

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



MODELADO Y DETECCION DE FALLAS INCIPIENTES EN  
TRANSFORMADORES UTILIZANDO REDUNDANCIA ANALITICA

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL,

POR

MANUEL SALDAÑA DE LEON

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DE 2004

TM  
Z5853  
.M2  
FIME  
2004  
S2

ACADEMIA BRASILEIRA DE LINGUÍSTICA E FILOLOGIA  
INSTITUTO DE LINGUÍSTICA E FILOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
RUA DO MATÃO, 130 - JARDIM BOTÂNICO  
05508-900 - SÃO PAULO, SP



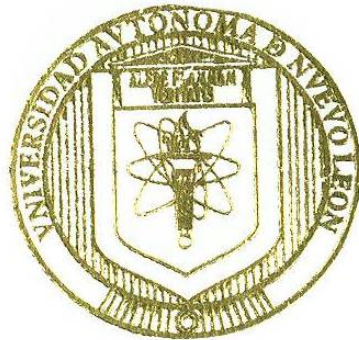
1020149793

m

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



MODELADO Y DETECCION DE FALLAS INCIPIENTES EN  
TRANSFORMADORES UTILIZANDO REDUNDANCIA ANALITICA

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

POR

MANUEL SALDAÑA DE LEON

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DE 2004

982046

TH  
ZS S3  
.M2  
FIME  
2004  
.S2

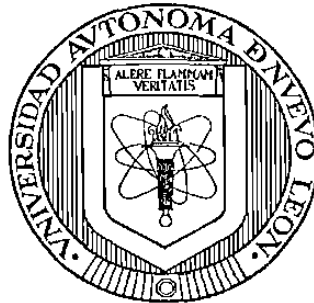


FONDO  
TESI

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



MODELADO Y DETECCIÓN DE FALLAS INCIPIENTES  
EN TRANSFORMADORES UTILIZANDO  
REDUNDANCIA ANALÍTICA

**TESIS**

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL.

POR

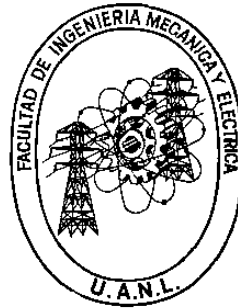
MANUEL SALDAÑA DE LEÓN

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DEL 2004

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



MODELADO Y DETECCIÓN DE FALLAS INCIPIENTES  
EN TRANSFORMADORES UTILIZANDO  
REDUNDANCIA ANALÍTICA

POR

MANUEL SALDAÑA DE LEÓN

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL.

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA NUEVO LEÓN

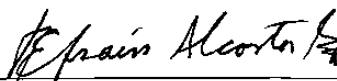
FEBRERO DEL 2004



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **MODELADO Y DETECCIÓN DE FALLAS INCIPIENTES EN TRANSFORMADORES UTILIZANDO REDUNDANCIA ANALÍTICA**, realizada por el Ing. Manuel Saldaña De León sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.

El comité de Tesis



Asesor de Tesis

Dr. Efraín Alcorta García



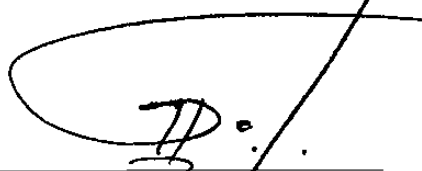
Coasesor

Dr. Ernesto Vázquez Martínez



Coasesor

Dr. Rodolfo Salinas Villarreal



Vo. Bo.

Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez  
División de Estudios de Postgrado.

Copyright © 2004  
por Manuel Saldaña De León  
Reservados Todos los Derechos

*A mis padres, María Inés De León Aguilera y  
Victor Manuel Saldaña Navarro*

# Agradecimientos

A Dios por darme vida y perseverancia para realizar este trabajo, entre otras cosas.

A mis padres por todo el amor que me han dado, por el apoyo en mis decisiones, por la formación que me dieron. No hay palabras que expresen adecuadamente toda mi gratitud.

A mi hermana Karina por todo el cariño, soporte emocional y regaños oportunos que me ha brindado.

A un gran amigo, más bien hermano, Antonio Zúñiga por su visión, su apoyo y su amistad incondicional.

A mi asesor, el Dr. Efraín Alcorta por brindarme el apoyo y guía para la realización de este trabajo.

A los profesores del programa, Dr. Marco Tulio Mata, Dr. René Galindo, Dr. Jesús De León, Dr. Aarón Sariñana y Dr. Jose A. De La O, por haber contribuido en mi formación académica. A mis coasesores, el Dr. Ernesto Vázquez y el Dr. Rodolfo Salinas, por sus comentarios y observaciones que ayudaron a mejorar esta tesis.

A mis compañeros y amigos del programa, en especial a Marcos Fco. Jorge, Carlos Ramírez, Oscar Huerta, Marco Tulio Mata y Jesús De León, por su amistad y por haber hecho más agradable mi estancia en este postgrado.

Al CONACYT por el apoyo económico, fundamental para la realización de este trabajo.

A la Universidad Autónoma de Nuevo León.

# Resumen

## Modelado y detección de fallas incipientes en transformadores utilizando redundancia analítica

Publicación No. \_\_\_\_\_

Manuel Saldaña De León

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Profesor Asesor: Dr. Efraín Alcorta García

Febrero, 2004

La energía eléctrica adquiere cada día mayor importancia en las actividades del hombre. Por otra parte, la creciente demanda de disponibilidad y calidad de la energía hace necesario que los procesos involucrados en su generación, transmisión y distribución tengan un desempeño eficiente.

El transformador es un dispositivo de gran importancia en una red eléctrica, de su fiabilidad depende no sólo la disponibilidad de energía eléctrica en determinada área, sino que también afecta la operación económica de la compañía eléctrica. Las fallas incipientes internas en transformadores son aquellas que ocurren debido a la degradación del material aislante en sus devanados, las cuales, pueden eventualmente ocasionar un cortocircuito y resultar catastróficas y costosas.

En la presente tesis se estudia el modelado matemático de fallas incipientes en transformadores monofásicos. Se comienza por obtener el modelo de un transformador monofásico de dos devanados para estudiar su comportamiento cuando éste se encuentra libre de fallas. El modelado de fallas incipientes se comienza modelando el material aislante mediante un circuito equivalente. Posteriormente, transformadores de tres y cuatro devanados, son modelados para representar al transformador de dos devanados, e incluir el circuito equivalente del aislante conectado en paralelo al devanado que representa la porción deteriorada del aislante. De esta manera se obtienen modelos no lineales de quinto y sexto orden. Mediante simulaciones se muestra que los modelos obtenidos represen-

tan adecuadamente el comportamiento del transformador monofásico, y que mediante la variación de un parámetro es posible simular distintos niveles de falla.

Finalmente, se desarrolla un método de detección de fallas basado en un observador del transformador. El diseño del observador se desarrolla a partir del modelo del transformador monofásico de dos devanados mediante un método basado en el criterio del círculo. La generación de señales portadoras de información sobre fallas se lleva a cabo aplicando el observador a los sistemas que simulan las fallas. El método de detección presentado, en general, mostró buen desempeño en la generación de residuos, incluso para niveles pequeños de falla, lo cual es una característica deseable para la detección de fallas incipientes.

# Índice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Generalidades . . . . .  | 1         |
| 1.2      | Antecedentes . . . . .   | 2         |
| 1.3      | Organización de la tesis . . . . .                                   | 4         |
| <b>2</b> | <b>Detección de fallas mediante redundancia analítica</b>            | <b>5</b>  |
| 2.1      | Redundancia analítica . . . . .                                      | 5         |
| 2.1.1    | Modelado del sistema . . . . .                                       | 6         |
| 2.1.2    | Generación de residuos . . . . .                                     | 7         |
| 2.1.3    | Evaluación de residuos . . . . .                                     | 7         |
| 2.1.4    | Localización de fallas . . . . .                                     | 8         |
| <b>3</b> | <b>Modelado de un transformador monofásico de dos devanados</b>      | <b>11</b> |
| 3.1      | Ecuaciones de enlace de flujo . . . . .                              | 11        |
| 3.2      | Ecuaciones de voltaje . . . . .                                      | 13        |
| 3.3      | Circuito equivalente . . . . .                                       | 14        |
| 3.4      | Representación en espacio de estado . . . . .                        | 15        |
| 3.5      | Resultados de simulación . . . . .                                   | 17        |
| <b>4</b> | <b>Modelado de fallas incipientes en un transformador monofásico</b> | <b>19</b> |
| 4.1      | Modelado del aislante deteriorado . . . . .                          | 19        |
| 4.2      | Modelado de un transformador de tres devanados . . . . .             | 21        |
| 4.2.1    | Ecuaciones de enlace de flujo . . . . .                              | 21        |
| 4.2.2    | Ecuaciones de voltaje . . . . .                                      | 23        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.2.3    | Circuito equivalente del transformador de tres devanados . . . . .    | 25        |
| 4.2.4    | Parámetros del modelo del transformador de tres devanados . . . . .   | 26        |
| 4.2.5    | Modelado de falla incipiente espira-tierra en el primario . . . . .   | 29        |
| 4.2.6    | Modelado de falla incipiente espira-tierra en el secundario . . . . . | 31        |
| 4.3      | Modelado de un transformador de cuatro devanados . . . . .            | 33        |
| 4.3.1    | Ecuaciones de enlace de flujo . . . . .                               | 33        |
| 4.3.2    | Ecuaciones de voltaje . . . . .                                       | 35        |
| 4.3.3    | Circuito equivalente del transformador de cuatro devanados . . . . .  | 36        |
| 4.3.4    | Parámetros del modelo del transformador de cuatro devanados . . . . . | 37        |
| 4.3.5    | Modelado de falla incipiente espira-espira en el primario . . . . .   | 40        |
| 4.3.6    | Modelado de falla incipiente espira-espira en el secundario . . . . . | 41        |
| 4.4      | Resultados de simulación . . . . .                                    | 43        |
| <b>5</b> | <b>Detección de fallas basada en observadores</b>                     | <b>48</b> |
| 5.1      | Diseño de un observador no lineal para el transformador . . . . .     | 48        |
| 5.2      | Resultados de simulación . . . . .                                    | 54        |
| <b>6</b> | <b>Conclusiones</b>   | <b>58</b> |
| 6.1      | Conclusiones . . . . .  | 58        |
| 6.2      | Contribuciones . . . . .  | 58        |
| 6.3      | Trabajos futuros . . . . .  | 59        |
|          | <b>Bibliografía</b>   | <b>60</b> |



# Lista de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Esquema básico de detección de fallas usando redundancia analítica. . . . .                             | 6  |
| 2.2  | Conjunto de residuos estructurados . . . . .  | 9  |
| 2.3  | Vector residual direccional para localización de fallas. . . . .  | 10 |
| 3.1  | Transformador de dos devanados. . . . .   | 11 |
| 3.2  | Circuito equivalente del transformador de dos devanados. . . . .  | 15 |
| 3.3  | Circuito equivalente considerando pérdidas en el núcleo. . . . .  | 15 |
| 3.4  | Corrientes del transformador de dos devanados. . . . .  | 18 |
| 4.1  | Circuito equivalente del material dieléctrico. . . . .  | 20 |
| 4.2  | Transformador de tres devanados. . . . .  | 21 |
| 4.3  | Circuito equivalente del transformador de tres devanados. . . . .                                       | 25 |
| 4.4  | Falla incipiente espira-tierra en el devanado primario. . . . .   | 30 |
| 4.5  | Falla incipiente espira-tierra en el devanado secundario. . . . .                                       | 32 |
| 4.6  | Circuito equivalente del transformador de cuatro devanados. . . . .                                     | 36 |
| 4.7  | Falla incipiente espira-espira en el devanado primario. . . . .   | 40 |
| 4.8  | Falla incipiente espira-espira en el devanado secundario. . . . .                                       | 41 |
| 4.9  | Corrientes del transformador para una falla incipiente espira-tierra en el devanado primario. . . . .   | 44 |
| 4.10 | Corrientes del transformador para una falla incipiente espira-tierra en el devanado secundario. . . . . | 44 |
| 4.11 | Corrientes del transformador para una falla incipiente espira-espira en el devanado primario. . . . .   | 46 |
| 4.12 | Corrientes del transformador para una falla incipiente espira-espira en el devanado secundario. . . . . | 47 |
| 4.13 | Relación entre las corrientes del transformador y el deterioro del aislante. . . . .                    | 47 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 5.1 | Sistema del error de estimación. . . . .  | 50 |
| 5.2 | Residuos de una falla incipiente en el primario. . . . .                        | 55 |
| 5.3 | Residuos de una falla incipiente en el secundario. . . . .                      | 56 |
| 5.4 | Residuos de una falla incipiente en el primario con $R_f=60\Omega$ . . . . .    | 56 |
| 5.5 | Residuos de una falla incipiente en el primario con $R_f=100\Omega$ . . . . .   | 57 |
| 5.6 | Residuos de una falla incipiente en el secundario con $R_f=2.5\Omega$ . . . . . | 57 |

# Lista de Tablas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Parámetros del circuito equivalente del transformador. . . . .           | 18 |
| 4.1 | Ubicación de las fallas en devanados. . . . .                            | 43 |
| 4.2 | Parámetros de los distintos niveles de degradación del aislante. . . . . | 46 |

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Generalidades

La energía eléctrica se ha convertido en un elemento de esencial importancia para el desarrollo de un país, y en general, para la evolución de la humanidad. Actualmente, gran parte de las actividades del hombre dependen de la electricidad. Aunado a esto, la creciente demanda de disponibilidad y calidad de la energía hace necesario que los procesos involucrados en la generación, transmisión y distribución, tengan un buen desempeño, aun bajo la presencia de perturbaciones y fallas.

Los sistemas eléctricos están compuestos por generadores, líneas de transmisión, transformadores, subestaciones, etc. Para obtener energía eléctrica de calidad y suministro ininterrumpido es necesario desarrollar estrategias eficientes de control para elementos de la red eléctrica como generadores, así como también, algoritmos de detección y localización de fallas para elementos como líneas de transmisión y transformadores.

El transformador es un dispositivo de gran importancia en una red eléctrica, su principal función es cambiar los niveles de voltaje y corriente para reducir las pérdidas en el proceso de transmisión y distribución de la energía eléctrica. La fiabilidad de los transformadores no sólo afecta la disponibilidad de energía eléctrica en determinada área, sino que también afecta la operación económica de la compañía eléctrica. Cuando ocurre una falla en un transformador de distribución, por ejemplo, cientos de hogares pueden quedar sin energía, y por tanto, sin luz, calor, etc. Por otro lado, la compañía eléctrica pierde económicamente por concepto de facturación de energía, sin mencionar los altos costos de reparación o reemplazo del transformador.

Las fallas incipientes internas en transformadores son aquellas que ocurren debido a la degradación del material aislante en sus devanados, las cuales, pueden eventualmente ocasionar un cortocircuito y resultar catastróficas y por tanto costosas. La detección de estas fallas puede proporcionar una temprana advertencia de fallas más severas, y así tener la oportunidad de planificar el mantenimiento de los transformadores y reducir las

pérdidas y cortes inesperados. Por lo anterior, es necesario desarrollar métodos eficientes para detectar las fallas en su etapa incipiente.

En el presente trabajo se desarrollan modelos matemáticos en espacio de estado para simular fallas incipientes en transformadores monofásicos. Posteriormente se presenta un método de detección de fallas basado en un observador del sistema. La efectividad del método considerado es estudiado mediante simulaciones. En la actualidad, este método representa una alternativa a los métodos convencionales para detección de fallas en transformadores.

## 1.2 Antecedentes

Existen varios métodos para el diagnóstico de fallas incipientes en transformadores, siendo el monitoreo de descarga parcial (DP) y el análisis de gas disuelto en aceite (AGD) los más importantes [1]. Ambos métodos pueden ser implementados en línea, lo cual se refiere a que no es necesario desconectar el transformador para diagnosticar condiciones de falla.

Las principales causas que generan descarga parcial (DP) son condiciones asociadas a humedad, cavidades en el aislante y partículas metálicas, que pueden eventualmente ocasionar el deterioro del aislante. Un incremento significativo, ya sea en el nivel de DP o en la velocidad de desarrollo de actividad de DP, puede indicar condiciones de falla incipiente. Sin embargo, una desventaja de este método es la interpretación de los resultados del monitoreo de DP. Actualmente no existen reglas generales que relacionen la condición de un transformador con la actividad de DP, o incluso, una clasificación clara de actividades de DP.

El análisis de gas disuelto en aceite (AGD) es una técnica más exitosa para el diagnóstico de fallas incipientes. Este método consiste en muestrear el aceite y utilizar monitores de gases. Los procedimientos de muestreo y análisis son baratos, y fáciles de estandarizar y debido a que el monitoreo es continuo, en cualquier momento se puede obtener información valiosa sobre la tendencia de los gases disueltos. No obstante, esta técnica presenta un grave problema: la dependencia en un experto. Debido a que transformadores de diferente tamaño, estructura, fabricante e incluso historial de carga y mantenimiento pueden tener diferentes características de disolución de los gases, es necesario considerar-

los de manera distinta en la mayoría de los casos. De este modo, AGD es frecuentemente referido como “arte” en lugar de “ciencia”. Se han desarrollado aplicaciones de inteligencia artificial y sistemas expertos con el fin de ayudar a resolver las desventajas del AGD [1].

Otros métodos que presentan muy buena sensibilidad a fallas pequeñas son los relevadores de acumulación de gas o de incremento de presión. Cuando ocurre una falla pequeña en el interior del transformador, se generan burbujas de gas en el aceite, las cuales son atrapadas en una cámara, donde al acumularse y exceder cierta cantidad activan al relevador, ya sea para dar una señal de alarma o para desconectar al transformador. Estos relevadores también son conocidos como relevadores Buchholz. El relevador Buchholz es un dispositivo de protección y no puede ser usado como herramienta de diagnóstico. Para obtener un diagnóstico de las fallas es necesario analizar los gases recolectados en la cámara y adicionalmente llevar a cabo un AGD. Una de las principales desventajas de este método es que la acumulación de gases no siempre proviene de condiciones de falla, existen otros factores que pueden generar gases, tales como: vibraciones, cambios abruptos de temperatura en volúmenes pequeños de aceite, decremento de la presión ambiental, entre otros.

Los relevadores basados en el incremento de presión se aplican a transformadores en los cuales el tanque no está completamente lleno de aceite, sino que por lo general contiene además un gas noble. El relevador contiene un elemento que responde al incremento de presión en el gas o el aceite, y provoca cierre de un contacto. La principal desventaja de este relevador es que puede operar incorrectamente por el efecto de vibraciones y otros factores externos.

En lo que se refiere a métodos basados en el modelo del transformador, existen varios trabajos realizados sobre la obtención de modelos para el estudio de fallas debidas a cortocircuito en los devanados [2]-[5]. La mayor parte de ellos están basados en el modelo de transformador proporcionado por la rutina BCTRAN del programa de simulación ATP. Sin embargo, en la mayoría de ellos, el estudio se limita a la obtención de las formas de onda de las corrientes resultantes de un cortocircuito, y ninguno de ellos trata el modelado de fallas incipientes. Son pocos los trabajos que se han hecho al respecto [6], [7], los cuales están basados en análisis de elemento finito para la obtención de los parámetros de un circuito equivalente del transformador con un cortocircuito interno, el circuito es exportado al formato del programa de simulación SPICE utilizando el

programa Maxwell Software de ANSOFT, por último se agrega el modelo del aislante deteriorado.

### 1.3 Organización de la tesis

La presente Tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presenta, de manera breve y general, un repaso de los principales conceptos sobre detección de fallas mediante redundancia analítica.

En el capítulo 3 se desarrolla un modelo matemático en espacio de estado para un transformador monofásico de dos devanados, en el cual se incluyen características de saturación magnética e histéresis, lo cual conduce a la obtención de un modelo no lineal.

En el capítulo 4 se desarrollan modelos matemáticos en espacio de estado para simular fallas incipientes en un transformador monofásico. Primero se modela el material aislante mediante un circuito equivalente. Posteriormente, mediante el mismo principio de modelado empleado para el transformador de dos devanados, sólo que aplicado a transformadores de tres y cuatro devanados, se obtienen las ecuaciones que describen el comportamiento de dichos transformadores. Se incluye el circuito equivalente del aislante conectado en paralelo a devanado que representa la porción deteriorada del aislante. De esta manera se obtienen modelos no lineales de quinto y sexto orden.

En el capítulo 5 se desarrolla un método de detección de fallas basado en un observador del transformador. El diseño del observador se desarrolla a partir del modelo del transformador monofásico de dos devanados mediante un método basado en el criterio del círculo. La generación de señales portadoras de información sobre fallas se lleva a cabo aplicando el observador a los sistemas que simulan las fallas.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo, comentarios y recomendaciones para trabajos futuros.

