de la matemática de mayor aplicación y utilización; por lo que para ejemplificar los resultados del trabajo se escogió esta temática para las funciones reales de una variable real. Por tanto, la presente investigación tiene como **objeto de estudio:** El proceso de enseñanza- aprendizaje en lo que se refiere a los conceptos, operadores y ecuaciones del cálculo diferencial. El problema planteado se puede resolver proporcionando a los profesores herramientas y procedimientos adecuados para la utilización de una estrategia metodológica basada en la modelación, consecuentemente nuestro **campo de acción** es: La utilización de la modelación matemática en el nivel universitario.. **El objetivo de la investigación es:** Determinar una estrategia metodológica que le permita a los profesores utilizar la modelación matemática para el estudio de conceptos, operadores, y ecuaciones diferenciales en el nivel universitario.

INTRODUCCIÓN.

El siglo XX, que recién concluyó revolucionó toda la vida económica, política, social, científica, técnica, cultural, etc. de la humanidad; por tanto, comenzamos el siglo XXI con un reto: ponernos a la altura de los adelantos científico-técnicos y poder asimilar, utilizar y aportar en las nuevas tecnologías que hoy se imponen. La educación debe jugar, en este sentido, un papel fundamental; sin embargo, la educación superior ha tenido cierta lentitud para aceptar los resultados de las ciencias y sobre todo de las ciencias pedagógicas, y ha sido todavía más lenta en sus aportaciones para la rápida asimilación de las nuevas tecnologías. En este sentido resulta muy ilustrativa la reflexión: *"Algunas veces los maestros del siglo XX enseñamos contenidos del siglo XIX, a alumnos que tendrán que sobrevivir en el siglo XXI"*. (Monereo, 2000)

En el proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática es necesario, además, que se desarrollen habilidades y capacidades matemáticas que contribuyan a la comprensión y el avance de las ciencias aplicadas. Sin el desarrollo de las ciencias básicas no sería posible el avance de las ciencias aplicadas. Estas disciplinas elementales resultan decisivas para llevar adelante al país. Ellas desempeñan una función indispensable en la generación de las nuevas tecnologías.

Aunque aprender es un acto total que no puede ser fragmentado, en el capítulo 4 del informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI, presidida por Jacques Delors, (1996), con un objetivo puramente metodológico y para que la educación pueda cumplir el conjunto de misiones que le corresponden en el siglo actual, se señala que ésta debe efectuarse en torno a cuatro aprendizajes estratégicos: *aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser.*

Estos cuatro pilares de la educación no pueden limitarse en el tiempo y el espacio, a una etapa de la vida y a un sólo lugar, es necesario que se complementen y se articulen para garantizar que cada persona durante toda su vida pueda convertir cada uno de sus contextos, en educativo, y que su educación tenga un constante enriquecimiento.

En Álvarez, (1999) se plantea que en el proceso de enseñanza aprendizaje subsisten, entre otras, las deficiencias siguientes:

- No hay una integración entre la formación académica, la laboral y la investigativa.
- Los problemas presentes en la práctica social no son objeto de análisis y punto de partida para desarrollar el proceso.
- Algunos profesores no se sienten responsabilizados, desde el punto de vista docente, con el desarrollo de la actividad laboral.

Se está de acuerdo que a pesar de que se ha trabajado en este sentido estas son deficiencias que aún persisten, en particular cuando éstas se refieren al desarrollo del alumno, a partir de la información del contenido, en cuanto a su preparación como futuro profesional. De forma general estas deficiencias limitan la formación de productores en los distintos niveles educacionales, así como el desarrollo de las capacidades y el talento de los educandos.

La didáctica es la ciencia que estudia, como objeto, el proceso docente-educativo dirigido a resolver el problema de la preparación del hombre para la vida (encargo social); es decir, la formación de un egresado que pueda enfrentarse a un conjunto de situaciones con el propósito de modificarlas, en correspondencia con los valores fundamentales de la misma y apoyándose en las ciencias o ramas del saber que haya dominado en dicho proceso. Las dificultades anteriormente señaladas están presentes en mayor o menor medida en la didáctica de cada una de las ciencias que conforman su perfil profesional. Por tal motivo es importante realizar la pregunta: ¿cuáles son nuestras deficiencias desde el punto de vista de la didáctica de la matemática que impiden que ésta, contribuya con su perfeccionamiento al logro del problema denominado encargo social?

La conjugación de las componentes académicas, laboral e investigativa en la mayoría de las ciencias básicas presenta dificultades, pues no siempre existe claridad de cómo puede contribuir nuestra disciplina en lo que se refiere al carácter laboral e investigativo.

En lo relacionado con que los investigadores y profesores, así como los egresados sean capaces de aplicar con efectividad los métodos matemáticos necesarios, para alcanzar un nivel científico actualizado, en la investigación, en la docencia y en la actividad profesional se puede decir que:

1. Los estudiantes tienen deficiencias en su formación matemática.
2. Generalmente no se logra en la disciplina matemática, que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos adquiridos a la solución de los problemas concretos de la especialidad que estudian, de aquí se desprende que existen dificultades con los aprendizajes, *aprender a hacer*, ya que se presentan dificultades de transferencia de aprendizaje.
3. La enseñanza de la Matemática se realiza por lo general mediante la solución de ejercicios y problemas de cálculo analítico que contribuyen sólo al desarrollo intelectual; luego esta forma de enseñanza imposibilita el desarrollo de las capacidades *aprender a conocer y aprender a hacer*
4. A pesar que actualmente hay rechazo respecto a los métodos de enseñanza mecanicistas que sólo posibilitan los problemas de cálculo analítico, esta situación aún persiste en nuestras clases.

Estos aspectos permiten afirmar que el proceso de enseñanza- aprendizaje en lo que se refiere a la enseñanza de la matemática está afectado. Para poder influir positivamente en este sentido, primero es imprescindible sensibilizar a los profesores en la necesidad de un cambio en el desarrollo de las asignaturas de Matemática y, consecuentemente, en la necesidad de aplicar estrategias metodológicas que les permitan, con el mismo presupuesto de tiempo, mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Las estrategias metodológicas deben contemplar la modelación; pero ocurre que a pesar de que en los últimos años los investigadores en educación matemática han estado dedicando algunos de sus trabajos a la modelación, no existen todavía procedimientos adecuados para la modelación conceptual; y lo que es todavía peor existen posiciones opuestas entre los especialistas de estas disciplinas. Vázquez de Tapia, (1997), plantea que la modelación se aplica a problemas complejos de la realidad que exigen generalmente el uso de matemática muy sofisticada y compleja, por cuya razón este tipo de problemas se resuelven preferiblemente para niveles universitarios y, a veces, en cursos especiales. Biembengut y Hein, (1997), afirman que la modelación matemática puede valer como método de enseñanza aprendizaje de la Matemática en cualquier nivel escolar.

El desarrollo de habilidades de modelación es un proceso largo que requiere de un sistema educativo, que proporcione elementos para que los estudiantes desarrollen sus potencialidades de manera tal que le permitan pensar crítica e independientemente. Es importante que se contemplen acciones en este sentido desde la primaria, con un concepto amplio de la modelación, para que en el nivel universitario puedan modelar situaciones necesarias en su carrera, que a la humanidad le ocupó siglos.

Uno de los principales objetivos de la matemática en la educación superior es la de servir de instrumento de modelación a las más variadas situaciones, pero para el logro de este objetivo se presentan las dificultades siguientes:

1. El concepto de modelo que tienen algunos profesores se limita a los modelos complejos que se ejercitan en los cursos o temas más avanzados como son los de ecuaciones diferenciales. Consecuentemente, se pierden oportunidades de desarrollar habilidades de modelación desde las primeras materias de Matemática.

2. No se dispone de un presupuesto de tiempo adecuado para el desarrollo de habilidades de modelación desde las primeras materias de Matemáticas, y por lo tanto, no hay sistematicidad en esta dirección.

3. Se dedica mucho tiempo al desarrollo de habilidades técnicas en los salones de clases, lo cual puede reducirse haciendo un buen uso de la computación, por ejemplo, utilizando paquetes profesionales (MATHEMATICA, MATLAB, etc.)

4. Están aun muy arraigados en los profesores de matemática métodos de enseñanza-aprendizaje que dan prioridad a la enseñanza sobre el aprendizaje y en los que el estudiante realiza un papel pasivo.
5. No siempre se utilizan en la Matemática procedimientos de modelación que faciliten el desarrollo de diferentes aprendizajes.
6. No siempre se utilizan en otras materias de la carrera los resultados obtenidos en la Matemática en lo relativo a la modelación, siguiendo y ampliando los procedimientos allí estudiados. Por ejemplo, suele ocurrir que en el desarrollo de una asignatura no matemática, se plantee un problema y se diga, sin construirlo, cual es su modelo matemático; y se plantee, sin hallarla, su solución. Entonces a partir de esta solución se saquen conclusiones profundas sobre el problema originalmente planteado. Es de esperar, que con esta forma de proceder, estas conclusiones queden al margen del estudiante medio.
7. No se aplican procedimientos adecuados para el estudio de los conceptos matemáticos, ni se establece relación con otros conceptos cuyo estudio conduce a la definición de los primeros. En muchos casos el estudio de los conceptos matemáticos no pasa de la realización de alguna operación conceptual (definición, generalización, clasificación, etc.)
8. No se estudian los operadores matemáticos como modelos de relaciones entre conceptos de otras materias.

La enseñanza de la Matemática se realiza muchas veces mediante ejercicios y problemas que contribuyen sólo al desarrollo intelectual. Esto es un error, porque una de las funciones principales de la Matemática es la de servir de lenguaje de la ciencia; ya que los problemas de la realidad se traducen al lenguaje matemático (se modelan matemáticamente), se resuelven matemáticamente y después esta solución se expresa en palabras del mundo real. Por otra parte, las necesidades de la ciencia han sido las impulsoras principales del desarrollo de las más variadas teorías matemáticas. En esta dirección Adler (1968) plantea: *"el divorcio entre el pensamiento y la experiencia* *directa priva al primero de cualquier contenido real y lo transforma en una concha vacía de símbolos sin significados."*

Está claro que para la mayoría de las personas tiene muy poca justificación todo aquel aprendizaje que no influya en el aprendizaje futuro de los estudiantes, y aún menos que lo que se enseña y aprende en las aulas ayude muy poco a la solución de las diferentes situaciones que se le presentan en la vida a los estudiantes.

Es conocida entre los profesores de matemática la frase formulada por muchos estudiantes en una clase *"profesor y para qué sirve esto"*, por lo que la poca motivación de muchos alumnos para el aprendizaje de la Matemática tiene una relación directa con las dificultades de sus profesores para explicar por qué se enseña uno u otro tema, y en virtud de ello, para presentar problemas prácticos sencillos que justifiquen su utilidad, desde la enseñanza primaria y secundaria. En este sentido Bassanezi y Bienbengut (1997) plantean que la enseñanza deber estar regida por los intereses y necesidades prácticas de la comunidad sin abusar de ello. *"Aunque su interés no se agote ahí, no es intención hacer una apología de para qué sirve."*

Se ha escrito muy poco sobre qué debe hacerse y, en mucha menor medida, de cómo debe hacerse en la Enseñanza General (primaria, secundaria y preparatoria) para desarrollar habilidades de modelación en los estudiantes. Muy poco se ha hecho en la Enseñanza Universitaria en este sentido y, mucho menos, para utilizar la modelación como estrategia para desarrollar los cuatro aprendizajes planteados por la UNESCO. La gran mayoría de los libros de análisis matemático están dedicados al desarrollo de habilidades de carácter técnico, y están muy distantes de aplicar procedimientos adecuados que permitan a los profesores desarrollar habilidades de modelación en sus estudiantes, pues no pasan de presentar ejemplos de aplicación en una determinada especialidad.

Teniendo en cuenta:

- Los cuatro aprendizajes estratégicos planteados por la UNESCO para el siglo XXI, que también han sido planteados por los educadores más reconocidos de nuestra historia.

- La existencia de un creciente interés por los investigadores en Educación Matemática por todo lo relacionado con la modelación, pero que se ha hecho muy poco por el nivel universitario.
- Que uno de los objetivos fundamentales de la matemática en las carreras universitarias es la de servir de instrumento de modelación en múltiples situaciones que se presentan en otras disciplinas de la carrera y en el ejercicio profesional de sus graduados.
- La falta de desarrollo de habilidades de modelación desde los primeros temas de la Matemática, debido al concepto de modelo muy restringido que generalmente poseen los profesores de Matemática.
- Que hay una demanda de cursos de Matemática que proporcionen el desarrollo de adecuados aprendizajes, y que den procedimientos y herramientas útiles para otras materias y para el trabajo profesional de sus estudiantes.
- La necesidad de aplicar estrategias metodológicas que permitan, con el mismo presupuesto de tiempo, mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje en lo relativo a la modelación
- El importante papel que juega la modelación matemática en cuanto a la integración de las asignaturas, debido a que posibilita la interacción con todas las ciencias en lo relativo al uso del lenguaje, de los conceptos y de los operadores.
- Que los libros de texto de que se disponen no facilitan el desarrollo de habilidades de modelación en los estudiantes, pues no pasan de presentar ejemplos de aplicación en una determinada especialidad.

Se afirma la existencia del problema siguiente:

Problema: ¿Cómo concebir una estrategia metodológica que permita a los profesores de matemática contribuir a mejorar el desempeño de los estudiantes universitarios, en la solución de problemas relacionados con su especialidad?

La Disciplina de Matemática en todas las carreras contempla el desarrollo del cálculo diferencial, que es una de las partes de la matemática de mayor aplicación y utilización en las carreras de ingeniería; por lo que para ejemplificar los resultados del trabajo se escogió esta temática para las funciones reales de una variable real. Por tanto, la presente investigación tiene como **objeto de estudio:**

El proceso de enseñanza- aprendizaje en lo que se refiere a los conceptos, operadores y ecuaciones del cálculo diferencial.

El problema planteado se puede resolver proporcionando a los profesores herramientas y procedimientos adecuados para la utilización de una estrategia metodológica basada en la modelación, consecuentemente nuestro **campo de acción** es:

La utilización de la modelación matemática en el nivel universitario.

El objetivo de la investigación es:

Determinar una estrategia metodológica que le permita a los profesores utilizar la modelación matemática para el estudio de conceptos, operadores, y ecuaciones diferenciales en el nivel universitario.

Este trabajo está dirigido a contribuir a la preparación de los profesores de matemática del Nivel Superior. Las concepciones teóricas que en él se desarrollan, pueden ser utilizadas en el nivel de postgrado para lograr una adecuada formación de los profesores. Se dan en el trabajo suficientes indicaciones metodológicas, para que el profesor pueda llevar las ideas expuestas a sus cursos de Análisis Matemático, con el objetivo de influir en el desarrollo de los estudiantes como futuro profesional.

Durante el proceso de investigación se desarrollaron las **tareas científicas** siguientes:

- Análisis de la situación actual de la modelación matemática en el proceso de enseñanza – aprendizaje.
- Direcciones fundamentales de la Matemática Educativa a partir de la segunda mitad del siglo pasado.

