

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) &= -\rho S_3 - \Phi^T(u, y) S_2 - S_2^T \Phi(u, y) \\
&\quad + \rho S_2^T S_1^{-1} S_2 + \Phi(u, y)^T S_1 S_1^{-1} S_2 + S_2^T A(u, y) S_1^{-1} S_2 \\
&\quad - S_2^T A(u, y) S_1^{-1} S_2 + S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma C S_1^{-1} S_2 + S_2^T \Phi(u, y) \\
&= -\rho S_3 + \rho S_2^T S_1^{-1} S_2 + S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma C S_1^{-1} S_2 \\
&= -\rho (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) + S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma C S_1^{-1} S_2
\end{aligned}$$

puesto que $\Lambda = -S_1^{-1} S_2$, entonces $\Lambda^T = -S_2^T S_1^{-1}$ (recuerde que S_1 es simétrica), por lo tanto

$$\frac{d}{dt} (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) = -\rho (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda$$

si denotamos $S_\theta = S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2$ se tiene

$$\frac{d}{dt} (S_\theta) = -\rho S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda$$

lo cual coincide con la ecuación (4.15) para $\rho_\theta = \rho$.

Concluimos este análisis, con la ganancia del observador (4.7) dada por $S^{-1} H^T \Sigma$ (con H como en (4.20)), así se tiene²

$$\begin{aligned}
S^{-1} H^T \Sigma &= \begin{pmatrix} S_1^{-1} \left(I - S_2 (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \right) & * \\ (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \Sigma \\
&= \begin{pmatrix} S_1^{-1} \left(I - S_2 (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \right) C^T \Sigma \\ (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

consideremos inicialmente el término $(S^{-1} H^T \Sigma)_{11}$, en función de (4.21)

$$\begin{aligned}
S_1^{-1} \left(I - S_2 (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \right) C^T \Sigma &= S_1^{-1} (I - S_2 (-\{S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2\})^{-1} \\
&\quad S_2^T S_1^{-1}) C^T \Sigma \\
&= S_1^{-1} (I + S_2 (-\{S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2\})^{-1} \\
&\quad [-S_2^T S_1^{-1}]) C^T \Sigma \\
&= S_1^{-1} (I + S_2 (-S_\theta)^{-1} \Lambda^T) C^T \Sigma
\end{aligned}$$

²véase anexo C, para la deducción de S^{-1}