## Capítulo 2

# Detección de fallas mediante redundancia analítica

La detección de fallas mediante redundancia analítica o basada en modelo, como también se le conoce, ha ido recibiendo considerable atención durante las últimas tres décadas, tanto en el contexto de la investigación como en el área de estudio de aplicación en procesos reales. Actualmente existe una gran variedad de métodos en la literatura, basados en el modelo matemático del sistema monitoreado y en la teoría de control. En el presente capítulo se repasan, de manera breve y general, algunos conceptos sobre detección de fallas usando estos métodos.

### 2.1 Redundancia analítica

La detección de fallas mediante redundancia analítica, a grandes rasgos, consiste en la comparación de mediciones disponibles del sistema con información de su comportamiento nominal proporcionada por el modelo matemático del sistema. Debido a que este método de diagnóstico de fallas se basa en el modelo de la planta o proceso, la detección y localización de fallas (FDI: Fault Detection and Isolation) usando redundancia analítica es también llamada FDI basada en modelo. Una descripción detallada del término *FDI basada en modelo* se encuentra en [8].

Las fallas se detectan estableciendo un umbral fijo o variable sobre una cantidad residual resultante de la diferencia entre mediciones del sistema y los valores estimados de las mismas obtenidos del modelo matemático del sistema. Se puede diseñar un determinado número de residuos de tal manera que cada uno de ellos tenga especial sensibilidad a fallas específicas en distintas partes del sistema. El análisis subsecuente de cada residuo, una vez que un umbral es sobrepasado, determina la localización de la falla.

El diagnóstico de fallas basado en modelo comprende dos etapas principales, la generación de residuos y la evaluación de residuos o toma de decisiones. En la Fig. 2.1 se ilustra la estructura básica de un sistema de FDI. Como se observa, la generación de



residuos se realiza considerando al sistema en lazo abierto, exista o no un lazo de control para el sistema monitoreado. Esto se debe a que la información necesaria para la FDI basada en modelo son las entradas y salidas del sistema en lazo abierto. De este modo, no es necesario considerar al controlador (cuando éste exista) en el diseño de un esquema de diagnóstico de fallas.

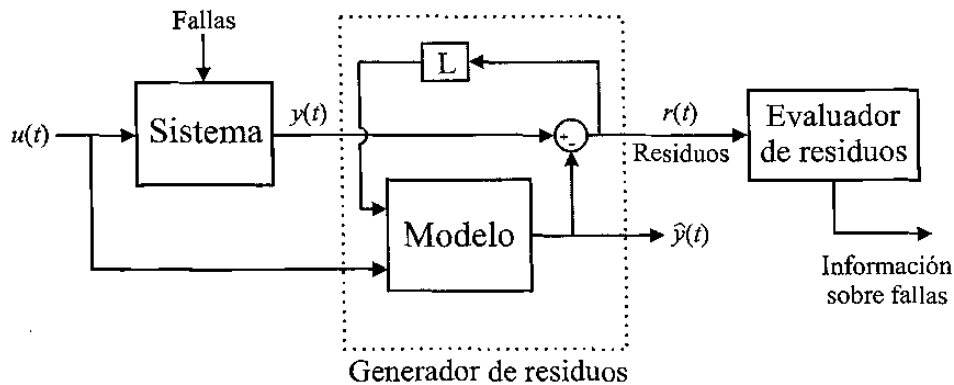


Figura 2.1 Esquema básico de detección de fallas usando redundancia analítica.

La detección de fallas basada en modelo es un método enfocado principalmente al diagnóstico en línea, en el cual, dicho diagnóstico es obtenido durante la operación del sistema. Esto se debe a que la información requerida de entrada y salida del sistema está disponible sólo cuando el sistema se encuentra en operación.

### 2.1.1 Modelado del sistema

El primer paso en el método basado en modelo es construir un modelo matemático del sistema a monitorear. De esta manera es posible obtener información *a priori* sobre el comportamiento del sistema libre de fallas. En la medida que un modelo pueda describir con mayor exactitud el comportamiento del sistema real, mayores son las posibilidades de lograr una detección de fallas exitosa. No obstante, un modelo más exacto implica mayor complejidad del mismo, lo cual, en algunos casos puede complicar el diseño de los residuos. Se puede decir que la elección del modelo más apropiado dependerá entonces de las medidas de seguridad bajo las cuales el sistema en cuestión opera. Por ejemplo, en reactores nucleares, procesos químicos y aeronaves, la seguridad es un factor crítico.

Con el propósito de modelado, un sistema puede ser dividido en tres partes: accionadores, dinámicas del sistema y sensores. En algunos casos la dinámica de cada una

de estas partes se puede modelar por separado y después ser representadas apropiadamente como un solo sistema. En [8] se encuentra una extensa descripción al respecto. Una vez modelado el sistema, la siguiente etapa del método es la generación de residuos.

### 2.1.2 Generación de residuos

Un residuo es una señal generada a partir de mediciones disponibles de entrada y salida del sistema monitoreado, la cual debe ser portadora de información indicativa de fallas. Una forma común de generar residuos es estimar el vector de salida del sistema  $y$ . Después la salida estimada  $\hat{y}$  es sustraída del valor real medido de  $y$ , de este modo cada residuo resulta ser  $r_i = y_i - \hat{y}_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ;  $y, \hat{y}, r \in \mathbb{R}^p$ . Otra forma similar de generar el vector de residuos es a partir de la diferencia del valor nominal de un determinado vector de parámetros  $\Theta_{nom}$  y su estimado  $\hat{\Theta}$ , así el vector de residuos es  $r_{\Theta} = \Theta_{nom} - \hat{\Theta}$ . Es conveniente utilizar estos residuos cuando las fallas se pueden caracterizar como una variación no tolerada en uno o más parámetros.

Los residuos se deben diseñar de tal modo que sean iguales o converjan a cero ( $r_i \approx 0$ ) cuando no existan fallas presentes, y desviarse significativamente de cero ( $|r_i| > T_i > 0$ , donde  $T_i \in \mathbb{R}$  denota un umbral) bajo la presencia de fallas. Idealmente, un residuo sólo debe llevar información relacionada con fallas y al mismo tiempo ser insensible ante incertidumbres del modelo matemático.

Existen varias técnicas para generar el vector de residuos, en los métodos mencionados anteriormente el vector de residuos  $r$  corresponde al método basado en observador, aunque también se puede obtener mediante relaciones de paridad. El vector de residuos  $r_{\Theta}$  corresponde al método de estimación paramétrica. En [8] se presenta una buena revisión y comparación de éstas y algunas otras técnicas para la generación de residuos.

### 2.1.3 Evaluación de residuos

Una vez que los residuos son generados, la siguiente etapa es analizarlos, determinar si contienen información acerca de posibles fallas, y proporcionar información adecuada en caso de que exista alguna. A esta etapa se le llama evaluación de residuos o toma de decisiones. El proceso de evaluación puede consistir en una simple prueba de umbral

sobre el valor instantáneo o la media variable de los residuos, o puede consistir en métodos estadísticos.

Es importante obtener una estructura de residuos adecuada para una correcta evaluación. La etapa de evaluación de residuos se vuelve relativamente sencilla si éstos son bien diseñados.

### 2.1.4 Localización de fallas

La detección de fallas es generalmente seguida por el proceso de localización de fallas que distinguirá una falla particular de las otras. La generación de un residuo es suficiente para detectar fallas. Sin embargo, un conjunto de residuos es usualmente requerido para lograr la localización de fallas.

#### Residuos estructurados

Para lograr la tarea de localización de fallas el diseño de residuos estructurados resulta un método útil. Cada residuo se debe diseñar para ser sensitivo a una falla o un subconjunto de fallas, mientras permanezca insensible a las fallas restantes. El conjunto de residuos que tiene la sensibilidad requerida a fallas específicas e insensibilidad al resto de las fallas es conocido como *conjunto de residuos estructurados*. La ventaja de un vector de residuos estructurados es que la evaluación se simplifica a determinar cual de los residuos se desvía de cero.

Si todas las fallas posibles pueden ser localizadas, se puede diseñar un conjunto de residuos de acuerdo a las siguientes condiciones de sensibilidad de falla

$$r_i(t) = R(f_i(t)); \quad i \in \{1, 2, \dots, g\} \quad (2.1)$$

donde  $R(\cdot)$  denota una relación funcional,  $f_i$  denota la  $i$ -ésima falla y  $g$  es el número de fallas a detectar y ubicar. Los residuos resultantes son llamados *conjunto dedicado de residuos*. Se puede aplicar una sencilla lógica de umbral para determinar la aparición de una falla específica

$$r_i > T_i \implies f_i(t) \neq 0; \quad i \in \{1, 2, \dots, g\} \quad (2.2)$$

donde  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) son umbrales. Esta estructura es muy simple y se pueden detectar todas las fallas simultáneamente, sin embargo es muy difícil de diseñar en la práctica. Aun cuando este conjunto de residuos estructurados puede ser diseñado, normalmente no queda libertad de diseño para alcanzar otras características deseables como robustez ante errores de modelado. Un esquema mejor y más usado consiste en hacer cada residuo sensitivo a todas menos una falla, esto es

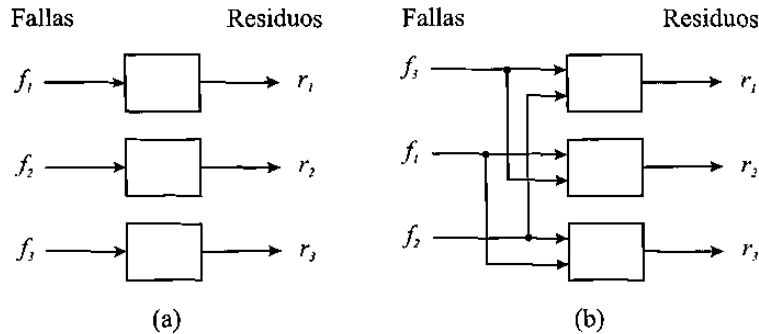
$$\begin{aligned}
 r_1(t) &= R(f_2(t), \dots, f_g(t)) \\
 &\vdots \\
 r_i(t) &= R(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f_{i+1}(t), \dots, f_g(t)) \\
 &\vdots \\
 r_g(t) &= R(f_1(t), \dots, f_{g-1}(t))
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

el cual es definido como *conjunto generalizado de residuos*. La localización se puede realizar de nueva cuenta usando sencillas pruebas de umbral de acuerdo a la siguiente lógica

$$\left. \begin{aligned}
 r_i(t) &\leq T_i \\
 r_j(t) &> T_j \quad \forall j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, g\}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_i(t) \neq 0; \tag{2.4}$$

para  $i = 1, 2, \dots, g$ .

En la Fig. 2.2 se ilustran ambos conjuntos de residuos para el caso de tres fallas distintas. Las fallas se pueden localizar usando cualquiera de los dos métodos.



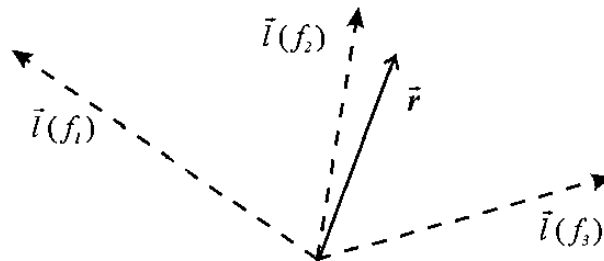
**Figura 2.2** Conjunto de residuos estructurados. (a) Esquema dedicado. (b) Esquema generalizado.

### Vector residual direccional

Una forma alternativa de lograr la localización de fallas es diseñar un vector residual direccional, el cual se sitúa en una dirección fija y especificada por una falla en el espacio residual, en respuesta a una falla en particular. Esto es, hacer el vector residual como

$$r(t|f_i(t)) = \alpha_i(t)l_i; \quad i \in \{1, 2, \dots, g\} \quad (2.5)$$

donde el vector constante  $l_i$  es la dirección distintiva de la  $i$ -ésima falla en el espacio residual y  $\alpha_i$  es un escalar que depende de las dinámicas y la magnitud de la falla. Con el residuo de dirección fija, el problema de localización es determinar de cual de las direcciones distintivas conocidas se sitúa más cerca el vector residual. Para localizar las fallas de manera confiable, cada dirección distintiva debe ser únicamente afín a una falla. En la Fig. 2.3 se ilustra este método de localización de fallas, en el cual el residuo es más cercano a la dirección de la falla  $f_2$  y por tanto esta falla es la más probable en el sistema.



**Figura 2.3** Vector residual direccional para localización de fallas.

## Capítulo 3

# Modelado de un transformador monofásico de dos devanados

En este capítulo se obtiene un modelo matemático en espacio de estado de un transformador monofásico de dos devanados. Se comenzará el análisis deduciendo las ecuaciones de enlace de flujo y las ecuaciones de voltaje, tomando en cuenta la resistencia y los flujos de dispersión de los devanados, y la permeabilidad del núcleo. Después, a partir de las ecuaciones de voltaje, se obtendrá el circuito equivalente, en el cual se incluirán las características de saturación e histéresis del núcleo.

### 3.1 Ecuaciones de enlace de flujo

Tomando en cuenta los flujos de dispersión, como se ilustra en la Fig. 3.1, el flujo total enlazado por cada devanado se puede dividir en dos componentes: un flujo mutuo,  $\phi_m$ , el cual enlaza a ambos devanados a través del núcleo, y una componente de dispersión que enlaza al devanado en sí mismo. Se puede expresar el flujo total en cada devanado en términos de estas componentes de la siguiente manera:

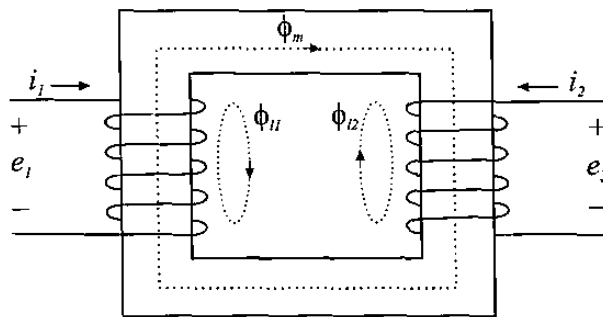


Figura 3.1 Transformador de dos devanados.

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_m$$

$$\phi_2 = \phi_{12} + \phi_m$$

donde  $\phi_{l1}$  y  $\phi_{l2}$  son los flujos de dispersión en los devanados primario y secundario, respectivamente. El flujo mutuo,  $\phi_m$ , proviene de la fuerza magnetomotriz (MMF) resultante de los dos devanados actuando sobre la trayectoria común del núcleo. Considerando que  $N_1$  vueltas del devanado primario enlazan a  $\phi_m$  y  $\phi_{l1}$ , entonces, el enlace de flujo del devanado primario es

$$\lambda_1 = N_1\phi_1 = N_1(\phi_{l1} + \phi_m) \quad (3.1)$$

El lado derecho de (3.1) se puede expresar en términos de las corrientes en los devanados sustituyendo los flujos por sus respectivas MMFs y permeabilidades. El flujo de dispersión  $\phi_{l1}$  es producido por la MMF del devanado primario,  $N_1i_1$ , sobre una trayectoria de permeabilidad  $P_{l1}$ . Asimismo, el flujo mutuo,  $\phi_m$  es producido por la combinación de MMFs de los dos devanados, es decir,  $N_1i_1 + N_2i_2$ , sobre la trayectoria mutua del núcleo, de permeabilidad  $P_m$ . Sustituyendo estos flujos, la ecuación (3.1) se puede escribir como

$$\lambda_1 = N_1 \underbrace{(N_1P_{l1}i_1)}_{\phi_{l1}} + \underbrace{(N_1i_1 + N_2i_2)P_m}_{\phi_m} = \underbrace{(N_1^2P_{l1} + N_1^2P_m)}_{L_{11}} i_1 + \underbrace{N_1N_2P_m}_{L_{12}} i_2$$

De manera similar, el enlace de flujo del devanado secundario es

$$\begin{aligned} \lambda_2 = N_2\phi_2 = N_2(\phi_{l2} + \phi_m) &= N_2(N_2P_{l2}i_2 + (N_1i_1 + N_2i_2)P_m) \\ &= \underbrace{N_2N_1P_m}_{L_{21}} i_1 + \underbrace{(N_2^2P_{l2} + N_2^2P_m)}_{L_{22}} i_2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de enlace de flujo resultantes se pueden expresar en términos de las inductancias de los devanados

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \\ \lambda_2 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \end{aligned}$$

donde  $L_{11}$  y  $L_{22}$  son las inductancias propias de los dos devanados, y  $L_{12}$  y  $L_{21}$  son las inductancias mutuas entre ellos.

La inductancia propia del devanado primario se puede considerar como la suma de componentes de dispersión  $L_{l1}$ , y de magnetización  $L_{m1}$ , de su propia corriente,  $i_1$ . Así, para el devanado primario, con  $i_2 = 0$  se tiene que

$$L_{11} = \frac{\lambda_{1i_2=0}}{i_1} = \frac{N_1(\phi_{l1} + \phi_{m1})}{i_1} = N_1^2P_{l1} + N_1^2P_m = L_{l1} + L_{m1}$$

donde  $\phi_{m1} = N_1 P_m i_1$  es la porción del flujo mutuo producida por  $i_1$ . De igual manera, para el devanado secundario se tiene

$$L_{22} = \frac{\lambda_{2,i_1=0}}{i_2} = \frac{N_2(\phi_{l2} + \phi_{m2})}{i_2} = N_2^2 P_{l2} + N_2^2 P_m = L_{l2} + L_{m2}$$

donde  $L_{l2}$  es la inductancia de dispersión, y  $L_{m2}$  es la inductancias de magnetización del devanado secundario.

Tomando en cuenta que los valores de  $L_{m1}$  y  $L_{m2}$  dependen del número de vueltas en su respectivo devanado y de la permeabilidad mutua, se puede obtener una relación entre las inductancias de magnetización; de  $L_{m1}$  tenemos que  $P_m = L_{m1}/N_1^2$ , sustituyendo lo anterior en  $L_{m2}$  se obtiene dicha relación

$$L_{m2} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 L_{m1} \quad (3.2)$$

Asimismo, las inductancias mutuas dadas por

$$L_{12} = L_{21} = N_1 N_2 P_m = L_{21}$$

pueden ser relacionadas con las inductancias de magnetización como sigue

$$L_{12} = \frac{N_2}{N_1} L_{m1} = \frac{N_1}{N_2} L_{m2} \quad (3.3)$$

Considerando las relaciones anteriores, las ecuaciones de enlace de flujo se convierten en

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= L_{l1} i_1 + L_{m1} \left( i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2 \right) \\ \lambda_2 &= L_{l2} i_2 + L_{m2} \left( \frac{N_1}{N_2} i_1 + i_2 \right) \end{aligned}$$

## 3.2 Ecuaciones de voltaje

El voltaje inducido en un devanado es igual a la relación de cambio del enlace de flujo en dicho devanado con respecto al tiempo. Así, el voltaje en cada devanado del transformador está dado por la derivada temporal de su respectivo enlace de flujo

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_{l1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt} (i_1 + (N_2/N_1)i_2) \quad (3.4)$$



donde la corriente  $(N_2/N_1)i_2$  es el valor equivalente de la corriente del devanado secundario referida a un devanado de  $N_1$  vueltas, en este caso al devanado primario. Denotando este valor por  $i'_2$  (3.4) se convierte en

$$e_1 = L_{l1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt}(i_1 + i'_2)$$

De la misma forma, podemos obtener el voltaje inducido en el devanado secundario como

$$e_2 = L_{l2} \frac{di_2}{dt} + L_{m2} \frac{d}{dt}((N_1/N_2)i_1 + i_2) \quad (3.5)$$

donde el voltaje  $e_2$  también puede ser referido al devanado primario, o escalado a un devanado ficticio de  $N_1$  vueltas. Multiplicando (3.5) por  $N_1/N_2$  y sustituyendo  $i_2$  en términos de  $i'_2$ , se tiene que

$$e'_2 = \frac{N_1}{N_2} e_2 = L_{l2} \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{di'_2}{dt} + L_{m2} \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{d}{dt}(i_1 + i'_2) \quad (3.6)$$

Usando la relación entre  $L_{m1}$  y  $L_{m2}$ , podemos reescribir (3.6) como

$$e'_2 = L'_{l2} \frac{di'_2}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt}(i_1 + i'_2)$$

donde  $L'_{l2} = (N_1/N_2)^2 L_{l2}$ .