- Características de la bibliografía universitaria que se ha publicado en los últimos diez años.
- Valoración de los aspectos psicopedagógicos y lógicos que fundamentan el trabajo.
- Caracterización de la situación de la modelación en la enseñanza, así como, la situación de la formación de los profesores y del uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza universitaria.
- Determinación de procedimientos para la modelación matemática utilizando conceptos y operadores matemáticos.
- Determinación de una estrategia metodológica que le permita a los profesores utilizar la modelación matemática para el estudio de conceptos, operadores, y ecuaciones diferenciales en las carreras universitarias.

En la ejecución de las tareas científicas de la investigación se utilizaron métodos tanto teóricos como empíricos. Entre los métodos teóricos de investigación se emplearon los siguientes:

- El método histórico-lógico al estudiar y analizar las tendencias principales de la Matemática Educativa en el mundo; particularmente, en lo relacionado con la modelación y la resolución de problemas.
- El método hipotético-deductivo (científico) permitió, a partir de análisis particulares, encontrar regularidades del conocimiento y del contenido matemático que facilitaron la determinación de procedimientos relacionados con la modelación conceptual, de operadores y con problemas de modelación más complejos; y por otra parte, permitió el estudio de conceptos y operadores particulares y la solución de problemas también particulares, mediante la aplicación de los procedimientos generales determinados. Los procesos de modelación llevan implícito la utilización de los métodos de inducción y de deducción.

CAPÍTULO I: SITUACIÓN ACTUAL DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE.

1.1 Direcciones fundamentales de la Matemática Educativa a partir de la segunda mitad del siglo pasado

Durante la década de los años sesenta los currículos de matemática estaban bajo la responsabilidad de matemáticos de renombre. Su objetivo pedagógico era el de poner a disposición de los alumnos un número reducido de herramientas matemáticas potentes, respetando el rigor matemático y basado en la hipótesis: si los alumnos tenían este número reducido de herramientas potentes y generales, entonces ellos podrían aplicarlas en muchas situaciones diferentes. Por ejemplo, en Francia se crearon los Institutos de Investigación en Enseñanza de la Matemática, que desde el punto de vista del aprendizaje tenían una influencia muy fuerte de los psicólogos de la escuela de Piaget, Douaby, (1995).

La Educación Matemática en nuestro país recibió gran influencia de las tendencias de esa época. La gran mayoría de los profesores que tuvieron la responsabilidad de desarrollar las diferentes materias fueron formados con una tendencia hacia lo abstracto. En la Enseñanza General se implantó un método para el estudio de la matemática, que tenía muchas ideas de las imperantes en esa época.

Desde finales de los años sesenta se comenzó a advertir que los cambios realizados con una tendencia hacia lo abstracto, estaban teniendo grandes fallas, pues no se había logrado aumentar la capacidad de los estudiantes. Se volvió entonces a enfatizar en el desarrollo de habilidades para resolver ejercicios y en los algoritmos de las operaciones básicas; pero esto sólo desarrolló una capacidad rutinaria en la cual estaban ausentes la creatividad y la iniciativa. Por ejemplo, los alumnos no tenían éxitos en la solución de problemas que no se ajustaran a los problemas típicos en los que se habían ejercitado. Se observó que los alumnos disponían de un conjunto de reglas rutinarias, pero que no se les había enseñado a razonar y pensar. Los alumnos no estaban capacitados para resolver problemas nuevos que requirieran cierto desarrollo de la intuición, la imaginación y la creatividad y no eran capaces de transferir los conocimientos adquiridos.

A finales de los años setenta en algunos países, fundamentalmente en los Estados Unidos de Norteamérica, se llegó a la conclusión que ni el enfoque de la enseñanza de la matemática dando prioridad a las estructuras abstractas, ni el retorno al dominio de herramientas básicas que le sucedió, habían satisfecho las expectativas que en ellas se habían puesto. Como consecuencia de estos dos fracasos, la enseñanza de la matemática se orientó, en muchos países, a la resolución de problemas. En países como Estados Unidos y Canadá el movimiento de reestructurar el estudio de las matemáticas, explícitamente recomiendan que la resolución de problemas matemáticos debe ser la actividad esencial en el estudio de esta materia, Santos, (1993).

La resolución de problemas es un tema que se encuentra en el centro del debate en el campo de la educación matemática. Podría decirse que todos los currículos que hoy se modifican en el mundo tienen como objetivo incorporar centralmente este aspecto de las matemáticas. Aún más, actualmente muchos grupos de investigadores y educadores fundamentan su trabajo en la idea de que la vía del aprendizaje es la resolución de problemas, Schoenfeld, (1988, 1992 y 1994) y Santos, (1990, 1993, 1994, 1995 y 1996).

En el estudio de la matemática no solamente es necesario que el estudiante aprenda contenidos matemáticos, reglas y fórmulas; si no que también desarrolle habilidades y estrategias que le permitan aplicar y encontrarle sentido en su vida ·a las ideas matemáticas. Es muy importante que los estudiantes propongan y analicen conjeturas, modelen matemáticamente diferentes situaciones prácticas y planteen, ajusten y resuelvan diversos tipos de problemas. En este sentido han surgido grandes movimientos donde se han propuesto líneas generales sobre los fundamentos que deben aprender y las habilidades y estrategias que deben desarrollar los estudiantes de la Enseñanza General (primaria, secundaria y preparatoria). Por ejemplo, ver "National Council of Teachers of Mathematics", (NCTM, 1989, 1991, 1995). Las diferentes estrategias de resolución de problemas han sido estudiadas por Polya, (1982), y por los españoles Masón, (1988), y Guzmán, (1991). Sobre la demostración en la resolución de problemas puede verse Ibáñez y Ortega, (1997).

La modelación matemática y la resolución de problemas están ligados al surgimiento de la matemática; sin embargo, la modelación matemática puede considerarse un elemento importante de los métodos modernos de enseñanza y aprendizaje, tan modernos que todavía no han terminado de crearse todos los procedimientos para el buen desarrollo de habilidades de modelación en los estudiantes. La definición de modelación está estrechamente ligada al concepto de modelo, sobre el que se ha escrito mucho. Según el parecer de Davidov, (sin fecha, p. 313) la definición de modelo más aceptable es la dada por Shtoff, (1966, p. 19): *"Por modelo se entiende un sistema concebido mentalmente o realizado en forma material, que, reflejando o reproduciendo el objeto de la investigación, es capaz de sustituirlo de modo que su estudio nos dé una información sobre dicho objeto".*

En Gordon, 1980, citado por Recarey, (1999) se define un modelo como *"un cuerpo de información, relativo a un medio o sistema con el objetivo de estudiarlo".*

En las dos definiciones anteriores, un modelo tiene como objetivo el estudio de un objeto, un medio o un sistema. Precisamente el propósito del estudio es el que determina la información que se requiere y reúne. Consecuentemente, para un objeto o medio específico se pueden realizar distintos modelos del mismo en correspondencia con la información requerida. Para estudiar cualquier objeto real, por lo general, es más conveniente investigar un modelo del mismo que reproduzca el objeto en un sentido específico.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje puede ocurrir que un mismo educador vaya realizando, de un mismo objeto, diferentes modelos (geométrico, físico, gráfico, analítico, y otros), en la medida que va aumentando la comprensión del objeto por parte de sus alumnos. Un modelo se construye por medio de un proceso de abstracción del objeto real, y debe satisfacer dos requerimientos contrapuestos.

- Debe ser suficientemente simple para que los resultados que se obtengan del mismo, puedan transferirse al objeto, medio o sistema.

- Debe ser lo suficientemente complejo para reflejar lo más fielmente posible la realidad, en el sentido que la mayoría de los resultados del modelo, al transferirse, correspondan a propiedades y resultados del sistema.

Para que los estudiantes desarrollen habilidades en la construcción de modelos, que satisfagan los dos requerimientos anteriores, los profesores deben aplicar procedimientos de modelación que tengan en cuenta estos requerimientos.

En el VI Congreso de Educación Matemática, realizado en 1988, en Budapest, se definió un *"modelo"* como *"una colección de objetos y relaciones seleccionadas para representar y reflejar aspectos de un área extra matemática dada (llamada "realidad")"*. En el artículo, Dunn, (1977), se define un modelo de un fenómeno como una construcción verbal, física o matemática que ilustra, sintetiza, o puede ser usada para analizar uno o más aspectos del fenómeno, y se define modelación matemática como el proceso de construcción de un modelo matemático del fenómeno, de la determinación de la solución del modelo y de la aplicación de la solución al fenómeno. De estas definiciones, queda claro que el concepto de modelo es bastante amplio. Un modelo matemático puede considerarse desde la utilización de la definición de un concepto matemático para la definición de un concepto más cercano a la realidad, hasta aplicaciones más complejas de la matemática. En estas aplicaciones más complejas aparecen modelos conceptuales y se utilizan determinados operadores, que actúan entre las extensiones de dos conceptos matemáticos, para establecer una determinada relación entre conceptos más cercanos a la realidad. Por esta razón, se utiliza en toda la propuesta los términos modelación conceptual y modelación mediante operadores que son casos particulares de la modelación matemática.

En un modelo matemático las magnitudes del sistema o medio que se estudia se modelan mediante variables matemáticas. Muchas de las relaciones entre esas magnitudes tienen un carácter funcional, y por lo tanto, se modelan mediante funciones. Entre algunas de estas funciones existen relaciones determinadas por operadores matemáticos, que reflejan relaciones más complejas que las relaciones funcionales entre magnitudes. Los modelos matemáticos son formas de abstracción científica en la que los rasgos esenciales del objeto real son modelados mediante herramientas matemáticas y requieren de un proceso de creación; ya que no son simples sustitutos de los objetos reales. Estos modelos se obtienen como resultado de una compleja actividad cognitiva, pero son también un medio para facilitar la ejecución de esa actividad.

Con respecto a la modelación como estrategia de enseñanza – aprendizaje existen dos posiciones antagónicas. Un grupo de investigadores, entre ellos Vázquez de Tapia, (1997) considera que ésta se aplica a problemas complejos de la realidad que requieren del uso de matemática muy sofisticada y compleja. Los miembros de otro grupo, de los cuales son representantes importantes Bienbengut y Hein, (1997), consideran que la modelación debe comenzarse desde la enseñanza primaria. Estas ideas, con las cuales se está de acuerdo, las sintetizan estos autores en la afirmación siguiente: *"La modelación matemática puede valer como método de enseñanza aprendizaje de la Matemática en cualquier nivel escolar: de los primeros grados a un curso de post graduación. No hay restricción."* Sin embargo, en los trabajos de estos investigadores no se analizan la necesidad y las ventajas de la modelación en otras materias, lo cual está implícito en el propio proceso de modelación y es una necesidad para la integración de conocimientos.

Con relación al problema que se está tratando, en América Latina ha jugado un papel muy importante en el desarrollo de la Matemática Educativa, el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, México.

1.2 Características de la bibliografía universitaria que se ha publicado en los últimos diez años.

Existen muchos libros escritos para asignaturas de matemática en la universidad. Para nuestro trabajo se han escogido, para hacer referencia a sus características; diez libros publicados en estas direcciones en los últimos diez años por prestigiosas editoriales, y que han sido utilizados como textos por importantes universidades (Howard, 1991; Haaser, 1992; Purcell, 1992; Leithold, 1994; William, 1994; Edwards y Penney, 1995; Larson, 1995; Courant, 1996; Bartle, 1996; Marsden, 1998). Algunas de las características de estos libros que motivaron el trabajo y que no difieren de las características de los libros de texto para la matemática universitaria en general, son los siguientes:

- Énfasis en el desarrollo de habilidades técnicas.
- Falta de un enfoque basado en la intuición y la formación de conceptos alrededor de situaciones concretas.
- Se continúa presentando la enseñanza de los conceptos matemáticos con una motivación puramente científica, lo cual ha estado ocasionando una sofisticación y abstracción de las ideas; y el alejamiento de acciones pedagógicas que contribuyan al desarrollo de habilidades, que permita la aplicación práctica de lo que se aprende en las aulas.
- Autores con un reconocimiento como matemáticos; pero no como investigadores en Educación Matemática.
- Planteamiento de problemas de aplicación generalmente sólo al final de cada capítulo; lo cual indica la falta de estrategias adecuadas para lograr la correcta aplicación de la matemática a la solución de problemas reales.
- La no-utilización de los resultados obtenidos en Educación Matemática en los últimos años, relativos a la modelación y la resolución de problemas, para facilitar el proceso de enseñanza – aprendizaje de esta disciplina.
- Prioridad en la enseñanza y falta de orientación para el desarrollo de aprendizajes.
- Se desarrollan primero las ideas de límite y continuidad, y se utilizan estas ideas para introducir de manera muy abstracta, la derivada y la integral, para después estudiar algunas aplicaciones. Si se tiene en cuenta que el cálculo no surgió con la idea formal del límite, sino con técnicas más intuitivas debidas a grandes físicos y matemáticos basadas en enfoques empíricos; resulta muy difícil esperar que estos libros ayuden al profesor a desarrollar habilidades en sus estudiantes para la utilización de la matemática en la solución de problemas de la vida propiciando que el alumno aprenda, con su ayuda, redescubriendo lo ya conocido.

De todos los libros de cálculo y análisis matemático revisados, sólo uno, escrito por Mochón, (1994), y editado por el Grupo Editorial Iberoamérica, presenta un enfoque diferente para el estudio del cálculo basado en conceptos y aplicaciones. En el prólogo del libro se plantea *"las matemáticas deben presentarse a cualquier nivel usando ilustraciones concretas, y esta es la filosofía que se ha seguido al preparar este libro (debido al tipo de presentación sería ideal que el estudiante tuviera también una preparación inicial en modelación matemática: la representación de situaciones reales por medio de ecuaciones)"*. Este libro constituye una importante contribución a la Educación Matemática relacionada con el desarrollo conceptual y las aplicaciones del cálculo; sin embargo, esta contribución es incompleta porque en el desarrollo conceptual se trabaja fundamentalmente con el paso de la práctica al desarrollo abstracto y en lo relativo a la modelación se da prioridad a la modelación mediante ecuaciones, pero no a la modelación conceptual y de operadores.

1.3 La importancia de la motivación y la transferencia de aprendizajes en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

La motivación.

Si se le pregunta a un docente si forma parte de su trabajo motivar a sus alumnos, la respuesta con seguridad será afirmativa; pero si se le pregunta, ¿cómo?; es muy probable que no sepa contestar correctamente.

Las circunstancias que mueven a los estudiantes a actuar pueden proceder del exterior (motivación extrínseca) o del interior (motivación intrínseca). Cuando un problema de aprendizaje es extrínseco, por lo general, una vez que se resuelve, los estudiantes no sienten necesidad de seguir recordando las materias aprendidas para su solución. La retención, la comprensión y la utilización de estas materias serán mucho menores que cuando se aprenden porque el estudiante desea hacerlo. Si para la solución de un problema fue necesario aprender cierta teoría con el único objetivo de aprobar un examen, una vez aprobado éste no existirá ya la razón para fijar esa teoría. La motivación intrínseca de una persona es una combinación de circunstancias que concuerdan con sus valores y que lo mueven a actuar, puede decirse que son las fuerzas integradoras de la conducta.

Según Carlos Álvarez, (1999), motivar es establecer las relaciones afectivas del alumno con el proceso cognitivo, con la instrucción; es convertir en necesidad del alumno el dominio del contenido; es decir, motivar a un estudiante consiste en conseguir que enriquezca su trabajo con su energía, su personalidad, su constancia y su creatividad. La energía que mueve a las personas, y que constituye la base de la motivación viene de dentro y parte de los valores individuales de cada cual. Cuando una persona desarrolla un estado de tensión resultante de las necesidades no satisfechas, se dice que se siente motivada.

