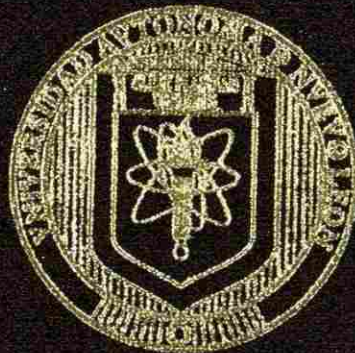


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTUDIOS SOBRE EL CONTROL Y LA ESTIMACION DE  
SISTEMAS NO LINEALES EN TIEMPO CONTINUO Y DISCRETO

POR:

OSCAR FRANCISCO HUERTA GUEVARA

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. NOVIEMBRE 2004

OPGH

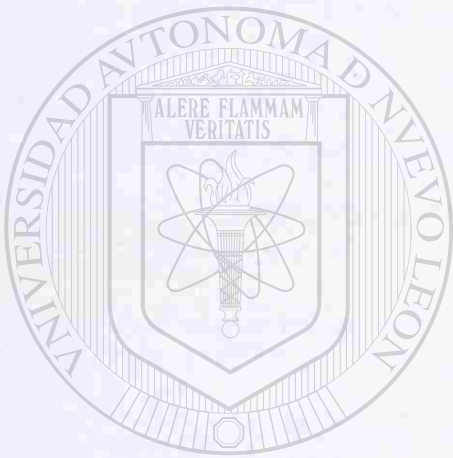
ESTUDIOS SOBRE EL CONTROL Y LA ESTIMACION DE  
SISTEMAS NO LINEALES EN TIEMPO CONTINUO Y DISCRETO

TD  
Z5853  
.M2  
FIME  
2004  
.H8

2004



1020150331



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTUDIOS SOBRE EL CONTROL Y LA ESTIMACION DE  
SISTEMAS NO LINEALES EN TIEMPO CONTINUO Y DISCRETO

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
POR: ®

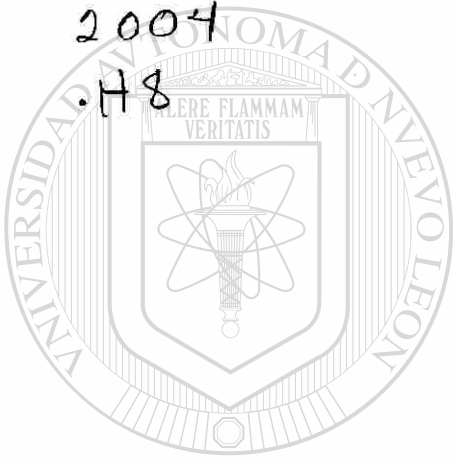
DIRECTOR OSCAR FRANCISCO HUERTA GUEVARA S

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA ELECTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. NOVIEMBRE 2004

TD  
Z5853  
.M2  
FIME  
2004  
.H8



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

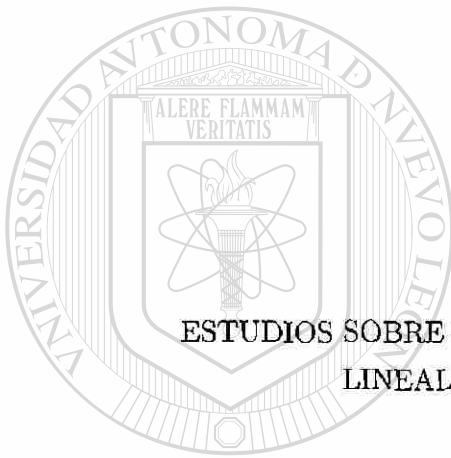
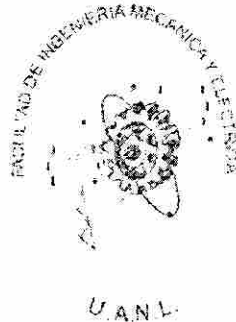


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



FONDO  
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTUDIOS SOBRE EL CONTROL Y LA ESTIMACIÓN DE SISTEMAS NO  
LINEALES EN TIEMPO CONTINUO Y DISCRETO

POR

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

OSCAR FRANCISCO HUERTA GUEVARA

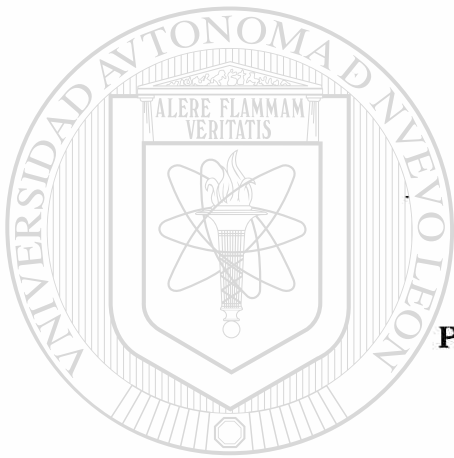
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL.

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA NUEVO LEÓN

NOVIEMBRE 2004



Copyright 2004

Por Oscar Francisco Huerta Guevara

Reservados Todos Los Derechos

UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

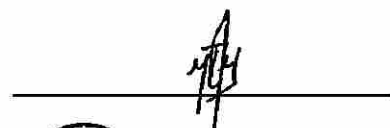
**ESTUDIO SOBRE EL CONTROL Y LA ESTIMACIÓN DE SISTEMAS  
NO LINEALES EN TIEMPO CONTINUO Y DISCRETO**

Los miembros del comité aprueban la Tesis  
Doctoral de Oscar Francisco Huerta Guevara.

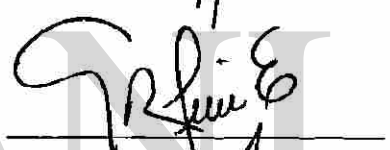
**Dr. Jesús de León Morales**  
Presidente



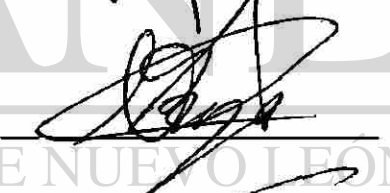
**Dr. Marco Tulio Mata Jiménez**  
Secretario



**Dr. Gerardo Espinosa Pérez**  
Vocal



**Dr. René Galindo Orozco**  
Vocal



**Dr. Alberto Cavazos González**  
Vocal



Vo. Bo.



**Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez**  
División de Estudios de Posgrado

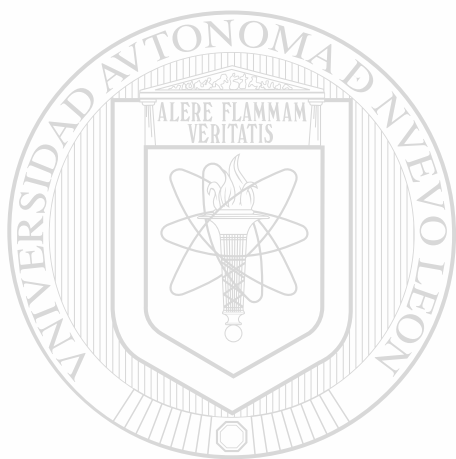


## Dedicatoria:

A mis padres Francisco Huerta y Margarita Guevara, por el apoyo amoroso dado a todas las actividades de mi vida.

A mi esposa Abigail Contreras, quien llegó para darle un nuevo sentido a mi vida.

A mis hermanos Jorge, Juan y Sandra por estar pendientes de mí.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Agradecimientos:

A Jehová Dios, por la fuerza y el entendimiento necesarios para realizar este trabajo.

Al Dr. Jesús de León Morales, por la guía y dirección que me dió, las cuales en ocasiones fueron más allá de lo estrictamente académico, pues contribuyeron a mejorar mi desempeño como estudiante de posgrado y a madurar como persona.

Al Dr. Marco Tulio Mata, y a los compañeros Marcos y Manuel por su amistad y las todas tardes que comimos juntos en la Fac. de Arquitectura.

A los doctores Luc Dugard (LAG-INPG, Grenoble, Fr)<sup>1</sup> y Alain Gumineau (IRCCyN-ECN, Nantes, Fr)<sup>2</sup> por su apoyo para efectuar estancias académicas.

A los doctores René Galindo, Marco Tulio Mata, Gerardo Espinosa y Alberto Cavazos, por las sugerencias dadas durante la revisión de esta tesis.

Al CONACyT, el proyecto LAFMAA y el DIE-FIME-UANL por su apoyo económico, sin los cuales hubiera sido imposible efectuar este trabajo<sup>3</sup>.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN<sup>®</sup>  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

---

<sup>1</sup>LAG: Laboratoire d'Automatique de Grenoble

INPG: Institut National Polytechnique de Grenoble

<sup>2</sup>IRCCyN: Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

ECN: Ecole Centrale de Nantes

<sup>3</sup>LAFMAA: Laboratoire Mixte Franco-Mexicain en Automatique Appliquée

# Resumen

## Estudios Sobre el Control y la Estimación de Sistemas No Lineales en Tiempo Continuo y Discreto

Publicación No. \_\_\_\_\_

Oscar Francisco Huerta Guevara

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales

Noviembre, 2004

Recientemente, la estabilidad en sistemas eléctricos de potencia (SEP), definida como la capacidad de mantener sincronía tanto en condiciones normales de operación como después de una perturbación (por ejemplo, un corto circuito y/o cambios en las condiciones de operación), ha atraído la atención de muchos investigadores. A este respecto, la implementación de técnicas de control avanzado para sistemas de potencia se percibe como una área prometedora. En esta tesis, se trata el problema de control de un sistema de potencia multimáquinas con el objeto de garantizar la estabilidad, mediante la técnica de modos deslizantes y se compara el control presentado con uno ya desarrollado basado en pasividad.

La mayoría de las estrategias de control han sido desarrolladas para sistemas no lineales en tiempo continuo, y aplicadas para propósitos de control o monitoreo. Sin embargo, tomando en cuenta el desarrollo tecnológico en el procesamiento de datos y la capacidad de las computadoras digitales, se han desarrollado e implementado algoritmos más eficientes.

Esto ha motivado el desarrollo de estrategias de control en tiempo discreto. La mayoría de estas estrategias han sido desarrolladas a partir de la discretización de sistemas continuos, generalmente basadas en el método de Euler. En esta tesis se retoman trabajos previos sobre el diseño de algoritmos de control y de observación para una clase de sistemas no lineales discretizados mediante el método de Euler. Se presenta un análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado (control discreto y observador discreto) y un estudio sobre la validez de implementar un observador discreto diseñado a partir de un sistema discretizado vía Euler (Estimación Práctica).

Finalmente, en ocasiones no se dispone del vector de estados de manera completa, lo cual dificulta la implementación de una ley de control. El problema de estimación de estado para sistemas no lineales, ha atraído la atención de la comunidad de control, y varios trabajos han sido propuestos para ciertas clases de sistemas. Por otro lado, también a veces aunado al problema del desconocimiento en parte del vector de estados, se desconocen algunos parámetros del sistema. A este respecto podemos decir, que la identificación de parámetros para sistemas lineales es un área ya muy estudiada, también se han presentado algunos resultados para sistemas no lineales. Sin embargo, cuando se presenta el problema de estimación de las variables de estado y la identificación de parámetros de manera simultánea, el problema se torna más complicado. Por tal motivo, en esta tesis se propone una solución a dicho problema, mediante un observador adaptable se efectúa una estimación del estado no medible y una identificación de los parámetros desconocidos simultáneamente para la clase de sistemas no lineales afines en el estado y en los parámetros. La motivación en el uso de los observadores adaptables es su potencial aplicación en la detección de fallas, aislamiento, transmisión de señales y control adaptable entre otros. Además, se presentan dos aplicaciones de este algoritmo: Sistemas Caóticos y Máquinas eléctricas.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Generalidades y Antecedentes . . . . .	1
1.2	Objetivos de la Tesis . . . . .	3
1.3	Organización de la Tesis . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Control Continuo en Modos Deslizantes para Sistemas de Potencia</b>	<b>5</b>
2.1	Introducción . . . . .	5
2.2	Modelo Dinámico de un Sistema de Potencia . . . . .	7
2.3	Diseño de Control en Modos Deslizantes . . . . .	8
2.4	Control Hamiltoniano . . . . .	14
2.5	Aplicación a Sistemas de Potencia . . . . .	16
2.5.1	Diseño de Control en Modos Deslizantes . . . . .	17
2.5.2	Diseño de Control Hamiltoniano . . . . .	20
2.6	Resultados de Simulación . . . . .	23
2.7	Conclusiones . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Sistemas Discretos</b>	<b>29</b>
3.1	Introducción . . . . .	29
3.2	Descripción del Problema . . . . .	31
3.3	Ley de Control Linealizante . . . . .	32
3.3.1	Análisis de Estabilidad (sistema - control) . . . . .	34
3.4	Estimación del Estado . . . . .	35
3.4.1	Análisis de Estabilidad (sistema - observador) . . . . .	37
3.5	Esquema Control - Observador (Análisis en Lazo Cerrado) . . . . .	40
3.5.1	Análisis de Estabilidad . . . . .	43
3.6	Aplicación (Robot de Unión Flexible) . . . . .	47
3.6.1	Modelo Matemático . . . . .	47
3.6.2	Diseño del Controlador . . . . .	48
3.6.3	Diseño del Observador . . . . .	49
3.6.4	Resultados de Simulación . . . . .	49
3.7	Control Mediante Modos Deslizantes . . . . .	54
3.7.1	Análisis de Estabilidad (sistema - control mediante modos deslizantes) . . . . .	55

3.8	Aplicación (Generador Síncrono)	60
3.8.1	Modelo Matemático	60
3.8.2	Diseño de la Ley de Control	62
3.8.3	Diseño del Observador	63
3.8.4	Resultados de Simulación	63
3.9	Estimación Práctica	68
3.9.1	Análisis para el Error de Estimación	69
3.10	Conclusiones	75
<b>4</b>	<b>Observador Adaptable</b>	<b>76</b>
4.1	Introducción	76
4.2	Resultados Previos e Interpretación Propuesta	78
4.2.1	Observador Adaptable Exponencial para Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo	78
4.2.2	Observador de Estado para Sistemas Afines en el Estado	79
4.3	Observador Adaptable para sistemas afines en el estado en el estado y en los parámetros	80
4.3.1	Discusión del Observador Extendido	83
4.4	Aplicación (Sistemas Caóticos)	88
4.4.1	Modelo Matemático y Diseño del Observador	88
4.4.2	Resultados de simulación	90
4.4.3	Identificación de $\gamma$ (caso 1)	92
4.4.4	Identificación de $\gamma, \rho$ y $\sigma$ (caso 2)	95
4.4.5	Identificación de $\gamma, \rho, \sigma$ y $\beta$ (caso 3)	97
4.5	Aplicación (Generador Síncrono)	100
4.5.1	Modelo Matemático	100
4.5.2	Resultados de Simulación	102
4.6	Conclusiones	106
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>107</b>
5.1	Contribuciones de la Tesis	107
5.2	Trabajos Futuros	109
<b>A</b>	<b>Sistemas de Potencia Multimáquinas</b>	<b>110</b>
A.1	Nomenclatura del Sistema de Potencia MultiMáquinas	110

<b>B</b>	<b>Sistemas Discretos</b>	<b>111</b>
B.1	Equivalencia en Estabilidad Exponencial . . . . .	111
B.2	Propiedades de las Matrices de Control y Estimación . . . . .	112
B.3	Resultados Aplicados al Análisis de Estabilidad para Sistemas Discretos . . . . .	114
B.4	Función de Lyapunov Discreta . . . . .	115
<b>C</b>	<b>Observador Adaptable</b>	<b>117</b>
C.1	Derivada de una Matriz Inversa . . . . .	117
C.2	Matriz Inversa para el Sistema Extendido . . . . .	117
<b>D</b>	<b>Publicaciones</b>	<b>119</b>



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## Lista de Figuras

2.1	Control de regulación	9
2.2	Control mediante modos deslizantes clásico	11
2.3	Control mediante modos deslizantes continuo	11
2.4	Sistema de potencia multimáquina.	17
2.5	Ángulo de potencia del generador 1.	24
2.6	Ángulo de potencia del generador 2.	25
2.7	Velocidad Angular del generador 1.	25
2.8	Velocidad Angular del generador 2.	26
2.9	Voltaje Transitorio en el eje de Cuadratura del generador 1.	26
2.10	Voltaje Transitorio en el eje de Cuadratura del generador 2.	27
2.11	Leyes de control aplicadas al generador 1.	27
2.12	Leyes de control aplicadas al generador 2.	28
3.1	Ley de control mediante retroalimentación de estado	34
3.2	Estimación del estado	38
3.3	Estimación del estado	41
3.4	Desplazamiento del eslabón	51
3.5	Desplazamiento del eslabón (acercamiento)	51
3.6	Desplazamiento del rotor	52
3.7	Velocidad con que se desplaza el eslabón	52
3.8	Velocidad del rotor	53
3.9	Ley de control linealizante	53
3.10	Generador Síncrono	61
3.11	Posición angular	65
3.12	Error en la posición angular con diferentes ganancias en la estimación	65
3.13	Velocidad angular	66
3.14	Voltaje transitorio en el eje de cuadratura	66
3.15	Ley de control basada en modos deslizantes	67
3.16	Desplazamiento del eslabón en lazo abierto con $\tau = 1ms$	73
3.17	Desplazamiento del eslabón en lazo abierto con $\tau = 2ms$	73
3.18	Desplazamiento del eslabón en lazo abierto con $\tau = 3ms$	74
4.1	Esquema de comunicaciones mediante sistemas caóticos	89



4.2	$x_1$ vs $\hat{x}_1$ ( $\beta, \rho$ y $\sigma$ conocidos)	92
4.3	$x_1$ vs $\hat{x}_1$ (acercamiento) ( $\beta, \rho$ y $\sigma$ conocidos)	93
4.4	$x_2$ vs $\hat{x}_2$ ( $\beta, \rho$ y $\sigma$ conocidos)	93
4.5	$x_3$ vs $\hat{x}_3$ ( $\beta, \rho$ y $\sigma$ conocidos)	94
4.6	$\gamma$ vs $\hat{\gamma}$ ( $\beta, \rho$ y $\sigma$ conocidos)	94
4.7	$\gamma$ vs $\hat{\gamma}$ ( $\beta$ conocido)	95
4.8	$\rho$ vs $\hat{\rho}$ ( $\beta$ conocido)	96
4.9	$\sigma$ vs $\hat{\sigma}$ ( $\beta$ conocido)	96
4.10	$\gamma$ vs $\hat{\gamma}$ (ningún parámetro conocido)	97
4.11	$\rho$ vs $\hat{\rho}$ (ningún parámetro conocido)	98
4.12	$\sigma$ vs $\hat{\sigma}$ (ningún parámetro conocido)	98
4.13	$\beta$ vs $\hat{\beta}$ (ningún parámetro conocido)	99
4.14	Ángulo del rotor y su estimado	103
4.15	Velocidad del rotor y su estimado	103
4.16	Voltaje transitorio en el eje de cuadratura y su estimado	104
4.17	Parámetro $m_1$ y su estimado	104
4.18	$E'_q$ y su estimado, bajo incertidumbre	105
4.19	Parámetro $m_1$ y su estimado, bajo incertidumbre	105
4.20	Sensibilidad del observador en la estimación de $m_1$ .	106

---

B.1	Teorema de valor medio aplicado a la función de Lyapunov	115
-----	--	-----

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Lista de Tablas

2.1	Parámetros para el sistema de potencia multimáquinas . . . . .	24
3.1	Parámetros del robot manipulador . . . . .	49
3.2	Parámetros del generador síncrono . . . . .	62



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Capítulo 1

## Introducción

A continuación, se presenta un resumen correspondiente a los tópicos que se consideran en esta tesis.

### 1.1 Generalidades y Antecedentes

Gracias a los avances tecnológicos y el desarrollo de nuevas áreas de investigación, se han generado nuevos retos y campos de oportunidades en lo referente al control de sistemas dinámicos. La teoría del control ha tenido un gran desarrollo en las últimas décadas, y nuevos resultados relacionados con el estudio de sistemas dinámicos no lineales han permitido considerar dinámicas que anteriormente habían sido despreciadas o que no eran tomadas en cuenta, como en el caso del control de sistemas de eléctricos de potencia. En este campo de investigación, muchos de los resultados o estrategias de control están basados en diseños obtenidos a partir de modelos reducidos o linealizados, lo cual restringe su dominio de operación.

Como se sabe, la industria eléctrica se encuentra en constante transformación. Además la desregularización del sector eléctrico, lleva consigo una gran cantidad de dificultades para mantener la estabilidad de la red eléctrica ante la presencia de empresas de cogeneración, nuevos consumidores o cuando se presenta una modificación en la topología de la red eléctrica debido a fallas o cortos circuitos. Por tal motivo, resulta necesario mantener la estabilidad de la red eléctrica de modo que proporcione un suministro de energía eléctrica con una calidad establecida hacia el consumidor. Esto es, suministrar energía eléctrica con frecuencia y niveles de voltaje constantes, a pesar de los cambios que pueda sufrir la red eléctrica ante la conexión o desconexiones de cargas.

La estabilidad de un sistema eléctrico de potencia (SEP), se puede definir como la capacidad de mantener la sincronía tanto en condiciones normales de operación como después de una perturbación (por ejemplo, un corto circuito y/o cambios en las condiciones de operación) [42].

En muchos estudios sobre sistemas de potencia, se considera el caso ideal de un generador síncrono conectado a un bus infinito [3, 21]. En otros, se toma un modelo linealizado del sistema multimáquinas, el cual es válido en una región muy pequeña alrededor del

punto de operación [28]. Todos estos resultados han sido extensamente aplicados en la práctica. Sin embargo, con los nuevos desarrollos en electrónica de potencia, muchos elementos o dispositivos mecánicos han sido reemplazados por sus correspondientes eléctricos, dando lugar a otro tipo de fenómenos que hay que resolver.

Recientemente, nuevas estrategias de control han sido publicadas, y aceptadas dentro de la comunidad de potencia. Dentro de las cuales podemos mencionar las basadas en funciones de energía [3], perturbaciones singulares [44] (la cual es utilizada para la reducción de modelos), control óptimo [2], control de estructura variable [22], control adaptable [18], entre otras.

Por otro lado, se presentan algunas dificultades donde la tecnología actual no permite resolver ciertos problemas de control, por ejemplo: algunas variables del proceso son difíciles de medir ya sea por razones físicas que lo impidan, porque es imposible medirlas dada su naturaleza o simplemente por el elevado costo de los sensores para realizar dichas tareas. Por tal motivo, la teoría del control ha desarrollado algunas herramientas que permiten resolver este problema, mediante lo que se conoce como sensores computacionales u observadores. Muchos de estos resultados requieren de un nivel de conocimiento y de tecnología avanzados.

El diseño de estrategias de control y observación de sistemas no lineales ha atraído la atención de muchos investigadores. Sin embargo, la mayoría de estas estrategias han sido desarrolladas para sistemas en tiempo continuo. Pero tomando en cuenta el desarrollo tecnológico en el procesamiento de datos y la capacidad de las computadoras digitales, ha sido posible implementar algoritmos de control más eficientes y poderosos para controlar diversos sistemas [38, 39]. Por tal motivo, ha sido necesario desarrollar estrategias de control en tiempo discreto o diseñar controladores basados en sistemas discretos en el tiempo.

La mayoría de las estrategias de control y observación discretas desarrolladas, se obtienen a partir de la discretización de sistemas continuos, las cuales están basadas en el método de Euler. Otra forma común de construir leyes de control es diseñarlas en tiempo continuo y posteriormente discretizarlas [40]. Varios trabajos relacionados tanto con el diseño de controladores discretos como del diseño de observadores han sido propuestos [29, 7, 14, 47, 53].

Finalmente, la identificación de parámetros para sistemas lineales ha sido un área extensamente estudiada durante las últimas décadas. Sin embargo, sólo algunos resul-

tados han sido presentados para los sistemas no lineales. En ambos casos se asume un conocimiento total del vector de estados. Al mismo tiempo, el problema de la estimación de estados para sistemas no lineales, ha atraído la atención de la comunidad de control, y varios trabajos han sido propuestos para ciertas clases de sistemas [8, 9, 16, 20], siendo un dominio abierto para la investigación. Ahora bien, cuando se presenta el problema de estimación de las variables de estado y la identificación de parámetros de un sistema de manera simultánea, el problema se torna más complicado. Una manera de atacar este problema es mediante un observador adaptable, el cual se define como un algoritmo recursivo que permite la estimación del estado no medible y de parámetros desconocidos en un sistema dinámico de forma simultánea. La motivación en el uso de observadores adaptables es su potencial aplicación en la detección de fallas, aislamiento, transmisión de señales y control adaptable entre otros.

## 1.2 Objetivos de la Tesis

Basado en las consideraciones anteriores, los temas a tratar en la tesis son los siguientes.

1. El problema de control de un sistema eléctrico de potencia multimáquinas con el fin de garantizar la estabilidad del mismo, mediante la técnica de control basada en modos deslizantes. Además se compara este algoritmo de control, con uno basado en pasividad para sistemas con estructura hamiltoniana presentado en [51, 41].
2. Se retoman los trabajos desarrollados en [1, 19, 34] en los cuales se diseñaron estrategias de control y observación en tiempo discreto para una clase de sistemas no lineales discretos que son linealizables por retroalimentación de estado. Se presenta un estudio de estabilidad del sistema en lazo cerrado para el control mediante retroalimentación de estado [1] basado en un observador [19], un análisis sobre la cota fundamental (ultimately bounded) para el control mediante modos deslizantes [34] y un estudio denominado estabilidad práctica, es decir un análisis sobre las condiciones que se presentan cuando los algoritmos, en este caso un observador, son desarrollados a partir de discretizaciones aproximadas.
3. Se diseña un observador adaptable, para realizar la estimación del estado no medible y la identificación de los parámetros desconocidos simultáneamente, para una clase de sistemas no lineales afines en el estado y en los parámetros.

### 1.3 Organización de la Tesis

Con base en lo expuesto en las secciones anteriores, en el capítulo 2 se propone una estrategia de control basada en la técnica de modos deslizantes, la cual aplicaremos a un sistema de eléctrico de potencia multimáquinas. La idea en este capítulo, es reemplazar el control discontinuo que comúnmente se utiliza para mantener las trayectorias del sistema sobre una superficie dada, por uno continuo con convergencia exponencial, de tal manera que se atenúe el fenómeno de conmutación (chattering). Además, haremos una comparación de este control que proponemos con uno basado en la teoría de sistemas hamiltonianos [51, 41].

En el capítulo 3 se presenta un análisis de estabilidad en lazo cerrado cuando un esquema de control linealizante [1] y un observador [19] ambos en tiempo discreto, son aplicados a una clase de sistemas no lineales discretos (obtenido a partir de una discretización tipo Euler). Además, retomando el trabajo presentado en [34], se estudia el concepto de cota fundamental con el objeto de determinar las condiciones para garantizar estabilidad del sistema, cuando el control aplicado está basado en modos deslizantes.

Por otro lado, a fin de mostrar el desempeño de las estrategias de control y observación propuestas en este capítulo, aplicaremos estas a los modelos matemáticos de un brazo robot y del generador síncrono.

En la parte final de este capítulo, presentaremos un estudio sobre la validez de aplicar el observador propuesto a partir de una discretización aproximada, en vez de una discretización exacta (estimación práctica).

En el capítulo 4 nos enfocaremos exclusivamente en el desarrollo de un observador adaptable para una clase de sistemas no lineales afines en el estado y en los parámetros, cuyo objetivo es estimar estos simultáneamente. Como aplicación de este observador adaptable, se considera inicialmente el atractor caótico de Lorenz, con el objetivo de ilustrar el encriptamiento de información. Y concluiremos con la implementación de este algoritmo de estimación al modelo del generador síncrono, para propósito de monitoreo.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones generales de esta tesis y algunos aspectos importantes a los que pensamos que se les puede dar continuidad en trabajos de investigación futuros.

## Capítulo 2

# Control Continuo en Modos Deslizantes para Sistemas de Potencia

En este capítulo abordamos el control de sistemas de potencia multimáquinas. Proponemos un diseño basado en la técnica de modos deslizantes. El control propuesto es suave, pues difiere del control clásico en modos deslizantes sujeto al fenómeno de *switching* (*chattering*). Presentamos dos versiones del controlador basado en modos deslizantes que son aplicados al sistema de potencia multimáquinas y efectuamos una comparación de estas versiones con un controlador hamiltoniano.

### 2.1 Introducción

La estabilidad de un sistema eléctrico de potencia (SEP), se puede definir como la capacidad de mantener la sincronía tanto en condiciones normales de operación como después de una perturbación (por ejemplo, un corto circuito y/o cambios en las condiciones de operación) [50]. De acuerdo con la naturaleza del fenómeno, los problemas de estabilidad se dividen en varias categorías, como por ejemplo, estabilidad de estado estable, oscilatoria, transitoria, de voltaje, etc [42].

El uso de técnicas de control avanzado para el control de sistemas de potencia se percibe como una de las áreas más prometedora en el control automático. Para mejorar la estabilidad transitoria de sistemas de potencia, muchos investigadores dirigen su atención a la aplicación de la teoría de sistemas no lineales. Y cuando se compara esta, con el uso tradicional de la teoría de control lineal, donde el dominio de operación del sistema controlado es pequeño, se aprecian ventajas considerables, como el poder recobrar la estabilidad cuando el sistema se ve afectado por grandes perturbaciones [50].

En algunos estudios sobre sistemas de potencia, se considera el caso ideal de un generador síncrono conectado a un bus infinito [3, 21]. En otros, se toma un modelo linealizado del sistema multimáquinas, el cual es válido en una región muy pequeña alrededor del punto de operación [28]. Recientemente, nuevas estrategias de control han sido publicadas, y aceptadas dentro de la comunidad de potencia. Dentro de las cuales podemos mencionar las basadas en funciones de energía [3], perturbaciones singulares

[44] (la cual es utilizada para la reducción de modelos), control óptimo [2], control de estructura variable [22], control adaptable [18], control basado en pasividad [33], entre otras.

El diseño de controladores no lineales por retroalimentación linealizante, mediante geometría diferencial, también ha sido un tópico investigado para sistemas de potencia [10, 35]. La clave en el diseño de este controlador es que la ley de control puede cancelar las dinámicas no lineales, obteniéndose como resultado un sistema en lazo cerrado que se comporta como un sistema lineal. Sin embargo en la práctica, debido a la presencia de incertidumbres paramétricas, perturbaciones y fallas que se presentan en el sistema, se concluye que resulta imposible la cancelación exacta de las no linealidades del sistema. Además, recuerde que el control obtenido mediante esta técnica es complejo, y muchas veces no considera las propiedades estructurales del sistema. Una técnica que se ha venido utilizando en los últimos años es la teoría de sistemas hamiltonianos. Para esta clase de sistemas, se considera la energía total del sistema como la función hamiltoniana, la cual también juega el papel de función de Lyapunov para el sistema. La clave en esta técnica es expresar la dinámica del sistema eléctrico de potencia en una representación hamiltoniana. Este método ya ha sido aplicado para mejorar la estabilidad transitoria del sistema de potencia multimáquinas mediante un control de excitación no lineal descentralizado [51, 41].

Otra técnica utilizada para mejorar la robustez ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas es el diseño de control mediante modos deslizantes (véase [13, 48]). En un repaso de las referencias citadas anteriormente, puede verse como un control conmutando a gran velocidad provee de robustez al sistema no lineal, al forzar a las trayectorias del sistema a alcanzar una superficie deslizante en tiempo finito, y al hacerlas permanecer sobre la superficie para todo tiempo.

El comportamiento de conmutación en alta frecuencia para este tipo de controladores, nos lleva a otros problemas. Como por ejemplo, puesto que el controlador contiene términos no lineales discontinuos, la existencia y unicidad de la solución. Además, la implementación de controladores discontinuos nos lleva al fenómeno de *switching* o conmutación (*chattering*), el cual en algunos casos se evita mediante la aproximación del control discontinuo por uno continuo. Por otro lado, muy pocas aplicaciones de control en modos deslizantes continuo están disponibles en la literatura (ver [17]).

La idea principal que presentamos en este capítulo es el desarrollo de un controlador



que lleve las trayectorias del sistema a una superficie de conmutación exponencialmente atractiva y las mantenga en la superficie, y su aplicación a sistemas eléctricos de potencia multimáquinas.

## 2.2 Modelo Dinámico de un Sistema de Potencia

El sistema eléctrico de potencia que consideraremos a lo largo de este capítulo está formado por  $n$  generadores. Bajo ciertas consideraciones (véase [21, 23, 15] para más detalles al respecto), el movimiento de los generadores interconectados es descrito mediante un modelo clásico con decaimiento en las dinámicas de flujo (las dinámicas a analizar son: la posición y la velocidad angular, y el voltaje transitorio en el eje de cuadratura). El generador es modelado por los voltajes entre las reactancias transitorias del eje directo. El ángulo del voltaje coincide con el ángulo mecánico relativo al marco de referencia síncrona. El modelo dinámico para la máquina  $i$  está representado por ([4, 42, 21])<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i - \omega_0 \\ \dot{\omega}_i &= \frac{1}{2H_i} [-D_i(\omega_i - \omega_0) + \omega_0(P_{m_i} - P_{e_i})] \\ \dot{E}'_{qi} &= \frac{1}{T'_{di}} (E_{fi} - E_{qi})\end{aligned}\quad (2.1)$$

donde

$$\begin{aligned}I_{qi} &= \sum_{j=1}^n E'_{qj} B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j), & I_{di} &= -\sum_{j=1}^n E'_{qj} B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \\ P_{e_i} &= E'_{qi} I_{qi}, & Q_{e_i} &= E'_{qi} I_{di}, & E_{qi} &= E'_{qi} + (X_{di} - X'_{di}) I_{di}\end{aligned}\quad (R)$$

Entonces, la representación del sistema de potencia multimáquinas está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i1} &= x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} &= -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \sin(x_{i1} - x_{j1}) \\ \dot{x}_{i3} &= -e_i x_{i3} + d_i \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) + u_i\end{aligned}\quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Véase anexo A para la descripción de los símbolos utilizados en el modelo matemático del sistema de potencia.

donde

$$a_i = \frac{D_i}{2H_i}, \quad b_i = \left( \frac{\omega_o}{2H_i} \right) P_{m_i}, \quad c_i = \left( \frac{\omega_o}{2H_i} \right), \quad d_i = \frac{X_{d_i} - X'_{d_i}}{T'_{d_i}}, \quad e_i = \frac{1}{T'_{d_i}}$$

son los parámetros del sistema, y

$$[x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}]^T = [\delta_i(t), \omega_i(t) - \omega_o, E'_{qi}(t)]^T \quad (2.3)$$

representa el vector de estado, finalmente la entrada de control está dada por

$$u_i = \frac{E_{fi}}{T'_{d_i}}$$

por lo tanto

$$f_i(x) = \begin{pmatrix} x_{i2} \\ -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \sin(x_{i1} - x_{j1}) \\ -e_i x_{i3} + d_i \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) \end{pmatrix}, \quad g_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Ahora, procedemos al diseño de una ley de control basada en modos deslizantes considerando como caso de estudio el sistema eléctrico de potencia cuya dinámica está dada por (2.2). Además, efectuamos un estudio comparativo con el diseño basado en pasividad presentado en [51, 41], mostrando el desempeño de ambos algoritmos vía simulación digital.

## 2.3 Diseño de Control en Modos Deslizantes

Considere la clase de sistemas no lineales descritos en el espacio de estados de la siguiente manera

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.5)$$

donde  $t_0 \geq 0$ ,  $x \in B_x \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^r$  es el vector de entradas de control,  $f$  y  $g$  se consideran acotadas y sus componentes funciones suaves de  $x$ .  $B_x$  denota un subconjunto cerrado y acotado centrado en el origen.

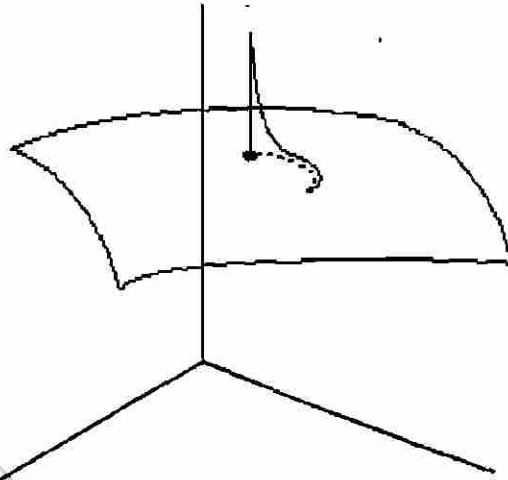


Figura 2.1: Control de regulación

El control basado en modos deslizantes para el sistema (2.5), lo diseñamos como sigue. Consideremos la siguiente superficie de conmutación no lineal de dimensión  $n-r$ , definida por

$$\sigma(x - x^*) = (\sigma_1(x - x^*), \dots, \sigma_r(x - x^*))^T = 0 \quad (2.6)$$

donde  $x^*$  es el punto de equilibrio y cada función  $\sigma_i : B_x \times B_x \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , es una función  $C^1$  tal que  $\sigma_i(0) = 0$ .

El método de control equivalente (véase [13, 48]) es utilizado para determinar el movimiento del sistema restringido a la superficie de conmutación  $\sigma(x - x^*) = 0$ . La existencia de un modo deslizante implica que se satisfaga

1.  $\dot{\sigma}(x(t)) = 0$
2.  $\sigma(x(t)) = 0 \forall t \geq t_0$

Así, de la regla de la cadena para sigma se tiene

$$\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} = \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] [f(x) + g(x)u_{eq}] = 0$$

es decir

$$-\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(x) = \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(x)u_{eq}$$

por lo tanto

$$u_{eq} = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) \right] \quad (2.7)$$

donde la matriz  $[\partial \sigma / \partial x]g(x)$  se asume no singular  $\forall x, x^* \in B_x$ .

Para completar el diseño de control tenemos

$$u = u_{eq} + u_N \quad (2.8)$$

donde  $u_{eq}$  (2.7), actua cuando el sistema está restringido a  $\sigma(x - x^*) = 0$ , mientras que  $u_N$  (control de regulación) cuando  $\sigma(x - x^*) \neq 0$ . Consideremos nuevamente un análisis similar al efectuado para la deducción del control equivalente del sistema (2.5), sin embargo ahora, bajo la acción de control (2.8), es decir

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} \\ &= \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] [f(x) + g(x) \{u_{eq} + u_N\}] \\ &= \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \{f(x) + g(x)u_{eq}\} + \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(x)u_N \end{aligned}$$

ahora trabajamos fuera de la superficie de conmutación, es decir  $\sigma(x - x^*) \neq 0$ , en este caso el control equivalente no actua, de lo que se tiene

$$\dot{\sigma} = \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(x)u_N$$

Por lo tanto, si  $u_N$  se selecciona como

$$u_N = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} L(x)\sigma(x - x^*) \quad (2.9)$$

donde  $L(x)$  es una matriz definida positiva (de dimensión  $r \times r$ ) cuyos componentes son funciones no lineales reales acotadas y  $C^0$  de  $x$ , tales que  $\|L(x)\| \leq \rho, \forall x \in B_x$  para una constante  $\rho > 0$ . Para  $\dot{\sigma}$  se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(x) \left( - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} L(x)\sigma(x - x^*) \right) \\ &= -L(x)\sigma(x - x^*) \end{aligned} \quad (2.10)$$

ecuación que describe el movimiento del sistema fuera de  $\sigma(x - x^*) = 0$

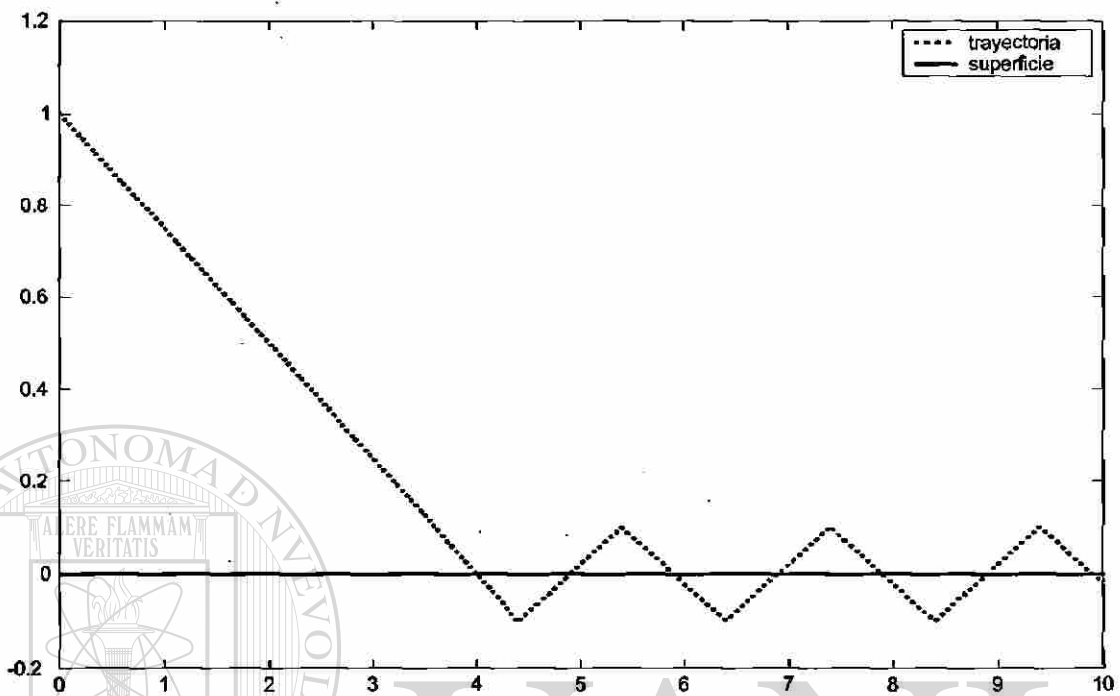


Figura 2.2: Control mediante modos deslizantes clásico

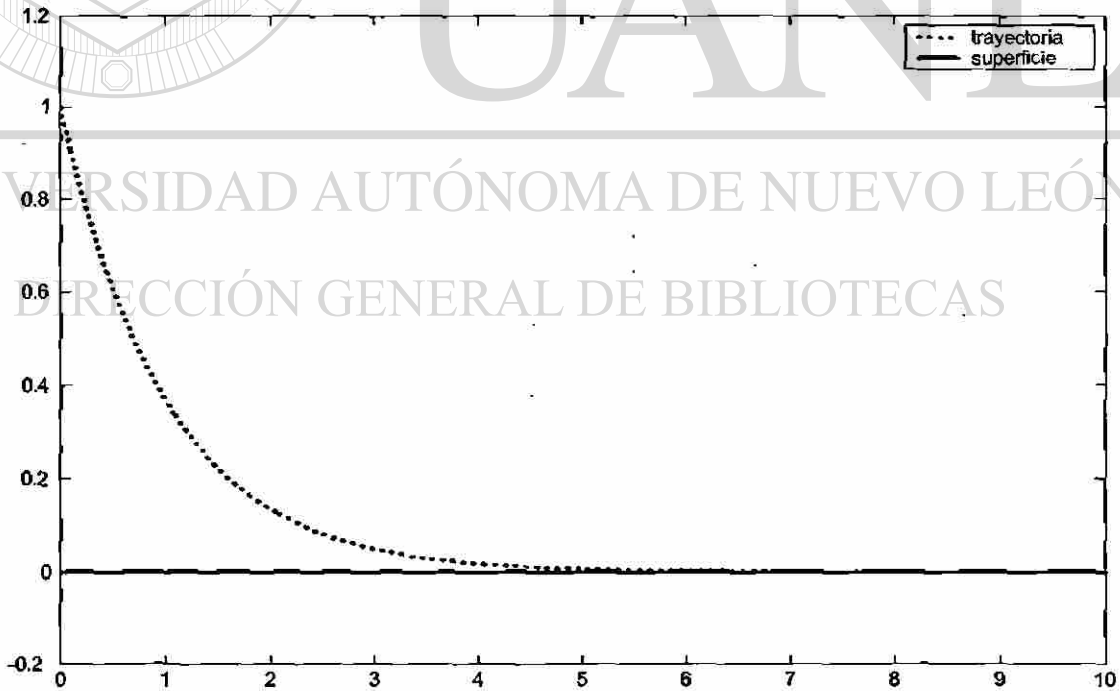


Figura 2.3: Control mediante modos deslizantes continuo

Las propiedades de estabilidad de  $\sigma(x - x^*)$  en (2.10) pueden ser estudiadas por medio de la función candidata de Lyapunov

$$V(x - x^*) = \frac{1}{2} \sigma^T(x - x^*) \sigma(x - x^*)$$

cuya derivada a lo largo de (2.10) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(x - x^*) &= \frac{1}{2} \left[ \{-L(x)\sigma(x - x^*)\}^T \sigma(x - x^*) + \sigma^T(x - x^*) \{-L(x)\sigma(x - x^*)\} \right] \\ &= -\sigma^T(x - x^*) L(x) \sigma(x - x^*) < 0 \quad \forall x, x^* \in B_x \end{aligned}$$

lo que asegura la existencia de un modo deslizante.

**Nota 2.1** Un análisis directo de la ecuación diferencial (2.10) muestra que las trayectorias del sistema alcanzan la superficie de conmutación asintóticamente, pues la solución para esta ecuación está dada por

$$\sigma(x - x^*) = e^{-L(t-t_0)} \sigma(x(t_0) - x^*) \quad \forall t \geq t_0$$

es decir

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(x(t) - x^*) = 0$$

**Nota 2.2** Además, resulta sencillo verificar que la condición de alcanzabilidad [48] se satisface para esta selección de  $u_N$  (2.9), de (2.10) se tiene

$$\sigma(x - x^*)^T \dot{\sigma} = -\sigma(x - x^*)^T L(x) \sigma(x - x^*)$$

por lo que  $\sigma(x - x^*)^T \dot{\sigma}$  siempre es negativo, es decir  $\sigma(x - x^*)^T \dot{\sigma} < 0^2$

Basado en el control en modos deslizantes descrito antes, el control resultante está dado por

$$u = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) + L(x) \sigma(x - x^*) \right] \quad (2.11)$$

Cuando el control compuesto (2.11) es aplicado al sistema (2.5), se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f_e(x, x^*) + p(x, x^*) \quad (2.12)$$

<sup>2</sup>Recuerde que para el cálculo de  $u_N$ ,  $\sigma(x - x^*) \neq 0$

donde

$$f_e(x, x^*) = \left\{ I - g(x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \right\} f(x)$$

$$p(x, x^*) = -g(x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} L(x) \sigma(x - x^*)$$

Ahora, para estudiar las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado (2.12), introducimos la siguiente hipótesis

**Hipótesis 2.1** [24] *El punto de equilibrio  $x^*$  de  $\dot{x} = f_e(x, x^*)$  es localmente exponencialmente estable.*

Por un teorema inverso de Lyapunov (ver [24]), la hipótesis 2.1 nos asegura la existencia de una función de Lyapunov  $V(e)$  con  $e = x - x^*$  la cual satisface las siguientes desigualdades

$$\alpha_1 \|e\|^2 \leq V(e) \leq \alpha_2 \|e\|^2 \quad \left\| \frac{\partial V(e)}{\partial e} \right\| \leq \alpha_4 \|e\|$$

$$\frac{\partial V(e)}{\partial e} \{f_e(e + x^*, x^*) + p(e + x^*, x^*)\} \leq -\alpha_3 \|e\|^2 \quad (2.13)$$

para  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $\alpha_4$  constantes positivas.

Consideremos  $V(e)$  como una función candidata de Lyapunov para investigar la estabilidad del origen  $e = 0$  ( $e$  punto de equilibrio del sistema (2.12)). De la hipótesis 2.1 y la ecuación (2.13), la derivada en el tiempo de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (2.12) satisface

$$\dot{V}(e) \leq -\alpha_3 \|e\|^2 \quad (2.14)$$

entonces el sistema (2.12) es exponencialmente estable.

La función candidata de Lyapunov  $V$  (2.13) es un instrumento para investigar las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado (2.12) obtenido cuando el control  $u$  (2.11) es aplicado. El siguiente Lema puede probarse usando el mismo razonamiento.

**Lema 2.1** [24] *Considere el sistema no lineal (2.5) para el cual se diseña un control compuesto (2.7-2.9) tal que la hipótesis 2.1 se satisface. Entonces el sistema no lineal en lazo cerrado (2.12) es localmente exponencialmente estable.*

**Nota 2.3** *Puede obtenerse estabilidad asintótica con una elección particular de la superficie de conmutación  $\sigma(x(t) - x^*)$  sin la necesidad de la hipótesis 2.1. Por ejemplo, si la derivada en el tiempo de la superficie de conmutación es exactamente una forma normal asintóticamente estable, la cual puede obtenerse mediante un cambio de coordenadas y una entrada de control linealizante. Si el sistema es de fase mínima, se puede verificar que si aplicamos un control equivalente  $u_{eq}$ , las trayectorias del sistema en lazo cerrado, son soluciones de la forma normal. El control adicional  $u_N$  en este caso se usa para proporcionar atracción exponencial a la superficie de conmutación y como consecuencia suministrar robustez al sistema en lazo cerrado (Teorema de Lasalle [24]).*

## 2.4 Control Hamiltoniano

A continuación mostramos de manera breve el diseño de un control de excitación, usando la metodología basada en una función de energía y en la estructura de sistemas Hamiltonianos reportado en [51, 41].

Considere el sistema no lineal con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), expresado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  es el vector de control e  $y \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas. En este capítulo estamos interesados en la clase de sistemas que pueden ser representados equivalentemente en una forma Hamiltoniana con términos disipativos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x)) \frac{\partial H^T}{\partial x} + g(x)u \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H^T}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.16}$$

donde los estados del sistema  $x$  son las variables de energía,  $H(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  representa la energía total almacenada y la estructura de interconexión está dada en la matriz  $\mathcal{J}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la matriz  $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Además la matriz  $\mathcal{J}(x)$  es antisimétrica, es decir

$$\mathcal{J}(x) = -\mathcal{J}^T(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$



y  $\mathcal{R}(x)$  es una matriz simétrica no negativa que depende de  $x$ , es decir

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^T(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La ventaja principal de trabajar con este tipo de sistemas, viene del hecho que la función total de energía puede ser considerada como una función de Lyapunov para estudios de estabilidad. Más aún, de (2.16), obtenemos la ecuación de balance de energía

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \mathcal{R}(x) \frac{\partial H^T}{\partial x} + u^T y$$

con  $u^T y$  como la energía externa suministrada al sistema y  $-\frac{\partial H}{\partial x} \mathcal{R}(x) \frac{\partial H^T}{\partial x}$  representando la energía disipada debido a los elementos resistivos. Como es bien sabido (ver [33, 46]), la igualdad anterior establece las propiedades de pasividad en el siguiente sentido.

**Definición 2.1** *El sistema (2.5) es pasivo con respecto a la salida  $y = h(x)$  si existe una función suave no negativa  $H(x)$ , tal que  $H(0) = 0$  y la siguiente desigualdad se satisface*

$$H(x(t)) - H(x(0)) \leq \int_0^t u^T(s)y(s) ds. \quad (2.17)$$

Si además, el sistema (2.5) satisface la propiedad de detectibilidad enunciada en la siguiente definición

**Definición 2.2** [52] *El sistema (2.5) es detectable estado cero si  $u(t) = 0$  e  $y(t) = 0$   $\forall t \geq 0$ , implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .*

Entonces, es posible formular el siguiente resultado, que es fundamental con relación a las propiedades de estabilidad para la clase de sistemas considerados aquí.

