Por otro lado, para verificar la estabilidad del sistema en lazo cerrado bajo la acción del control $u(k)$ (3.35) es necesario introducir la noción de cota fundamental (ultimate bound) para las soluciones del sistema libre de perturbaciones

$$\xi(k+1) = F_\tau(\xi(k), k) \tag{3.36}$$

donde $F_\tau(\xi(k), k) = \xi(k) + \tau f(\xi(k))$, la cual usaremos para estudiar las propiedades de estabilidad para una clase de sistemas no lineales discretos, cuando el punto de equilibrio es afectado por pequeñas perturbaciones

Definition 1 [24] *Las soluciones del sistema (3.36) son uniformemente fundamentalmente acotadas (uniformly ultimately bounded) si existen constantes positivas β_1 y β_2 y para cada $r \in (0, \beta_2)$ existe una constante $T = T(r)$, tal que*

$$\|\xi(k_0)\| < r \Rightarrow \|\xi(k)\| < \beta_1, \quad \forall\ k > k_0 + T$$

la constante β_1 se conoce como cota fundamental.

Además, se presenta un estudio sobre la existencia de la cota fundamental, para la solución del sistema (3.36).

Considere la siguiente hipótesis.

Hipótesis 3.2 *Existe $\mu > 0$ tal que el punto de equilibrio $\xi = 0$ es uniformemente estable en B_μ.*

Lema 3.3 [24] *Existe una función continua $V : B_r \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} c_1\|\xi(k)\|^2 &\leq V(\xi, k) \leq c_2\|\xi(k)\|^2 \\ \Delta V(\xi, k) &\leq -c_3\|\xi(k)\|^2 \end{aligned}$$

para $0 < \mu < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}r$, para algunas constantes positivas c_1, c_2 y c_3, $\forall\ k > 0$ y $\forall\ \xi \in B_r$.

Teorema 3.2 [24] *Considere el sistema (3.36). Suponga además que la hipótesis 3.2 y el lema 3.3 se satisfacen. Existe una función $\varphi(\cdot,\cdot) = \phi(\cdot)\tilde{\rho}(\cdot)$ de clase $\mathcal{KL}$ tal que $\phi(\cdot)$ es una función de clase $\mathcal{K}$, $\tilde{\rho}(\cdot)$ es una función decreciente y un tiempo k_1, dependientes de $\xi(k_0)$ y μ, tal que la solución de (3.36) satisface*

$$\|\xi(k)\| \leq \phi\left(\|\xi(k_0)\|\right)\tilde{\rho}(k - k_0) \quad \forall\ k \in (k_0, k_1)\,,\ k_0 \leq k_1$$

$$\|\xi(k)\| \leq \sqrt{\tfrac{c_2}{c_1}}\mu, \quad \forall\ k \geq k_1 \quad \text{para} \quad \|\xi(k_0)\| < \sqrt{\tfrac{c_1}{c_2}}r.$$