"No es posible graduar hasta qué punto llegarán los alumnos, cuando a cada paso estén tocando que sus progresos son la obra de sus manos; desaparecen los estorbos como por encanto, cuando el dedo de la experiencia les señala a cada instante las conquistas que alcanzan por sí mismos." (De la Luz y Caballero, p.257-258)

Evidentemente, la motivación desempeña un papel fundamental en el aprendizaje. Los estudiantes motivados trabajan enérgicamente, con intención y presentan pocos problemas de disciplina. Si un estudiante resuelve un problema no por las exigencias impuestas por el profesor, sino porque siente placer en resolverlo y porque ha interiorizado su necesidad e importancia para su formación futura como profesional; entonces estará experimentando una verdadera motivación.

Es necesario e importante señalar que en la mayoría de las situaciones no es posible clasificar tan claramente la motivación, puesto que en muchos de los casos depende de una combinación entre el interés personal por el trabajo mismo y determinado interés por ciertos factores extrínsecos. En el caso del proceso de enseñanza-aprendizaje se debe lograr que los factores intrínsecos estén en mayoría. Se debe aclarar que en muchas situaciones del proceso de enseñanza-aprendizaje resulta muy difícil encontrar un motivo intrínseco adecuado; en estos casos siempre es mejor, en lugar de no hacer nada, realizar una motivación extrínseca y si es posible a partir de la misma llegar al interés intrínseco.

En el caso de las Matemáticas, muchas veces los profesores han tratado de problematizar (rutinariamente) el contenido, tratando de establecer las relaciones afectivas con el mismo, y han tenido resultados desconcertantes. En nuestra experiencia, así como las de muchos colegas, la dificultad se presenta por no problematizar el contenido utilizando adecuadamente la modelación como estrategia de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Esta estrategia, cuando se aplica correctamente hace que los problemas sean planteados no solamente por el profesor, sino también por los estudiantes de acuerdo a sus intereses.

La transferencia de aprendizajes.

La transferencia del aprendizaje se produce cuando el aprendizaje de una persona en una situación puede ser utilizado para facilitar e influir en el aprendizaje de otras situaciones. Luego el problema fundamental de la transferencia consiste en determinar en que modo y hasta que nivel influirá la adquisición de capacidades, conocimientos, comprensiones y actitudes en relación con una situación de aprendizaje, en el aprendizaje de otras situaciones. Algunos problemas subordinados de la transferencia consisten en dar respuesta a las preguntas siguientes:

- ¿Cómo le ayuda a una persona su aprendizaje actual para enfrentarse a situaciones futuras de aprendizaje?
- ¿Cómo influye, lo que aprenden los jóvenes en la escuela, en el aprendizaje de lo que se encuentra fuera de ella?

Lo que se aprende en la escuela, sigue todavía contribuyendo muy poco a la resolución de los problemas futuros que se les presentarán a los niños y a los jóvenes; a pesar de que en la actualidad resulta muy difícil justificar cualquier realización de aprendizaje escolar que no pueda ser transferido a aprendizajes futuros de situaciones de la vida. Los maestros y profesores han ido llegando a la conclusión, que una de las finalidades principales de la educación debe ser la de facilitar el aprendizaje fuera de las aulas. Por lo tanto, se puede concluir que existe claridad en la necesidad del desarrollo de aprendizajes que permitan su transferencia a situaciones extraescolares. Surge entonces la pregunta, ¿por qué tienen los estudiantes tantas deficiencias en aplicar los conocimientos adquiridos a la solución de problemas de su vida?. La respuesta a esta pregunta abre un espacio para el mejoramiento de nuestros procedimientos de enseñanza – aprendizaje, de tal manera que la transferencia del aprendizaje escolar a otras situaciones alcance niveles superiores a los que actualmente se han logrado. Es necesario que se supere la idea de que los aprendizajes obtenidos en la escuela deben estar disponibles en el futuro, por la idea más amplia de que se podrá asegurar que existe transferencia de aprendizaje, cuando el individuo pueda aplicar ese aprendizaje a todas las situaciones relacionadas con el mismo, que se le presenten.

De los planteamientos e informes de distintas personalidades, Delors, (1996), se puede asegurar que a escala mundial existe un consenso de que la eficiencia de una escuela depende, principalmente de la cantidad y calidad del potencial de transferencia de aprendizajes de sus estudiantes. Cada vez con más frecuencia en los distintos niveles de enseñanza se están haciendo cambios con este objetivo. Sin embargo, todavía hay mucho que investigar para determinar cuáles son las condiciones que originan una mayor cantidad de transferencia.

La utilización de la modelación como estrategia de enseñanza - aprendizaje ofrece a los profesores extraordinarias oportunidades para crear condiciones que originen transferencias de aprendizajes a diferentes situaciones de la vida.

1.4 Algunas consideraciones acerca de la teoría de Vigotsky.

Las tesis de Vigotsky que a nuestro juicio más han influido en la educación matemática, y que están más relacionadas con nuestro trabajo son: la zona de desarrollo próximo, la formación de los conceptos en el niño y en el adolescente, y el desarrollo de los conceptos científicos.

La zona de desarrollo próximo (ZDP).

Según Vigotsky para establecer una relación entre el desarrollo y las habilidades para el aprendizaje, hay que considerar dos niveles de desarrollo: el desarrollo actual y el desarrollo potencial. La ZDP la define Vigotsky como *"la distancia entre el nivel de desarrollo actual determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de* *un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces"* (Vigotsky, 1978. p. 86) Obsérvese que en esta definición dada por Vigotsky de la ZDP, el énfasis está en la ayuda proveniente de una persona experta. De los planteamientos de Vigotsky se concluye, además, que el entorno social en el cual el niño tiene contacto con conceptos nuevos es determinante. En el campo de la educación matemática los resultados de Vigotsky tienen una importante aplicación en todos los niveles de enseñanza.

En la teoría de Vigotsky, el entorno social en el cual el niño se acerca a conceptos nuevos adquiere un papel crucial. Se considera que el dominio de un concepto nuevo es una consecuencia de la interacción con alguien más competente, y es precisamente esta interacción la que crea la ZDP. Esta zona no está en el niño esperando a que una persona más competente la despierte, sino que se crea, para un tema particular; como consecuencia de las interacciones que se establecen entre el niño y el experto. Vigotsky, (1978) consideraba que *"la instrucción es buena sólo cuando se adelanta al desarrollo. De este modo despierta y da vida a aquellas funciones que están en proceso de maduración en la ZDP"*.

Si se tiene en cuenta que hace alrededor de setenta años que Vigotsky obtuvo sus resultados, y que han ocurrido muchos adelantos en todas las direcciones del saber humano, particularmente en el campo de la computación; es comprensible que muchos investigadores, sin dejar de comprender la importancia de la ayuda de una persona más experta, consideren que puede haber también otros factores que complementan el anterior. Entre estos factores se encuentran, (Ursini, 1996. p. 46):

- Un ambiente estructurado que guíe al niño hacia el uso de elementos nuevos para él, pero accesibles desde su ZDP.
- Retroalimentación impersonal proveniente del material con el cual el individuo interactúa.

Ursini, (1996) plantea que el papel del ambiente para crear una ZDP es muy importante en relación con la instrucción escolar, sobre todo en aquellos grupos con un alto número de alumnos, ya que *"no es siempre fácil para el maestro establecer una relación* *interpersonal con cada uno de ellos y proporcionar a cada quién la retroalimentación."*.

Resultados muy interesantes de dos investigaciones sobre un ambiente Logo pueden verse en Ursini, (1994) y Colín, (1996) Ursini, (1996), plantea que los resultados de esos experimentos sugieren que para provocar el desarrollo de una ZDP, para trabajar con conceptos matemáticos nuevos, es necesario la concurrencia de varios factores.

- Una tarea motivadora que genere niveles de dificultad, tanto en lo individual como en lo colectivo, que impliquen la solicitud de ayuda.
- Un ambiente que ofrezca elementos que permitan resolver la tarea y que estén en la ZDP del niño.
- Un ambiente social que fomente el intercambio de ideas entre los niños.
- Un ambiente social que permita y propicie que los niños soliciten la ayuda del maestro o de un compañero más experto.
- La disposición del maestro de pasar de un transmisor de conocimiento a ser un experto que propicie ayuda oportuna mediante la orientación.

Ursini hace la observación de que para que los ambientes sigan promoviendo el desarrollo de las ZDP de los alumnos es necesario modificarlos conforme va cambiando el desarrollo actual de los alumnos y para ello es necesario verificar periódicamente qué pueden resolver los alumnos sin ayuda. Los factores apuntados por Ursini, en la enseñanza superior, pueden utilizarse con pequeñas modificaciones en este nivel de enseñanza para provocar el desarrollo de una ZDP.

La formación de conceptos en el niño y en el adolescente.

Según Vigotsky, (1964, capítulo IV), el ascenso hasta la formación del concepto se efectúa a través de tres fases básicas, dividida cada una a su vez en varias etapas. En la primera fase la formación de conceptos está en correspondencia con lo que se puede llamar una conglomeración de objetos individuales. La segunda fase en el camino hacia la formación del concepto comprende diferentes variaciones de este tipo de pensamiento que se denominan pensamiento en complejo. Una característica común de estas dos fases es la unificación. Sin embargo, en la formación de un concepto la separación es tan importante como la unión, la síntesis debe ser combinada con el análisis. Para la formación de un concepto es necesario abstraer, separar los elementos, y considerarlos aparte de la totalidad, de la experiencia concreta en la cual están encajados; esta es la característica resumida de la tercera fase. En correspondencia con estas tres fases básicas, distintos especialistas en Educación Matemática, Jungk, (1979) y Ballester, (1992) han hecho amplios estudios del proceso de formación de conceptos matemáticos.

Con relación a la formación de conceptos en el estudiante del nivel universitario todo lo que se ha encontrado está relacionado con la propuesta de acciones para el desarrollo de habilidades lógicas: determinación de acciones esenciales, identificación, comparación, definición, generalización y restricción, Talizina, (1988,1989), Vázquez, (1998) y Santos, N. (1988). Con respecto a la capacidad de generalización puede verse la obra de Davidov, (1981). Un análisis de la teoría de aprendizaje de Galperin que está relacionada con el desarrollo conceptual y que se refiere a los niveles en los que transcurre el desarrollo del pensamiento matemático y la formación, por etapas, de acciones mentales, pueden verse en Jungk, (Conferencia 23, 1979).

De la revisión bibliográfica realizada resulta sorprendente que:

- A pesar que la mayoría de los conceptos que se estudian en la matemática universitaria tienen extensión infinita, que es una característica que los diferencia esencialmente de los conceptos que se estudian en la matemática de los niveles precedentes; no se hayan determinado procedimientos para el estudio de la extensión de estos conceptos.

- No existan procedimientos para utilizar los conceptos matemáticos como modelos de conceptos de otras materias.

El desarrollo de los conceptos científicos.

Vigotsky distingue dos clases de conceptos, los conceptos espontáneos y los conceptos científicos, y su aportación fundamental en este sentido es la explicación de cómo se forman y desarrollan estos conceptos. Él define los conceptos espontáneos como aquellos que surgen de las reflexiones del niño sobre sus experiencias cotidianas; y los científicos como los que se originan en la actividad estructurada y especializada de la instrucción en el aula. Obviamente, los conceptos científicos no necesariamente se refieren a conocimientos relativos a la ciencia. En la actualidad, esta distinción de Vigotsky entre los conceptos espontáneos y los científicos ha sido de interés para muchos investigadores en el campo de la educación matemática. En el artículo de John-Steiner, (1995) se mencionan algunos de estos estudios.

Ambos tipos de conceptos se desarrollan gracias a la interacción social; pero mientras en los conceptos espontáneos esta interacción se produce en un ambiente extraescolar, en los conceptos científicos la interacción se da en la escuela entre maestro y alumno, y es cualitativamente diferente. En este sentido señala Moll, (1992, p.10), que el propósito principal de la interacción maestro – alumno es *"dirigir la atención de los niños hacia los significados y las definiciones de las palabras y hacia la relación sistemática que existe entre ellos, que es lo que constituye un sistema organizado de conocimiento"*.

Las implicaciones para la enseñanza de la matemática universitaria que tiene la teoría de Vigotsky, en lo que respecta a los conceptos espontáneos y científicos, son muy grandes; específicamente, con relación a la modelación conceptual. Las relaciones entre conceptos espontáneos y científicos tienen muchos aspectos comunes con las relaciones que existen entre los conceptos particulares que se le presentan a los estudiantes en diferentes materias, y sus modelos conceptuales matemáticos más abstractos. Según la teoría de Vigotsky, la enseñanza precede al desarrollo y es la que lo propicia; análogamente el desarrollo de los modelos conceptuales matemáticos, precede al de los conceptos particulares que se estudian en otras materias, y sólo después que se estudian éstos modelos matemáticos es que se pueden comprender, con toda profundidad, los particulares. Por otra parte, la necesidad del estudio de esos conceptos particulares de áreas extra matemáticas es la que propicia la necesidad inicial del estudio de los modelos matemáticos conceptuales.

La formación y desarrollo de los conceptos.

La lógica dialéctica establece que la causa objetiva de la formación y desarrollo de los conceptos es el mundo real, y su base material, la práctica histórico-social de los hombres. El hombre utilizó la práctica de contar antes de tener el concepto de número. El concepto de número se formó en la relación práctica de los hombres con una variedad de objetos. La formación de un concepto es el producto de un largo proceso de conocimiento, la expresión concentrada de conocimientos anteriores. Engels, (1964), planteó: *"Para contar hacen falta no sólo objetos contables, enumerables, sino también la capacidad de prescindir, al considerar esos objetos, de todas las demás cualidades que no sean el número, y esta capacidad es resultado de una larga evolución histórica y de experiencia"*. Por esta razón, el conocimiento sensorial y concreto no constituye la fase superior del conocimiento. Kopnin asegura que *"para alcanzar una verdadera concreción, el conocimiento pierde temporalmente su carácter concreto general y se transforma en su contrario: en la abstracción"*. Sin embargo, aunque la abstracción no refleja al objeto en el estado real, su contenido corresponde en un alto grado de aproximación a lo existente en la vida real.

El hombre, en las primeras fases de su desarrollo, no tenía el concepto de número abstracto y el cálculo no estaba vinculado a palabras especiales (los números) sino a ciertos objetos concretos, a caracteres que distinguen un objeto de otro. En la enseñanza de los números y de las operaciones de cálculo en el niño, se utiliza un proceso de modelación conceptual, haciendo corresponder a una diversidad de colecciones con una misma cantidad de objetos, un ente abstracto que representa esa cantidad común y que se denomina número. Por medio de abstracciones el hombre llega a conocer los procesos más profundos y complejos de la naturaleza y de la vida social; y la ciencia es capaz de obtener aquello a lo que no es posible acceder por medio de la contemplación viva. Según Marx, (1952), en general, las abstracciones más universales aparecen cuando el desarrollo alcanza un grado muy elevado y concreto, donde una misma cualidad es común a muchos o a todos los elementos.