El voltaje en las terminales de un devanado es la suma del voltaje inducido y la caída de voltaje debida a la resistencia del devanado. De esta manera el voltaje en terminales del devanado primario está dado por

$$v_1 = R_1 i_1 + e_1 = R_1 i_1 + L_{l1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt}(i_1 + i'_2) \quad (3.7)$$

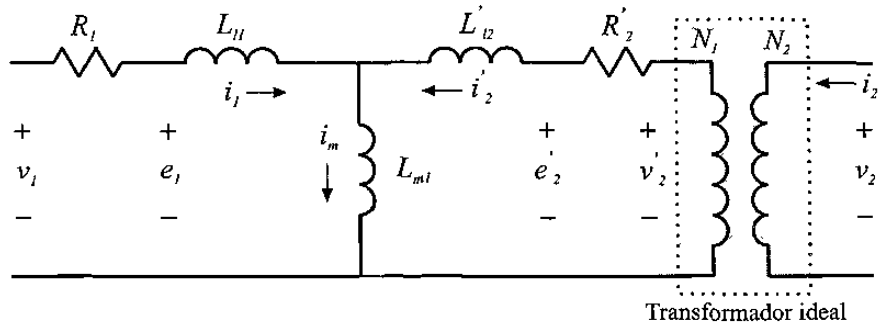
La caída resistiva de voltaje en el devanado secundario se agrega referida al devanado primario, así

$$v'_2 = R'_2 i'_2 + e'_2 = R'_2 i'_2 + L'_{l2} \frac{di'_2}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt}(i_1 + i'_2) \quad (3.8)$$

donde  $R'_2 = (N_1/N_2)^2 R_2$ .

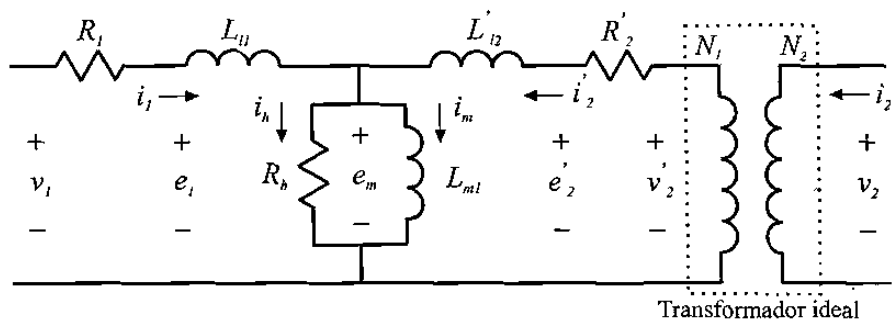
### 3.3 Circuito equivalente

La forma de las ecuaciones de voltaje (3.7) y (3.8) con el término común  $L_{m1}$  sugieren un circuito equivalente como el mostrado en la Fig. 3.2 para el transformador de dos devanados.



**Figura 3.2** Circuito equivalente del transformador de dos devanados.

Para obtener un modelo más apropiado es necesario incluir las pérdidas en el núcleo, las cuales se pueden aproximar mediante una resistencia conectada en paralelo con la inductancia de magnetización,  $L_{m1}$ . El circuito equivalente resultante se muestra en la Fig. 3.3, el cual ha sido sido ampliamente utilizado y se encuentra en gran parte de la literatura sobre máquinas eléctricas, e.g. [9],[10].



**Figura 3.3** Circuito equivalente considerando pérdidas en el núcleo.

### 3.4 Representación en espacio de estado

Analizando el circuito equivalente de la Fig. 3.3 mediante las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff, obtenemos las siguientes relaciones

$$i_1 + i'_2 = i_h + i_m$$

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + e_m$$

$$v'_2 = R'_2 i'_2 + L'_{12} \frac{di'_2}{dt} + e_m$$

donde el voltaje  $e_m$  puede ser expresado en términos de  $R_h$  e  $i_h$ , o en términos de la derivada de la corriente  $i_m$  y la inductancia de magnetización, es decir

$$e_m = L_{m1} \frac{di_m}{dt} = R_h(i_1 + i_2' - i_m) \quad (3.9)$$

Para facilitar la representación en espacio de estado sustituimos  $e_m$  por  $R_h i_h$  en las ecuaciones de voltaje

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{l1} \frac{di_1}{dt} + R_h(i_1 + i_2' - i_m) \quad (3.10)$$

$$v_2' = R_2' i_2' + L_{l2}' \frac{di_2'}{dt} + R_h(i_1 + i_2' - i_m) \quad (3.11)$$

así, podemos escribir las ecuaciones (3.9)-(3.11) como:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_{l1}} i_1 - \frac{R_h}{L_{l1}} (i_1 + i_2' - i_m) + \frac{1}{L_{l1}} v_1 \quad (3.12)$$

$$\frac{di_2'}{dt} = -\frac{R_2'}{L_{l2}'} i_2' - \frac{R_h}{L_{l2}'} (i_1 + i_2' - i_m) + \frac{1}{L_{l2}'} v_2' \quad (3.13)$$

$$\frac{di_m}{dt} = \frac{R_h}{L_{m1}} (i_1 + i_2' - i_m) \quad (3.14)$$

### Característica de saturación del núcleo

Con el fin de obtener un modelo que describa el comportamiento de un transformador real de la manera más aproximada posible, es necesario incluir la característica de saturación en el núcleo.

Un modelo sencillo y eficiente para aproximar la curva de saturación está dado por la siguiente ecuación

$$\lambda_m(i_m) = \lambda_n \arctan(mi_m) + \Delta\lambda i_m$$

donde las constantes  $\lambda_n$ ,  $m$  y  $\Delta\lambda$  son calculadas a partir de una curva de saturación conocida [11]. Por simplicidad y debido a que no tiene un efecto significativo, hacemos  $\Delta\lambda = 0$ , así

$$\lambda_m(i_m) = \lambda_n \arctan(mi_m) \quad (3.15)$$

Para incluir esta característica de saturación en (3.14) es necesario obtener el valor de  $L_{m1}$ . En general,  $\lambda = iL$ , entonces, derivando  $\lambda$  respecto a la corriente  $i$  podemos obtener el valor de la inductancia. Derivando (3.15) con respecto a  $i_m$  obtenemos

$$L_{m1} = \frac{d\lambda_m}{di_m} = \frac{\lambda_n m}{1 + m^2 i_m^2}$$

De esta manera podemos reescribir (3.14) como

$$\frac{di_m}{dt} = \frac{R_h}{\lambda_n m} (1 + m^2 i_m^2) (i_1 + i_2' - i_m) \quad (3.16)$$

Así, las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.16) describen el comportamiento de un transformador de dos devanados incluyendo las características de saturación e histéresis.

Tomando como estados las corrientes en el devanado primario  $x_1 = i_1$ , en el devanado secundario  $x_2 = i_2'$  y en la rama de magnetización  $x_3 = i_m$ , y como entradas los voltajes del lado primario  $u_1 = v_1$ , y del lado secundario  $u_2 = v_2$ , el modelo no lineal en espacio de estado para el transformador de dos devanados es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{(R_1 + R_h)}{L_{l1}} x_1 - \frac{R_h}{L_{l1}} x_2 + \frac{R_h}{L_{l1}} x_3 + \frac{1}{L_{l1}} u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{R_h}{L'_{l2}} x_1 - \frac{(R_2' + R_h)}{L'_{l2}} x_2 + \frac{R_h}{L'_{l2}} x_3 + \frac{k_{12}}{L'_{l2}} u_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{R_h}{\lambda_n m} (x_1 + x_2 - x_3) + \frac{R_h m}{\lambda_n} (x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 - x_3^3) \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $k_{12} = N_1/N_2$ .

### 3.5 Resultados de simulación

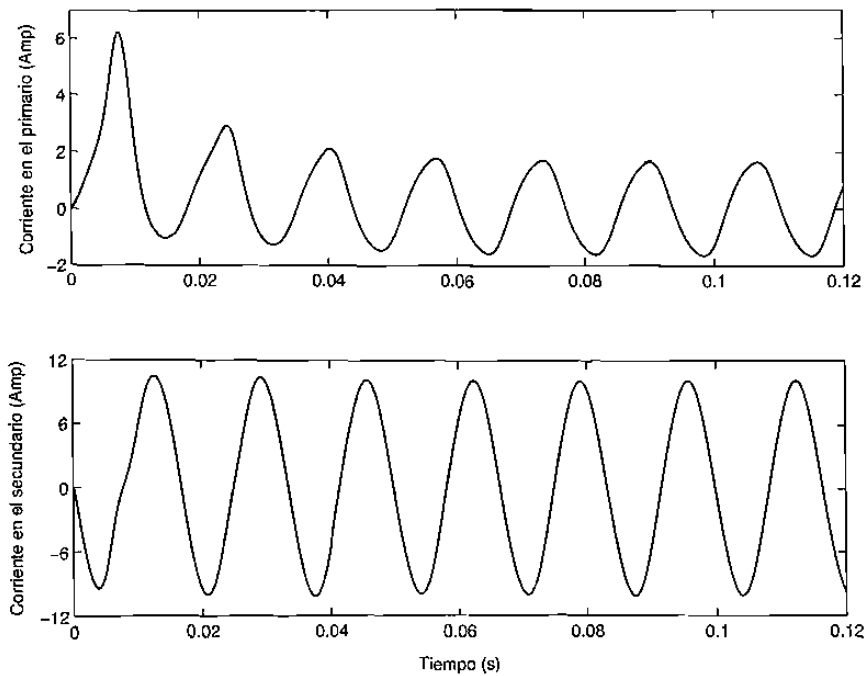
En esta sección se presentan los resultados de simulación para el modelo matemático del transformador monofásico de dos devanados descrito por (3.17). Se tomaron como salidas las corrientes primaria y secundaria, y el voltaje de entrada del lado secundario como  $v_2 = -R_L i_2$ ; la resistencia de carga  $R_L$  y los parámetros utilizados para el circuito equivalente se muestran en la Tabla 3.1, los cuales fueron propuestos arbitrariamente para efectos de simulación.

La señal de entrada empleada para la simulación es  $v_1 = 120 \cdot \text{sen}(120\pi t)$ , y el instante de energización es en  $t = 0$  seg. Es decir, una señal sinusoidal de 60 Hz de frecuencia y 120 volts de amplitud.

Las formas de onda de las corrientes se muestran en la Fig. 3.4, donde se observa el efecto de la corriente *inrush* en las corrientes de primario y secundario, originado por la energización del transformador, lo cual es una característica de un transformador real. Así, el modelo (3.17) representa adecuadamente, el comportamiento transitorio del transformador.

**Tabla 3.1** Parámetros del circuito equivalente del transformador.

| $R_1$        | $R_2$          | $R_h$      | $L_{l1}$  | $L_{l2}$   | $\lambda_n$ | $m$    | $N_1$ | $N_2$ | $v_1$ |
|--------------|----------------|------------|-----------|------------|-------------|--------|-------|-------|-------|
| $5.8 \Omega$ | $0.058 \Omega$ | $4k\Omega$ | $11.05mH$ | $0.1105mH$ | 0.3215      | 0.8642 | 400   | 40    | 120V  |



**Figura 3.4** Corrientes del transformador de dos devanados.

## Capítulo 4

# Modelado de fallas incipientes en un transformador monofásico

En el estudio de fallas internas en transformadores es común encontrar que se realiza un análisis del devanado defectuoso dividiéndolo en dos o tres subdevanados y calculando los valores de resistencias y de inductancias propias y mutuas de los devanados resultantes [2], [4]. Sin embargo, estos métodos se han desarrollado para el caso de cortocircuito en devanados. En este capítulo se obtienen modelos matemáticos del transformador considerando el modelo del material aislante en el subdevanado imperfecto, para lo cual es conveniente considerar al devanado defectuoso como dos devanados, uno para la parte funcional y otro para la parte deteriorada. Partiendo de lo anterior realizaremos un análisis semejante al presentado en el capítulo anterior, de este modo, modelaremos un transformador de tres devanados para el caso de falla espira-tierra, y uno de cuatro devanados para el caso de falla espira-espira.

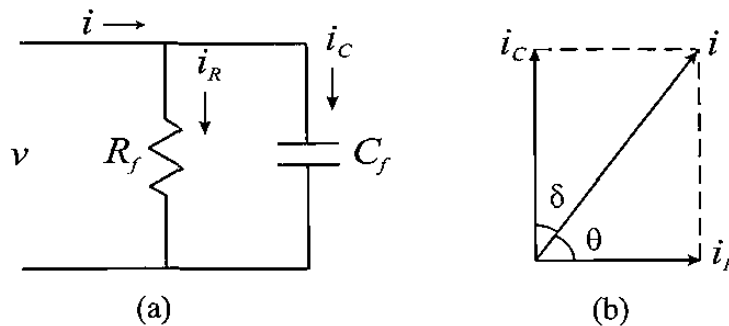
### 4.1 Modelado del aislante deteriorado

El deterioro del aislante entre espiras es una de las mayores causas de fallas internas en devanados de transformadores. Durante la operación del transformador, un intenso campo eléctrico es aplicado al material dieléctrico, lo que puede ocasionar el envejecimiento y deterioro del aislante. Los principales factores que causan el envejecimiento y desgaste de un aislante son: tensiones térmicas, eléctricas y mecánicas, humedad, etc. La tensión térmica se debe al calentamiento interno debido a sobrecargas de corriente y a la propia temperatura ambiente. La tensión eléctrica se debe al gradiente de voltaje en el aislante. En condiciones normales de operación, este gradiente de voltaje no causa un envejecimiento apreciable. Sin embargo, debido al efecto capacitivo en los devanados, se producen sobrevoltajes transitorios originados por cortocircuitos o maniobras de conmutación que pueden acelerar la degradación del aislante. Las tensiones mecánicas se deben a los esfuerzos en los devanados debido a altas corrientes de cortocircuitos externos

fluyendo por los devanados, las cuales provocan vibraciones severas en las espiras de los devanados debido a la interacción de campos magnéticos. La humedad es otra de las principales causas del empobrecimiento de las propiedades del dieléctrico, debido a que puede formar trayectorias conductivas en el material aislante o reaccionar químicamente con éste y alterar sus propiedades.

Para representar el comportamiento eléctrico del material dieléctrico, se ha encontrado apropiado aproximarlos mediante un circuito equivalente como el mostrado en la Fig. 4.1(a) [6], donde  $v$  es el voltaje aplicado e  $i$  es la corriente a través del aislante. La corriente  $i_C$  es la componente capacitiva, y la corriente  $i_R$  es la componente resistiva de  $i$ . La resistencia  $R_f$  representa las pérdidas en el dieléctrico. La capacitancia del dieléctrico  $C_f$  está dada por (4.1), donde  $C_0$  es la capacitancia equivalente del aislante en el vacío y  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa o constante del dieléctrico.

$$C_f = \epsilon_r C_0 \quad (4.1)$$



**Figura 4.1** Circuito equivalente del material dieléctrico. (a) Circuito equivalente. (b) Diagrama fasorial correspondiente.

En la Fig. 4.1(b),  $\delta$  está definido como el ángulo de pérdida, el cual representa las pérdidas de energía en el aislante. La  $\tan(\delta)$  es comúnmente conocido como factor de disipación. El  $\cos(\theta)$  es el factor de potencia del dieléctrico. Cuando el dieléctrico está en buen estado, las pérdidas son muy pequeñas ( $\delta \approx 0$ ), y la corriente se adelanta 90 grados al voltaje aplicado. Durante el envejecimiento del dieléctrico, las pérdidas se incrementan, por lo que el ángulo entre la corriente y el voltaje aplicado es menor de 90 grados. El factor de disipación puede ser expresado como:

$$\tan(\delta) = \frac{1}{\omega R_f C_f} \quad (4.2)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la señal de voltaje  $v$  en radianes por segundo.

El factor de disipación se usa generalmente para describir las propiedades macroscópicas del material dieléctrico. La energía disipada en forma de calor en el dieléctrico es proporcional a la  $\tan(\delta)$ . La variación de la  $\tan(\delta)$  con el voltaje aplicado es una relación importante que provee información útil acerca de la calidad del aislante y si existe alguna imperfección en él.

## 4.2 Modelado de un transformador de tres devanados

Para modelar una falla incipiente entre una espira y tierra en cualquiera de los devanados del transformador monofásico estudiado anteriormente, resulta conveniente modelar un transformador de tres devanados, con el fin de utilizar dos de éstos para formar ya sea, el devanado primario, o el secundario de un transformador de dos devanados. Por el momento consideremos que la falla se presenta en el lado primario. Así, los devanados  $a$  y  $b$  de la Fig. 4.2 formarán el devanado primario al conectarse en serie.

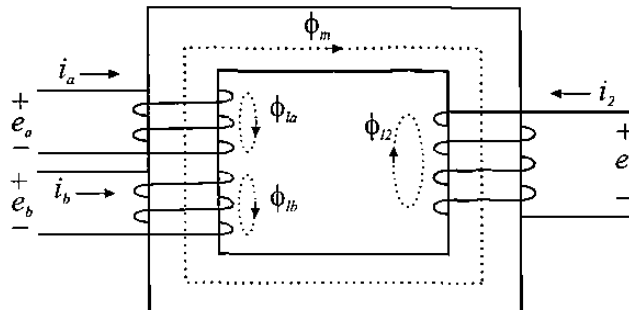


Figura 4.2 Transformador de tres devanados.

### 4.2.1 Ecuaciones de enlace de flujo

Realicemos ahora el análisis de un transformador de tres devanados como el de la Fig. 4.2. Tomando en cuenta los flujos de dispersión, el flujo total en cada devanado se puede expresar como

$$\phi_a = \phi_{la} + \phi_m$$

$$\phi_b = \phi_{lb} + \phi_m$$

$$\phi_2 = \phi_{l2} + \phi_m$$



donde  $\phi_{la}$ ,  $\phi_{lb}$  y  $\phi_{l2}$  son los flujos de dispersión en los devanados  $a$ ,  $b$  y  $2$ , respectivamente. El flujo mutuo,  $\phi_m$ , proviene de la MMF resultante de los tres devanados actuando sobre una trayectoria común. Considerando que el número de vueltas de cada devanado enlaza a su respectivo flujo, las ecuaciones de enlace de flujo resultan ser

$$\lambda_a = N_a \phi_a = N_a(\phi_{la} + \phi_m) = N_a(N_a P_{la} i_a + (N_a i_a + N_b i_b + N_2 i_2) P_m)$$

$$\lambda_a = (N_a^2 P_{la} + N_a^2 P_m) i_a + N_a N_b P_m i_b + N_a N_2 P_m i_2$$

en el devanado  $b$

$$\lambda_b = N_b(\phi_{lb} + \phi_m) = N_b(N_b P_{lb} i_b + (N_a i_a + N_b i_b + N_2 i_2) P_m)$$

$$\lambda_b = N_b N_a P_m i_a + (N_b^2 P_{lb} + N_b^2 P_m) i_b + N_b N_2 P_m i_2$$

y en el secundario

$$\lambda_2 = N_2(\phi_{l2} + \phi_m) = N_2(N_2 P_{l2} i_2 + (N_a i_a + N_b i_b + N_2 i_2) P_m)$$

$$\lambda_2 = N_2 N_a P_m i_a + N_2 N_b P_m i_b + (N_2^2 P_{l2} + N_2^2 P_m) i_2$$

Las ecuaciones de enlace de flujo se pueden expresar en términos de las inductancias de los devanados como:

$$\lambda_a = L_a i_a + L_{ab} i_b + L_{a2} i_2$$

$$\lambda_b = L_{ba} i_a + L_b i_b + L_{b2} i_2$$

$$\lambda_2 = L_{2a} i_a + L_{2b} i_b + L_2 i_2$$

donde  $L_a$ ,  $L_b$  y  $L_2$ , son las inductancias propias de los tres devanados, y  $L_{ab}$ ,  $L_{a2}$ ,  $L_{ba}$ ,  $L_{b2}$ ,  $L_{2a}$  y  $L_{2b}$ , son las inductancias mutuas entre ellos.