**Teorema 2.1** [46] *Consideremos la clase de sistemas definidos por (2.16). Asumimos que el sistema es detectable estado cero y que el hamiltoniano generalizado tiene un mínimo local estricto. Entonces, se sigue que  $x^*$  es un punto de equilibrio estable de las dinámicas no forzadas. Más aún, puede verse fácilmente que para mantener el punto de equilibrio asintóticamente estable, podemos considerar el siguiente control por retroalimentación de salida*

$$u = -y = -g^T(x) \frac{\partial H^T}{\partial x}$$

## 2.5 Aplicación a Sistemas de Potencia

Introducimos ahora un sistema de potencia multimáquinas como el que se muestra en la figura 2.4 (véase [21] para las consideraciones de este modelo matemático), a fin de mostrar el desempeño del controlador basado en modos deslizantes. En este sistema, consideramos el generador 3 como referencia ( $E'_{qi} = \text{constante} = 1 \angle 0^\circ$ ). Bajo esta consideración, el sistema multimáquinas tiene la siguiente representación en variables de estado

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{11} &= x_{12} \\
 \dot{x}_{21} &= x_{22} \\
 \dot{x}_{12} &= \frac{1}{2H_1} [-D_1 x_{12} + \omega_0 (P_{m1} - P_{e1})] \\
 \dot{x}_{22} &= \frac{1}{2H_2} [-D_2 x_{22} + \omega_0 (P_{m2} - P_{e2})] \\
 \dot{x}_{13} &= \frac{1}{T'_{d1}} (E_{f1} - E_{q1}) \\
 \dot{x}_{23} &= \frac{1}{T'_{d2}} (E_{f2} - E_{q2})
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde los estados son definidos como en (2.3), es decir,  $x_{11} = \delta_1$ ,  $x_{21} = \delta_2$ ,  $x_{12} = \omega_1$ ,  $x_{22} = \omega_2$ ,  $x_{13} = E'_{q1}$  y  $x_{23} = E'_{q2}$ . Además, en términos de estas variables de estado, se tiene

$$\begin{aligned}
 P_{e1} &= x_{13} I_{q1}, & I_{q1} &= x_{23} B_{12} \sin(x_{11} - x_{12}) + B_{13} \sin(x_{11}) \\
 P_{e2} &= x_{23} I_{q2}, & I_{q2} &= x_{13} B_{21} \sin(x_{12} - x_{11}) + B_{23} \sin(x_{12}) \\
 Q_{e1} &= x_{13} I_{d1}, & I_{d1} &= -[x_{23} B_{12} \cos(x_{11} - x_{12}) + B_{13} \cos(x_{11})] \\
 Q_{e2} &= x_{23} I_{d2}, & I_{d2} &= -[x_{13} B_{21} \cos(x_{21} - x_{11}) + B_{23} \cos(x_{12})] \\
 E_{q1} &= x_{13} + (X_{d1} - X'_{d1}) I_{d1} \\
 E_{q2} &= x_{23} + (X_{d2} - X'_{d2}) I_{d2}
 \end{aligned}$$

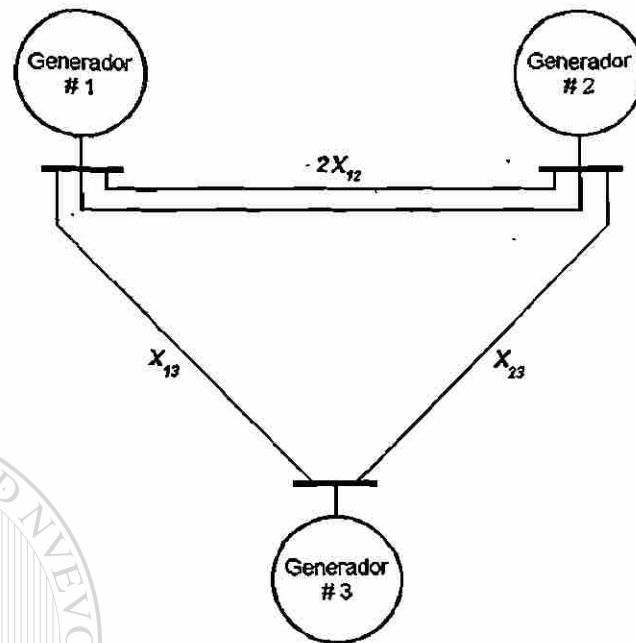


Figura 2.4: Sistema de potencia multimáquina.

## 2.5.1 Diseño de Control en Modos Deslizantes

### Control 1

Considere la siguiente superficie de conmutación no lineal definida por

$$\sigma(x, x^*) = (\sigma_1(x, x^*), \sigma_2(x, x^*))^T = 0$$

donde

$$\sigma_i(x, x^*) = s_{i1}(x_{i1} - x_{i1}^*) + s_{i2}(x_{i2} - x_{i2}^*) + s_{i3}(x_{i3} - x_{i3}^*) \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (2.19)$$

$x_i^* = (x_{i1}^*, x_{i2}^*, x_{i3}^*)$  es el punto de equilibrio del sistema (2.18).

Entonces, el control equivalente está dado por :

$$\begin{aligned} u_{eqi} &= - \left[ \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} g_i(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} f_i(x) \right] \\ &= - \frac{1}{s_{i3}} s_{i1} x_{i2} + s_{i2} \left( -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \sin(x_{i1} - x_{j1}) \right) \\ &\quad + s_{i3} \left( -e_i x_{i3} + d_i \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) \right) \end{aligned}$$

Por otro lado, el control  $u_{N_i}$  resulta en

$$\begin{aligned} u_{N_i} &= - \left[ \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} g_i(x) \right]^{-1} L_i(x) \sigma_i(x, x^*) \\ &= - \frac{L_i}{s_{i3}} \{ s_{i1}(x_{i1} - x_{i1}^*) + s_{i2}(x_{i2} - x_{i2}^*) + s_{i3}(x_{i3} - x_{i3}^*) \} \end{aligned}$$

donde  $L_i(x) = L_i = \text{constante}$ . Finalmente, el control compuesto está dado por

$$\begin{aligned} u_i &= - \frac{1}{s_{i3}} \left\{ s_{i1}x_{i2} + s_{i2} \left( -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \text{sen}(x_{i1} - x_{j1}) \right) \right. \\ &\quad \left. + s_{i3} \left( -e_i x_{i3} + d_i \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \text{cos}(x_{i1} - x_{j1}) \right) \right. \\ &\quad \left. + L_i \{ s_{i1}(x_{i1} - x_{i1}^*) + s_{i2}(x_{i2} - x_{i2}^*) + s_{i3}(x_{i3} - x_{i3}^*) \} \right\} \end{aligned}$$

Así, el sistema de potencia multimáquinas puede ser estabilizado alrededor de un punto de equilibrio mediante la siguiente retroalimentación

$$\begin{aligned} u_i &= - \frac{1}{s_{i3}} \{ s_{i1}x_{i2} + s_{i2} (-a_i x_{i2} + b_i - c_i P_{ei}) + s_{i3} (-e_i x_{i3} - d_i I_{di}) \\ &\quad + L_i (s_{i1}(x_{i1} - x_{i1}^*) + s_{i2}x_{i2} + s_{i3}(x_{i3} - x_{i3}^*)) \} \end{aligned}$$

donde  $x_{i2}^* = 0$

Observe que el control es expresado sólo en términos de las mediciones de las variables locales, lo que nos lleva a un esquema de control completamente descentralizado.

## Control 2

Ahora, consideremos la siguiente superficie de conmutación no lineal dada por

$$\sigma_i(x, x^*) = s_{i1}\bar{x}_{i1} + s_{i2}\dot{\bar{x}}_{i1} + s_{i3}\ddot{\bar{x}}_{i1} \quad \text{para } i = 1, 2$$

donde  $\bar{x}_{i1} = x_{i1} - x_{i1}^*$ , por lo tanto para esta nueva superficie de conmutación se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_i(x, x^*) &= s_{i1}(x_{i1} - x_{i1}^*) + s_{i2}x_{i2} \\ &\quad + s_{i3} \left( -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \text{sen}(x_{i1} - x_{j1}) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

un análisis similar al efectuado para la superficie de conmutación anterior (2.19) nos lleva a un control en este caso dado por

$$u_{eqi} = \frac{-1}{s_{i3}c_i \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \text{sen}(x_{i1} - x_{j1})} \left[ s_{i1} x_{i2} \right. \\ \left. + (s_{i2} - s_{i3}a_i) \left\{ -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \text{sen}(x_{i1} - x_{j1}) \right\} \right. \\ \left. - s_{i3}c_i \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \text{sen}(x_{i1} - x_{j1}) \left\{ -e_i x_{i3} + d_i \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) \right\} \right]$$

al igual que para la superficie de conmutación anterior, el control de regulación  $u_{N_i}$  se obtiene de manera directa, así el controlador también en este caso, puede ser expresado en términos de las mediciones de las variables locales como

$$u_i = \frac{1}{s_{i3}c_i I_{q_i}} \left\{ -L_i s_{i1} (x_{i1} - x_{i1}^*) - L_i s_{i2} x_{i2} - L_i s_{i3} (-a_i x_{i2} + b_i - c_i P_{e_i}) \right. \\ \left. + s_{i1} x_{i2} + s_{i3} c_i Q_{e_i} + (s_{i2} - a_i) (-a_i x_{i2} + b_i - c_i P_{e_i}) + s_{i3} (-e_i x_{i3} - d_i I_{d_i}) \right\}$$

para  $i = 1, 2$ , y  $\forall x_i \in B_{x_i}$ .

**Nota 2.4** Los coeficientes  $s_{ij}$   $j = 1, 2, 3$  del controlador en modos deslizantes 1 (con la superficie de conmutación (2.19)) deben seleccionarse de tal manera que la hipótesis 2.1 se satisfaga.

**Nota 2.5** Observe que la superficie de conmutación del controlador 2 (2.20), solo difiere de la seleccionada para el controlador 1 (2.19), en el término  $x_{i3} - x_{i3}^*$  por  $\ddot{x}_{i1}$ . En este caso, cuando  $s_{i1}$  son constantes positivas, la superficie de conmutación puede verse como una ecuación diferencial de segundo orden para el ángulo de potencia  $\delta_i$ , asegurando la convergencia del ángulo de potencia a su valor de equilibrio, cuando las trayectorias del sistema permanecen sobre la superficie de conmutación.

**Nota 2.6** El control equivalente  $u_{eq}$  puede verse como un control linealizante, considerando la dinámica del sistema equivalente a la dinámica lineal

$$\dot{\sigma}(x, x^*) = s_{i1} \dot{\ddot{x}}_{i1} + s_{i2} \ddot{\ddot{x}}_{i1} + s_{i3} \ddot{\ddot{\ddot{x}}}_{i1} = 0$$

El grado relativo de cada salida (ángulo de potencia) es igual a 3, por lo tanto el sistema no tiene dinámica cero. Más aún, podemos hacer un análisis de estabilidad mediante la función candidata de Lyapunov  $V(x - x^*) = \frac{1}{2}\sigma^T(x - x^*)\sigma(x - x^*)$ , sin la necesidad de invocar la hipótesis 2.1

## 2.5.2 Diseño de Control Hamiltoniano

A continuación, se presenta la ley de control basada en pasividad reportada en [51, 41] mediante una función de energía. El sistema de potencia multimáquinas se describe en una representación hamiltoniana que además resulta útil para propósitos de estabilidad.

Consideremos el sistema (2.5) y la siguiente función de energía

$$H = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2c_i} x_{i2}^2 - \frac{b_i}{c_i} x_{i1} - \frac{1}{2} x_{i3} \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) + \frac{e_i}{2d_i} x_{i3}^2 \right) \quad (2.21)$$

Cabe mencionar con relación a la función de energía anterior, que en [52] los autores presentan una función de energía similar a la dada anteriormente (2.21), pero para una sola máquina. En el estudio que se presenta en este capítulo para el sistema de eléctrico de potencia multimáquinas, la función de energía total se obtiene como la suma de la energía de cada máquina del sistema [51]. En [52] los autores presentan un estudio para la función de energía de un máquina.

Así, la dinámica del sistema puede escribirse de acuerdo con la estructura de sistemas de control Hamiltonianos con disipación, como sigue

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ -c_i & -c_i a_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_i} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_i \quad (2.22)$$

donde

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{pmatrix} \quad \mathcal{J}_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ -c_i & -c_i a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_i a_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \quad g_i(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sea  $(x_{i1}^*, x_{i2}^*, x_{i3}^*)$  el punto de equilibrio de (2.1), obtenido a partir de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x_{i2}^* &= 0 \\ -a_i x_{i2}^* + b_i - c_i x_{i3}^* \sum_{j=1}^3 x_{j3}^* B_{ij} \sin(x_{i1}^* - x_{j1}^*) &= 0 \\ -e_i x_{i3}^* + d_i \sum_{j=1}^3 x_{j3}^* B_{ij} \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*) + \bar{u}_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Definiendo el control de excitación constante como  $\bar{u}_i$ , se sigue que

$$\bar{u}_i = e_i x_{i3}^* - d_i \sum_{j=1}^3 x_{j3}^* B_{ij} \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*). \quad (2.24)$$

Ahora, incluyendo el punto de equilibrio a la función de energía, se tiene

$$\begin{aligned} H_e &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2c_i} x_{i2}^2 - \frac{b_i}{c_i} (x_{i1} - x_{i1}^*) + \frac{e_i}{2d_i} (x_{i3} - x_{i3}^*)^2 \right) \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left( x_{i3} \sum_{j=1}^3 x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) + x_{i3} \sum_{j=1}^3 x_{j3}^* B_{ij} \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*) \right) \end{aligned}$$

Entonces, el sistema (2.22) se puede representar como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ -c_i & -c_i a_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \frac{\partial H_e}{\partial x_i} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_i.$$

$H_e$  es acotado por abajo, puesto que  $x_{i1} \in [-\pi, \pi]$ , y  $\forall l > 0$  el conjunto  $\{x : H_e(x) \leq l\}$  es compacto. Así  $H_e(x)$  tiene un mínimo local estricto en  $(x_{i1}^*, x_{i2}^*, x_{i3}^*)$ .

Por lo tanto, la ley de control la cual estabiliza el sistema de potencia multimáquinas está dado por (véase (2.4) para las definiciones de las funciones  $f_i$  y  $g_i$ )

$$u_i = \tilde{u}_i + v_i$$

donde

$$\begin{aligned}
 v_i &= -f_i g_i^T \frac{\partial H_e}{\partial x_i} \\
 &= -f_i \left( -\sum_{j=1}^3 B_{ij} [x_{j3} \cos(x_{i1} - x_{j1}) - x_{j3}^* \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*)] + \frac{e_i}{d_i} (x_{i3} - x_{i3}^*) \right) \\
 &= -f_i \left\{ I_{d_i} + \frac{e_i}{d_i} x_{i3} + \frac{1}{d_i} \left( d_i \sum_{j=1}^3 B_{ij} x_{j3}^* \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*) - e_i x_{i3}^* \right) \right\} \\
 &= -f_i \left\{ I_{d_i} + \frac{e_i}{d_i} x_{i3} - \frac{1}{d_i} \tilde{u}_i \right\}
 \end{aligned}$$

donde  $\tilde{u}_i = e_i x_{i3}^* - d_i \sum_{j=1}^3 x_{j3}^* B_{ij} \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*)$ .

Ahora, usando  $E_{q_i} = E'_{q_i} + (X_{d_i} - X'_{d_i}) I_{q_i}$ ,  $d_i = (X_{d_i} - X'_{d_i})/T'_{d_i}$  y  $e_i = 1/T'_{d_i}$ , se sigue que  $\frac{e_i}{d_i} = \frac{1}{(X_{d_i} - X'_{d_i})}$ .

Finalmente, el controlador puede ser expresado sólo en términos de las variables locales medibles

$$\begin{aligned}
 u &= \tilde{u}_i - f_i \left\{ \frac{1}{(X_{d_i} - X'_{d_i})} E_{q_i} - \frac{1}{d_i} \tilde{u}_i \right\} \\
 &= \tilde{u}_i + \frac{f_i}{d_i} \tilde{u}_i - \frac{f_i}{(X_{d_i} - X'_{d_i})} \left( V_{t_i} + \frac{Q_{e_i} X_{d_i}}{V_{t_i}} \right)
 \end{aligned}$$

donde<sup>3</sup>  $E_{q_i} = V_{t_i} + \frac{Q_{e_i} X_{d_i}}{V_{t_i}}$ .

Como consecuencia, se tiene un controlador por retroalimentación de salida descentralizado.

**Nota 2.7** El sistema de control Hamiltoniano (2.22) puede estabilizarse alrededor del punto de equilibrio usando diferentes técnicas de control, por ejemplo  $H_\infty$  o controladores mediante funciones de Lyapunov (control  $L_g V$ ). Además, un controlador por retroalimentación de salida saturada ha sido propuesto en [51] a partir de la representación Hamiltoniana (2.22).

<sup>3</sup>Véase [51] para esta definición de  $E_{q_i}$ .



## 2.6 Resultados de Simulación

A continuación presentamos el desempeño de los controladores presentados en este capítulo, el basado en modos deslizantes y el reportado en [51, 41] basado en pasividad vía simulación digital, cuando eston fueron aplicados al modelo matemático del sistema de eléctrico de potencia multimáquinas (2.18)

Los valores numéricos de los parámetros del sistema de potencia (en p.u.) están dados en la tabla 2.1

Para esta selección de parámetros, los puntos de equilibrio estables del sistema son

$$\begin{aligned} x_{11}^* &= 0.6654 & x_{12}^* &= 0 & x_{13}^* &= 1.03 \\ x_{21}^* &= 0.6425 & x_{22}^* &= 0 & x_{23}^* &= 1.01 \end{aligned}$$

Los valores iniciales de las variables de estado son

$$\begin{aligned} x_{11}(0) &= 0.8 & x_{12}(0) &= 0.3 & x_{13}(0) &= 1.5 \\ x_{21}(0) &= 0.5 & x_{22}(0) &= 0.3 & x_{23}(0) &= 0.5 \end{aligned}$$

Los parámetros para los controladores en modos deslizantes utilizados fueron

$$s_{11} = s_{21} = 1 \quad s_{12} = s_{22} = 2 \quad s_{13} = s_{23} = 10 \quad L_1 = L_2 = 2.$$

En las simulaciones aquí presentadas, nos enfocamos principalmente en la comparación del desempeño mostrado por los controladores basados en modos deslizantes y Hamiltoniano en lo que a tiempo de convergencia se refiere. Se asume que todo el vector de estados del sistema y los parámetros requeridos para la implementación de las leyes de control son conocidos.

Las respuestas del sistema obtenidas para las 2 estrategias de control presentadas en este capítulo (modos deslizantes con las superficies de conmutación (2.19) y (2.20) y el esquema Hamiltoniano [51, 41]), las mostramos juntas para cada variable de estado, lo cual nos permite hacer una comparación más apropiada. El comportamiento del ángulo de potencia de los generadores se muestra en las figuras 2.5 - 2.6, de la velocidad del rotor en las figuras 2.7 - 2.8, y para el voltaje transitorio en el eje de cuadratura en las figuras 2.9 - 2.10. Finalmente las leyes de control se muestran en las figuras 2.11 - 2.12. De estas respuestas, podemos ver que variables de estado convergen al punto de equilibrio correspondiente.

$D_1$	$X'_{d1}$	$X_{d1}$	$H_1$	$T'_{d1}$	$P_{m1}$	$B_{12}$	$B_{23}$
5	0.252	1.863	1	6.9	0.35	0.56	0.6
$D_2$	$X'_{d2}$	$X_{d1}$	$H_2$	$T'_{d2}$	$P_{m2}$	$B_{13}$	$\omega_s$
3	0.319	2.36	2	7.96	0.35	0.53	1

Tabla 2.1: Parámetros para el sistema de potencia multimáquinas

También, de las figuras se observa que el controlador en modos deslizante, con la superficie de conmutación (2.20) proporciona un mejor desempeño transitorio que el controlador con la superficie de conmutación (2.19). Sin embargo, cuando los controladores basados en modos deslizantes se comparan con el controlador Hamiltoniano, el controlador en modos deslizantes presenta mejor tiempo de convergencia.

Con relación a la magnitud de la ley de control, se percibe en las gráficas 2.11 - 2.12, que el consumo de energía no difieren mucho del controlador hamiltoniano.

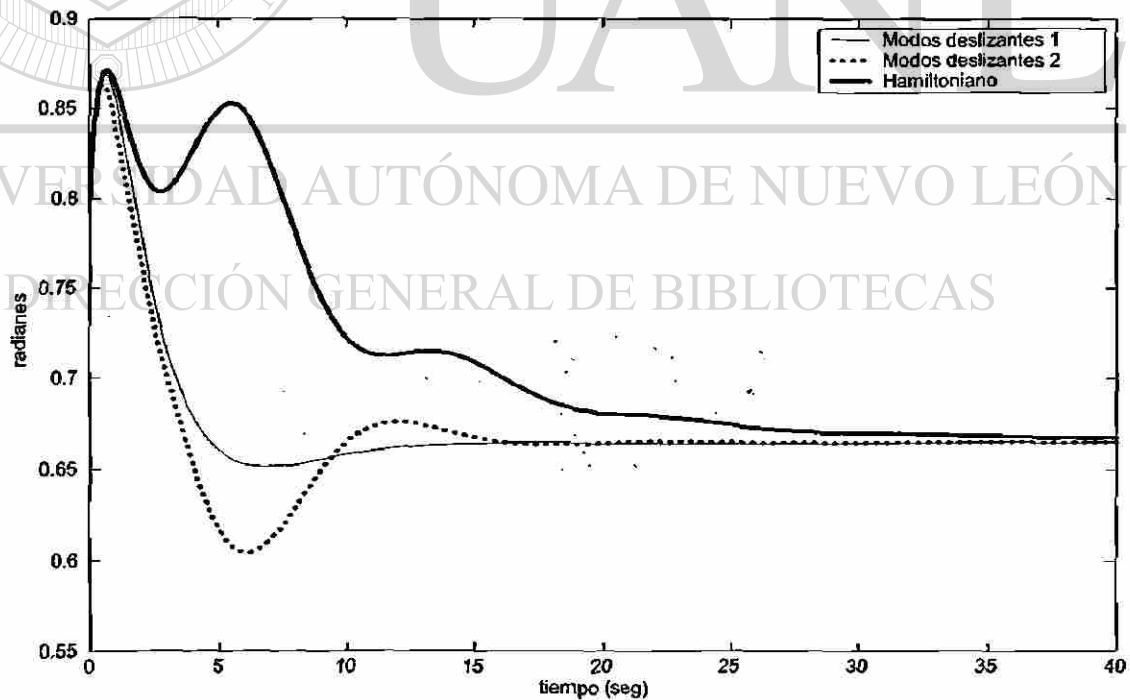


Figura 2.5: Ángulo de potencia del generador 1.

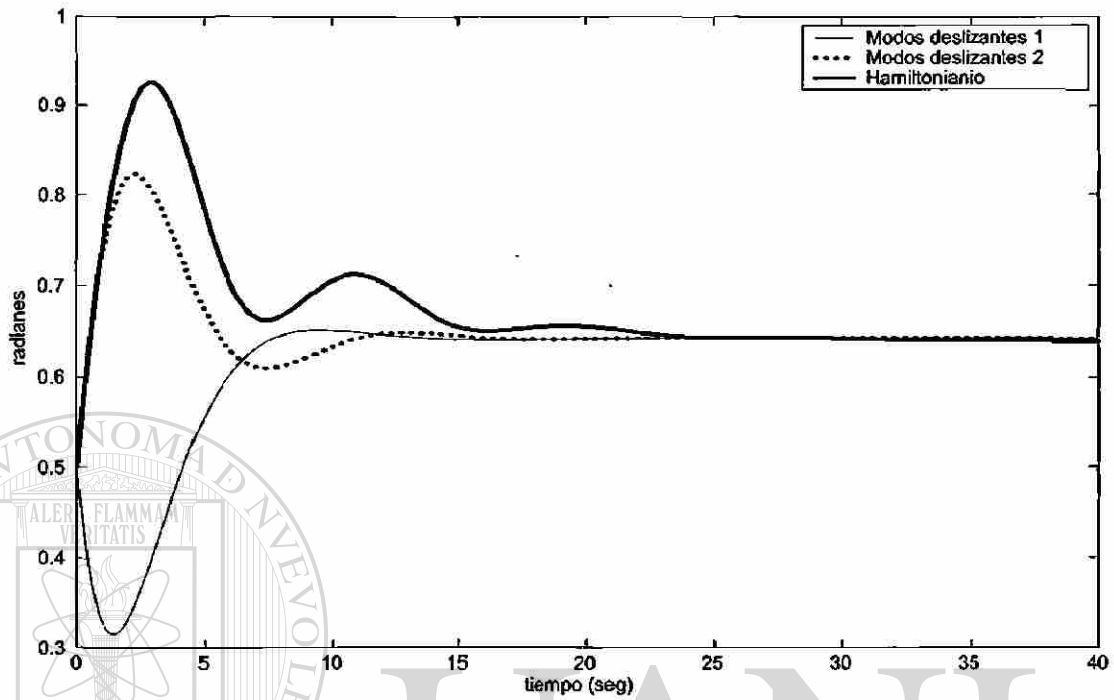


Figura 2.6: Ángulo de potencia del generador 2.

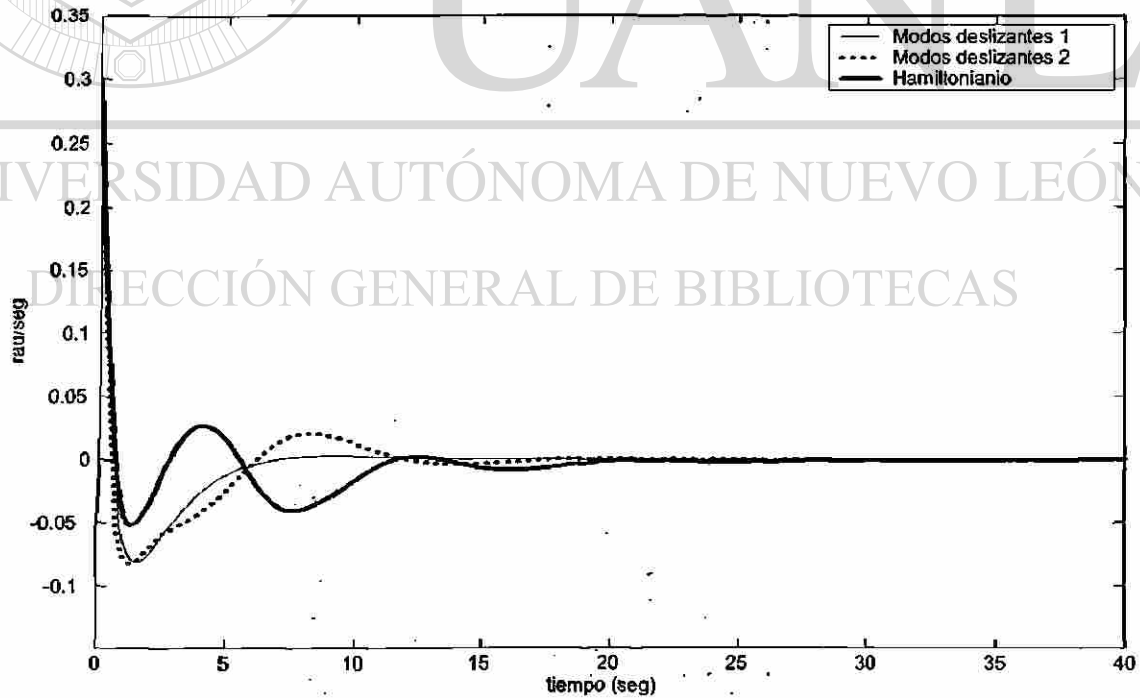


Figura 2.7: Velocidad Angular del generador 1.

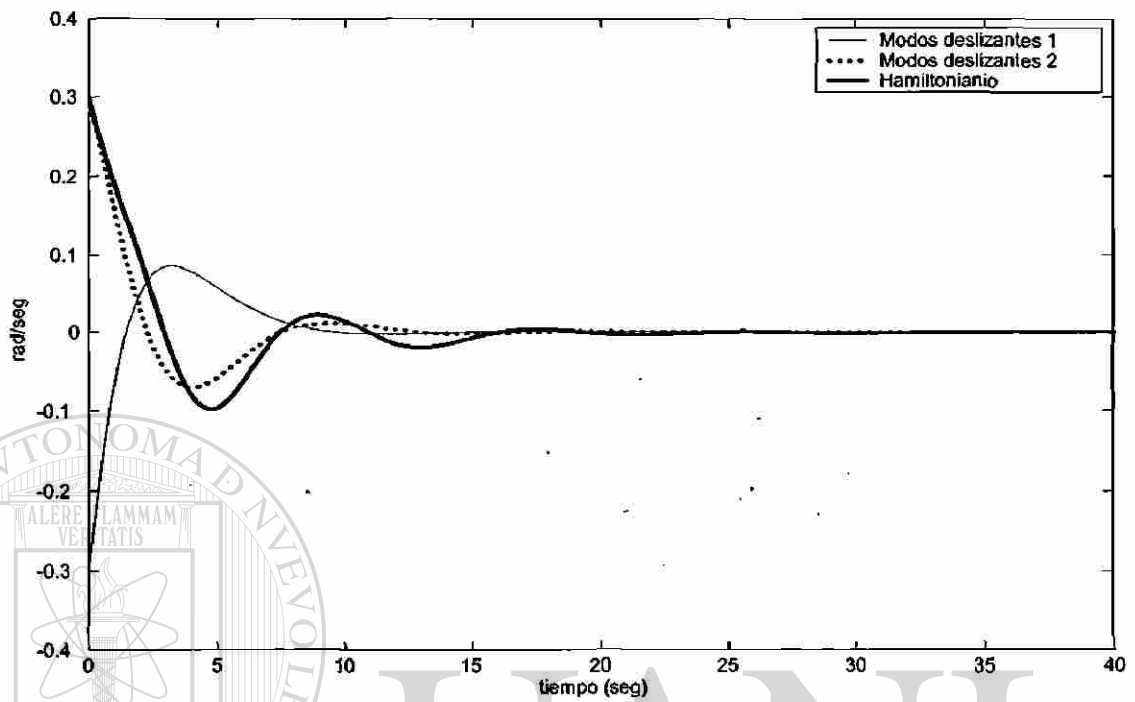


Figura 2.8: Velocidad Angular del generador 2.

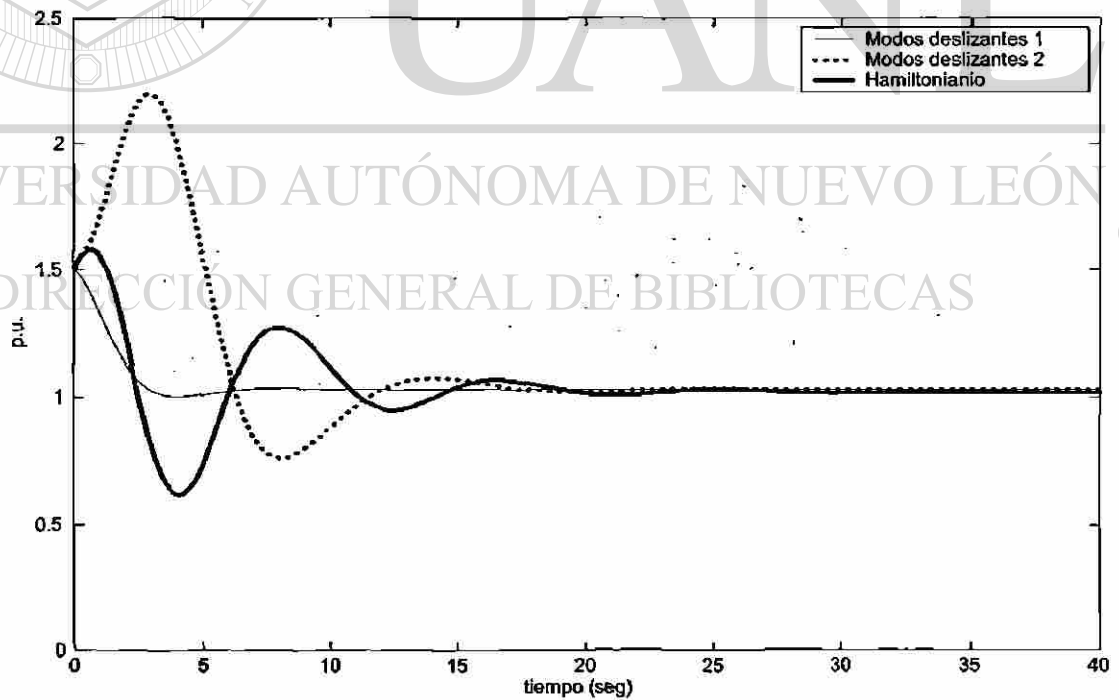


Figura 2.9: Voltaje Transitorio en el eje de Cuadratura del generador 1.

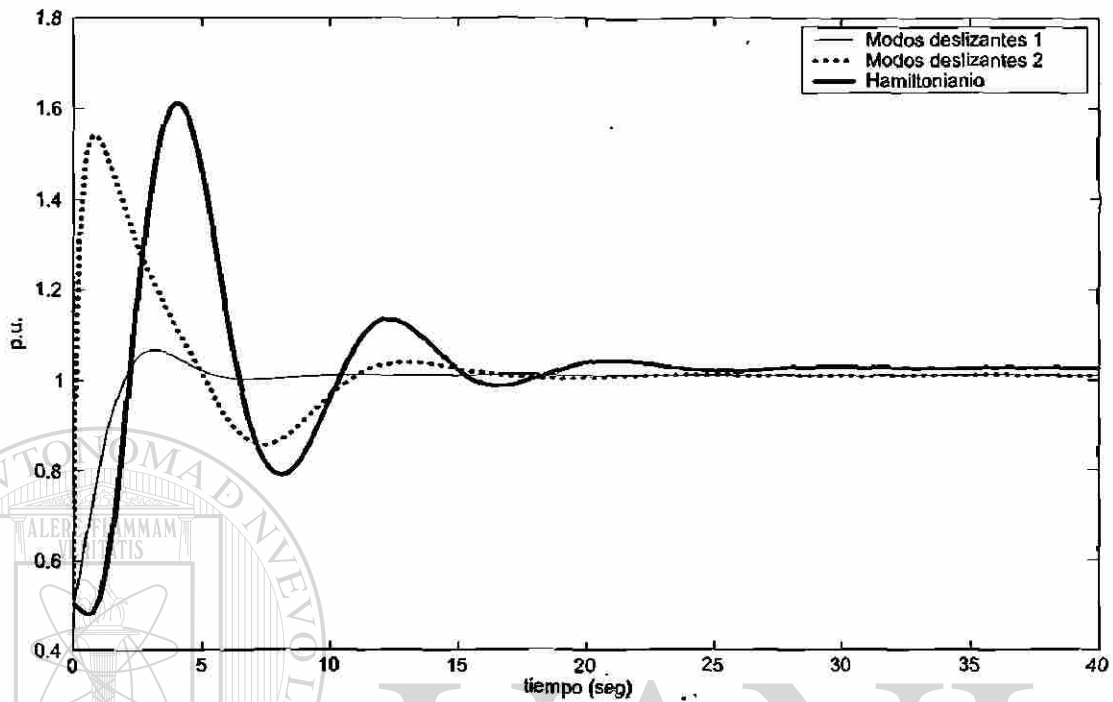


Figura 2.10: Voltaje Transitorio en el eje de Cuadratura del generador 2.

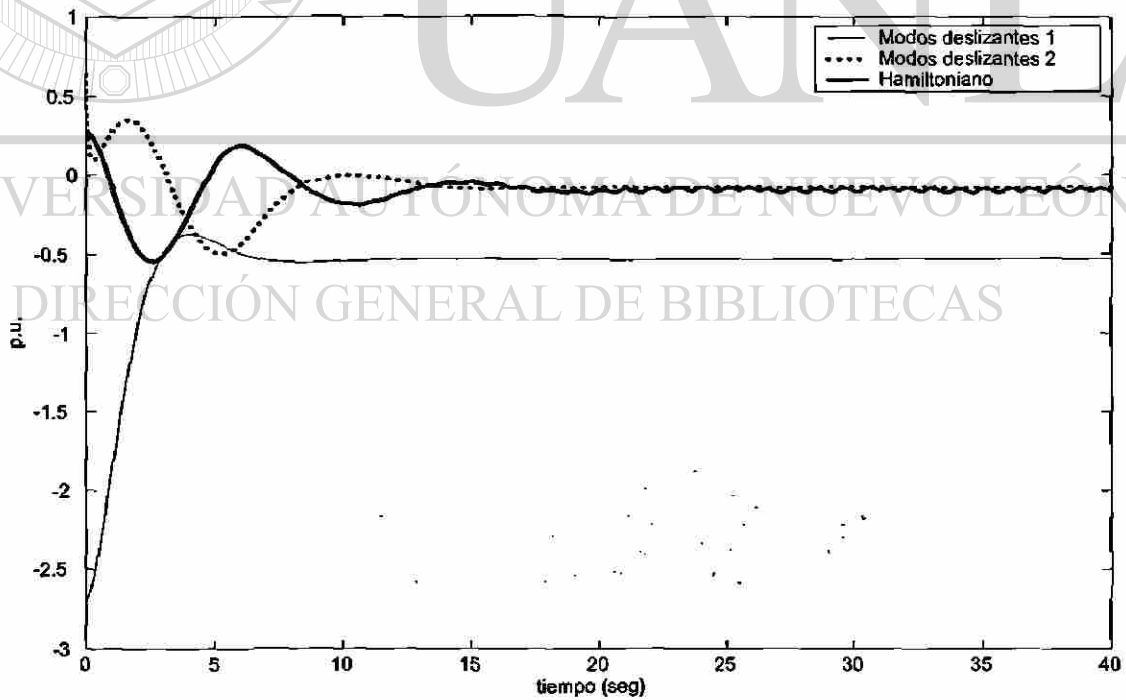


Figura 2.11: Leyes de control aplicadas al generador 1.

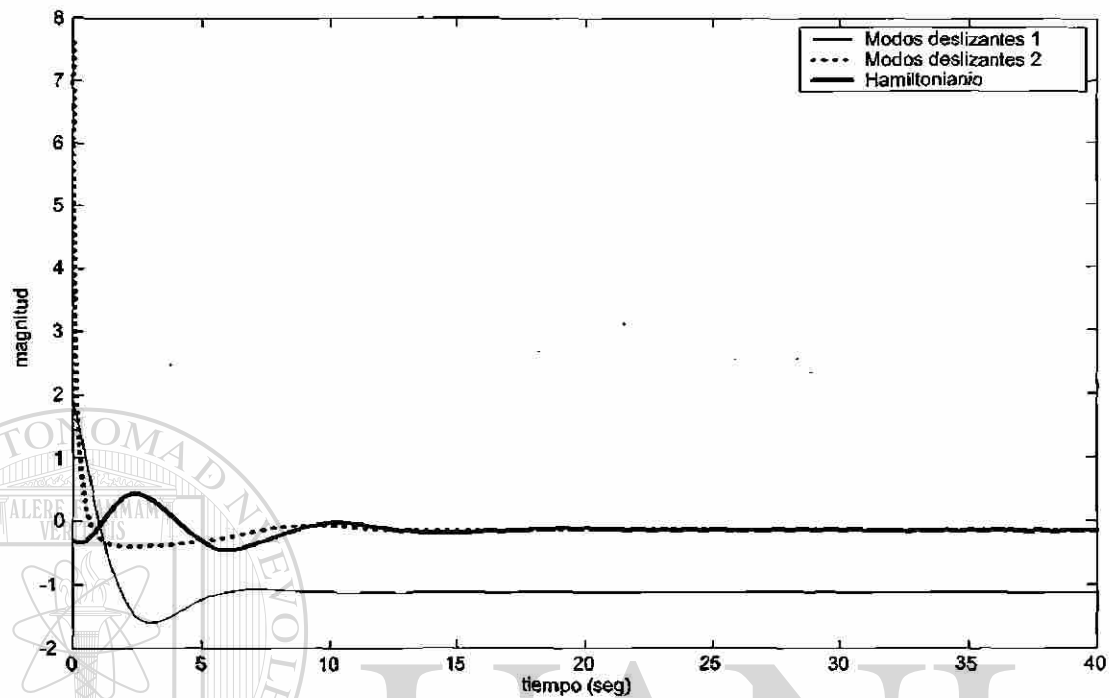


Figura 2.12: Leyes de control aplicadas al generador 2.

## 2.7 Conclusiones

En este capítulo se desarrolló una estrategia de control no lineal basada en la técnica de modos deslizantes para una clase de sistemas y esta ley se aplicó a un sistema eléctrico de potencia multimáquinas. Se consideraron dos superficies de conmutación para esta estrategia control, y los resultados obtenidos mediante simulación digital, mostraron buenos resultados en lo que a tiempo de convergencia se refiere. Además se mostró que estas leyes de control son descentralizadas, es decir se pueden implementar sólo con mediciones locales. Finalmente, con el fin de ilustrar el desempeño de la ley de control mediante modos deslizantes desarrollada en este capítulo, se hizo una comparación de este esquema con el controlador basado en pasividad (control hamiltoniano) reportado en [51, 41].

Por otro lado, es bien sabido que gracias a los avances tecnológicos, la mayoría de las estrategias de control son aplicadas al proceso real, mediante una computadora digital. Además, las señales obtenidas son procesadas mediante tarjetas digitales, lo que da lugar a señales de naturaleza discreta. En el siguiente capítulo abordamos el estudio de algoritmos discretos que tomen en cuenta estos aspectos.

## Capítulo 3

### Sistemas Discretos

En este capítulo, se retoman los trabajos presentados en [1, 34], donde los autores proponen dos leyes de control en tiempo discreto, una basada en linealización por retroalimentación de estado, y la otra mediante la técnica de *modos deslizantes*. Además en el trabajo reportado en [19], el autor presenta un algoritmo de estimación del estado en tiempo discreto para cierta clase de sistemas no lineales. Dando continuidad a estos trabajos, en esta parte de la tesis se presenta un análisis de estabilidad en lazo cerrado cuando la ley de control es implementada mediante los estimados del observador, es decir, la ley de control propuesta mantiene las trayectorias del sistema estables en una vecindad suficientemente pequeña.

Por otro lado, puesto que los algoritmos desarrollados y el análisis de estabilidad efectuado, se presentan para una clase de sistemas no lineales discretos, obtenidos mediante discretización tipo Euler, presentamos un estudio denominado estabilidad práctica, en donde se muestra que a pesar de no tener una discretización exacta para el sistema dinámico, es posible esperar estabilidad seleccionando un tiempo de muestreo suficientemente pequeño.

---

#### 3.1 Introducción

El control es un aspecto de primordial importancia para el desempeño adecuado de un sistema dinámico. En muchas aplicaciones, lo que se desea es diseñar este control considerando los datos experimentales con los que se cuenta y el conocimiento físico del propio sistema. En los últimos años, el control y la observación de sistemas no lineales ha atraído la atención de muchos investigadores. Sin embargo, conviene recordar que en la gran mayoría de los casos, todos estos algoritmos desarrollados para propósitos de control o monitoreo, son implementados mediante computadoras digitales. Por lo tanto, parece natural la idea de desarrollar controladores en tiempo discreto a partir de los datos muestreados, obtenidos mediante tarjetas de adquisición de datos (convertidores A-D).

Se han propuesto varios métodos al respecto. Uno de ellos, el cual es conocido como el método de emulación, considera un modelo matemático para una planta en tiempo continuo y para la cual se diseña un controlador en tiempo continuo, entonces el controlador

se discretiza y se aplica al sistema mediante los muestreadores y retenedores apropiados [43].

Un segundo método consiste en diseñar un controlador en tiempo discreto, a partir del modelo discreto exacto de la planta. Sin embargo, es bien sabido que obtener la discretización exacta para un sistema no lineal (incluso para algunos lineales) resulta prácticamente imposible. Debido a este gran inconveniente, se ha optado por utilizar modelos matemáticos a partir de discretizaciones aproximadas. Uno de los esquemas más simples y conocidos es la discretización tipo Euler [43, 39].

Una pregunta obvia a este respecto sería: ¿Preserva la estabilidad de un sistema continuo, un controlador obtenido a partir de una discretización aproximada (Euler)? Trabajos como el reportado en [39] muestran que bajo ciertas condiciones, tal como un tiempo de muestreo suficientemente pequeño, es razonable esperar estabilidad en sentido semiglobal y práctico para sistemas que son controlados a partir de aproximaciones discretas.

En este tipo de trabajos salta a la vista la importancia de seleccionar de manera adecuada el tiempo de muestreo, de hecho en [37, 25] los autores muestran ejemplos de funciones y sistemas de bajo orden (algunos lineales), donde la discretización aproximada (sistema sin algoritmos de control u observación) da lugar a un sistema discreto inestable, cuando en realidad el sistema continuo del que se procede es estable.

Además, cabe mencionar que cuando no se dispone de todos los estados del sistema, resulta muy difícil implementar un algoritmo de control. Para resolver este problema, comúnmente se utiliza un observador. Y cabe mencionar, que para la clase de sistemas que tratamos en este capítulo (no lineales discretos), el desarrollo de observadores sigue siendo un problema abierto [36, 11].

Así, en esta tesis nos enfocamos en el estudio de la clase de sistemas no lineales discretos, que tienen una estructura linealizante por retroalimentación de estado (feedback linealizante), (véase [19] para la deducción de este tipo de estructuras). De hecho, a este respecto es interesante mencionar que la discretización mediante el método de Euler preserva la estructura de esta clase de sistemas [38].

Nuestra principal contribución en este trabajo, consiste por un lado en un estudio de estabilidad para la clase de sistemas no lineales discretos estudiados en este capítulo, bajo la acción de una ley de control discreta [1] implementada mediante los estimados de un observador también en tiempo discreto [19].



Por otro lado, se presenta un análisis sobre la validez y el efecto en la estabilidad del sistema, cuando los algoritmos de estimación del estado son desarrollados a partir de sistemas discretos aproximados (en este caso discretización tipo Euler), análisis comúnmente denominado estimación práctica.

### 3.2 Descripción del Problema

La clase de sistemas no lineales que consideraremos en esta tesis, es la descrita mediante una discretización tipo Euler expresada de la siguiente manera <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\tau x(k) + \tau B \{ \alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k) \} \\ y &= Cx(k) = x_1(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde

$$A_\tau = (I + \tau A) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \tau \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

asumimos además que  $\beta(x(k)) \neq 0 \quad \forall x(k) \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Ahora nuestro interés se centra en el estudio de un observador que permita la implementación de una ley de control, tal que las trayectorias del sistema (3.1) bajo la acción de esta ley de control sean estables. O dicho de manera más formal, en el estudio de un esquema control-observador tal que la siguiente propiedad para el sistema en lazo cerrado se preserve.

**Definición 3.1 (Estabilidad Exponencial Uniforme)** [30] *Decimos que el sistema discreto  $\xi(k+1) = F_\tau(k, \xi(k))$ , sujeto a la condición inicial  $\xi(k_0) = \xi_0$ , es uniformemente exponencialmente estable, si existen constantes  $a_1, a_2, \tau_{\max} > 0$  tal que para cada  $\tau \in (0, \tau_{\max}]$  y  $\lambda_\tau > 0$ , las siguientes relaciones se satisfacen*

$$\|\xi_0\| \leq a_1 \quad \Rightarrow \quad \|\xi(k)\| \leq a_2 \|\xi_0\| e^{-\lambda_\tau(k-k_0)} \quad \forall k \geq k_0 \geq 0 \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> $x_{euler}(k)$  debería ser la notación adecuada para la discretización tipo Euler de  $x(t)$  Pero, por simplicidad utilizamos  $x(k)$

si además (3.2) se satisface para toda  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , entonces decimos que el origen del sistema es globalmente uniformemente exponencialmente estable <sup>2</sup>

La definición anterior resulta muy útil para sistemas en tiempo discreto puesto que impone un límite a los sobreimpulsos (overshoots), el cual es uniforme con respecto a las condiciones iniciales y el tiempo de muestreo. Más aún, en el caso particular cuando  $\lambda_\tau$  es proporcional a  $\tau$ , esta propiedad (3.2) garantiza que el modelo en tiempo discreto *exacto* es (globalmente) asintóticamente prácticamente estable, esto significa que las soluciones tienden a una vecindad arbitrariamente pequeña cuyo tamaño es independiente de  $\tau$  y puede hacerse tan pequeña conforme  $\tau_{\max}$  disminuye.

Con relación a lo anterior, sugerimos se vea [39] en donde el autor da una definición más detallada, estableciendo estabilidad asintótica práctica para sistemas no lineales en tiempo discreto *exactos* a partir de la estabilidad asintótica uniforme práctica de sistemas en tiempo discreto *aproximados*.

Por otro lado, con el objeto de poner a disposición del lector los antecedentes necesarios para el estudio de estabilidad que se efectuará, presentamos nuevamente los resultados reportados en [1, 19] referentes a la implementación de una ley de control y un algoritmo de estimación, ambos en tiempo discreto. Presentamos además las pruebas de ambos resultados buscando un poco más de claridad en la exposición de los mismos.

### 3.3 Ley de Control Linealizante

Para el sistema no lineal en tiempo discreto (3.1), la ley de control propuesta para estabilizar las trayectorias del sistema está dada por

$$u(k) = \beta^{-1}(x(k))[v(x(k)) - \alpha(x(k))] \quad (3.3)$$

donde <sup>3</sup>

$$\begin{aligned} v(x(k)) &= -F\Omega_\rho x(k) \\ \Omega_\rho &= \text{diag} \left( \rho^n \quad \rho^{n-1} \quad \dots \quad \rho \right) \quad \text{para } \rho \geq 1 \\ F &= \left( C_n^0 \quad C_n^1 \quad \dots \quad C_n^{n-1} \right) \quad \text{con } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \end{aligned} \quad (3.4)$$

<sup>2</sup>Véase la sección B.1 del anexo B, para una explicación más detallada sobre esta definición

<sup>3</sup>En las siguientes expresiones  $n$  denota el orden del sistema

Por lo tanto, el control (3.9) aplicado al sistema no lineal discreto (3.1), resulta en

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\tau x(k) + \tau B \{ \alpha(x(k)) + \beta(x(k)) \beta^{-1}(x(k)) [-F\Omega_\rho x(k) - \alpha(x(k))] \} \\ &= (A_\tau - \tau BF\Omega_\rho) x(k) \end{aligned}$$

Antes de proseguir, presentamos un lema, el cual nos resultará útil para el análisis de estabilidad.

**Lema 3.1** [1] *Existe un tiempo de muestreo máximo  $\tau_{\max} > 0$  suficientemente pequeño, tal que el sistema (3.1) en lazo cerrado bajo la acción de la ley de control (3.9 - 3.4) es (globalmente) uniformemente exponencialmente estable con  $\lambda_\tau$  proporcional a  $\tau \in (0, \tau_{\max})$  para todo  $\rho > 0$  tal que  $\rho\tau_{\max} \in (0, 1)$*

#### Prueba

Considere el siguiente cambio de variable

$$\eta(k) = \Omega_\rho x(k) \quad (3.5)$$

entonces resulta

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= \Omega_\rho x(k+1) \\ &= \Omega_\rho (A_\tau - \tau BF\Omega_\rho) \Omega_\rho^{-1} \eta(k) \\ &= (\Omega_\rho A_\tau \Omega_\rho^{-1} - \tau \Omega_\rho BF \Omega_\rho \Omega_\rho^{-1}) \eta(k) \end{aligned}$$

y debido a las siguientes propiedades (ver B.3, en anexo B)

$$\Omega_\rho A_\tau \Omega_\rho^{-1} = I + \tau \rho A, \quad \Omega_\rho B = \rho B$$

se tiene

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= (I + \tau \rho A - \tau \rho BF) \eta(k) \\ &= (I + \gamma_c (A - BF)) \eta(k) \quad \tau \rho = \gamma_c \\ &= A_c \eta(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $A_c = I + \gamma_c (A - BF)$  (ver declaración B.1 en anexo B)

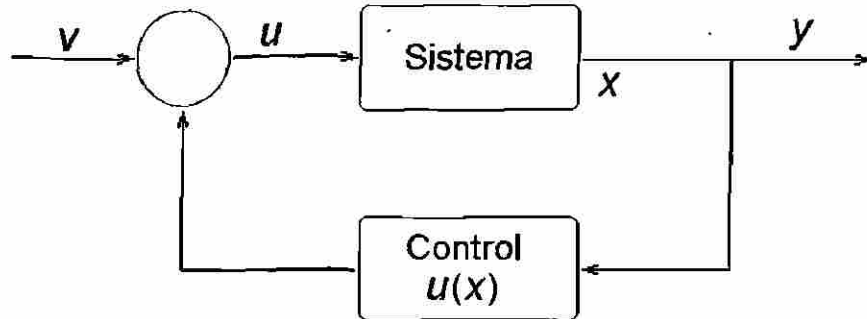


Figura 3.1: Ley de control mediante retroalimentación de estado

### 3.3.1 Análisis de Estabilidad (sistema - control)

A continuación, se presenta un análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado (sistema (3.1) con control (3.9)) (véase figura 3.1), para ello se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\eta(k)) = \eta^T(k) P_c \eta(k) \quad (3.7)$$

entonces resulta

$$\begin{aligned} \Delta V(\eta(k)) &= \eta^T(k+1) P_c \eta(k+1) - \eta^T(k) P_c \eta(k) \\ &= [A_c \eta(k)]^T P_c [A_c \eta(k)] - \eta^T(k) P_c \eta(k) \\ &= \eta^T(k) (A_c^T P_c A_c - P_c) \eta(k) \end{aligned}$$

haciendo uso de (B.5) (véase anexo B), se tiene

$$\Delta V(\eta(k)) = -\gamma_c \eta^T(k) P_c \eta(k) - \gamma_c (1 - \gamma_c)^n \eta^T(k) F^T F \eta(k)$$

puesto que  $\gamma_c \in (0, 1)$  (ver declaración B.1), entonces

$$(1 - \gamma_c) < 1 \Rightarrow (1 - \gamma_c)^n < 1 \Rightarrow \gamma_c (1 - \gamma_c)^n < 1 \quad (3.8)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta V(\eta(k)) &\leq -\gamma_c \eta^T(k) P_c \eta(k) \\ &\leq -\gamma_c V(\eta(k)) \end{aligned}$$

Además, para la función de Lyapunov (3.7) se tiene  $\Delta V(\eta(k)) = V(\eta(k+1)) - V(\eta(k))$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} V(\eta(k+1)) - V(\eta(k)) &\leq -\gamma_c V(\eta(k)) \\ V(\eta(k+1)) &\leq V(\eta(k)) - \gamma_c V(\eta(k)) \\ &\leq (1 - \gamma_c) V(\eta(k)) \end{aligned}$$

lo que finalmente resulta en

$$V(\eta(k+1)) \leq (1 - \gamma_c)^{k+1} V(\eta(k_0))$$

□

Con ello concluimos estabilidad exponencial para las trayectorias del sistema (3.1) bajo la acción de ley de control linealizante (3.9).

