$$
\begin{aligned}
S_1^{-1}\left(I - S_2\left(S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3\right)^{-1} S_2^T S_1^{-1}\right) C^T \Sigma &= \left(S_1^{-1} - S_1^{-1} S_2 S_\theta^{-1} \Lambda^T\right) C^T \Sigma \\
&= \left(S_x^{-1} + \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T\right) C^T \Sigma \\
&= \left(S_x^{-1} C^T + \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T\right) \Sigma
\end{aligned}
$$

expresión que coincide con la ganancia del observador dada para el estado x (véase (4.11)).

Ahora para el término $\left(S^{-1} H^T \Sigma\right)_{21}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\left(S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3\right)^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma &= \left(-\left\{S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2\right\}\right)^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma \\
&= -\left(S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2\right)^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma \\
&= \left(S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2\right)^{-1} \left[-S_2^T S_1^{-1}\right] C^T \Sigma \\
&= S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma
\end{aligned}
$$

resultado que coincide con la ganancia para la estimación del vector de parámetros (4.12).

□

Hasta este punto, suponemos que las condiciones de excitación (4.2) y (4.6) para el sistema (4.5) debe ser equivalente a (4.6) par el sistema extendido (4.20).

Del análisis efectuado en esta sección, podemos concluir que al seleccionar una ganancia (matricial) variante en el tiempo como la dada en (4.4) para el observador adaptable (4.3) nos lleva al ya conocido observador de Kalman para un sistema extendido con un vector de parámetros. Esto incrementa los cálculos que hay que efectuar en línea. Por otra parte, podemos sintonizar la velocidad de convergencia tanto para el parámetro de estimación del estado, como para el parámetro desconocido, sintonizando simplemente ρ_x y ρ_θ (o solamente ρ).

A continuación, mostramos un ejemplo del uso práctico de la teoría de observadores adaptables ya presentada.