Una cuestión fundamental a tener en cuenta en el proceso de enseñanza – aprendizaje es que no todos los conceptos científicos son originados por las necesidades directas de la actividad productiva del hombre (Kopnin, p. 252)

En el caso particular de la matemática, muchos de sus conceptos surgen para satisfacer las necesidades del desarrollo de otras ciencias, y otros se originan por las necesidades internas de la propia matemática.

Tradicionalmente la matemática se ha enseñado partiendo de un concepto matemático sin hacer un proceso anterior de modelación conceptual, y a partir de este concepto se van obteniendo nuevos conceptos. Este proceso de obtención de los nuevos conceptos a partir de los anteriores, puede encontrarse cada vez más distante del fenómeno real que le dio lugar, de aquí que una de las dificultades principales que puede tener el aprendizaje de las matemáticas esté dada, en la lejanía de algunos de sus conceptos de la actividad práctica del hombre. Sin embargo, este proceso de obtención de nuevos conceptos abstractos es una necesidad propia de la matemática, de la cual no se puede prescindir.

El concepto es el reflejo mental, generalizado, de determinados vínculos y relaciones entre objetos y las propiedades que los identifican; pero esto no significa que cada concepto tiene su análogo directo en la naturaleza o en la sociedad. Las necesidades internas del desarrollo de las ciencias crean conceptos que aunque están vinculados y relacionados con el mundo exterior no tienen en él un análogo inmediato. Los conceptos científicos forman un determinado sistema del cual no se puede extraer arbitrariamente un concepto y buscar un objeto de la realidad que le corresponda, ya que éste no se encuentra para todos.

Utilizar la modelación conceptual para obtener los conceptos fundamentales de una teoría matemática, en el sentido de lograr que los estudiantes puedan de forma independiente modelar los conceptos, contribuye a mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática; porque entre otras cosas convierten el contenido en una necesidad interna (motivación intrínseca). Por otra parte, la necesidad del estudio de conceptos abstractos de la matemática es importante vincularla a la solución de problemas prácticos.

El concepto entendido como el reflejo mental generalizado del objeto permite comprender las interrelaciones de dicho objeto. El proceso de abstracción-generalización tiene por objetivo obtener un conjunto de rasgos esenciales a partir de objetos particulares, que cumplan los objetos de una clase más amplia. Un conjunto de propiedades esenciales del objeto pensadas en el concepto constituye el contenido de éste. El contenido es un factor indispensable de todo concepto, no puede existir un concepto carente de contenido, en el que consecuentemente no se conciba propiedad alguna. Otra característica importante de un concepto es su extensión. La extensión de un concepto es la clase (conjunto) de objetos que dicho concepto abarca. La extensión es tan indispensable como su contenido.

La definición científica.

Cuando se define un nuevo concepto matemático, sólo se tiene determinado su contenido y en el mejor de los casos el profesor utiliza una notación para su extensión. El estudio de un concepto en la enseñanza universitaria hay que dirigirlo tanto al contenido como a la extensión. El estudio de la extensión de los conceptos de la matemática universitaria no es posible obviarlo, como algunas veces se hace, porque la mayoría de estos conceptos tienen una extensión infinita, lo que hace imposible conocer la extensión a partir del conocimiento de cada uno de sus elementos. Este hecho exige que se estudien procedimientos para obtener aproximaciones globales cada vez más cercanas a su extensión.

El estudio del contenido de un concepto está muy relacionado con el desarrollo de habilidades lógicas, pues hay que relacionar diferentes colecciones de propiedades con la colección de propiedades que lo forman, mediante el establecimiento de implicaciones (condiciones necesarias, suficientes y, necesarias y suficientes). El estudio de la extensión se puede utilizar para el desarrollo de la intuición y de la creatividad de los estudiantes, ya que permite el planteamiento de conjeturas. El estudio de la Matemática en muchos países ha estado sustentado sobre bases lógicas muy fuertes, y consecuentemente ha dado prioridad al desarrollo de habilidades lógicas en los estudiantes. Todavía el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática sigue siendo deficiente en lo relativo al desarrollo de la intuición y de la creatividad. Algunos profesores, al terminar un tema, construyen mapas conceptuales utilizando fundamentalmente relaciones entre el contenido de diferentes conceptos en forma de proposiciones para establecer un orden jerárquico entre ellos. Sin embargo, no siempre se construyen "mapas de extensiones", que tan importantes son para que los alumnos aprendan a preguntarse a sí mismo, a plantear conjeturas, etc.

1.5 La modelación en la enseñanza general.

Existen diferencias con respecto a la forma en que se estudia la matemática en la Enseñanza General (EG) y en la Enseñanza Universitaria (EU). El objeto de estudio de la matemática en estos dos niveles de enseñanza constituye otra diferencia esencial, ya que los campos numéricos son el objeto de estudio en el nivel medio y medio superior, y en el universitario las funciones; por lo tanto, en la enseñanza general se debe lograr que los estudiantes adquieran un pensamiento numérico, y deben comenzar las acciones para que los estudiantes que continúan estudios universitarios puedan adquirir un pensamiento funcional. Una debilidad de estos dos tipos de enseñanza es la falta de un sistema de acciones que propicien el desarrollo de habilidades de modelación, en concordancia con sus características y diferencias.

Existe una interdependencia entre la modelación y el planteamiento-resolución de problemas que puede utilizarse para desarrollar habilidades en estas dos direcciones. En la enseñanza media , la modelación está vinculada a la solución de problemas. La modelación matemática puede considerarse un elemento importante de los métodos modernos de enseñanza - aprendizaje.

En muchos temas, como por ejemplo, las proporciones, el tanto por ciento, las ecuaciones de primer grado, la geometría, etc., es frecuente encontrar en los textos problemas que requieren una modelación matemática con operaciones elementales. Sin embargo, pensamos que falta todavía mucho por hacer en este sentido, sobre todo, en problemas que modelen situaciones más cercanas a la problemática de la vida. Más delante se presenta un conjunto de problemas relacionados con la EG que tienen como objetivo mostrar como los profesores pueden desarrollar habilidades, en los alumnos, para plantearse ellos mismos estos problemas.

En el artículo Mederos, Martínez y González, (2000, p. 8) se presenta una figura donde muestra la aplicación reiterada al trabajar con los problemas, a eliminar muchas de las deficiencias que se presentan, por no utilizar el planteamiento y la resolución de problemas como una herramienta para la construcción de modelos conceptuales. En lo que sigue, se presenta un resumen de los resultados de varios trabajos relativos a la Geometría en la EG.

La construcción de un modelo geométrico ayuda extraordinariamente a la comprensión y a la solución de muchos problemas. Por otra parte la geometría es fuente de una gran cantidad de problemas matemáticos, y la solución de muchos problemas geométricos conduce a diferentes conceptos de otras partes de la Matemática y a propiedades de éstos.

La importancia de la geometría por su contribución al desarrollo del intelecto, por su marcado carácter formativo y como fuente de problemas ha sido reconocida por especialistas en Educación Matemática de diferentes países: Rizo, (1987); Alsina, (1989); Martínez y Rivaya, (1989); Coruniversitaria, (1998); Barcia, (1999). Sin embargo, existen algunas direcciones en que la geometría de la EG debe ser más utilizada:

- Como fuente de problemas que conducen a conceptos de otras áreas y a propiedades relativas a estos conceptos.
- Como herramienta de articulación de problemas entre diferentes niveles de enseñanza.

La geometría como instrumento de modelación ha sido poco utilizada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática de la EG. Aparece tratada en forma implícita en artículos de revistas dedicadas a la Educación Matemática. En Usiskin, (1975) se presentan modelos geométricos, por medio de isomorfismos, para la adición y la multiplicación de números reales, y para la adición y multiplicación de números complejos; respectivamente. En Ranucci, (1975) se presentan diferentes modelos geométricos utilizando una hélice. Un modelo muy interesante se utiliza para calcular la longitud de la circunferencia, en Jamski, (1978), En los artículos González, (1999) y González y Mederos, (2000), se presentan un conjunto de problemas con el que se ejemplifica como se puede, realizando acciones desde la EG, motivar y facilitar el estudio y la comprensión de los conceptos de suma finita y serie. En la sección dos del segundo de estos artículos se estudian cuatro problemas de cálculo de áreas y longitud de arcos de figuras y arcos elementales, que están desarrollados para mostrar como desde la EG se puede preparar a los estudiantes para que sientan la necesidad de generalizar los conceptos de área y longitud de arco a regiones y arcos más generales, respectivamente. En las secciones 3 y 4 del mencionado artículo se presentan varios problemas de química y de economía, cuya solución se logra utilizando modelos en que intervienen sumas finitas. Siguiendo ideas de Maor, (1977) y Spivak, (1970), se dejan planteadas varias interrogantes cuyas respuestas permiten establecer la relación entre las sumas finitas y las series; y los productos finitos e infinitos.

La búsqueda del límite de una función conduce en muchos casos, a una de las expresiones siguientes

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ \text{o}\ 1^\infty$$

Estas expresiones se llaman indeterminadas, ya que por ellas no se puede concluir si existe o no el límite. La mayor dificultad que los estudiantes del cálculo diferencial encuentran al presentárseles éstas expresiones es precisamente comprender que son formas indeterminadas. Sin embargo, por lo general, en los libros y cursos de esta asignatura se dedica mayor tiempo y atención a la demostración de la existencia o no del límite; y en el caso que éste exista al estudio de un método para su determinación. La geometría puede utilizarse como una vía adicional para hacer comprender el carácter indeterminado de las cuatro primeras expresiones. En los trabajos Gonzáles, (1999) y Mederos y González, (2000), se muestra como a partir de figuras geométricas sencillas, y propiedades de los triángulos y del círculo se puede probar el carácter indeterminado de las cuatro primeras expresiones. Varios de los problemas geométricos presentados en este artículo pueden considerarse modelos geométricos sencillos que facilitan la comprensión del carácter indeterminado de las referidas expresiones. Problemas geométricos con un nivel de dificultad mayor que los presentados en estos artículos, pueden verse en Aramanovich, (1989) y Apóstol, (sin año). Este tipo de problemas puede indicarse a los estudiantes de la EU cuando estén dando el límite y aprovechar así los conocimientos de geometría que traen de la EG.

En los artículos Maor, (1977); Lauder, (1977); Skidell, (1977); Skidell y Blum, (1977); Garfunkel y Plotkin, (1973) se presentan diferentes modelos geométricos relacionados con diferentes tipos de medias de dos y tres números positivos. En el artículo Mederos y Martínez, (1999) se muestra como a partir de problemas geométricos sencillos es posible llegar al concepto de media de dos y tres números reales positivos, y se motiva el estudio de diferentes problemas algebraicos relacionados con dichas medias. En este artículo se presenta una amplia cadena de problemas relacionados con las medias, que puede comenzar a plantearse desde la secundaria básica, llegar hasta el cálculo diferencial, y estudiar aquí una clase infinita de medias para n números reales positivos.

1.6 La modelación matemática y la formación de los profesores en la enseñanza universitaria.

La modelación matemática como estrategia de enseñanza aprendizaje, aún en las carreras universitarias, se utiliza muy poco. En realidad no se aplica tal estrategia. Los estudiantes comienzan a relacionarse con la modelación, fundamentalmente, al tratar de dar solución a problemas que pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales. Aún en estos casos se da prioridad al desarrollo de habilidades técnicas relacionadas con la determinación de la solución del modelo, y no con los procesos de modelación y de transferencia de resultados que tan necesarios son para los estudiantes de muchas carreras universitarias.

La modelación ha tenido un extraordinario desarrollo como disciplina matemática; pero su utilización, como un elemento importante del proceso de enseñanza-aprendizaje de diferentes materias, está todavía muy distante de lo que pudiera ser. Sigue utilizándose la modelación sobre todo para la solución de problemas complejos, se utiliza muy poco la modelación conceptual como un medio importante para la comprensión de conceptos de otras materias, y para determinar la esencia de los mismos. La modelación de relaciones entre conceptos, mediante funciones y operadores se hace, por lo general, sin seguir procedimientos adecuados.

La formación de los profesores.

En estos momentos, corresponde a los maestros, ser consecuentes con la cultura y adelantos actuales, y cambiar las formas de enseñanza-aprendizaje de manera tal que se logre la preparación de nuestros alumnos para enfrentar los retos del siglo XXI. El examen del papel único que desempeñan los maestros en la cultura constituye un prefacio necesario a la investigación entre la teoría del aprendizaje y las prácticas de la enseñanza.

Muchas personas estarán probablemente de acuerdo en que una de las principales funciones de los maestros es la de preservar, mediante su transmisión a los jóvenes, la parte de la cultura que se considera buena. Sin embargo, la realización de esta tarea, sólo hace que la educación sea una fuerza sumamente conservadora. La enseñanza que se limita a conservar una cultura es apropiada para una cultura estática, pero no para una cultura dinámica, de cambios rápidos, Por consiguiente, en una cultura de cambios rápidos, la enseñanza debe funcionar en relación con los cambios, de tal modo que se logre que las innovaciones culturales sean siempre culturalmente provechosas. Todo maestro enseñará las actitudes, los valores y los conocimientos, que harán que nuevas generaciones se formen integralmente y puedan dar cumplimiento a las tareas y responsabilidades que se le presenten como egresados. Debe desarrollar acciones para aplicar y fomentar ideas hacia las cuales se desarrollarán resistencias, con el fin de alcanzar sus metas.

En Delors, (1996, p. 160), se plantea que a la universidad se atribuyen cuatro funciones esenciales:

- La preparación para la investigación y para la enseñanza.
- La oferta de tipos de formación muy especializados y adaptados a las necesidades de la vida económica y social.

- La apertura a todos para responder a múltiples aspectos de lo que llamamos educación permanente.
- La cooperación internacional.

En una época en que el volumen de conocimientos e informaciones crece exponencialmente, se está exigiendo, además, a las instituciones de enseñanza superior que atiendan las necesidades de educación de estudiantes cada año más numerosos y variados. A escala mundial las matrículas pasaron de 28 millones de alumnos en 1970 a más de 60 millones en 1996.

La importancia del papel que cumple el personal docente como agente de cambio de las misiones tradicionales a las nuevas de la enseñanza superior, para que la universidad pueda llevar a cabo las funciones que se le atribuyen, nunca ha sido tan evidente como hoy. Thompson, (1995) plantea: *"Para mejorar la calidad de la educación hay que empezar por mejorar la contratación, la formación, la situación social y las condiciones de trabajo del personal docente, porque éste no podrá responder a lo que de él se espera si no posee los conocimientos y la competencia, las cualidades personales, las posibilidades profesionales y la motivación que se requieren".*

En Delors, (1996, p. 149), se señala: *"La enseñanza superior está en crisis desde hace una decena de años en gran parte del mundo en desarrollo. Las políticas de ajuste estructural y la inestabilidad política han cargado de dudas el presupuesto de los establecimientos. El desempleo de los titulados y el éxodo de competencias han acabado con la confianza que se depositaba en la enseñanza superior".*

La formación de profesores es uno de los aspectos más descuidados de los sistemas educativos en América Latina. Se proponen y realizan acciones adecuadas para renovar planes de estudio, para mejorar la organización escolar, para ajustar los sistemas evaluativos, etc.; pero la formación de docentes presenta muchas dificultades, especialmente de los profesores de la matemática universitaria.