Las inductancias propias contienen dos términos y se pueden expresar como

$$L_a = N_a^2 P_{la} + N_a^2 P_m = L_{la} + L_{ma}$$

$$L_b = N_b^2 P_{lb} + N_b^2 P_m = L_{lb} + L_{mb}$$

$$L_2 = N_2^2 P_{l2} + N_2^2 P_m = L_{l2} + L_{m2}$$

donde  $L_{la}$ ,  $L_{lb}$  y  $L_{l2}$  son las inductancias de dispersión, y  $L_{ma}$ ,  $L_{mb}$  y  $L_{m2}$  son las inductancias de magnetización de su respectivo devanado, las cuales están relacionadas como:

$$L_{mb} = \left(\frac{N_b}{N_a}\right)^2 L_{ma} \quad (4.3)$$

$$L_{m2} = \left(\frac{N_2}{N_a}\right)^2 L_{ma} \quad (4.4)$$

Las inductancias mutuas se pueden relacionar con las inductancias de magnetización de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_{ab} &= L_{ba} = \frac{N_b}{N_a} L_{ma} = \frac{N_a}{N_b} L_{mb} \\ L_{a2} &= L_{2a} = \frac{N_2}{N_a} L_{ma} = \frac{N_a}{N_2} L_{m2} \\ L_{b2} &= L_{2b} = \frac{N_2}{N_b} L_{mb} = \frac{N_b}{N_2} L_{m2} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las relaciones anteriores, las ecuaciones de enlace de flujo se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} \lambda_a &= L_{la} i_a + L_{ma} \left( i_a + \frac{N_b}{N_a} i_b + \frac{N_2}{N_a} i_2 \right) \\ \lambda_b &= L_{lb} i_b + L_{mb} \left( \frac{N_a}{N_b} i_a + i_b + \frac{N_2}{N_b} i_2 \right) \\ \lambda_2 &= L_{l2} i_2 + L_{m2} \left( \frac{N_a}{N_2} i_a + \frac{N_b}{N_2} i_b + i_2 \right) \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Ecuaciones de voltaje

El voltaje en cada devanado se puede obtener derivando su respectivo enlace de flujo con respecto al tiempo, así el voltaje en el devanado  $a$  es

$$e_a = \frac{d\lambda_a}{dt} = L_{la} \frac{di_a}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + (N_b/N_a)i_b + (N_2/N_a)i_2)$$

donde las corrientes  $(N_b/N_a)i_b$  y  $(N_2/N_a)i_2$  son los valores equivalentes de  $i_b$  e  $i_2$  referidos al devanado  $a$  de  $N_a$  vueltas, denotando estos valores por  $i'_b$  e  $i''_2$ ; la ecuación anterior se puede reescribir como

$$e_a = L_{la} \frac{di_a}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2) \quad (4.5)$$

De forma similar, la ecuación del voltaje  $e_b$  se obtiene como

$$e_b = \frac{d\lambda_b}{dt} = L_{lb} \frac{di_b}{dt} + L_{mb} \frac{d}{dt} ((N_a/N_b)i_a + i_b + (N_2/N_b)i_2)$$

sustituyendo  $i_b$  por  $(N_a/N_b)i'_b$  e  $i_2$  por  $(N_a/N_2)i''_2$  se tiene que

$$e_b = L_{lb} \frac{N_a}{N_b} \frac{di_b}{dt} + L_{mb} \frac{N_a}{N_b} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2)$$

refiriendo  $e_b$  al devanado  $a$  como  $e'_b = (N_a/N_b)e_b$  se obtiene

$$e'_b = L_{lb} \left( \frac{N_a}{N_b} \right)^2 \frac{di_b}{dt} + L_{mb} \left( \frac{N_a}{N_b} \right)^2 \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2)$$

usando la relación entre  $L_{ma}$  y  $L_{mb}$  y refiriendo  $L_{lb}$  al devanado  $a$  como  $L'_{lb} = (N_a/N_b)^2 L_{lb}$  la ecuación de  $e'_b$  se puede expresar como

$$e'_b = L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2) \quad (4.6)$$

De manera similar, el voltaje en el devanado 2 es

$$\begin{aligned} e_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} &= L_{l2} \frac{di_2}{dt} + L_{m2} \frac{d}{dt} ((N_a/N_2)i_a + (N_b/N_2)i_b + i_2) \\ &= L_{l2} \frac{N_a}{N_2} \frac{di''_2}{dt} + L_{m2} \frac{N_a}{N_b} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2) \end{aligned}$$

refiriendo  $e_2$  al devanado  $a$  como  $e''_2 = (N_a/N_2)e_2$  se tiene que

$$e''_2 = L_{l2} \left( \frac{N_a}{N_2} \right)^2 \frac{di''_2}{dt} + L_{m2} \left( \frac{N_a}{N_2} \right)^2 \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2)$$

usando la relación (4.4) y refiriendo  $L_{l2}$  al devanado  $a$  como  $L''_{l2} = (N_a/N_2)^2 L_{l2}$ , se obtiene

$$e''_2 = L''_{l2} \frac{di''_2}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2) \quad (4.7)$$

Agregando la caída de voltaje en las resistencias de los devanados referidas apropiadamente se tienen las siguientes ecuaciones de voltaje

$$v_a = R_a i_a + L_{la} \frac{di_a}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2) \quad (4.8)$$

$$v'_b = R'_b i'_b + L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2) \quad (4.9)$$

$$v''_2 = R''_2 i''_2 + L''_{l2} \frac{di''_2}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i''_2) \quad (4.10)$$

donde  $R'_b = (N_a/N_b)^2 R_b$  y  $R''_2 = (N_a/N_2)^2 R_2$ .

### 4.2.3 Circuito equivalente del transformador de tres devanados

A partir de las ecuaciones (4.8)-(4.10), y aproximando las pérdidas en el núcleo mediante una resistencia en paralelo con la inductancia de magnetización, obtenemos el circuito equivalente mostrado en la Fig. 4.3, para el transformador de tres devanados.

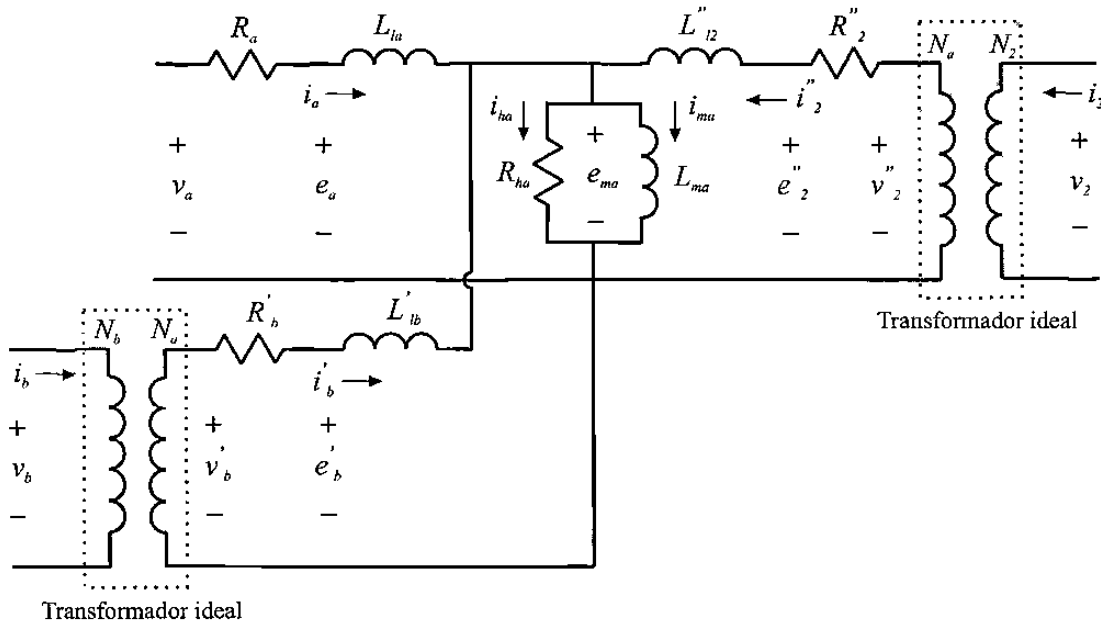


Figura 4.3 Circuito equivalente del transformador de tres devanados.

Analizando el circuito equivalente de la Fig. 4.3 mediante las leyes de Kirchhoff obtenemos las siguientes relaciones

$$i_a + i'_b + i''_2 = i_{ha} + i_{ma}$$

$$e_{ma} = L_{ma} \frac{di_{ma}}{dt} = R_{ha}(i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) \quad (4.11)$$

De esta forma podemos expresar los voltajes en los devanados como

$$v_a = R_a i_a + L_{la} \frac{di_a}{dt} + R_{ha}(i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) \quad (4.12)$$

$$v'_b = R'_b i'_b + L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + R_{ha}(i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) \quad (4.13)$$

$$v''_2 = R''_2 i''_2 + L''_{l2} \frac{di''_2}{dt} + R_{ha}(i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) \quad (4.14)$$

#### 4.2.4 Parámetros del modelo del transformador de tres devanados

Para simular el comportamiento del transformador de dos devanados con falla, se deben calcular adecuadamente los parámetros del modelo del transformador de tres devanados. A continuación, calculamos los parámetros para simular tanto el devanado primario como el secundario.

##### Parámetros para formar el devanado primario

Consideremos el caso en el que los devanados  $a$  y  $b$  conforman el devanado primario del transformador del capítulo anterior, los parámetros de estos devanados se pueden obtener a partir de los parámetros del devanado primario de la siguiente manera.

La suma de los voltajes en los devanados  $a$  y  $b$  debe ser igual al voltaje en el devanado primario, es decir

$$v_1 = v_a + v_b = v_a + \frac{N_b}{N_a} v_b'$$

Sustituyendo los voltajes tenemos

$$\begin{aligned} v_1 = & R_a i_a + L_{la} \frac{di_a}{dt} + R_{ha} (i_a + i_b' + i_2'' - i_{ma}) \\ & + \frac{N_b}{N_a} \left( R_b i_b' + L_{lb}' \frac{di_b'}{dt} + R_{ha} (i_a + i_b' + i_2'' - i_{ma}) \right) \end{aligned}$$

sustituyendo los valores referidos de corriente en términos de sus valores reales resulta

$$\begin{aligned} v_1 = & R_a i_a + L_{la} \frac{di_a}{dt} + R_{ha} \left( i_a + \frac{N_b}{N_a} i_b + \frac{N_2}{N_a} i_2 - i_{ma} \right) \\ & + R_b i_b + L_{lb} \frac{di_b}{dt} + R_{ha} \frac{N_b}{N_a} \left( i_a + \frac{N_b}{N_a} i_b + \frac{N_2}{N_a} i_2 - i_{ma} \right) \end{aligned}$$

así, podemos reescribir el voltaje en el primario como

$$v_1 = R_a i_a + R_b i_b + L_{la} \frac{di_a}{dt} + L_{lb} \frac{di_b}{dt} + R_{ha} \left( \frac{N_a + N_b}{N_a} \right) \left( i_a + \frac{N_b}{N_a} i_b + \frac{N_2}{N_a} i_2 - i_{ma} \right)$$

El conectar en serie los devanados  $a$  y  $b$  para formar el devanado primario, implica que  $i_a = i_b = i_1$ , además,  $N_1 = N_a + N_b$ , así tenemos que

$$v_1 = (R_a + R_b) i_1 + (L_{la} + L_{lb}) \frac{di_1}{dt} + R_{ha} \left( \frac{N_1}{N_a} \right) \left( \left( \frac{N_a + N_b}{N_a} \right) i_1 + \frac{N_2}{N_a} i_2 - i_{ma} \right)$$

y finalmente

$$v_1 = (R_a + R_b)i_1 + (L_{la} + L_{lb})\frac{di_1}{dt} + R_{ha} \left(\frac{N_1}{N_a}\right)^2 \left(i_1 + \frac{N_2}{N_1}i_2 - \frac{N_a}{N_1}i_{ma}\right) \quad (4.15)$$

Comparando (4.15) con (3.10) obtenemos las siguientes relaciones

$$R_1 = R_a + R_b \quad (4.16)$$

$$L_{l1} = L_{la} + L_{lb} \quad (4.17)$$

$$R_{ha} = \left(\frac{N_a}{N_1}\right)^2 R_h \quad (4.18)$$

$$i_{ma} = \frac{N_1}{N_a}i_m \quad (4.19)$$

donde los valores de  $R_{ha}$  e  $i_{ma}$  se obtienen directamente de la comparación de ecuaciones.

Ahora obtenemos los valores de las resistencias y de las inductancias de dispersión de los devanados. La resistencia de un devanado es proporcional a la longitud del alambre que lo forma, por lo que podemos aproximar adecuadamente el valor de dicha resistencia usando la proporción de vueltas de cada devanado de la siguiente manera

$$R_a = \frac{N_a}{N_1}R_1, \quad R_b = \frac{N_b}{N_1}R_1 \quad (4.20)$$

Podemos obtener los valores de las inductancias de dispersión a partir de (4.17) y usando la relación de proporcionalidad  $L_{la}/L_{lb} = (N_a/N_b)^2$  [2], así, tenemos que

$$L_{la} = \frac{N_a^2}{N_a^2 + N_b^2}L_{l1}, \quad L_{lb} = \frac{N_b^2}{N_a^2 + N_b^2}L_{l1} \quad (4.21)$$

La relación entre  $L_{ma}$  y  $L_{m1}$  se puede obtener de manera similar; considerando ahora la ecuación de voltaje del secundario referido al devanado  $a$  sin considerar pérdidas en el núcleo

$$v_2'' = R_2''i_2'' + L_{l2}''\frac{di_2''}{dt} + L_{ma}\frac{d}{dt}(i_a + i_b' + i_2'')$$

y multiplicando la ecuación anterior por  $N_2/N_a$ , y además sustituyendo  $i_2'' = (N_2/N_a)i_2$  tenemos

$$v_2 = R_2'' \left(\frac{N_2}{N_a}\right)^2 i_2 + L_{l2}'' \left(\frac{N_2}{N_a}\right)^2 \frac{di_2}{dt} + L_{ma} \frac{N_2}{N_a} \left(i_a + \frac{N_b}{N_a}i_b + \frac{N_2}{N_a}i_2\right)$$

considerando que  $i_a = i_b = i_1$  cuando se conectan en serie los devanados  $a$  y  $b$  resulta

$$v_2 = R_2i_2 + L_{l2}\frac{di_2}{dt} + L_{ma}\frac{N_2}{N_a} \left( \left(\frac{N_a + N_b}{N_a}\right) i_1 + \frac{N_2}{N_a}i_2 \right)$$

refiriendo el voltaje  $v_2$  al primario como  $v'_2 = (N_1/N_2)v_2$  y reemplazando  $i_2$  por  $(N_1/N_2)i'_2$  obtenemos

$$v'_2 = R'_2 i'_2 + L'_{l2} \frac{di'_2}{dt} + L_{ma} \left( \frac{N_1}{N_a} \right)^2 \frac{d}{dt} (i_1 + i'_2) \quad (4.22)$$

comparando (4.22) con (3.8), tenemos que

$$L_{ma} = \left( \frac{N_a}{N_1} \right)^2 L_{m1} \quad (4.23)$$

Así, los parámetros a utilizar para formar el devanado primario con los devanados  $a$  y  $b$  se calculan a partir de las ecuaciones (4.18), (4.20), (4.21) y (4.23).

### Parámetros para formar el devanado secundario

Ahora consideremos el caso en el que los devanados  $a$  y  $b$  se usan para formar el devanado secundario, las ecuaciones de voltaje son las siguientes

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + L_{l1} \frac{di_1}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \\ v'_a &= R'_a i'_a + L'_{la} \frac{di'_a}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \\ v'_b &= R'_b i'_b + L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \\ L_{m1} \frac{di_m}{dt} &= R_h (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \end{aligned} \quad (4.24)$$

con el voltaje del secundario  $v_2 = v_a + v_b$ . Los parámetros, voltajes y corrientes de los devanados  $a$  y  $b$  están referidos al devanado primario como  $R'_a = k_{1a}^2 R_a$ ,  $L'_{la} = k_{1a}^2 L_{la}$ ,  $i'_a = (1/k_{1a})i_a$ ,  $v'_a = k_{1a}v_a$ ,  $R'_b = k_{1b}^2 R_b$ ,  $L'_{lb} = k_{1b}^2 L_{lb}$ ,  $i'_b = (1/k_{1b})i_b$ ,  $v'_b = k_{1b}v_b$ , con  $k_{1a} = N_1/N_a$  y  $k_{1b} = N_1/N_b$ .

Los parámetros de estos devanados se pueden obtener mediante un procedimiento similar al empleado para obtener los parámetros para el primario, sólo que ahora se calculan a partir de los parámetros del devanado secundario. Así, tenemos que

$$v_2 = v_a + v_b = \frac{N_a}{N_1} v'_a + \frac{N_b}{N_1} v'_b$$

Sustituyendo las ecuaciones de voltaje obtenemos

$$\begin{aligned} v_2 &= R_a \left( \frac{N_1}{N_a} \right) i'_a + L_{la} \left( \frac{N_1}{N_a} \right) \frac{di'_a}{dt} + R_h \left( \frac{N_a}{N_1} \right) (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \\ &+ R_b \left( \frac{N_1}{N_b} \right) i'_b + L_{lb} \left( \frac{N_1}{N_b} \right) \frac{di'_b}{dt} + R_h \left( \frac{N_b}{N_1} \right) (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \end{aligned}$$

lo cual se puede reescribir como

$$v_2 = R_a i_a + R_b i_b + L_{la} \frac{di_a}{dt} + L_{lb} \frac{di_b}{dt} + R_h \left( \frac{N_a + N_b}{N_1} \right) \left( i_1 + \frac{N_a}{N_1} i_a + \frac{N_b}{N_1} i_b - i_m \right)$$

considerando  $i_a = i_b = i_2$  obtenemos la ecuación de voltaje del devanado secundario

$$v_2 = (R_a + R_b) i_2 + (L_{la} + L_{lb}) \frac{di_2}{dt} + R_h \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left( \frac{N_1}{N_2} i_1 + i_2 - \frac{N_1}{N_2} i_m \right) \quad (4.25)$$

donde  $R_2 = R_a + R_b$ , y  $L_{l2} = L_{la} + L_{lb}$ , de acuerdo con las consideraciones hechas para la obtención de (4.20) y (4.21). De este modo, los parámetros de resistencias e inductancias propias de los devanados para formar el secundario están dados por

$$R_a = \frac{N_a}{N_2} R_2, \quad R_b = \frac{N_b}{N_2} R_2 \quad (4.26)$$

$$L_{la} = \frac{N_a^2}{N_a^2 + N_b^2} L_{l2}, \quad L_{lb} = \frac{N_b^2}{N_a^2 + N_b^2} L_{l2} \quad (4.27)$$

Debido a que las cantidades de los devanados  $a$  y  $b$  están referidos al primario, los parámetros  $R_h$ ,  $L_{m1}$ ,  $R_1$  y  $L_{l1}$  son los mismos del modelo del transformador de dos devanados, por ejemplo, refiriendo (4.25) al devanado primario tenemos

$$v_2' = \frac{N_1}{N_2} v_2 = R_2 \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 i_2' + L_{l2} \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{di_2'}{dt} + R_h \left( \frac{N_2}{N_1} \right) \left( \frac{N_1}{N_2} i_1 + \frac{N_1}{N_2} i_2' - \frac{N_1}{N_2} i_m \right)$$

$$v_2' = R_2' i_2' + L_{l2}' \frac{di_2'}{dt} + R_h (i_1 + i_2' - i_m) \quad (4.28)$$

donde (4.28) resulta ser igual a (3.11).

#### 4.2.5 Modelado de falla incipiente espira-tierra en el primario

Consideremos el circuito equivalente del material aislante conectado en paralelo con el devanado  $b$  como se muestra en la Fig. 4.4. Analizando el circuito obtenemos las siguientes relaciones de voltaje y corriente

$$v_a = v_1 - v_b$$

$$i_{Cf} + i_{Rf} = i_a - i_b \quad (4.29)$$



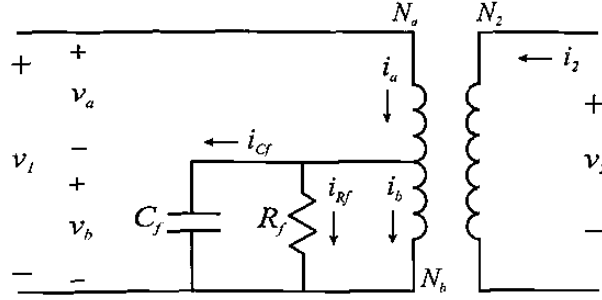


Figura 4.4 Falla incipiente espira-tierra en el devanado primario.