### 3.4 Estimación del Estado

Ahora, se presenta el observador discreto para la clase de sistemas (3.1) reportado en [19]

$$z(k+1) = A_\tau z(k) + \tau B[\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)] + \tau \Delta_\theta^{-1} K[y(k) - \hat{y}(k)] \quad (3.9)$$

donde

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta^2}, \dots, \frac{1}{\theta^n} \right) \text{ para } \theta \geq 1$$

$$K = \text{col} \left( C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n \right) \text{ con } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad (3.10)$$

y el término  $\tau \Delta_\theta^{-1} K$  representa la ganancia del observador.

Si definimos el error de estimación en este caso como

$$e(k) = z(k) - x(k) \quad (3.11)$$

entonces, la dinámica del error resulta en

$$\begin{aligned} e(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B[\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)] + \tau \Delta_\theta^{-1} K[y(k) - \hat{y}(k)] \\ &\quad - [A_\tau x(k) + \tau B\{\alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k)\}] \\ e(k+1) &= A_\tau(z(k) - x(k)) + \tau B[\alpha(z(k)) - \alpha(x(k)) + \{\beta(z(k)) - \beta(x(k))\}u(k)] \\ &\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} K C[x(k) - z(k)] \\ &= (A_\tau - \tau \Delta_\theta^{-1} K C)e(k) + \tau B[\alpha(z(k)) - \alpha(x(k)) + \{\beta(z(k)) - \beta(x(k))\}u(k)] \end{aligned}$$

y a partir de (3.11),  $z(k)$  se define como  $z(k) = e(k) + x(k)$ , por lo que la dinámica del error queda expresada como

$$\begin{aligned} e(k+1) &= (A_\tau - \tau\Delta_\theta^{-1}KC)e(k) \\ &\quad + \tau B[\alpha(e(k) + x(k)) - \alpha(x(k)) + \{\beta(e(k) + x(k)) - \beta(x(k))\}u(k)] \end{aligned}$$

Además, definiendo el siguiente término

$$\Psi_o(e(k), u(k)) = \alpha(e(k) + x(k)) - \alpha(x(k)) + \{\beta(e(k) + x(k)) - \beta(x(k))\}u(k),$$

finalmente se tiene

$$e(k+1) = (A_\tau - \tau\Delta_\theta^{-1}KC)e(k) + \tau B\Psi_o(e(k), u(k)) \quad (3.12)$$

**Hipótesis 3.1** La función  $\Psi_o(e(k), u(k))$  a lo largo de las trayectorias de (3.1) y (3.12), bajo la acción de una entrada de control admisible  $u(k)$  satisface

$$\|B\Psi_o(e(k), u(k))\| \leq b_1\|e(k)\|$$

**Nota 3.1** Observe que la hipótesis anterior se satisface si, para cada conjunto compacto  $\mathcal{X}$  y definiendo  $\mathcal{U}_\tau = \{u \in \mathbb{R}^n : u = \beta^{-1}(x(k))[v(x(k)) - \alpha(x(k))], x \in \mathcal{X}\}$ , existe una constante  $b_1 > 0$  tal que  $\|B\Psi_o(e(k), u(k))\| \leq b_1\|e(k)\|$ ,  $x(k) \in \mathcal{X}$  y  $u(k) \in \mathcal{U}_\tau$  para todo  $\tau \in (0, \tau_{\max})$  y para todo  $k \geq k_0 \geq 0$

**Lema 3.2** [19] Asuma que el sistema (3.1) satisface la hipótesis 3.1. Entonces existen  $\tau_{\max} > 0$  suficientemente pequeño y  $\theta_{\min} > 0$  suficientemente grande tal que el error de estimación (3.12) es globalmente uniformemente exponencialmente estable con  $\lambda_\tau$  proporcional a  $\tau \in (0, \tau_{\max})$  para todo  $\theta > \theta_{\min}$  tal que  $\theta_{\min}\tau_{\max} \in (0, 1)$

### Prueba

Definiendo la siguiente transformación de coordenadas

$$\varepsilon(k) = \Delta_\theta e(k) \quad (3.13)$$

la dinámica del error se representa en las nuevas coordenadas como

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+1) &= \Delta_\theta e(k+1) \\ &= \Delta_\theta[(A_\tau - \tau\Delta_\theta^{-1}KC)e(k) + \tau B\Psi_o(e(k), u(k))] \end{aligned}$$

y a partir de (3.13),  $e(k)$  queda definido como  $e(k) = \Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k)$ , por lo que la ecuación anterior resulta en

$$\begin{aligned}\varepsilon(k+1) &= \Delta_\theta[(A_r - \tau\Delta_\theta^{-1}KC)\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k) + \tau B\Psi_o(\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k), u(k))] \\ &= (\Delta_\theta A_r \Delta_\theta^{-1} - \tau KC \Delta_\theta^{-1})\varepsilon(k) + \tau \Delta_\theta B \Psi_o(\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k), u(k))\end{aligned}$$

Considerando las siguientes propiedades (ver (B.4), en anexo B)

$$\Delta_\theta A_r \Delta_\theta^{-1} = I + \tau\theta A, \quad C \Delta_\theta^{-1} = \theta C, \quad \Delta_\theta B = \frac{1}{\theta^n} B$$

$\varepsilon(k+1)$  se reduce a

$$\begin{aligned}\varepsilon(k+1) &= (I + \tau\theta A - \tau\theta KC)\varepsilon(k) + \frac{\tau}{\theta^n} B \Psi_o(\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k), u(k)) \\ &= (I + \tau\theta\{A - KC\})\varepsilon(k) + \frac{\tau}{\theta^n} B \Psi_o(\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k), u(k))\end{aligned}$$

definiendo

$$\gamma_o = \tau\theta \quad (3.14)$$

y puesto que  $I + \gamma_o(A - KC) = A_o$  (ver declaración B.2, anexo B), se tiene que

$$\varepsilon(k+1) = A_o \varepsilon(k) + \frac{\tau}{\theta^n} B \Psi_o(\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k), u(k))$$

### 3.4.1 Análisis de Estabilidad (sistema - observador)

A continuación, se presenta un análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado (sistema (3.1) y observador (3.9)) con el fin de mostrar la convergencia del error de estimación (3.11) (véase figura 3.2). Para ello se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varepsilon(k)) = \varepsilon^T(k) P_o \varepsilon(k) \quad (3.15)$$

la cual resulta en <sup>4</sup>

$$\begin{aligned}\Delta(V(\varepsilon(k))) &= \left[ A_o \varepsilon(k) + \frac{\tau}{\theta^n} B \Psi_o \right]^T P_o \left[ A_o \varepsilon(k) + \frac{\tau}{\theta^n} B \Psi_o \right] - \varepsilon^T(k) P_o \varepsilon(k) \\ &= \varepsilon^T(k) A_o^T P_o A_o \varepsilon(k) + \frac{\tau}{\theta^n} \varepsilon^T(k) A_o^T P_o B \Psi_o + \frac{\tau}{\theta^n} \Psi_o^T B^T P_o A_o \varepsilon(k) \\ &\quad + \frac{\tau}{\theta^n} \Psi_o^T B^T P_o \frac{\tau}{\theta^n} B \Psi_o - \varepsilon^T(k) P_o \varepsilon(k) \\ &= \varepsilon^T(k) (A_o^T P_o A_o - P_o) \varepsilon(k) + \frac{2\tau}{\theta^n} \varepsilon^T(k) A_o^T P_o B \Psi_o + \frac{\tau^2}{\theta^{2n}} \|B \Psi_o\|_{P_o}\end{aligned}$$

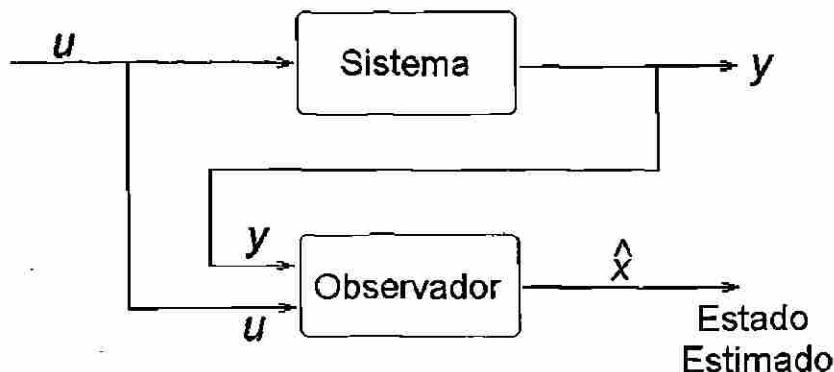


Figura 3.2: Estimación del estado

haciendo uso de (B.6) (ver anexo B) resulta

$$\Delta(V(\varepsilon(k))) = \varepsilon^T(k) (-\gamma_o P_o - \gamma_o(1 - \gamma_o)^n C^T C) \varepsilon(k) + \frac{2\tau}{\theta^n} \varepsilon^T(k) A_o^T P_o B \Psi_o + \frac{\tau^2}{\theta^{2n}} \|B \Psi_o\|_{P_o}$$

y de manera similar a (3.8), puesto que  $\gamma_o \in (0, 1)$ , se tiene que

$$(1 - \gamma_o) < 1, \quad (1 - \gamma_o)^n < 1, \quad \gamma_o(1 - \gamma_o)^n < 1 \quad (3.16)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta(V(\varepsilon(k))) &= -\gamma_o \varepsilon^T(k) P_o \varepsilon(k) + \frac{2\tau}{\theta^n} \varepsilon^T(k) A_o^T P_o B \Psi_o + \frac{\tau^2}{\theta^{2n}} \|B \Psi_o\|_{P_o} \\ &= -\gamma_o \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + \frac{2\tau}{\theta^n} \|A_o \varepsilon(k)\|_{P_o} \|B \Psi_o\|_{P_o} + \frac{\tau^2}{\theta^{2n}} \|B \Psi_o\|_{P_o}^2 \end{aligned}$$

Ahora, recordando las siguientes propiedades para el error de estimación (3.11)

$$e(k) = \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k) \Rightarrow \|e(k)\| = \|\Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k)\| \leq \|\Delta_\theta^{-1}\| \|\varepsilon(k)\| \leq \theta^n \|\varepsilon(k)\| \quad (3.17)$$

resulta que (véase hipótesis 3.1)

$$\|B \Psi_o\| \leq b_1 \|e(k)\| \leq b_1 \theta^n \|\varepsilon(k)\| \quad (3.18)$$

y de (B.6) se tiene que

$$\begin{aligned} A_o^T P_o A_o - P_o &= -\gamma_o P_o - \gamma_o(1 - \gamma_o)^n C^T C \\ A_o^T P_o A_o &= (1 - \gamma_o) P_o - \gamma_o(1 - \gamma_o)^n C^T C \end{aligned}$$

<sup>4</sup>En esta parte del análisis, por simplicidad utilizamos  $\Psi_o$  en lugar de  $\Psi_o(\Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k), u(k))$



premultiplicando por  $\varepsilon^T(k)$  y postmultiplicando por  $\varepsilon(k)$ , tenemos

$$\begin{aligned}\varepsilon^T(k)[A_o^T P_o A_o] \varepsilon(k) &= \varepsilon^T(k)[(1 - \gamma_o)P_o - \gamma_o(1 - \gamma_o)^n C^T C] \varepsilon(k) \\ \|A_o \varepsilon(k)\|_{P_o}^2 &= (1 - \gamma_o)\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 - \gamma_o(1 - \gamma_o)^n \|C \varepsilon(k)\|^2 \\ &\leq (1 - \gamma_o)\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \\ &\leq \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2\end{aligned}$$

de lo que finalmente se obtiene

$$\|A_o \varepsilon(k)\|_{P_o} \leq \|\varepsilon(k)\|_{P_o} \quad (3.19)$$

Utilizando los resultados anteriores (3.18 - 3.19), se tiene

$$\begin{aligned}\Delta(V(\varepsilon(k))) &\leq -\gamma_o\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + \frac{2\tau}{\theta^n}\|\varepsilon(k)\|_{P_o} b_1 \theta^n \|\varepsilon(k)\|_{P_o} + \frac{\tau^2}{\theta^{2n}} b_1^2 \theta^{2n} \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \\ &\leq -\gamma_o\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + 2b_1 \tau \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + b_1^2 \tau^2 \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2\end{aligned}$$

puesto que  $\gamma_o = \tau\theta$  (3.14), obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta(V(\varepsilon(k))) &\leq -\tau\theta\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + 2b_1 \tau \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + b_1^2 \tau^2 \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \\ &\leq -\tau(\theta - 2b_1 - b_1^2 \tau) \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2.\end{aligned}$$

Definiendo  $\delta := \theta - 2b_1 - b_1^2 \tau$  y si  $0 < \tau\delta < 1$ , resulta

$$\begin{aligned}\Delta(V(\varepsilon(k))) &\leq -\tau\delta\|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \\ &\leq -\tau\delta V(\varepsilon(k))\end{aligned} \quad (3.20)$$

y recordando la forma de la función de Lyapunov (3.15) se tiene

$$\begin{aligned}V(\varepsilon(k+1)) - V(\varepsilon(k)) &\leq -\tau\delta V(\varepsilon(k)) \\ &\leq (1 - \tau\delta)V(\varepsilon(k))\end{aligned}$$

o de manera equivalente

$$V(\varepsilon(k+1)) \leq (1 - \tau\delta)^{k+1} V(\varepsilon(k_0)) \quad (3.21)$$

□

De este modo concluimos convergencia exponencial para el error de estimación (3.11), es decir, los estimados del observador discreto (3.9) convergen de manera exponencial a los estados del sistema (3.1).

### 3.5 Esquema Control - Observador (Análisis en Lazo Cerrado)

A continuación presentamos uno de los resultados principales de este capítulo, un análisis de estabilidad para el sistema completo (sistema - observador - control).

Después de haber analizado la estabilidad para:

1. Las trayectorias del sistema (3.1) bajo la acción la ley de control (3.9) (véase [1])
2. El error (3.11) en la estimación de los estados del sistema (3.1) mediante el observador (3.9) (véase [19])

Unimos los resultados de tal manera que la ley de control discreta por retroalimentación de estado (3.9) se implementa mediante los estimados del observador (3.9) al sistema (3.1) (véase figura 3.3).

Así, se establece el siguiente resultado.

**Teorema 3.1** *Para el sistema no lineal en tiempo discreto descrito por (3.1)*

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_\tau x(k) + \tau B\{\alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k)\} \\y &= Cx(k) = x_1(k)\end{aligned}$$

*bajo la hipótesis 3.1, la ley de control por retroalimentación del estado (3.9) basada en el observador (3.9)*

$$\begin{aligned}u(k) &= \beta^{-1}(z(k))[v(z(k)) - \alpha(z(k))] \\z(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B[\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)] + \tau \Delta_\theta^{-1} K[y(k) - \hat{y}(k)]\end{aligned}$$

*hace que el origen del sistema  $(x, z) = (0, 0)$  en lazo cerrado sea uniformemente exponencialmente estable.*

#### Prueba

El teorema anterior se verifica sí y sólo sí el origen en la dinámica del error de estimación y del observador  $(e, z) = (0, 0)$  es exponencialmente estable. Y en vista de lo hecho en los lemas 3.1 y 3.2, podemos concluir que sólo es necesario probar que el origen de la dinámica del observador bajo la acción de control, es decir

$$z(k+1) = A_\tau z(k) + \tau B[\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)] + \tau \Delta_\theta^{-1} K[y(k) - \hat{y}(k)]$$

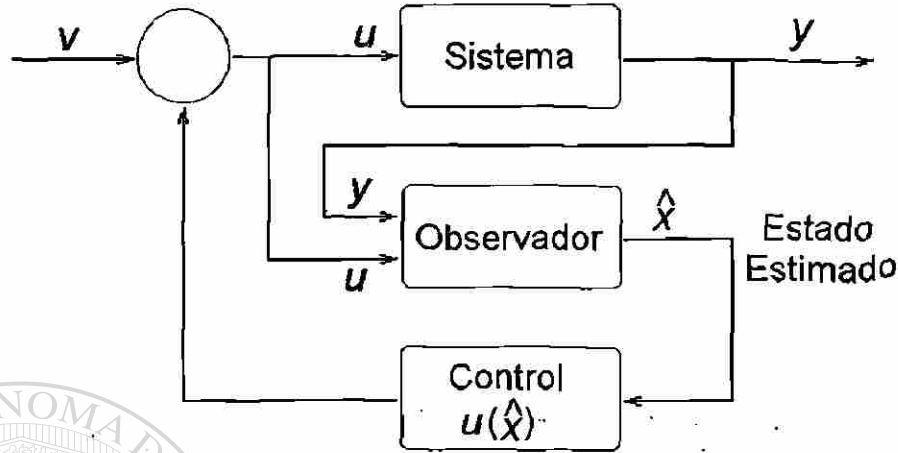


Figura 3.3: Estimación del estado

es (globalmente) uniformemente exponencialmente estable.

Para probar esto último hacemos uso del lema B.1 (véase anexo B).

Por lo tanto, procedemos a calcular las cotas según (B.7) para  $\xi = (e, z)$ , e iniciamos con  $\|e\|$ . Del lema 3.2 (3.15 y 3.21) y la definición 3.1 se sigue que  $\|\varepsilon(k)\|_{P_o} \leq \|\varepsilon(k_0)\|_{P_o} e^{-\delta\tau(k-k_0)}$ , es decir  $\|\varepsilon(k)\|_{P_o} \leq \|\varepsilon(k_0)\|_{P_o}$ , y por lo tanto de (3.15)

$$\begin{aligned} \|\Delta_\theta e(k)\|_{P_o} &\leq \|\Delta_\theta e(k_0)\|_{P_o} \\ \sqrt{e^T(k)\Delta_\theta P_o \Delta_\theta e(k)} &\leq \sqrt{e^T(k_0)\Delta_\theta P_o \Delta_\theta e(k_0)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

puesto que  $\Delta_\theta$  es una matriz diagonal (véase (3.10)). Además si  $\bar{P}_o = \Delta_\theta P_o \Delta_\theta$ , resulta

$$\sqrt{e^T(k)\bar{P}_o e(k)} \leq \sqrt{e^T(k_0)\bar{P}_o e(k_0)}$$

$$\|e(k)\|_{\bar{P}_o} \leq \|e(k_0)\|_{\bar{P}_o}$$

finalmente por equivalencia en norma [27, 24], tenemos

$$\|e(k)\| \leq a_4 \|e(k_0)\| \quad (3.23)$$

donde  $a_4$  es una constante positiva.

También del mismo lema se observa que  $\Delta V(\varepsilon(k)) \leq -\tau \delta V(\varepsilon(k))$  (3.20), entonces evaluando la sumatoria desde  $k_0$  hasta infinito en ambos lados de  $\Delta V(\varepsilon(k)) \leq -\delta\tau \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2$ ,

se sigue que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \Delta V(\varepsilon(k)) \leq -\delta\tau \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_0}^2$$

Sin embargo, para la primera sumatoria se tiene <sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{\infty} \Delta V(\varepsilon(k)) &= \Delta V(\varepsilon(k_0)) + \Delta V(\varepsilon(k_0 + 1)) + \Delta V(\varepsilon(k_0 + 2)) + \dots \\ &= V(\varepsilon(k_0 + 1)) - V(\varepsilon(k_0)) + V(\varepsilon(k_0 + 2)) - V(\varepsilon(k_0 + 1)) \\ &\quad + V(\varepsilon(k_0 + 3)) - V(\varepsilon(k_0 + 2)) + \dots \\ &= -V(\varepsilon(k_0)) + V(\varepsilon(\infty)) \end{aligned}$$

es decir <sup>6</sup>

$$-V(\varepsilon(k_0)) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \Delta V(\varepsilon(k)) \quad (3.24)$$

de lo que resulta

$$\begin{aligned} -V(\varepsilon(k_0)) &\leq -\delta\tau \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_0}^2 \\ \delta\tau \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_0}^2 &\leq V(\varepsilon(k_0)) \end{aligned}$$

de la definición para la función de Lyapunov dada en (3.15) evaluando en  $k = k_0$

$$\begin{aligned} \delta\tau \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_0}^2 &\leq \|\varepsilon(k_0)\|_{P_0}^2 \\ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_0}^2 &\leq \frac{1}{\delta\tau} \|\varepsilon(k_0)\|_{P_0}^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\left( \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_0}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta\tau}} \|\varepsilon(k_0)\|_{P_0}$$

hecho del que concluimos que el error de estimación está acotado (siguiendo un desarrollo similar al efectuado en (3.22)-(3.23)).

Ahora analizaremos la dinámica del observador propuesto (3.9) bajo la acción de la ley de control (3.9) en términos de los estimados, es decir

$$z(k+1) = A_\tau z(k) + \tau B[\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)] + \tau \Delta_\theta^{-1} K[y(k) - \hat{y}(k)]$$

<sup>5</sup> Escribimos  $V(\varepsilon(\infty))$ , haciendo un abuso en la notación

<sup>6</sup> Recuerde que por definición, todas las funciones candidatas de Lyapunov son positivas

$$u(k) = \beta^{-1}(z(k))[v(z(k)) - \alpha(z(k))]$$

entonces

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B[\alpha(z(k)) + \beta(z(k))\beta^{-1}(z(k))[-F\Omega_\rho z(k) - \alpha(z(k))]] \\ &\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} K[y(k) - \hat{y}(k)] \\ &= (A_\tau - \tau BF\Omega_\rho)z(k) + \tau \Delta_\theta^{-1} KCe(k) \end{aligned}$$

de (3.13) tenemos que  $e(k) = \Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k)$ , por lo tanto

$$z(k+1) = (A_\tau - \tau BF\Omega_\rho)z(k) + \tau \Delta_\theta^{-1} KC\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k)$$

Mediante la siguiente transformación de coordenadas

$$\sigma(k) = \Omega_\rho z(k) \tag{3.26}$$

se tiene que

$$\sigma(k+1) = \Omega_\rho[(A_\tau - \tau BF\Omega_\rho)z(k) + \tau \Delta_\theta^{-1} KC\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k)]$$

a partir de (3.26),  $z(k)$  queda definida como  $z(k) = \Omega_\rho^{-1}\sigma(k)$ , lo que resulta en

$$\begin{aligned} \sigma(k+1) &= \Omega_\rho[(A_\tau - \tau BF\Omega_\rho)\Omega_\rho^{-1}\sigma(k) + \tau \Delta_\theta^{-1} KC\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k)] \\ &= (\Omega_\rho A_\tau \Omega_\rho^{-1} - \tau \Omega_\rho BF)\sigma(k) + \tau \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k) \end{aligned}$$

recordando las propiedades de  $\Omega_\rho$  (B.3), tenemos

$$\begin{aligned} \sigma(k+1) &= (I + \tau \rho A - \tau \rho BF)\sigma(k) + \tau \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k) \\ &= (I + \gamma_c \{A - BF\})\sigma(k) + \tau \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k) \\ &= A_c \sigma(k) + \tau \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k) \end{aligned}$$

donde  $\gamma_c = \tau \rho$  (véase (3.6)) y  $A_c = I + \gamma_c \{A - BF\}$  (ver declaración B.1, anexo B)

### 3.5.1 Análisis de Estabilidad

A continuación, presentamos un análisis de estabilidad para el observador. De modo que definimos la siguiente función de Lyapunov

$$V(\sigma(k)) = \sigma^T(k)P_c\sigma(k) \tag{3.27}$$

obteniendose

$$\begin{aligned}
\Delta V(\sigma(k)) &= [A_c\sigma(k) + \tau\Omega_\rho\Delta_\theta^{-1}KC\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k)]^T P_c [A_c\sigma(k) + \tau\Omega_\rho\Delta_\theta^{-1}KC\Delta_\theta^{-1}\varepsilon(k)] \\
&\quad - \sigma^T(k)P_c\sigma(k) \\
&= \sigma^T(k)A_c^T P_c A_c\sigma(k) + \tau\sigma^T(k)A_c^T P_c \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k) \\
&\quad + \tau\varepsilon^T(k)\Delta_\theta^{-1}C^T K^T \Delta_\theta^{-1}\Omega_\rho P_c A_c\sigma(k) \\
&\quad + \tau\varepsilon^T(k)\Delta_\theta^{-1}C^T K^T \Delta_\theta^{-1}\Omega_\rho P_c \tau\Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k) - \sigma^T(k)P_c\sigma(k) \\
&= \sigma^T(k)[A_c^T P_c A_c - P_c]\sigma(k) + 2\tau\sigma^T(k)A_c^T P_c \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k) \\
&\quad + \tau^2\varepsilon^T(k)\Delta_\theta^{-1}C^T K^T \Delta_\theta^{-1}\Omega_\rho P_c \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k)
\end{aligned}$$

Ahora bien haciendo uso de (B.5), resulta que

$$\begin{aligned}
\Delta V(\sigma(k)) &= \sigma^T(k)[- \gamma_c P_c - \gamma_c(1 - \gamma_c)^n FF^T]\sigma(k) \\
&\quad + 2\tau\sigma^T(k)A_c^T P_c \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k) \\
&\quad + \tau^2\varepsilon^T(k)\Delta_\theta^{-1}C^T K^T \Delta_\theta^{-1}\Omega_\rho P_c \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k)
\end{aligned}$$

De las propiedades de  $\gamma_c$  (ver (3.8)), se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta V(\sigma(k)) &\leq -\gamma_c\sigma^T(k)P_c\sigma(k) + 2\tau\varepsilon^T(k)\Delta_\theta^{-1}C^T K^T \Delta_\theta^{-1}\Omega_\rho P_c A_c\sigma(k) \\
&\quad + \tau^2\varepsilon^T(k)\Delta_\theta^{-1}C^T K^T \Delta_\theta^{-1}\Omega_\rho P_c \Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} KC \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k) \\
&\leq -\gamma_c\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + 2\tau\|A_c\sigma(k)\|_{P_c}\|\Omega_\rho\Delta_\theta^{-1}KC\Delta_\theta^{-1}\|_{P_c}\|\varepsilon(k)\|_{P_c} \\
&\quad + \tau^2\|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2\|\Omega_\rho\Delta_\theta^{-1}KC\Delta_\theta^{-1}\|_{P_c}^2
\end{aligned}$$

Definiendo

$$N := \|\Omega_\rho\Delta_\theta^{-1}KC\Delta_\theta^{-1}\|_{P_c} \quad (3.28)$$

y empleando el hecho siguiente (véase (3.19) para una deducción similar)

$$\|A_c\sigma(k)\|_{P_c} \leq \|\sigma(k)\|_{P_c}$$

obtenemos

$$\Delta V(\sigma(k)) \leq -\gamma_c\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + 2\tau N\|\sigma(k)\|_{P_c}\|\varepsilon(k)\|_{P_c} + \tau^2 N^2\|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2$$

Ahora, haciendo uso de la siguiente desigualdad

$$2xy \leq x^2 + y^2 \quad (3.29)$$

donde en nuestro caso seleccionamos

$$x = \sqrt{\tau}N\|\varepsilon(k)\|_{P_c} \quad y = \sqrt{\tau}\|\sigma(k)\|_{P_c}$$

se tiene

$$2\tau N\|\varepsilon(k)\|_{P_c}\|\sigma(k)\|_{P_c} \leq \tau N^2\|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 + \tau\|\sigma(k)\|_{P_c}^2$$

lo que aplicado a la expresión que nos ocupa, resulta en

$$\Delta V(\sigma(k)) \leq -\gamma_c\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + \tau N^2\|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 + \tau\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + \tau^2 N^2\|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2$$

Sin embargo, puesto que  $0 < \tau < 1$ , se tiene

$$\tau^2 \leq \tau$$

Ahora bien, aplicando al último término del lado derecho, junto con el hecho de que  $\gamma_c = \tau\rho$  (3.6), resulta

$$\begin{aligned} \Delta V(\sigma(k)) &\leq -\gamma_c\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + \tau N^2\|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 + \tau\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + \tau N^2\|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 \\ &\leq -\tau\rho\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + 2\tau N^2\|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 + \tau\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 \\ &\leq -\tau(\rho - 1)\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + 2\tau N^2\|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, evaluando la suma de  $k_0$  a  $\infty$  en ambos lados de la desigualdad

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \Delta V(\sigma(k)) \leq -\tau(\rho - 1) \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + 2\tau N^2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2$$

Pero de acuerdo con (3.24), se tiene

$$\begin{aligned} -V(\sigma(k_0)) &\leq -\tau(\rho - 1) \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\sigma(k)\|_{P_c}^2 + 2\tau N^2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 \\ \tau(\rho - 1) \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\sigma(k)\|_{P_c}^2 &\leq V(\sigma(k_0)) + 2\tau N^2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 \\ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\sigma(k)\|_{P_c}^2 &\leq \frac{1}{\tau(\rho - 1)} \left( V(\sigma(k_0)) + 2\tau N^2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 \right) \end{aligned}$$

Recordando la expresión que se obtuvo en (3.25) y la definición de la función de Lyapunov dada en (3.27), resulta

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \|\sigma(k)\|_{P_c}^2 \leq \frac{1}{\tau(\rho - 1)} \left( \|\sigma(k_0)\|_{P_c}^2 + \frac{2N^2}{\delta} \|\varepsilon(k_0)\|_{P_c}^2 \right)$$

Además, si  $\rho > 2$ , lo que está dentro de los valores admisibles para  $\rho$  (ver (3.4))

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \|\sigma(k)\|_{P_c}^2 \leq \frac{1}{\tau} (\|\sigma(k_0)\|_{P_c}^2 + a_5 \|\varepsilon(k_0)\|_{P_c}^2)$$

donde  $a_5 = \frac{2N^2}{\delta}$  y de las definiciones dadas para transformación  $\varepsilon(k)$  y  $\sigma(k)$  (véase 3.13 y 3.26), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\Omega_{\rho} z(k)\|_{P_c}^2 &\leq \frac{1}{\tau} (\|\Omega_{\rho} z(k_0)\|_{P_c}^2 + a_5 \|\Delta_{\theta} e(k_0)\|_{P_c}^2) \\ \rho^{2n} \sum_{k=k_0}^{\infty} \|z(k)\|_{P_c}^2 &\leq \frac{1}{\tau} \left( \rho^{2n} \|z(k_0)\|_{P_c}^2 + \frac{a_5}{\theta^2} \|e(k_0)\|_{P_c}^2 \right) \\ \sum_{k=k_0}^{\infty} \|z(k)\|_{P_c}^2 &\leq \frac{1}{\tau} \left( \|z(k_0)\|_{P_c}^2 + \frac{a_5}{(\theta\rho^n)^2} \|e(k_0)\|_{P_c}^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\tau} (\|z(k_0)\|_{P_c}^2 + a_6 \|e(k_0)\|_{P_c}^2) \end{aligned}$$

con  $a_6 = \frac{a_5}{(\theta\rho^n)^2}$ . Si el producto  $(\theta\rho^n)^2$  es lo suficientemente grande tal que  $a_6 \leq 1$ , la expresión anterior puede expresarse como

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \|z(k)\|_{P_c}^2 \leq \frac{1}{\tau} (\|z(k_0)\|_{P_c}^2 + \|e(k_0)\|_{P_c}^2) \leq \frac{1}{\tau} \|\xi(k_0)\|_{P_c}^2$$

donde  $\xi = (e, z)$ , como se definió en la prueba del teorema 3.1

Finalmente, se obtiene

$$\left( \sum_{k=k_0}^{\infty} \|z(k)\|_{P_c}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\tau}} \|\xi(k_0)\|_{P_c}$$

Con esto demostramos también que el observador está acotado.  $\square$



## 3.6 Aplicación (Robot de Unión Flexible)

Ahora, aplicamos los resultados presentados en las secciones 3.3 y 3.4 al modelo matemático de un robot manipulador con unión flexible.

### 3.6.1 Modelo Matemático

Las ecuaciones dinámicas para el brazo robot con un solo eslabón y una articulación del tipo rotacional que actúa sobre un plano vertical están dadas por [31]

$$J_l \ddot{q}_1 + F_l \dot{q}_1 + \bar{k}(q_1 - q_2) + mgl \sin(q_1) = 0$$

$$J_m \ddot{q}_2 + F_m \dot{q}_2 - \bar{k}(q_1 - q_2) = u$$

$$y = q_1$$

donde  $q_1$  y  $q_2$  son el desplazamiento del eslabón y del rotor, respectivamente. La inercia del eslabón es  $J_l$ , la inercia del rotor  $J_m$ , la constante de elasticidad  $\bar{k}$ , la masa del eslabón  $m$ , la constante de gravedad  $g$ , el centro de masa  $l$  y los coeficientes de fricción viscosa  $F_l$  y  $F_m$  son parámetros constantes positivos. La variable de control  $u$  es el par aplicado al motor. Considerando que sólo la variable  $q_1$  es medible,  $u$  se diseña de tal manera que la variable  $q_1$  siga una referencia deseada  $q_{r1}(t)$ . Suponemos además que los parámetros del sistema son conocidos.

Definiendo las variables de estado de la siguiente manera

$$\xi_1 = q_1, \quad \xi_2 = \dot{q}_1, \quad \xi_3 = q_2, \quad \xi_4 = \dot{q}_2$$

el modelo en términos de las variables de estado resulta de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{F_l}{J_l} \xi_2 - \frac{mgl}{J_l} \sin(\xi_1) - \frac{\bar{k}}{J_l} (\xi_1 - \xi_3) \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= -\frac{F_m}{J_m} \xi_4 - \frac{\bar{k}}{J_m} (\xi_1 - \xi_3) + \frac{1}{J_m} u \end{aligned} \tag{3.30}$$

### 3.6.2 Diseño del Controlador

Un análisis sencillo del sistema (3.30) muestra que éste es linealizable mediante retroalimentación de estado, por medio de un cambio de coordenadas (véase [31]) como el siguiente

$$x_1 = \xi_1$$

$$x_2 = \xi_2$$

$$x_3 = -\frac{F_1}{J_1}\xi_2 - \frac{mgl}{J_1}\text{sen}(\xi_1) - \frac{\tilde{k}}{J_1}(\xi_1 - \xi_3)$$

$$x_4 = \frac{F_1^2}{J_1^2}\xi_2 + \frac{F_1 mgl}{J_1^2}\text{sen}(\xi_1) + \frac{F_1 \tilde{k}}{J_1^2}(\xi_1 - \xi_3) - \frac{\tilde{k}}{J_1}(\xi_2 - \xi_4) - \frac{mgl}{J_1 \tau}\text{sen}(\xi_1)\cos(\xi_1)\xi_2$$

con una retroalimentación dada por

$$u = \beta^{-1}(x)[v(x) - \alpha(x)]$$

donde

$$\alpha(x) = \left( \frac{mgl}{J_1}\text{sen}(x_1) + \frac{F_1 mgl}{J_1^2}\cos(x_1) + \frac{\tilde{k}F_1^2}{J_1} \right) x_2 + \frac{mgl}{J_1}\cos(x_1) + \left( \frac{\tilde{k}}{J_1} - \frac{F_1^2}{J_1^2} \right)$$

$$\left[ \frac{F_1}{J_1}x_2 + \frac{mgl}{J_1}\text{sen}(x_1) + \frac{\tilde{k}}{J_1}(x_1 - x_3) \right] - \frac{\tilde{k}F_1}{J_1^2}x_4 + \frac{\tilde{k}}{J_1} \left[ \frac{\tilde{k}}{J_m}(x_1 - x_3) - \frac{F_m}{J_m}x_4 \right]$$

$$\beta(x) = \tau \frac{\tilde{k}}{J_1 J_m}$$

El control auxiliar está dado por  $v(x) = -F\Omega_\rho x$ , donde las matrices  $F$  y  $\Omega_\rho$  están definidas como en (3.4), es decir

$$F = \begin{pmatrix} C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_\rho = \text{diag}(\rho^4, \rho^3, \rho^2, \rho)$$

Entonces, el control resulta en

$$\begin{aligned} v(x) &= -F\Omega_\rho x \\ &= -(\rho^4 x_1 + 4\rho^3 x_2 + 6\rho^2 x_3 + 4\rho x_4) \end{aligned}$$

$m$	$g$	$l$	$J_l$
0.4 Kg	9.81 m/s <sup>2</sup>	0.185 m	0.002 N-ms <sup>2</sup> /rad
$J_m$	$\tilde{k}$	$F_l$	$F_m$
0.0059	1.61	0.01	0.002

Tabla 3.1: Parámetros del robot manipulador

### 3.6.3 Diseño del Observador

De acuerdo con la sección 3.4, el observador discreto para estimar las trayectorias del sistema, está dado por

$$z(k+1) = A_\tau z(k) + \tau B \alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k) + \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)]$$

donde la ganancia del observador es

$$\tau \Delta_\theta^{-1} K = \tau \begin{pmatrix} 4\theta & 6\theta^2 & 4\theta^3 & \theta^4 \end{pmatrix}$$

con

$$K = \text{col} \begin{pmatrix} C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \end{pmatrix} = \text{col} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_\theta^{-1} = \text{diag}(\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4)$$

Por lo tanto, el observador adquiere la forma

$$z_1(k+1) = z_1(k) + \tau z_2(k) + 4\tau\theta(x_1(k) - z_1(k))$$

$$z_2(k+1) = z_2(k) + \tau z_3(k) + 6\tau\theta^2(x_1(k) - z_1(k))$$

$$z_3(k+1) = z_3(k) + \tau z_4(k) + 4\tau\theta^3(x_1(k) - z_1(k))$$

$$z_4(k+1) = z_4(k) + \tau B \{ \alpha(z(k)) + \tau \beta(z(k))u(k) \} + \tau\theta^4(x_1(k) - z_1(k))$$

### 3.6.4 Resultados de Simulación

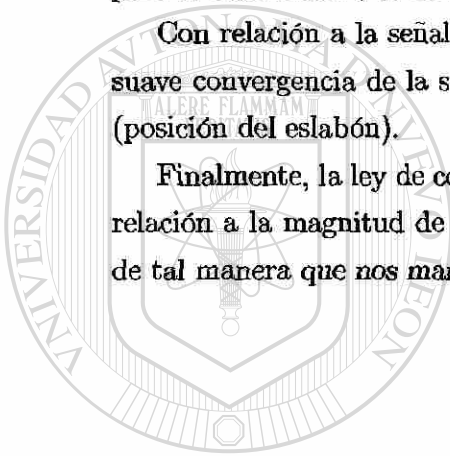
Las simulaciones numéricas fueron realizadas evaluando la respuesta del sistema en lazo cerrado para el modelo matemático del robot flexible, mediante el software MATLAB-SIMULINK, a partir de los algoritmos de control y observación propuestos hasta ahora, con los valores numéricos para los parámetros del sistema presentados en la tabla 3.1 [31].

Las condiciones iniciales para los estados del sistema (asumiendo  $k_0 = 0$ ), fueron  $x(0) = \text{col} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.03 & 0.04 \end{pmatrix}$ , y  $z(0) = \text{col} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix}$  para el observador. El tiempo de muestreo  $\tau$  se fijó en 1 ms. La ganancia para el controlador fue  $\rho = 30$ , el parámetro de diseño del observador se escogió como  $\theta = 80$  y finalmente la señal de referencia fue  $q_{r1}(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(4t)$ .

Las figuras 3.4 - 3.8 ilustran el desempeño del esquema control - observador propuesto. En estas se observa por ejemplo un tiempo de convergencia pequeño para los estimados, el cual por supuesto puede acelerarse en la medida que el parámetro de diseño para el observador, es decir  $\theta$ , crece.

Con relación a la señal de referencia propuesta, en la figura se percibe una rápida y suave convergencia de la señal medible (que a la vez es nuestra variable a controlar)  $q_1$  (posición del eslabón).

Finalmente, la ley de control a partir los estimados es mostrada en la figura 3.9. Con relación a la magnitud de los valores de la ley de control, se sintonizaron las ganancias de tal manera que nos mantuvieramos en le rango de  $-30$  a  $30$  unidades.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



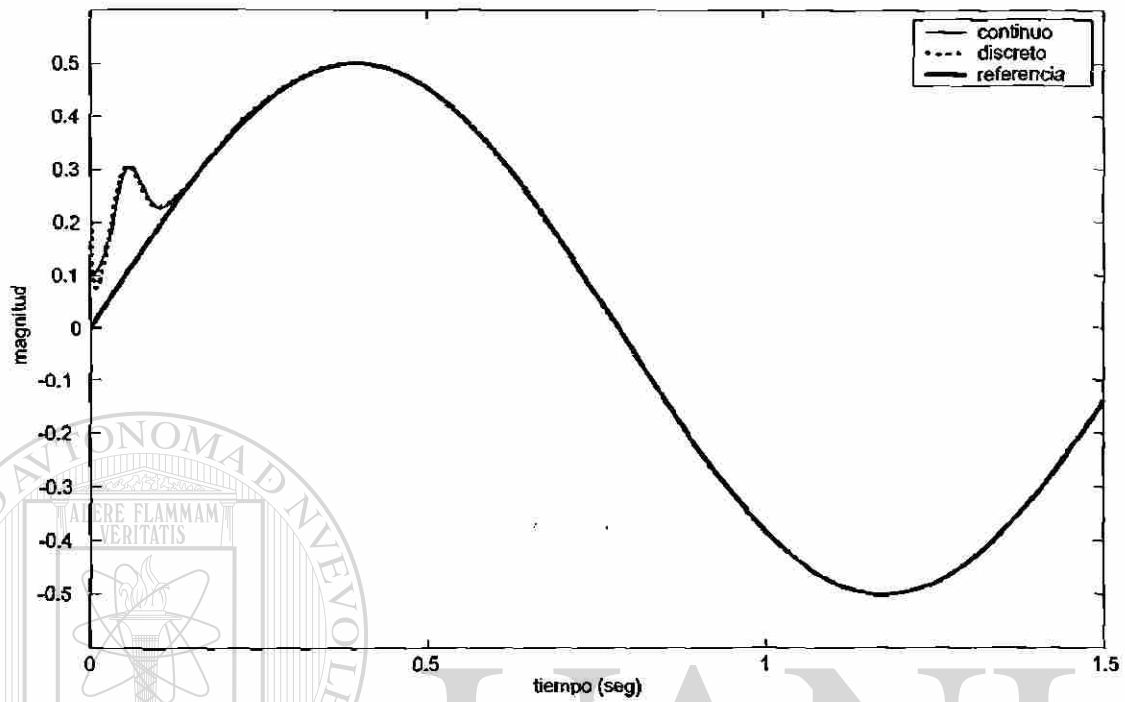


Figura 3.4: Desplazamiento del eslabón

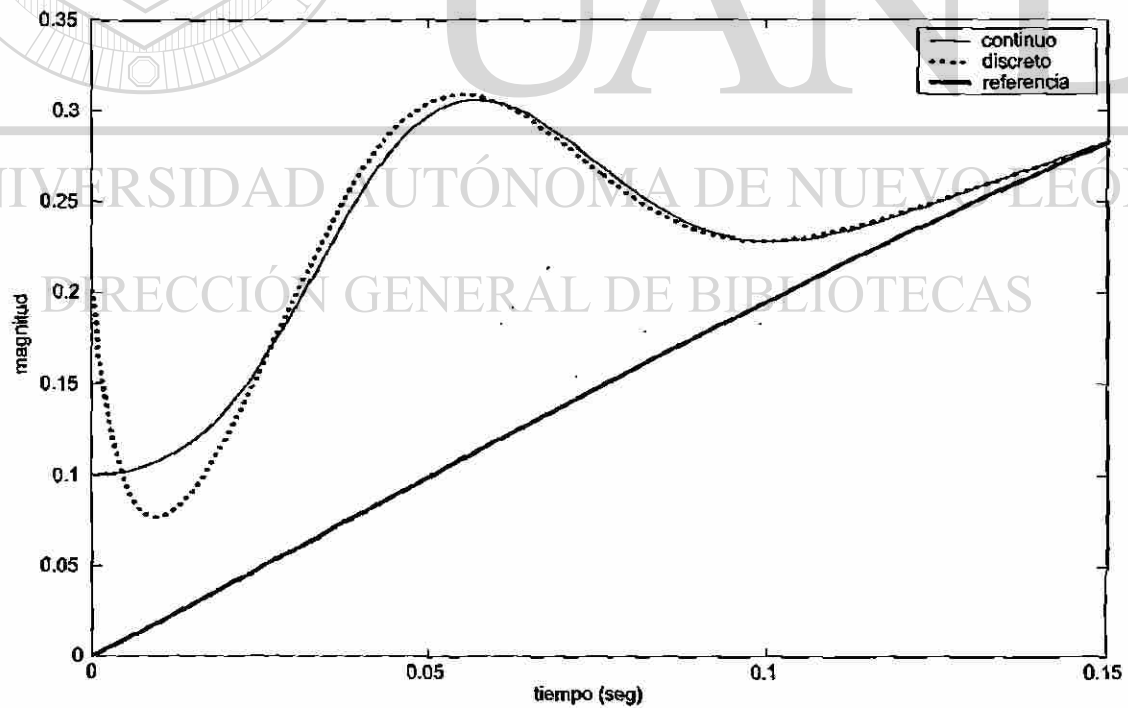


Figura 3.5: Desplazamiento del eslabón (acercamiento)

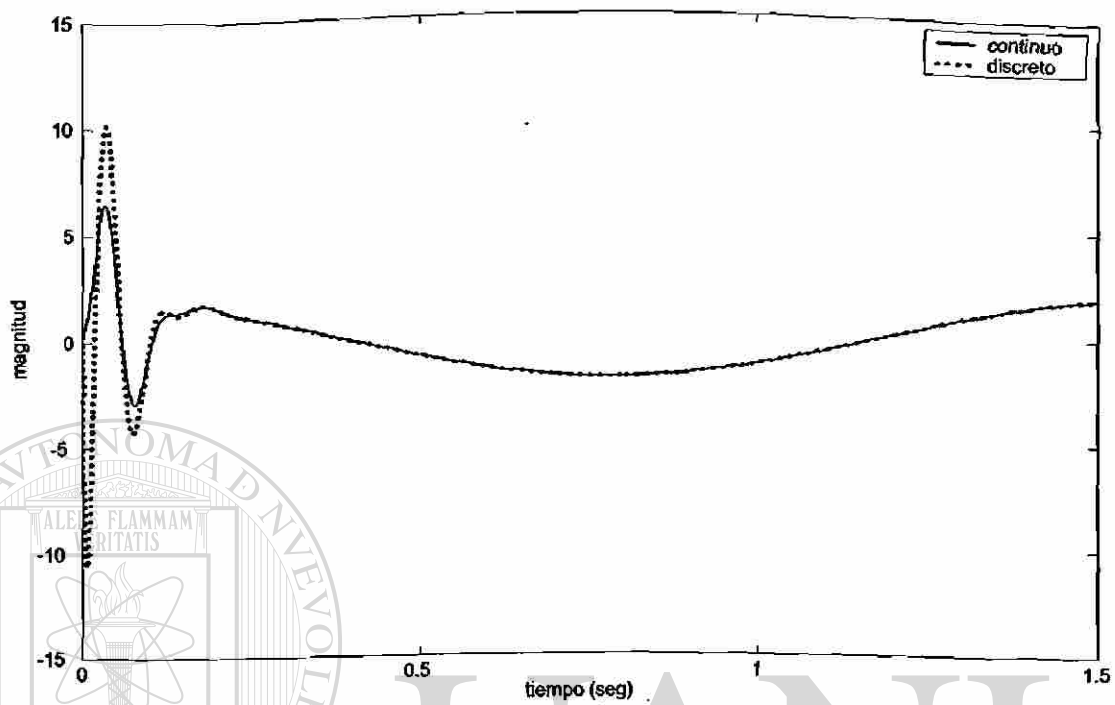


Figura 3.6: Desplazamiento del rotor

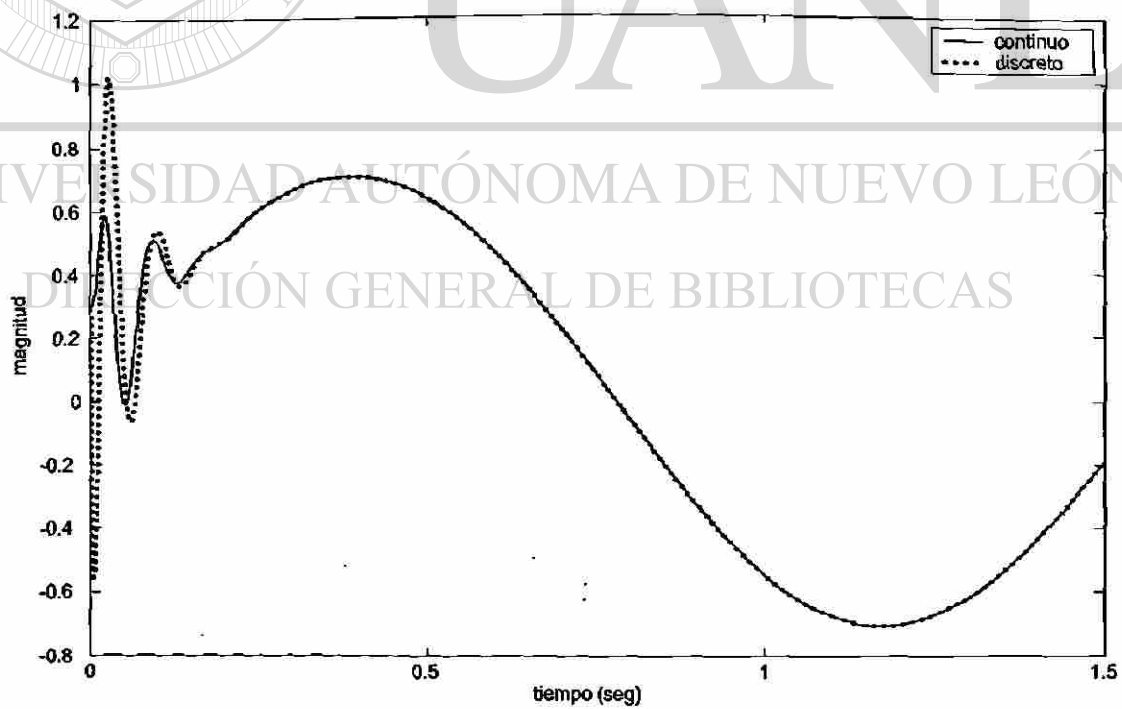


Figura 3.7: Velocidad con que se desplaza el eslabón

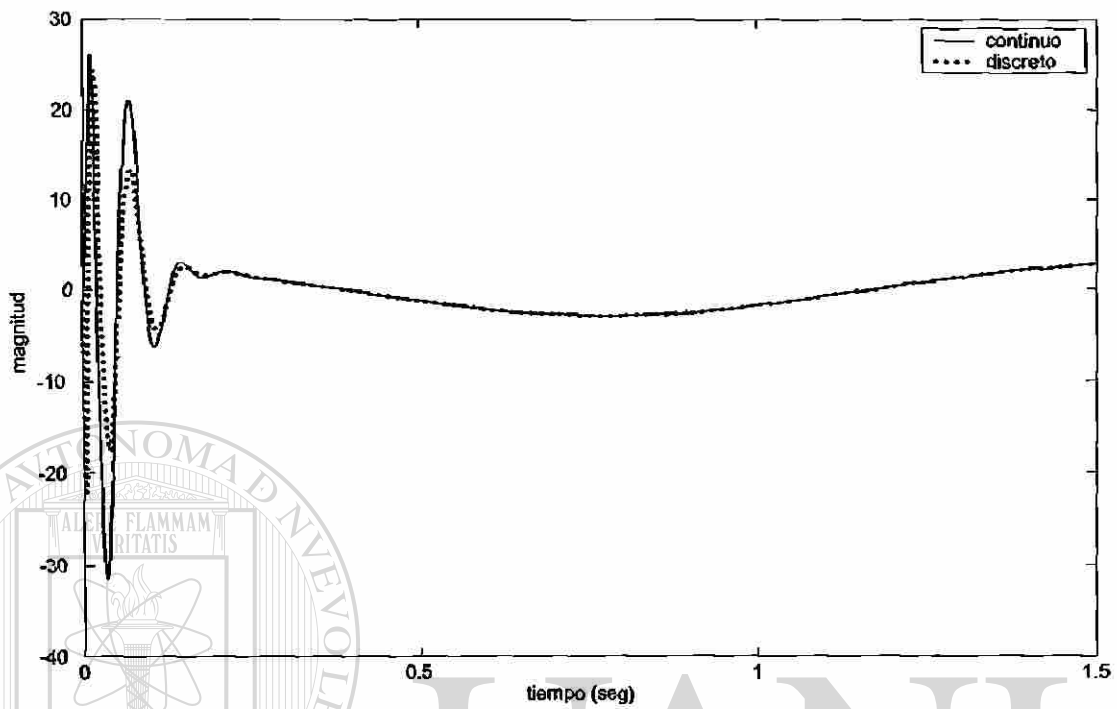


Figura 3.8: Velocidad del rotor

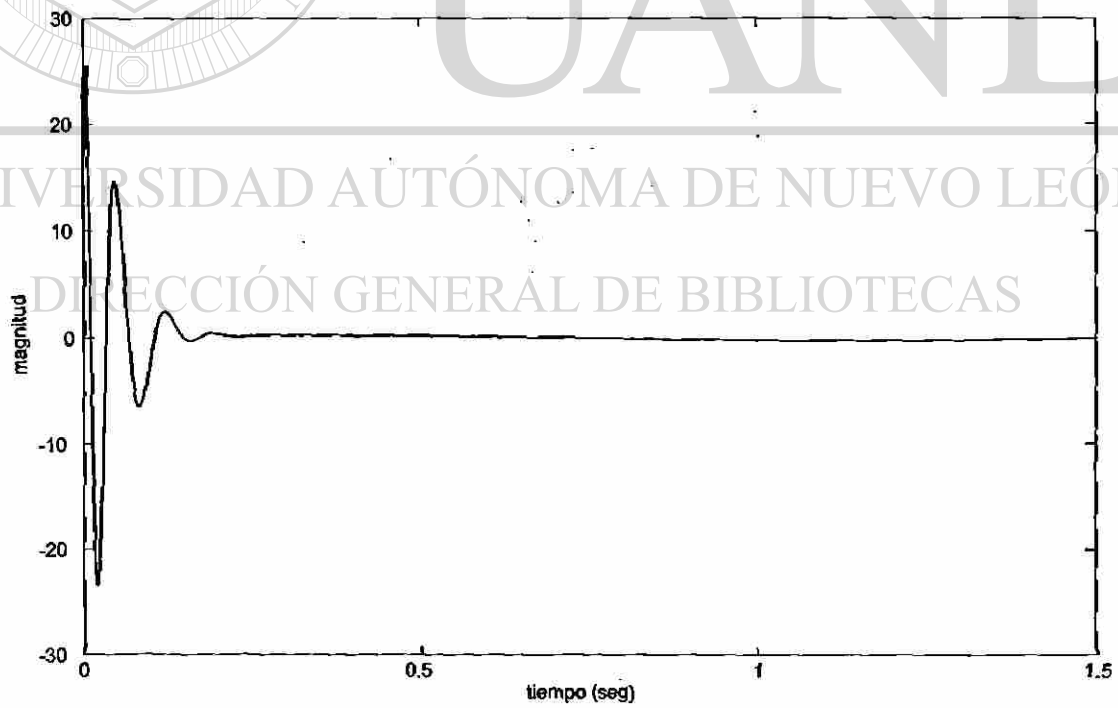


Figura 3.9: Ley de control linealizante

### 3.7 Control Mediante Modos Deslizantes

A continuación, retomando el trabajo desarrollado en [34] se presenta un control basado en la técnica de modos deslizantes. El objetivo que se persigue es el diseño de una ley de control asintóticamente estable que asegure un movimiento deslizante sobre un espacio  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  de dimensión  $n - m$  [48].