Hay profesores con una gran experiencia docente, que se formaron aplicando principios pedagógicos diferentes a los que exigen los programas que actualmente desarrollan. Una recomendación de la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), citada en el editorial del número 1 del volumen 8 de la revista Educación Matemática, relacionada con esta dificultad es la siguiente: *"Los futuros profesores deberán ser enseñados en forma parecida a como ellos habrán de enseñar: explorando, elaborando conjeturas, comunicándose, razonado y todo lo demás."*

- Existe una población importante de profesores de las diferentes materias de la Matemática en las diferentes carreras universitarias que son graduados de Licenciatura en Matemática, carrera que los forma fundamentalmente como investigadores y en cuyo currículo no aparecen asignaturas sobre Educación Matemática. Generalmente estos profesores tienden a enfatizar la necesidad de conocer profundamente las asignaturas que enseñan, dejando a un lado o minimizando los problemas de la Educación. Es usual oír en boca de estos profesores la afirmación *"para enseñar matemática lo que hay que saber es mucha matemática"*.
- Otra población de profesores no menos importante, está constituida por egresados de universidades pedagógicas que han sido formados para impartir la docencia en otros niveles de enseñanza. A diferencia del grupo anterior estos profesores tienen una adecuada formación pedagógica; pero tienen que completar sus conocimientos matemáticos a partir de un esfuerzo personal e individual para desarrollar la enseñanza de la matemática en carreras de ciencias y tecnología.
- Un tercer grupo de profesores, no menos numeroso, está formado por graduados de otras carreras y tienen una formación ajena a la docencia; por ejemplo, es frecuente en muchas carreras de ingeniería que las asignaturas de Matemática las desarrollen ingenieros. Para este grupo la situación es todavía peor, porque no tienen conocimientos profundos ni de matemática, ni de Educación Matemática. En Hernández, (1997) se presentan los resultados del seguimiento en que fueron realizados avances en el conocimiento de las matemáticas de estudiantes de la Maestria en Docencia de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Querétaro, cuya formación profesional no es matemática: *"dos características de gran parte de los profesores de la matemática universitaria, son no tener una buena experiencia en la modelación matemática y solución de problemas relacionados con la carrera*

en la cual desarrolla docencia, y desconocimiento de los programas de matemática y de como se enseña esta disciplina en otros niveles diferente al nivel universitario". En este trabajo de Hernández se recomienda que la formación de los profesores de matemática debe proporcionar elementos que faciliten la autoformación, el estudio de nuevos contenidos y la profundización de los que ya poseen, utilizando las posibilidades didácticas de los contenidos matemáticos para el logro de determinados objetivos educativos, debe prestar atención a otros campos de conocimientos, como por ejemplo, la pedagogía, la psicología, la sociología, la comunicación, la neurolinguística; pero por sobre todo, a la Educación Matemática; y debe también proporcionar procedimientos que le permitan desarrollar la matemática que realmente necesitan los estudiantes de cada carrera universitaria.

La adecuada formación de los maestros de matemáticas, podría contribuir notablemente a:

- Reducir los índices de deserción y reprobación.
- Incrementar la matrícula en las carreras de ciencia y tecnología.
- Eliminar la pregunta de los estudiantes: ¿Para qué me sirve esto que estamos dando?

Mucho se ha investigado en relación con la inclusión de técnicas adecuadas de resolución de problemas en los planes de formación del personal docente de todos los niveles de enseñanza: Roldán y otros, (1996); Blanco, (1996); Block y otros, (1990 y 1991); Dávila y Martínez, (1989). Sin embargo, poco se ha investigado sobre la inclusión de la modelación en los planes de formación de los profesores de matemática. En el editorial del Vol. 8, No. 1 de la revista Educación Matemática, ya citado, se plantea: *"el que los docentes aprendan matemáticas a través de la resolución de problemas no es condición suficiente para garantizar una buena actuación en el aula vinculada a este enfoque"*; y se llega a la conclusión, con la cual se está de acuerdo, siguiente: *"El trabajo de formación va mucho más allá y tiene que ver, entre otras cosas, con trabajar en la dirección de lograr: la transferencia de los conocimientos que se adquieren en las instancias formadoras y un control adecuado de los procesos de resolución de problemas tal como se dan en el grupo escolar que se atiende."*

Sobre el uso de nuevas tecnologías.

El uso de las nuevas tecnologías (NT) eleva la calidad del proceso de enseñanza – aprendizaje; pues no es posible enseñar la enorme cantidad de conocimientos que existe en relación con una especialidad dada, porque además hace falta enseñar: la esencia de los fenómenos que se estudian, la aplicación práctica de los conceptos generales, a localizar la información, a utilizar los conocimientos en el aprendizaje de otros conocimientos, etc. Para profundizar sobre estos aspectos puede verse Cabiella, (1997).

En relación con la preparación de los profesores existen todavía algunas deficiencias que obstaculizan un adecuado uso de estas herramientas. En una conferencia dictada por Vicente, (2001) se plantearon algunos aspectos que limitan el uso de las NT entre las cuales podemos citar:

- La tradición oral e impresa en la que tiende a desenvolverse nuestra cultura universitaria.
- El papel que suele jugar el profesor como transmisor de información.
- La lentitud con que en este nivel educativo tienden a introducirse los cambios y las innovaciones.
- La tendencia, por lo general, a considerar estos estudios dentro de una modalidad presencial.

La utilización de paquetes profesionales, sistemáticamente, en los cursos de la Matemática permite reducir el tiempo que se dedica al desarrollo de habilidades relacionadas con el dominio de técnicas matemáticas; y utilizar ese tiempo para desarrollar regularmente habilidades de modelación. Por otra parte, si los profesores de matemática tuviesen un dominio adecuado de las nuevas tecnologías, pudieran contribuir desde la propia matemática a que se utilicen estas técnicas en otras disciplinas, presentando los resultados matemáticos de forma tal que faciliten el posterior uso de esa tecnología.

CAPITULO II. LA MODELACIÓN CONCEPTUAL Y LA MODELACIÓN DE OPERADORES.

En este capítulo se muestran los procedimientos que conforman una estrategia metodológica sobre la utilización de la modelación matemática en la disciplina de Análisis Matemático para las carreras de ingeniería. La estrategia metodológica está dirigida a la preparación de los profesores, con el objetivo de que ellos influyan en sus estudiantes para lograr un mejor desempeño de estos, en la solución de los problemas de su perfil profesional. Como estrategia metodológica esta forma parte del aparato instructivo de la metodología de esta ciencia y responde a las interrogantes: ¿por qué es necesaria?, ¿en qué consiste?, ¿qué contenidos trata?, ¿cómo se aplica?, ¿qué objetivos pretende?, ¿cuándo se aplica?, ¿cuáles son sus ventajas pedagógicas? y ¿qué resultados se espera de su aplicación?. Sólo se dan algunas indicaciones con respecto a la evaluación pues la misma no está dirigida directamente a los estudiantes, pero como es imposible pensar en la formación de los profesores sin tener en cuenta a los estudiantes, se han dado algunas sugerencias generales al respecto y dejamos libertad a que el profesor pueda tomar las decisiones según sean las características de la especialidad de que se trate.

Diferentes estudios acerca de la búsqueda de representaciones de un concepto y sobre el paso de una representación (modelo) a otra, de un concepto matemático se han realizado por Duval, (1988), Zimmermann y Cuninhan, (1991) y Hitt, (1995). No se ha encontrado ningún procedimiento para utilizar un concepto matemático como modelo de diferentes conceptos de otras áreas, que permita estudiar estos últimos conceptos mediante el estudio previo del concepto matemático y la transferencia después de los conocimientos obtenidos de ese estudio.

2.1 Sobre la modelación conceptual.

Según Vigotsky, (1978), los métodos tradicionales para el estudio de los conceptos se dividen en dos grupos: los métodos utilizados en el estudio de la abstracción y los llamados de definición. El primer grupo comprende métodos utilizados en el estudio de la abstracción que están relacionados con el proceso psíquico que conduce a la formación de conceptos, mediante los cuales se determinan los rasgos esenciales, abstrayéndolos de los otros con los que se fusionan en las percepciones. Los métodos de este primer grupo descuidan el papel desempeñado por el símbolo (la palabra) en la formación del concepto. Los métodos del segundo grupo se utilizan para investigar los contenidos ya formados por medio de la definición verbal de estos. Este método tiene, entre otros, el inconveniente que se utiliza con el producto acabado de la formación del concepto, descuidando la dinámica y el desarrollo del proceso mismo.

Un ejemplo de utilización de un método puro de definición es el estudio del concepto de límite. Por lo general, se comienza el estudio de este concepto presentando situaciones a los estudiantes que no son suficientes para que se comprenda la necesidad de su definición; y sin la preparación necesaria se da la definición de dicho concepto y se comienza el estudio de sus propiedades. Con esta forma de proceder sólo se logra que el estudiante pueda repetir de memoria la definición y que calcule de manera rutinaria el límite de funciones específicas. Consecuentemente los estudiantes no son capaces de utilizar este concepto en situaciones nuevas, ni aun con ayuda del profesor; por ejemplo, no son capaces de modelar utilizando este concepto fenómenos que lo requieren.

Vigotsky era partidario de la utilización de un método que combinara métodos de los dos grupos. Este método sugerido por Vigotsky tiene una extraordinaria vigencia en la enseñanza universitaria; ya que, por ejemplo, el estudio de conceptos de diferentes áreas del conocimiento humano conduce a la definición de conceptos matemáticos, como consecuencia de un proceso de abstracción que requiere la modelación matemática de un conjunto de sus rasgos esenciales.

Este conjunto de modelos de rasgos esenciales constituye un conjunto de propiedades que pueden utilizarse como el contenido de un concepto matemático que, pasa a ser un modelo conceptual de ese conjunto de conceptos de otras áreas, que hasta ese momento, aparentemente estaban distantes y sin relación.

2.2 Un procedimiento para la modelación conceptual.

En el caso del análisis matemático de funciones reales de una variable real, hay cuatro conceptos fundamentales a los que es muy importante aplicar este procedimiento; ellos son los conceptos de límite, derivada, diferencial e integral definida.

El procedimiento consiste en los cuatro pasos siguientes:

1. Obtener un grupo de problemas de diferentes ciencias que para su definición se necesite definir un concepto matemático. Destacar cuáles son los rasgos esenciales o comunes a cada problema y por un proceso de abstracción-generalización definir el concepto matemático.

2. Definir los conceptos de las otras áreas, ahora utilizando el concepto matemático ya definido.

3. Hacer un estudio del concepto matemático definido, para lo cual se necesita un procedimiento para el profesor, de tal manera que pueda conocer éste de manera profunda.

4. Transferir los conocimientos acerca del estudio realizado del concepto matemático a las demás materias que sean de interés a de acuerdo a la carrera que se estudia. El estudio de esos conceptos particulares en una carrera específica se completa con el aporte de otras materias, como por ejemplo, la Física.

La figura 11 sintetiza lo antes señalado.

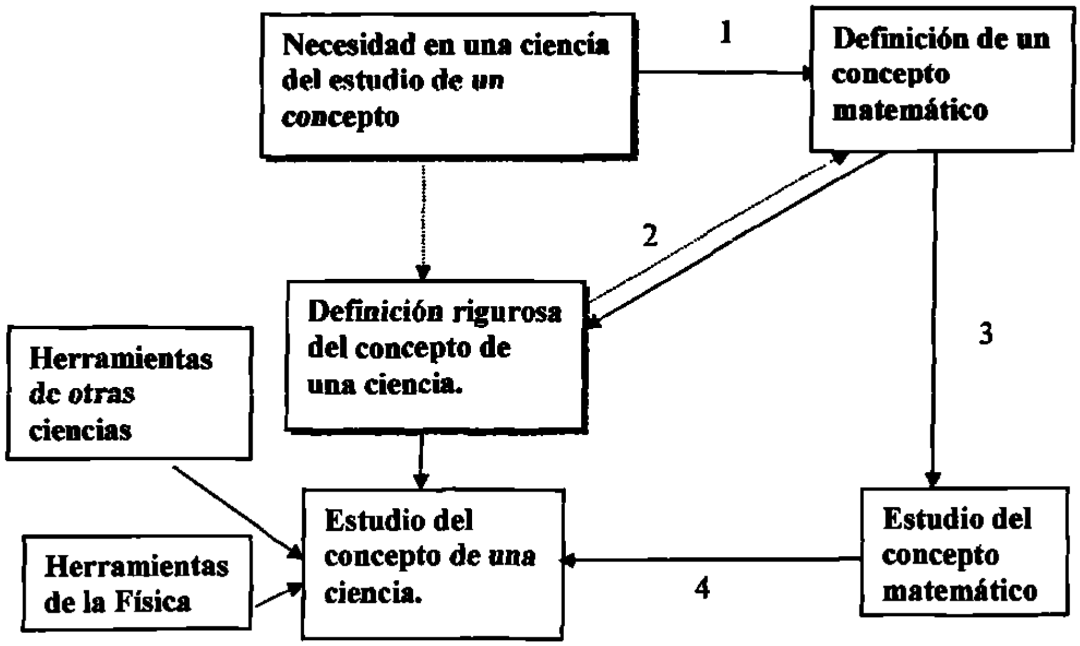

Fig. 1

Explicación de los dos primeros pasos del procedimiento.

Los pasos (1) y (2) de la figura 1 están en correspondencia con la forma en que deben definirse muchos de los conceptos que se estudian en las carreras universitarias. Con frecuencia surge la necesidad de estudiar un concepto en una determinada materia y su proceso de formación conduce a la definición y estudio de un concepto matemático. Sólo después que se ha estudiado y definido el concepto matemático es posible estudiar y definir el concepto de la mencionada materia. Este proceso puede considerarse la modelación del concepto de esta materia. En el paso (1) se desarrolla un proceso de *abstracciones* que corresponde fundamentalmente al primer grupo de los métodos tradicionales señalados por Vigotsky. El paso (2) que utiliza el concepto matemático para definir el concepto de partida, corresponde principalmente al segundo grupo. En los pasos (1) y (2) se *combinan* ambos métodos.

A continuación se ejemplifica este proceso general para el concepto particular de derivada.

2.3 Ejemplo para el estudio del concepto de derivada.

En los artículos Mederos y González, (1998,c y 1999) se realiza el estudio del concepto de derivada, a partir de la necesidad del estudio y la definición de conceptos de otras áreas. Los tres primeros recuadros de la figura 2 sintetizan el proceso de abstracción que permite extraer los rasgos esenciales de conceptos particulares, y posteriormente su modelación matemática.