Sustituyendo  $v_a = v_1 - v_b$  en (4.12) podemos reescribir las ecuaciones de voltaje como

$$\begin{aligned} v_1 - v_b &= R_a i_a + L_{la} \frac{di_a}{dt} + R_{ha}(i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) \\ v'_b &= R'_b i'_b + L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + R_{ha}(i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) \\ v''_2 &= R''_2 i''_2 + L''_{l2} \frac{di''_2}{dt} + R_{ha}(i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) \\ L_{ma} \frac{di_{ma}}{dt} &= R_{ha}(i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) \end{aligned}$$

de la ecuación (4.29) tenemos que

$$i_{cf} = C_f \frac{dv_b}{dt} = i_a - i_b - i_{Rf} \quad (4.30)$$

así, el comportamiento del voltaje en la porción del aislante deteriorado estará descrito por la siguiente ecuación

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{1}{C_f} i_a - \frac{1}{C_f} \frac{N_a}{N_b} i'_b - \frac{1}{C_f R_f} v_b \quad (4.31)$$

Tomando como estados las corrientes en los devanados, la corriente de magnetización y el voltaje en el aislante deteriorado obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_{la}} \left( -(R_a + R_{ha})i_a - R_{ha}i'_b - R_{ha}i''_2 + R_{ha}i_{ma} - v_b + v_1 \right) \quad (4.32)$$

$$\frac{di'_b}{dt} = \frac{1}{L'_{lb}} \left( -R_{ha}i_a - (R'_b + R_{ha})i'_b - R_{ha}i''_2 + R_{ha}i_{ma} + \frac{N_a}{N_b} v_b \right) \quad (4.33)$$

$$\frac{di''_2}{dt} = \frac{1}{L''_{l2}} \left( -R_{ha}i_a - R_{ha}i'_b - (R''_2 + R_{ha})i''_2 + R_{ha}i_{ma} + v''_2 \right) \quad (4.34)$$

$$\frac{di_{ma}}{dt} = \frac{R_{ha}}{L_{ma}} (i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) \quad (4.35)$$

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{1}{C_f} i_a - \frac{1}{C_f} \frac{N_a}{N_b} i'_b - \frac{1}{C_f R_f} v_b \quad (4.36)$$

Del modelo no lineal del transformador de dos devanados tenemos que la inductancia de magnetización está dada por

$$L_{m1} = \frac{\lambda_n m}{1 + m^2 i_m^2}$$

Ahora, es necesario calcular la inductancia de magnetización del devanado  $a$ , usando las ecuaciones (4.19) y (4.23) tenemos que

$$\begin{aligned} L_{ma} &= \left(\frac{N_a}{N_1}\right)^2 L_{m1} = \left(\frac{N_a}{N_1}\right)^2 \frac{\lambda_n m}{1 + m^2 i_m^2} = \frac{\lambda_n m}{\left(\frac{N_1}{N_a}\right)^2 + m^2 \left(\frac{N_1}{N_a}\right)^2 i_m^2} \\ &= \frac{\lambda_n m}{\left(\frac{N_1}{N_a}\right)^2 + m^2 i_{ma}^2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

así, la ecuación (4.35) se convierte en

$$\frac{di_{ma}}{dt} = \frac{R_{ha}}{\lambda_n m} \left(\frac{N_1}{N_a}\right)^2 (i_a + i'_b + i''_2 - i_{ma}) + \frac{R_{ha} m}{\lambda_n} (i_a i_{ma}^2 + i'_b i_{ma}^2 + i''_2 i_{ma}^2 - i_{ma}^3)$$

Tomando como estados las corrientes,  $x_1 = i_a$ ,  $x_2 = i''_2$ ,  $x_3 = i'_b$ ,  $x_4 = i_{ma}$ , el voltaje  $v_b = x_5$  y las entradas  $u_1 = v_1$  y  $u_2 = v_2$ , obtenemos la siguiente representación en espacio de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{(R_a + R_{ha})}{L_{1a}} x_1 - \frac{R_{ha}}{L_{1a}} x_2 - \frac{R_{ha}}{L_{1a}} x_3 + \frac{R_{ha}}{L_{1a}} x_4 - \frac{1}{L_{1a}} x_5 + \frac{1}{L_{1a}} u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{R_{ha}}{L'_{12}} x_1 - \frac{(R'_2 + R_{ha})}{L'_{12}} x_2 - \frac{R_{ha}}{L'_{12}} x_3 + \frac{R_{ha}}{L'_{12}} x_4 + \frac{k_{a2}}{L'_{12}} u_2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R_{ha}}{L'_{1b}} x_1 - \frac{R_{ha}}{L'_{1b}} x_2 - \frac{(R'_b + R_{ha})}{L'_{1b}} x_3 + \frac{R_{ha}}{L'_{1b}} x_4 + \frac{k_{ab}}{L'_{1b}} x_5 \\ \dot{x}_4 &= \frac{R_{ha}}{\lambda_n m} \left(\frac{N_1}{N_a}\right)^2 (x_1 + x_2 + x_3 - x_4) + \frac{R_{ha} m}{\lambda_n} (x_1 x_4^2 + x_2 x_4^2 + x_3 x_4^2 - x_4^3) \\ \dot{x}_5 &= \frac{1}{C_f} x_1 - \frac{k_{ab}}{C_f} x_3 - \frac{1}{C_f R_f} x_5 \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde  $k_{ab} = N_a/N_b$  y  $k_{a2} = N_a/N_2$ .

#### 4.2.6 Modelado de falla incipiente espira-tierra en el secundario

Consideremos ahora la falla incipiente en el secundario entre una espira y tierra, como se muestra en la Fig. 4.5. Para modelar esta falla utilizamos de nueva cuenta el modelo

del transformador de tres devanados con el circuito equivalente del dieléctrico conectado en paralelo al devanado  $b$ .

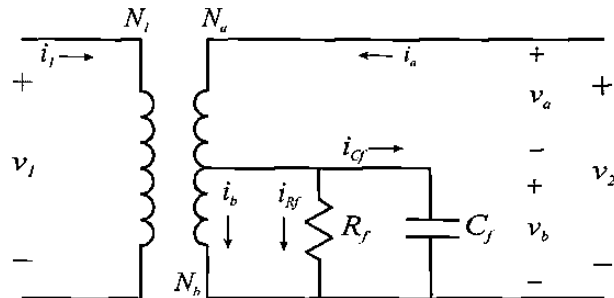


Figura 4.5 Falla incipiente espira-tierra en el devanado secundario.

Analizando el circuito de la Fig. 4.5 obtenemos las siguientes relaciones de corriente y voltaje

$$\begin{aligned} v_a &= v_2 - v_b \\ i_{Cf} + i_{Rf} &= i_a - i_b \end{aligned} \quad (4.39)$$

Podemos reescribir las ecuaciones de voltaje (4.24) como

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + L_{l1} \frac{di_1}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \\ v'_2 - v'_b &= R'_a i'_a + L'_{la} \frac{di'_a}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \\ v'_b &= R'_b i'_b + L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \\ L_{m1} \frac{di_m}{dt} &= R_h (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \end{aligned} \quad (4.40)$$

A partir de las ecuaciones de voltaje (4.40) obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{L_{l1}} \left( -(R_1 + R_h) i_1 - R_h i'_a - R_h i'_b + R_h i_m + v_1 \right) \\ \frac{di'_a}{dt} &= \frac{1}{L'_{la}} \left( -R_h i_1 - (R'_a + R_h) i'_a - R_h i'_b + R_h i_m + k_{1a} v_2 - k_{1a} v_b \right) \\ \frac{di'_b}{dt} &= \frac{1}{L'_{lb}} \left( -R_h i_1 - R_h i'_a - (R'_b + R_h) i'_b + R_h i_m + k_{1b} v_b \right) \\ \frac{di_m}{dt} &= \frac{R_h}{L_{m1}} (i_1 + i'_a + i'_b - i_m) \end{aligned}$$

y de (4.39) obtenemos la ecuación

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{k_{1a}}{C_f} i'_a - \frac{k_{1b}}{C_f} i'_b - \frac{1}{C_f R_f} v_b$$

Tomando como estados las corrientes del primario  $x_1 = i_1$ , del secundario  $x_2 = i'_a$ ,  $x_3 = i'_b$ ,  $x_4 = i_{ma}$ , el voltaje  $v_b = x_5$ , y como entradas los voltajes de primario  $u_1 = v_1$  y secundario  $u_2 = v_2$ , el modelo en espacio de estado es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{(R_1 + R_h)}{L_{l1}} x_1 - \frac{R_h}{L_{l1}} x_2 - \frac{R_h}{L_{l1}} x_3 + \frac{R_h}{L_{l1}} x_4 + \frac{1}{L_{l1}} u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{R_h}{L'_{1a}} x_1 - \frac{(R'_a + R_h)}{L'_{1a}} x_2 - \frac{R_h}{L'_{1a}} x_3 + \frac{R_h}{L'_{1a}} x_4 - \frac{k_{1a}}{L'_{1a}} x_5 + \frac{k_{1a}}{L'_{1a}} u_2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R_h}{L'_{1b}} x_1 - \frac{R_h}{L'_{1b}} x_2 - \frac{(R'_b + R_h)}{L'_{1b}} x_3 + \frac{R_h}{L'_{1b}} x_4 + \frac{k_{1b}}{L'_{1b}} x_5 \\ \dot{x}_4 &= \frac{R_h}{\lambda_n m} (x_1 + x_2 + x_3 - x_4) + \frac{R_h m}{\lambda_n} (x_1 x_4^2 + x_2 x_4^2 + x_3 x_4^2 - x_4^3) \\ \dot{x}_5 &= \frac{k_{1a}}{C_f} x_2 - \frac{k_{1b}}{C_f} x_3 - \frac{1}{C_f R_f} x_5 \end{aligned} \quad (4.41)$$

### 4.3 Modelado de un transformador de cuatro devanados

Cuando el deterioro del aislante ocurre entre cierto número de espiras de un devanado, es conveniente tratar dicho devanado como tres devanados distintos, dos devanados cuyo aislante se encuentra en buen estado, y un devanado entre ellos con el aislante deteriorado. Así pues, es necesario modelar un transformador de cuatro devanados para simular el comportamiento de un transformador monofásico con el aislante deteriorado entre espiras. El método de modelado es básicamente el mismo empleado en la sección 4.2 y el capítulo anterior.

#### 4.3.1 Ecuaciones de enlace de flujo

De nueva cuenta consideremos que la falla ocurre en el devanado primario, el cual se encuentra dividido en tres devanados:  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Considerando los flujos de dispersión, el

flujo total en cada devanado resulta ser

$$\phi_a = \phi_{la} + \phi_m$$

$$\phi_b = \phi_{lb} + \phi_m$$

$$\phi_c = \phi_{lc} + \phi_m$$

$$\phi_2 = \phi_{l2} + \phi_m$$

donde  $\phi_{la}$ ,  $\phi_{lb}$ ,  $\phi_{lc}$  y  $\phi_{l2}$  son los flujos de dispersión en los devanados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $2$ , respectivamente; y  $\phi_m$  es el flujo mutuo. Las ecuaciones de enlace de flujo en los cuatro devanados son

$$\lambda_a = (N_a^2 P_{la} + N_a^2 P_m) i_a + N_a N_b P_m i_b + N_a N_c P_m i_c + N_a N_2 P_m i_2$$

$$\lambda_b = N_b N_a P_m i_a + (N_b^2 P_{lb} + N_b^2 P_m) i_b + N_b N_c P_m i_c + N_b N_2 P_m i_2$$

$$\lambda_c = N_c N_a P_m i_a + N_c N_b P_m i_b + (N_c^2 P_{lc} + N_c^2 P_m) i_c + N_c N_2 P_m i_2$$

$$\lambda_2 = N_2 N_a P_m i_a + N_2 N_b P_m i_b + N_2 N_c P_m i_c + (N_2^2 P_{l2} + N_2^2 P_m) i_2$$

Las ecuaciones de enlace de flujo se pueden expresar en términos de las inductancias de los devanados

$$\lambda_a = L_a i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c + L_{a2} i_2$$

$$\lambda_b = L_{ba} i_a + L_b i_b + L_{bc} i_c + L_{b2} i_2$$

$$\lambda_c = L_{ca} i_a + L_{cb} i_b + L_c i_c + L_{c2} i_2$$

$$\lambda_2 = L_{2a} i_a + L_{2b} i_b + L_{2c} i_c + L_2 i_2$$

donde  $L_a$ ,  $L_b$ ,  $L_c$  y  $L_2$ , son las inductancias propias de los tres devanados, y el resto son las inductancias mutuas entre ellos. Las inductancias propias se pueden expresar como:

$$L_a = N_a^2 P_{la} + N_a^2 P_m = L_{la} + L_{ma}$$

$$L_b = N_b^2 P_{lb} + N_b^2 P_m = L_{lb} + L_{mb}$$

$$L_c = N_c^2 P_{lc} + N_c^2 P_m = L_{lc} + L_{mc}$$

$$L_2 = N_2^2 P_{l2} + N_2^2 P_m = L_{l2} + L_{m2}$$

donde  $L_{la}$ ,  $L_{lb}$ ,  $L_{lc}$  y  $L_{l2}$  son las inductancias de dispersión, y  $L_{ma}$ ,  $L_{mb}$ ,  $L_{mc}$  y  $L_{m2}$  son las inductancias de magnetización de su respectivo devanado, las cuales se pueden relacionar

como:

$$\begin{aligned} L_{mb} &= \left(\frac{N_b}{N_a}\right)^2 L_{ma} \\ L_{mc} &= \left(\frac{N_c}{N_a}\right)^2 L_{ma} \\ L_{m2} &= \left(\frac{N_2}{N_a}\right)^2 L_{ma} \end{aligned}$$

Usando las relaciones anteriores, las ecuaciones de enlace de flujo se pueden reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lambda_a &= L_{la}i_a + L_{ma} \left( i_a + \frac{N_b}{N_a}i_b + \frac{N_c}{N_a}i_c + \frac{N_2}{N_a}i_2 \right) \\ \lambda_b &= L_{lb}i_b + L_{mb} \left( \frac{N_a}{N_b}i_a + i_b + \frac{N_c}{N_b}i_c + \frac{N_2}{N_b}i_2 \right) \\ \lambda_c &= L_{lc}i_c + L_{mc} \left( \frac{N_a}{N_c}i_a + \frac{N_b}{N_c}i_b + i_c + \frac{N_2}{N_c}i_2 \right) \\ \lambda_2 &= L_{l2}i_2 + L_{m2} \left( \frac{N_a}{N_2}i_a + \frac{N_b}{N_2}i_b + \frac{N_c}{N_2}i_c + i_2 \right) \end{aligned}$$

### 4.3.2 Ecuaciones de voltaje

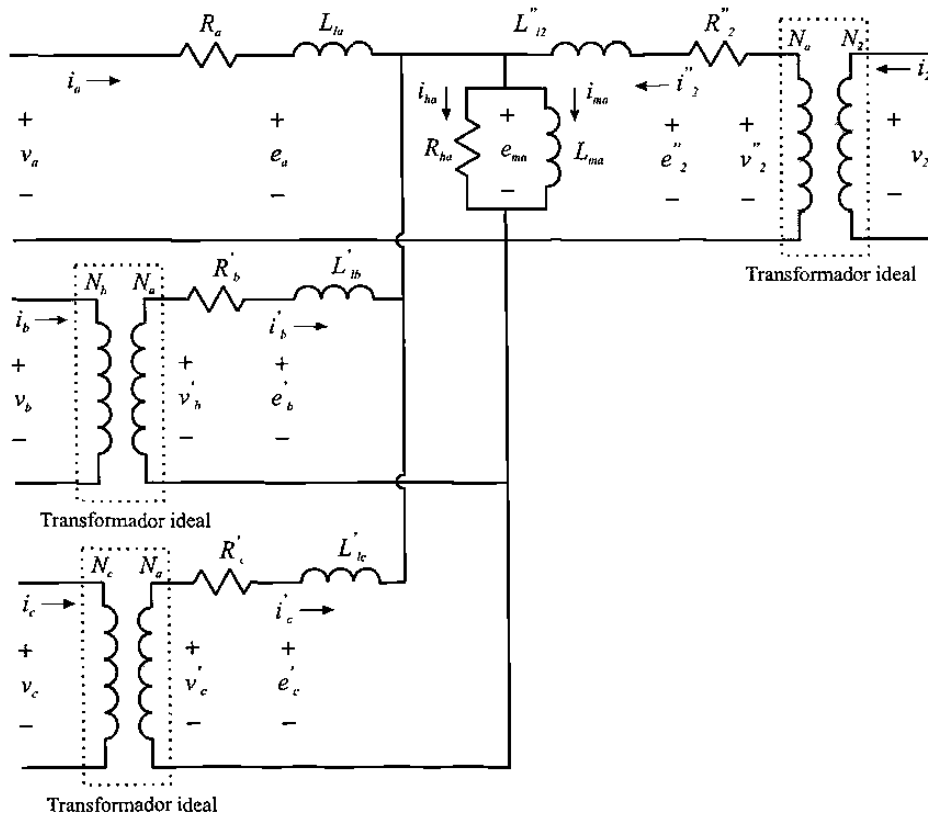
Derivando las ecuaciones de enlace de flujo con respecto al tiempo, agregando la caída de voltaje en la resistencia de los devanados, y refiriendo voltajes y corrientes al devanado  $a$  se obtienen las siguientes ecuaciones de voltaje

$$\begin{aligned} v_a &= R_a i_a + L_{la} \frac{di_a}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i'_c + i''_2) \\ v'_b &= R'_b i'_b + L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i'_c + i''_2) \\ v'_c &= R'_c i'_c + L'_{lc} \frac{di'_c}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i'_c + i''_2) \\ v''_2 &= R''_2 i''_2 + L''_{l2} \frac{di''_2}{dt} + L_{ma} \frac{d}{dt} (i_a + i'_b + i'_c + i''_2) \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde los parámetros, voltajes y corrientes de los devanados  $b$ ,  $c$  y  $2$  están referidos al devanado  $a$  como  $R'_b = k_{ab}^2 R_b$ ,  $L'_{lb} = k_{ab}^2 L_{lb}$ ,  $i'_b = (1/k_{ab})i_b$ ,  $v'_b = k_{ab}v_b$ ,  $R'_c = k_{ac}^2 R_c$ ,  $L'_{lc} = k_{ac}^2 L_{lc}$ ,  $i'_c = (1/k_{ac})i_c$ ,  $v'_c = k_{ac}v_c$ ,  $R''_2 = k_{a2}^2 R_2$ ,  $L''_{l2} = k_{a2}^2 L_{l2}$ ,  $i''_2 = (1/k_{a2})i_2$ ,  $v''_2 = k_{a2}v_2$ , con  $k_{ab} = N_a/N_b$ ,  $k_{ac} = N_a/N_c$  y  $k_{a2} = N_a/N_2$ .

### 4.3.3 Circuito equivalente del transformador de cuatro devanados

De las ecuaciones de voltaje (4.42) se deduce el circuito equivalente mostrado en la Fig. 4.6, en el cuál se han aproximado las pérdidas en el núcleo mediante una resistencia conectada en paralelo con la inductancia de magnetización



**Figura 4.6** Circuito equivalente del transformador de cuatro devanados.

Analizando el circuito de la Fig. 4.6 obtenemos las siguientes ecuaciones de voltaje

$$\begin{aligned}
 v_a &= R_a i_a + L_{la} \frac{di_a}{dt} + R_{ha} (i_a + i'_b + i'_c + i''_2 - i_{ma}) \\
 v'_b &= R'_b i'_b + L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + R_{ha} (i_a + i'_b + i'_c + i''_2 - i_{ma}) \\
 v'_c &= R'_c i'_c + L'_{lc} \frac{di'_c}{dt} + R_{ha} (i_a + i'_b + i'_c + i''_2 - i_{ma}) \\
 v''_2 &= R'_2 i''_2 + L''_{l2} \frac{di''_2}{dt} + R_{ha} (i_a + i'_b + i'_c + i''_2 - i_{ma}) \\
 L_{ma} \frac{di_m}{dt} &= R_{ha} (i_a + i'_b + i'_c + i''_2 - i_{ma})
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

#### 4.3.4 Parámetros del modelo del transformador de cuatro devanados

Como se vio en la sección anterior, es necesario determinar los parámetros del nuevo circuito equivalente a fin de simular el comportamiento del transformador de dos devanados con el modelo obtenido para el de cuatro devanados.