Considere para ello la siguiente dinámica no lineal en tiempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathcal{F}_\tau(x(k)) + \mathcal{G}_\tau(x(k))u(k) \\ y &= Cx(k) = x_1(k) \end{aligned} \quad (3.31)$$

El objetivo de la estrategia de control en modos deslizantes es dirigir los estados del sistema a una superficie  $\mathcal{M}$  de dimensión  $n - m$ , y mantener el movimiento sucesivo de las trayectorias sobre  $\mathcal{M}$ , tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$ .

Con este objetivo, se diseña un control en modos deslizantes a partir de la siguiente superficie de conmutación

$$\bar{\sigma}(k) = S^T(x(k) - x_{ref}(k)) \quad (3.32)$$

donde  $S$  es un vector  $S = \text{col} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{pmatrix}$  y  $x_{ref}(k+1) = x_{ref}(k)$  es una señal de referencia constante. Se supone además que  $S^T \mathcal{G}(x(k))$  es invertible.

**Nota 3.2** El sistema (3.1) puede ser expresado como (3.31) haciendo  $\mathcal{F}_\tau(x(k)) = A_\tau x(k) + \tau B \alpha(x(k))$  y  $\mathcal{G}_\tau(x(k)) = \tau B \beta(x(k))$ .

**Nota 3.3** Es claro que existen otras posibilidades para definir la superficie de conmutación (3.32), la elección depende del objetivo de control.

El control propuesto se diseña en 2 etapas.

1. Diseñamos un control equivalente  $u_{eq}(k)$  para las trayectorias del sistema, cuando el movimiento de estas es restringido a permanecer en la superficie de conmutación  $\sigma(k+1) = 0$ . El cual está dado por [48]

$$u_e(k) = [S^T \mathcal{G}_\tau(x(k))]^{-1} [S^T \mathcal{F}_\tau(x(k)) - S^T x_{ref}(k+1)]$$

2. Agregamos un control de regulación  $u_N$  tal que se satisfaga la condición de alcanzabilidad, condición necesaria y suficiente para asegurar tanto el movimiento



deslizante y la convergencia sobre  $\mathcal{M}$ , la cual en el caso de sistemas en tiempo discreto, puede ser enunciada como (véase [13])

$$\|\bar{\sigma}(k+1)\| < \|\bar{\sigma}(k)\| \quad (3.33)$$

Con ese fin, la superficie se selecciona de la siguiente manera

$$\bar{\sigma}(k+1) = \bar{\eta}S^T(x(k) - x_{ref}(k)) = \bar{\eta}\bar{\sigma}(k) \quad (3.34)$$

donde  $0 < \bar{\eta} < 1$  es un escalar. Es claro que esta selección satisface la condición de alcanzabilidad (3.33), es decir

$$\begin{aligned} \|\bar{\sigma}(k+1)\| &< \|\bar{\sigma}(k)\| \\ \bar{\eta}\|\bar{\sigma}(k)\| &< \|\bar{\sigma}(k)\| \end{aligned}$$

Entonces, el control de regulación se diseña como

$$u_N(k) = [S^T G_r(x(k))]^{-1} [\bar{\eta}S^T(x(k) - x_{ref}(k))]$$

Finalmente, la ley de control está dada por

$$u(k) = u_{eq}(k) + u_N(k) \quad (3.35)$$

### 3.7.1 Análisis de Estabilidad (sistema - control mediante modos deslizantes)

Ahora, hacemos un análisis de las propiedades de  $\bar{\sigma}(k) = 0$  dada por (3.34) mediante el estudio de la siguiente función de Lyapunov

$$V(\bar{\sigma}(k)) = \bar{\sigma}^T(k)\bar{\sigma}(k)$$

de lo que se sigue

$$\begin{aligned} V(\bar{\sigma}(k+1)) &= (\bar{\eta}\bar{\sigma}(k))^T (\bar{\eta}\bar{\sigma}(k)) \\ &= \bar{\eta}^2 V(\bar{\sigma}(k)) \\ &= (\bar{\eta}^2)^k V(\bar{\sigma}(0)) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(\bar{\sigma}(k+1)) \rightarrow 0$$

Por otro lado, para verificar la estabilidad del sistema en lazo cerrado bajo la acción del control  $u(k)$  (3.35) es necesario introducir la noción de cota fundamental (ultimate bound) para las soluciones del sistema libre de perturbaciones

$$\xi(k+1) = F_r(\xi(k), k) \quad (3.36)$$

donde  $F_r(\xi(k), k) = \xi(k) + \tau f(\xi(k))$ , la cual usaremos para estudiar las propiedades de estabilidad para una clase de sistemas no lineales discretos, cuando el punto de equilibrio es afectado por pequeñas perturbaciones

**Definición 1** [24] *Las soluciones del sistema (3.36) son uniformemente fundamentalmente acotadas (uniformly ultimately bounded) si existen constantes positivas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  y para cada  $r \in (0, \beta_2)$  existe una constante  $T = T(r)$ , tal que*

$$\|\xi(k_0)\| < r \Rightarrow \|\xi(k)\| < \beta_1, \quad \forall k > k_0 + T$$

la constante  $\beta_1$  se conoce como cota fundamental.

Además, se presenta un estudio sobre la existencia de la cota fundamental, para la solución del sistema (3.36).

Considere la siguiente hipótesis.

**Hipótesis 3.2** *Existe  $\mu > 0$  tal que el punto de equilibrio  $\xi = 0$  es uniformemente estable en  $B_\mu$ .*

**Lema 3.3** [24] *Existe una función continua  $V : B_r \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$c_1 \|\xi(k)\|^2 \leq V(\xi, k) \leq c_2 \|\xi(k)\|^2$$

$$\Delta V(\xi, k) \leq -c_3 \|\xi(k)\|^2$$

para  $0 < \mu < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} r$ , para algunas constantes positivas  $c_1, c_2$  y  $c_3$ ,  $\forall k > 0$  y  $\forall \xi \in B_r$ .

**Teorema 3.2** [24] *Considere el sistema (3.36). Suponga además que la hipótesis 3.2 y el lema 3.3 se satisfacen. Existe una función  $\varphi(\cdot, \cdot) = \phi(\cdot)\tilde{\rho}(\cdot)$  de clase  $\mathcal{KL}$  tal que  $\phi(\cdot)$  es una función de clase  $\mathcal{K}$ ,  $\tilde{\rho}(\cdot)$  es una función decreciente y un tiempo  $k_1$ , dependientes de  $\xi(k_0)$  y  $\mu$ , tal que la solución de (3.36) satisface*

$$\|\xi(k)\| \leq \phi(\|\xi(k_0)\|)\tilde{\rho}(k - k_0) \quad \forall k \in (k_0, k_1), \quad k_0 \leq k_1$$

$$\|\xi(k)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \mu, \quad \forall k \geq k_1 \quad \text{para} \quad \|\xi(k_0)\| < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} r.$$

Ahora, el sistema (3.31) bajo la acción de la ley de control (3.35) nos lleva al sistema en lazo cerrado

$$x(k+1) = f_\tau(x(k), 0) + p_\tau(x(k), x_{ref}(k)) \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned} f_\tau(x(k), 0) &= \mathcal{F}_\tau(x(k)) + \mathcal{G}_\tau(x(k)) [\mathcal{S}^T \mathcal{G}_\tau(x(k))]^{-1} [\tilde{\eta} \mathcal{S}^T x(k) - \mathcal{S}^T \mathcal{F}_\tau(x(k))] \\ p_\tau(x(k), x_{ref}(k)) &= \mathcal{G}_\tau(x(k)) [\mathcal{S}^T \mathcal{G}_\tau(x(k))]^{-1} [\mathcal{S}^T x_{ref}(k+1) - \tilde{\eta} \mathcal{S}^T x_{ref}(k)] \end{aligned}$$

Es claro que el sistema en lazo cerrado (3.37) puede verse como un sistema con una parte sin efecto de perturbaciones representada por  $f_\tau(x(k), 0)$  y una parte perturbada dada por  $p_\tau(x(k), x_{ref}(k))$ .

Además, de las cotas sobre las columnas de  $\mathcal{G}_\tau(x(k))$  y la no singularidad de  $\mathcal{S}^T \mathcal{G}_\tau(x(k))$ , se puede concluir que la parte perturbada satisface la siguiente desigualdad

$$\|p_\tau(x(k), x_{ref}(k))\| \leq l_1 \|x(k)\|^2 + l_2 \|x_{ref}(k)\|^2 \quad (3.38)$$

para  $x(k), x_{ref}(k) \in B_r$ , donde  $l_1$  y  $l_2$  son constantes positivas.

Ahora, considere las siguientes hipótesis para la parte del sistema perturbado

**Hipótesis 3.3** *El punto de equilibrio del sistema  $x(k+1) = f_\tau(x(k), 0)$ , sistema que en lo sucesivo llamaremos  $x_{eq}(k+1)$ , es localmente exponencialmente estable.*

**Hipótesis 3.4** *La señal de referencia  $x_{ref}(k)$  es uniformemente acotada y satisface  $\|x_{ref}(k)\| \leq l_3$ , para alguna constante positiva  $l_3$ .*

Por un teorema inverso de Lyapunov, la hipótesis 3.3 asegura la existencia de una función de Lyapunov  $V(x(k), k)$ , la cual satisface

$$c_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x(k)) \leq c_2 \|x(k)\|^2 \quad (3.39)$$

$$\Delta V_1(x(k)) = V(x_{eq}(k+1)) - V(x(k)) \leq -c_3 \|x(k)\|^2$$

para algunas constantes positivas  $c_1, c_2$  y  $c_3$ .

Entonces, la diferencia hacia adelante de la función  $\Delta V(x(k))$  a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado está dada por

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= \Delta V_1(x(k)) + \Delta V_2(x(k)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta V_1(x(k)) &= V(x_{eq}(k+1)) - V(x(k)) \\ \Delta V_2(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x_{eq}(k+1))\end{aligned}$$

Además, de la hipótesis 3.4 y de (3.38), la función  $\Delta V_2(x(k))$  satisface la siguiente desigualdad (véase anexo B.4)

$$\begin{aligned}\|\Delta V_2(x(k))\| &= \|V(x(k+1)) - V(x_{eq}(k+1))\| \\ &= \left\| \left\{ \frac{\partial V}{\partial x(k)}(h) \right\} p_r(x(k), x_{ref}(k)) \right\| \\ &\leq l_V \|p_r(x(k), x_{ref}(k))\| \\ &\leq l_V (l_1 \|x(k)\|^2 + l_2 l_3^2)\end{aligned}$$

Usando la condición (3.39) y el resultado anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k)) &= \Delta V_1(x(k)) + \Delta V_2(x(k)) \\ &\leq -c_3 \|x(k)\|^2 + l_V (l_1 \|x(k)\|^2 + l_2 l_3^2) \\ &\leq -(c_3 - l_V l_1) \|x(k)\|^2 + l_V l_2 l_3^2\end{aligned}$$

si  $l_V$  es suficientemente pequeña tal que  $l_V l_1 < \tilde{l}_1 < c_3$  se satisface. Resulta

$$\Delta V(x(k)) \leq -b_2 \|x(k)\|^2 + l_V l_2 l_3^2$$

donde  $b_2 = c_3 - l_V l_1$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k)) &\leq -b_2 \|x(k)\|^2 + l_V l_2 l_3^2 \pm \gamma b_2 \|x(k)\|^2 \\ &\leq -b_2(1 - \gamma) \|x(k)\|^2 + l_V l_2 l_3^2 - \gamma b_2 \|x(k)\|^2 \\ &\leq -b_2(1 - \gamma) \|x(k)\|^2\end{aligned}$$

para algún  $\gamma$  tal que  $0 < \gamma < 1$  y para todo  $\|x(k)\| \geq \sqrt{\frac{l_V l_2 l_3^2}{\gamma b_2}}$ .

Además, resulta que  $l_2 \leq \frac{\gamma b_2}{l_V l_3^2} \|x(k)\|^2$  para  $\|x(k)\| < \sqrt{\frac{c_1}{c_2} r}$  y una cota para  $l_2$  está dada por  $l_2 \leq \tilde{l}_2 < \frac{\gamma b_2}{l_V l_3^2} \frac{c_1}{c_2} r^2$ . Del teorema 3.2, la cota fundamental de la solución del sistema (3.37) está dada por  $B = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \sqrt{\frac{\tilde{l}_2 l_3^2}{\gamma b_2}}$ .

Las soluciones del sistema satisfacen

$$\|x(k)\| < \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \sqrt{\frac{\tilde{l}_2 l_3^2}{\gamma b_2}} \quad \forall k \geq k_1$$

para algún tiempo finito  $k_1$ .

Para probar que el sistema en lazo cerrado es localmente fundamentalmente acotado, se tiene el siguiente lema

**Lema 3.4** *Considere el sistema no lineal en tiempo discreto (3.1) para el cual se diseña un control de la forma (3.35). Suponga además que el lema 3.3 y la hipótesis 3.3 se satisfacen. Entonces, existen constantes positivas  $\tilde{l}_1$  y  $\tilde{l}_2$  tales que para cualquier estado inicial  $x(k_0)$ , las soluciones del sistema en lazo cerrado (3.37) son fundamentalmente acotadas.*

Por otro lado, si

$$x_{ref}(k) = 0, \quad \forall k > k_0$$

en cuyo caso la hipótesis 3.4 carece de significado, puede obtenerse el siguiente resultado.

**Corolario 3.1** *Considere el sistema no lineal en tiempo discreto (3.1) para el cual se diseña un control de la forma (3.35). Suponga además que el lema 3.3 se satisface.*

*Entonces, existe una constante positiva  $\tilde{l}_1$  tal que para cualquier estado inicial  $x(k_0)$ , las soluciones del sistema en lazo cerrado (3.37) son uniformemente exponencialmente estables.*

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### 3.8 Aplicación (Generador Síncrono)

En esta sección, aplicamos la estrategia de control (3.35) desarrollada en la sección anterior mediante la técnica de modos deslizantes y el observador discreto (3.9) presentado en la sección 3.4, al modelo matemático del generador síncrono.

#### 3.8.1 Modelo Matemático

Consideramos un generador síncrono conectado a la red, representada por un bus infinito, mediante líneas de transmisión puramente reactivas, es decir, una máquina girando a velocidad síncrona  $\omega_s$  y capaz de absorber o liberar cualquier cantidad de energía [44] (véase figura 3.10). Tal generador puede ser modelado como

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \omega - \omega_s \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{M} (T_m - P_g) \\ \frac{dE'_q}{dt} &= \frac{1}{T'_{d0}} \left[ -\frac{X_d}{X'_d} E'_q - \left( \frac{X'_d - X_d}{X'_d} \right) V \cos(\delta) + E_{fd} \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde  $\delta = \angle E'_q - \angle V$  es el ángulo del rotor (también conocido como ángulo de potencia),  $\omega = \dot{\delta}$  la velocidad angular del rotor y  $E'_q$  el voltaje en el estator, el cual es proporcional a los flujos de encañamiento.  $M$  es una constante correspondiente a la inercia,  $T_m$  la potencia mecánica suministrada mediante la turbina y  $T'_{d0}$  la constante de tiempo transitoria de circuito abierto.  $X_d = x_d + x_L$  es la reactancia aumentada, donde  $x_d$  corresponde a la reactancia en el eje directo y  $x_L$  a la reactancia de la línea,  $X'_d$  la reactancia aumentada transitoria y  $V$  el voltaje del bus infinito (el cual es fijo).  $P_g$  es la potencia generada, mientras que  $E_{fd}$  es el equivalente al voltaje del estator dado por el voltaje de campo  $v_f$ .

$$\begin{aligned} P_g &= \frac{1}{X'_d} E'_q V \sin(\delta) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) V^2 \sin(2\delta) \\ E_{fd} &= \frac{\omega_s M_f}{\sqrt{2} R_f} v_f \end{aligned}$$

donde  $x'_d$  es la reactancia transitoria en el eje directo,  $x_q$  la reactancia en el eje de cuadratura,  $M_f$  la inductancia mutua entre los devanados del estator y  $R_f$  la resistencia de campo. En este caso, no consideramos las dinámicas de amortiguamiento, es decir

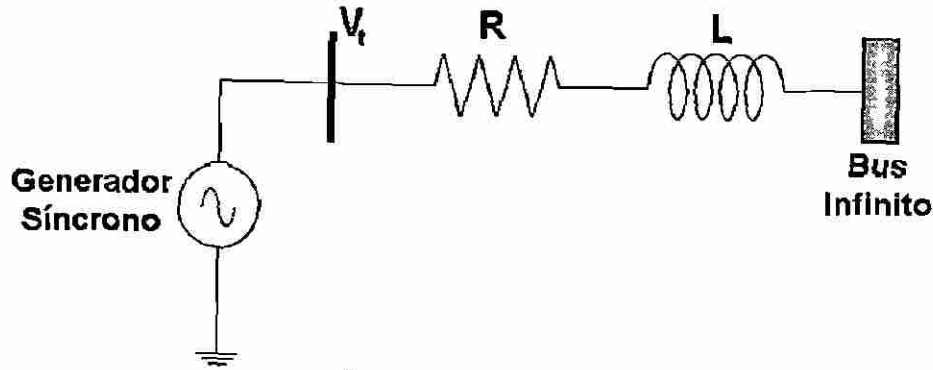


Figura 3.10: Generador Síncrono

$D = 0$  (véase [23, 15] donde se da una explicación en detalle sobre este modelo de orden reducido, su validez y las consideraciones que se hicieron para llegar al mismo).

Para un voltaje de campo constante  $E_{fd} = E_{fd}^*$ , el generador posee 2 puntos de equilibrio (uno estable y uno inestable). En este trabajo, el análisis y diseño desarrollados para el generador síncrono, se hacen alrededor del punto de equilibrio estable, aunque un análisis similar puede hacerse alrededor del punto de equilibrio inestable. Sea  $(\delta^*, \omega^*, E_q'^*)$  el punto de equilibrio estable del sistema (3.40). Entonces, el sistema representado en términos de las variables de desviación

$$\Delta\delta = \delta - \delta^*, \quad \Delta\omega = \omega - \omega^*, \quad \Delta E_q' = E_q' - E_q'^*, \quad u = E_{fd} - E_{fd}^* \quad (3.41)$$

y con las siguientes constantes

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{T_m}{M}, & m_2 &= \frac{-V}{MX_d'}, & m_3 &= \frac{V^2}{M} \left( \frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_q} \right) \\ m_4 &= -\frac{X_d}{T_{d0}' X_d'}, & m_5 &= -\left( \frac{X_d' - X_d}{T_{d0}' X_d'} \right) V, & m_6 &= \frac{1}{T_{d0}'} \end{aligned} \quad (3.42)$$

está dado por

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\delta}{dt} &= \Delta\omega \\ \frac{d\Delta\omega}{dt} &= m_1 + \{m_2(\Delta E_q' + E_q'^*) + m_3 \cos(\delta)\} \sin(\delta) \\ \frac{d\Delta E_q'}{dt} &= m_4(\Delta E_q' + E_q'^*) + m_5 \cos(\delta) + m_6(u + E_{fd}^*) \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde  $\delta = \Delta\delta + \delta^*$ .

$T_m$	$M$	$\omega_s$	$T'_{d0}$	$X_q$	$X_d$	$X'_d$	$V$
1	0.033	1	0.033	0.9	0.9	0.3	1

Tabla 3.2: Parámetros del generador síncrono

Definiendo el siguiente cambio de variable

$$x_1 = \Delta\delta, \quad x_2 = \Delta\omega, \quad x_3 = \Delta E'_q \quad (3.44)$$

y aplicando la metodología dada en la sección 3.7 resulta que el modelo discreto aproximado vía Euler, para el generador síncrono en términos de las variables de desviación (3.43), está dado por

$$x(k+1) = \mathcal{F}_\tau(x(k)) + \mathcal{G}_\tau(x(k))u(k)$$

donde

$$\mathcal{F}_\tau(x(k)) = x(k) + \tau \begin{pmatrix} x_2(k) \\ m_1 + \{m_2(x_3(k) + E'_q)^* + m_3 \cos(\tilde{x}_1)\} \text{sen}(\tilde{x}_1) \\ m_4(x_3(k) + E'_q)^* + m_5 \cos(\tilde{x}_1(k)) + m_6 E'_{fd} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}_\tau(x(k)) = \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_1 = x_1(k) + \delta^*$$

### 3.8.2 Diseño de la Ley de Control

Para regular el ángulo de potencia del generador, seleccionamos la siguiente función de conmutación

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(k) &= \mathcal{S}^T(x(k) - x_{ref}(k)) \\ &= \mathcal{S}_1(x_1(k) - x_{1ref}(k)) + \mathcal{S}_2 x_2(k) + \mathcal{S}_3 x_3(k) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  y  $\mathcal{S}_3$  son constantes que se seleccionan de tal forma que satisfagan la condición de alcanzabilidad y  $x_{1ref}(k)$  es una señal de referencia constante.

Entonces, la ley de control está dada por

$$u(k) = u_e(k) + \Delta u(k)$$



### 3.8.3 Diseño del Observador

Considerando nuevamente el cambio de variable (3.44), el sistema (3.43) mediante la discretización tipo Euler adquiere la forma

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + \tau x_2(k) \\x_2(k+1) &= x_2(k) + \tau x_3(k) \\x_3(k+1) &= x_3(k) + \tau \{m_4(\Delta E'_q(k) + E'_q) + m_5 \cos(\delta) + m_6(u(k) + E_{fd}^*)\}\end{aligned}$$

donde

$$m_4 E'_q + m_5 \cos(\delta^*) + m_6 E_{fd}^* = 0$$

Por lo tanto, la dinámica del sistema en las nuevas coordenadas tiene la estructura

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_\tau x(k) + \tau B \{ \alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k) \} \\y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

donde  $\alpha(x(k))$  y  $\beta(x(k))$ , en las coordenadas originales están dadas por

$$\begin{aligned}\alpha(x(k)) &= m_2 \sin(\delta(k) + \tau \Delta \omega(k)) E'_q + \Delta E'_q(k) + \tau m_4 (\Delta E'_q(k) + E'_q) \\&\quad + \tau m_5 \cos(\delta(k)) + m_3 \cos(\delta(k) + \tau \Delta \omega(k)) \sin(\delta(k) + \tau \Delta \omega(k)) \\&\quad - (m_2 (\Delta E'_q(k) + E'_q) + m_3 \cos(\delta(k))) \sin(\delta(k))\end{aligned}$$

$$\beta(x(k)) = \tau m_2 m_6 \sin(\delta(k) + \tau \Delta \omega(k))$$

Entonces, un observador para el sistema tiene la forma

$$z(k+1) = A_\tau z(k) + \tau B \{ \alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k) \} + \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)]$$

donde

$$K = \text{col} \begin{pmatrix} C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \end{pmatrix} = \text{col} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto la ganancia del observador está dada por

$$\tau \Delta_\theta^{-1} K = \text{col} \begin{pmatrix} 3\tau\theta & 3\tau\theta^2 & \tau\theta^3 \end{pmatrix}$$

### 3.8.4 Resultados de Simulación

Las simulaciones fueron realizadas considerando los valores nominales de los parámetros del generador mostrados en la tabla 3.2, todos dados en por unidad.

Además, el punto de equilibrio estable para el sistema (3.40), que se obtuvo para un voltaje de campo dado por  $E_{fd}^* = 1.1773$ , fue  $\delta^* = 0.870204$ ,  $\omega^* = 1$  y  $E_q'^* = 0.822213$ . Los parámetros que se utilizaron para el control y el observador fueron  $\mathcal{S}_1 = 5$ ,  $\mathcal{S}_2 = 2$ ,  $\mathcal{S}_3 = 2$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $\theta = 0.8$  y el tiempo de muestreo se escogió como  $\tau = 10$  ms.

Las simulaciones fueron implementadas con el esquema de control mediante modos deslizantes y el observador en tiempo discreto desarrollados previamente (ver secciones 3.7 y 3.4).

Las condiciones iniciales de las variables de estado del generador síncrono fueron  $\delta(0) = 0.77$ ,  $\omega(0) = 0.1$  y  $E_q'(0) = 0.85$ .

Los resultados de simulación para el modelo matemático del generador síncrono (3.40) bajo la acción de la ley de control (3.35) implementada mediante los estimados del observador (3.9) se muestran en las figuras 3.11 - 3.15.

En la figura 3.11 se observa el comportamiento de la posición angular ( $\delta$ ), la cual en este caso de estudio es la variable medible (salida) y la variable a controlar, y para esta se percibe una convergencia adecuada a su posición de equilibrio. Lo mismo podemos decir para las otras dos variables de estado (velocidad angular  $\omega$  y el voltaje interno  $E_q'$ )

Por otro lado, a fin de estudiar la robustez de la ley de control ante incertidumbre en los parámetros, variamos el par mecánico aplicado al generador (para un tiempo de 0 - 5 seg,  $T_m = 1$  y de 6 - 10 seg,  $T_m = 0.8m$ ). El comportamiento de las variables de estado ante este cambio en el par mecánico se observa de los 4.5 seg. en adelante, donde apartir de una posición de equilibrio las variables son perturbadas por el cambio en el par mecánico y ahora convergen a una nueva posición de equilibrio. Para la posición y la velocidad angular se aprecia, en las figuras correspondientes a su comportamiento, un error entre el estado y la estimación dada por el observador. Sin embargo en la figura 3.12 se muestra que este error en el caso de la posición angular se reduce en la medida que se aumenta el parámetro de diseño del observador (lo mismo puede decirse para la velocidad angular).

Finalmente, la ley de control utilizada en este estudio y aplicada al modelo matemático del generador síncrono se muestran en las figura 3.15

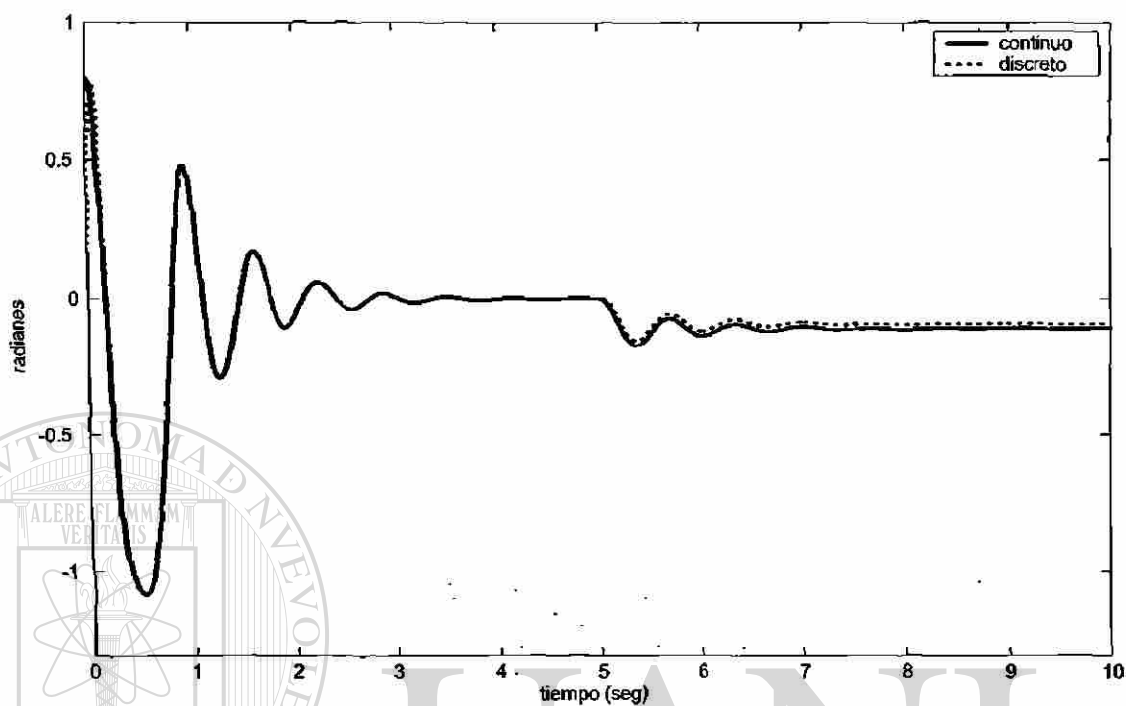


Figura 3.11: Posición angular

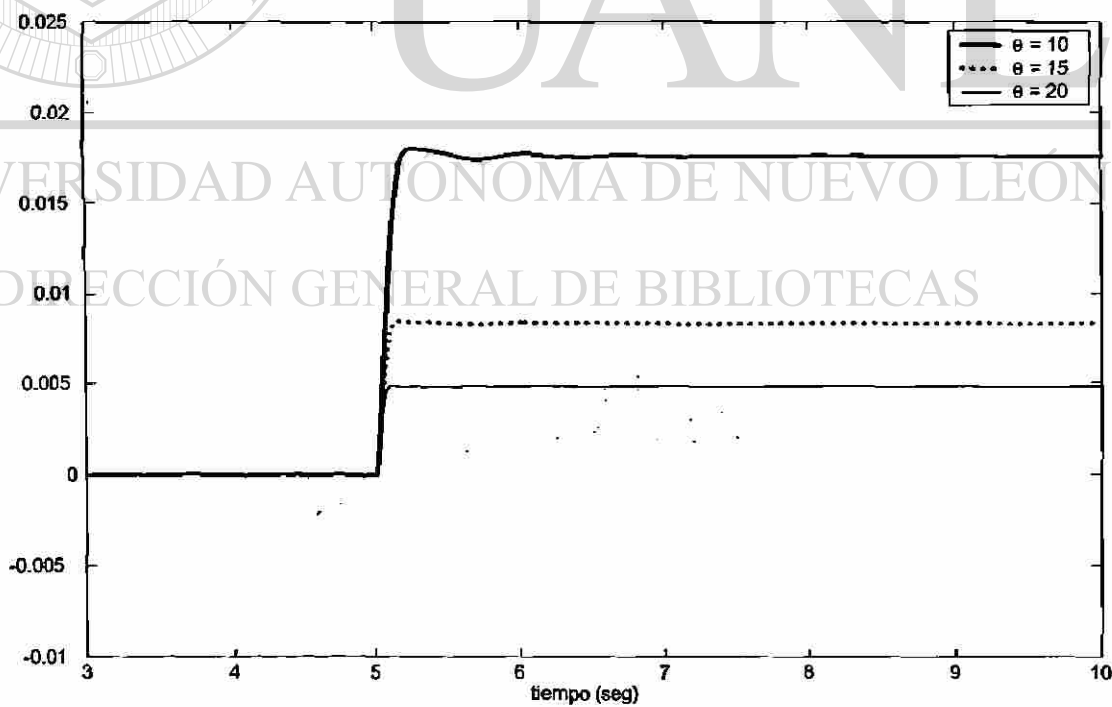


Figura 3.12: Error en la posición angular con diferentes ganancias en la estimación

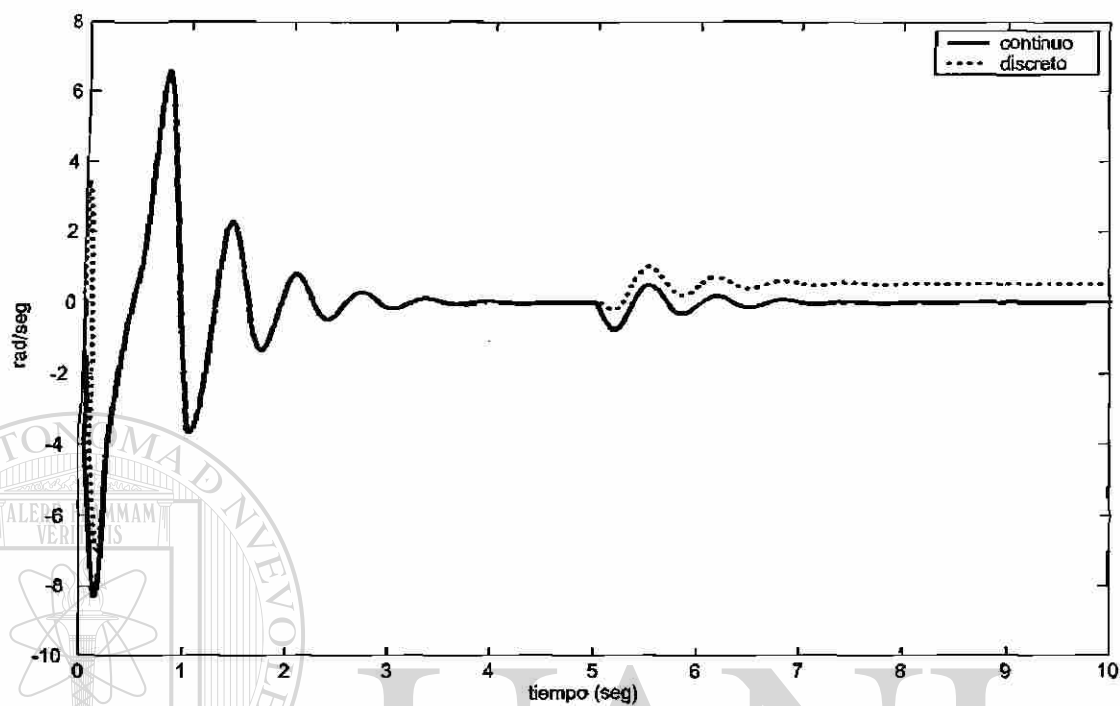


Figura 3.13: Velocidad angular

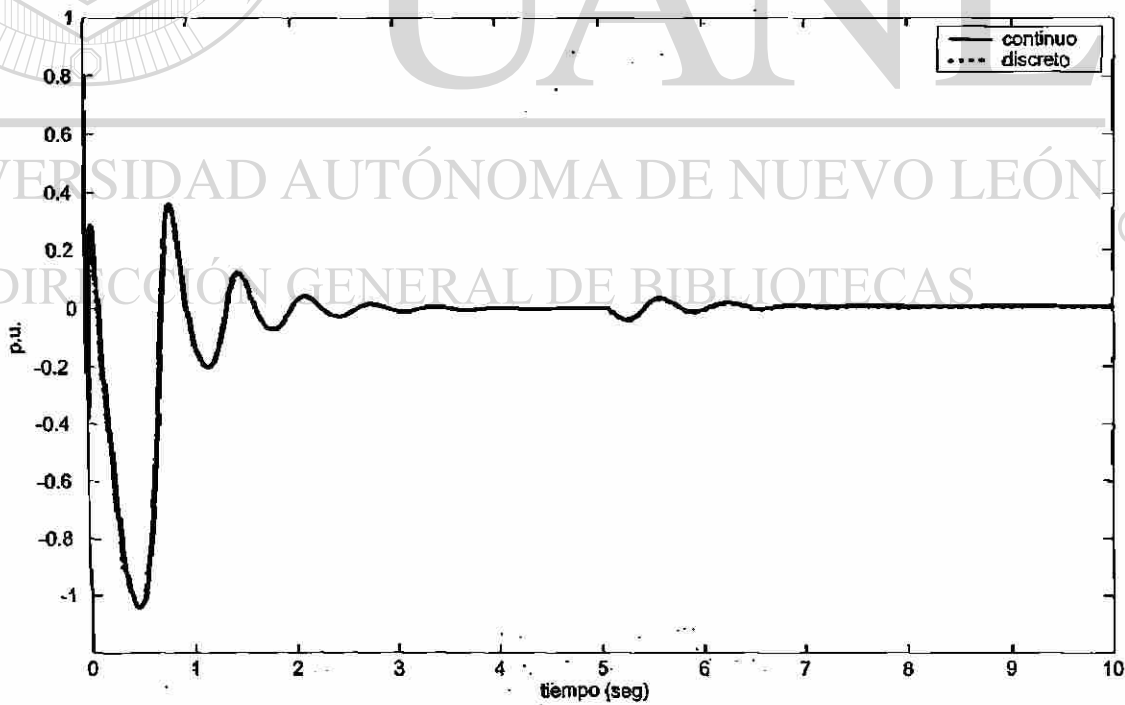


Figura 3.14: Voltaje transitorio en el eje de cuadratura

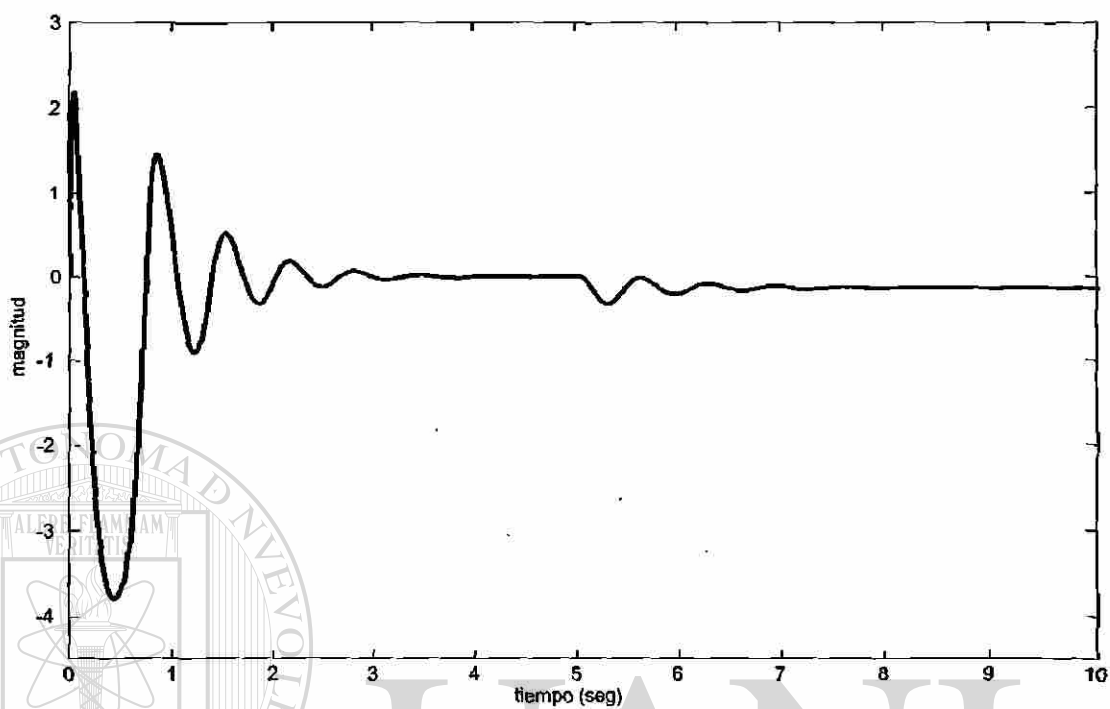


Figura 3.15: Ley de control basada en modos deslizantes

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### 3.9 Estimación Práctica

A continuación presentamos el último de los resultados, concerniente a la validez de algoritmos diseñados a partir de sistemas en tiempo discreto aproximados.

Es bien sabido que el método de discretización de Euler funciona correctamente para periodos de muestreo pequeños [43, 39]. Ahora se procede con un análisis para la clase de sistemas discretos aproximados (vía Euler). Considere un sistema continuo con la siguiente estructura

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\{\alpha(x(t)) + \beta(x(t))u(t)\}$$

de manera que la discretización exacta y la realizada mediante la discretización de Euler pueden ser expresadas como<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} x_{ex}(k+1) &= A_\tau x_{ex}(k) + \tau B\{\alpha(x_{ex}(k)) + \beta(x_{ex}(k))u(k)\} + \mathcal{O}(x_{ex}(k)) \\ &= \mathcal{F}_\tau^{exacto}(x_{ex}(k), u(k)) \\ x_{eu}(k+1) &= A_\tau x_{ex}(k) + \tau B\{\alpha(x_{ex}(k)) + \beta(x_{ex}(k))u(k)\} \\ &= \mathcal{F}_\tau^{aprox}(x_{ex}(k), u(k)) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{O}(x_{ex}(k))$  representa los términos de orden superior que se obtienen como resultado de la discretización.

Por otro lado, el observador discreto que fue objeto de estudio en este capítulo (3.9) [19] está dado por<sup>8</sup>

$$z(k+1) = A_\tau z(k) + \tau B\{\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)\} + \tau \Delta_\theta^{-1} K[y_{ex}(k) - \hat{y}(k)]$$

Ahora, definimos el error de la siguiente manera

$$\begin{aligned} e_{es}(k) &= z(k) - x_{ex}(k) && \text{error de estimación} \\ e_{ap}(k) &= x_{ex}(k) - x_{eu}(k) && \text{error de aproximación} \end{aligned} \quad (3.45)$$

con la hipótesis.

<sup>7</sup>En las secciones anteriores usamos por comodidad  $x(k)$  para denotar la discretización tipo Euler de  $x(t)$  (véase nota al pie de la página 31). Sin embargo, ahora por motivo del análisis comparativo que nos ocupa es que preferimos usar  $x_{eu}$

<sup>8</sup>De acuerdo con la notación adoptada en esta sección,  $z$  es el estimado de  $x_{ex}$ . Pues lo que nos interesa ahora es saber si el observador propuesto, basado en una discretización Euler, puede estimar bien los estados discretos *exactos*

**Hipótesis 3.5** La secuencia <sup>9</sup>  $\{e_{ap}(k+1)\}_{k \geq k_0}$  es acotada

Además definimos la dinámica del error de aproximación (3.45) de la siguiente forma

$$\bar{e}_{ap} = \sup_{k \geq k_0} \|e_{ap}(k+1)\|$$

### 3.9.1 Análisis para el Error de Estimación

La dinámica del error de estimación está dada por

$$\begin{aligned} e_{es}(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B\{\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)\} + \tau \Delta_\theta^{-1} K[y_{ex}(k) - \hat{y}(k)] \\ &\quad - \{A_\tau x_{ex}(k) + \tau B\{\alpha(x_{ex}(k)) + \beta(x_{ex}(k))u(k)\} + \mathcal{O}(x_{ex}(k))\} \\ &= A_\tau [z(k) - x_{ex}(k)] + \tau B\{\alpha(z(k)) - \alpha(x_{ex}(k)) + [\beta(z(k)) - \beta(x_{ex}(k))]u(k)\} \\ &\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} KC[x_{ex}(k) - z(k)] - \mathcal{O}(x_{ex}(k)) \\ &= \{A_\tau - \tau \Delta_\theta^{-1} KC\} e_{es}(k) + \tau B\{\alpha(z(k)) - \alpha(x_{ex}(k)) \\ &\quad + [\beta(z(k)) - \beta(x_{ex}(k))]u(k)\} - \mathcal{O}(x_{ex}(k)) \end{aligned}$$

note de hecho, que los términos de orden superior están dados por el error de aproximación

$$\begin{aligned} e_{ap}(k+1) &= A_\tau x_{ex}(k) + \tau B\{\alpha(x_{ex}(k)) + \beta(x_{ex}(k))u(k)\} + \mathcal{O}(x_{ex}(k)) \\ &\quad - \{A_\tau x_{ex}(k) + \tau B\{\alpha(x_{ex}(k)) + \beta(x_{ex}(k))u(k)\}\} \\ &= \mathcal{O}(x_{ex}(k)) \end{aligned} \tag{3.46}$$

entonces, la dinámica del error de estimación resulta ser de la forma

$$e_{es}(k+1) = \{A_\tau - \tau \Delta_\theta^{-1} KC\} e_{es}(k) + \tau B \Psi_o(e_{es}(k), u(k)) - e_{ap}(k+1)$$

donde  $\Psi_o(e_{es}(k), u(k)) = \alpha(z(k)) - \alpha(x_{ex}(k)) + [\beta(z(k)) - \beta(x_{ex}(k))]u(k)$

Ahora, definiendo el siguiente cambio de variable

$$\bar{e}_{es}(k) = \Delta_\theta e_{es}(k) \tag{3.47}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \bar{e}_{es}(k+1) &= \Delta_\theta e_{es}(k+1) \\ &= \Delta_\theta [\{A_\tau - \tau \Delta_\theta^{-1} KC\} \Delta_\theta^{-1} \bar{e}_{es}(k) + \tau B \Psi_o(\Delta_\theta^{-1} \bar{e}_{es}(k), u(k)) - e_{ap}(k+1)] \\ &= \Delta_\theta A_\tau \Delta_\theta^{-1} \bar{e}_{es}(k) - \tau KC \Delta_\theta^{-1} \bar{e}_{es}(k) + \tau \Delta_\theta B \Psi_o(\Delta_\theta^{-1} \bar{e}_{es}(k), u(k)) \\ &\quad - \Delta_\theta e_{ap}(k+1) \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Observe que en realidad el término  $e_{ap}(k+1)$  es una secuencia (véase (3.46))

de las propiedades de  $\Delta_\theta$  (B.4), se tiene

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_{es}(k+1) &= (I + \tau\theta A)\bar{e}_{es}(k) - \tau K\theta C\bar{e}_{es}(k) + \tau \frac{1}{\theta^n} B\Psi_o(\Delta_\theta^{-1}\bar{e}_{es}(k), u(k)) \\
 &\quad - \Delta_\theta e_{ap}(k+1) \\
 &= \{I + \gamma_o(A - KC)\}\bar{e}_{es}(k) + \frac{\tau}{\theta^n} B\Psi_o(\Delta_\theta^{-1}\bar{e}_{es}(k), u(k)) - \Delta_\theta e_{ap}(k+1) \\
 &= A_o\bar{e}_{es}(k) + \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2
 \end{aligned}$$

donde  $\gamma_o = \tau\theta$  (ver (3.14)),  $A_o = I + \gamma_o(A - KC)$  (ver (B.6)) y

$$h_1 = B\Psi_o(\Delta_\theta^{-1}\bar{e}_{es}(k), u(k)) \quad h_2 = -\Delta_\theta e_{ap}(k+1) \quad (3.48)$$

Considere la siguiente función de Lyapunov

$$V(\bar{e}_{es}(k)) = \bar{e}_{es}^T(k) P_o \bar{e}_{es}(k) \quad (3.49)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \Delta(V(\bar{e}_{es}(k))) &= \bar{e}_{es}^T(k+1) P_o \bar{e}_{es}(k+1) - \bar{e}_{es}^T(k) P_o \bar{e}_{es}(k) \\
 &= \left[ A_o \bar{e}_{es}(k) + \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right]^T P_o \left[ A_o \bar{e}_{es}(k) + \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right] - \bar{e}_{es}^T(k) P_o \bar{e}_{es}(k) \\
 &= \bar{e}_{es}^T(k) A_o^T P_o A_o \bar{e}_{es}(k) + \bar{e}_{es}^T(k) A_o^T P_o \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right) \\
 &\quad + \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right)^T P_o A_o \bar{e}_{es}(k) + \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right)^T P_o \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right) \\
 &\quad - \bar{e}_{es}^T(k) P_o \bar{e}_{es}(k) \\
 &= \bar{e}_{es}^T(k) \left[ A_o^T P_o A_o - P_o \right] \bar{e}_{es}(k) + 2\bar{e}_{es}^T(k) A_o^T P_o \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right) \\
 &\quad + \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right)^T P_o \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right)
 \end{aligned}$$

y a partir de la declaración 2 (véase anexo B) y las propiedades de  $\gamma_o$  (ver (3.16))

$$\begin{aligned}
 \Delta(V(\bar{e}_{es}(k))) &= \bar{e}_{es}^T(k) \left[ -\gamma_o P_o - \gamma_o(1 - \gamma_o)^n C^T C \right] \bar{e}_{es}(k) + 2\bar{e}_{es}^T(k) A_o^T P_o \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right) \\
 &\quad + \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right)^T P_o \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right) \\
 &\leq -\gamma_o \bar{e}_{es}^T(k) P_o \bar{e}_{es}(k) + 2\bar{e}_{es}^T(k) A_o^T P_o \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right) \\
 &\quad + \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right)^T P_o \left( \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right) \\
 &\leq -\gamma_o \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\|A_o \bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \left\| \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right\|_{P_o} + \left\| \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right\|_{P_o}^2
 \end{aligned}$$



Sin embargo, del resultado obtenido en (3.19) podemos reducir la expresión anterior

$$\begin{aligned}
\Delta(V(\bar{e}_{es}(k))) &\leq -\gamma_o \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \left\| \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right\|_{P_o} + \left\| \frac{\tau}{\theta^n} h_1 + h_2 \right\|_{P_o}^2 \\
&\leq -\gamma_o \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \left\| \frac{\tau}{\theta^n} h_1 \right\|_{P_o} + 2\|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \|h_2\|_{P_o} \\
&\quad + \left\| \frac{\tau}{\theta^n} h_1 \right\|_{P_o}^2 + 2 \left\| \frac{\tau}{\theta^n} h_1 \right\|_{P_o} \|h_2\|_{P_o} + \|h_2\|_{P_o}^2 \\
&= -\gamma_o \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\frac{\tau}{\theta^n} \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \|h_1\|_{P_o} + 2\|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \|h_2\|_{P_o} \\
&\quad + \frac{\tau^2}{\theta^{2n}} \|h_1\|_{P_o}^2 + 2\frac{\tau}{\theta^n} \|h_1\|_{P_o} \|h_2\|_{P_o} + \|h_2\|_{P_o}^2
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (3.48), resulta (para  $h_1$  véase (3.18) y para  $h_2$  ver hipótesis 3.5)

$$\begin{aligned}
\|h_1\|_{P_o} &= \|B\Psi_o(\Delta_\theta^{-1}\bar{e}_{es}(k), u(k))\|_{P_o} \leq b_1\theta^n \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \\
\|h_2\|_{P_o} &= \|\Delta_\theta e_{ap}(k+1)\|_{P_o} \leq \frac{1}{\theta} \|e_{ap}(k+1)\|_{P_o} \leq \frac{1}{\theta} b_3 \bar{e}_{ap} \leq b_3 \bar{e}_{ap}
\end{aligned}$$

donde  $b_3$  es una constante positiva

Lo anterior nos lleva a

$$\begin{aligned}
\Delta(V(\bar{e}_{es}(k))) &\leq -\gamma_o \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\frac{\tau}{\theta^n} \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} b_1 \theta^n \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} + 2\|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} b_3 \bar{e}_{ap} \\
&\quad + \frac{\tau^2}{\theta^{2n}} b_1^2 \theta^{2n} \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\frac{\tau}{\theta^n} b_1 \theta^n \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} b_3 \bar{e}_{ap} + b_3^2 \bar{e}_{ap}^2 \\
&= -\gamma_o \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\tau b_1 \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2b_3 \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \bar{e}_{ap} \\
&\quad + \tau^2 b_1^2 \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\tau b_1 b_3 \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \bar{e}_{ap} + b_3^2 \bar{e}_{ap}^2
\end{aligned}$$