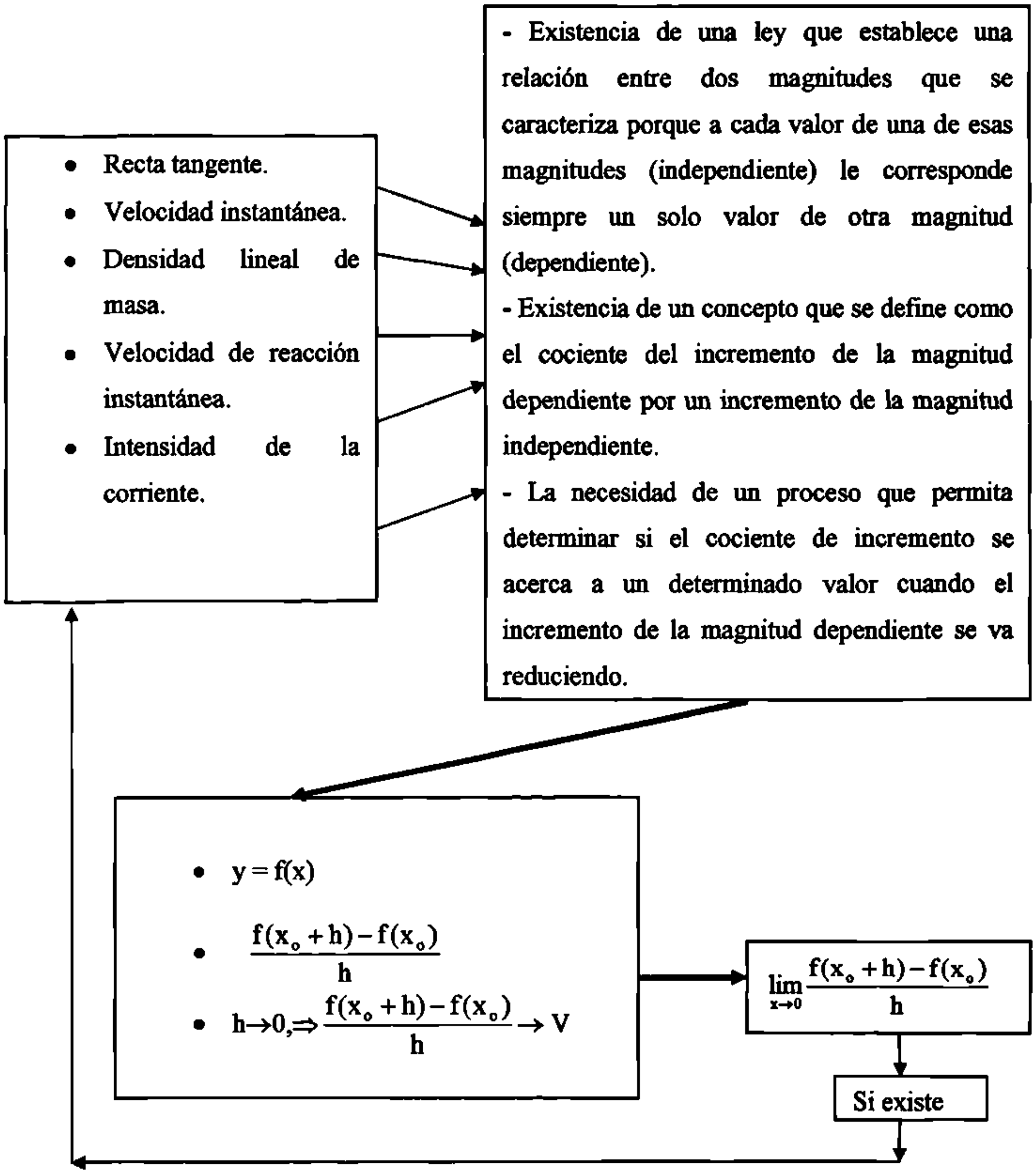

Fig. 2

El último recuadro de esa figura sintetiza el proceso de generalización que permite llegar al concepto de derivada.

Ahora se está en condiciones de realizar el paso 2 para el caso particular de los problemas que se tomaron para llegar al concepto de derivada.

II.- Observaciones metodológicas.

1. El proceso de abstracción (que corresponde al paso 1) se simplifica extraordinariamente en la práctica docente por los profesores; porque parten de un sólo problema (casi siempre el de la pendiente de la recta tangente), con el objetivo de motivar la definición del concepto de derivada. Una vez que se ha definido el concepto de derivada se pasa a interpretar este concepto como otros conceptos de su carrera (la interpretación de la derivada como velocidad instantánea, etc.). Esta simplificación tiene las dificultades siguientes:
   - No es suficiente el análisis de un sólo problema para que el estudiante comprenda que los rasgos que se han obtenido son comunes a otros problemas prácticos.
   - Se plantea como necesidad central el estudio del concepto abstracto de derivada y no el de conceptos de su especialidad por medio de la derivada.
   - No es posible utilizar la derivada para interpretar conceptos de otras áreas que necesitan el concepto de derivada para su comprensión y definición.
2. Es necesario que los estudiantes hayan alcanzado un desarrollo adecuado de las habilidades de modelación funcional, pues en caso contrario habrá que estar desarrollando muchas habilidades nuevas simultáneamente.
3. De esta manera se define la derivada como un caso particular del concepto de límite, que se ha estudiado desde un punto de vista matemático, sin que los alumnos hayan sentido la necesidad de este estudio.
4. Si se quiere aplicar una estrategia de enseñanza – aprendizaje en el estudio del cálculo diferencial que tenga como uno de sus objetivos principales el desarrollo de habilidades de modelación en los estudiantes; entonces después que se haya desarrollado el tema de funciones utilizando la referida estrategia, debe pasarse al planteamiento de problemas conceptuales del tipo que aparecen en la figura 2. Seguidamente se debe utilizar la determinación de los tres rasgos anteriores y su modelación, especialmente el tercero, para motivar el estudio del concepto de

límite funcional. Este es un concepto muy abstracto cuyo aprendizaje resulta muy difícil para los estudiantes y es necesario que ellos sientan la necesidad de su estudio.

Un procedimiento para el estudio de los conceptos matemáticos.

Bajo este título se explica el paso 3 de la figura 1, en el cual hay que realizar un estudio del concepto matemático, también por un proceso de abstracción y empleando los métodos usuales de la matemática. Este estudio estará en correspondencia con las necesidades de la especialidad donde se va a utilizar y de las necesidades internas de la matemática. Sin embargo, para lograr que el profesor pueda realizar un análisis de estas necesidades, debe conocer a profundidad el concepto matemático, cuestión esta que no siempre se cumple porque no se dispone de procedimientos adecuados. Por otra parte, independientemente de que determinados conocimientos no se utilicen en la especialidad que nos ocupe, el profesor tiene que conocer, en relación con la materia que va a impartir, mucho más que las necesidades planteadas.

2.3 Recomendaciones y observaciones útiles para la aplicación del procedimiento para el estudio de los conceptos matemáticos.

Inmediatamente después de definido un concepto en una materia de matemática no es posible, en general, aplicar todos los pasos de este procedimiento. Esto puede hacerse en el transcurso de todas las materias de matemáticas y otras materias.

1. El objetivo principal es ampliar la colección de los elementos conocidos de la extensión del concepto en estudio. La aplicación de esto va sugiriendo diferentes conjeturas que permiten dar originalidad y creatividad al estudio de los conceptos cuyas extensiones se relacionan. Luego esto se puede utilizar en el desarrollo de la intuición y creatividad de los estudiantes.
2. En la aplicación del procedimiento al estudio de un concepto pueden ampliarse o reducirse los pasos del mismo de acuerdo con las particularidades del concepto, del tiempo de que se disponga, del nivel con que se desarrolle la materia, etc.
3. Al mismo tiempo que se aplique, se deben comenzar la construcción de mapas de las extensiones y del contenido de los conceptos de cada tema.

4. Mucho se ha hablado y escrito sobre lo inadecuado de una educación estandarizada como la que actualmente se desarrolla en la mayoría de las universidades del mundo. Este procedimiento es también una herramienta importante para la atención diferenciada de los estudiantes en lo relativo a sus niveles de comprensión, lo cual pocas veces se hace en la enseñanza universitaria.
5. La utilización del método en el trabajo docente, así como en el trabajo investigativo y para la escritura de libros, artículos, etc.; constituye una poderosa herramienta para dar originalidad al resultado final en estas direcciones.
6. El estudio de los conceptos matemáticos no puede reducirse a lo que se hace en una materia, su conocimiento hay que ampliarlo en todas las materias de matemática, ya que todas contribuyen a la ampliación de algunas de sus propiedades. El procedimiento tiene en cuenta este hecho y prepara en este sentido a los estudiantes, profesores e investigadores que lo aplican.

2.4 La aplicación del procedimiento para el estudio de los conceptos matemáticos a la construcción de mapas de extensiones.

El estudio de la matemática en muchos países ha estado sustentado sobre bases lógicas muy fuertes y, por lo tanto, ha dado prioridad al desarrollo de habilidades lógicas en los estudiantes. Todavía el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática sigue siendo muy deficiente en lo relativo al desarrollo de la intuición y de la creatividad. Por ejemplo, en los cursos de matemáticas de la enseñanza universitaria, se estudia bastante bien el contenido de los conceptos; lo que se hace mediante el establecimiento de condiciones de carácter lógico. Algunos profesores, al terminar un tema, construyen los llamados mapas conceptuales; utilizando las relaciones entre el contenido de diferentes conceptos en forma de proposiciones, para establecer un orden jerárquico entre ellos.

El proceso de construcción de un mapa de extensiones hace que los estudiantes desarrollen muchas habilidades relacionadas con el desarrollo de la intuición, la creatividad y, distintos tipos de aprendizajes. A continuación se plantea un conjunto de afirmaciones útiles para la construcción de mapas de extensiones

1. Un mapa de extensiones es un recurso visual para representar las relaciones, conjuntistas, algebraicas, métricas, topológicas, etc., entre las extensiones de diferentes conceptos que han sido definidos a partir de un mismo concepto, o entre los que existe alguna relación de dependencia. Los alumnos, especialmente los visuales, sienten especial motivación por la construcción de estos mapas y logran expresar y sintetizar gráficamente mucha información importante.
2. Los alumnos que emprenden el trazado de un mapa de extensiones se pueden guiar para que sientan la necesidad de enunciar proposiciones y de construir contraejemplos. Para muchos autores la búsqueda de contraejemplos es un ejercicio muy importante para el desarrollo de las capacidades creativas. En (Ibáñez y Ortega, 1997) se plantea: *"los contraejemplos juegan un papel en la creación matemática"*. En Lakatos, 1981, referido por Ibáñez y Ortega, se afirma: *"La refutación nos hace aprender, la corroboración nos hace olvidar."* Téngase presente que el método usual de refutar una proposición universal es mediante la construcción de un contraejemplo.
3. Los mapas de extensiones tienen por objetivo representar mediante un gráfico diferentes relaciones entre las extensiones de diferentes conceptos.
4. Los mapas de extensiones permiten guardar en la memoria información global, en forma visual, de las relaciones entre las extensiones de un conjunto de conceptos determinado.
5. La información que brinda un buen mapa de extensiones es mucho más amplia que la del correspondiente mapa de contenidos. Permite incluso que se sienta la necesidad de definir nuevos conceptos que no han sido estudiados en una materia o que no han surgido en una investigación.
6. Cuando se trabaja con un conjunto de conceptos cuyas extensiones tienen determinadas estructuras, entonces este conjunto de conceptos puede tener desde el punto de vista conjuntista un mapa y desde el punto de vista de una estructura, otro mapa de extensiones.

7. El dibujo de mapas de extensiones ejercita a los estudiantes en la realización de preguntas, así como en el planteamiento de proposiciones.
8. Con el trazado de este tipo de mapas los estudiantes ejercitan habilidades tales como percibir, tener curiosidad e intuir.
9. Los estudiantes aprenden a tomar decisiones y a plantear y resolver problemas. Aprenden las relaciones y la interdependencia de muchos conceptos.

En toda disciplina existen varios conceptos que juegan un papel importante para el desarrollo de las mismas. Relacionados con cada uno de esos conceptos hay colecciones de conceptos que se han definido a partir de un mismo concepto. Muy importante para la comprensión de esos conceptos centrales es la realización de mapas de extensiones y de contenido.

2.5 Consideraciones importantes sobre la definición.

En los libros de lógica formal al explicar la definición científica se analizan los errores que con más frecuencia pueden cometerse al aplicar ésta en cualquier área del saber. En el caso particular de la matemática la necesidad del estudio y la definición de un concepto, surge como resultado de las necesidades del estudio y definición de conceptos de áreas extra-matemáticas o del desarrollo de la propia teoría matemática.

Para entender la importancia de la definición en matemática, basta señalar que en la construcción de toda teoría matemática se parte de un conjunto "mínimo" de conceptos sin definir y, exceptuando los conceptos de este conjunto, todos los demás conceptos de la teoría se definen rigurosamente. Para la aplicación de la operación definición, en Matemática, es muy importante tener en cuenta las consideraciones que se explican a continuación.

Desde el punto de vista matemático es muy importante tener en cuenta las consideraciones siguientes:

I.- La definición de un concepto no es arbitraria.

Se debe definir un concepto de forma tal que las consecuencias de su definición sean útiles y consistentes.

II.- Se debe evitar el uso de propiedades disyuntivas en el contenido de una definición.

Cuando en el contenido de una definición aparece una propiedad disyuntiva (($a \vee b$), se lee "a o b"); por lo general los alumnos presentan dificultades para decidir si determinados objetos del concepto de partida pertenecen a la extensión del nuevo concepto.

III.- En una definición científica debe aparecer explícitamente la referencia adecuada al concepto de partida.

La referencia adecuada al concepto de partida en una definición científica es una necesidad.

IV.- El olvido de la definición por el desuso.

En el estudio de la Matemática muchas veces se da la definición rigurosa de un concepto, luego se pasa al estudio de propiedades y consecuencias de esa definición, y al desarrollo de una técnica relacionada con las mismas. El desarrollo de esa técnica va facilitando la aplicación de la definición y evita tener que aplicar la definición original. Este proceso provoca un alejamiento de los estudiantes de la definición rigurosa y, llega un momento que han perdido el concepto fundamental al que corresponde esa técnica y no son capaces de utilizar la definición en los casos en que no es posible aplicar los resultados técnicos. Muchas veces la definición de ese concepto, para ellos, se reduce sólo a un símbolo matemático que se utiliza para indicar el concepto. Esta situación se presenta con los conceptos fundamentales del cálculo diferencial (límite, derivada, integral definida, etc.), si no se procede adecuadamente.

V.- La relatividad del contenido del concepto.

Es muy importante realizar acciones para que se comprenda la relatividad del conjunto de propiedades que se toma como contenido del concepto que se define. Para ello se debe ejercitar a los estudiantes en el uso de diferentes definiciones de un mismo concepto dejando fijo el concepto de partida y variando el contenido. Este tipo de ejercicio muestra a los alumnos como la elección de una definición influye en sus modelos de pensamiento y como la demostración de propiedades con una definición pueden resultar muy complicadas, mientras que con otra pueden simplificarse y viceversa.

VI.- La relatividad del concepto de partida.

El concepto de partida en la definición tiene también un carácter relativo. En dependencia del concepto de partida que se tome pueden hacerse diferentes clasificaciones de conceptos relacionados con el mismo.

VII.- La definición debe regirse por la racionalidad.

Puede ocurrir que desde el punto de vista lógico matemático la definición de un concepto se haya realizado correctamente; pero que desde el punto de vista matemático presente algunas inconsistencias.

2.6 Transferencia de conocimientos matemáticos y aprendizajes.

Se analiza bajo este título el paso 4 de la figura 1. Se explica aquí cómo realizar la transferencia de los aprendizajes que van teniendo los estudiantes sobre un modelo conceptual matemático, a los conceptos de otras materias y de la propia matemática que le dieron origen. En primer lugar se aclara que no es posible transferir de manera inmediata todos los conocimientos que van adquiriendo los estudiantes sobre modelos conceptuales, a cada uno de los conceptos que le dieron origen. Determinados conocimientos es posible transferirlos a ciertos conceptos y a otros no. Parte de los conocimientos se estudian para garantizar el desarrollo lógico de la matemática y sólo algunos de ellos se pueden transferir a otros conceptos matemáticos por distintas vías, en particular en el establecimiento de ciertos isomorfismos (transformaciones matemáticas) entre sus extensiones o parte de ellas.

