3.6.2 Diseño del Controlador

Un análisis sencillo del sistema (3.30) muestra que éste es linealizable mediante retroalimentación de estado, por medio de un cambio de coordenadas (véase [31]) como el siguiente

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \xi_1 \\
x_2 &= \xi_2 \\
x_3 &= -\frac{F_l}{J_l}\xi_2 - \frac{mgl}{J_l}\mathrm{sen}(\xi_1) - \frac{\tilde{k}}{J_l}(\xi_1 - \xi_3) \\
x_4 &= \frac{F_l^2}{J_l^2}\xi_2 + \frac{F_l mgl}{J_l^2}\mathrm{sen}(\xi_1) + \frac{F_l\tilde{k}}{J_l^2}(\xi_1 - \xi_3) - \frac{\tilde{k}}{J_l}(\xi_2 - \xi_4) \\
&\quad -\frac{mgl}{J_l\tau}\mathrm{sen}(\xi_1)\cos(\xi_1)\xi_2
\end{aligned}
$$

con una retroalimentación dada por

$$u = \beta^{-1}(x)[v(x) - \alpha(x)]$$

donde

$$
\begin{aligned}
\alpha(x) &= \left(\frac{mgl}{J_l}\mathrm{sen}(x_1) + \frac{F_l mgl}{J_l^2}\cos(x_1) + \frac{\tilde{k}F_l}{J_l}^2\right)x_2 + \frac{mgl}{J_l}\cos(x_1) + \left(\frac{\tilde{k}}{J_l} - \frac{F_l^2}{J_l^2}\right) \\
&\quad \left[\frac{F_l}{J_l}x_2 + \frac{mgl}{J_l}\mathrm{sen}(x_1) + \frac{\tilde{k}}{J_l}(x_1 - x_3)\right] - \frac{\tilde{k}F_l}{J_l^2}x_4 + \frac{\tilde{k}}{J_l}\left[\frac{\tilde{k}}{J_m}(x_1 - x_3) - \frac{F_m}{J_m}x_4\right] \\
\beta(x) &= \tau\frac{\tilde{k}}{J_l J_m}
\end{aligned}
$$

El control auxiliar está dado por $v(x) = -F\Omega_\rho x$, donde las matrices F y Ω_ρ están definidas como en (3.4), es decir

$$
\begin{aligned}
F &= \begin{pmatrix} C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\
\Omega_\rho &= \mathbf{diag}(\rho^4, \rho^3, \rho^2, \rho)
\end{aligned}
$$

Entonces, el control resulta en

$$
\begin{aligned}
v(x) &= -F\Omega_\rho x \\
&= -(\rho^4 x_1 + 4\rho^3 x_2 + 6\rho^2 x_3 + 4\rho x_4)
\end{aligned}
$$