Pero recordando la definición para  $\gamma_o$  (3.14), se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta(V(\bar{e}_{es}(k))) &\leq -\tau\theta \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\tau b_1 \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2b_3 \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \bar{e}_{ap} \\
&\quad + \tau^2 b_1^2 \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + 2\tau b_1 b_3 \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \bar{e}_{ap} + b_3^2 \bar{e}_{ap}^2 \\
&= -\tau(\theta - 2b_1 - \tau b_1^2) \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 + (2b_3 + 2\tau b_1 b_3) \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} \bar{e}_{ap} \\
&\quad + b_3^2 \bar{e}_{ap}^2
\end{aligned}$$

y recordando además que  $V(\bar{e}_{es}(k)) = \bar{e}_{es}^T(k) P_o \bar{e}_{es}(k)$  (3.49), entonces

$$V(\bar{e}_{es}(k)) = \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o}^2 \Rightarrow \|\bar{e}_{es}(k)\|_{P_o} = \sqrt{V(\bar{e}_{es}(k))}$$

de tal manera que

$$\Delta(V(\bar{e}_{es}(k))) \leq -\tau b_4 V(\bar{e}_{es}(k)) + \gamma_1 \sqrt{V(\bar{e}_{es}(k))} \bar{e}_{ap} + \gamma_2 \bar{e}_{ap}^2$$

donde  $b_4 = \theta - 2b_1 - \tau b_1^2$ ,  $\gamma_1 = 2b_3 + 2\tau b_1 b_3$  y  $\gamma_2 = b_3^2$ , resulta

$$\begin{aligned} V(\bar{e}_{es}(k+1)) - V(\bar{e}_{es}(k)) &\leq -\tau b_4 V(\bar{e}_{es}(k)) + \gamma_1 \sqrt{V(\bar{e}_{es}(k))} \bar{e}_{ap} + \gamma_2 \bar{e}_{ap}^2 \\ V(\bar{e}_{es}(k+1)) &\leq (1 - \tau b_4) V(\bar{e}_{es}(k)) + \gamma_1 \sqrt{V(\bar{e}_{es}(k))} \bar{e}_{ap} + \gamma_2 \bar{e}_{ap}^2 \end{aligned}$$

para esta última ecuación considere que existe  $r > 0$  tal que

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\gamma_1}{r} + \frac{\gamma_2}{r^2} < 1 - (1 - \tau b_4) \\ 0 &< \underbrace{\frac{\gamma_1}{r} + \frac{\gamma_2}{r^2} + (1 - \tau b_4)}_{\zeta} < 1 \end{aligned}$$

además, si  $V(\bar{e}_{es}(k)) > \tau^2 \bar{e}_{ap}^2$ , entonces

$$\begin{aligned} V(\bar{e}_{es}(k+1)) &\leq (1 - \tau b_4) V(\bar{e}_{es}(k)) + \gamma_1 \sqrt{V(\bar{e}_{es}(k))} \frac{\sqrt{V(\bar{e}_{es}(k))}}{r} + \gamma_2 \frac{V(\bar{e}_{es}(k))}{r^2} \\ &\leq (1 - \tau b_4) V(\bar{e}_{es}(k)) + \frac{\gamma_1}{r} V(\bar{e}_{es}(k)) + \frac{\gamma_2}{r^2} V(\bar{e}_{es}(k)) \\ &\leq \left(1 - \tau b_4 + \frac{\gamma_1}{r} + \frac{\gamma_2}{r^2}\right) V(\bar{e}_{es}(k)) \\ &\leq \zeta V(\bar{e}_{es}(k)) \end{aligned}$$

□

De lo que concluimos que el error de estimación (3.45) es acotado. Es decir, podemos esperar convergencia del observador propuesto en este capítulo (3.9), no solo para un sistema no lineal discretizado vía Euler, si no también, para los obtenidos mediante una discretización de orden superior o una discretización exacta.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

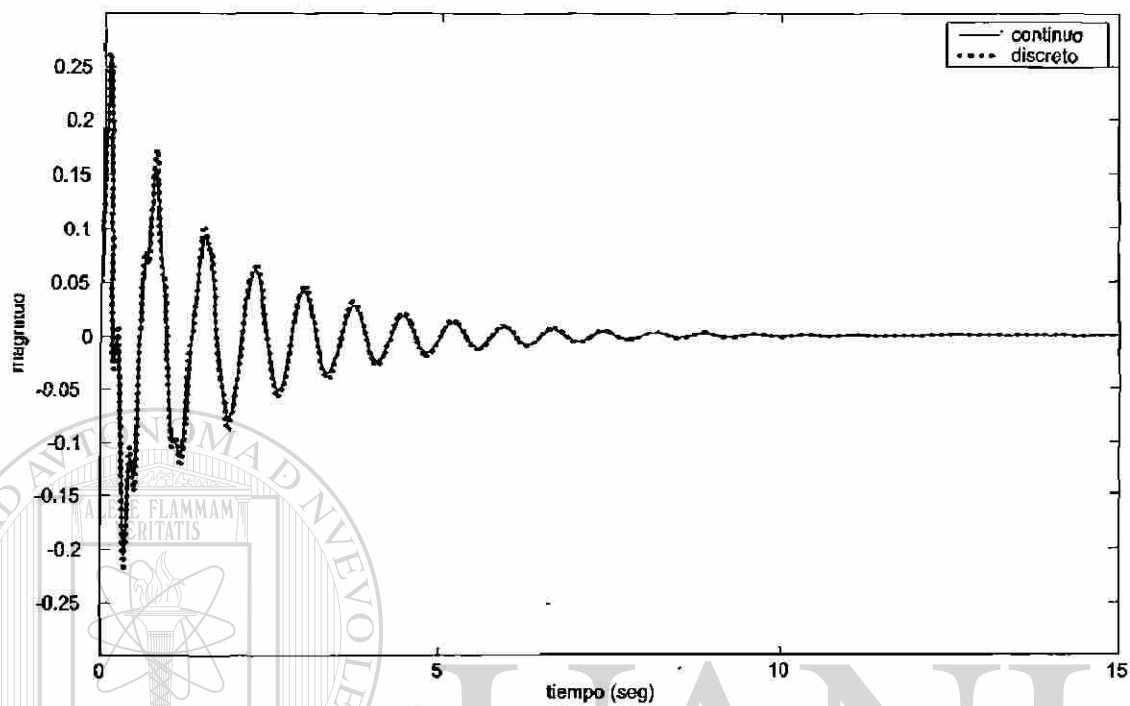


Figura 3.16: Desplazamiento del eslabón en lazo abierto con  $\tau = 1\text{ms}$

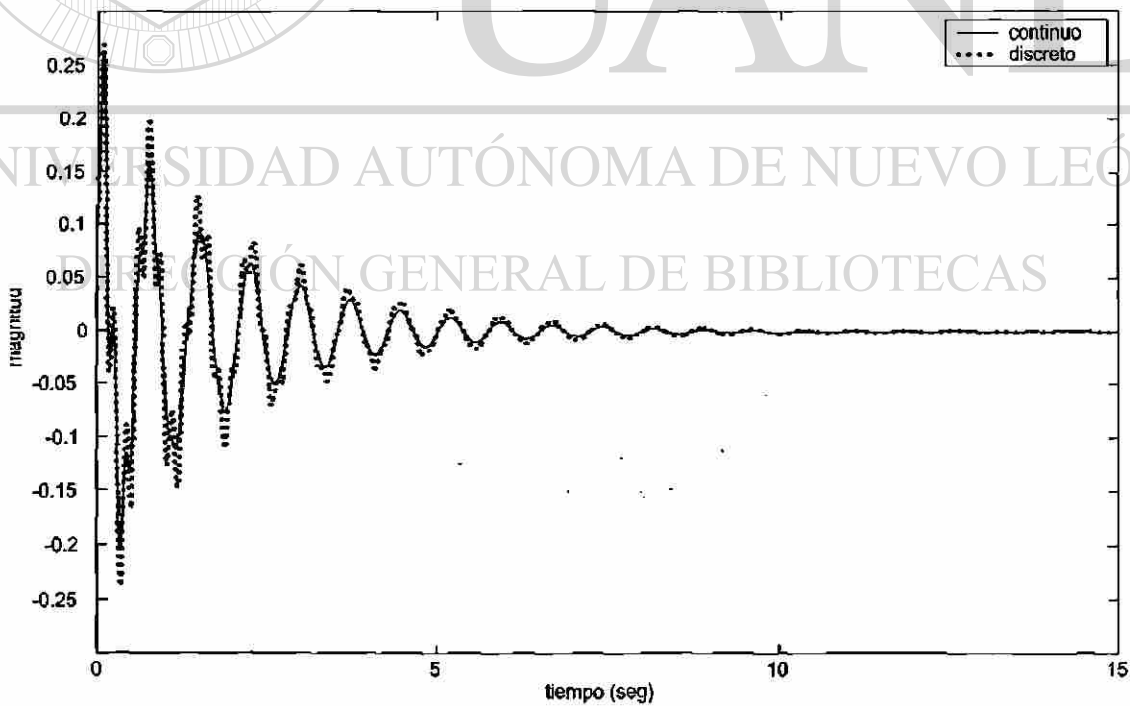


Figura 3.17: Desplazamiento del eslabón en lazo abierto con  $\tau = 2\text{ms}$

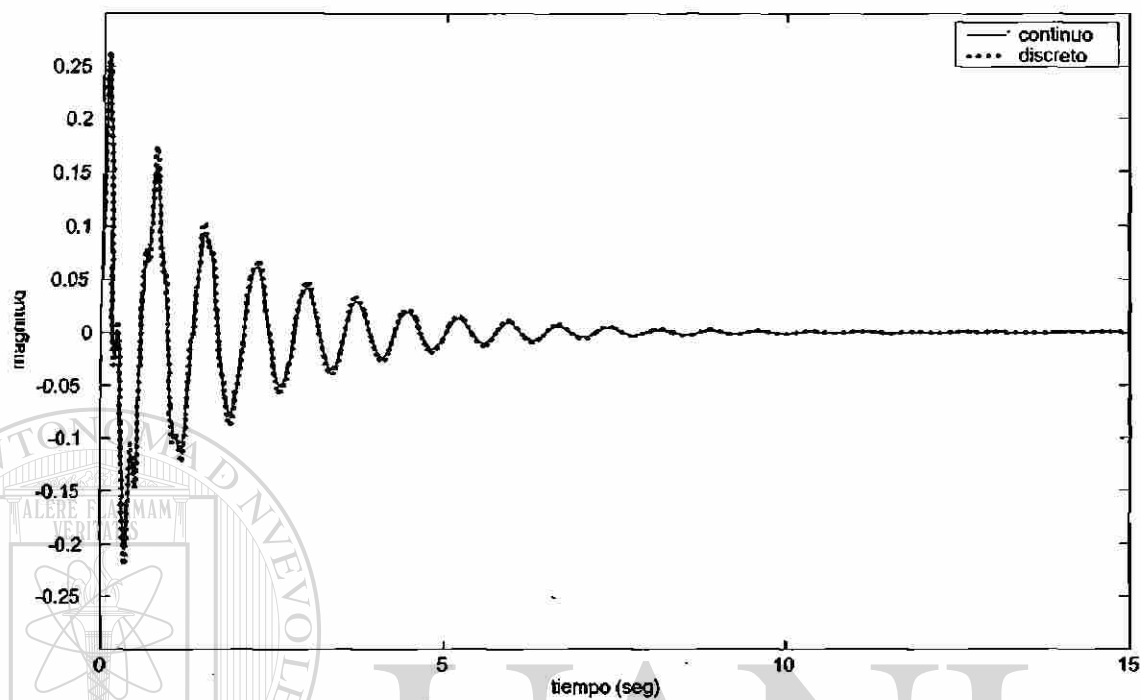


Figura 3.16: Desplazamiento del eslabón en lazo abierto con  $\tau = 1\text{ms}$

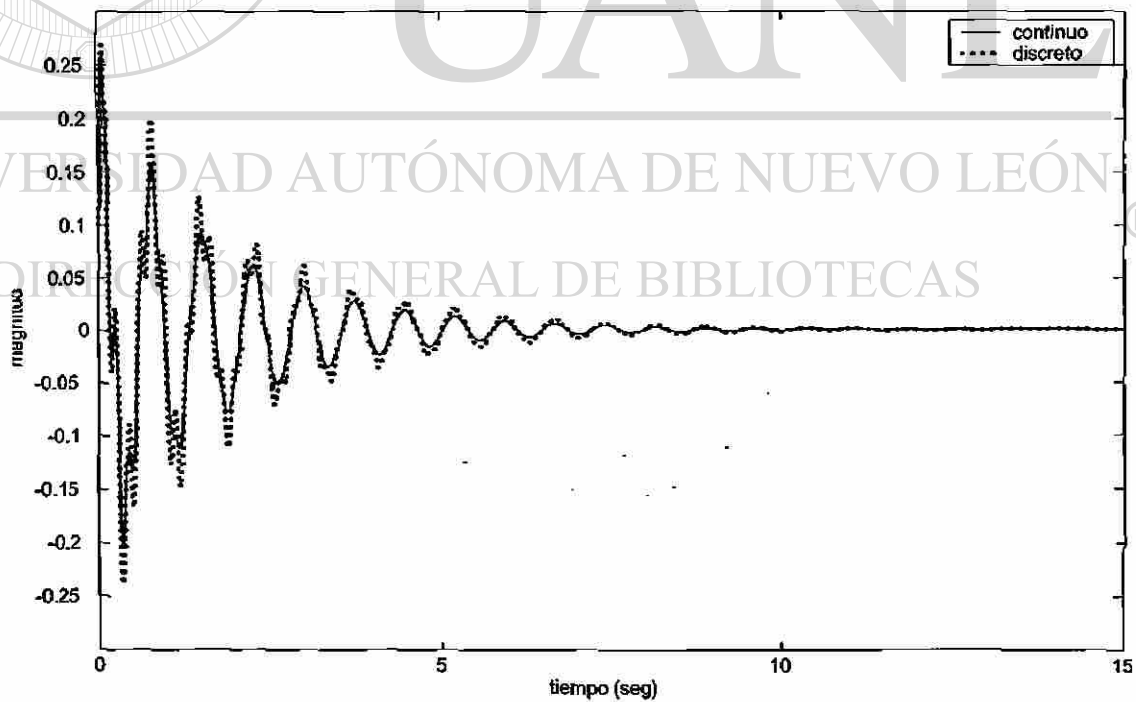


Figura 3.17: Desplazamiento del eslabón en lazo abierto con  $\tau = 2\text{ms}$

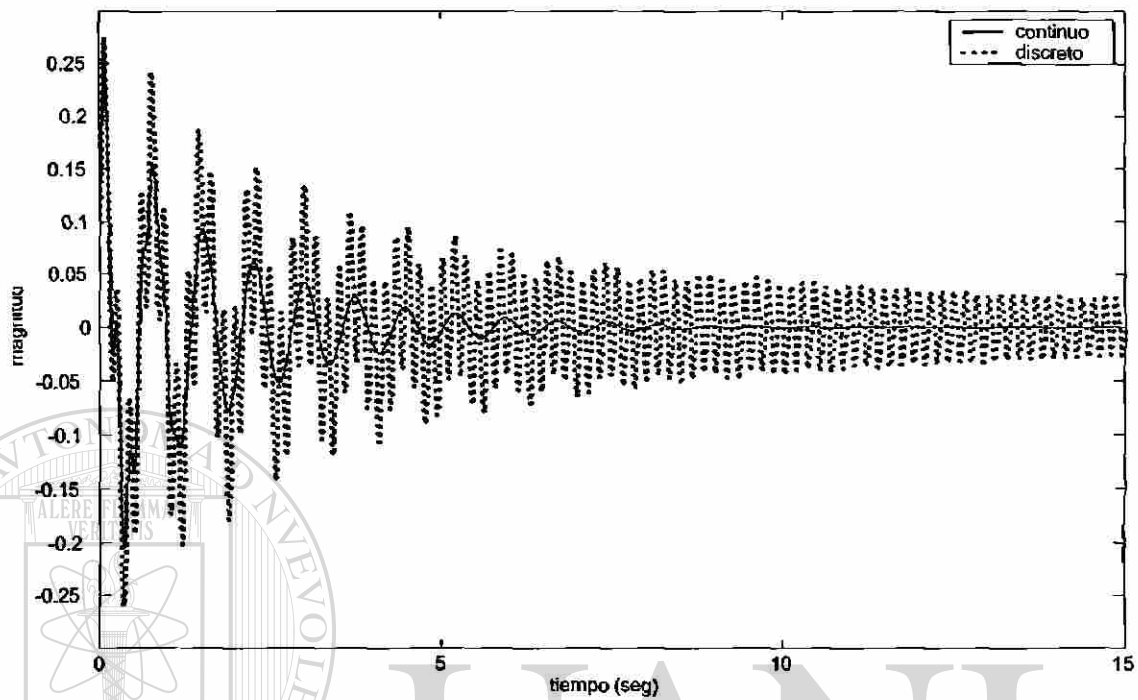


Figura 3.18: Desplazamiento del eslabón en lazo abierto con  $\tau = 3\text{ms}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### 3.10 Conclusiones

En este capítulo, se retomaron dos esquemas de control (mediante linealización por retroalimentación de estado y la técnica de modos deslizantes [1, 34]) que fueron aplicados a una clase de sistemas no lineales discretos aproximados (obtenidos vía Euler), mediante un observador con convergencia exponencial. Se mostró que cuando el esquema control-observador es aplicado al sistema no lineal, podemos esperar estabilidad exponencial. Las aplicaciones (brazo robot para el control linealizante y generador síncrono para el control en modos deslizantes) muestran el desempeño de los algoritmos propuestos. Los resultados vía simulación digital presentan un buen comportamiento, tanto en la estimación como en el control.

Finalmente, se presentó un análisis del observador propuesto, cuando el sistema no lineal discreto disponible es exacto (o de orden superior). Obteniéndose un error de estimación acotado para este caso. Lo que sugiere la convergencia del observador también para sistemas discretizados de esta manera.

Por otra parte, en ocasiones además de no tener a nuestra disposición los estados del sistema, tampoco se cuenta con los valores de ciertos parámetros. En el primer caso, es decir cuando los estados por alguna razón no medibles, el problema se resuelve mediante un observador, sin embargo cuando también queremos estimar o identificar algunos parámetros el algoritmo a utilizar se conoce como observador adaptable. Este tipo de algoritmos son muy empleados para propósitos de monitoreo o detección de fallas, y en el siguiente capítulo nos enfocamos en el estudio de un observador adaptable con el objeto de estimar de manera conjunta estados y parámetros para una clase de sistemas no lineales.

## Capítulo 4

# Observador Adaptable

### 4.1 Introducción

La identificación de parámetros ha sido un área extensamente estudiada en muchos aspectos durante las últimas décadas, incluyendo los sistemas no lineales, pero generalmente asumiendo un conocimiento total del vector de estados. Al mismo tiempo, el problema de la estimación estado para sistemas no lineales, ha atraído la atención de la comunidad de control, y para resolver este problema se han propuesto algunos resultados.

Cuando se trata el problema simultáneo de la estimación de las variables de estado y los parámetros de un sistema, el problema se torna más complicado, el resultado de esta combinación se conoce como observador adaptable, problema que también ha atraído la atención de los grupos de investigación en el área de control. El diseño de un observador adaptable está motivado por propósitos de detección de fallas, aislamiento, transmisión de señales y control adaptable entre otros. Dicho sencillamente, un observador adaptable es un algoritmo recursivo que permite la unión de la estimación del estado y de parámetros desconocidos en un sistema dinámico. Se han propuesto diferentes técnicas con este propósito. El diseño de un observador adaptable para sistemas lineales invariantes en el tiempo ha sido resuelto y analizado en detalle ([12, 26]). Recientemente, observadores adaptables para sistemas lineales con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) son presentados en [55]. En el caso de sistemas no lineales, se han propuesto algunas metodologías. Por ejemplo, métodos basados en transformaciones de coordenadas, tal que la dinámica del error de estimación pueda ser linealizada. Otros métodos consideran la existencia de alguna función de Lyapunov que satisfaga ciertas condiciones en particular, o consideran la existencia de un filtro de Kalman extendido para sistemas cuyo vector de estado está compuesto por el vector de estado del sistema a ser estimado y los parámetros desconocidos (ver [5, 6, 32]).

A este respecto, en los últimos años, ha crecido el interés en el estudio de sistemas con comportamiento difícil de predecir (complejos), para su aplicación en sistemas de comunicaciones. En particular, la sincronización y el control de sistemas caóticos son dos importantes tópicos en el estudio de sistemas complejos.

Debido a esto, la sincronización de sistemas caóticos y su potencial aplicación para

una comunicación segura, han sido temas que cada vez llaman más la atención de los investigadores. Con relación a la sincronización, una de las técnicas usada en los sistemas de comunicaciones consta de un transmisor, el cual envía una señal con la información que se desea transmitir, y un receptor, el cual intenta recuperar completamente la señal enviada por el transmisor. Sin embargo, si la señal recibida no es igual a la señal transmitida, entonces es necesario construir un sistema dinámico que permita recuperar la señal deseada.

Desde el punto de vista de la teoría de control, el problema de sincronización puede ser resuelto mediante un observador. Existen algunos trabajos relacionados con este problema, que ilustran las ventajas que presenta incorporar el estudio de la teoría de caos a los sistemas de comunicación utilizando sistemas caóticos. A este respecto, se han desarrollado algunas técnicas para reconstruir las señales de información a partir de una señal caótica transmitida  $y_r$ .

Además, la solución del problema de observación (problema de sincronización) está relacionado a la propiedad de observabilidad la cual nos dice que la salida del sistema (señal transmitida) contiene toda la información necesaria para reconstruir los estados del sistema. Si esta propiedad se mantiene, esto implica la existencia de un observador. Este observador (sistema receptor) se construye como una copia del sistema (sistema transmisor) con condiciones iniciales desconocidas, junto con un término adicional que depende de la diferencia entre la salida del sistema (señal recibida) y la salida del observador (señal recibida estimada).

En este capítulo presentamos la implementación de un observador adaptable, con el objetivo de estimar tanto los estados y los parámetros de un sistema dinámico, al mismo tiempo. Como aplicación de este observador, consideramos inicialmente el atractor caótico de Lorenz, con el objetivo de ilustrar un esquema de comunicación segura. Y concluimos con la implementación del observador al modelo del generador síncrono, para propósitos de monitoreo.



## 4.2 Resultados Previos e Interpretación Propuesta

### 4.2.1 Observador Adaptable Exponencial para Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo.

A continuación recordemos algunos resultados básicos de [55] sobre el diseño de observadores adaptables para sistemas lineales variantes en el tiempo, definidos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\theta \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $x, u, y$  denotan como de costumbre el estado, la entrada y el vector de salida medible respectivamente, y  $\theta$  un vector de parámetros desconocidos.  $A, B, C, \Phi$  se asume que son matrices conocidas de dimensiones apropiadas, continuas y uniformemente acotadas con respecto al tiempo.

El resultado principal de [55] considera que las siguientes hipótesis se satisfacen.

**Hipótesis 4.1** *Existe una matriz  $K(t)$  variante en el tiempo y acotada tal que el sistema  $\dot{\eta}(t) = (A(t) - K(t)C(t))\eta(t)$  es exponencialmente estable.*

**Hipótesis 4.2** *La solución  $\Lambda(t)$  del sistema  $\dot{\Lambda}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Lambda(t) + \Phi(t)$  es excitada persistentemente (persistently exciting), es decir existen  $\alpha, \beta, T$  tales que*

$$\alpha I \leq \int_t^{t+T} \Lambda(\tau)^T C^T(\tau) \Sigma(\tau) C(\tau) \Lambda(\tau) d\tau \leq \beta I\tag{4.2}$$

para alguna matriz  $\Sigma$  definida positiva.

Así, el sistema (4.3) mostrado a continuación, es un observador exponencial para el sistema (4.1), en el sentido de que para cualquier conjunto de condiciones iniciales, los vectores  $\hat{x}(t) - x(t)$  y  $\hat{\theta}(t) - \theta$  decaen exponencialmente a cero

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\Lambda(t) + \Phi(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\hat{\theta}(t) \\ &\quad + [K(t) + \Lambda(t)\Gamma\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)] [y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= \Gamma\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t) [y(t) - C(t)\hat{x}(t)]\end{aligned}\tag{4.3}$$

Aprovechando el algoritmo de mínimos cuadrados, una ley adaptable para el parámetro de ganancia  $\Gamma$  del observador anterior puede ser dada como sigue (ver [54]) .

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t)\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)C(t)\Lambda(t)\Gamma(t) + \lambda\Gamma(t) \quad (4.4)$$

para  $\lambda > 0$ .

Nuestro propósito aquí es discutir tal diseño a la luz de los resultados disponibles para sistemas afines en el estado [5, 20].

#### 4.2.2 Observador de Estado para Sistemas Afines en el Estado

De manera similar al repaso sobre observadores adaptables para sistemas lineales variantes en el tiempo [54], ahora retomamos los trabajos sobre observadores de estado para sistemas afines en el estado.

Consideremos la clase de sistemas afines en el estado [20] descritos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(u, y)x + \varphi(u, y) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde los componentes de la matriz  $A(u, y)$  y el vector  $\varphi(u, y)$  son funciones continuas que dependen de  $u$  e  $y$ , y que están uniformemente acotadas.

El resultado es como sigue

Si la entrada es persistentemente acotada, en el sentido de que existen  $\alpha, \beta$  y  $T$  tales que:

$$\alpha I \leq \int_t^{t+T} \Psi_u(t, \tau)^T C^T \Sigma(\tau) C \Psi_u(t, \tau) d\tau \leq \beta I, \quad (4.6)$$

donde  $\Psi_u$  denota la matriz de transición del sistema  $\dot{x} = A(u, y)x$ ,  $y = Cx$ , y  $\Sigma$  una matriz definida positiva y acotada.

Entonces, un observador exponencial para el sistema (4.5) está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(u, y)\hat{x} + \varphi(u, y) + S^{-1}C^T\Sigma(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $S$  es la solución de la ecuación:

$$\dot{S} = -\rho S - A(u, y)^T S - SA(u, y) + C^T \Sigma C \quad S(0) > 0 \quad (4.8)$$

para alguna constante positiva  $\rho$  suficientemente grande.

Definiendo el error de estimación como  $e = \hat{x} - x$ , la dinámica del error resulta en

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= A(u, y)\hat{x} + \varphi(u, y) + S^{-1}C^T\Sigma(y - C\hat{x}) - \{A(u, y)x + \varphi(u, y)\} \\ &= \{A(u, y) - S^{-1}C^T\Sigma C\} e\end{aligned}\quad (4.9)$$

si (4.6) podemos considerar la siguiente función de Lyapunov  $V(e) = e^T S e$ , de tal forma que

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= [\{A(u, y) - S^{-1}C^T\Sigma C\} e]^T S e + e^T [-\rho S - A(u, y)^T S - S A(u, y) + C^T\Sigma C] e \\ &\quad + e^T S [\{A(u, y) - S^{-1}C^T\Sigma C\} e] \\ &= e^T A(u, y)^T S e - e^T C^T \Sigma^T C S^{-1} S e - \rho e^T S e - e^T A(u, y)^T S e - e^T S A(u, y) e \\ &\quad + e^T C^T \Sigma C e + e^T S A(u, y) - e^T S S^{-1} C^T \Sigma C e \\ &= -e^T C^T \Sigma^T C e - \rho e^T S e \\ &\leq -\rho e^T S e \\ &\leq -\rho V(e)\end{aligned}$$

de lo que se concluye que el error de estimación decae exponencialmente.

### 4.3 Observador Adaptable para sistemas afines en el estado en el estado y en los parámetros

Ahora, se presenta el resultado principal de este capítulo, un observador adaptable para un sistema afín en el estado y que depende de un vector con parámetros desconocidos, el modelo matemático para esta clase de sistemas puede ser dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(u, y)x + \varphi(u, y) + \Phi(u, y)\theta \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (4.10)$$

donde  $\Phi$  satisface las propiedades dadas anteriormente para  $A, \varphi$ .

**Teorema 4.1** *Suponiendo que la condición de excitación persistente (4.6) para la estimación del estado, y además de (4.2)  $K = S^{-1}C^T$  y  $S$  como en (4.8) para la estimación*

de parámetros, el observador adaptable propuesto está dado de la siguiente manera ( $S_\theta$  corresponde a  $\Gamma^{-1}$  en (4.4))

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(u, y)\hat{x} + \varphi(u, y) + \Phi(u, y)\hat{\theta} + \{\Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T \\ &\quad + S_x^{-1}C^T \Sigma\} (y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T \Sigma (y - C\hat{x}) \quad (4.12)$$

$$\dot{\Lambda} = \{A(u, y) - S_x^{-1}C^T \Sigma C\} \Lambda + \Phi(u, y) \quad (4.13)$$

$$\dot{S}_x = -\rho_x S_x - A(u, y)^T S_x - S_x A(u, y) + C^T \Sigma C, \quad S_x(0) > 0 \quad (4.14)$$

$$\dot{S}_\theta = -\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda, \quad S_\theta(0) > 0 \quad (4.15)$$

donde  $\rho_x, \rho_\theta$  y son constantes positivas suficientemente grandes (y  $\Sigma$  como (4.2)).

### Prueba

Con los errores para el vector de estado y de parámetros definidos de la siguiente manera  $e_x := \hat{x} - x$  y  $e_\theta := \hat{\theta} - \theta$ , la dinámica para el error de estado está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A(u, y)\hat{x} + \varphi(u, y) + \Phi(u, y)\hat{\theta} + \{\Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T + S_x^{-1}C^T\} \Sigma (y - C\hat{x}) \\ &\quad - A(u, y)x - \varphi(u, y) - \Phi(u, y)\theta \\ &= A(u, y)\{\hat{x} - x\} + \Phi(u, y)\{\hat{\theta} - \theta\} + \{\Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T + S_x^{-1}C^T\} \Sigma C (x - \hat{x}) \\ &= [A(u, y) - \{\Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T + S_x^{-1}C^T\} \Sigma C] e_x + \Phi(u, y)e_\theta \end{aligned}$$

para el error en la estimación de parámetros

$$\begin{aligned} \dot{e}_\theta &= \dot{\hat{\theta}} - \dot{\theta} \\ &= S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T \Sigma (y - C\hat{x}) - 0 \\ &= -S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T \Sigma C e_x \end{aligned}$$

siguiendo la misma idea de [55], la transformación siguiente

$$\epsilon_x = e_x - \Lambda e_\theta \quad (4.16)$$

nos lleva a

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \dot{e}_x - \dot{\Lambda} e_\theta - \Lambda \dot{e}_\theta \\ &= [A(u, y) - \{\Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T + S_x^{-1}C^T\} \Sigma C] e_x + \Phi(u, y)e_\theta \\ &\quad - (\{A(u, y) - S_x^{-1}C^T \Sigma C\} \Lambda + \Phi(u, y)) e_\theta - \Lambda (-S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T \Sigma C e_x) \\ &= A(u, y)e_x - S_x^{-1}C^T \Sigma C e_x - A(u, y)\Lambda e_\theta + S_x^{-1}C^T \Sigma C \Lambda e_\theta \\ &= [A(u, y) - S_x^{-1}C^T \Sigma C] e_x \end{aligned} \quad (4.17)$$

la dinámica de  $\epsilon_\theta$  en términos del cambio de variable antes definido es

$$\dot{\epsilon}_\theta = -S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \quad (4.18)$$

Ahora, bajo la condición de excitación persistente antes considerada (4.6), con  $S_x$  y  $S_\theta$  matrices definidas positivas [5], seleccionamos la siguiente función de Lyapunov

$$V(\epsilon_x, \epsilon_\theta) = \epsilon_x^T S_x \epsilon_x + \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta$$

Entonces, la derivada de  $V$  está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= [(A(u, y) - S_x^{-1} C^T \Sigma C) \epsilon_x]^T S_x \epsilon_x + \epsilon_x^T [-\rho_x S_x - A(u, y)^T S_x - S_x A(u, y) \\ &\quad + C^T \Sigma C] \epsilon_x + \epsilon_x^T S_x [(A(u, y) - S_x^{-1} C^T \Sigma C) \epsilon_x] + [-S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta)]^T \\ &\quad S_\theta \epsilon_\theta + \epsilon_\theta^T [-\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda] \epsilon_\theta + \epsilon_\theta^T S_\theta [-S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta)] \\ &= \epsilon_x^T A(u, y)^T S_x \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T \Sigma C S_x^{-1} S_x \epsilon_x - \rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \epsilon_x^T A(u, y)^T S_x \epsilon_x \\ &\quad - \epsilon_x^T S_x A(u, y) \epsilon_x + \epsilon_x^T C^T \Sigma C \epsilon_x + \epsilon_x^T S_x A(u, y) \epsilon_x - \epsilon_x^T S_x S_x^{-1} C^T \Sigma C \epsilon_x \\ &\quad - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \Lambda S_\theta^{-1} S_\theta \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda S_\theta^{-1} S_\theta \epsilon_\theta - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta \\ &\quad + \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T S_\theta S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_\theta^T S_\theta S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta \\ &= -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta \\ &\quad - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta \end{aligned}$$

además, de la transformación (4.16) se tiene

$$\begin{aligned} -\epsilon_x^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta &= -\epsilon_x^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \\ -\epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta &= -\epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \end{aligned}$$

lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} -\epsilon_x^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) &\equiv -(\epsilon_x^T C^T \Sigma C + \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C) (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \\ &= -(\epsilon_x^T + \epsilon_\theta^T \Lambda^T) C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \\ &= -(\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta)^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

así, para la dinámica de la función de Lyapunov se sigue que

$$\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta$$

Finalmente resulta

$$\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho V(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \quad \text{para } \rho = \min(\rho_x, \rho_\theta) \quad (4.19)$$

lo cual implica la estabilidad exponencial del error de estimación.  $\square$

### 4.3.1 Discusión del Observador Extendido

En vista de la forma considerada para el sistema (4.10), es claro que el vector de estado extendido, considerando ahora el vector de parámetros constantes  $\theta$ , adquiere la forma  $X := \begin{pmatrix} x & \theta \end{pmatrix}^T$ , y como se observa a continuación, la estructura afín en el estado se preserva

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{pmatrix} A(u, y) & \Phi(u, y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \varphi(u, y) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= F(u, y)X + G(u, y) \\ y &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} X = HX \end{aligned} \quad (4.20)$$

Obviamente, si la condición (4.6) se satisface también para el sistema extendido, entonces podemos diseñar un observador de la forma (4.7) para  $X$ ,

Por lo tanto, nos concentramos en mostrar que el observador (4.11)-(4.15) se comporta como el observador (4.7) para el sistema (4.20).

**Lema 4.1** *El diseño del observador adaptable (4.11)-(4.15) para el sistema (4.10) coincide con el observador (4.7) para el sistema (4.20) con  $\rho_x = \rho_\theta$ .*

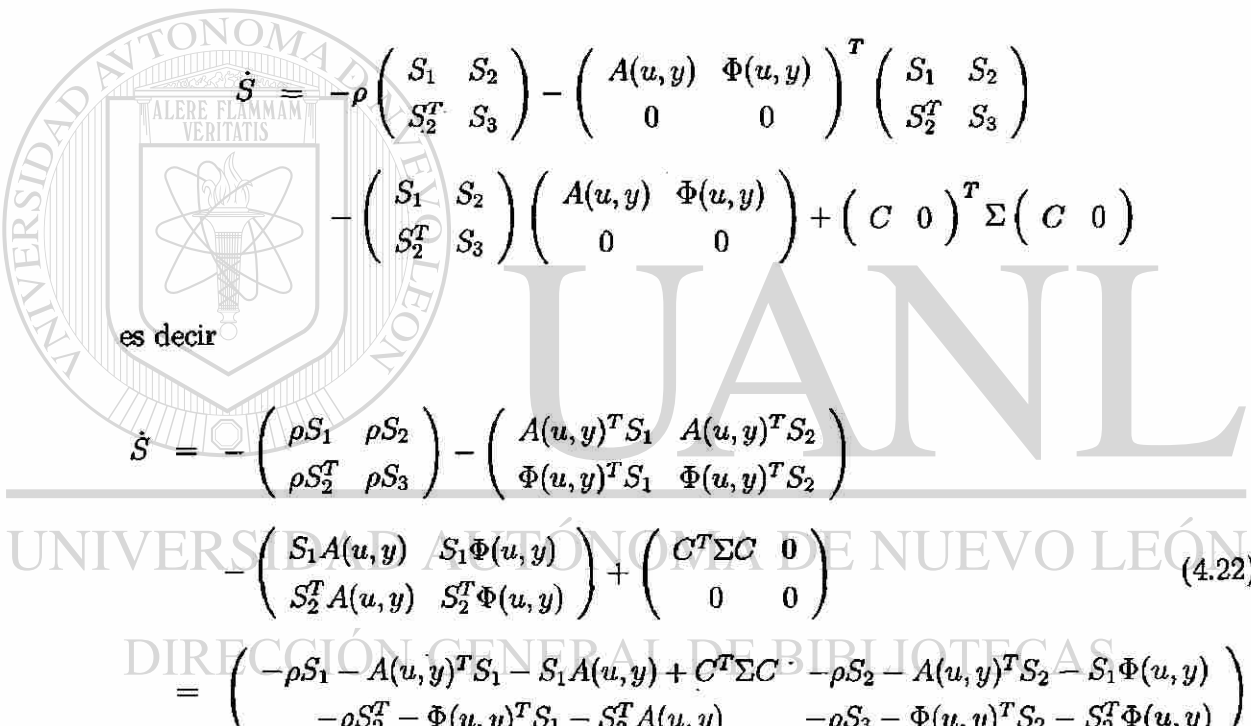
#### Prueba

Sea  $S$  la solución de la ecuación de Riccati (4.8) para el sistema extendido (4.20), dada por la siguiente forma  $\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix}$  correspondiente al vector extendido  $X$ , donde las matrices cuentan con las dimensiones apropiadas (digamos  $S_1$  tiene la misma dimensión de  $A$ ).

A continuación, mostramos que las matrices  $S_x, S_\theta$  y  $\Lambda$  correspondientes a (4.13)-(4.15) están relacionadas con la matriz  $S$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S_x &= S_1 \\ S_\theta &= S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2 \\ \Lambda &= -S_1^{-1} S_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

De (4.8) y (4.20), se tiene



es decir

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\rho \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A(u, y) & \Phi(u, y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u, y) & \Phi(u, y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \Sigma \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \\ \dot{S} &= - \begin{pmatrix} \rho S_1 & \rho S_2 \\ \rho S_2^T & \rho S_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A(u, y)^T S_1 & A(u, y)^T S_2 \\ \Phi(u, y)^T S_1 & \Phi(u, y)^T S_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} S_1 A(u, y) & S_1 \Phi(u, y) \\ S_2^T A(u, y) & S_2^T \Phi(u, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C^T \Sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.22) \\ &= \begin{pmatrix} -\rho S_1 - A(u, y)^T S_1 - S_1 A(u, y) + C^T \Sigma C & -\rho S_2 - A(u, y)^T S_2 - S_1 \Phi(u, y) \\ -\rho S_2^T - \Phi(u, y)^T S_1 - S_2^T A(u, y) & -\rho S_3 - \Phi(u, y)^T S_2 - S_2^T \Phi(u, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\dot{S}_1 = -\rho S_1 - A(u, y)^T S_1 - S_1 A(u, y) + C^T \Sigma C \quad (4.23)$$

$$\dot{S}_2 = -\rho S_2 - A(u, y)^T S_2 - S_1 \Phi(u, y) \quad (4.24)$$

$$\dot{S}_3 = -\rho S_3 - \Phi(u, y)^T S_2 - S_2^T \Phi(u, y) \quad (4.25)$$

claramente de (4.23),  $S_1$  satisface la ecuación (4.8) si  $S_1 = S_x$  (cuando  $\rho_x = \rho$ ).

Por otro lado, usando (4.23) y (4.24), se tiene<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(-S_1^{-1}S_2) &= -\left\{\frac{d}{dt}(S_1^{-1})S_2 + S_1^{-1}\frac{d}{dt}(S_2)\right\} \\
&= -\left\{\left[-S_1^{-1}\frac{d}{dt}(S_1)S_1^{-1}\right]S_2 + S_1^{-1}\frac{d}{dt}(S_2)\right\} \\
&= S_1^{-1}\left[-\rho S_1 - A(u, y)^T S_1 - S_1 A(u, y) + C^T \Sigma C\right]S_1^{-1}S_2 \\
&\quad -S_1^{-1}\left[-\rho S_2 - A(u, y)^T S_2 - S_1 \Phi(u, y)\right] \\
&= -\rho S_1^{-1}S_1 S_1^{-1}S_2 - S_1^{-1}A(u, y)^T S_1 S_1^{-1}S_2 - S_1^{-1}S_1 A(u, y)S_1^{-1}S_2 \\
&\quad + S_1^{-1}C^T \Sigma C S_1^{-1}S_2 + \rho S_1^{-1}S_2 + S_1^{-1}A(u, y)^T S_2 + S_1^{-1}S_1 \Phi(u, y) \\
&= -A(u, y)S_1^{-1}S_2 + S_1^{-1}C^T \Sigma C S_1^{-1}S_2 + \Phi(u, y) \\
&= [A(u, y) - S_1^{-1}C^T \Sigma C] \{-S_1^{-1}S_2\} + \Phi(u, y)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

si denotamos  $\Lambda = -S_1^{-1}S_2$  (y puesto que  $S_1 = S_x$ ), la expresión anterior se puede expresar como (ver (4.13))

$$\frac{d}{dt}(\Lambda) = [A(u, y) - S_1^{-1}C^T \Sigma C] \Lambda + \Phi(u, y)$$

Finalmente, mostramos la segunda equivalencia dada en (4.21), de (4.23)-(4.25) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(S_3 - S_2^T S_1^{-1}S_2) &= \frac{d}{dt}(S_3) - \frac{d}{dt}(S_2^T S_1^{-1}S_2) \\
&= \frac{d}{dt}(S_3) - \left\{\frac{d}{dt}(S_2^T)S_1^{-1}S_2 + S_2^T \frac{d}{dt}(S_1^{-1}S_2)\right\}
\end{aligned}$$

para  $\frac{d}{dt}(S_3)$  ver el elemento  $\dot{S}_{22}$  en (4.22), para  $\frac{d}{dt}(S_2^T)$  el elemento  $\dot{S}_{21}$  y para  $\frac{d}{dt}(S_1^{-1}S_2)$  la deducción anterior (véase (4.26)).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(S_3 - S_2^T S_1^{-1}S_2) &= -\rho S_3 - \Phi^T(u, y)S_2 - S_2^T \Phi(u, y) \\
&\quad - [-\rho S_2^T - \Phi(u, y)^T S_1 - S_2^T A(u, y)] S_1^{-1}S_2 \\
&\quad - S_2^T ([A(u, y) - S_1^{-1}C^T \Sigma C] S_1^{-1}S_2 - \Phi(u, y))
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Véase anexo C, para la deducción de la derivada que utilizamos a continuación.



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) &= -\rho S_3 - \Phi^T(u, y) S_2 - S_2^T \Phi(u, y) \\
&\quad + \rho S_2^T S_1^{-1} S_2 + \Phi(u, y)^T S_1 S_1^{-1} S_2 + S_2^T A(u, y) S_1^{-1} S_2 \\
&\quad - S_2^T A(u, y) S_1^{-1} S_2 + S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma C S_1^{-1} S_2 + S_2^T \Phi(u, y) \\
&= -\rho S_3 + \rho S_2^T S_1^{-1} S_2 + S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma C S_1^{-1} S_2 \\
&= -\rho (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) + S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma C S_1^{-1} S_2
\end{aligned}$$

puesto que  $\Lambda = -S_1^{-1} S_2$ , entonces  $\Lambda^T = -S_2^T S_1^{-1}$  (recuerde que  $S_1$  es simétrica), por lo tanto

$$\frac{d}{dt} (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) = -\rho (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda$$

si denotamos  $S_\theta = S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2$  se tiene

$$\frac{d}{dt} (S_\theta) = -\rho S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda$$

lo cual coincide con la ecuación (4.15) para  $\rho_\theta = \rho$ .

Concluimos este análisis, con la ganancia del observador (4.7) dada por  $S^{-1} H^T \Sigma$  (con  $H$  como en (4.20)), así se tiene<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
S^{-1} H^T \Sigma &= \begin{pmatrix} S_1^{-1} \left( I - S_2 (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \right) & * \\ (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \Sigma \\
&= \begin{pmatrix} S_1^{-1} \left( I - S_2 (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \right) C^T \Sigma \\ (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

consideremos inicialmente el término  $(S^{-1} H^T \Sigma)_{11}$ , en función de (4.21)

$$\begin{aligned}
S_1^{-1} \left( I - S_2 (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \right) C^T \Sigma &= S_1^{-1} \left( I - S_2 (-\{S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2\})^{-1} \right. \\
&\quad \left. S_2^T S_1^{-1} \right) C^T \Sigma \\
&= S_1^{-1} \left( I + S_2 (-\{S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2\})^{-1} \right. \\
&\quad \left. [-S_2^T S_1^{-1}] \right) C^T \Sigma \\
&= S_1^{-1} \left( I + S_2 (-S_\theta)^{-1} \Lambda^T \right) C^T \Sigma
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>véase anexo C, para la deducción de  $S^{-1}$

$$\begin{aligned}
S_1^{-1} \left( I - S_2 (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \right) C^T \Sigma &= (S_1^{-1} - S_1^{-1} S_2 S_\theta^{-1} \Lambda^T) C^T \Sigma \\
&= (S_x^{-1} + \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T) C^T \Sigma \\
&= (S_x^{-1} C^T + \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T) \Sigma
\end{aligned}$$

expresión que coincide con la ganancia del observador dada para el estado  $x$  (véase (4.11)).

Ahora para el término  $(S^{-1} H^T \Sigma)_{21}$ , tenemos

$$\begin{aligned}
(S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma &= (-\{S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2\})^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma \\
&= -(S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2)^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma \\
&= (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2)^{-1} [-S_2^T S_1^{-1}] C^T \Sigma \\
&= S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma
\end{aligned}$$

resultado que coincide con la ganancia para la estimación del vector de parámetros (4.12).  $\square$

Hasta este punto, suponemos que las condiciones de excitación (4.2) y (4.6) para el sistema (4.5) debe ser equivalente a (4.6) para el sistema extendido (4.20).

Del análisis efectuado en esta sección, podemos concluir que al seleccionar una ganancia (matricial) variante en el tiempo como la dada en (4.4) para el observador adaptable (4.3) nos lleva al ya conocido observador de Kalman para un sistema extendido con un vector de parámetros. Esto incrementa los cálculos que hay que efectuar en línea. Por otra parte, podemos sintonizar la velocidad de convergencia tanto para el parámetro de estimación del estado, como para el parámetro desconocido, sintonizando simplemente  $\rho_x$  y  $\rho_\theta$  (o solamente  $\rho$ ).

A continuación, mostramos un ejemplo del uso práctico de la teoría de observadores adaptables ya presentada.

## 4.4 Aplicación (Sistemas Caóticos)

Como una aplicación para ilustrar el observador afín en el estado ya presentado, consideramos el sistema caótico de Lorenz.

En sistemas de comunicaciones usando sistemas caóticos, consideramos un transmisor de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \lambda) & x &\in \mathbb{R}^n \\ y &= h(x) & y &\in \mathbb{R}\end{aligned}\quad (4.27)$$

donde  $\lambda$  es un mensaje variante en el tiempo satisfaciendo  $\lambda_{\min} \leq \lambda(t) \leq \lambda_{\max} \quad \forall t$ , e  $y$  es la señal transmitida. Asumiendo que el sistema anterior (4.27) es caótico para toda constante que satisfaga  $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ . Nuestro objetivo consiste en construir un sistema receptor capaz de recuperar el mensaje  $\lambda(t)$  a partir de la señal transmitida  $y$ .

Así, en esta sección estudiaremos un sistema de comunicación de la forma (4.27), y reconstruimos la señal  $\lambda$  a partir de la señal caótica transmitida  $y$ , mediante el observador adaptable previamente desarrollado.

### 4.4.1 Modelo Matemático y Diseño del Observador

El sistema caótico considerado aquí, está descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma x_2 - \sigma x_1 \\ \dot{x}_2 &= \gamma x_1 - \rho x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3\end{aligned}\quad (4.28)$$

donde  $\sigma, \gamma, \rho$  y  $\beta$  denotan constantes positivas.

La manera como utilizamos el observador adaptable en el esquema de una comunicación segura se ilustra en la figura (4.1).

Consideremos los 3 siguientes casos

1. Asuma que  $\gamma$  es un parámetro no conocido y representa un mensaje variante en el tiempo satisfaciendo  $\gamma_{\min} \leq \gamma(t) \leq \gamma_{\max} \quad \forall t$ . Definiendo el vector de estado

<sup>3</sup>Note que si  $\rho = 1$ , entonces obtenemos el ya bien conocido Atractor de Lorenz.

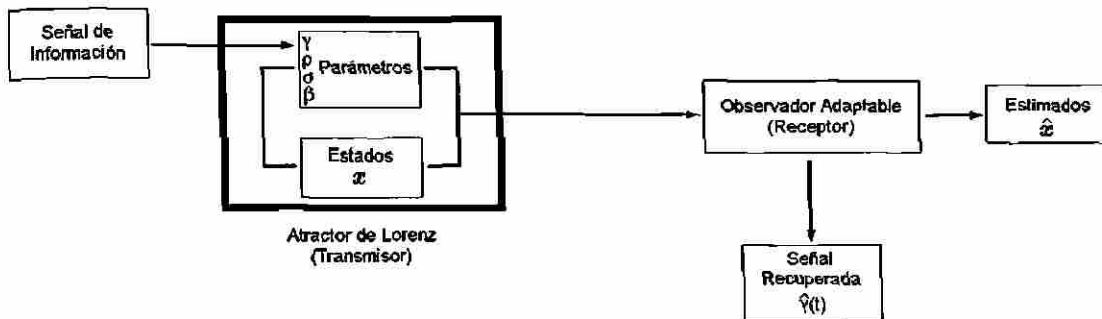


Figura 4.1: Esquema de comunicaciones mediante sistemas caóticos

$x = \text{col}(x_1 \ x_2 \ x_3)$ ,  $\theta = \gamma$  y como la señal transmitida  $y = x_1$ , el sistema receptor capaz de reconstruir el mensaje enviado tiene la forma del observador adaptable dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(y)x + \varphi(y) + \Phi(y)\theta \\ y &= Cx \end{aligned}$$

donde

$$A(y) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ 0 & -\rho & -y \\ 0 & y & -\beta \end{pmatrix}, \varphi(y) = \begin{pmatrix} -\sigma y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ahora, asumimos que sólo el parámetro  $\beta$  es conocido, y que la señal transmitida es todavía  $y = x_1$ . Entonces, definiendo el vector de estados como antes e introduciendo la siguiente transformación lineal de coordenadas

$$z = Tx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} x \quad (4.29)$$

el sistema (4.28), en las nuevas coordenadas, puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -y \\ 0 & y & -\beta \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma + \rho \\ \sigma(\gamma - \rho) \\ \rho \end{pmatrix} \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

y es claro que en este caso, el sistema (4.30) tiene la estructura dada por (4.10), con  $\theta = \begin{pmatrix} \sigma + \rho & \sigma(\gamma - \rho) & \rho \end{pmatrix}^T$ .

3. Finalmente, consideremos el caso cuando  $\beta$  es también un parámetro no conocido para el receptor. Entonces, mediante la transformación lineal (4.29), pero ahora con la señal transmitida dada por

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

el sistema (4.30) puede representarse como sigue

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -y \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_1^2 & -y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma + \rho \\ \sigma(\gamma - \rho) \\ \rho \\ \beta\sigma \end{pmatrix}$$

el cual es obviamente de la forma (4.10) con

$$y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix} z$$

en términos de las nuevas coordenadas.

#### 4.4.2 Resultados de simulación

El propósito de esta sección es ilustrar los resultados obtenidos para los diferentes casos planteados en la sección anterior con el observador adaptable propuesto en este capítulo vía simulación digital. Los valores numéricos utilizados en estas simulaciones fueron los siguientes.

El valor inicial de las variables de estado en todas las simulaciones fueron  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.0001$ , mientras que las condiciones iniciales para el observador adaptable  $x_1(0) = x_3(0) = 1$  y  $x_2(0) = -1$ .

$S_x(0) = S_\theta(0) = I$ ,  $\Lambda(0) = \begin{pmatrix} 10 & 10 & \dots & 10 \end{pmatrix}$  con las dimensiones apropiadas. Las ganancias para las ecuaciones dinámicas correspondientes a  $S_x$  y  $S_\theta$ , fueron escogidas como  $\rho_x = \rho_\theta = 12$ .