##### Parámetros para formar el devanado primario

La suma de los voltajes en los devanados  $a$  y  $b$  debe ser igual al voltaje en el devanado primario, es decir

$$v_1 = v_a + v_b + v_c = v_a + \frac{N_b}{N_a}v'_b + \frac{N_c}{N_a}v'_c$$

Sustituyendo los voltajes

$$\begin{aligned} v_1 = & R_a i_a + L_{la} \frac{di_a}{dt} + R_{ha}(i_a + i'_b + i'_c + i''_2 - i_{ma}) \\ & + \frac{N_b}{N_a} \left( R'_b i'_b + L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + R_{ha}(i_a + i'_b + i'_c + i''_2 - i_{ma}) \right) \\ & + \frac{N_c}{N_a} \left( R'_c i'_c + L'_{lc} \frac{di'_c}{dt} + R_{ha}(i_a + i'_b + i'_c + i''_2 - i_{ma}) \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora los valores referidos de los parámetros y corrientes en términos de sus valores reales tenemos

$$\begin{aligned} v_1 = & R_a i_a + L_{la} \frac{di_a}{dt} + R_{ha} \left( i_a + \frac{N_b}{N_a} i_b + \frac{N_c}{N_a} i_c + \frac{N_2}{N_a} i_2 - i_{ma} \right) \\ & + R_b i_b + L_{lb} \frac{di_b}{dt} + R_{ha} \frac{N_b}{N_a} \left( i_a + \frac{N_b}{N_a} i_b + \frac{N_c}{N_a} i_c + \frac{N_2}{N_a} i_2 - i_{ma} \right) \\ & + R_c i_c + L_{lc} \frac{di_c}{dt} + R_{ha} \frac{N_c}{N_a} \left( i_a + \frac{N_b}{N_a} i_b + \frac{N_c}{N_a} i_c + \frac{N_2}{N_a} i_2 - i_{ma} \right) \end{aligned}$$

El conectar en serie los devanados  $a$ ,  $b$  y  $c$  para formar el devanado primario, implica que  $i_a = i_b = i_c = i_1$ , además,  $N_1 = N_a + N_b + N_c$ , así reescribimos el voltaje del primario como

$$\begin{aligned} v_1 = & (R_a + R_b + R_c) i_1 + (L_{la} + L_{lb} + L_{lc}) \frac{di_1}{dt} \\ & + R_{ha} \left( \frac{N_1}{N_a} \right) \left( \left( \frac{N_a + N_b + N_c}{N_a} \right) i_1 + \frac{N_2}{N_a} i_2 - i_{ma} \right) \end{aligned}$$



y finalmente

$$v_1 = (R_a + R_b + R_c)i_1 + (L_{la} + L_{lb} + L_{lc})\frac{di_1}{dt} + R_{ha} \left(\frac{N_1}{N_a}\right)^2 \left(i_1 + \frac{N_2}{N_1}i_2 - \frac{N_a}{N_1}i_{ma}\right) \quad (4.44)$$

Comparando (4.44) con (3.10) obtenemos las siguientes relaciones

$$R_1 = R_a + R_b + R_c \quad (4.45)$$

$$L_{l1} = L_{la} + L_{lb} + L_{lc} \quad (4.46)$$

$$R_{ha} = \left(\frac{N_a}{N_1}\right)^2 R_h \quad (4.47)$$

$$i_{ma} = \frac{N_1}{N_a}i_m \quad (4.48)$$

De acuerdo con las consideraciones hechas para la obtención de (4.20) y (4.21) los parámetros de resistencias e inductancias propias de los devanados para formar el primario están dados por

$$R_a = \frac{N_a}{N_1}R_1, \quad R_b = \frac{N_b}{N_1}R_1, \quad R_c = \frac{N_c}{N_1}R_1 \quad (4.49)$$

$$L_{la} = \frac{N_a^2}{N_a^2 + N_b^2 + N_c^2}L_{l1}, \quad L_{lb} = \frac{N_b^2}{N_a^2 + N_b^2 + N_c^2}L_{l1}, \quad L_{lc} = \frac{N_c^2}{N_a^2 + N_b^2 + N_c^2}L_{l1} \quad (4.50)$$

Del conjunto de ecuaciones (4.42) tomamos la ecuación del voltaje en el secundario, y considerando que  $i_a = i_b = i_c = i_1$

$$v_2 = \frac{N_2}{N_a}v_2'' = R_2i_2 + L_{l2}\frac{di_2}{dt} + L_{ma} \left(\frac{N_2}{N_a}\right) \frac{d}{dt} \left( \left(\frac{N_a + N_b + N_c}{N_a}\right) i_1 + \frac{N_2}{N_a}i_2 \right)$$

$$v_2 = R_2i_2 + L_{l2}\frac{di_2}{dt} + L_{ma} \left(\frac{N_2}{N_a}\right)^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{N_1}{N_2}i_1 + i_2 \right)$$

refiriendo voltajes y corrientes a un devanado de  $N_1$  vueltas tenemos

$$v_2' = \frac{N_1}{N_2}v_2 = R_2' i_2' + L_{l2}' \frac{di_2'}{dt} + L_{ma} \left(\frac{N_1}{N_a}\right)^2 \frac{d}{dt} (i_1 + i_2') \quad (4.51)$$

comparando (4.51) con (3.8), tenemos que

$$L_{ma} = \left(\frac{N_a}{N_1}\right)^2 L_{m1} \quad (4.52)$$

### Parámetros para formar el devanado secundario

Consideremos ahora que los devanados  $a$ ,  $b$  y  $c$  se usan para formar el devanado secundario, las ecuaciones de voltaje en este caso son las siguientes

$$\begin{aligned}
 v_1 &= R_1 i_1 + L_{l1} \frac{di_1}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b + i'_c - i_m) \\
 v'_a &= R'_a i'_a + L'_{la} \frac{di'_a}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b + i'_c - i_m) \\
 v'_b &= R'_b i'_b + L'_{lb} \frac{di'_b}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b + i'_c - i_m) \\
 v'_c &= R'_c i'_c + L'_{lc} \frac{di'_c}{dt} + R_h (i_1 + i'_a + i'_b + i'_c - i_m) \\
 L_m \frac{di_m}{dt} &= R_h (i_1 + i'_a + i'_b + i'_c - i_m)
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Los parámetros, voltajes y corrientes de los devanados  $a$ ,  $b$  y  $c$  están referidos al devanado primario como  $R'_a = k_{1a}^2 R_a$ ,  $L'_{la} = k_{1a}^2 L_{la}$ ,  $i'_a = (1/k_{1a}) i_a$ ,  $v'_a = k_{1a} v_a$ ,  $R'_b = k_{1b}^2 R_b$ ,  $L'_{lb} = k_{1b}^2 L_{lb}$ ,  $i'_b = (1/k_{1b}) i_b$ ,  $v'_b = k_{1b} v_b$ ,  $R'_c = k_{1c}^2 R_c$ ,  $L'_{lc} = k_{1c}^2 L_{lc}$ ,  $i'_c = (1/k_{1c}) i_c$ ,  $v'_c = k_{1c} v_c$ , con  $k_{1a} = N_1/N_a$ ,  $k_{1b} = N_1/N_b$ , y  $k_{1c} = N_1/N_c$ .

El voltaje en el devanado secundario es igual a la suma de voltajes en los devanados que lo forman, es decir

$$v_2 = v_a + v_b + v_c = \frac{N_a}{N_1} v'_a + \frac{N_b}{N_1} v'_b + \frac{N_c}{N_1} v'_c$$

sustituyendo las ecuaciones de voltaje de los devanados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , y los valores referidos de los parámetros y corrientes obtenemos

$$v_2 = R_2 i_2 + L_{l2} \frac{di_2}{dt} + R_h \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left( \frac{N_1}{N_2} i_1 + i_2 - \frac{N_1}{N_2} i_m \right) \tag{4.54}$$

donde  $R_2 = R_a + R_b + R_c$ , y  $L_{l2} = L_{la} + L_{lb} + L_{lc}$ . Las resistencias e inductancias propias de los devanados para formar el secundario están dadas por

$$R_a = \frac{N_a}{N_2} R_2, \quad R_b = \frac{N_b}{N_2} R_2, \quad R_c = \frac{N_c}{N_2} R_2 \tag{4.55}$$

$$L_{la} = \frac{N_a^2}{N_a^2 + N_b^2 + N_c^2} L_{l2}, \quad L_{lb} = \frac{N_b^2}{N_a^2 + N_b^2 + N_c^2} L_{l2}, \quad L_{lc} = \frac{N_c^2}{N_a^2 + N_b^2 + N_c^2} L_{l2} \tag{4.56}$$

Los parámetros  $R_h$ ,  $L_{m1}$ ,  $R_1$  y  $L_{l1}$  son los mismos del circuito equivalente del transformador de dos devanados.

### 4.3.5 Modelado de falla incipiente espira-espira en el primario

Una falla incipiente entre espiras del devanado primario se puede representar con el circuito equivalente del material aislante conectado en paralelo con el devanado  $b$  como se muestra en la Fig. 4.7.

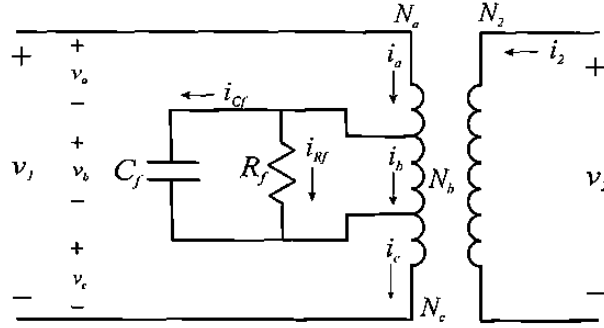


Figura 4.7 Falla incipiente espira-espira en el devanado primario.

Analizando el circuito obtenemos las siguientes relaciones de voltaje y corriente

$$\begin{aligned} v_a + v_c &= v_1 - v_b \\ i_{C_f} + i_{R_f} &= i_c - i_b \end{aligned} \quad (4.57)$$

La suma de voltajes en los devanados  $a$  y  $c$  es igual a la diferencia entre el voltaje de entrada al primario y el voltaje en el circuito equivalente del aislante, para obtener el voltaje en cada uno de ellos se considera que el voltaje se divide de forma proporcional al número de vueltas que conforman a cada uno de estos devanados, así el voltaje en ellos es aproximado adecuadamente por las siguientes expresiones

$$v_a = \frac{N_a}{N_a + N_c}(v_1 - v_b), \quad v_c = \frac{N_c}{N_a + N_c}(v_1 - v_b) \quad (4.58)$$

De la ecuación (4.57) se desprende la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{1}{C_f}i_c - \frac{1}{C_f}i_b - \frac{1}{C_f R_f}v_b \quad (4.59)$$

la cual describe el comportamiento del voltaje en el aislante deteriorado.

La inductancia de magnetización está dada por

$$L_{ma} = \frac{\lambda_m m}{\left(\frac{N_1}{N_a}\right)^2 + m^2 i_{ma}^2} \quad (4.60)$$

Del conjunto de ecuaciones de voltaje (4.43) y de la ecuación (4.59), tomamos como estados las corrientes,  $x_1 = i_a$ ,  $x_2 = i'_b$ ,  $x_3 = i'_c$ ,  $x_4 = i''_2$ ,  $x_5 = i_{ma}$ , el voltaje  $x_6 = v_b$  y las entradas  $u_1 = v_1$  y  $u_2 = v_2$ , para obtener la siguiente representación en espacio de estado para modelar una falla incipiente espira-espira en el devanado primario:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\frac{(R_a + R_{ha})}{L_{1a}}x_1 - \frac{R_{ha}}{L_{1a}}(x_2 + x_3 + x_4 - x_5) - \frac{k_v}{L_{1a}}x_6 + \frac{k_v}{L_{1a}}u_1 \\
 \dot{x}_2 &= -\frac{(R'_b + R_{ha})}{L'_{1b}}x_2 - \frac{R_{ha}}{L'_{1b}}(x_1 + x_3 + x_4 - x_5) + \frac{k_{ab}}{L'_{1b}}x_6 \\
 \dot{x}_3 &= -\frac{(R'_c + R_{ha})}{L'_{1c}}x_3 - \frac{R_{ha}}{L'_{1c}}(x_1 + x_2 + x_4 - x_5) - \frac{k_v}{L'_{1c}}x_6 + \frac{k_v}{L'_{1c}}u_1 \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{(R''_2 + R_{ha})}{L''_{12}}x_4 - \frac{R_{ha}}{L''_{12}}(x_1 + x_2 + x_3 - x_5) + \frac{k_{a2}}{L''_{12}}u_2 \\
 \dot{x}_5 &= \frac{R_{ha}}{\lambda_n m} \left( \frac{N_1}{N_a} \right)^2 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5) + \frac{R_{ha} m}{\lambda_n} (x_1 x_5^2 + x_2 x_5^2 + x_3 x_5^2 + x_4 x_5^2 - x_5^3) \\
 \dot{x}_6 &= -\frac{k_{ab}}{C_f}x_2 + \frac{k_{ac}}{C_f}x_3 - \frac{1}{C_f R_f}x_6
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

donde  $k_v = N_a / (N_a + N_c)$ .

#### 4.3.6 Modelado de falla incipiente espira-espira en el secundario

En la Fig. 4.8 se representa una falla incipiente en una porción del devanado secundario. Analizando el circuito obtenemos las siguientes relaciones de voltaje y corriente:

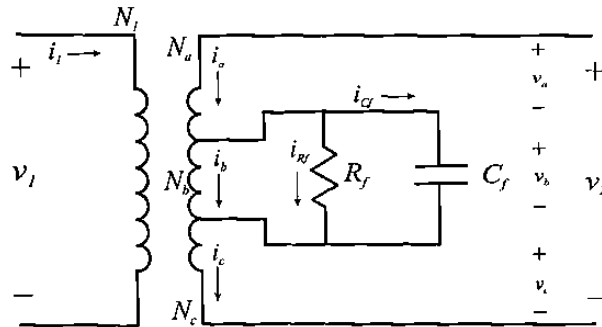


Figura 4.8 Falla incipiente espira-espira en el devanado secundario.

$$v_a + v_c = v_2 - v_b$$

$$i_{Cf} + i_{Rf} = i_a - i_b \quad (4.62)$$

Los voltajes en los devanados  $a$  y  $c$  son parte del voltaje del secundario, considerando nuevamente que son proporcionales al número de vueltas que conforman a cada uno de estos devanados, se aproxima el voltaje en ellos como:

$$v_a = \frac{N_a}{N_a + N_c}(v_2 - v_b), \quad v_c = \frac{N_c}{N_a + N_c}(v_2 - v_b) \quad (4.63)$$

De la ecuación (4.62) se obtiene la ecuación de estado del voltaje en el circuito equivalente del aislante

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{k_{1a}}{C_f}i'_a - \frac{k_{1b}}{C_f}i'_b - \frac{1}{C_f R_f}v_b \quad (4.64)$$

Finalmente, del conjunto de ecuaciones de voltaje (4.53), y de la ecuación (4.64), tomamos como estados las corrientes,  $x_1 = i_1$ ,  $x_2 = i'_a$ ,  $x_3 = i'_b$ ,  $x_4 = i'_c$ ,  $x_5 = i_{ma}$ , el voltaje  $x_6 = v_b$  y las entradas  $u_1 = v_1$  y  $u_2 = v_2$ , para obtener la siguiente representación en espacio de estado, la cual modela una falla incipiente espira-espira en el devanado secundario:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{(R_1 + R_h)}{L_{l1}}x_1 - \frac{R_h}{L_{l1}}(x_2 + x_3 + x_4 - x_5) - \frac{1}{L_{l1}}u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{(R'_a + R_h)}{L'_{la}}x_2 - \frac{R_h}{L'_{la}}(x_1 + x_3 + x_4 - x_5) - \frac{k_{v1}}{L'_{la}}x_6 + \frac{k_{v1}}{L'_{la}}u_2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{(R'_b + R_h)}{L'_{lb}}x_3 - \frac{R_h}{L'_{lb}}(x_1 + x_2 + x_4 - x_5) - \frac{k_{1b}}{L'_{lb}}x_6 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{(R'_c + R_h)}{L'_{lc}}x_4 - \frac{R_h}{L'_{lc}}(x_1 + x_2 + x_3 - x_5) - \frac{k_{v1}}{L'_{lc}}x_6 + \frac{k_{v1}}{L'_{lc}}u_2 \\ \dot{x}_5 &= \frac{R_h}{\lambda_n m}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5) + \frac{R_h m}{\lambda_n}(x_1 x_5^2 + x_2 x_5^2 + x_3 x_5^2 + x_4 x_5^2 - x_5^3) \\ \dot{x}_6 &= \frac{k_{1a}}{C_f}x_2 - \frac{k_{1b}}{C_f}x_3 - \frac{1}{C_f R_f}x_6 \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde  $k_{v1} = N_1/(N_a + N_c)$ .

## 4.4 Resultados de simulación

En esta sección se presentan los resultados de simulación para los distintos modelos matemáticos del transformador monofásico con fallas incipientes obtenidos en este capítulo.

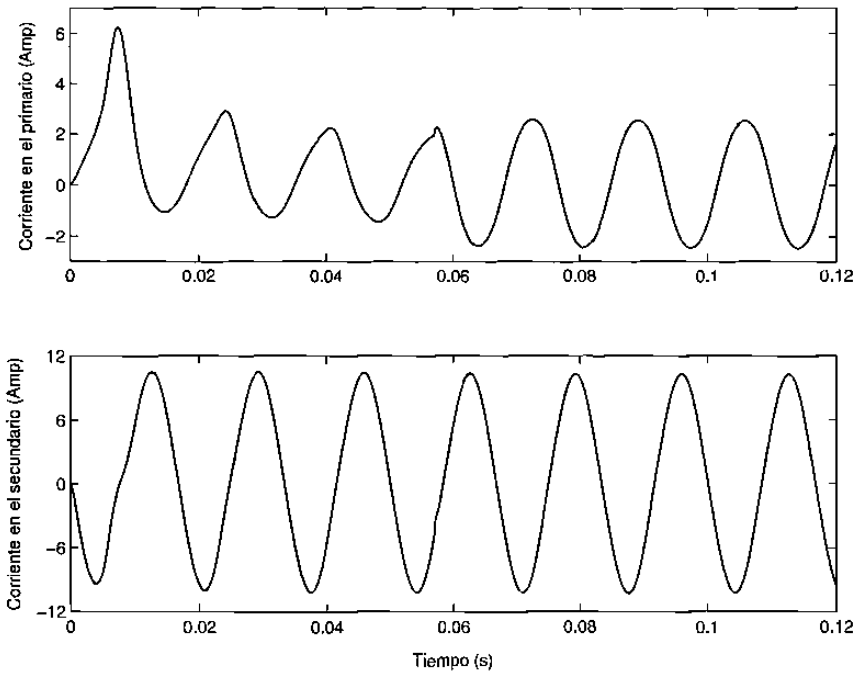
Para el caso de falla incipiente entre una espira y tierra en el devanado primario se empleó el sistema (4.38) cambiando el parámetro  $R_f$  de  $100\text{k}\Omega$  a  $1\Omega$  en  $t=0.057$  seg. simulando la falla entre la espira 350 y tierra. Las formas de onda de las corrientes se muestran en la Fig. 4.9.

Para el sistema (4.41) la falla se ubica entre la espira 26 y tierra en el devanado secundario, con  $R_f$  cambiando de  $100\text{k}\Omega$  a  $0.075\Omega$  en  $t=0.065$  seg. Las corrientes se muestran en la Fig. 4.10. De acuerdo con [6] el valor de capacitancia  $C_f$  cambia poco para diferentes niveles de degradación del aislante, por lo que su valor se fijó en  $89\text{nF}$ . Los parámetros del circuito equivalente se calculan a partir de la Tabla 3.1. En la Tabla 4.1 se muestra en que parte de los devanados se presentan las fallas.

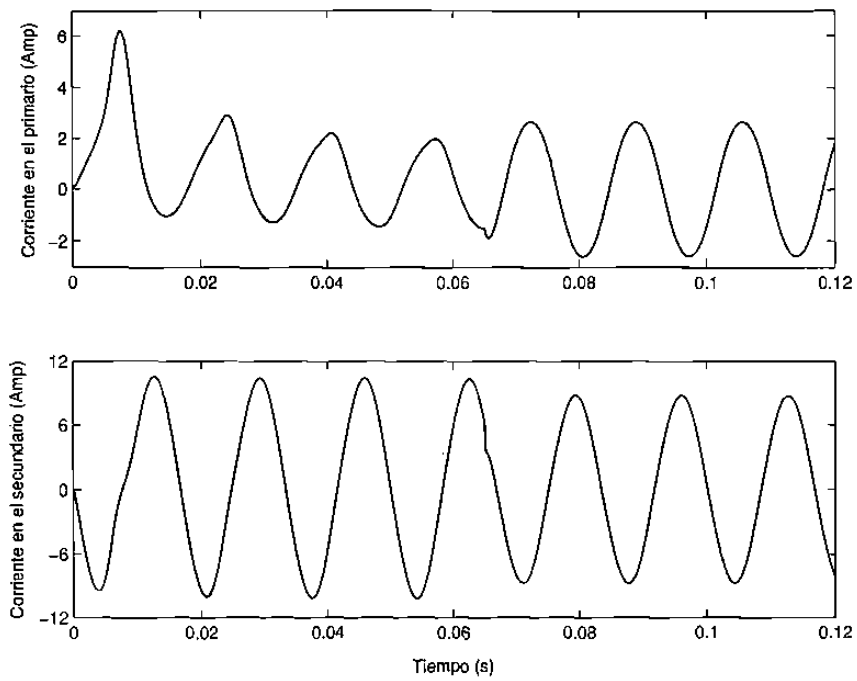
**Tabla 4.1** Ubicación de las fallas en devanados.

|                        | $N_1$ | $N_a$ | $N_b$ | $N_2$ |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Falla en el primario   | –     | 350   | 50    | 40    |
| Falla en el secundario | 400   | 26    | 14    | –     |

De las formas de onda de la Fig. 4.9 se observa que una falla incipiente en el devanado primario afecta de manera notoria a la corriente en él, mientras que el efecto en la corriente del secundario es casi imperceptible. En la Fig. 4.10 se observa que una falla incipiente en el devanado secundario afecta significativamente a las corrientes del devanado primario y del devanado secundario.