Ejemplo. Después que se ha pasado del concepto de derivada puntual al de derivada funcional, recomendamos transferir, utilizando el operador derivada, este concepto como modelo funcional de los conceptos que dieron origen a la derivada.

$f: A_o \to R$	$F: A_1 \to R, \quad F = D(f)$
1. f modela su gráfico.	1.1 F modela la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en cada punto $(x,(f(x))$, $x \in A_1$ y recibe el nombre de función pendiente. 1.2 La función $g: R \to R$, $x \to g(x) = f(t) + F(t)(x-t)$ corresponde a la recta tangente al gráfico de f en el punto $(t,f(t))$, $t \in A_1$.
2. f modela el desplazamiento de una partícula sobre una trayectoria en cada instante de tiempo t, $t \in A_o$.	F modela la rapidez instantánea con que la partícula recorre la trayectoria en cada instante t, $t \in A_1$ y recibe el nombre de función velocidad instantánea.
3. f modela la masa del segmento $[0,x]$ de una barra muy fina $[0,\ell]$ para todo x de $A_o = [0,\ell]$.	F modela la densidad lineal de masa para cada x de A_1, $A_1 \subseteq [0,l]$. Esta función se denomina función densidad lineal.
4. f modela el número de moléculas de una sustancia que está presente en una reacción de volumen V.	$g = -F/V$ modela la rapidez de reacción instantánea de la sustancia y se denomina función rapidez de reacción instantánea.

En la primera columna se relacionan diferentes conceptos que se modelan mediante una función f con dominio A_o, y en la segunda columna se presentan los conceptos que se modelan con su función derivada F en su máximo dominio A_1.

En el caso del modelo conceptual derivada se prueba que su extensión tiene estructura de espacio vectorial. Esta información puede transferirse a los conceptos que le dieron origen. Por ejemplo, se puede señalar que si se conoce la función f que da la pendiente en cada punto al gráfico de una función F, entonces αf corresponderá a la pendiente del gráfico de la función αF. Si f y g definen la velocidad de los movimientos correspondientes a dos desplazamientos F y G, respectivamente; entonces f +g es la velocidad que corresponde al movimiento con desplazamiento F + G. Estos son sólo dos ejemplos de como un profesor puede utilizar la información que obtenga sobre la estructura de la extensión de un modelo matemático a los conceptos que le dieron origen, lo cual puede hacerse además de forma tal que se utilice la creatividad, y los conocimientos de otras áreas, de los estudiantes. El profesor puede realizar acciones para lograr transferencia de aprendizajes en sus estudiantes aplicando el procedimiento de modelación a nuevos problemas conceptuales relacionados con su especialidad.

2.7 La modelación funcional.

Con mucha frecuencia, para la solución de problemas y para la construcción de un modelo más general, hay que modelar relaciones entre diferentes magnitudes. Muchas de estas relaciones tienen un modelo funcional que está dado por tablas, gráficos, expresiones analíticas, etc. Por ejemplo, se presentan situaciones en que dos magnitudes se modelan mediante las letras x y t con subconjuntos de los campos numéricos como dominios de variabilidad, respectivamente; y se determina una expresión analítica $x = x(t)$ que modela una determinada relación entre las magnitudes correspondientes a x y a t. Si para todo valor del dominio de t le corresponde por la expresión $x = x(t)$ un solo valor de x; se dice que $x = x(t)$ define una función. La mayoría de los problemas de modelación que se le presentan a un estudiante universitario están vinculados con relaciones funcionales, y una parte de ellos con relaciones funcionales definidas por expresiones del tipo $x = x(t)$. Sin embargo, para la determinación de este tipo de relaciones funcionales por lo general hay que resolver los tres problemas siguientes:

1. Se puede obtener con cierta facilidad una expresión del tipo x = g(s, t) y, entonces, es necesario obtener una relación entre las variables s y t que permita expresar la variable x en función de t.
2. Es necesario encontrar un subconjunto A de los números reales en que pueda variar t de modo que la expresión x = x(t) determine un solo valor real x.
3. Dado un modelo funcional, es necesario pasar a otro tipo de modelo funcional.

Por lo general en la EU se desarrollan muy pocas habilidades relacionadas con estos tres tipos de problemas, y cuando se estudian las funciones no se sigue un procedimiento adecuado de modelación funcional. En el caso de las funciones, los conceptos idealizados corresponden a magnitudes y sus modelos matemáticos corresponden a subconjuntos numéricos. Por ejemplo, la dificultad fundamental que confrontan los estudiantes al resolver problemas de optimización en análisis matemático es que no tienen habilidades para determinar las funciones objetivo y de enlace. El profesor se ve obligado entonces a dedicar mucho tiempo al desarrollo de un tipo de habilidad, que no es el que corresponde en ese momento y, que se supone que ya han desarrollado. En la EU antes de definir el concepto de función se deben presentar muchos problemas de su especialidad que requieran de modelos funcionales.

El desarrollo de habilidades relacionadas con el segundo problema, es mucho más deficiente. En muchos casos se considera la expresión y = f(x) como la función misma; desde el punto de vista matemático, y para sus aplicaciones, esto es desastroso. A pesar que a los estudiantes de las carreras de ingeniería se le presenta con mayor frecuencia la necesidad de pasar de un modelo funcional gráfico o de uno físico, a uno analítico; en la Matemática, prácticamente, sólo se desarrollan habilidades para pasar de un modelo funcional analítico, a uno gráfico.

2.8 Estrategia metodológica basada en la modelación.

Esta estrategia requiere de:

1. Un cambio de mentalidad del profesor para que utilice los procedimientos propuestos de forma creativa, y logre:

- Pasar de una enseñanza de conocimientos particulares al desarrollo de un proceso de enseñanza-aprendizaje, más amplio, en que se formen los conceptos y las operaciones intelectuales fundamentales que le permitan a sus estudiantes comprender y transferir esos conocimientos al lenguaje de su especialidad.
- Sustituir las acciones dirigidas al aprendizaje matemático, mediante la realización de ejercicios rutinarios, por un conjunto de acciones dirigido al desarrollo de los cuatro aprendizajes propuestos por la UNESCO.
- Transformar un proceso de enseñanza- aprendizaje basado en que el profesor es el que sabe y sus alumnos no saben y, consecuentemente, el profesor enseña lo que él sabe y los alumnos aprenden del profesor; por el desarrollo de un proceso de enseñanza aprendizaje donde el profesor es un guía con una formación superior a sus alumnos; pero que tanto él como sus alumnos enseñan y aprenden; y donde, además, éstos son parte activa de dicho proceso.
- Utilizar las posibilidades que ofrecen los procedimientos propuestos para lograr la formación y el fortalecimiento de las capacidades de análisis, de razonar, de extraer conclusiones y de formar conjeturas.
- Guiar a sus alumnos para que comprendan las múltiples facetas del entorno, contribuir a que despierten su curiosidad intelectual, estimular el sentido crítico y favorecer al mismo tiempo una autonomía juicio.

2. Realizar un trabajo interdisciplinario que permita determinar los conceptos, operadores y problemas que se presentan en otras materias, y que puedan ser modelados matemáticamente; para de esa forma lograr una motivación intrínseca de los alumnos por el estudio de los temas de matemática y la consecuente dedicación de tiempo, no sólo en el horario de clases, a la solución de estos problemas.

3. Tener en cuenta los modelos que deben utilizar los estudiantes en la solución de problemas que se le presentan en los años superiores de su carrera, y dar la preparación matemática suficiente para que puedan realizar esos modelos.
4. Tener en cuenta que es necesario para el desarrollo de la Matemática, estudiar conceptos y operadores, y resolver problemas que facilitan el desarrollo lógico de la misma.
5. Realizar un trabajo interdisciplinario lo más amplio posible de tal forma que:
   - Los procedimientos contemplen la transformación de conocimientos de la matemática a otras áreas y viceversa. El uso de las nuevas tecnologías puede ayudar extraordinariamente a este proceso de transformación. Por ejemplo, muchos de los resultados matemáticos que se derivan de la solución de un modelo matemático, exigen para su transferencia a resultados utilizables de otras áreas un trabajo computacional importante. Para ello se necesita un trabajo interdisciplinario que incluya el uso de paquetes profesionales de manera sistemática en las materias de la Matemática.
   - Las nuevas tecnologías permitan que la información científica más precisa y más actual esté a disposición de cualquier persona con acceso a la misma. Luego es necesario que se utilicen las posibilidades que tienen nuestros estudiantes, para que busquen y determinen problemas actuales relacionados con su especialidad, que puedan modelarse con las herramientas matemáticas que domina. Este tipo de búsqueda en muchos casos, pone de manifiesto la necesidad de otros idiomas, principalmente el idioma inglés.
6. La aplicación de los procedimientos de modelación contribuye notablemente al desarrollo de los aprendizajes: aprender a conocer y aprender a hacer. La realización de trabajos en los que intervengan varios alumnos y especialistas de diferentas áreas, puede contribuir notablemente a aprender a vivir juntos. Para ello es necesario establecer relaciones en un contexto de igualdad y formular

objetivos que satisfagan diferentes intereses, de modo que se logre una verdadera cooperación.

7. El desarrollo tecnológico puede traer como consecuencia una deshumanización del mundo. Luego es importante que se realicen acciones para el desarrollo de adecuados valores en los estudiantes, que contribuya a formarlos como individuos miembros de una familia y de una colectividad, y como ciudadanos dispuestos a enfrentar no sólo tareas técnicas una vez graduados; y de esta forma se contribuye al aprendizaje: aprender a ser.

8. Al utilizar la modelación como estrategia metodológica los profesores no deben disminuir el desarrollo de habilidades matemáticas; por el contrario, siendo consecuente con los procedimientos propuestos deben multiplicarlas y orientarlas al desarrollo de capacidades. En este sentido es muy importante que el profesor:

   - Guié a sus estudiantes para que estos descubran relaciones y propiedades matemáticas por sí mismo sin imponerle su pensamiento matemático ya formado.
   - Se asegure que el estudiante adquiera, primero experiencia con las entidades y relaciones matemáticas, para después iniciarlo en el razonamiento deductivo; y la construcción deductiva de la disciplina la realice de manera progresiva.
   - Enseñe a sus estudiantes a plantear problemas, establecer datos y sopesar resultados.

CONCLUSIONES

Podemos concluir que la estrategia propuesta:

- Contribuye a elevar la preparación de los profesores y facilita que se puedan realizar acciones que propicien el desarrollo de habilidades para que sus estudiantes realicen transferencia de conocimientos, tanto de otras áreas a la matemática, como en sentido contrario.
- Permiten que los profesores logren una motivación intrínseca, en los estudiantes, para el estudio de diferentes temas de matemática y, que éstos sientan la necesidad del estudio de la matemática como una herramienta imprescindible en su carrera.
- Contribuyen al logro de los aprendizajes: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser, como fueron concebidos en el trabajo.

RECOMENDACIONES

Teniendo en cuenta la importancia que tiene para cualquier nivel de enseñanza, que sus egresados sean capaces de resolver problemas que se le presentan en su entorno, en su trabajo y en la vida, se propone:

- Realizar investigaciones en la Educación Media y Media Superior para poner a disposición de los profesores de estos niveles, estrategias metodológicas que contemplen la modelación y su vinculación con la resolución de problemas. De esta forma, además, los estudiantes que continúen estudios universitarios llegarían a este nivel con una mejor formación en modelación, que facilitaría la articulación y el trabajo en esta dirección.

BIBLIOGRAFÍA

- **Adler, I.**, (1968). Mathematics and Mental Growth. New York: National Council of Teachers of Mathematics. USA.
- **Ahuja, M.**, (1976). "An approach to the absolute value problems". Mathematics Teacher. 69. USA.
- **Alsina, C. y otros,** (1989). Invitación a la Didáctica de la Geometría. Editorial Síntesis. S.A. España.
- **Álvarez de Zayas, C.**, (1999). Didáctica. La escuela en la vida. Colección Educación y Desarrollo. La Habana. Cuba.
- **Álvarez, I.** (1998). Tesis doctoral. UCLV. Cuba
- **Apóstol T. M.,** (sin año). Calculus. Volumen I. Introducción, con vectores y geometría analítica. Edición Revolucionaria. Instituto Cubano del Libro. Cuba.
- **Aramanovich, I. G. y otros**, (1989). Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Combinado Poligráfico "Evelio Rodríguez Curbelo". La Habana. Cuba.
- **Ballester, S. y otros**, (1992). Metodología de la Enseñanza de la Matemática I. Ministerio de Educación. Ciudad de la Habana. Cuba.
- **Barcia, R., (1999)**. La enseñanza de la geometría en la Licenciatura en Educación Primaria. Principios metodológicos y libro de geometría plana. Tesis doctoral. Instituto Superior Pedagógico. Facultad de Educación Primaria. Cienfuegos. Cuba.
- **Bartle, R.G. y D.R. Sherbert**, (1996). Introducción al Análisis Matemático de una Variable. Limusa (Noriega Editores)
- Bassanezi, R. C. y M. S. Biembengut, **(1997).** Modelación matemática. Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, No 32, 13 – 35.
- **Bernklau, D. (1980)**. "Reader Reflections." Mathematics Teacher,73. May. 325. USA.

- **Biembengut, M. S. y N. Hein, (1997).** Modelación matemática: Métodos de enseñanza – aprendizaje. Memorias de la IV reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur. 1 al 5 de Diciembre de 1997. Cochabamba – Bolivia.
- **Blanco, L.J., (1996).** Resolución de problemas aritméticos y formación practica de los maestros. Educación Matemática. Vol. 8, No. 1, Abril, págs. 53-64. México.
- **Block, D. y otros**, (1990). Concepciones y expectativas de los maestros de primaria en torno a los problemas de matemáticas. Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla, España.
- **Block, D. y otros**, (1991). La resolución de problemas. Una propuesta de formación de maestros. Revista Arista. Puerto Rico.
- **Brumfiel,** C., (1980). "Teaching the absolute value function". Mathematics Teacher, 73 January 24-30. USA.
- **Campistrous, L. y C. Rizo, (1996).** Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
- **Campistrus, L. C. Rizo**. (1998). Indicadores e Investigación Educativa. (Material en elaboración). Cuba.
- **Castro, M., (1997).** Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Carrera de Ingeniería en Automática. Tesis de maestría Facultad de Matemática, Física y Computación. UCLV. CUBA.
- **Cobiella M., L. A.** (1997). Las nuevas tecnologías. Un reto a la universidad moderna. CEPES, Universidad de La Habana. Revista Cubana de Educación Superior. No. 2. Vol. XVII. Cuba.
- **Colectivo de autores del CEPES**. (1991). Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. Ciudad de la Habana. Cuba.
- **Colín, M., (1996).** Resolución de problemas aditivos por niños preescolares en micro mundos Logo. Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

- **Coruniversitaria, (1998).** Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. Corporación Universitaria de Ibagué. Colombia. El Poira Editores e Impresores S. A.
- **Courant, R. y F. John,** (1996). Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol.2, Limusa. Noriega Editores.
- **Davidov, V (1981).** Tipos de generalización en la enseñanza. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. Cuba
- **Dávila, M. y P. Martínez.** (1989). Que piensa el maestro sobre los problemas de matemáticas. Reflexiones sobre una experiencia de formación de maestros, X Congreso Nacional de la ANPM, Acapulco, Guerrero. México.
- **De la Luz y Caballero, J.,** (1833). Escritos educativos, t. 1, pp. 257 – 258. Cuba.
- **Delgado, J. R.,** (1999). La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Tesis doctoral. Ciudad de al Habana. Cuba.
- **Delors, J.,** (1996). La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre educación para el siglo XXI, presidida por Jacques Delors. Editorial Santillana. Ediciones UNESCO.
- **Douady, R.,** (1995). Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. Capitulo I. Ingeniería didáctica en educación matemática, págs. 1-5. Una empresa docente. Grupo Editorial Iberoamérica. Impreso en México.
- **Dunn, S.L. (1977).** Models of the U.S.A. Economy. Mathematics Teacher. No 70, February. 102-110. USA.
- **Duval, R., (1988).** Annales de didactique y de sciences cognitives. Universitè Luis Pasteur. IREM, Strasburg. Francia.
- **Edwards, C.H. y D.E. Penney,** (1995). Cálculo con Geometría Analítica. Prentice Hall.