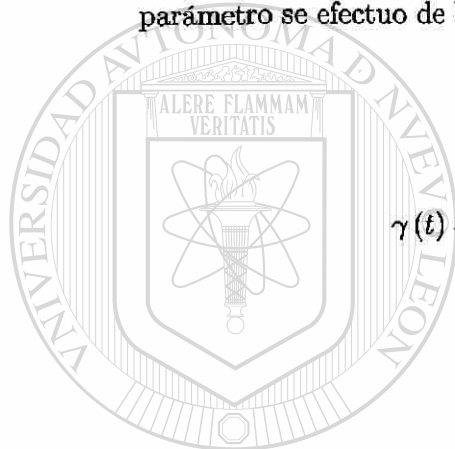
Los valores iniciales de los parámetros a ser identificados en los diferentes casos fueron

$$1. \hat{\gamma}(0) = 29, \left( \rho = 1, \sigma = 10 \text{ y } \beta = \frac{8}{3} \right)$$

$$2. \hat{\gamma}(0) = 29, \hat{\sigma}(0) = 9 \text{ y } \hat{\rho}(0) = 0, \left( \beta = \frac{8}{3} \right)$$

$$3. \hat{\gamma}(0) = 29, \hat{\sigma}(0) = 9, \hat{\rho}(0) = 0 \text{ y } \hat{\beta} = 3.$$

El parámetro  $\gamma$  se fijó en 28 para los casos 2 y 3, y para el caso 1 la variación de este parámetro se efectuó de la siguiente manera



$$\gamma(t) = \begin{cases} 28 & 0 < t < 5 \\ 30 & 5 < t < 10 \\ 40 - t & 10 < t < 15 \\ \frac{5}{2} + \frac{3t}{2} & 15 < t < 20 \\ \frac{65}{2} + \sin(2t - 40) & 20 < t < 25 \\ 32 & 25 < t < 30 \end{cases}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



### 4.4.3 Identificación de $\gamma$ (caso 1)

La figura 4.6 muestra el comportamiento de  $\gamma$ , parámetro a identificar mediante el observador adaptable propuesto en este capítulo. Recuerde que en el caso 1 (cuando sólo  $\gamma$  es el parámetro desconocido),  $\gamma$  es un parámetro que varía con el tiempo. La gráfica que describe la estimación, nos muestra que a pesar de estos cambios, la estimación es buena. Además también se observa un buen tiempo de convergencia.

Resultados similares se aprecian para las variables de estado del sistema caótico, pues el estimado converge también rápidamente al estado real del sistema (véase figuras 4.2-4.5).

En la gráfica 4.3 mostramos un acercamiento de la parte inicial del comportamiento de la variable  $x_1$  del sistema caótico, con el objeto de apreciar mejor la convergencia del observador al estado real. Convergencia similar se aprecia para las otras dos variables de estado al hacer una acercamiento en los instantes iniciales de tiempo. Sin embargo, para no agobiar al lector con muchas gráficas, es que se optó por omitirlas.

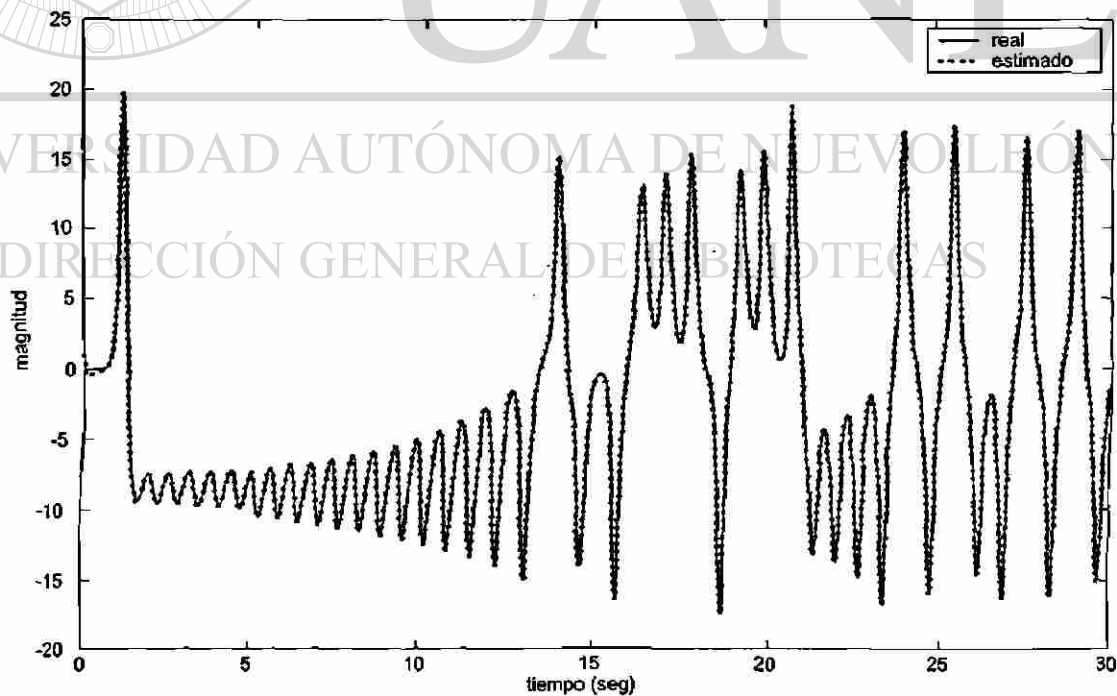


Figura 4.2:  $x_1$  vs  $\hat{x}_1$  ( $\beta$ ,  $\rho$  y  $\sigma$  conocidos)

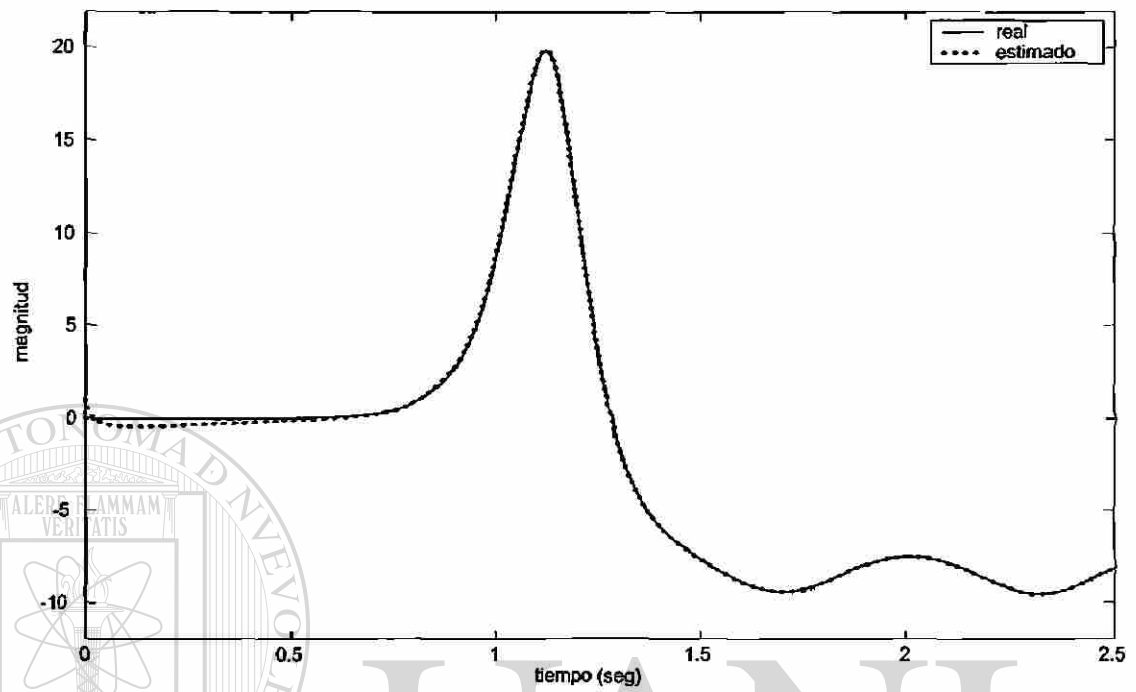


Figura 4.3:  $x_1$  vs  $\hat{x}_1$  (acercamiento) ( $\beta$ ,  $\rho$  y  $\sigma$  conocidos)

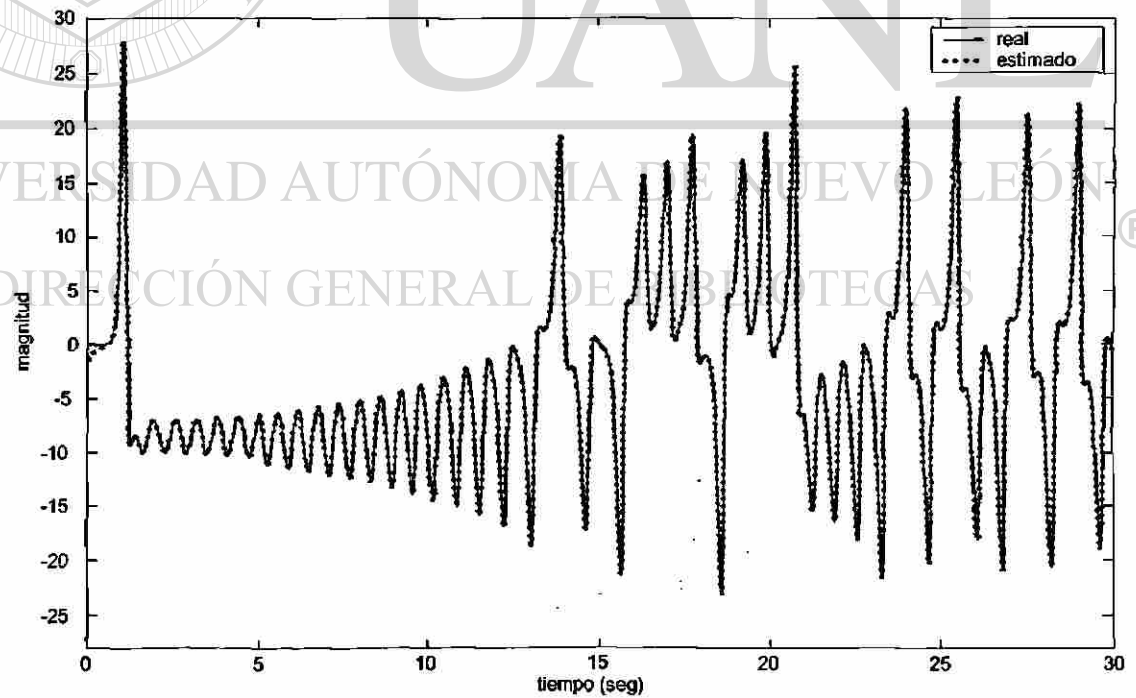


Figura 4.4:  $x_2$  vs  $\hat{x}_2$  ( $\beta$ ,  $\rho$  y  $\sigma$  conocidos)



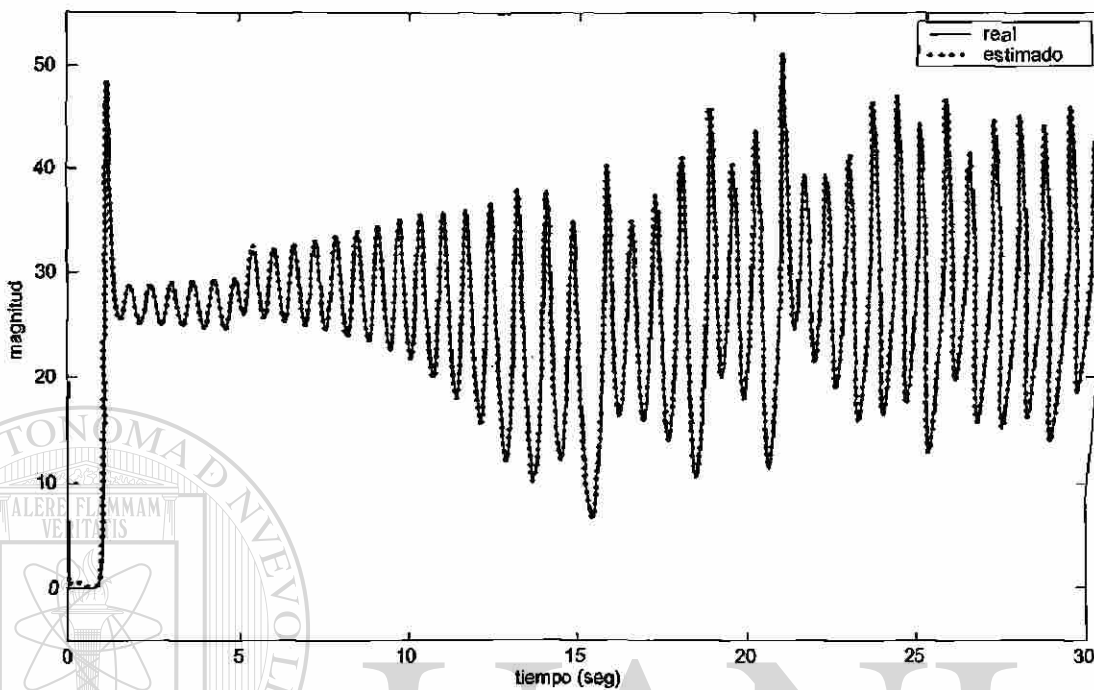


Figura 4.5:  $x_3$  vs  $\hat{x}_3$  ( $\beta, \rho$  y  $\sigma$  conocidos)

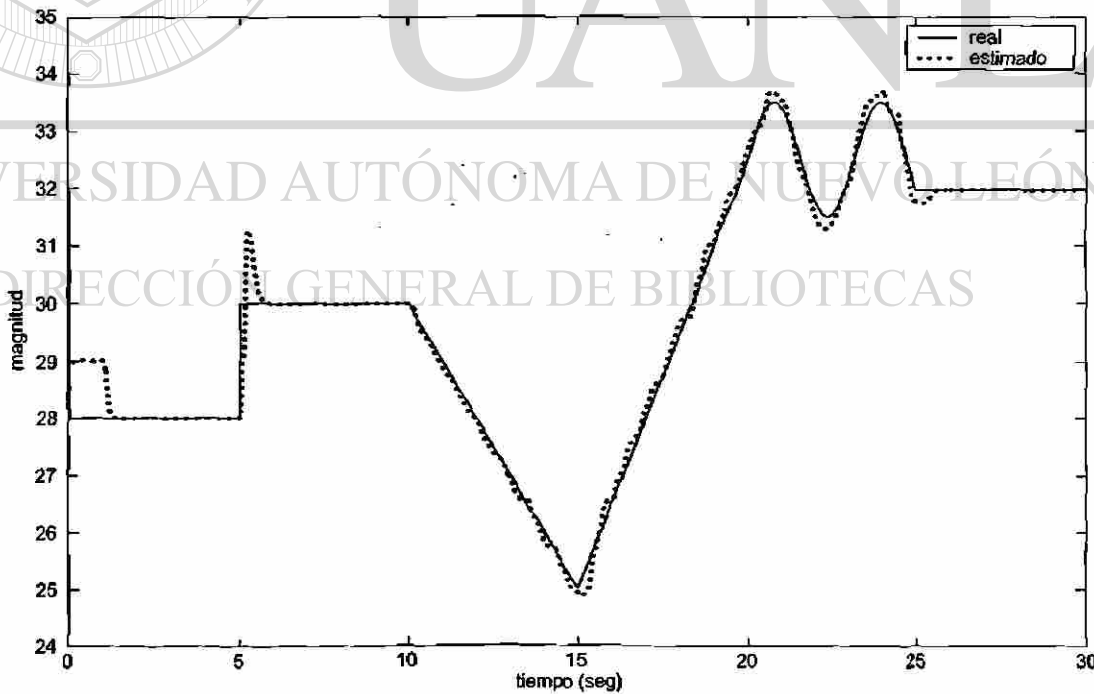


Figura 4.6:  $\gamma$  vs  $\hat{\gamma}$  ( $\beta, \rho$  y  $\sigma$  conocidos)

#### 4.4.4 Identificación de $\gamma$ , $\rho$ y $\sigma$ (caso 2)

Ahora, presentamos los resultados que se obtuvieron mediante el observador adaptable para la estimación del estado y la identificación de los parámetros  $\gamma$ ,  $\rho$  y  $\sigma$ , de manera simultánea, cuando sólo el parámetro  $\beta$  es conocido.

Queremos comentar que el comportamiento de las variables de estado del sistema caótico, presentan un desempeño muy similar al presentado en el caso anterior. Por tal motivo, y como se mencionó anteriormente con el objeto de no agobiar al lector con muchas gráficas, es que decidimos omitirlas.

Con referencia a la estimación de los parámetros del sistema (que ahora se consideraron constantes), los resultados obtenidos se muestran en las figuras 4.7-4.9.

El comportamiento que se observa en estas figuras muestra una buena estimación de los parámetros del sistema caótico a identificar, en lo que a tiempo de convergencia se refiere.

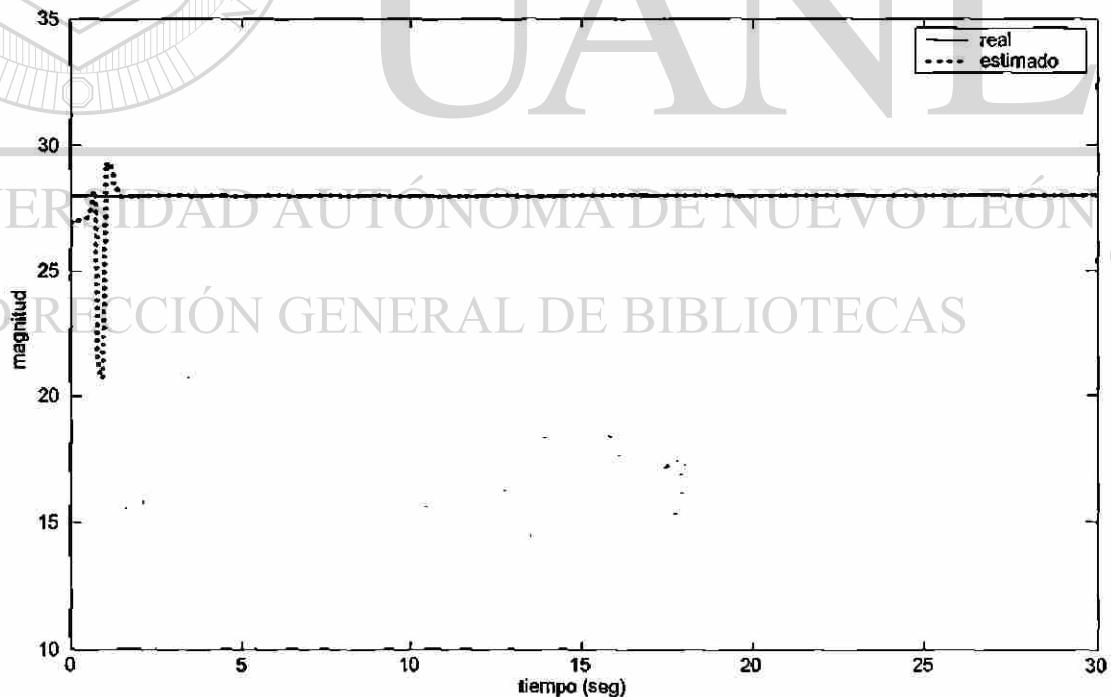


Figura 4.7:  $\gamma$  vs  $\hat{\gamma}$  ( $\beta$  conocido)

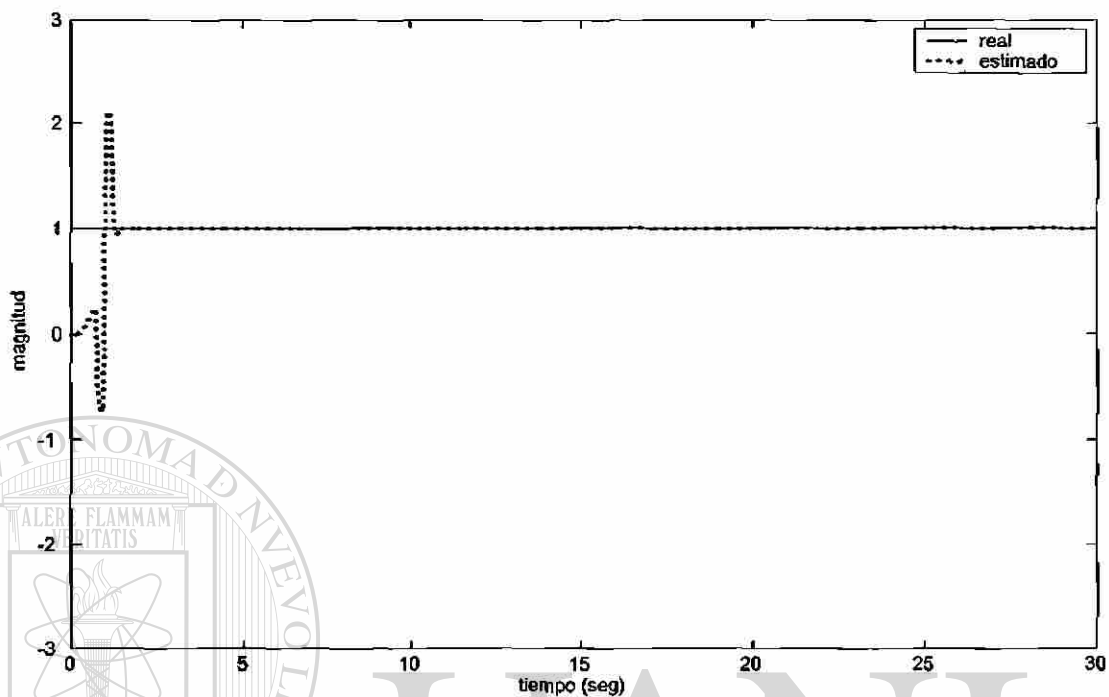


Figura 4.8:  $\rho$  vs  $\hat{\rho}$  ( $\beta$  conocido)

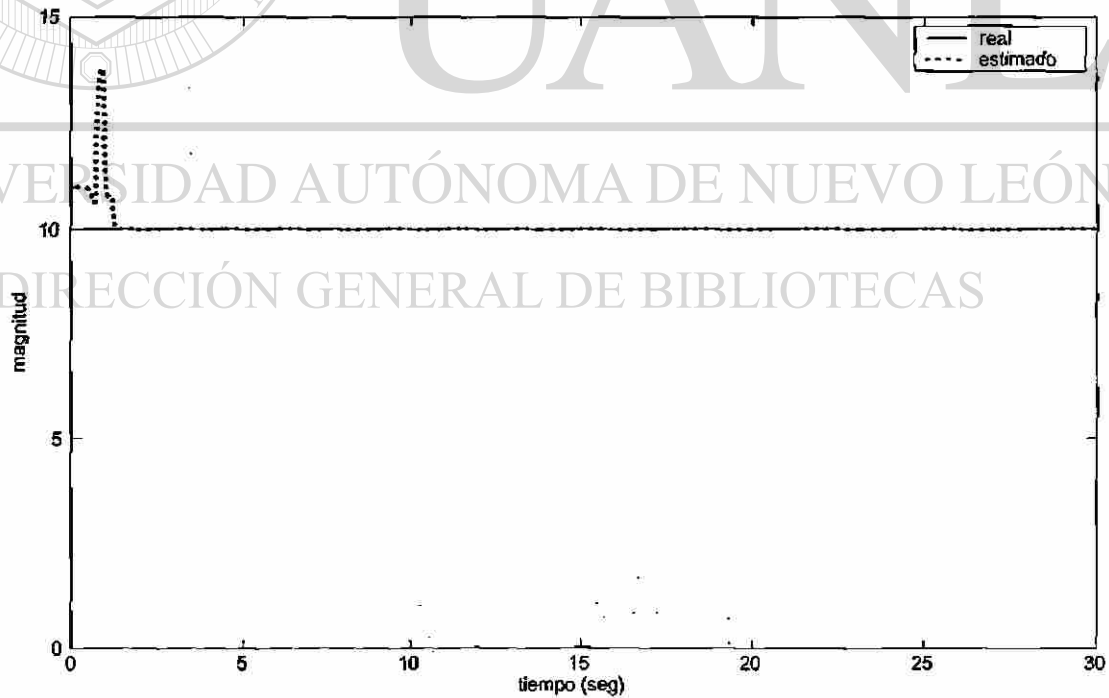


Figura 4.9:  $\sigma$  vs  $\hat{\sigma}$  ( $\beta$  conocido)

#### 4.4.5 Identificación de $\gamma, \rho, \sigma$ y $\beta$ (caso 3)

Finalmente, los resultados de la identificación de todos los parámetros son presentados en las figuras 4.10-4.13. También aquí, como en los casos anteriores, se percibe un buen desempeño en la estimación de los parámetros del sistema.

Nuevamente, como se dijo en los dos casos de estudio anteriores, debido a que el comportamiento de la estimación del estado es muy similar al presentado en el caso 1, se optó por omitirlas.

El lector seguramente habrá observado un fuerte sobreimpulso en las figuras reportadas, no sólo en las figuras reportadas en este caso de estudio sino también en los dos anteriores, particularmente en la dinámica de los estados del sistema (véase figuras 4.2-4.5), aunque el efecto también se percibe en la identificación de los parámetros (el sobreimpulso se presenta en el tiempo alrededor de 1 seg.). Este comportamiento se debe a la dinámica propia del sistema caótico. De hecho, el sobreimpulso se presenta aún cuando todos los parámetros del sistema son conocidos.

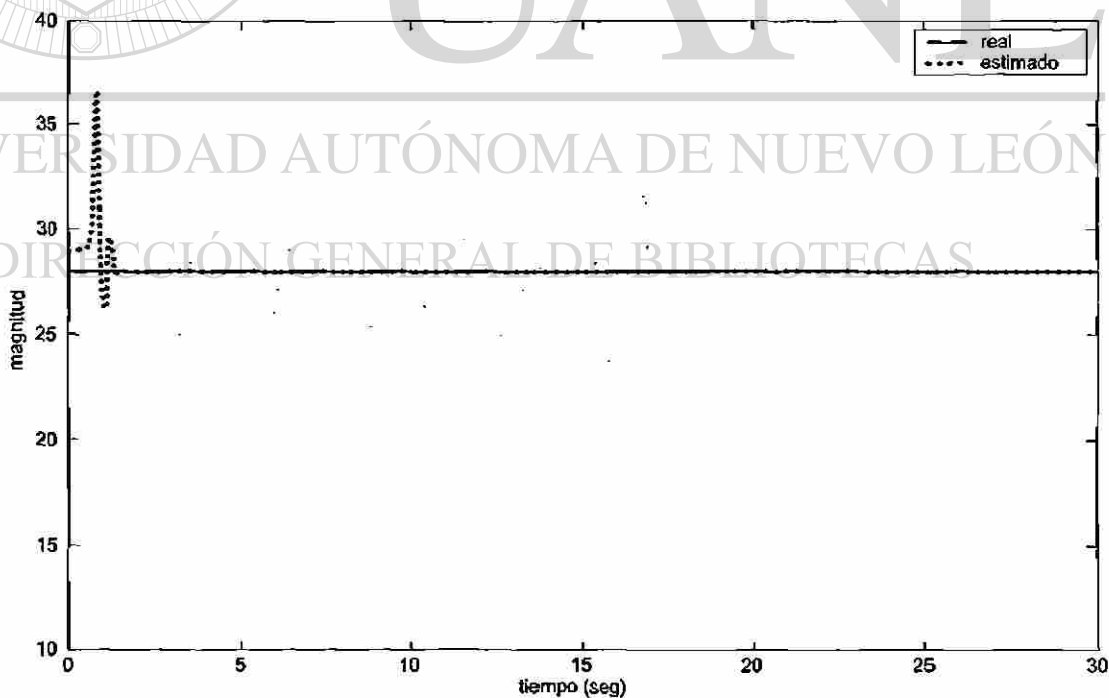


Figura 4.10:  $\gamma$  vs  $\hat{\gamma}$  (ningún parámetro conocido)

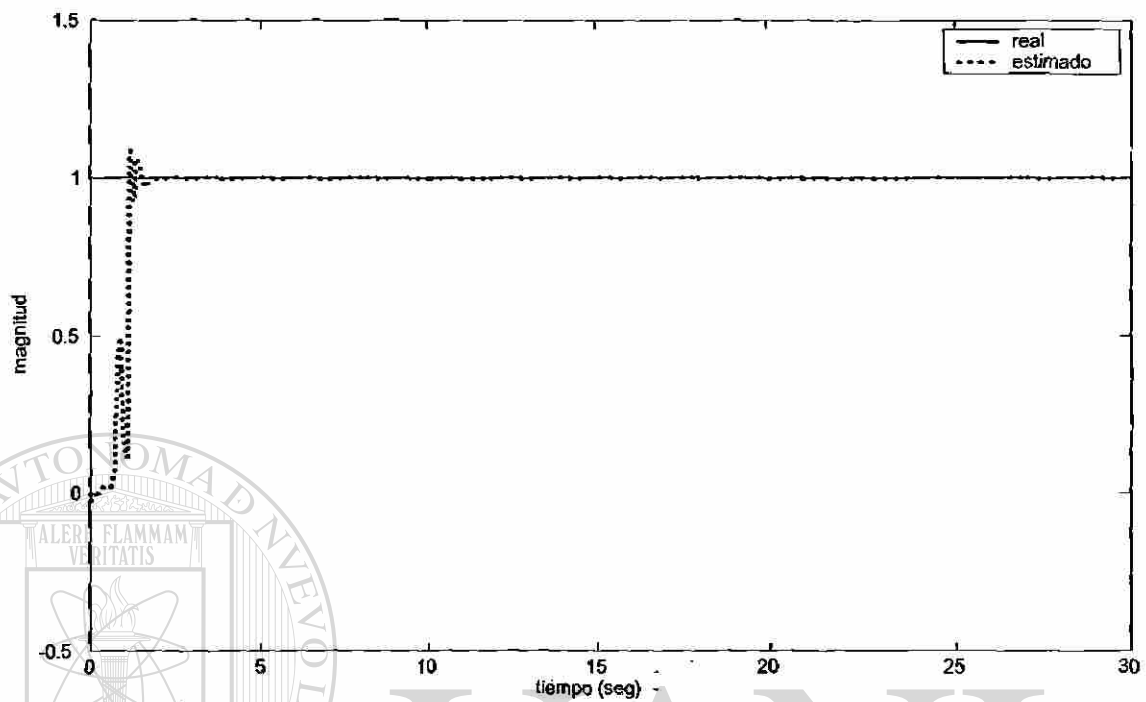


Figura 4.11:  $\rho$  vs  $\hat{\rho}$  (ningún parámetro conocido)

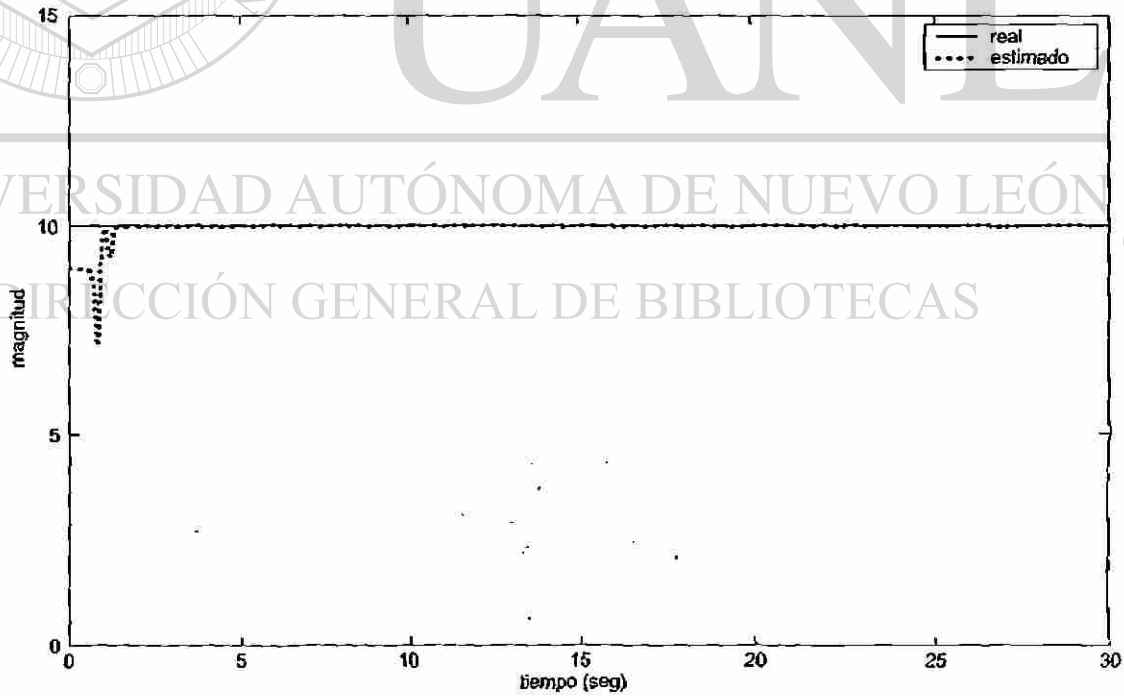


Figura 4.12:  $\sigma$  vs  $\hat{\sigma}$  (ningún parámetro conocido)

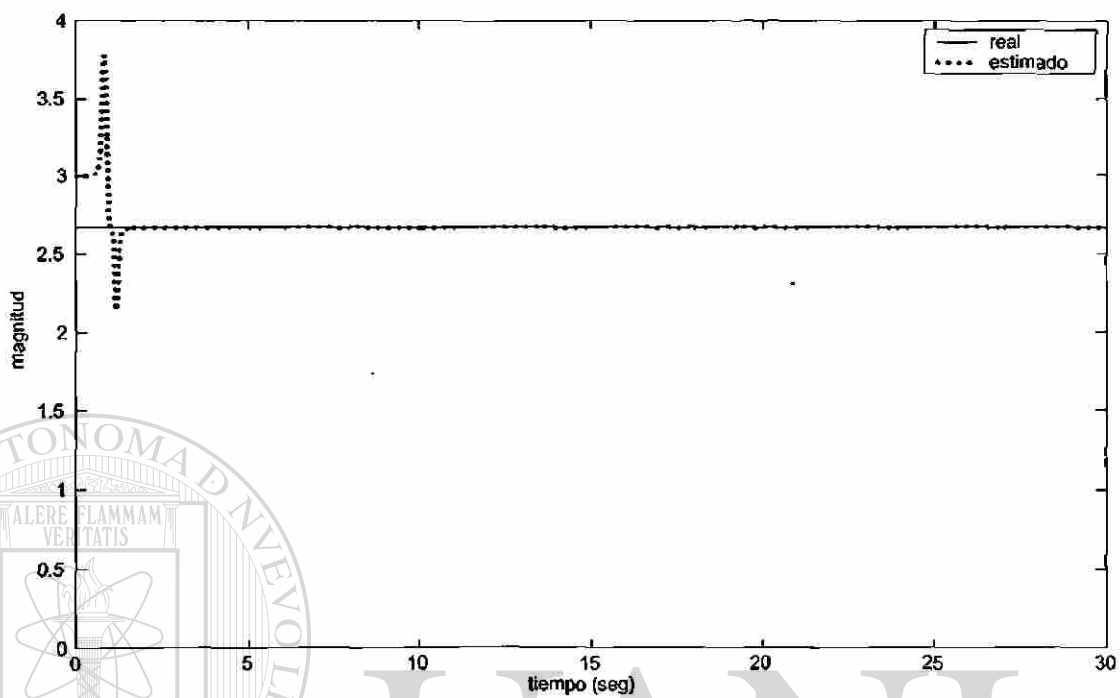


Figura 4.13:  $\beta$  vs  $\hat{\beta}$  (ningún parámetro conocido)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## 4.5 Aplicación (Generador Síncrono)

A continuación, presentamos otra aplicación del observador adaptable desarrollado en este capítulo, considerando ahora el problema de monitorear el desempeño de una máquina síncrona.

### 4.5.1 Modelo Matemático

El modelo matemático de la máquina síncrona con la que trabajamos ahora, es el presentado en la sección 3.8.1, (véase (3.40)). La única diferencia se presenta en el término de amortiguamiento ( $D$ ) el cual en este caso si es considerado ( $D \neq 0$ ), (ver página 61).

Así, considerando las constantes ya definidas en la sección 3.8.1 (véase (3.42)), sólo agregamos la correspondiente al parámetro  $D$ , definida de la siguiente manera

$$m_7 = -\frac{D}{M}$$

y puesto que ahora existe un término adicional en las ecuaciones dinámicas para la máquina síncrona, el punto de equilibrio cambia, y ahora lo expresamos como la solución de

$$\omega - \omega_s = 0$$

$$m_1 + \{m_2 E'_q + m_3 \cos(\delta)\} \text{sen}(\delta) + m_7(\omega - \omega_s) = 0$$

$$m_4 E'_q + m_5 \cos(\delta) + m_6(u + E_{fd}) = 0$$

Si consideramos  $(\delta^*, \omega^*, E_q^{*'})$  como el punto de equilibrio estable, ya considerando  $D$ , el modelo matemático en términos de las variables de desviación (3.41) está dado por

$$\frac{d\Delta\delta}{dt} = \Delta\omega$$

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} = m_1 + \{m_2(\Delta E'_q + E_q^{*'}) + m_3 \cos(\delta)\} \text{sen}(\delta) + m_7 \Delta\omega$$

$$\frac{d\Delta E'_q}{dt} = m_4(\Delta E'_q + E_q^{*'}) + m_5 \cos(\delta) + m_6(u + E_{fd}^*)$$

con el siguiente cambio de variable

$$x_1 = \Delta\delta, \quad x_2 = \Delta\omega, \quad x_3 = \Delta E'_q, \quad \theta = m_1$$

las ecuaciones pueden reescribirse como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_7 & m_2 \text{sen}(x_1 + \delta^*) \\ 0 & 0 & -m_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 E_q'^* \text{sen}(x_1 + \delta^*) + m_3 \text{sen}(x_1 + \delta^*) \cos(x_1 + \delta^*) \\ m_5 E_q'^* + m_6 \cos(x_1 + \delta^*) + m_7 (u + E_{fd}^*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \theta$$

$$y = x_1$$

Por lo anterior, implementamos el observador adaptable (4.11)-(4.15) para la estimación del vector de estados  $x$  y el parámetro  $\theta$ , con

$$A(u, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_7 & m_2 \text{sen}(x_1 + \delta^*) \\ 0 & 0 & -m_5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(u, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 E_q'^* \text{sen}(x_1 + \delta^*) + m_3 \text{sen}(x_1 + \delta^*) \cos(x_1 + \delta^*) \\ m_5 E_q'^* + m_6 \cos(x_1 + \delta^*) + m_7 (u + E_{fd}^*) \end{pmatrix}$$

y  $\Sigma = I$ .



### 4.5.2 Resultados de Simulación

El propósito aquí es ilustrar los resultados obtenidos con el observador adaptable propuesto en este capítulo vía simulación digital. Los valores numéricos de los parámetros del generador son los dados en la tabla 3.2.

El punto de equilibrio estable seleccionado para la simulación es  $\delta^* = 1.12, \omega^* = 0$  y  $E_q'^* = 0.91469$ .

Los valores iniciales de las variables de estado en todas las simulaciones fueron:  $\delta(0) = 1.17, \omega(0) = 0.01$  y  $E_q'(0) = 0.91$ , mientras que las condiciones iniciales para el observador  $\hat{x}_1(0) = 1, \hat{x}_2(0) = 0.05$  y  $\hat{x}_3(0) = 1$ . Las ganancias para el observador fueron inicializadas en  $S_x(0) = I$  para  $\hat{x}$ , y  $S_\theta(0) = 10$  para  $\hat{\theta}$ . Además, las simulaciones fueron realizadas para diferentes valores de  $\rho_x$  y  $\rho_\theta$ , ilustrando así el efecto de la sintonización en el desempeño del observador.

En las figuras 4.14-4.16 se muestra el comportamiento dinámico para las variables de estado del generador con su correspondiente estimación para  $\rho_x = \rho_\theta = 5$ , así como también, el valor de la estimación para  $m_1$ . Y de hecho, se observa una buena convergencia de las variables de estado (figura 4.17). En las figuras 4.18 y 4.19 se presentan las estimaciones del voltaje interno  $E_q'$  y el parámetro  $m_1$ , cuando este último varía ( $T_m = 1$  para  $0 < t < 35$  seg. y  $T_m = 0.8$  para  $35 < t$ ), lo cual resalta el desempeño de la estrategia adaptable propuesta. De estas figuras puede observarse que todas las variables de estado son bien estimadas (presentamos sólo la respuesta obtenida para el voltaje interno, pues la posición angular es la salida medible y en la velocidad angular no se percibe un efecto significativo del cambio en el par mecánico) incluso la estimación del parámetro  $m_1$  es buena aún bajo los cambios efectuados.

Finalmente, con el objetivo de ilustrar como la convergencia del observador adaptable se ve afectada por los parámetros  $\rho_x$  y  $\rho_\theta$ , efectuamos simulaciones para diferentes valores de estos parámetros. Se observa que para valores grandes, la velocidad de convergencia se incrementa (pero como consecuencia, la magnitud de los sobreimpulsos se incrementa también).

En la figura 4.20 mostramos el desempeño del observador adaptable para  $\rho_x = \rho_\theta = 5, 10$  y  $15$ . Es claro, a partir de esta gráfica, que el tiempo de convergencia del observador adaptable puede acelerarse.

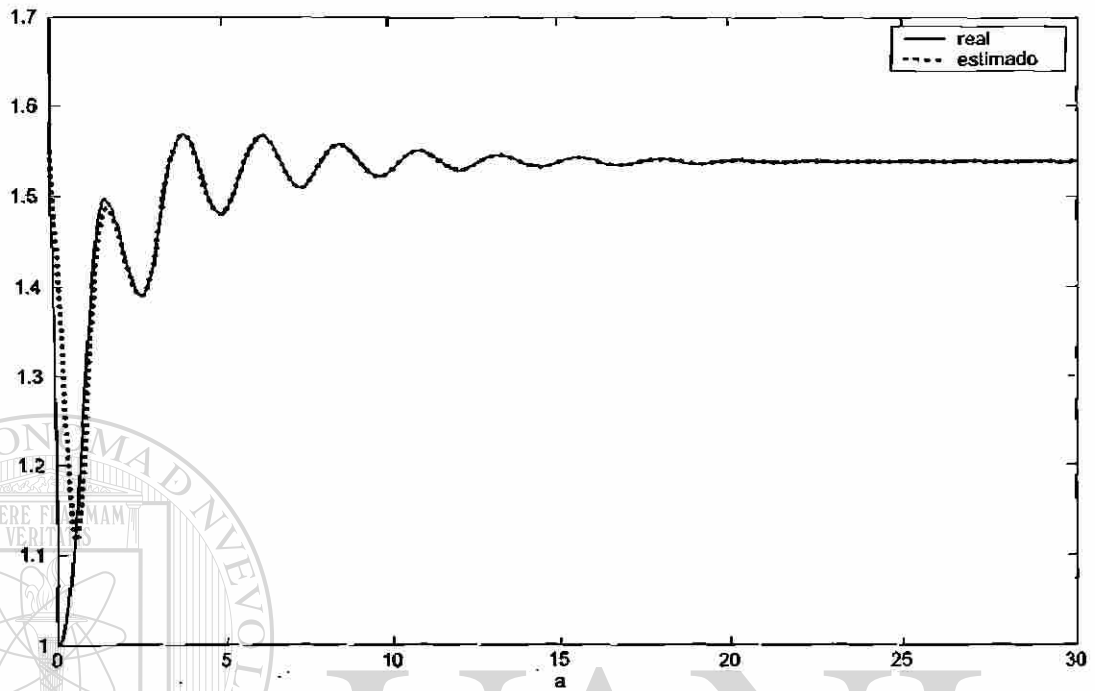


Figura 4.14: Ángulo del rotor y su estimado

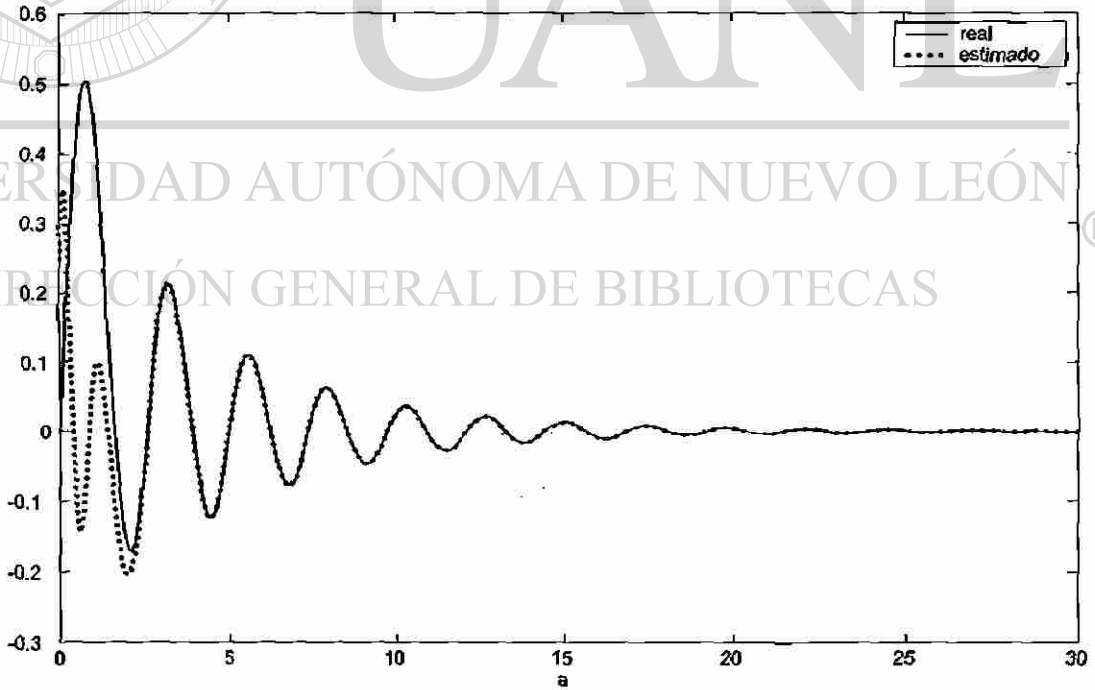


Figura 4.15: Velocidad del rotor y su estimado

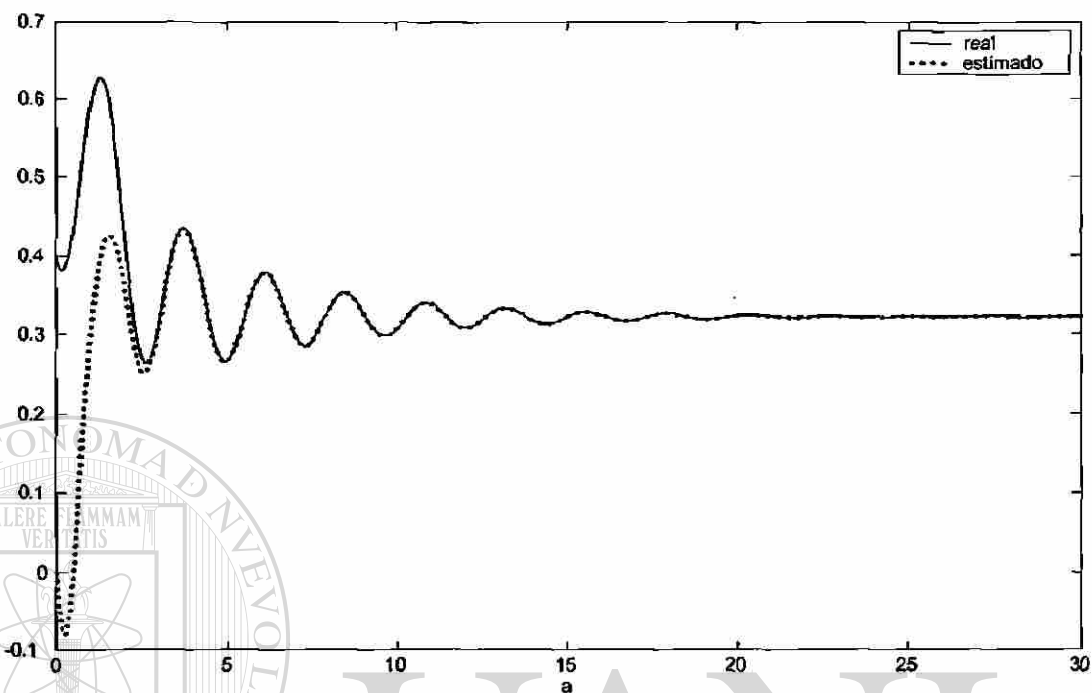


Figura 4.16: Voltaje transitorio en el eje de cuadratura y su estimado



Figura 4.17: Parámetro  $m_1$  y su estimado

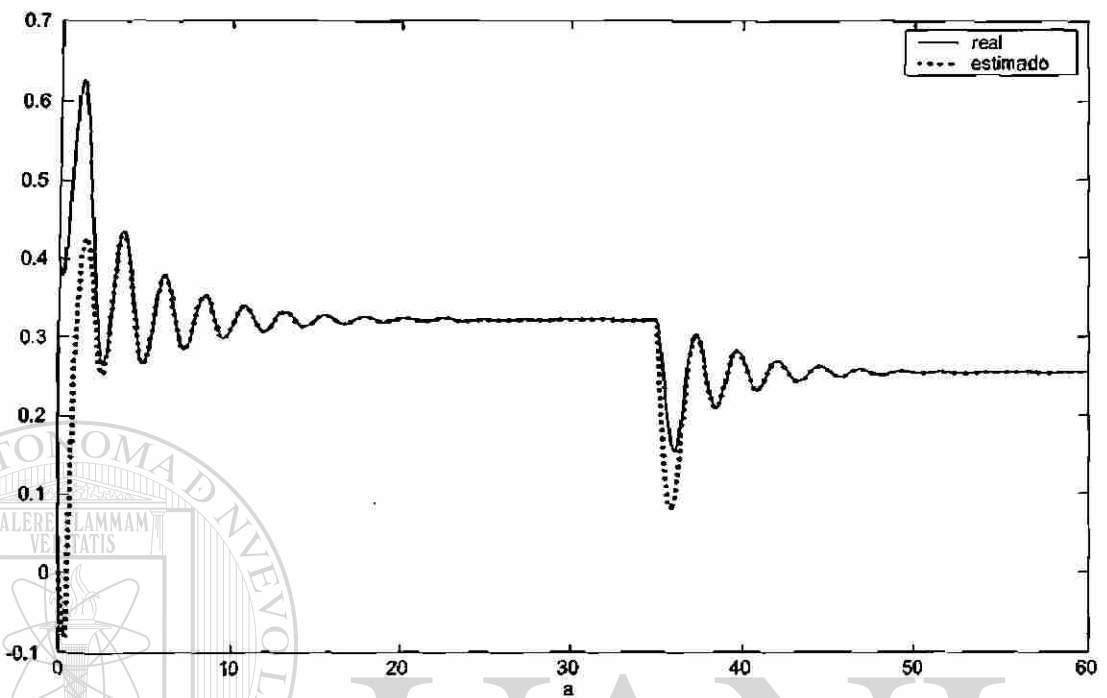


Figura 4.18:  $E_q$  y su estimado, bajo incertidumbre

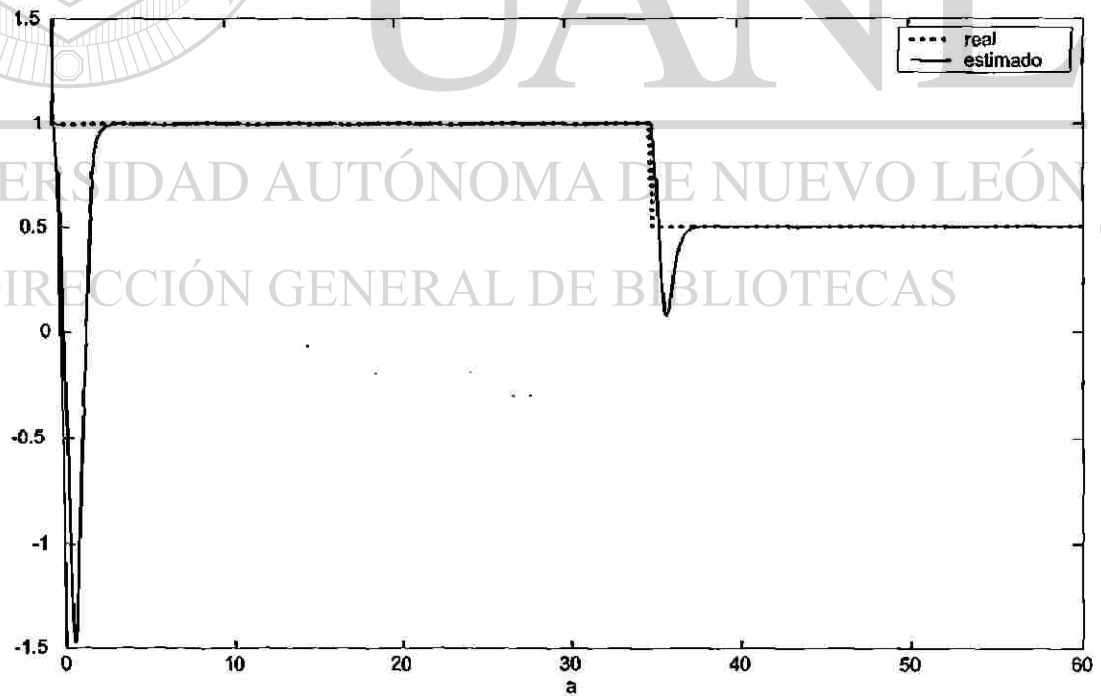


Figura 4.19: Parámetro  $m_1$  y su estimado, bajo incertidumbre

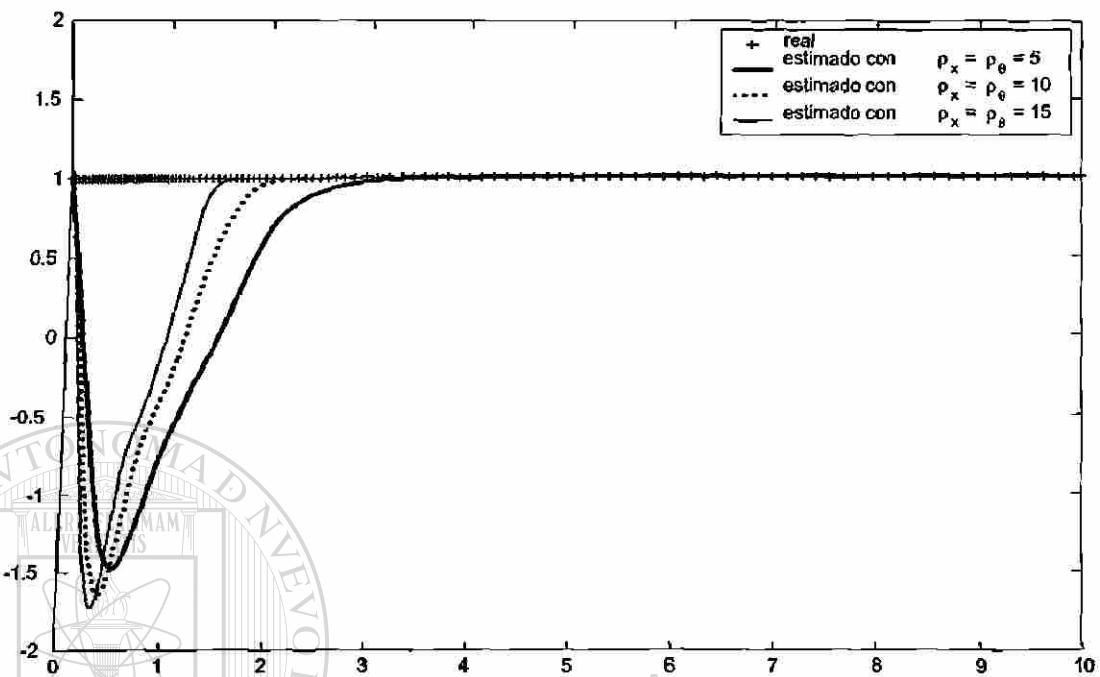


Figura 4.20: Sensibilidad del observador en la estimación de  $m_1$ .