**Figura 4.9** Corrientes del transformador para una falla incipiente espira-tierra en el devanado primario.



**Figura 4.10** Corrientes del transformador para una falla incipiente espira-tierra en el devanado secundario.

Para el caso donde el deterioro del aislante se presenta entre espiras de un devanado, se simuló el sistema (4.61) cambiando el parámetro  $R_f$  de  $100\text{k}\Omega$  a  $4\Omega$  en  $t=0.057$  seg. ubicando la falla entre la espira 191 y la 229 en el caso de falla en el primario. Las corrientes de primario y secundario se muestran en la Fig. 4.11. En el caso de falla en el secundario se utilizó el sistema (4.65), ubicando la falla entre la espira 19 y la 11, con  $R_f$  cambiando de  $100\text{k}\Omega$  a  $0.2\Omega$  en  $t=0.065$  seg. Las formas de las corrientes se muestran en la Fig. 4.12. El comportamiento de las corrientes para el caso de falla entre espiras fue cualitativamente igual al caso de falla entre una espira y tierra. La diferencia fue sólo cuantitativa debido al número de vueltas involucradas en la falla.

En todos los casos anteriores, las formas de onda de las corrientes fueron idénticas a las formas de las corrientes de la Fig. 3.4 durante el tiempo previo a la falla. Lo anterior ilustra que los sistemas de quinto y sexto orden obtenidos en este capítulo, simulan adecuadamente al transformador sin falla, el cual, en este trabajo está descrito por un sistema de tercer orden; así como también son capaces de simular el nivel de deterioro del aislante en los devanados del transformador mediante la selección del parámetro  $R_f$ .

Se simularon doce distintos niveles de degradación del aislante con los sistemas (4.38) y (4.41) en las ubicaciones indicadas en la Tabla 4.1 con los parámetros de la Tabla 3.1, excepto los parámetros de la inductancia de magnetización, que en este caso fueron:  $\lambda_n = 6.3$  y  $m = 0.6455$ , así como el voltaje de entrada, el cual fue de 2400 volts de amplitud. En la Tabla 4.2 se muestran los parámetros de los distintos niveles de degradación, usando (4.2) para el cálculo de la  $\tan(\delta)$ .

En la Fig. 4.13 se muestra la relación entre el valor de  $R_f$  y el valor de pico de las corrientes primaria y secundaria. En la Fig. 4.13(a) se observa que para valores de  $R_f$  mayores a  $100\Omega$  la corriente del primario es muy próxima a su valor nominal, es decir, cuando el transformador está en buen estado. Para valores de  $R_f$  menores a  $0.01\Omega$  la corriente del primario es aproximadamente igual a la corriente de cortocircuito interno. Así, el valor de corriente del devanado primario cambia de su valor nominal a su valor de cortocircuito con valores de resistencia en el rango  $[0.01, 100]$ . La corriente del devanado secundario disminuye ligeramente conforme el aislante se deteriora.

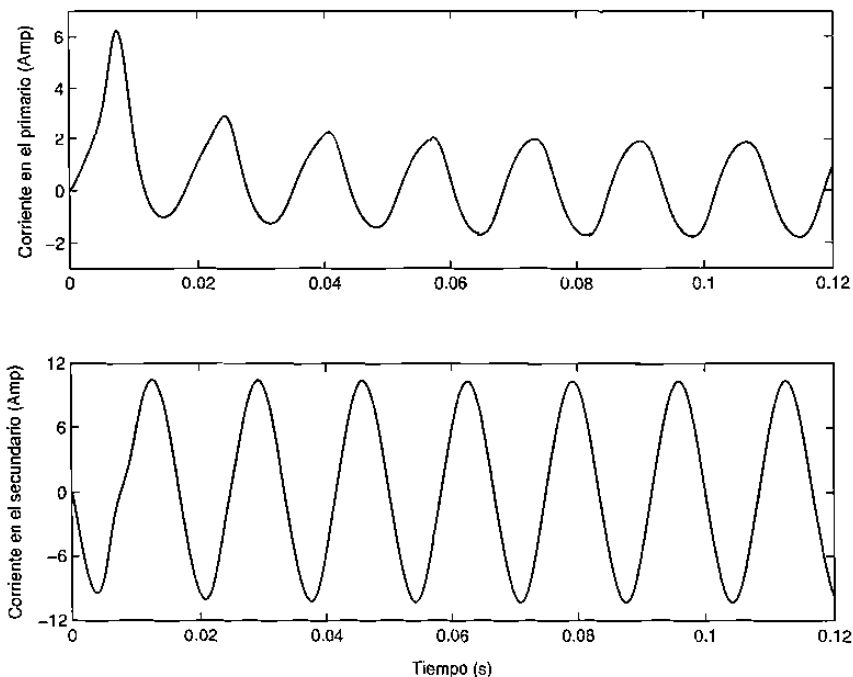
En la Fig. 4.13(b) se observa que para el caso de falla en el secundario el deterioro del aislante se manifiesta en las corrientes para valores mas pequeños de resistencia. Para valores mayores a  $1\Omega$  la corriente del primario es prácticamente la corriente nominal.



Cuando el valor de  $R_f$  fue menor a  $0.0001\Omega$  el valor de la corriente del primario fue aproximado a su valor de cortocircuito interno. La corriente y voltaje del secundario disminuyeron notoriamente para valores de  $R_f$  menores a  $0.0001\Omega$ , mientras que para valores de  $R_f$  mayores a  $1\Omega$  se mantuvieron próximos a sus valores nominales. En ambos casos el rango de  $R_f$  en el que las corrientes cambiaron de su valor nominal al de cortocircuito fue  $[0.0001, 1]$ .

**Tabla 4.2** Parámetros de los distintos niveles de degradación del aislante.

| Parámetro\caso | 1                   | 2    | 3    | 4   | 5  | 6   | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|----------------|---------------------|------|------|-----|----|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\tan(\delta)$ | 0.003               | 0.03 | 0.3  | 3   | 30 | 300 | $3 \cdot 10^3$ | $3 \cdot 10^4$ | $3 \cdot 10^5$ | $3 \cdot 10^6$ | $3 \cdot 10^7$ | $3 \cdot 10^8$ |
| $R_f(\Omega)$  | 10M                 | 1M   | 100k | 10k | 1k | 100 | 10             | 1              | 0.1            | 0.01           | 0.001          | 0.0001         |
| $C_f(F)$       | $8.9 \cdot 10^{-8}$ |      |      |     |    |     |                |                |                |                |                |                |



**Figura 4.11** Corrientes del transformador para una falla incipiente espira-espira en el devanado primario.

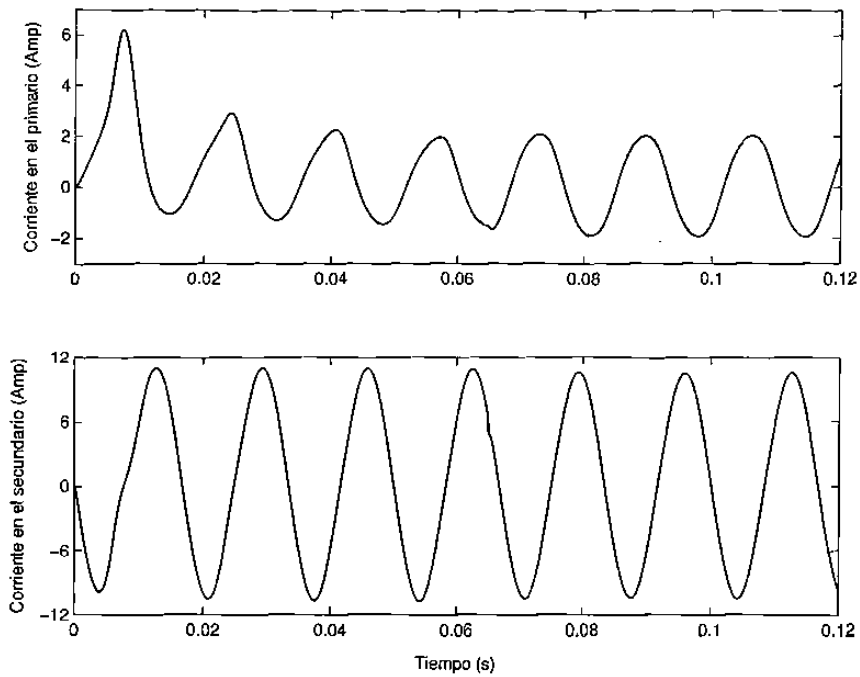


Figura 4.12 Corrientes del transformador para una falla incipiente espira-espira en el devanado secundario.

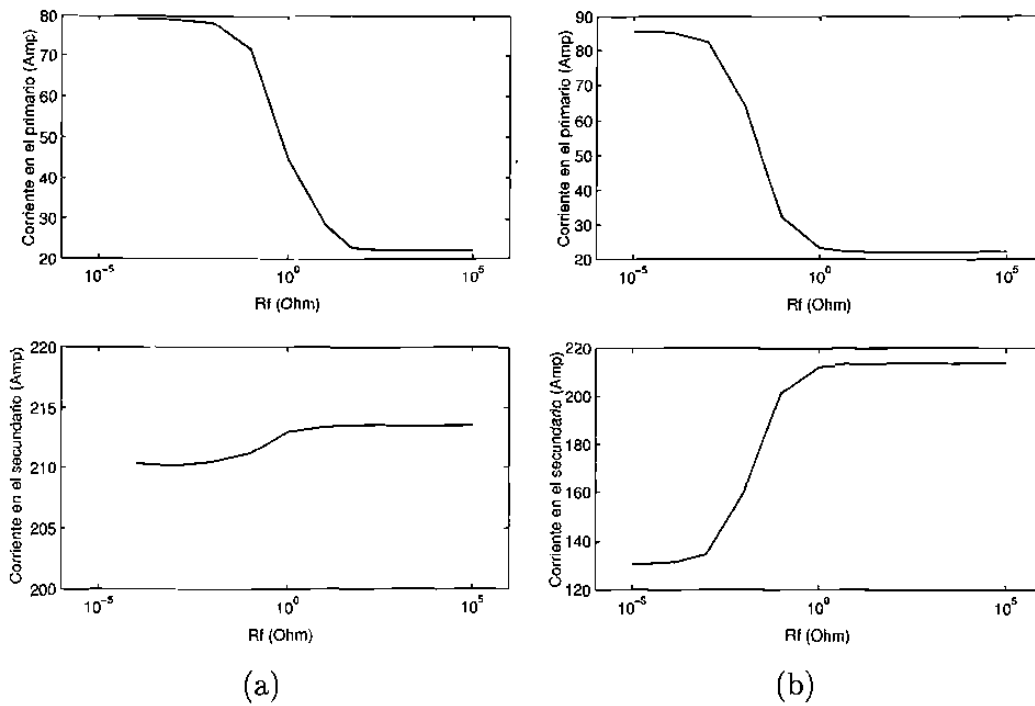


Figura 4.13 Relación entre las corrientes del transformador y el deterioro del aislante (a) en el devanado primario y (b) en el devanado secundario.

## Capítulo 5

### Detección de fallas basada en observadores

Como se mencionó en el capítulo 2, una forma común de generar los residuos portadores de información sobre fallas es mediante un observador o estimador de estados. La teoría sobre observadores lineales es ya bien estudiada y madura, y diversos métodos de FDI han sido desarrollados en base a ella. Sin embargo, la mayoría de los sistemas, ya sean físicos, químicos, biológicos, eléctricos, etc. no pueden ser modelados adecuadamente mediante ecuaciones lineales, tal es el caso del transformador, cuyas características de saturación e histéresis conducen a un modelo no lineal.

La evolución de la teoría sobre observadores no lineales ha sido más lenta que en otras áreas de la teoría de control no lineal. No obstante, diversos métodos de diseño han sido desarrollados, los primeros resultados y algunas extensiones recientes se obtuvieron bajo restricciones globales de Lipschitz [12], las cuales excluyen no linealidades comunes como  $x^3$ ,  $\exp(x)$ , etc. Existen otros métodos entre los cuales se encuentran los basados en geometría diferencial, modos deslizantes, etc. En [13]-[15] se presentan algunos métodos de diseño de observadores no lineales enfocados al diagnóstico de fallas. Sin embargo, actualmente no existe una teoría general sobre observadores no lineales, por lo que es necesario revisar los métodos de diseño existentes para la clase de sistemas no lineales en los que se encuentra el modelo obtenido del transformador monofásico.

#### 5.1 Diseño de un observador no lineal para el transformador

El modelo obtenido del transformador de dos devanados tiene una estructura que se puede representar mediante una parte lineal más un término no lineal. Existen varios métodos de diseño de observadores para sistemas con estas características, los cuales se basan en distintas propiedades de la parte no lineal para hacer que el error de estimación converja a cero.

El método de diseño presentado en [16] y su extensión [17] se evita el uso de restricciones de Lipschitz. En ellos se representa el error de estimación como la interconexión por retroalimentación de un sistema lineal y una no linealidad dependiente del estado. La convergencia del estimado al estado real es alcanzada bajo dos restricciones que permiten que la ecuación del error de estimación satisfaga el criterio del círculo [18]. La primera restricción es que las no linealidades sean funciones monótonas no decrecientes de los estados no medidos. La segunda restricción es que la solución de una desigualdad lineal matricial (LMI) debe ser factible, lo que implica que la parte lineal del sistema del error de estimación debe ser estrictamente real positiva (SPR).

Para el diseño del observador se considera la planta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + G\gamma(Hx) + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida medida del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada, y la no linealidad multivariable  $\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  satisface un análogo multivariable de la propiedad de monotonía

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v} + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial v} \right)^T \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p\tag{5.2}$$

Asumiendo que (5.2) es satisfecha, el observador tiene la siguiente forma

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) + G\gamma(H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)) + Bu\tag{5.3}$$

La tarea de diseño del observador consiste en determinar las matrices  $K \in \mathbb{R}^{r \times p}$  y  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  que hagan que el error de estimación  $e = x - \hat{x}$  converja a cero. De las ecuaciones (5.1) y (5.3) la ecuación dinámica del error de estimación es

$$\dot{e} = (A + LC)e + G[\gamma(v) - \gamma(w)]\tag{5.4}$$

donde

$$v := Hx, \quad w := H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)\tag{5.5}$$

El diseño del observador se comienza representando el sistema del error de estimación (5.4) como la interconexión por retroalimentación de un sistema lineal y una no linealidad

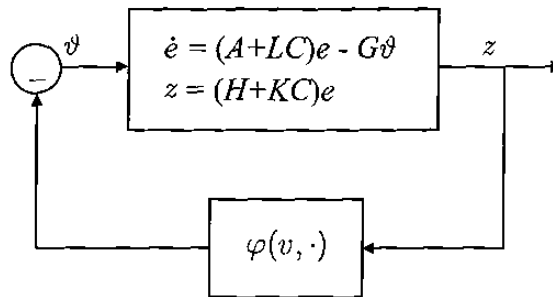


Figura 5.1 Sistema del error de estimación.

dependiente del estado, como se muestra en la Fig. 5.1. Con este fin, el término  $\gamma(v) - \gamma(w)$  es visto como una función de  $v$  y  $z := v - w = (H + KC)e$ ; esto es, una no linealidad multivariable dependiente del estado en  $z$

$$\varphi(v, z) = \gamma(v) - \gamma(w) \quad (5.6)$$

Sustituyendo (5.6), se puede reescribir la dinámica del error de estimación como

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A + LC)e + G\varphi(v, z) \\ z &= (H + KC)e \end{aligned} \quad (5.7)$$

De acuerdo con (5.2), la no linealidad  $\varphi(v, z)$  satisface la propiedad de sector multivariable

$$z^T \varphi(v, z) \geq 0 \quad (5.8)$$

Gracias a esta propiedad de sector, la estabilidad asintótica es garantizada de acuerdo al criterio del círculo si el sistema lineal con entrada  $\vartheta = -\varphi(v, z)$  y salida  $z$  es SPR, esto es, si una matriz  $P = P^T > 0$ , y una constante  $\nu \geq 0$  pueden ser encontradas tal que

$$\begin{bmatrix} (A + LC)^T P + P(A + LC) + \nu I & PG + (H + KC)^T \\ G^T P + (H + KC) & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.9)$$

De este modo, el diseño del observador para el sistema (5.1) consiste en resolver la ecuación (5.9), que es una LMI en  $P = P^T > 0$ ,  $PL$ ,  $K$  y  $\nu \geq 0$ .

Tomamos la función de Lyapunov  $V = e^T P e$ , con  $P = P^T > 0$  para analizar la estabilidad del error de estimación, la derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias del

sistema es

$$\dot{V} = e^T[(A + LC)^T P + P(A + LC)]e + \varphi(v, z)^T G^T P e + e^T P G \varphi(v, z) \quad (5.10)$$

De (5.8), tenemos que la suma de los términos  $z^T \varphi(v, z) + \varphi(v, z)^T z \geq 0$ , así, sumando lo anterior al lado derecho de (5.10) la derivada de  $V$  tendrá una cota superior

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & e^T[(A + LC)^T P + P(A + LC)]e \\ & + \varphi(v, z)^T [G^T P + (H + KC)]e + e^T [P G + (H + KC)^T] \varphi(v, z) \end{aligned}$$

Para mejorar la tasa de convergencia del error agregamos una nueva cota superior de valor negativo a la derivada de  $V$

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & e^T[(A + LC)^T P + P(A + LC)]e \\ & + \varphi(v, z)^T [G^T P + (H + KC)]e + e^T [P G + (H + KC)^T] \varphi(v, z) \leq -\nu e^T e \end{aligned}$$

La desigualdad anterior se puede reescribir como

$$\dot{V} \leq \begin{bmatrix} e \\ \varphi(v, z) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A + LC)^T P + P(A + LC) + \nu I & P G + (H + KC)^T \\ G^T P + (H + KC) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \varphi(v, z) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.11)$$

donde es claro que (5.9) debe ser satisfecha para que la derivada de  $V$  sea definida negativa, y así garantizar estabilidad asintótica del error de estimación.

El modelo del transformador monofásico

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{(R_1 + R_h)}{L_{l1}} x_1 - \frac{R_h}{L_{l1}} x_2 + \frac{R_h}{L_{l1}} x_3 + \frac{1}{L_{l1}} u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{R_h}{L'_{l2}} x_1 - \frac{(R'_2 + R_h)}{L'_{l2}} x_2 + \frac{R_h}{L'_{l2}} x_3 + \frac{k_{12}}{L'_{l2}} u_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{R_h}{\lambda_n m} (x_1 + x_2 - x_3) + \frac{R_h m}{\lambda_n} (x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 - x_3^3) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = k_{12} x_2.$$

tiene la forma (5.1) con

$$A = \begin{bmatrix} -362515.83 & -361990.95 & 361990.95 \\ -361990.95 & -362515.83 & 361990.95 \\ 14396.75 & 14396.75 & -14396.75 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 90.49 & 0 \\ 0 & 904.97 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10752 \end{bmatrix}, \quad H = [ 1 \ 1 \ -1 ]$$

de acuerdo con los parámetros de la Tabla 3.1, y la parte no lineal  $\gamma(v) = x_1x_3^2 + x_2x_3^2 - x_3^3$  con  $v = Hx = x_1 + x_2 - x_3$ .

La no linealidad  $\gamma(v)$  satisface la condición de monotonía

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v} + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial v} \right)^T = 2x_3^2 \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad (5.13)$$

Utilizando herramientas computacionales [19], tenemos que una solución para la LMI (5.9) es

$$P = \begin{bmatrix} 404427 & -404427 & -0.000566 \\ -404427 & 404427.1 & -0.000836 \\ -0.000566 & -0.000836 & 0.000093 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -104334.8 & -1035963.5 \\ -104334.8 & -1035963.5 \\ -2306330.8 & -22903046.7 \end{bmatrix}$$

$$K = [ 5.09 \ 0.79 ]$$

con  $\nu = 100$ .