- **Engels, F.** (1964). Anti-Dühring, Editorial Grijalbo, S.A. México. D.F. p.25.
- **Garfunkel, J. and B. Plotkin,** (1973). "Using Geometric in Prove Algebraic Inequalities". Mathematics Teacher 59. December. 730-34. USA>
- **González, B. E.,** (2000 a). Las aplicaciones de la Matemática como objetivo fundamental de esta materia en las Especialidades de Química. Anuario Latinoamericano de Educación Química (ALDEQ), Año XII, No. XII, pp. 124-128, Argentina.
- **González, B. E.,** (2000 b).Algunas ideas metodológicas sobre la solución y aplicación de la ecuación de Schrödinger. Anuario Latinoamericano de Educación Química (ALDEQ), Año XII, No. XII, pp. 160-163, Argentina.
- **González, B.E. y Mederos, O. B.,** (2000). Problemas que conducen a sumas finitas y sus límites. Cuadernos de la Facultad de Ciencia de la Corporación Universitaria de Ibagué. ISSN- O123 – 9643. Colombia.
- **González, B.E. y O. Mederos,** (2001). Matemática Educativa. Escuela de Matemática. Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo, México.
- **González, B.E. y otros,** (2001). Cuaderno de trabajo para el módulo "Matemática Aplicada". Escuela de Bachillerato. Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo, México.
- **González, B.E.,** (1996). Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Carrera de Licenciatura en Química. Tesis de maestría Facultad de Matemática, Física y Computación. UCLV. CUBA.
- **González, B.E.,** (1999). La modelación mediante sumas finitas. Memorias. COMAT'99, 8 al 12 de noviembre. Universidad de Matanzas. Cuba.
- **González, B.E.,** (1999). La comprensión de las formas indeterminadas por medio de la geometría. Memorias. COMAT'99, 8 al 12 de noviembre. Universidad de Matanzas. Cuba.

- **Guerasimov, Ya.**, (1971). Curso de Química Física. Tomo II. Editorial MIR. Moscú.
- **Guzmán, M., (1991).** Para pensar mejor. Labor-MEC. Barcelona. España.
- **Haasar, N.B. y otros**, (1992). Análisis Matemático. Editorial Trillas. México.
- **Hamburg, D., (1994).** Education for Conflict Resolution. Extracto del Annual Report por David A. Hamburg, Presidente de la Carnegie Corporation of New York. USA.
- **Hernández, M.R.**, (1997). Niveles Epistemológicos en el aprendizaje de las Matemáticas. Educación Matemática. Vol. 9. No. 2, Agosto, p. 43 – 52. México.
- **Hernández, R, C. Fernández y P.Baptista**, (1991). Metodología de la Investigación. McGraw-Hill Interamericana de México, S.A. de C.V. México.
- **Hing, R.**, (1995). Plan Director de Matematica. Departamento de Matematica. UCLV. Cuba.
- **Hitt, F.**, (1995). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. Educación Matemática. Vol.7, No. 1, Abril, Págs. 63-75. México.
- **Howard, A.**, (1991). Cálculo y Geometría Analítica. Volumen I. Editorial Limusa.
- **Ibáñez, M y T. Ortega, (1997).** La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Superior. Educación Matemática. Vol.9. No.2. Agosto. México.
- Informe de la tercera reunión de la Comisión Internacional sobre Educación para el siglo XXI. (1994). Paris, 12-15 de enero. Francia.
- **Jamski, W. D.**, (1978). "A Different Look at πr^2." Sharing teaching ideas. The mathematic teacher. Vol.71, No.4, April. Pags.273-274. USA.

- **John- Steiner, V.**, (1995). Spontaneous and Scientific Concepts in Mathematics: A Vygotskian Approach. Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 30 – 44.
- **Jungh, W.**,(1964). Conferencia sobre metodología de la enseñanza de la matemática 2. La Habana. Editorial Libros para la Educación. Cuba.
- **Kopnin, P.V.**, (1978). Lógica Dialéctica. Ciencias Económicas y Sociales, p. 152. URSS.
- **Labarrere, A.**, (1994). La generalización de procedimientos de solución de problemas y la autorregulación de la actividad cognoscitiva de los estudiantes. En el adolescente cubano: una aproximación al estudio de su personalidad. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.
- **Lakatos, I.**, (1981). Matemáticas, ciencia y epistemología. Alianza. Pág. 20. España.
- **Larson, R.E.**, (1995). Cálculo y Geometría Analítica. Mc Graw- Hil.
- **Latorre, A., D. Del Rincón y J. Arnal.**, (1996). Bases Metodológicas de la Investigación Educativa. GR92, Barcelona. España.
- **Lauber, M.**, (1977). Commenting on Skidell's "The Harmonic Mean. A Monograph and Some Problems". In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70.May. 389. USA.
- **Leithold, L.**, (1994). El cálculo. Oxford University Press
- **Maor, E.**, (1977). "A Remarkable Trigonometric Identity". The Mathematic Teacher. 70. May. USA.
- **Maor, E.**, (1977)."A Mathematicians repertoire of means". Mathematics Teacher 70, January. 20-25. USA.
- **Maraldo, S.**, (1980). "Properties of quadrilaterals". Mathematics Teacher, 73. January. 38-39. USA.
- **Marsden, J. E. y A. J. Tromba**, (1998). Cálculo Vectorial. Addison Wesley Longman.

- Martí y Pérez, J., **(1983) Obras completas, t. V, p. 251. Cuba.**
- **Martínez, A. y Rivaya, F. J.**, (1989). Una metodología activa y lúcida para la enseñanza de la geometría.
- **Marx, C.** (1952). Contribución a la crítica de la economía política, Moscú. pp. 217-218.
- **Masón, M. y otros, (1988).** Pensar matemáticamente. Labor-MEC. Barcelona. España.
- **Mederos, O y B. González,** (1997). Una variante metodológica para el estudio de los conceptos a partir de su definición. Boletín de Matemática, Volumen IV, Número 2, Universidad Nacional de Colombia.
- **Mederos, O y B. González**, (1998,a). Estudio del concepto de derivada. Memorias del III Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. La Habana. Cuba.
- **Mederos, O y B. González**, (1998,b). Procedimientos para el estudio de los conceptos. Memorias del III Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. La Habana. Cuba.
- **Mederos, O y B. González,** (1998,c). Conceptos cuya definición conduce a la definición de derivada. Memorias del III Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. La Habana. Cuba.
- **Mederos, O, Martínez, J.E. y González, B.E., (2000).** Las capacidades para resolver problemas y para la modelación. Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas. de la Corporación Universitaria de Ibagué. ISSN- O123 – 9643. Ibagué. Colombia.
- **Mederos, O. B. y B. E. González, (2000).** Las Formas indeterminadas. Cuadernos de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Corporación Universitaria de Ibagué. ISSN- O123 – 9643. Ibagué. Colombia.

- **Mederos, O. B. y Martínez, J. E.**, (1999). La geometría y las medias numéricas. Cuadernos de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Corporación Universitaria de Ibagué. ISSN- O123 – 9643. Ibagué. Colombia.
- **Mederos, O. y B. González**, (1996). Estudio del concepto de métrica. I Taller Iberoamericano de Enseñanza de Las Ciencias Básicas en la Ingeniería. UCLV. Santa Clara. Villa Clara. Cuba.
- **Mochón, S.**, (1994). Quiero entender el Cálculo. Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de CV. México.
- **Moll L.C.**, (1992). "Introduction", en Moll L.C. (Ed), Vygotsky and Education, Instructional Implications and Applications of Sociohistorical Psychology, Cambridge University Press, 1-27.
- **Monereo, C.**, (2000). "Habilidades para sobrevivir en el siglo XXI, la sociedad del conocimiento". Conferencia. VIII Jornada Pedagógicas de la Escuela Superior de Nayarit. 28 de Julio del 2000. Tepic, México.
- **National Council of Teachers of Mathematics**, (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. USA.
- **National Council of Teachers of Mathematics**, (1991). Professional standards for teaching mathematics: Working draft. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. USA.
- **National Council of Teachers of Mathematics**, (1995). Assessment standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. USA.
- **Novak, J. D. y D. B. Gowin**, (1988). Aprendiendo a aprender. Ediciones Martines Roca, S.A. Barcelona, España.
- **Ortega, A.**, (1999). Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Carrera de Agronomía. Tesis de maestría Facultad de Matemática, Física y Computación. UCLV. CUBA.

- **Pérez, R.**, (1996). Metodología de la investigación educacional. Primera parte. Editorial pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
- **Periódico Granma**, (2001). Mesa Redonda. Periódica Granma. 1 de febrero. Cuba.
- **Polya, G., (1982),** Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México. Serie de Matemáticas. Décima reimpresión.
- **Purcell, E. J. y D. Varberg**, (1992). Cálculo Diferencial e Integral. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- **Ramírez, E., (1996).** Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Carrera de Licenciatura en Ciencias Farmacéuticas. Tesis de maestría Facultad de Matemática, Física y Computación. UCLV. CUBA.
- **Ranucci, E. R.**, (1975). Of shoes - and ships – and sealing wax – of barber poles and things. The Mathematics Teacher. April. Volume 69, Number 4. USA.
- **Recarey, C,.** (1999). Tesis doctoral. UCLV. Cuba
- **Rizo, C.**, (1987). Estructuración del curso de Geometría de cuarto a sexto grado basados en las transformaciones y la congruencia. Tesis doctoral. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana. Cuba.
- **Roldan, J. y otros**, (1996). Dificultades y alternativas en la resolución de problemas matemáticos. Educación Matemática. Vol. 8, No. 1, Abril. p. 53 – 64. México.
- **Santos, L.M.**, (1990). "College student's methods for solving mathematical problems as a result of instruction based on problem solving". Thesis Ph.D. University of Columbia. Canada.
- **Santos, L.M.**, (1993). Learning mathematics. A perspective based on problem solving. Departe manto de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN: México

- **Santos, L.M.**, (1994). La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Cuaderno de investigación # 28. México: CINVESTAV, Departamento de Matemática Educativa.
- **Santos, L.M.**, (1995). On mathematical problem solving instruction: Focusing on moral associated with the class problems. Paper presented at the function group meeting. University of California, Berkeley. USA.
- **Santos, L.M.**, (1996). Análisis de algunos de los métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. Revista Educación Matemática. Vol. 8, No. 2, Agosto, pags 57 – 70. México.
- **Santos, N.**, (1988). Sistemas de habilidades lógicas relacionadas con los conceptos y los teoremas en la Matemática de las ciencias técnicas. Tesis de grado Facultad de Matemática, Física y Computación. UCLV. Cuba.
- **Schoenfeld, A.**, (1988). Mathematics, Technology, and higher order thinking. In R. Nickerson & P. Zodhiates (Eds.) Technology in Education: Looking toward 2020. Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum Associates.
- **Schoenfeld, A.**, (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Growns (ed), Handbook of research on Mathematics teaching and learning. (Pags. 334 – 370). New York. Macmillan. USA.
- **Schoenfeld, A.**, (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En Schoenfeld (ED), Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale, NJ. Erlbaum.
- **Schwartz, L., (1993).** " L'ensegnement scientifique", en Institut de France, Reflexions sur l'ensegnement, Paris, Flammarion. Francia.
- Shtoff, B. A., (1966). El modelado y la filosofía. Moscú – Leningrado, "Naúca"
- **Sink S.**, (1979). "Understanding absolute value." Mathematics Teacher 72. March. 191-95. USA.

- **Skidell, A. and K. Blum.**, (1977). Commenting on Lauber's "Harmonic theme". In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. December. 724-25. USA.
- **Skidell, A.**, (1977). "The Harmonic Mean: A monograph and Some Problems". Mathematics Teacher 70. January 30-34. USA.
- **Spivak. M.**, (1970). Calculus. Ediciones Revolucionarias. La Habana. Cuba.
- **Taillacq, A., (1996).** Perfeccionamiento de la enseñanza en la Carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones. Tesis de maestría. Facultad de Matemática, Física y Computación. UCLV. CUBA.
- **Talizina, N.**, (1988). Psicóloga de le enseñanza. Moscú. Editorial Progreso. Págs. 57 – 108. URSS
- **Talizina, N.**, (1989). Procedimientos iniciales del pensamiento lógico. La Habana. CEPES. MES. Págs. 25 – 27. URSS.
- **Thompson, A.R.**, (1995). "The utilization and professional development of teachers: issues and strategies", the management of teachers, Paris, Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación. Francia.
- **Torres, P.**, (1993). La Enseñanza Problémica de la Matemática del nivel medio general. Tesis doctoral. Cuba.
- **Ursini, S., (1994).** "Pupils approaches to different characterizations of variables in Logo", Ph D Thesis, University Press.
- **Ursini, S.**, (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L. S. Vygotsky. Educación matemática. Vol. 8. No. 3. Diciembre. Págs. 42-49. México.
- **Usiskin, Z. P.**, (1975). Applications of group and isomorphic group to topics in the standard curriculum, grades 9-11: Part I. The Mathematics Teacher. February. Volume 68, Number 2. USA.
- **Varona y Pérez, J.**, (1932). Trabajos sobre educación y enseñanza, pp. 140. Cuba.

- **Vázquez de Tapia, N., (1997).** Taller sobre "Técnicas y estrategias en la resolución de problemas". Memorias de la IV Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur. Diciembre de 1997. Cochabamba. Bolivia.
- **Vázquez, R. A., (1998),** La resolución de Problemas y tareas docentes de Matemática IV para Ingeniería Eléctrica. Tesis doctoral. Camaguey. Cuba.
- **Vicente, R.**, (2001). Conferencia. Las nuevas tecnologías de la información y la telecomunicación en la educación superior. La situación en la UCLV. UCLV. Cuba. **Vygotsky L.S.**, (1978). Mind in Society, "The Development of Higher Psychological Processes", Harvard University Press. USA.
- **Vygotsky L.S.**, (1998). Pensamiento y Lenguaje. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Segunda Edición. Cuba.
- **William, E. B. y R. C. DiPrima**, (1994), Calculo. CECSA.
- **Zimmermann, W. y S. Cunningham.**, (1991). Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Mathematical Association of America; USA.