## 4.6 Conclusiones

En este capítulo discutimos un observador adaptable para la clase de sistemas no lineales afines en el estado, a la luz de los resultados para este mismo tipo de observadores para sistemas lineales variantes en el tiempo. En particular se mostró como un diseño adaptable, con una razón de convergencia sintonizada arbitrariamente, es equivalente a un observador afín en el estado para un sistema extendido.

El desempeño del esquema adaptable propuesto ha sido aplicado a los modelos matemáticos del atractor caótico de Lorenz y el generador síncrono en una representación de bus infinito, para los cuales el vector de estados y un vector de parámetros (en el caso del generador, un solo parámetro) fueron estimados al mismo tiempo.

En el caso del atractor de Lorenz, se observa que los experimentos efectuados resultan interesantes cuando lo que se desea es un esquema de comunicaciones seguro.

Finalmente para el caso del generador síncrono, la estimación adecuada del parámetro seleccionado, muestra que el esquema adaptable propuesto puede ser atractivo para el monitoreo de sistemas.

A continuación se presentan las conclusiones generales de esta tesis.

que el propone, logra la convergencia de las trayectorias del sistema a su posición de equilibrio, o en el caso de la salida, convergencia a una señal de referencia dada. En [19] el autor muestra que el error de estimación (diferencial entre el estados del sistema y los estimados obtenidos mediante el observador que el propone) converge exponencialmente a cero.

En esta tesis se conjuntaron estos dos resultados, y se presentó un análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado, es decir cuando la ley de control aplicada al sistema se implementa a través de los estimados del observador. Es bien sabido que para obtener buenos resultados en el control de sistemas discretizados, el tiempo de muestreo debe ser pequeño. En la prueba de estabilidad reportada en esta tesis, se observó que el efecto del tiempo de muestreo es muy importante para preservar la estabilidad, de hecho se percibió que existe un compromiso entre el parámetro de diseño del observador (el cual influye de manera directa en la ganancia del mismo) y el tiempo de muestreo.

Este esquema de control basado en observador, se aplicó a los modelos matemáticos de un brazo robot y un generador síncrono. Los resultados obtenidos mediante simulación digital mostraron la eficiencia del esquema control - observador, lograndose un buen desempeño en ambos casos de estudio.

También en lo relacionado con sistemas discretos, se presentó un estudio denominado estabilidad práctica, en el cual se analizó el efecto cuando se diseña un algoritmo, en este caso de estimación, a partir de modelos discretos aproximados (en nuestro estudio, el método de Euler).

Finalmente, en lo relacionado con la estimación de estados no medibles y la identificación de parámetros desconocidos de manera simultánea, se presentó un observador adaptable para la clase de sistemas no lineales afines en el estado y lineal en los parámetros. Se dieron condiciones suficientes para garantizar una estimación adecuada con razón de convergencia exponencial sintonizada arbitrariamente.

Además, se mostró que mediante un cambio de coordenadas apropiado, este observador adaptable es equivalente a un observador para la clase de sistemas afines en el estado, lo cual nos permite decir que tanto la estimación de los estados no medibles del sistema como la identificación de los parámetros desconocidos, pueden ser vistas como un sistema afín en el estado.

Para ilustrar la metodología propuesta mediante el observador adaptable, se analizó como casos de estudio el atractor caótico de Lorenz y el generador síncrono. Se presen-

que el propone, logra la convergencia de las trayectorias del sistema a su posición de equilibrio, o en el caso de la salida, convergencia a una señal de referencia dada. En [19] el autor muestra que el error de estimación (diferencial entre el estados del sistema y los estimados obtenidos mediante el observador que el propone) converge exponencialmente a cero.

En esta tesis se conjuntaron estos dos resultados, y se presentó un análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado, es decir cuando la ley de control aplicada al sistema se implementa a través de los estimados del observador. Es bien sabido que para obtener buenos resultados en el control de sistemas discretizados, el tiempo de muestreo debe ser pequeño. En la prueba de estabilidad reportada en esta tesis, se observó que el efecto del tiempo de muestreo es muy importante para preservar la estabilidad, de hecho se percibió que existe un compromiso entre el parámetro de diseño del observador (el cual influye de manera directa en la ganancia del mismo) y el tiempo de muestreo.

Este esquema de control basado en observador, se aplicó a los modelos matemáticos de un brazo robot y un generador síncrono. Los resultados obtenidos mediante simulación digital mostraron la eficiencia del esquema control - observador, lograndose un buen desempeño en ambos casos de estudio.

También en lo relacionado con sistemas discretos, se presentó un estudio denominado estabilidad práctica, en el cual se analizó el efecto cuando se diseña un algoritmo, en este caso de estimación, a partir de modelos discretos aproximados (en nuestro estudio, el método de Euler).

Finalmente, en lo relacionado con la estimación de estados no medibles y la identificación de parámetros desconocidos de manera simultánea, se presentó un observador adaptable para la clase de sistemas no lineales afines en el estado y lineal en los parámetros. Se dieron condiciones suficientes para garantizar una estimación adecuada con razón de convergencia exponencial sintonizada arbitrariamente.

Además, se mostró que mediante un cambio de coordenadas apropiado, este observador adaptable es equivalente a un observador para la clase de sistemas afines en el estado, lo cual nos permite decir que tanto la estimación de los estados no medibles del sistema como la identificación de los parámetros desconocidos, pueden ser vistas como un sistema afín en el estado.

Para ilustrar la metodología propuesta mediante el observador adaptable, se analizó como casos de estudio el atractor caótico de Lorenz y el generador síncrono. Se presen-

taron resultados vía simulación digital para estos casos de estudio, mostrando así el buen desempeño del observador.

## 5.2 Trabajos Futuros

Los temas a desarrollar como trabajos de investigación futuros, a los que consideramos que sería adecuado dar seguimiento son los siguientes:

Con relación al estudio de sistemas electromecánicos, tales como el motor de inducción y los generadores síncronos, consideramos que un aspecto importante a tomar en cuenta es el uso de modelos más completos que tomen en cuenta efectos tales como la saturación, las dinámicas del regulador automático de voltaje (AVR), entre otros.

Además, sería deseable que las leyes de control desarrolladas para sistemas eléctricos de potencia sean descentralizadas, es decir se puedan implementar sólo con mediciones locales. O en los casos en el que no se dispone de todas las variables de estado necesarias para implementación de una ley de control, emplear un observador de estado.

En lo referente a los sistemas no lineales discretizados, en este trabajo de investigación se retomaron los trabajos reportados en [1, 19] y se efectuó un análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado. El estudio se efectuó para la clase de sistemas no lineales linealizables por retroalimentación de estado, discretizados mediante el método de Euler.

Como tema de investigación futuro nos gustaría estudiar la estabilidad del sistema en lazo cerrado para sistemas discretos de orden superior.

Por otra parte, se puede considerar el caso de tener un sistema continuo y un esquema de control y observación discreto, de modo que un estudio de estabilidad para esta clase de sistemas híbridos sería un tema interesante a realizar.

Finalmente, para los observadores adaptables, una extensión de este trabajo consistiría en considerar una clase más general de sistemas afines en el estado, así como sistemas en cascada. Además, la versión en discreto de este observador adaptable para una clase de sistemas no lineales puede ser también un tópico interesante a estudiar.



## Anexo A

### Sistemas de Potencia Multimáquinas

#### A.1 Nomenclatura del Sistema de Potencia Multi- Máquinas

$\delta_i(t)$  ángulo de potencia (del generador  $i$ ), en p.u.

$\omega_i(t)$  velocidad relativa, en p.u.

$\omega_0 = 2\pi f_0$ , velocidad síncrona

$P_{m_i}$  potencia mecánica, en p.u.

$P_{e_i}(t)$  potencia activa, en p.u.

$D_i$  constante de amortiguamiento, en p.u.

$H_i$  constante de inercia, en segundos

$E'_{q_i}(t)$  voltaje transitorio en el eje de cuadratura, en p.u.

$E_{q_i}(t)$  voltaje en el eje de cuadratura, en p.u.

$E_{f_i}(t)$  voltaje de excitación, en p.u.

$V_{t_i}$  voltaje en terminales, en p.u.

$T'_{d_i}$  constante de tiempo transitoria de corto circuito del eje directo, en segundos

$X_{d_i}$  reactancia del eje directo, en p.u.

$X'_{d_i}$  reactancia transitoria del eje directo, en p.u.

$B_{ij}$  elemento  $ij$  ( $i$  denota la fila y  $j$  la columna) de la matriz de susceptancia nodal (simétrica), en los nodos internos, después de eliminar todos los buses físicos, en p.u.

$Q_{ei}(t)$  potencia reactiva, in p.u.

$I_{q_i}(t)$  corriente en el eje de cuadratura, en p.u.

$I_{d_i}(t)$  corriente en el eje directo, en p.u.

## Anexo B

### Sistemas Discretos

#### B.1 Equivalencia en Estabilidad Exponencial

La definición formal para la estabilidad exponencial<sup>1</sup> de sistemas discretos esta dada por

**Definición B.1** Decimos que el origen <sup>2</sup> del sistema  $\xi(k+1) = F_\tau(k, \xi(k))$  sujeto a la condición inicial  $\xi(k_0) = \xi_0$  es exponencialmente estable, si existen constantes  $a_1, a_2 > 0$  y  $a_3 < 1$  tal que la solución del sistema  $\xi(k)$  satisface

$$\|\xi_0\| \leq a_1 \Rightarrow \|\xi(k)\| \leq a_2 \|\xi_0\| a_3^k \quad \forall k \geq k_0 \geq 0 \quad (\text{B.1})$$

si además (B.1) se satisface para toda  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , entonces decimos que el origen del sistema es globalmente exponencialmente estable.

Si comparamos la definición anterior (B.1) con la dada en la sección 3.2 del capítulo 3 (ver (3.2)), notamos que la principal diferencia se presenta en los términos

$$\begin{aligned} \|\xi(k)\| &\leq a_2 \|\xi_0\| e^{-\lambda_\tau(k-k_0)} \\ \|\xi(k)\| &\leq a_2 \|\xi_0\| a_3^k \end{aligned}$$

pero, para la primera expresión tenemos

$$\|\xi(k)\| \leq a_2 \|\xi_0\| e^{-\lambda_\tau(k-k_0)} = a_2 \|\xi_0\| e^{-\lambda_\tau k} e^{\lambda_\tau k_0} = \tilde{a}_2 \|\xi_0\| e^{-\lambda_\tau k}$$

donde  $\tilde{a}_2 = a_2 e^{\lambda_\tau k_0} = \text{constante}$ , por lo tanto

$$a_3^k \approx e^{-\lambda_\tau k} = (e^{-\lambda_\tau})^k$$

es decir

$$a_3 \approx e^{-\lambda_\tau} = \text{constante} \quad (\text{B.2})$$

Sin embargo, de la definición A.1 para garantizar estabilidad tenemos  $a_3 < 1$ , hecho que aplicado a (B.2) resulta en

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_\tau} &< 1 \\ \ln(e^{-\lambda_\tau}) &< \ln(1) \\ -\lambda_\tau &< 0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>véase [49] página 266

<sup>2</sup>Se asume sin pérdida de generalidad que el equilibrio está en el origen

es decir,  $\lambda_r > 0$ , lo que concuerda con el requerimiento para  $\lambda_r$  dado en la definición 3.1.

## B.2 Propiedades de las Matrices de Control y Estimación

La estructura de las matrices utilizadas en el capítulo 3 para el control y la estimación están dadas por (3.4,3.10)

$$\Omega_\rho = \text{diag}(\rho^n, \dots, \rho) \quad \text{para } \rho \geq 1$$

$$F = (C_n^0 \dots C_n^{n-1}) \quad \text{con } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

$$\Delta_\theta = \text{diag}\left(\frac{1}{\theta} \dots \frac{1}{\theta^n}\right) \quad \text{para } \theta \geq 1$$

$$K = \text{col}(C_n^1 \dots C_n^n) \quad \text{con } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

$$\begin{aligned} \Omega_\rho A_r \Omega_\rho^{-1} &= \begin{pmatrix} \rho^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho^{n-1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \tau \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^{n-1}} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \tau \rho \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = I + \tau \rho A \end{aligned}$$

$$\Omega_\rho B = \begin{pmatrix} \rho^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho^{n-1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \rho \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \rho B$$

$$\begin{aligned} \Delta_\theta A_\tau \Delta_\theta^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\theta^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \tau \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \theta^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \tau\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = I + \tau\theta A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C\Delta_\theta^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \theta^n \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta^{n-1} \end{pmatrix} = \theta C \end{aligned}$$

$$\Delta_\theta B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\theta^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\theta^n} \end{pmatrix} = \frac{1}{\theta^n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\theta^n} B$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} \Omega_\rho A_\tau \Omega_\rho^{-1} = I + \tau\rho A \\ \Omega_\rho B = \rho B \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{cases} \Delta_\theta A_\tau \Delta_\theta^{-1} = I + \tau\theta A \\ C\Delta_\theta^{-1} = \theta C \\ \Delta_\theta B = \frac{1}{\theta^n} B \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

### B.3 Resultados Aplicados al Análisis de Estabilidad para Sistemas Discretos

**Declaración B.1** [14] Sea  $A_c = I + \gamma_c(A - BF)$ , donde las matrices  $A$  y  $B$  tienen la estructura dada por la forma canónica controlable de Brunovsky y  $F$  y  $C_n^p$  son definidas como en (3.4). Entonces, para todo  $\gamma_c \in (0, 1)$ , la única matriz simétrica definida positiva  $P_c$  que satisface la siguiente ecuación matricial algebraica

$$A_c^T P_c A_c - P_c = -\gamma_c P_c - \gamma_c (1 - \gamma_c)^n F^T F \quad (\text{B.5})$$

está dada por  $P_c = N^T N$ , donde  $N = \Lambda_c E_c$ ,  $\Lambda_c = \text{diag} \left( 1, (1 - \gamma_c)^{\frac{1}{2}}, \dots, (1 - \gamma_c)^{\frac{n-1}{2}} \right)$ , además si  $i$  y  $j$  denotan las filas y las columnas de  $E_c$  respectivamente, los elementos de  $E_c$  son  $E_c(i, j) = C_{n-i}^{j-i}$  para  $j \geq i$  y  $E_c(i, j) = 0$  en caso contrario.

**Declaración B.2** [14] Sea  $A_o = I + \gamma_o(A - KC)$ , donde las matrices  $A$  y  $C$  tienen la estructura dada por la forma canónica controlable de Brunovsky y  $K$  y  $C_n^p$  son definidas como en (3.10). Entonces, para todo  $\gamma_o \in (0, 1)$ , la única matriz simétrica definida positiva  $P_o$  que satisface la siguiente ecuación matricial algebraica

$$A_o^T P_o A_o - P_o = -\gamma_o P_o - \gamma_o (1 - \gamma_o)^n C^T C \quad (\text{B.6})$$

está dada por  $P_o = M^T M$ , donde  $M = \Lambda_o E_o$ ,  $\Lambda_o = \text{diag} \left( 1, (1 - \gamma_o)^{\frac{1}{2}}, \dots, (1 - \gamma_o)^{\frac{n-1}{2}} \right)$ , además si  $i$  y  $j$  denotan las filas y las columnas de  $E_c$  respectivamente, los elementos de  $E_o$  son  $E_o(i, j) = (-1)^{i+j} C_{n-i}^{j-i}$  para  $j \geq i$  y  $E_o(i, j) = 0$  en caso contrario.<sup>3</sup>

**Lema B.1** [30] Si para un sistema  $\xi(k+1) = F_\tau(k, \xi(k))$  existe un  $p > 0$  (entero),  $\tau_{\max} > 0$ ,  $\nu > 0$  y  $c_\tau > 0$  proporcional a  $\tau^{-1/p}$  tal que para todo  $k \geq k_0$ , toda  $\xi(k_0) = \xi_0$  y todo  $\tau \in (0, \tau_{\max})$

$$\begin{aligned} \max \|\xi(k)\| &\leq \nu \|\xi_0\| \\ \left( \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\xi(k)\|^p \right)^{1/p} &\leq c_\tau \|\xi_0\| \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

entonces, existen  $\kappa$  y  $\lambda_\tau > 0$  proporcional a  $\tau$  tal que (3.2) se cumple para todo  $\xi_0$ .

<sup>3</sup>Para un análisis más detallado de ambas declaraciones véase [14]

## B.4 Función de Lyapunov Discreta

Consideremos la expresión

$$\begin{aligned}\Delta V_2 &= V(x(k+1)) - V(x_{eq}(k+1)) \\ &= V(f_\tau(x(k), 0) + p_\tau(x(k), x_{ref}(k))) - V(f_\tau(x(k), 0))\end{aligned}$$

que en lo sucesivo por simplicidad escribiremos como

$$\Delta V_2 = V(f+p) - V(f) \quad (\text{B.8})$$

Ahora, consideremos la siguiente figura para la expresión (B.8)

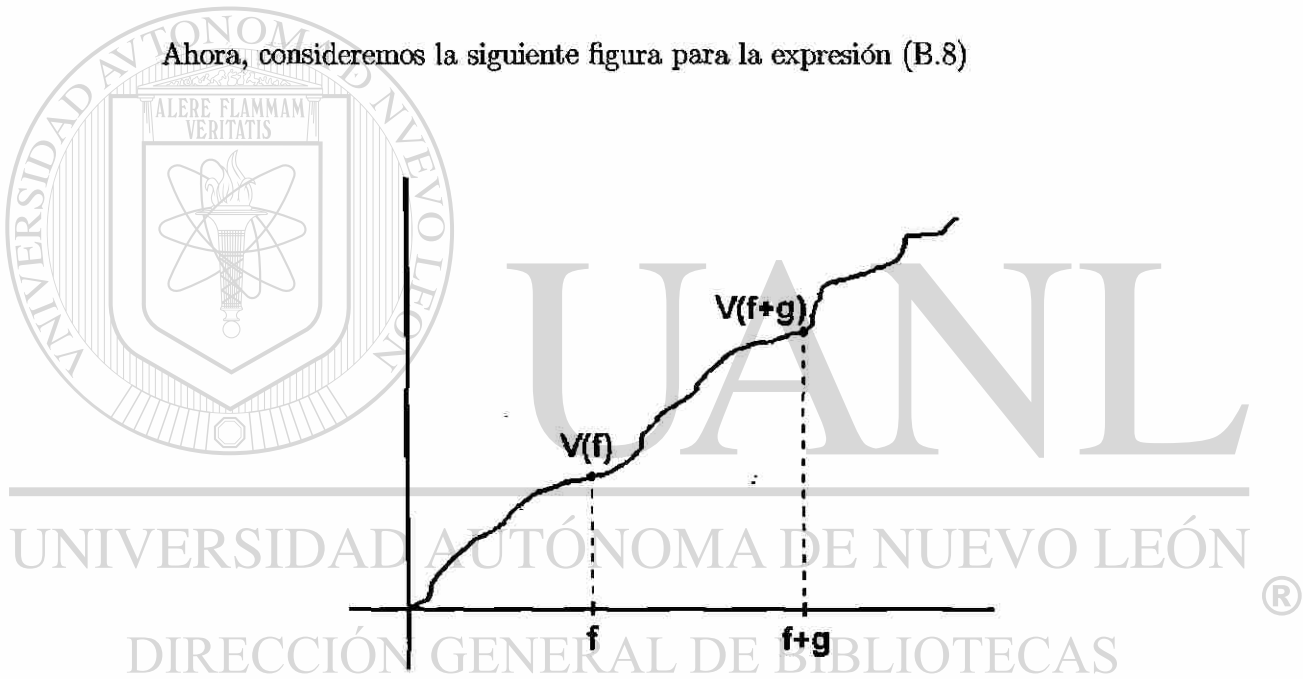


Figura B.1: Teorema de valor medio aplicado a la función de Lyapunov

Por lo tanto, por el teorema de valor medio

$$V'(h) = \frac{V(f+p) - V(f)}{(f+p) - f}, \quad h \in (f, f+p)$$

Entonces  $\Delta V_2$  (B.8) podemos expresarla como

$$\begin{aligned}\Delta V_2 &= V(f+p) - V(f) = V'(h)p \\ &= \frac{\partial V}{\partial x(k)}(h)p\end{aligned}$$

Finalmente, tomando la norma en ambos lados de la expresión resulta

$$\begin{aligned}\|\Delta V_2\| &\leq \left\| \frac{\partial V}{\partial x(k)}(h) \right\| \|p\| \\ &\leq l_V \|p\|\end{aligned}$$

donde  $l_V = \max_{k \geq k_0} \frac{\partial V}{\partial x(k)}(h)$



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Anexo C

### Observador Adaptable

#### C.1 Derivada de una Matriz Inversa

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt}(I) \\
 &= \frac{d}{dt}(AA^{-1}) \\
 &= \left[ \frac{d}{dt}(A) \right] A^{-1} + A \frac{d}{dt}(A^{-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \frac{d}{dt}(A^{-1}) &= - \left[ \frac{d}{dt}(A) \right] A^{-1} \\
 \frac{d}{dt}(A^{-1}) &= -A^{-1} \left[ \frac{d}{dt}(A) \right] A^{-1}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$



#### C.2 Matriz Inversa para el Sistema Extendido

A continuación procedemos a la deducción de la inversa para la matriz del sistema aumentado (4.20), mediante operaciones de renglón<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{cc|cc} S_1 & S_2 & I & O \\ S_2^T & S_3 & O & I \end{array} \right) &\xrightarrow{S_1^{-1}R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} I & S_1^{-1}S_2 & S_1^{-1} & O \\ S_2^T & S_3 & O & I \end{array} \right) \xrightarrow{-S_2^T R_1 + R_2} \\
 \left( \begin{array}{cc|cc} I & S_1^{-1}S_2 & S_1^{-1} & O \\ O & -S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3 & -S_2^T S_1^{-1} & I \end{array} \right) &\xrightarrow{(-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} R_2}
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>En lo sucesivo  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) denota el número de renglón



$$\left( \begin{array}{cc|cc} I & S_1^{-1}S_2 & S_1^{-1} & O \\ O & I & -(-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} & (-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} \end{array} \right) \xrightarrow{-S_1^{-1}S_2 R_2 + R_1}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} I & O & S_1^{-1}S_2 (-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} + S_1^{-1} & -S_1^{-1}S_2 (-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} \\ O & I & -(-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} & (-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} \end{array} \right)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} S_{11}^{-1} &= S_1^{-1}S_2 (-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} + S_1^{-1} \\ &= S_1^{-1} + S_1^{-1}S_2 (-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \\ &= S_1^{-1} - S_1^{-1}S_2 (S_2^T S_1^{-1}S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \\ &= S_1^{-1} \left( I - S_2 (S_2^T S_1^{-1}S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \right) \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned} S_{21}^{-1} &= -(-S_2^T S_1^{-1}S_2 + S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \\ &= (S_2^T S_1^{-1}S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} \end{aligned} \quad (C.3)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

## Anexo D

### Publicaciones

1. Antonio Loria, Jesús de León Morales and Oscar Huerta-Guevara, "On Discrete-time Output-feedback control of Feedback Linearizable Systems", in Proc. of ACC, Denver Colorado, USA, June 2003.
2. Jesús de León Morales, Oscar Huerta-Guevara, Luc Dugard and J. M. Dion, "Discrete-time Nonlinear Control Scheme for Synchronous Generator", in Proc. of 42<sup>th</sup> IEEE CDC, Maui Hawaii, USA, Dec. 2003.
3. Gildas Besançon, Jesús de León Morales and Oscar Huerta-Guevara, "On Adaptive Observers for State Affine Systems and Application to Synchronous Machines", in Proc. of 42<sup>th</sup> IEEE CDC, Maui Hawaii, USA, Dec. 2003.
4. Jesús de León Morales, J. M. Dion and Oscar Huerta-Guevara, "Control Design for Multi-machine Power Systems using Continuous Sliding Modes Approach", XI Congreso Latinoamericano de Control Automático, Habana, Cuba, 2004.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# On discrete-time output-feedback control of feedback linearizable systems

Antonio Loria<sup>1</sup>, Jesús De León Morales<sup>2\*</sup>; Oscar Huerta Guevara<sup>2</sup>

<sup>1</sup>C.N.R.S, Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec,

91192 Gif sur Yvette, France

loria@lss.supelec.fr

<sup>2</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

P. O. Box 148-F, 66450, San Nicolás de Los Garza; Nuevo León, MEXICO.

drjleon@hotmail.com, ohuertag@infosel.com

## Abstract

In this paper, we present a control-observer scheme for discrete-time nonlinear systems. A controller and an observer are proposed for a class of discrete-time nonlinear systems. The results obtained are applied to a flexible robot in order to illustrate the proposed scheme.

**Keywords:** Discrete controller, Euler discretization, Nonlinear Observer, Flexible robot.

## 1. Introduction

Motivated by the recent advances in digital technology, discrete-time nonlinear systems control theory is receiving an increasing attention in different aspects of control and dynamic systems theory originally developed for continuous-time systems. Such is the case of feedback linearization (see e.g. [1, 10, 11]), passivity-based (cf. [3]), backstepping (cf. [7]). See also [4].

The present paper deals with the problem of observer-based output feedback stabilization of Euler approximate discrete-time systems under the standing assumption that the continuous-time system is feedback linearizable. In particular, we will propose a control scheme which relies on the ability to make that the closed loop system has a cascaded structure. Earlier contributions in this direction include [2].

Our main contribution is an observer-based controller which ensures a form of exponential stability which has a uniform bound on the overshoot of the systems response and a convergence rate which is linear in

the sampling period. This specific form of stability is important since only then, one can guarantee that the exact discrete-time and in its turn, the sampled-data systems have certain stability properties. See [8, 9].

## 2. Problem statement

**Notation.** Given any symmetric positive definite matrices  $P, Q$  we will denote by  $\|x\|_P^2 := x^T P x$  for any  $x \in \mathbb{R}^n$  and use the constants  $c_1, c_2$  in the relation  $c_1 \|x\|_P \leq \|x\|_Q \leq c_2 \|x\|_P$ . We will use  $c$  for a generic positive constant, i.e., we will write with an abuse of notation,  $c + c = c^2 = c$ . We denote by  $\xi(k)$  the solution of the difference equation  $\xi(k+1) = F_r(k, \xi(k))$  with initial conditions  $k_0 \geq 0$  and  $\xi_0 = \xi(k_0)$ .

We consider feedback linearizable (in continuous time) nonlinear affine systems. We are concerned by the output feedback problem of the Euler discretization of nonlinear systems in the normal form, i.e., we are interested in designing an observer and an output-feedback controller for the Euler-based system

$$\begin{cases} x(k+1) = A_r x(k) + \tau B \{\alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k)\} \\ y = Cx(k) = x_1(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\text{where } A_r = (I_n + \tau A) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \tau \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

\*Corresponding Author

We assume that  $\beta(x) \neq 0$  for all  $x$ .

We address this control problem by designing an exponentially stabilizing observer-based controller for the approximated linearizable system (2.1). More precisely, we will design an observer-based controller which guarantees the following property for the closed-loop system:

**Definition 1. (Uniform Exponential Stability)** The origin of the system  $\xi(k+1) = F_\tau(k, \xi(k))$  is said to be uniformly exponentially stable if there exist  $r, \tau_{\max}, \kappa > 0$  and for each  $\tau \in (0, \tau_{\max}]$ ,  $\lambda_\tau > 0$  such that,

$$\|\xi(k_0)\| \leq r \Rightarrow \|\xi(k)\| \leq \kappa \|\xi_0\| e^{-\lambda_\tau(k-k_0)} \quad (2.2)$$

$\forall k \geq k_0$ . If furthermore (2.2) holds for all  $\xi(k_0) \in \mathbb{R}^n$  then, the origin is said to be uniformly globally exponentially stable.

The property defined above is probably the most useful for discrete-time systems since it imposes a bound on the overshoots which is uniform in the initial conditions and the sampling time. Moreover, in the particular case when  $\lambda_\tau$  is proportional to  $\tau$ , this property guarantees that the exact discrete-time model is (globally) asymptotically practically stable. Roughly speaking, this means that the solutions tend to an arbitrarily small ball whose size is independent of  $\tau$  and can be made smaller as  $\tau_{\max}$  becomes smaller. See [8] for precise definitions and the only formal framework we are aware of, which establishes asymptotic practical stability of exact discrete-time nonlinear systems based on uniform (practical) asymptotic stability of approximate discrete-time systems.

### 3. Observer-based control

#### 3.1. Control design

Consider the system (2.1) under the action of the static feedback-linearizing control law,

$$u = \beta^{-1}(x) [v(x) - \alpha(x)], \quad (3.1)$$

where  $\alpha(x)$  and  $\beta(x)$  are assumed to be known,  $\beta(x) \neq 0$  for all  $x \in \mathbb{R}^n$ , and the external control input  $v(x)$  is defined as

$$v(x) = -F\Omega_\rho x \quad (3.2)$$

where the matrices  $F \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  and  $\Omega_\rho \in \mathbb{R}^{n \times n}$  are given by

$$\begin{aligned} \Omega_\rho &= \text{diag}(\rho^n, \dots, \rho), \\ F &= (C_n^0 \ \dots \ C_n^{n-1}), \end{aligned} \quad \rho \geq 1, \quad (3.3)$$

with  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ . Then, the resulting closed-loop system is

$$x(k+1) = (A_\tau - \tau BF\Omega_\rho)x(k). \quad (3.4)$$

The following result is useful to establish our main result.

**Lemma 1.** *There exists  $\tau_{\max} > 0$  sufficiently small such that the system (2.1) in closed-loop with (3.1), (3.2), (3.3) is uniformly globally exponentially stable with  $\lambda_\tau$  proportional to  $\tau \in (0, \tau_{\max})$  and for all  $\rho > 0$  such that  $\rho\tau_{\max} \in (0, 1)$ .*

The proof of this Lemma is based on the following statement and is omitted here for lack of space.

**Claim 1 ([6]).** *Let  $A_c = I + \gamma_c(A - BF)$  where the matrices  $A$  and  $B$  are in the usual Brunovsky controllable form, and  $F$  and  $C_n^p$  are defined as (3.3). Then, for every  $\gamma_c \in (0, 1)$ , the unique symmetric positive definite matrix  $P_c$  satisfying the algebraic equation*

$$A_c^T P_c A_c - P_c = -\gamma_c P_c - \gamma_c (1 - \gamma_c)^n F^T F$$

is given by  $P_c = N^T N$ , where  $N = \Lambda_c E_c$ ,  $\Lambda_c = \text{diag}(1, (1 - \gamma_c)^{\frac{1}{2}}, \dots, (1 - \gamma_c)^{\frac{n-1}{2}})$  and, letting  $i$  and  $j$  denote the rows and columns of  $E_c$  respectively, the elements of  $E_c$  are  $E_c(i, j) = C_{n-i}^{j-i}$  for  $j \geq i$  and  $E_c(i, j) = 0$  otherwise.

#### 3.2. Observer design

In this section we introduce an observer for the class of systems (2.1) which belongs to the class of systems with a triangular structure. This property of the non-linearity is important because it ensures the uniform observability of the system.

An observer for the transformed system (2.1) is given by

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B [\alpha(z(k)) + \beta(z(k)) u(k)] \\ &\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

where

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( \frac{1}{\theta} \ \dots \ \frac{1}{\theta^n} \right) \quad \text{for } \theta \geq 1, \quad (3.6)$$

$$K = \text{col} \left( C_n^1 \ \dots \ C_n^n \right) \quad \text{with } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

The term  $\tau \Delta_\theta^{-1} K$  represents the observer gain.

Defining the estimation error as  $e = z - x$ , it follows that the dynamics of the estimation error is of the form

$$\begin{aligned} e(k+1) &= \{A_\tau - \tau \Delta_\theta^{-1} K C\} e(k) \\ &\quad + \tau B \Psi_\theta^T(e(k), x(k), u(k)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

where

$$\Psi_o^T(e, x, u) := [\alpha(e+x) - \alpha(x) + (\beta(e+x) - \beta(x))u].$$

In order to make a statement on the stability of the observer we need the following hypothesis.

**Assumption A.** The function  $\Psi_o$  along the trajectories of (2.1) and (3.7), driven by any admissible control input  $u(k)$  satisfy

$$\|B\Psi_o^T(e(k), x(k), u(k))\| \leq l_1 \|e(k)\|,$$

$$\forall k \geq k_0 \geq 0, \quad \forall \tau \in (\theta, \tau_{\max}).$$

**Remark 1.** Notice that this assumption holds for instance if, for each compact  $\mathcal{X}$ , and defining  $\mathcal{U}_\tau := \{u \in R^m : u = \beta^{-1}(x)[v(x) - \alpha(x)], x \in \mathcal{X}\}$  there exists  $l_1 > 0$  such that  $\|B\Psi_o^T(e, x, u)\| \leq l_1 \|e\|$ ,  $x(k) \in \mathcal{X}$  and  $u(k) \in \mathcal{U}_\tau$  for all  $\tau \in (0, \tau_{\max})$  and all  $k \geq k_0 \geq 0$ .

**Lemma 2.** Assume that the system (2.1) satisfies assumption A. Then, there exist  $\tau_{\max} > 0$  sufficiently small and  $\theta_{\min} > 0$  sufficiently large such that the estimation error dynamics (3.7) is uniformly globally exponentially stable with  $\lambda_\tau$  proportional to  $\tau \in (0, \tau_{\max})$ , for all  $\theta > \theta_{\min}$  such that  $\theta_{\min}\tau_{\max} \in (0, 1)$ .

The proof of this Lemma is based on the following claim which is the dual of Claim 1.

**Claim 2 ([6]).** Let  $A_o = I + \gamma_o(A - KC)$  where  $K$  is defined as in (3.6). Then for every  $\gamma_o \in (0, 1)$ , the unique symmetric positive definite matrix  $P_o$  satisfying the algebraic equation,

$$A_o^T P_o A_o - P_o = -\gamma_o P_o - \gamma_o(1 - \gamma_o)^n C^T C,$$

is given by  $P_o = M^T M$  where  $M = \Lambda_o E_o$ ,  $\Lambda_o = \text{diag}(1, (1 - \gamma_o)^{\frac{1}{2}}, \dots, (1 - \gamma_o)^{\frac{n-1}{2}})$  and, letting  $i$  and  $j$  denote the rows and columns of  $E_o$  respectively, the elements of  $E_o$ , are  $E_o(i, j) = (-1)^{i+j} C_{j-1}^{i-1}$  for  $i \leq j \leq n$  and  $E_o(i, j) = 0$  otherwise.

### 3.3. Main result

We can now establish the following result.

**Theorem 1.** Consider the discretized nonlinear system

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\tau x(k) + \tau B \{\alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k)\} \\ y(k) &= Cz(k) \end{aligned}$$

under Assumption A. Then the observer-based output feedback control law,

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B \{\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)\} \\ &\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)] \\ u(k) &= \beta^{-1}(z(k)) [-F\Omega_\rho z(k) - \alpha(z(k))], \end{aligned}$$

renders the equilibrium  $(x, z) = (0, 0)$  of the closed-loop system (2.1), (3.1)-(3.3), (3.5)-(3.6) uniformly exponentially stable.

**Proof:** The result follows if and only if the origin of the estimation error and the observe dynamics,  $(e, z) = (0, 0)$ , is exponentially stable. In view of Lemma 2, we only need to prove that the origin of the observer dynamics under the control action,

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B \{\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)\} \\ &\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)], \end{aligned} \quad (3.8)$$

is uniformly globally exponentially stable.

To prove this, we will invoke the following result.

**Lemma 3.** If for a system  $\xi(k+1) = f_\tau(k, \xi(k))$  there exist  $p > 0$ ,  $\tau_{\max} > 0$ ,  $\nu > 0$  and  $c_\tau$  proportional to  $\tau^{-1/p}$  such that for all  $k \geq k_o$ , all  $\xi(k_o) = \xi_o$  and all  $T \in (0, \tau_{\max})$ ,

$$\max_{k \geq k_o} \|\xi(k)\| \leq \nu \|\xi_o\| \quad (3.9)$$

$$\left( \sum_{k=k_o}^{\infty} \|\xi(k)\|^p \right)^{1/p} \leq c_\tau \|\xi_o\| \quad (3.10)$$

then, there exist  $\kappa$  and  $\lambda_\tau > 0$  proportional to  $\tau$  such that (2.2) holds for all  $\xi_o \in R^m$ .  $\square$

Hence, we proceed to compute the bounds (3.9), (3.10) with  $\xi := \text{col}[e, z]$ . We start with the bounds for  $\|e(k)\|$ . From Lemma 2, it follows that  $\|e(k)\|_{P_o} \leq \|e(k_o)\|_{P_o} e^{-\delta\tau(k-k_o)}$ , i.e.  $\|e(k)\|_{P_o} \leq \|e(k_o)\|_{P_o}$  and therefore, there exists  $c > 0$  such that

$$\|e(k)\| \leq c \|e(k_o)\| \quad \forall k \geq k_o. \quad (3.11)$$

Also from Lemma 2, we obtain  $\Delta V_{\varepsilon_k} \leq -\tau\delta V_{\varepsilon_k}$ , then evaluating the sum from  $k_o$  to  $\infty$  on both sides of  $\Delta V_{\varepsilon_k} \leq -\tau\delta V_{\varepsilon_k}$ , it follows that

$$V_{\varepsilon_{k_o}} \geq -\sum_{k=k_o}^{\infty} \Delta V_{\varepsilon_k} \geq \sum_{k=k_o}^{\infty} \tau\delta \|e(k)\|_{P_o}^2$$

so using the equivalence of the norms  $\|\cdot\|$  and  $\|\cdot\|_{P_o}$  we conclude that there exists  $c > 0$  such that

$$\left( \sum_{k=k_o}^{\infty} \|e(k)\|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{c}{\sqrt{\tau\delta}} \|e(k_o)\|. \quad (3.12)$$

Next, we proceed to compute similar bounds for  $z(k)$ . To this end, reconsider the observer dynamics under the control action, and under the coordinate transformation  $\eta = \Omega_\rho z$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= (I_n + \tau\rho(A - BF))\eta(k) \\ &\quad + \tau\Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} K C \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k) \\ &= A_c \eta(k) + \tau\Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} K C \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k) \end{aligned} \quad (3.13)$$

where  $A_c$  is defined in Claim 1 with  $\gamma_c = \tau\rho$ . Define  $V_\sigma = \sigma^T P_c \sigma$  then, we get that the difference equation  $\Delta V_{\sigma_k} = V_{\sigma_{k+1}} - V_{\sigma_k}$  along the trajectories of  $\sigma(k+1) = A_c \sigma(k)$  yields

$$\begin{aligned} \Delta V_{\sigma_k} &= V_{\sigma_{k+1}} - V_{\sigma_k} \\ &= \sigma^T(k) [A_c^T P_c A_c - P_c] \sigma(k). \end{aligned}$$

It is easy to see from Claim 1 with  $\gamma_c = \tau\rho$ , that

$$\begin{aligned} \Delta V_{\sigma_k} &= -\tau\rho\sigma^T(k)P_c\sigma(k) \\ &\quad -\tau\rho(1-\tau\rho)^n\sigma^T(k)F^T F\sigma(k) \\ \Delta V_{\sigma_k} &\leq -\tau\rho\|\sigma(k)\|_{P_c}^2 \end{aligned}$$

Using this bound we now evaluate the difference equation  $\Delta V_{\eta_k} = V_{\eta_{k-1}} - V_{\eta_k}$  where  $V_{\eta_k} = \eta(k)^T P_c \eta(k)$  along the trajectories of (3.13) to obtain

$$\begin{aligned} \Delta V_{\eta_k} &= V_{\eta_{k-1}} - V_{\eta_k} \\ &\leq -\tau\rho\|\eta(k)\|_{P_c}^2 + \tau^2 N^2 \|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 \\ &\quad + 2\tau N \|\varepsilon(k)\|_{P_c} \|\eta(k)\|_{P_c} \\ &\leq -\tau(\rho-1)\|\eta(k)\|_{P_c}^2 + \tau N^2 \|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 \end{aligned}$$

where we defined  $N := \|\Omega_\rho \Delta_\theta^{-1} K C \Delta_\theta^{-1}\|$ . Evaluating the sum from  $k_0$  to  $\infty$  on both sides of the inequality above, and using (3.12) we obtain that

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{\infty} \Delta V_{\eta_k} &\geq \tau \sum_{k=k_0}^{\infty} \left\{ (\rho-1)\|\eta(k)\|_{P_c}^2 - cN^2 \|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2 \right\} \\ &\geq \tau(\rho-1) \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\eta(k)\|_{P_c}^2 - cN^2 \frac{\|\varepsilon(k_0)\|_{P_c}^2}{\delta} \end{aligned}$$

which implies that

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \|\eta(k)\|_{P_c}^2 \leq \frac{c}{\tau(\rho-1)} \left( \|\eta(k_0)\|_{P_c}^2 + \frac{N^2}{\delta} \|\varepsilon(k_0)\|_{P_c}^2 \right)$$

hence, setting  $\rho_{\min} > 1$  and since  $\eta = \Omega_\rho z$ , we finally obtain that

$$\left( \sum_{k=k_0}^{\infty} \|z(k)\|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{c}{\sqrt{\tau}} \|\xi(k_0)\| \quad (3.14)$$

where it is clear that  $c$  is independent of  $\tau$ . To determine the last bound, we recall that

$$\Delta V_{\eta_k} \leq -\tau(\rho-1)V_{\eta_k} + \tau N^2 \|\varepsilon(k)\|_{P_c}^2.$$

Then, using  $\|\varepsilon(k)\|_{P_c} \leq \|\varepsilon(k_0)\|_{P_c} e^{-\delta\tau(k-k_0)}$ , we obtain that

$$\Delta V_{\eta_k} \leq -\tau(\rho-1)V_{\eta_k} + \tau c N^2 \|\varepsilon(k_0)\|_{P_c}^2 e^{-2\delta\tau(k-k_0)}.$$

To show contradiction, assume that  $V_{\eta_k} \rightarrow \infty$  as  $k \rightarrow \infty$ . From the above we see that there exists  $k^* > 0$ , such that  $\Delta V_{\eta_k} \leq 0$ , which implies that  $\|\eta(k)\|^2 \leq c\|\eta(k_0)\|^2$  for all  $k \geq k^*$ . On the other hand,  $\|\eta(k)\|^2 \leq c\|\eta(k_0)\|^2 + k^* N \tau_{\max} \|\varepsilon(k_0)\|^2$  for all  $k < k^*$ . Therefore,  $\|\eta(k)\|^2 \leq c\|\eta(k_0)\|^2 + ck^* N \tau_{\max} \|\varepsilon(k_0)\|^2$  for all  $k \geq k_0$ . We conclude that there exists  $c > 0$  independent of  $\tau$  such that

$$\|z(k)\| \leq c\|\xi(k_0)\| \quad \forall k \geq 0. \quad (3.15)$$

From the bounds (3.11), (3.12), (3.14), (3.15), and invoking Lemma 3 with  $\nu = c$ ,  $p = 2$  and  $c_\tau := c(\max\{\frac{1}{\tau\delta}, \frac{1}{\tau}\})^{1/2}$  (which is obviously proportional to  $\tau^{-1/2}$ ), we conclude that there exist  $\kappa > 0$  and  $\lambda_\tau$ , proportional to  $\tau$ , such that (2.2) holds. ■

## 4. Application to a flexible-joint robot

We apply the results developed above to the control of the flexible-joint robot. The dynamic equations of a single link robot arm with a revolute elastic joint rotating in a vertical plane are given by

$$\begin{aligned} J_l \ddot{q}_1 + F_l \dot{q}_1 + k(q_1 - q_2) + mgl \sin(q_1) &= 0 \\ J_m \ddot{q}_2 + F_m \dot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u \\ y &= q_1 \end{aligned}$$

in which  $q_1$  and  $q_2$  are the link displacement and the rotor displacement, respectively. The link inertia  $J_l$ , the motor rotor inertia  $J_m$ , the elastic constant  $k$ , the link mass  $m$ , the gravity constant  $g$ , the center of mass  $l$  and the viscous friction coefficients  $F_l$  and  $F_m$  are positive constant parameters. The control  $u$  is the torque delivered by the motor. Assuming that only  $q_1$  is measured,  $u$  is to be designed so that  $q_1$  tracks a desired reference  $q_{r1}(t)$  where the parameters are assumed to be known. Defining the state variables,

$$\xi_1 = q_1, \quad \xi_2 = \dot{q}_1, \quad \xi_3 = q_2, \quad \xi_4 = \dot{q}_2,$$

the model in state-space form is

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{F_l}{J_l} \xi_2 - \frac{mgl}{J_l} \sin(\xi_1) - \frac{k}{J_l} (\xi_1 - \xi_3) \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= -\frac{F_m}{J_m} \xi_4 - \frac{k}{J_m} (\xi_1 - \xi_3) + \frac{1}{J_m} u. \end{aligned} \quad (4.1)$$

### 4.1. Control design

The system (4.1) is state-feedback linearizable by means of the change of coordinates (cf. [5])

$$x_1 = \xi_1,$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \xi_2 \\
x_3 &= -\frac{F_1}{J_1}\xi_2 - \frac{mgl}{J_1}\sin(\xi_1) - \frac{k}{J_1}(\xi_1 - \xi_3) \\
x_4 &= \frac{F_1^2}{J_1^2}\xi_2 + \frac{F_1mgl}{J_1^2}\sin(\xi_1) \\
&\quad + \frac{F_1k}{J_1^2}(\xi_1 - \xi_3) - \frac{k}{J_1}(\xi_2 - \xi_4) \\
&\quad - \frac{mgl}{J_1\tau}\sin(\xi_1) + \frac{mgl}{J_1\tau}\sin\xi_1
\end{aligned}$$

and feedback

$$u = \beta^{-1}[v(x) - \alpha(x)]$$

where  $\beta(x) = \tau \frac{k}{J_1 J_m}$  and

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= \left( \frac{mgl}{J_1}\sin x_1 + \frac{F_1mgl}{J_1^2}\cos x_1 + \frac{kF_1^2}{J_1} \right) x_2 \\
&\quad + \frac{mgl}{J_1}\cos x_1 + \left( \frac{k}{J_1} - \frac{F_1^2}{J_1^2} \right) \times \\
&\quad \times \left[ \frac{F_1}{J_1}x_2 + \frac{mgl}{J_1}\sin x_1 + \frac{x}{J_1}(x_1 - x_3) \right] \\
&\quad - \frac{kF_1}{J_1^2}x_4 + \frac{k}{J_1} \left[ \frac{k}{J_m}(x_1 - x_3) - \frac{F_m}{J_m}x_4 \right].
\end{aligned}$$

The external control is given by  $v(x) = -F\Omega_\rho x$ , where the matrices  $F$  and  $\Omega_\rho$  are defined as in (3.3), i.e.

$$F = (C_4^0 \ C_4^1 \ C_4^2 \ C_4^3) = (1 \ 4 \ 6 \ 4) \text{ and } \Omega_\rho = \text{diag}(\rho^4, \rho^3, \rho^2, \rho).$$

Then the external control is given by

$$\begin{aligned}
v(x) &= -F\Omega_\rho x \\
&= -(\rho^4 x_1 + 4\rho^3 x_2 + 6\rho^2 x_3 + 4\rho x_4).
\end{aligned}$$

## 4.2. Observer design

According to Section 3.2, the observer is given by

$$\begin{aligned}
z(k+1) &= A_z z(k) + \tau B \{ \alpha(z(k)) + \beta(z(k)) u(k) \} \\
&\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)]
\end{aligned}$$

where the observer gain is

$$\tau \Delta_\theta^{-1} K = \tau \begin{pmatrix} 4\theta \\ 6\theta^2 \\ 4\theta^3 \\ \theta^4 \end{pmatrix}$$

with  $\Delta_\theta^{-1} = \text{diag}(\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4)$ ;

$$K = \text{col} (C_4^1 \ C_4^2 \ C_4^3 \ C_4^4) = \text{col} (4 \ 6 \ 4 \ 1).$$

Therefore, the observer becomes

$$\begin{aligned}
z_1(k+1) &= z_1(k) + \tau z_2(k) + 4\tau\theta(x_1(k) - z_1(k)) \\
z_2(k+1) &= z_2(k) + \tau z_3(k) + 6\tau\theta^2(x_1(k) - z_1(k)) \\
z_3(k+1) &= z_3(k) + \tau z_4(k) + 4\tau\theta^3(x_1(k) - z_1(k)) \\
z_4(k+1) &= z_4(k) + \tau\alpha(z(k)) + \tau\beta(z(k))u(k) \\
&\quad + \tau\theta^4(x_1(k) - z_1(k)).
\end{aligned}$$

## 4.3. Simulation results

Numerical simulations were carried out to assess the closed loop responses of a flexible-joint robot using the above observer and controller algorithms was performed for the following numerical values:  $m = 0.4$  Kg,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>,  $l = 0.185$  m,  $J_1 = 0.002$  N-ms<sup>2</sup>/rad,  $J_m = 0.0059$  N-ms<sup>2</sup>/rad,  $k = 1.61$  N-m/s/rad

The initial conditions for the numerical simulation were selected as follows:  $k_0 \approx 0$ ,  $x(0) = \text{col} (0.1 \ 0.2 \ 0.03 \ 0.04)$  and  $z(0) = \text{col} (0.2 \ 0.3 \ 0.15 \ 0.25)$ . The sampling period was set to  $\tau = 0.0001$ . The parameter of the controller gain was set to  $\rho = 30$ , the parameter design of the observer was chosen as  $\theta = 80$  and finally, the reference signal is  $q_{r1}(t) = \frac{1}{2} \sin(4t)$ . Figures 1-4 illustrate the performance of the proposed scheme.

## 5. Conclusions

An observer-based controller for feedback linearizable discrete-time nonlinear systems of Euler type was presented. Uniform exponential stability of the closed loop system was established. This allows to conclude on the practical asymptotic stability of the corresponding sampled-data system.

The usefulness and the performance of the proposed scheme was illustrated on the application to a flexible-joint robot. In particular, simulations show the fast convergence of the observer.

## References

- [1] C. Califano, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. "On the discrete-time normal form." *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 43(11):1654-1658, 1998.
- [2] Z-P. Jiang and Y. Wang. "Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems". *Automatica*, 37(6):857-869, 2001.
- [3] W. Lin and C. Byrnes. "Passivity and absolute stabilization of a class of discrete-time nonlinear systems". *Automatica*, 31(2):263-267, 1995.