El observador resultante para el sistema del transformador es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_1 &= -\frac{(R_1 + R_h)}{L_{l1}}\hat{x}_1 - \frac{R_h}{L_{l1}}\hat{x}_2 - \frac{R_h}{L_{l1}}\hat{x}_3 \\
 &\quad + L_{1,1}(\hat{x}_1 - y_1) + L_{1,2}(k_{12}\hat{x}_2 - y_2) + \frac{1}{L_{l1}}u_1 \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= -\frac{R_h}{L'_{l2}}\hat{x}_1 - \frac{(R'_2 + R_h)}{L'_{l2}}\hat{x}_2 - \frac{R_h}{L'_{l2}}\hat{x}_3 \\
 &\quad + L_{2,1}(\hat{x}_1 - y_1) + L_{2,2}(k_{12}\hat{x}_2 - y_2) + \frac{k_{12}}{L'_{l2}}u_2
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_3 &= \frac{R_h}{\lambda_n m}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - \hat{x}_3) + L_{3,1}(\hat{x}_1 - y_1) + L_{3,2}(k_{12}\hat{x}_2 - y_2) \\
 &\quad + \frac{R_h m}{\lambda_n} \left( \hat{x}_1 + \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + K_{1,1}(\hat{x}_1 - y_1) + K_{1,2}(k_{12}\hat{x}_2 - y_2) \right) \hat{x}_3^2
 \end{aligned}$$

Finalmente, los residuos a utilizar para la detección de fallas se generan de la diferencia de las salidas del transformador y los valores estimados de las mismas

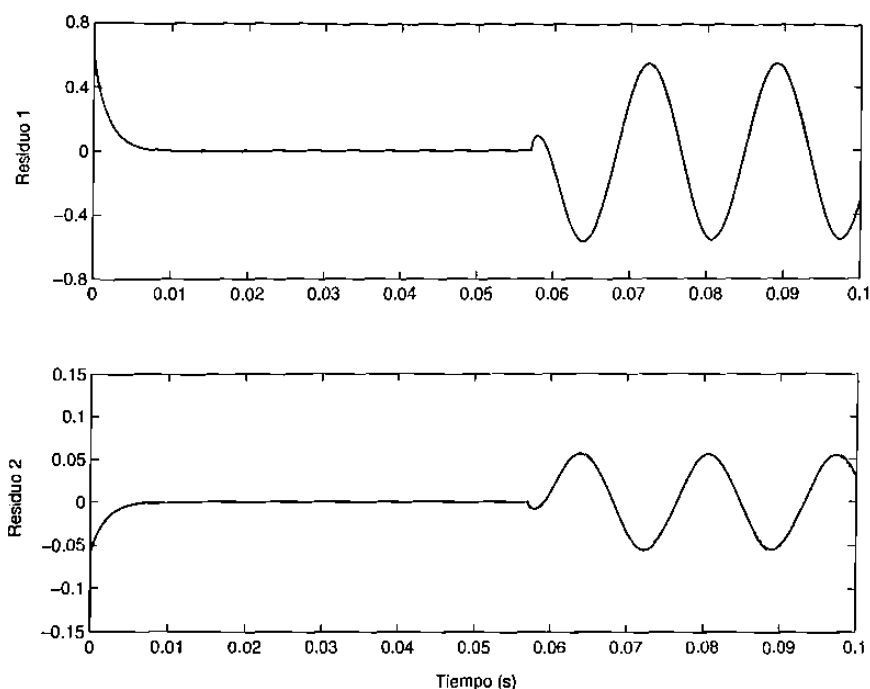
$$r_1 = y_1 - \hat{x}_1, \quad r_2 = y_2 - k_{12}\hat{x}_2 \tag{5.15}$$



## 5.2 Resultados de simulación

Se empleó el observador (5.14) para estimar las salidas de los sistemas que simulan falla incipiente espira-tierra en el devanado primario (4.38) y en el devanado secundario (4.41). Las condiciones iniciales de observador se establecieron en cero, mientras que las del sistema fueron cero excepto por el estado inicial  $x_1(0) = 0.6$  para el caso de falla en el primario y  $x_1(0) = 0.3$  para el caso de falla en el secundario, esto con el fin de observar la convergencia del observador. Los residuos fueron generados de acuerdo con (5.15). En todos los casos los parámetros utilizados fueron los de la Tabla 3.1 para los sistemas y para el observador además las matrices  $K$  y  $L$ ; la ubicación de las fallas fue la indicada en la Tabla 4.1.

En la Fig. 5.2 se muestran los residuos generados de una falla en el primario, donde el parámetro  $R_f$  cambia de  $1M\Omega$  a  $1\Omega$  en  $t=0.057$  seg. En la Fig. 5.3 se muestran los residuos resultantes de una falla en el devanado secundario, con  $R_f$  cambiando de  $1M\Omega$  a  $0.2\Omega$  en  $t=0.057$  seg. En ambos casos se observa que los residuos se comportan de manera semejante al caso ideal, una vez que las salidas estimadas convergen al valor real, i.e.  $r_i(t) \approx 0$  cuando no existe falla y  $|r_i(t)| > T_i > 0$  (donde  $T_i$  es un valor de umbral) bajo la presencia de fallas. De esta forma la evaluación de los residuos se simplifica y puede consistir en una simple prueba de umbral después del tiempo de convergencia del residuo. El Residuo 1 mostró mejores características en las simulaciones realizadas. Dicho residuo aumentó su magnitud conforme el parámetro  $R_f$  fue disminuido y/o el número de vueltas involucrado en la falla fue aumentado, tanto en el devanado primario como en el secundario. De esta manera, la evaluación del residuo podría consistir en una prueba de multiples niveles de umbral, y así obtener varios niveles de alarma de acuerdo a la magnitud de la falla. Cabe mencionar que con estos residuos, la tarea de localización de fallas resultaría difícil, ya que el Residuo 2 fue poco sensible a la falla en el devanado secundario.



**Figura 5.2** Residuos de una falla incipiente en el primario.

En la Fig. 5.4 se muestran los residuos generados por una falla en el primario con el parámetro  $R_f$  cambiando de  $1M\Omega$  a  $60\Omega$ , y en la Fig. 5.5 con  $R_f$  cambiando de  $1M\Omega$  a  $100\Omega$  en  $t = 0.057\text{seg}$ . En ambos casos se observa que la respuesta de los residuos ante fallas de esta magnitud fue reducida, pero conservando características casi ideales. Como se comentó anteriormente de la Fig. 4.13, para valores de  $R_f$  mayores a  $100\Omega$  el valor de las corrientes del transformador es prácticamente el valor nominal, por lo que no es posible generar residuos útiles para estos niveles de falla en el devanado primario.

En el caso de falla en el devanado secundario el máximo valor de  $R_f$  para el cual se obtuvieron residuos portadores de información de falla con características adecuadas fue de  $2.5\Omega$ . En la Fig. 5.6 se muestran los residuos para este caso. Para valores de  $R_f$  mayores al mencionado la detección de fallas en el secundario se dificulta.

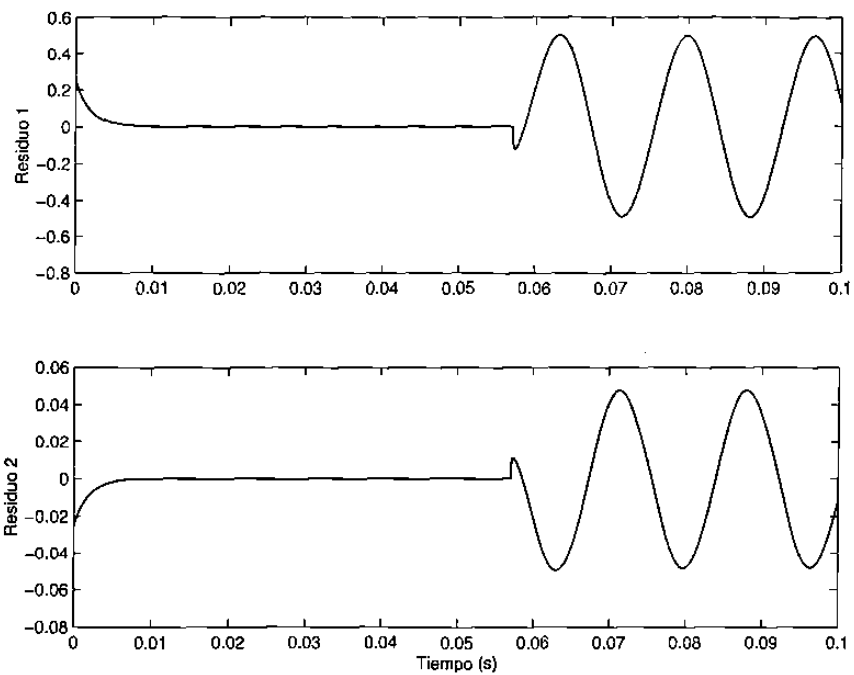


Figura 5.3 Residuos de una falla incipiente en el secundario.

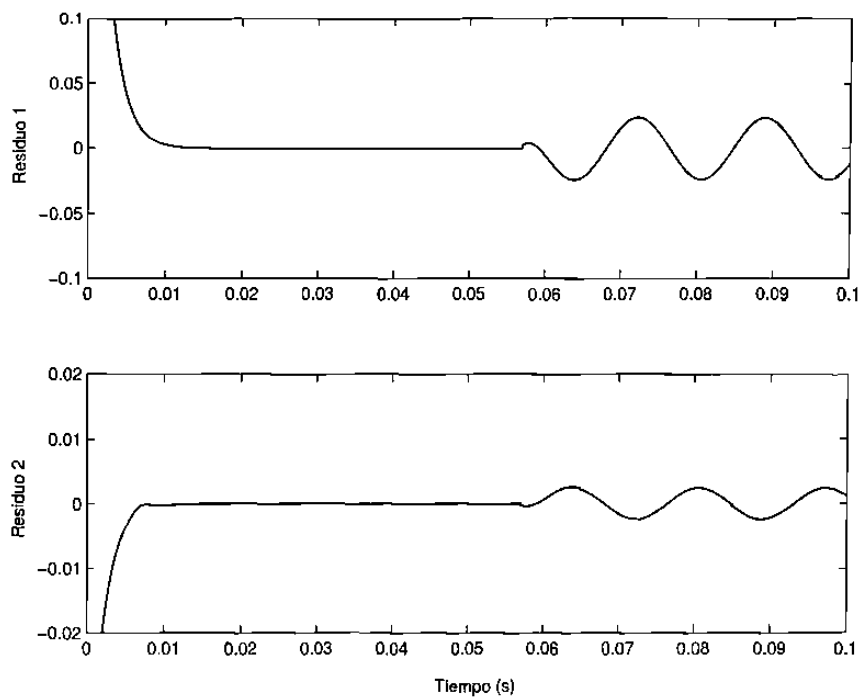
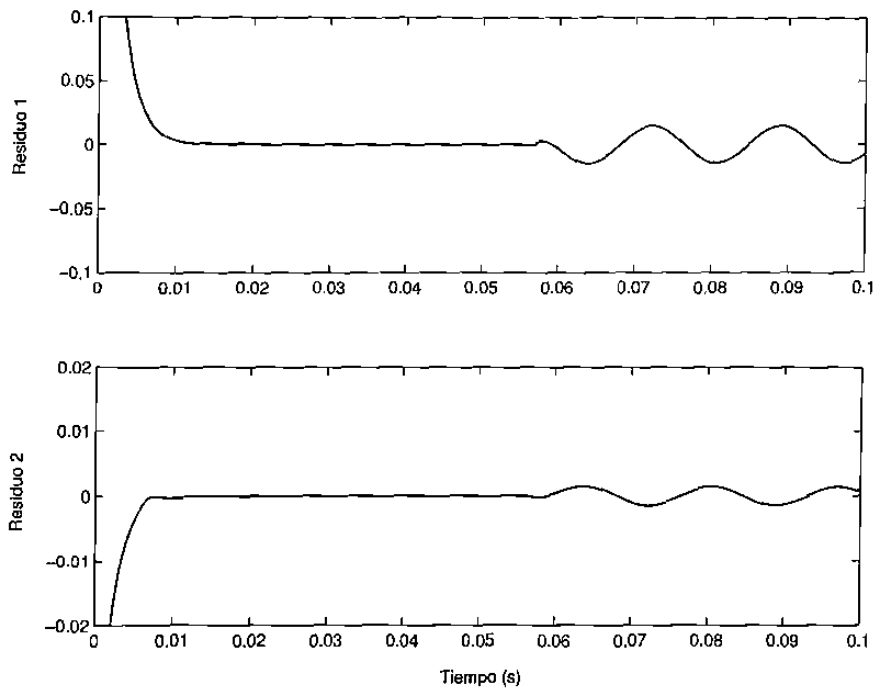
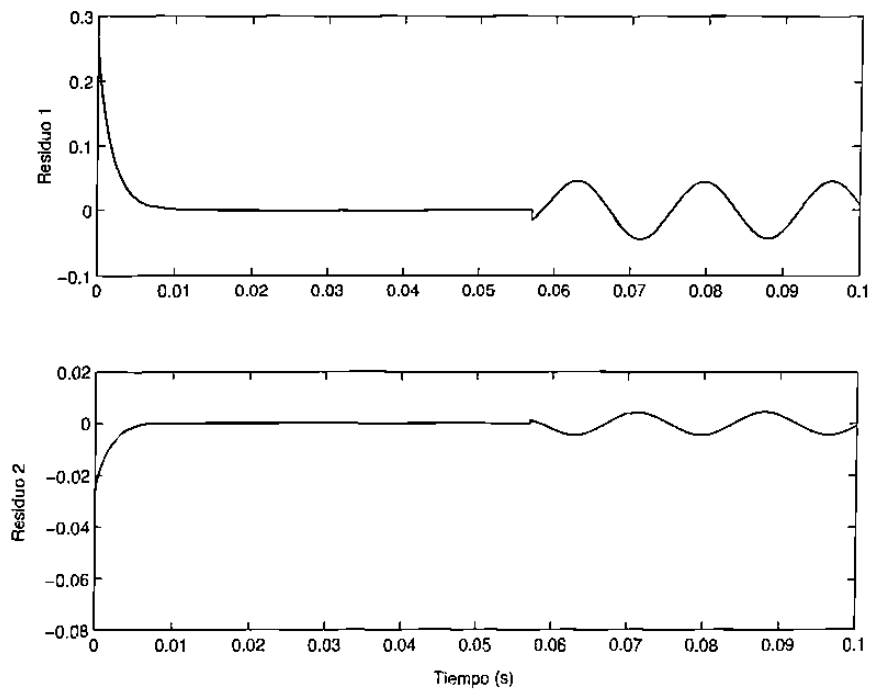


Figura 5.4 Residuos de una falla incipiente en el primario con  $R_f = 60\Omega$ .



**Figura 5.5** Residuos de una falla incipiente en el primario con  $R_f=100\Omega$ .



**Figura 5.6** Residuos de una falla incipiente en el secundario con  $R_f=2.5\Omega$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1 Conclusiones

En esta tesis se presentaron modelos para simular fallas incipientes en transformadores monofásicos, así como un método de detección de fallas basado en el modelo del transformador. El método de detección presentado, en general, mostró buen desempeño en la generación de residuos, incluso para niveles pequeños de falla, lo cual es una característica deseable para poder obtener una temprana advertencia y evitar fallas más severas, como cortocircuitos en devanados, en cuyo caso el método es también capaz de detectar este tipo de falla. Las mediciones necesarias para la detección de fallas son de corriente y voltaje, las cuales están disponibles a través de transductores de corriente y potencial en las subestaciones.

Los residuos generados, sin embargo, no proporcionaron la información necesaria para localizar en que devanado ocurre una falla. No obstante, la localización de la falla tomará mayor importancia y utilidad cuando las características de construcción del transformador permitan tener acceso a los devanados por separado para su mantenimiento individual.

Mediante las simulaciones presentadas en el capítulo 4, se ilustró que los modelos obtenidos representan adecuadamente el comportamiento del transformador monofásico, y que mediante la variación de un parámetro fue posible simular distintos niveles de falla. El cálculo de los parámetros de estos modelos se realizó a partir de los parámetros del circuito equivalente del transformador monofásico.

### 6.2 Contribuciones

En este trabajo se desarrollaron modelos matemáticos en espacio de estado para la simulación de fallas incipientes internas en transformadores monofásicos. En dichos modelos se incluyeron las características de saturación e histéresis para representar de manera

más exacta el comportamiento de un transformador real.

Además, se presentó un método de detección de fallas basado en redundancia analítica, el cual mostró un buen desempeño en las simulaciones realizadas. Este tipo de métodos de detección ha sido poco aplicado a transformadores, y actualmente representa una alternativa a los métodos convencionales para detección de fallas en transformadores.

### 6.3 Trabajos futuros

El estudio del presente trabajo se limitó al modelado matemático de un transformador monofásico con fallas incipientes internas para posteriormente desarrollar un método de detección de fallas. Es conveniente realizar un estudio similar con el fin de extender los resultados obtenidos para el caso de transformadores trifásicos, donde existe una amplia justificación para el desarrollo de nuevos principios de detección de fallas incipientes, con un alto nivel de sensibilidad.

La característica de robustez es siempre deseable en un sistema de detección de fallas, sobre todo en aquellos diseñados para detectar fallas incipientes, las cuales comienzan siendo pequeñas y lentamente se van desarrollando. Un residuo robusto es aquel que es sensible únicamente a las fallas, incluso para niveles pequeños de la misma, mientras permanece insensible ante incertidumbres de modelado y paramétrica. La generación de residuos robustos para sistemas no lineales es un área de investigación aún en desarrollo en la cual no existe una teoría general, por lo que es recomendable buscar nuevos métodos de diseño para la clase de sistemas no lineales en la que se encuentra el modelo del transformador.

La generación de residuos bajo la presencia de ruido es otro aspecto que resultaría conveniente estudiar con más detalle y mejorar en la medida de lo posible. Una posibilidad para lograrlo es tratar de extender la teoría sobre observadores con entradas desconocidas para sistemas no lineales, a la clase de sistemas no lineales vista en este trabajo.

## Bibliografía

- [1] Zhenyuan Wang, "Artificial intelligence applications in the diagnosis of power transformer incipient faults," Ph. D. dissertation, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, Aug. 2000.
- [2] P. Bastard, P. Bertrand, and M. Meunier, "A transformer model for winding fault studies," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 9, No. 2, pp. 690-699, Apr. 1994.
- [3] H. Wang, P. Palmer-Buckle, and K. L. Butler, "Transformer models for detection of incipient internal winding faults," in *Proc. 30th North Amer. Power Symp.*, Cleveland, OH, Oct. 1998, pp. 90-98.
- [4] H. Wang and K. L. Butler, "Modeling transformer with internal winding faults by calculating leakage factors," in *Proc. 31st North Amer. Power Symp.*, San Luis Obispo, CA, Oct. 1999, pp. 176-182.
- [5] H. Wang and K. L. Butler, "Finite element analysis of internal winding faults in distribution transformers," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 16, No. 3, pp. 422-427, July 2001.
- [6] H. Wang and K. L. Butler, "Modeling transformers with internal incipient faults," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 17, No. 2, pp. 500-509, Apr. 2002.
- [7] K. L. Butler and M. Bagriyanik, "Identifying transformer incipient events for maintaining system reliability," *Proc. 36th Hawaii Int. Conf. Syst. Sciences*, p. 57b, Big Island, HI, Jan. 2003.
- [8] J. Chen and R. J. Patton, *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Norwell, MA, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [9] Stephen J. Chapman, *Máquinas Eléctricas*. McGraw Hill, Bogotá, Colombia, 1990.
- [10] Chee-Mun Ong, *Dynamic Simulation of Electric Machinery using MATLAB/SIMULINK*. New Jersey, Prentice Hall, 1998.
- [11] Carlos Pérez-Rojas, "Fitting saturation and hysteresis via arctangent functions," *IEEE Power Eng. Review*, pp. 55-57, Nov. 2000.

- [12] R. Rajamani, "Observers for Lipschitz nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, No. 3 March 1998.
- [13] E. A. García and P. M. Frank, "Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis: a survey," *Control Eng. Practice*, vol. 5, No. 5, pp. 663-670, May 1997.
- [14] C. De Persis and A. Isidori, "A geometric approach to nonlinear fault detection and isolation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, No. 6, pp. 853-865, Jun 2001.
- [15] Tako F. Lootsma, "Observer-based fault detection and isolation for nonlinear systems," Ph. D. dissertation, Aalborg University, Aalborg, Denmark. Jan. 2001.
- [16] M. Arcak and P. Kokotović, "Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis," *Automatica*, vol. 37, pp. 1923-1930, Dec. 2001.
- [17] X. Fan and M. Arcak, "Nonlinear observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities," *Proc. 41th IEEE Conf. Decision Control*, pp. 684-688, Las Vegas, NV, Dec. 2002.
- [18] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems 2nd ed.* New Jersey, Prentice Hall, 1996.
- [19] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, MA, The MathWorks, Inc. 1995.



