Anexo B

Sistemas Discretos

B.1 Equivalencia en Estabilidad Exponencial

La definición formal para la estabilidad exponencial[1] de sistemas discretos esta dada por

Definición B.1 *Decimos que el origen* [2] *del sistema* $\xi(k+1) = F_\tau(k, \xi(k))$ *sujeto a la condición inicial* $\xi(k_0) = \xi_0$ *es exponencialmente estable, si existen constantes* $a_1, a_2 > 0$ *y* $a_3 < 1$ *tal que la solución del sistema* $\xi(k)$ *satisface*

$$\|\xi_0\| \leq a_1 \quad \Rightarrow \quad \|\xi(k)\| \leq a_2\|\xi_0\|a_3^k \quad \forall k \geq k_0 \geq 0 \tag{B.1}$$

si además (B.1) se satisface para toda $\xi \in \mathbb{R}^n$, *entonces decimos que el origen del sistema es globalmente exponencialmente estable.*

Si comparamos la definición anterior (B.1) con la dada en la sección 3.2 del capítulo 3 (ver (3.2)), notamos que la principal diferencia se presenta en los términos

$$\begin{aligned} \|\xi(k)\| &\leq a_2\|\xi_0\|e^{-\lambda_\tau(k-k_0)} \\ \|\xi(k)\| &\leq a_2\|\xi_0\|a_3^k \end{aligned}$$

pero, para la primera expresión tenemos

$$\|\xi(k)\| \leq a_2\|\xi_0\|e^{-\lambda_\tau(k-k_0)} = a_2\|\xi_0\|e^{-\lambda_\tau k}e^{\lambda_\tau k_0} = \widetilde{a}_2\|\xi_0\|e^{-\lambda_\tau k}$$

donde $\widetilde{a}_2 = a_2 e^{\lambda_\tau k_0} =$ constante, por lo tanto

$$a_3^k \approx e^{-\lambda_\tau k} = \left(e^{-\lambda_\tau}\right)^k$$

es decir

$$a_3 \approx e^{-\lambda_\tau} = \text{constante} \tag{B.2}$$

Sin embargo, de la definición A.1 para garantizar estabilidad tenemos $a_3 < 1$, hecho que aplicado a (B.2) resulta en

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_\tau} &< 1 \\ \ln\left(e^{-\lambda_\tau}\right) &< \ln(1) \\ -\lambda_\tau &< 0 \end{aligned}$$

[1] véase [49] página 266

[2] Se asume sin perdida de generalidad que el equilibrio está en el origen