premultiplicando por $\varepsilon^T(k)$ y postmultiplicando por $\varepsilon(k)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon^T(k)[A_o^T P_o A_o]\varepsilon(k) &= \varepsilon^T(k)[(1-\gamma_o)P_o - \gamma_o(1-\gamma_o)^n C^T C]\varepsilon(k) \\
\|A_o\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 &= (1-\gamma_o)\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 - \gamma_o(1-\gamma_o)^n\|C\varepsilon(k)\|^2 \\
&\leq (1-\gamma_o)\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \\
&\leq \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2
\end{aligned}$$

de lo que finalmente se obtiene

$$\|A_o\varepsilon(k)\|_{P_o} \leq \|\varepsilon(k)\|_{P_o} \tag{3.19}$$

Utilizando los resultados anteriores (3.18 - 3.19), se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta(V(\varepsilon(k))) &\leq -\gamma_o\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + \frac{2\tau}{\theta^n}\|\varepsilon(k)\|_{P_o} b_1\theta^n\|\varepsilon(k)\|_{P_o} + \frac{\tau^2}{\theta^{2n}} b_1^2\theta^{2n}\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \\
&\leq -\gamma_o\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + 2b_1\tau\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + b_1^2\tau^2\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2
\end{aligned}$$

puesto que $\gamma_o = \tau\theta$ (3.14), obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta(V(\varepsilon(k))) &\leq -\tau\theta\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + 2b_1\tau\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + b_1^2\tau^2\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \\
&\leq -\tau(\theta - 2b_1 - b_1^2\tau)\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2.
\end{aligned}$$

Definiendo $\delta := \theta - 2b_1 - b_1^2\tau$ y si $0 < \tau\delta < 1$, resulta

$$\begin{aligned}
\Delta(V(\varepsilon(k))) &\leq -\tau\delta\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \\
&\leq -\tau\delta V(\varepsilon(k))
\end{aligned} \tag{3.20}$$

y recordando la forma de la función de Lyapunov (3.15) se tiene

$$\begin{aligned}
V(\varepsilon(k+1)) - V(\varepsilon(k)) &\leq -\tau\delta V(\varepsilon(k)) \\
&\leq (1-\tau\delta)V(\varepsilon(k))
\end{aligned}$$

o de manera equivalente

$$V(\varepsilon(k+1)) \leq (1-\tau\delta)^{k+1}V(\varepsilon(k_0)) \tag{3.21}$$

□

De este modo concluimos convergencia exponencial para el error de estimación (3.11), es decir, los estimados del observador discreto (3.9) convergen de manera exponencial a los estados del sistema (3.1).