se sigue que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \Delta V(\varepsilon(k)) \leq -\delta\tau \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2$$

Sin embargo, para la primera sumatoria se tiene [5]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k_0}^{\infty} \Delta V(\varepsilon(k)) &= \Delta V(\varepsilon(k_0)) + \Delta V(\varepsilon(k_0+1)) + \Delta V(\varepsilon(k_0+2)) + \cdots \\
&= V(\varepsilon(k_0+1)) - V(\varepsilon(k_0)) + V(\varepsilon(k_0+2)) - V(\varepsilon(k_0+1)) \\
&\quad + V(\varepsilon(k_0+3)) - V(\varepsilon(k_0+2)) + \cdots \\
&= -V(\varepsilon(k_0)) + V(\varepsilon(\infty))
\end{aligned}$$

es decir [6]

$$-V(\varepsilon(k_0)) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \Delta V(\varepsilon(k)) \tag{3.24}$$

de lo que resulta

$$\begin{aligned}
-V(\varepsilon(k_0)) &\leq -\delta\tau \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \\
\delta\tau \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 &\leq V(\varepsilon(k_0))
\end{aligned}$$

de la definición para la función de Lyapunov dada en (3.15) evaluando en $k = k_0$

$$\begin{aligned}
\delta\tau \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 &\leq \|\varepsilon(k_0)\|_{P_o}^2 \\
\sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 &\leq \frac{1}{\delta\tau} \|\varepsilon(k_0)\|_{P_o}^2 \qquad (3.25) \\
\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \right)^{1/2} &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta\tau}} \|\varepsilon(k_0)\|_{P_o}
\end{aligned}$$

hecho del que concluimos que el error de estimación está acotado (siguiendo un desarrollo similar al efectuado en (3.22)-(3.23)).

Ahora analizaremos la dinámica del observador propuesto (3.9) bajo la acción de la ley de control (3.9) en términos de los estimados, es decir

$$z(k+1) = A_\tau z(k) + \tau B[\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)] + \tau \Delta_\theta^{-1} K[y(k) - \hat{y}(k)]$$

[5] Escribimos $V(\varepsilon(\infty))$, haciendo un abuso en la notación

[6] Recuerde que por definición, todas las funciones candidatas de Lyapunov son positivas