- [4] I. M. Y. Mareels, H. B. Penfold, and R. J. Evans. "Controlling nonlinear time-varying systems via euler approximations". *Automatica*, pages 681-696, 1992.
- [5] R. Marino and P. Tomei. "Global adaptive output feedback control of nonlinear systems. Part I: Linear parameterization". *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 38:17-32, 1993.
- [6] J. De Leon Morales, K. Busawon, and G. Acosta-Villarreal. "Digital implementation of an observer-based controller for rigid robot". In *Proc. 37th. IEEE Conf. Decision Contr.*, Tampa, FL, USA, 1998.
- [7] D. Nešić and A. Teel. "Backstepping on the Euler approximate model for stabilization of sampled-data nonlinear systems". In *Proc. 39th. IEEE Conf. Decision Contr.*, San Diego, Ca, 2001.
- [8] D. Nešić, A. Teel, and P. Kokotović. "Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations". *Syst. & Contr. Letters*, 33:259-270, 1999.
- [9] D. Nešić, A. Teel, and E. Sontag. "Formulas relating  $\mathcal{KL}$  stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems". *Syst. & Contr. Letters*, 38:49-60, 1999.
- [10] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [11] C. Simoes, H. Nijmeijer, and J. Tsinias. "Nonsmooth stabilizability and feedback linearization of discrete-time systems". *Int. J. Rob. Nonl. Contr.*, 6:171-188, 1996.

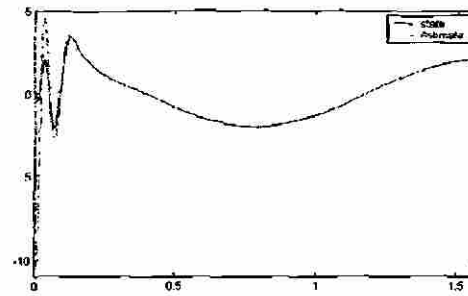


Figure 2. Rotor displacement.

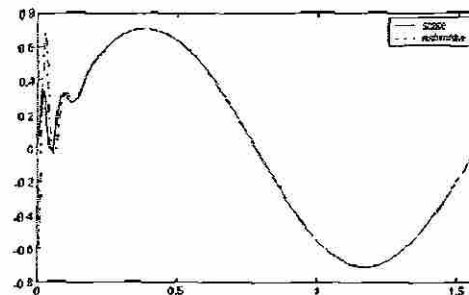


Figure 3. Link velocity.

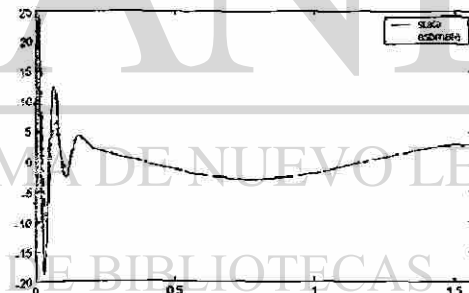


Figure 4. Rotor velocity.

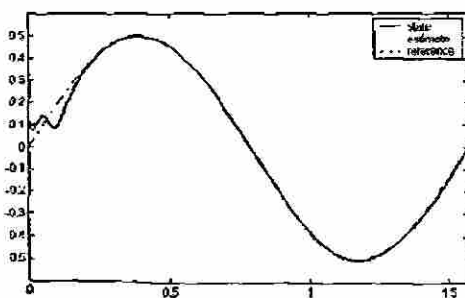


Figure 1. Link displacement.



## Discrete-time Nonlinear Control Scheme for Synchronous Generator

J. De León-Morales<sup>1,2</sup>, O. Huerta-Guevara<sup>1,2\*</sup>, L. Dugard<sup>2</sup> and J. M. Dion<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León

Programa Doctoral en Ingeniería

Apdo. Postal 148-F, San Nicolás de Los Garza, N. L. 66451. MEXICO

<sup>2</sup>Laboratoire d'Automatique de Grenoble CNRS/INPG UMR 5528

ENSIEG-BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, FRANCE

Tel. (33) 4 76 82 62 36 - Fax: (33) 4 76 82 63 88

drjleon@hotmail.com, ohuertag@infosel.com, Luc.Dugard@inpg.fr, Jean-Michel.Dion@inpg.fr

### Abstract

In this paper, we consider a class of nonlinear systems which are discretized via an Euler discretization procedure. A control design based on sliding-mode techniques is proposed. Furthermore, a discrete-time nonlinear observer is used. The proposed controller-observer scheme is applied to a synchronous generator connected to an infinite bus. Simulations are carried out to show the performance of the controller-observer scheme.

### Keywords

Discrete-time systems, Sliding-mode, Nonlinear observer, Synchronous generator.

designed, then the controller is discretized and implemented using sampler and hold devices. A second approach a discrete-time controller is designed using an exact discrete-time model of the plant. However, it is well-known that to obtain the exact discrete-time model is not evident. Instead, an approximated discrete-time model can be obtained using some numerical integration scheme. One of the simplest schemes is the Euler discretization. Furthermore, taking into account the new results which guarantee, under suitable conditions [7], that if a controller stabilizes an approximate (Euler) discrete-time model then for sufficiently small sampling periods the same controller will stabilize the exact discrete-time plant model in semiglobal and practical sense.

### 1. Introduction

The increasing complexity of electric power systems demands more efficient and powerful methods to ensure the control and operation of such systems. One of the strategies to improve the dynamic performance and large disturbance stability of synchronous generators consists in the design of excitation controllers. The main control function of excitation system is to regulate the generator terminal voltage.

Various techniques have been recently investigated to tackle the problem of transient stability by considering nonlinear models (see, for example [1, 3, 6]). Alternatively, the sliding-mode control technique has been extensively used when a robust control scheme is required [2, 8]. Usually these methods are developed for continuous-time representation.

However, these controllers are implemented via digital computers, then several different methods have been proposed to design digital controllers for continuous-time plants. One approach, which sometimes is referred to as the emulation method, considers a continuous-time plant model for which a continuous-time controller is

On the other hand, when all states of a control system are not available for feedback, an observer is necessary. In the nonlinear continuous-time case, several results have been proposed (see[5]). For discrete-time nonlinear systems this problem remains open, and some results have been proposed. In this paper, we present an observer design for a specific class of discrete-time nonlinear systems considered here.

In this paper, we propose a stabilizing control law based on sliding-mode methodology, which allows to track a rotor angle reference for a synchronous generator. The controller-observer scheme is then applied to the model of a synchronous generator and the overall stability is shown via simulation.

The paper is organized as follows. In Section 1, we introduce some basic notions on the structure of the class of nonlinear systems considered in this paper. The control and observer design proposed in this work are also introduced is given in Section 2 and 3 respectively. In Section 4, the controller-observer scheme is applied to the model of the synchronous generator and numerical simulations are presented. Finally, conclusions are drawn.

\*Corresponding Author

## 2. Problem setting and definitions

We denote by  $\xi(k)$  the solution of the difference equation  $\xi(k+1) = F_\tau(k, \xi(k))$  with initial conditions  $k_0 \geq 0$  and  $\xi_0 = \xi(k_0)$ .

We consider the following class of continuous-time nonlinear systems

$$\Sigma_{NLG} : \begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u \\ y = h(\xi) \end{cases} \quad (2.1)$$

using the Euler approximation under the assumption of a sufficiently small sampling period,

$$\Sigma_{NLG} : \begin{cases} \xi(k+1) = \xi(k) + \tau \{f(\xi(k)) + g(\xi(k))u(k)\} \\ y(k) = h(\xi(k)) \end{cases} \quad (2.2)$$

where for simplicity we denote  $\xi(k) = \xi(k\tau)$ , for  $\tau$  fixed.

In the sequel, the following definition can be used in order to design a controller and an observer.

**Definition 1.** Let  $\Xi \subset \mathbb{R}^n$  be a compact set. The system (2.2) is locally feedback linearizable if there exists a diffeomorphism  $\Upsilon : \Xi \rightarrow \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  such that  $\mathcal{X} = \Upsilon(\Xi)$  contains the origin and defining  $x = \Upsilon(\xi)$ , the system (2.2) can be transformed into

$$\tilde{\Sigma}_{NLG} : \begin{cases} x(k+1) = A_\tau x(k) + \tau B \{ \alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k) \} \\ y = Cx(k) = x_1(k) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{where } A_\tau = (I_n + \tau A) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tau \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$C = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$  and  $\tau$  is the sampling period, see [4].

We will address the above mentioned control problem by designing an observer-based controller scheme for the system (2.3). More precisely, we will design an observer for which the following property can be verified:

**Definition 2. (Uniform exponential stability)** The origin of the system  $\xi(k+1) = F_\tau(k, \xi(k))$  is said to be uniformly exponentially stable if there exist  $r, \tau_{\max}, \kappa > 0$  and for each  $\tau \in (0, \tau_{\max})$ ,  $\lambda_\tau > 0$  such that,

$$\|\xi(k_0)\| \leq r \Rightarrow \|\xi(k)\| \leq \kappa \|\xi_0\| e^{-\lambda_\tau(k-k_0)} \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.4)$$

If furthermore (2.4) holds for all  $\xi(k_0) \in \mathbb{R}^n$  then, the origin is said to be *uniformly globally exponentially stable*.

The property defined above is probably the most useful for discrete-time systems since it imposes a bound on the overshoots which are uniform in the initial conditions and the sampling time. Moreover, in the particular

case when  $\lambda_\tau$  is proportional to  $\tau$ , this property guarantees that the *exact* discrete-time model corresponding to (2.1) (hence with a discretized control input) is (globally) asymptotically practically stable. Roughly speaking, this means that the solutions tend to an arbitrarily small ball whose size is independent of  $\tau$  and can be made smaller as  $\tau_{\max}$  becomes smaller.

## 3. Sliding-Mode Control Design

In the sequel, a control design based on sliding mode techniques is proposed. The main idea is to design an asymptotically stabilizing feedback control law assuring the sliding motion on a  $(n-m)$  dimensional space  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ . Consider the following nonlinear discrete-time dynamics

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} x(k+1) = \mathcal{F}_\tau(x(k)) + \mathcal{G}_\tau(x(k))u(k) \\ y = Cx(k) = x_1(k) \end{cases} \quad (3.1)$$

The objective of the sliding mode control strategy is to steer the states of the system into a  $(n-m)$  dimensional manifold  $\mathcal{M}$  and to maintain the subsequent motion of the trajectories on  $\mathcal{M}$ , such that as  $k \rightarrow \infty$ ,  $x(k) \rightarrow 0$ .

For this system a sliding mode control is designed by considering the following switching surface

$$\sigma(k) = S^T (x(k) - x_{ref}(k)) \quad (3.2)$$

where  $S$  is a vector:  $S = \text{col}(S_1, \dots, S_n)$  and  $x_{ref}(k+1) = x_{ref}(k)$  is a constant reference signal. We assume that  $S^T \mathcal{G}(x(k))$  is invertible.

**Remark 1:**

i) From Definition 1, the system (2.2) can be transformed into (2.3), which can be expressed as system (3.1) by taking  $\mathcal{F}_\tau(x(k)) = A_\tau x(k) + \tau B \alpha(x(k))$  and  $\mathcal{G}_\tau(x(k)) = \tau B \beta(x(k))$ .

ii) It is clear that there exist others possibilities to define the switching surface. The choice depends on the control objective.

The proposed control is designed in two steps. Firstly, the *equivalent control*  $u_e(k)$  is determined when the system motion is restricted to the switching surface  $\sigma(k+1) = 0$ , so that the control satisfying this sliding condition is given by

$$u_e(k) = [S^T \mathcal{G}_\tau(x(k))]^{-1} [S^T \mathcal{F}_\tau(x(k)) - S^T x_{ref}(k+1)]$$

The next step is as follows. A *regulation control*  $\Delta u$  is added in order to satisfy the reaching condition. A necessary and sufficient condition for assuring both sliding motion and convergence onto  $\mathcal{M}$  is the discrete-time reaching condition which can be stated as

$$|\sigma(k+1)| < |\sigma(k)|$$

which must be satisfied (see [2]). For that, the switching surface can be chosen as

$$\sigma(k+1) = \eta S^T (x(k) - x_{ref}(k)) = \eta \sigma(k) \quad (3.3)$$

where  $0 < \eta < 1$  is a scalar weighting value. It is clear that this choice satisfies the *reaching condition*, i.e.

$$\eta|\sigma(k)| < |\sigma(k)|.$$

Then, the regulation control  $\Delta u$  can be designed as follows

$$\Delta u(k) = [\mathcal{S}^T \mathcal{G}_\tau(x(k))]^{-1} [\eta \mathcal{S}^T (x(k) - x_{ref}(k))].$$

Finally, the control law is given by

$$u(k) = u_e(k) + \Delta u(k) \quad (3.4)$$

The stability properties of  $\sigma(k) = 0$  in (3.3) can be studied by means of the candidate Lyapunov function  $V(\sigma(k)) = \sigma^T(k)\sigma(k)$ . It follows that

$$\begin{aligned} V(\sigma(k+1)) - V(\sigma(k)) &= \sigma^T(k+1)\sigma(k+1) - \sigma^T(k)\sigma(k) \\ &= -(1 - \eta^2)\sigma^T(k)\sigma(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or equivalently } V(\sigma(k+1)) &= \eta^2 V(\sigma(k)) \\ &= (\eta^2)^k V(\sigma(0)). \end{aligned}$$

Hence,  $V(\sigma(k+1)) \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ .

To prove the stability of the closed-loop system under control action  $u(k)$  it is necessary to introduce the notion of ultimate bound for the solutions of the unperturbed system

$$\xi(k+1) = F_\tau(\xi(k), k) \quad (3.5)$$

where  $F_\tau(\xi(k), k) = \xi(k) + \tau f(\xi(k))$ , which will be used to study the stability properties of a class of perturbed discrete nonlinear systems when the equilibrium point is affected by a small perturbation in some sense.

**Definition 3.** The solutions of system (3.5) are said to be uniformly ultimately bounded if there exist positive constants  $\beta_1$  and  $\beta_2$  and for every  $r \in (0, \beta_2)$  there is a constant  $T = T(r)$ , such that

$$\|\xi(k_0)\| < r \Rightarrow \|\xi(k)\| < \beta_1, \quad \forall k > k_0 + T.$$

The constant  $\beta_1$  is known as the ultimate bound.

Furthermore, we introduce a result of existence of the ultimate bound for the solution of system (3.5).

Consider the following assumptions:

**A1.** There exists  $\mu > 0$  such that the equilibrium point  $\xi = 0$  is uniformly stable on  $B_\mu$ .

**A2.** There exists a continuous function  $V : B_r \times Z_+ \rightarrow R$  such that

$$\begin{aligned} c_1 \|\xi(k)\|^2 &\leq V(\xi, k) \leq c_2 \|\xi(k)\|^2 \\ \Delta V(\xi, k) &\leq -c_3 \|\xi(k)\|^2 \end{aligned}$$

for  $0 < \mu < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} r$ , for some positive constants  $c_1, c_2$  and  $c_3$ , for all  $k > 0$  and for all  $\xi \in B_r$ .

**Theorem 1.** Consider the system (3.5). Assume that A1 and A2 hold. There exists a class  $\mathcal{KL}$  function  $\phi(\cdot, \cdot) = \phi(\cdot)\rho(\cdot)$  such that  $\rho$  is a function of class  $\mathcal{K}$ ,  $\rho$  is a decreasing function and a finite time  $k_1$ , depending on  $\xi(k_0)$  and  $\mu$ , such that the solution of (3.5) satisfies

$$\|\xi(k)\| \leq \phi(\|\xi(k_0)\|)\rho(k - k_0)$$

and

$$\|\xi(k)\| \leq \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \mu, \quad \forall k \geq k_1$$

for  $\|\xi(k_0)\| < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} r$ .

Now, the system (3.1) under the action of the control (3.4) yields the closed-loop system

$$x(k+1) = f_\tau(x(k), 0) + p_\tau(x(k), x_{ref}(k)) \quad (3.6)$$

where

$$\begin{aligned} f_\tau(x(k), 0) &= \mathcal{F}_\tau(x(k)) \\ &+ \mathcal{G}_\tau(x(k)) [\mathcal{S}^T \mathcal{G}_\tau(x(k))]^{-1} [\eta \mathcal{S}^T x(k) - \mathcal{S}^T \mathcal{F}_\tau(x(k))] \end{aligned}$$

and

$$p_\tau(x(k), x_{ref}(k)) = \mathcal{G}_\tau(x(k)) [\mathcal{S}^T \mathcal{G}_\tau(x(k))]^{-1} \times [\mathcal{S}^T x_{ref}(k+1) - \eta \mathcal{S}^T x_{ref}(k)]$$

It is clear that the closed-loop system (3.6) can be seen as a system with a unperturbed part, represented by  $f_\tau(x(k), 0)$  and a perturbed part given by  $p_\tau(x(k), x_{ref}(k))$ .

From the boundedness of the columns of  $\mathcal{G}_\tau(x(k))$  and the non-singularity of  $\mathcal{S}^T \mathcal{G}_\tau(x(k))$ , it follows that the perturbed part satisfies the following inequality

$$\|p_\tau(x(k), x_{ref}(k))\| \leq l_1 \|x(k)\|^2 + l_2 \|x_{ref}(k)\|^2 \quad (3.7)$$

for  $x(k), x_{ref}(k) \in B_r$ , where  $l_1$  and  $l_2$  are positive constants.

Now, we consider the following assumptions about the perturbed system:

**A3.** The equilibrium point of  $x(k+1) = f_\tau(x(k), 0)$ , is locally exponentially stable.

**A4.** The reference signal  $x_{ref}(k)$  is uniformly bounded and satisfy  $\|x_{ref}(k)\| \leq b$ , for some positive constant  $b$ .

By a converse theorem of Lyapunov, assumption A3 assures the existence of a Lyapunov function  $V(x, k)$  which satisfies

$$c_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x, k) \leq c_2 \|x(k)\|^2 \quad (3.8)$$

$$\Delta V_1(x, k) = V(x, k+1) - V(x, k) \leq -c_3 \|x(k)\|^2 \quad (3.9)$$

for some positive constants  $c_1, c_2$  and  $c_3$ .

Then, the forward difference function  $\Delta V(x, k)$  along the trajectories of the closed-loop system is given by

$$\Delta V(x, k) = \Delta V_1(x, k) + \Delta V_2(x, k)$$

where

$$\Delta V_1(x, k) = V(f_\tau(x(k), 0), k+1) - V(x, k),$$

and

$$\begin{aligned} \Delta V_2(x, k) &= V(f_\tau(x(k), 0) + p_\tau(x(k), x_{ref}(k)), k+1) \\ &- V(f_\tau(x(k), 0), k+1). \end{aligned}$$

Furthermore, from assumption A4 and (3.7), the function  $\Delta V_2(x, k)$  satisfies the following inequality

$$\begin{aligned} |\Delta V_2(x, k)| &\leq l_p \|\pm f_\tau(x(k), 0) + p_\tau(x(k), x_{ref}(k))\| \\ &\leq l_p l_1 \|x(k)\|^2 + l_p l_2 \|x_{ref}(k)\|^2 \\ &\leq l_p l_1 \|x(k)\|^2 + l_p l_2 b^2 \end{aligned}$$

Using the condition (3.9) and the above inequality, we have

$$\Delta V(x, k) \leq -(c_3 - l_p l_1) \|x(k)\|^2 + l_p l_2 b^2.$$

If  $l_1$  is sufficiently small such that  $l_1 < \tilde{l}_1 < \frac{c_3}{l_p}$  is satisfied. It follows that

$$\Delta V(x, k) \leq -a \|x(k)\|^2 + l_p l_2 b^2$$

where  $a = (c_3 - l_p \tilde{l}_1)$ .

Then, the forward difference function  $\Delta V(x, k)$  satisfies

$$\begin{aligned} \Delta V(x, k) &\leq -(1 - \gamma)a \|x(k)\|^2 - \gamma a \|x(k)\|^2 + l_p l_2 b^2 \\ &\leq -(1 - \gamma)a \|x(k)\|^2, \end{aligned}$$

for some  $\gamma$  such that  $0 < \gamma < 1$  and for all  $\|x(k)\| \geq \sqrt{\frac{l_p l_2 b^2}{\gamma a}}$ .

It follows that  $l_2 \leq \frac{\gamma a}{l_p b^2} \|x(k)\|^2$  for  $\|x(k)\| < \sqrt{\frac{c_1}{c_2} r}$ , and a bound for  $l_2$  is given by  $l_2 \leq \tilde{l}_2 < \frac{\gamma a}{l_p b^2} \frac{c_1}{c_2} r^2$ . From Theorem 1, the ultimate bound of the solution of system

$$(3.6) \text{ is given by } B = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \sqrt{\frac{l_p l_2 b^2}{\gamma a}}$$

where the solutions of the slow system satisfy

$$\|x(k)\| < \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \sqrt{\frac{l_p l_2 b^2}{\gamma a}}, \quad \forall k \geq k_1,$$

for some finite time  $k_1$ .

To prove that the closed-loop system is locally ultimately bounded, we have the following lemma.

**Lemma 2.** Consider the discrete-time nonlinear system (2.2) for which a control (3.4) is designed. Suppose that assumptions A3 and A4 hold. Then, there exist positive constants  $\tilde{l}_1$  and  $\tilde{l}_2$  such that, for any initial state  $x(k_0)$ , the solutions of the closed-loop system (3.6) are ultimately bounded.

For  $x_{ref}(k) = 0, \forall k > k_0$ ; the following result can be obtained.

**Corollary 1:** Consider the discrete-time nonlinear system (2.2) for which a control (3.4) is designed. Suppose that assumption A3 holds. Then, there exists a positive constant  $\tilde{l}_1$  such that, for any initial state  $x(k_0)$ , the solutions of the closed-loop system (3.6) are uniformly exponentially stable.

## 4. Observer design

In this section we introduce an observer for the class of systems (2.3) which belongs to the class of systems with a triangular structure. This property of the nonlinearity is important because it ensures the uniform observability of the system.

An observer for the transformed system (2.3) is given by

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B [\alpha(z(k)) + \beta(z(k)) u(k)] \\ &\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_\theta &= \text{diag} \left( \frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^n} \right) \text{ for } \theta \geq 1, \\ K &= \text{col} \left( C_n^1, \dots, C_n^n \right) \text{ with } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

The term  $\tau \Delta_\theta^{-1} K$  represents the observer gain.

Defining the estimation error as  $e = z - x$ , it follows that the dynamics of the estimation error is of the form

$$e(k+1) = (A_\tau - \tau \Delta_\theta^{-1} K C) e(k) + \tau B \Psi_\theta^\tau(e(k), x(k), u(k)) \quad (4.3)$$

where  $\Psi_\theta^\tau(e, x, u) := [\alpha(e+x) - \alpha(x) + (\beta(e+x) - \beta(x)) u]$ .

In order to make a statement on the stability of the observer we need the following hypothesis.

**A5.** The function  $\Psi_\theta$  along the trajectories of (2.3) and (4.3), driven by any admissible control input  $u(k)$  satisfies

$$\|B \Psi_\theta^\tau(e(k), x(k), u(k))\| \leq l_3 \|e(k)\|, \quad \forall k \geq k_0 \geq 0, \quad \forall \tau \in (0, \tau_{\max}).$$

**Remark 2.** Notice that this assumption holds for instance if, for each compact  $\mathcal{X}$ , and defining

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\tau &:= \{u \in R^p : u = [S^T \mathcal{G}_\tau(x(k))]^{-1} \times \\ &\quad [S^T x_{ref}(k+1) + \eta S^T (x(k) - x_{ref}(k)) - S^T \mathcal{F}_\tau(x(k))], \\ &\quad x \in \mathcal{X}\} \end{aligned}$$

there exists  $l_3 > 0$  such that  $\|B \Psi_\theta^\tau(e, x, u)\| \leq l_3 \|e\|, x(k) \in \mathcal{X}$  and  $u(k) \in \mathcal{U}_\tau$  for all  $\tau \in (0, \tau_{\max})$  and all  $k \geq k_0 \geq 0$ .

**Lemma 3.** Assume that the system (2.3) satisfies assumption A5. Then, there exist  $\tau_{\max} > 0$  sufficiently small and  $\theta_{\min} > 0$  sufficiently large such that the estimation error dynamics (4.3) is uniformly globally exponentially stable with  $\lambda_\tau$  proportional to  $\tau \in (0, \tau_{\max})$ , for all  $\theta > \theta_{\min}$  such that  $\theta_{\min} \tau_{\max} \in (0, 1)$ .

The proof of this theorem is based on the following claim.

**Claim 1.** Let  $A_\theta = I + \gamma_\theta (A - KC)$  where  $K$  is defined as in (4.2). Then for every  $\gamma_\theta \in (0, 1)$ , the unique symmetric positive definite matrix  $P_\theta$  satisfying the algebraic equation,

$$A_\theta^T P_\theta A_\theta - P_\theta = -\gamma_\theta P_\theta - \gamma_\theta (1 - \gamma_\theta)^n C^T C,$$

is given by  $P_\theta = M^T M$  where  $M = \Lambda_\theta E_\theta$ ,  $\Lambda_\theta = \text{diag}(1, (1 - \gamma_\theta)^{\frac{1}{2}}, \dots, (1 - \gamma_\theta)^{\frac{n-1}{2}})$  and, letting  $i$  and  $j$  denote the rows and columns of  $E_\theta$  respectively, the elements of  $E_\theta$ , are  $E_\theta(i, j) = (-1)^{i+j} C_{j-1}^{i-1}$  for  $i \leq j \leq n$  and  $E_\theta(i, j) = 0$  otherwise.

## 5. Application to the Synchronous Generator

In this section, we apply the previous control and observer design techniques to a synchronous generator. We consider a synchronous generator connected through purely reactive transmission lines to the rest of the network which is represented by an infinite bus, i.e. a machine rotating at a synchronous speed  $\omega_s$  and capable of absorbing or delivering any amount of energy [6]. Such a generator can be modelled as

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \omega - \omega_s \\ M \frac{d\omega}{dt} &= T_m - P_g \\ T_{do}' \frac{dE_q'}{dt} &= -\frac{X_d}{X_d'} E_q' - \left( \frac{X_d' - X_d}{X_d'} \right) V \cos(\delta) + E_{fd} \end{aligned} \quad (5.1)$$

where  $\delta = \angle E'_q - \angle V$  is the generator rotor angle referred to the infinite bus (also called power angle),  $\omega = \dot{\delta}$  is the rotor angular speed and  $E'_q$  is the stator voltage which is proportional to flux linkages.  $M$  is the per unit inertia constant,  $T_m$  is the constant mechanical power supplied by the turbine, and  $T'_{do}$  is the transient open circuit time constant.  $X_d = x_d + x_L$  is the augmented reactance, where  $x_d$  is the direct axis reactance and  $x_L$  is the line reactance,  $X'_d$  is the transient augmented reactance and  $V$  is the infinite bus voltage which is fixed.  $P_g$  is the generated power while  $E_{fd}$  is the stator equivalent voltage given by field voltage  $v_f$ .

$$P_g = \frac{1}{X'_d} E'_q V \sin(\delta) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) V^2 \sin(2\delta),$$

$$E_{fd} = \frac{\omega_s M_f v_f}{\sqrt{2} R_f}$$

where  $v_f$  is the scaled field excitation voltage,  $x'_d$  is the transient direct axis reactance,  $x_q$  is the quadrature axis reactance,  $M_f$  is the mutual inductance between stator coils and  $R_f$  is the field resistance. We only consider the case where the dynamics of the damper windings are neglected, *i.e.*  $D = 0$ .

For a given constant field voltage  $E_{fd} = E_{fd}^*$ , the generator possesses two equilibrium points - one stable and one unstable. Throughout this work, the analysis and design are made around the stable equilibrium point even though similar analysis can be made around the unstable equilibrium point. Setting  $(\delta^*, \omega^*, E'_q)^*$  as the stable equilibrium point of (5.1), then the system, represented in terms of the deviations variables  $\Delta\delta = \delta - \delta^*$ ,  $\Delta\omega = \omega - \omega^*$ ,  $\Delta E'_q = E'_q - E'_q^*$ ,  $u = E_{fd} - E_{fd}^*$  and of the following constants  $m_1 = \frac{T_m}{M}$ ,  $m_2 = -\frac{V}{MX'_d}$ ,  $m_3 = \frac{V^2}{M} \left( \frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_q} \right)$ ,  $m_4 = -\frac{X_q}{T'_{do} X'_d}$ ,  $m_5 = -\left( \frac{X'_d - X_d}{T'_{do} X'_d} \right) V$ ,  $m_6 = \frac{1}{T'_{do}}$ , is given by

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\delta}{dt} &= \Delta\omega \\ \frac{d\Delta\omega}{dt} &= m_1 + \{m_2(\Delta E'_q + E'_q^*) + m_3 \cos(\delta)\} \sin(\delta) \\ \frac{d\Delta E'_q}{dt} &= m_4(\Delta E'_q + E'_q^*) + m_5 \cos(\delta) + m_6(u + E_{fd}^*) \end{aligned} \quad (5.2)$$

where  $\delta = \Delta\delta + \delta^*$ . Defining the following change of variable  $x_1 = \Delta\delta$ ,  $x_2 = \Delta\omega$ ,  $x_3 = \Delta E'_q$ , and applying the methodology given in section 2, it follows that the Euler approximate model of the synchronous generator is given by

$$x(k+1) = \mathcal{F}_\tau(x(k)) + \mathcal{G}_\tau(x(k))u(k) \quad (5.3)$$

where  $\mathcal{F}_\tau(x(k)) = x(k) + \tau \begin{pmatrix} x_2(k) \\ m_1 + \{m_2(x_3(k) + E'_q^*) + m_3 \cos(\tilde{x}_1)\} \sin(\tilde{x}_1) \\ m_4(x_3(k) + E'_q^*) + m_5 \cos(\tilde{x}_1(k)) + m_6 E_{fd}^* \end{pmatrix}$

$$\mathcal{G}_\tau(x(k)) = \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_1 = x_1(k) + \delta^*.$$

#### A. Control law design.

In order to regulate the power angle of the generator (5.3), the following switching function was chosen

$$\begin{aligned} \sigma(k) &= \mathcal{S}^T (x(k) - x_{ref}(k)) \\ &= \mathcal{S}_1 (x_1(k) - x_{1ref}(k)) + \mathcal{S}_2 x_2(k) + \mathcal{S}_3 x_3(k) \end{aligned} \quad (5.4)$$

where  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  and  $\mathcal{S}_3$  are constants that are chosen to satisfy the sliding condition and  $x_{1ref}(k)$  is a constant reference signal.

Then the control law is given by

$$u(k) = u_e(k) + \Delta u(k).$$

#### B. Observer design

Consider the following change of coordinates  $x_1 = \Delta\delta$ ,  $x_2 = \Delta\omega$ ,  $x_3 = m_1 + \{m_2(\Delta E'_q + E'_q^*) + m_3 \cos(\delta)\} \sin(\delta)$ . Taking the Euler discretization, we obtain

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + \tau x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \tau x_3(k) \\ x_3(k+1) &= x_3(k) + \tau \{m_4(\Delta E'_q(k) + E'_q^*) \\ &\quad + m_5 \cos(\delta) + m_6(u(k) + E_{fd}^*)\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

where  $m_4 E'_q^* + m_5 \cos(\delta^*) + m_6 E_{fd}^* = 0$ .

The dynamic system described in the new coordinates has the following structure

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\tau x(k) + \tau B \{ \alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k) \} \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (5.6)$$

where  $\alpha(x(k))$  and  $\beta(x(k))$ , in the original coordinates, are given by

$$\begin{aligned} \alpha(x(k)) &= m_2 \sin(\delta(k) + \tau \Delta\omega(k)) E'_q^* + \Delta E'_q(k) \\ &\quad + \tau m_4 (\Delta E'_q(k) + E'_q^*) + \tau m_5 \cos(\delta(k)) \\ &\quad + m_3 \cos(\delta(k) + \tau \Delta\omega(k)) \sin(\delta(k) + \tau \Delta\omega(k)) \\ &\quad - (m_2 (\Delta E'_q(k) + E'_q^*) + m_3 \cos(\delta(k))) \sin(\delta(k)) \\ \beta(x(k)) &= \tau m_2 m_6 \sin(\delta(k) + \tau \Delta\omega(k)) \end{aligned}$$

Then, an observer for system (5.6) is of the form

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B \{ \alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k) \} \\ &\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \tilde{y}(k)]. \end{aligned}$$

where  $K = \text{col}(C_1^3, C_2^3, C_3^3) = \text{col}(3, 3, 1)$ , and the observer gain is given by

$$\tau \Delta_\theta^{-1} K = \text{col}(3\tau\theta, 3\tau\theta^2, \tau\theta^3).$$

#### C. Simulation results.

The simulations were done considering the following nominal values of the generator's parameters (per unit)  $T_m = 1$ ;  $M = 0.033$ ;  $\omega_s = 1$ ;  $T'_{do} = 0.033$ ;  $X_q = X_d = 0.9$ ;  $X'_d = 0.3$ ;  $V = 1.0$ . Furthermore, the stable equilibrium point was obtained from (5.1) for a stator equivalent field equivalent voltage  $E_{fd}^* = 1.1773$ :  $\delta^* = 0.870204$ ,  $\omega^* = 1$ ,  $E'_q^* = 0.822213$ . The control and observer parameters are chosen as  $\mathcal{S}_1 = 5$ ,  $\mathcal{S}_2 = 2$ ,  $\mathcal{S}_3 = 2$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $\theta = 0.8$  and  $\tau$  was chosen as  $\tau = 0.01$ .

Simulations were performed with the proposed discrete-time controller-observer scheme. First, in order to illustrate the performance of the observer, we consider the open-loop case. For this set of simulations, the

initial conditions for the generator variables and the estimates were fixed to  $\delta(0) = 0.8$ ,  $\omega(0) = 0.1$ ,  $E'_q(0) = 0.8$ ,  $\hat{\delta}(0) = 0.79$ ,  $\hat{\omega}(0) = 0.0$  and  $\hat{E}'_q(0) = 0.8$ . Figures 1-3 show that the estimates given by the observer converge to the state of the system in open-loop.

In Figures 4, the performance of the observer-controller scheme is shown, where the initial conditions of the system were fixed as :  $\delta(0) = 0.77$ ,  $\omega(0) = 0.1$ ,  $E'_q(0) = 0.85$ . From this plot, we can see that the power angle converge to the desired reference.

## 6. Conclusions

In this paper a discrete-time nonlinear controller-observer scheme has been developed and applied to the continuous-time model of a synchronous generator. A tracking control was designed for the generator using the sliding-mode technique. Furthermore, an observer was designed to estimate the internal voltage and the angular speed, assuming that the power angle is available. Simulations results have shown the good performance of the observer-controller scheme.

### Acknowledgments

This research was supported in part by PAICYT CA767-02 and the CONACYT-CNRS within the French-Mexican Laboratory of Automatic Control (LAFMAA).

## 7. References

- [1] A. S. Bazanella, A.S. Silva, P.V. Kokotovic, "Lyapunov design of excitation control for synchronous machines", Proceedings. 36th IEEE CDC, pp. 211-216, San Diego, California, USA, 1997.
- [2] R. A. De Carlo, S. H. Zak and G.P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," Proceedings. of the IEEE, Vol. 76, No. 3, pp. 212-233, 1988.
- [3] J. De Leon-Morales, K. Busawon, G. Acosta Villarreal, S. Acha Daza. " Nonlinear control for small synchronous generator", Electrical Power and Energy Systems 23 (2001), pp.1-11.
- [4] S. Monaco and D. Normand-Cyrot, " Minimum-phase nonlinear discrete-time systems and feedback stabilization", Proceedings. of the 26th Conference on Decision and Control, 979-986, Los Angeles, CA. USA. 1987.
- [5] H. Nijmeijer and T.I. Fossen, (Eds) "New Directions in Nonlinear Observer Design", Springer, 1999.
- [6] P. W. Sauer and M. A. Pai, "Power System Dynamics and Stability", Prentice Hall, 1998.
- [7] D. Netic, A. R. Teel, P. V. Kokotovic, "Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations". Systems and Control Letters, 38 pp. 259-270, 1999.
- [8] V. I. Utkin, Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.

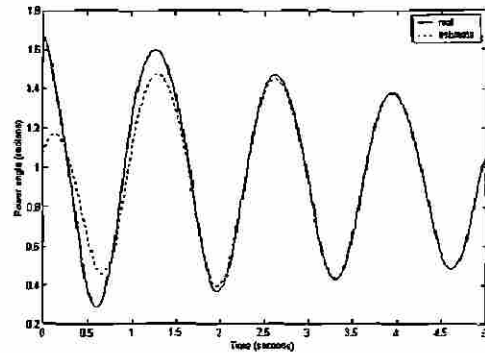


Figure 1. Power angle and its estimate.

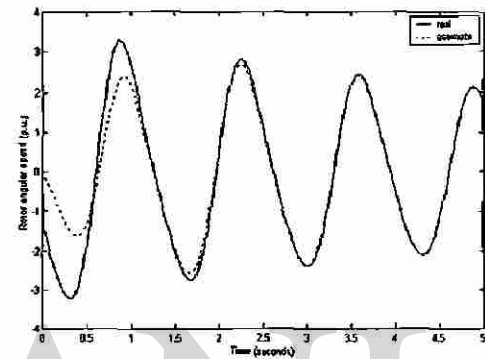


Figure 2. Rotor angular speed and its estimate.

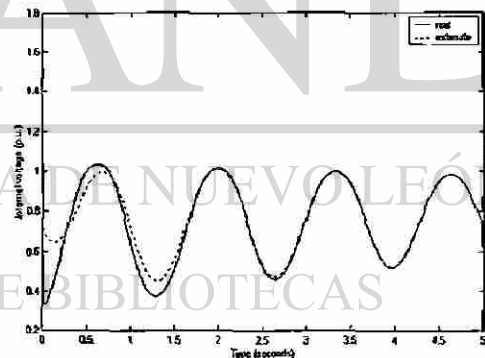


Figure 3. The internal voltage and its estimate.

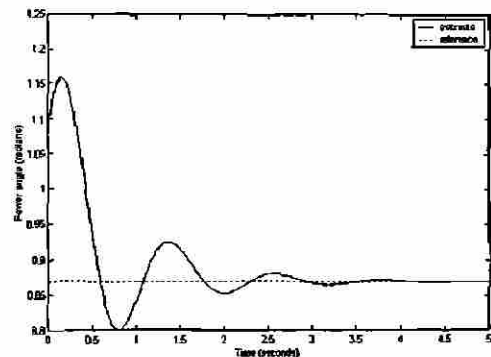


Figure 4. Response of the power angle.

## On adaptive observers for state affine systems and application to synchronous machines<sup>1</sup>

G. Besançon\*  
Gildas.Besancon@inpg.fr

J. de León-Morales\*†  
drleon@hotmail.com

O. Huerta-Guevara†  
ohuertag@infosel.com

\* Laboratoire d'Automatique de Grenoble  
ENSIEG-BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères  
Cedex, France

† Universidad Autónoma de Nuevo León  
Programa Doctoral en Ingeniería  
Apdo. Postal 148-F, San Nicolás de Los Garza,  
N. L. 66451. Mexico

**Abstract**—A recently proposed adaptive observer for time-varying linear systems [21] is revisited on the basis of the well-known Kalman-like design for state affine systems [13], [4]. This approach in particular allows to emphasize the possible arbitrary rate of convergence in the design. The corresponding observer is applied to a problem of state and parameter estimation for a synchronous machine connected to an infinite bus, and its performances are illustrated in simulation.

**Keywords:** State affine systems, adaptive observers, exponential convergence, synchronous machines.

### 1. INTRODUCTION

The problem of parameter identification has been extensively studied in many aspects during the last decades, including the problem of nonlinear systems, but generally without taking care of lack of state-space measurements. In the same time, the problem of state estimation for nonlinear systems has attracted a growing attention in the control community, and several results have been proposed to tackle this problem.

When dealing with the simultaneous estimation of state variables and constant parameters, the situation becomes more difficult, and the resulting problem of so-called *adaptive observer* has also attracted the attention of various control research groups. In short, an adaptive observer is a recursive algorithm allowing the joint estimation of the state and the unknown parameters in a dynamical system. Different approaches have already been proposed, in particular for linear systems (e.g. as in [7], [14] for early results, and [21] for a recent one), but also for nonlinear ones (see e.g. [2], [15], [5] and references therein).

Such adaptive observers are motivated by purposes of fault detection and isolation, signal transmission and adaptive control for instance. Here we are more particularly interested in such problems in the field of electrical power systems. There has indeed been a growing interest in this field during the last few years [10]. One of the problems in power systems is to preserve stability under changes in operating conditions, in particular due to network disturbances. Several control techniques are already available, but generally assuming that all components of the state vector

are measurable and all the parameters are known. Such a situation is most likely not met in practice, and in turn hinders the possibility to apply the corresponding controllers.

The purpose here is thus to take advantage of recent developments in adaptive observers to discuss some algorithm for both state and parameter estimation for a class of nonlinear systems which can in particular be found in power systems: the considered class of systems is that of state-affine systems, and an illustration is given by the case of a synchronous generator connected to a infinite bus. The basic ingredients of our discussion are that of adaptive observer for linear time-varying systems as in [21] on the one hand, and that of state observers for state-affine systems as in [13], [4] on the other hand. Basically we show that by choosing a time-varying gain in the adaptive design of [21] (roughly as in [20]), we end up with an observer which actually corresponds to the well-known Kalman-like design for state-affine systems. This in turn yields a design with arbitrarily tunable rate of convergence. These results are illustrated in simulation for a synchronous machine.

The paper is thus organized as follows: in section II, previous results on adaptive observers for linear time-varying systems on the one hand, and state observers for state affine systems on the other hand, are recalled, highlighting the relationship between the two approaches. As an illustrative application, the case of a synchronous generator model is then considered in section III, where simulation results for the state estimation and simultaneously the identification of the mechanical power, are presented. Finally, some conclusions are given.

### II. BACKGROUND RESULTS AND PROPOSED INTERPRETATION

#### A. Exponential adaptive observer for linear time-varying systems

Let us recall here the basic result of [21] on adaptive observer design for linear time-varying systems of the following form:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\theta \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}\quad (1)$$

<sup>1</sup> This work is supported by the CNRS-CONACYT inside the French-Mexican Laboratory of Automatic (LAFMAA).

where  $x, u, y$  classically denote the state, the input and the measured output vectors respectively, and  $\theta$  some vector of unknown parameters.  $A, B, C, \Phi$  are assumed to be known matrices of appropriate dimensions, continuous and uniformly bounded in time.

The main result of [21] can be summarized as follows:

If the following assumptions hold,

- (A1) There exists a bounded time-varying matrix  $K(t)$  such that:  $\dot{\eta}(t) = (A(t) - K(t)C(t))\eta(t)$  is exponentially stable.
- (A2) The solution  $\Lambda(t)$  of  $\dot{\Lambda}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Lambda(t) + \Phi(t)$  is persistently exciting in the sense that there exist  $\alpha, \beta, T$  such that:

$$\alpha I \leq \int_t^{t+T} \Lambda(\tau)^T C^T \Sigma(\tau) C(\tau) \Lambda(\tau) d\tau \leq \beta I \quad (2)$$

for some bounded positive definite matrix  $\Sigma$ .

Then, the system (3) below is an exponential observer for system (1), in the sense that for any set of initial conditions,  $\hat{x}(t) - x(t)$  and  $\hat{\theta}(t) - \theta$  exponentially decay to zero:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\Lambda(t) + \Phi(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\hat{\theta}(t) \\ &+ [K(t) + \Lambda(t)\Gamma\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)] \cdot [y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= \Gamma\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \end{aligned} \quad (3)$$

Taking advantage of classical recursive least square algorithms, an adaptation law for the parameter gain  $\Gamma$  of the above observer can obviously be obtained as follows (e.g. as in [20]):

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t)\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)C(t)\Lambda(t)\Gamma(t) + \lambda\Gamma(t), \quad (4)$$

for  $\lambda > 0$ .

Our purpose here is to discuss such a design at the light of available results on observers for state-affine systems [13], [4].

### B. Kalman-like interpretation of the adaptive observer

Let us first recall the result on state observer design for so-called state-affine systems of the following form [13]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(u, y)x + \varphi(u, y) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5)$$

where the components of matrix  $A(u, y)$  and vector  $\varphi(u, y)$  are continuous functions depending on  $u$  and  $y$ , uniformly bounded.

The result is as follows:

If the input is persistently exciting, in the sense that there exist  $\alpha, \beta, T$  such that:

$$\alpha I \leq \int_t^{t+T} \Psi_u(t, \tau)^T C^T \Sigma(\tau) C \Psi_u(t, \tau) d\tau \leq \beta I, \quad (6)$$

where  $\Psi_u$  denotes the transition matrix for the system  $\dot{\hat{x}} = A(u, y)x, y = Cx$ , and  $\Sigma$  some positive definite bounded matrix.

Then, an exponential observer for system (5) is given by:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(u, y)\hat{x} + \varphi(u, y) + S^{-1}C^T\Sigma(y - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{y}} &= C\hat{x} \end{aligned} \quad (7)$$

where  $S$  is the solution of the equation:

$$\dot{S} = -\rho S - A(u, y)^T S - SA(u, y) + C^T \Sigma C, \quad S(0) > 0 \quad (8)$$

for some positive constant  $\rho$  sufficiently large.

Defining indeed the estimation error as  $e = \hat{x} - x$ , the error system is given by:

$$\dot{e} = \{A(u, y) - S^{-1}C^T\Sigma C\} e \quad (9)$$

and from (6),  $V(e) = e^T S e$  is a Lyapunov function for this system satisfying  $\dot{V} \leq -\rho V$  [13].

Now, in the case of a system affine in the state and depending on unknown parameters in an affine way, a model can be given as follows:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(u, y)x + \varphi(u, y) + \Phi(u, y)\theta \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (10)$$

where  $\Phi$  satisfies the same properties as  $A, \varphi$ .

Assuming excitation condition (6) for state estimation on the one hand, and some additional one of the form (2) with  $K = S^{-1}C^T$  and  $S$  as in (8) for parameter estimation on the other hand, an adaptive observer can be proposed as follows (where  $S_\theta$  corresponds to  $\Gamma^{-1}$  of (4)):

$$\dot{\hat{x}} = A(u, y)\hat{x} + \varphi(u, y) + \Phi(u, y)\hat{\theta} \quad (11)$$

$$+ \{\Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T + S_x^{-1} C^T\} \Sigma (y - C\hat{x}) \quad (12)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma (y - C\hat{x}) \quad (13)$$

$$\dot{\Lambda} = \{A(u, y) - S_x^{-1} C^T C\} \Lambda + \Phi(u, y) \quad (14)$$

$$\dot{S}_x = -\rho_x S_x - A(u, y)^T S_x - S_x A(u, y) + C^T \Sigma C \quad (15)$$

$$\dot{S}_\theta = -\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda, \quad S_x(0) > 0, S_\theta(0) > 0 \quad (16)$$

where  $\rho_x$  and  $\rho_\theta$  are sufficiently large positive constants (and  $\Sigma$  is as in (2)).

With  $e_x := \hat{x} - x$  and  $e_\theta := \hat{\theta} - \theta$ , we indeed get:

$$\dot{e}_x = \{A(u, y) - \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} e_x + \Phi(u, y) e_\theta$$

$$\dot{e}_\theta = -S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C e_x$$

and following the same idea as in [21], the transformation:

$$\epsilon_x = e_x - \Lambda e_\theta,$$



yields:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \{A(u, y) - \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} \epsilon_x \\ &+ \Phi(u, y) \epsilon_\theta - \Lambda \epsilon_\theta - \Lambda \dot{\epsilon}_\theta. \end{aligned}$$

Replacing the suitable expressions in the above equation, we finally get:

$$\dot{\epsilon}_x = \{A(u, y) - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} \epsilon_x \quad (17)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = -S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \quad (18)$$

Now noting that under the considered excitation conditions,  $S_x$  and  $S_\theta$  are positive definite matrices [4], one can choose:

$$V(\epsilon_x, \epsilon_\theta) = \epsilon_x^T S_x \epsilon_x + \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta$$

as a Lyapunov function. Then, the time derivative of  $V$  is given by:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= \epsilon_x^T \{A(u, y) - S_x^{-1} C^T \Sigma C\}^T S_x \epsilon_x \\ &+ \epsilon_x^T S_x \{A(u, y) - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} \epsilon_x \\ &- (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta)^T \{S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C\}^T S_\theta \epsilon_\theta \\ &- \epsilon_\theta^T S_\theta \{S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C\} (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \\ &+ \epsilon_x^T \dot{S}_x \epsilon_x + \epsilon_\theta^T \dot{S}_\theta \epsilon_\theta \end{aligned}$$

and substituting the appropriate expressions, we obtain:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \epsilon_x \\ &- \epsilon_x^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \epsilon_x \\ &- \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta \end{aligned}$$

Since  $-\epsilon_x^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta = -(\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta)^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \leq 0$ , it follows that:

$$\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta$$

which finally gives:

$$\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho V(\epsilon_x, \epsilon_\theta), \quad \text{for } \rho = \min(\rho_x, \rho_\theta). \quad (19)$$

As a conclusion,  $\epsilon_x$  and  $\epsilon_\theta$  exponentially go to zero with a rate driven by  $\rho$ , and so does  $e_x$ .

#### Discussion on observer (12)-(16):

First of all, in view of the form of the considered system (10), it is clear that extending the state vector by the vector of constant parameters  $\theta$ , into  $X := \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ , the state affine structure is preserved:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{pmatrix} A(u, y) & \Phi(u, y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \varphi(u, y) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &:= F(u, y)X + G(u, y) \\ y &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} X = HX \end{aligned} \quad (20)$$

Obviously if the condition (6) is satisfied for this extended system, an observer of the form (7) can be designed for  $X$ ,

providing an adaptive observer for the original system.

Now our point is that observer (12)-(16) is actually the same as observer (7) for (20):

**Proposition 2.1:** *The adaptive observer design (12)-(16) for system (10) coincides with observer (7) for system (20) when  $\rho_x = \rho_\theta$ .*

**Proof.** Let  $S$  denote the solution of Riccati equation (8) for extended system (20), and consider a partition  $\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix}$  corresponding to the partition in  $x$  and  $\theta$  of  $X$  (namely  $S_1$  is of same dimensions as  $A$ ).

Then we can show that for the corresponding initialization,  $S_x, S_\theta, \Lambda$  of (12)-(16) are related to  $S$  through:

$$\begin{aligned} S_x &= S_1 \\ S_\theta &= S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2 \\ \Lambda &= -S_1^{-1} S_2 \end{aligned} \quad (21)$$

From (8) and (20) indeed, we first have:

$$\dot{S}_1 = -\rho S_1 - A^T(u, y)S_1 - S_1 A(u, y) + C^T \Sigma C \quad (22)$$

$$\dot{S}_2 = -\rho S_2 - A^T(u, y)S_2 - S_1 \Phi(u, y) \quad (23)$$

$$\dot{S}_3 = -\rho S_3 - \Phi^T(u, y)S_2 - S_2^T \Phi(u, y) \quad (24)$$

and clearly from (22),  $S_1$  satisfies the same equation (15) as  $S_x$  (for  $\rho_x = \rho$ ).

By using (22), (23), one can check that:

$$\frac{d}{dt}(S_1^{-1} S_2) = (A(u, y) - S_1^{-1} C^T \Sigma C)(S_1^{-1} S_2) - \Phi(u, y)$$

and thus  $-S_1^{-1} S_2$  satisfies the same equation (14) as  $\Gamma$ .

In the same way, direct computations show that from (22)-(24), we get:

$$\frac{d}{dt}(S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) = -\rho(S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2) + S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma C S_1^{-1} S_2$$

namely, with  $\Lambda = -S_1^{-1} S_2$ ,  $S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2$  satisfies the same equation (16) as  $S_\theta$  (for  $\rho_\theta = \rho$ ).

Finally, the gain in observer (7) is given by  $S^{-1} H^T \Sigma$  (with  $H$  from (20)), and from matrix manipulation, one can check that  $S^{-1}$  takes the following form:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} (S_1 - S_2 S_3^{-1} S_2^T)^{-1} & * \\ (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} & * \end{pmatrix}$$

i.e.

$$S^{-1} H^T \Sigma = \begin{pmatrix} (S_1 - S_2 S_3^{-1} S_2^T)^{-1} C^T \Sigma \\ (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma \end{pmatrix}$$

By using again some matrix manipulations, one can check that:

$$(S_1 - S_2 S_3^{-1} S_2^T)^{-1} C^T \Sigma \quad (25)$$

$$= S_1^{-1} (I - S_2 S_3^{-1} S_2^T S_1^{-1})^{-1} C^T \Sigma \quad (26)$$

$$= S_1^{-1} (I - S_2 [S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3]^{-1} S_2^T S_1^{-1}) C^T \Sigma \quad (27)$$

and

$$\begin{aligned} & (S_2^T S_1^{-1} S_2 - S_3)^{-1} S_2^T S_1^{-1} C^T \Sigma \\ & = (S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2)^{-1} [-S_2^T S_1^{-1}] C^T \Sigma \end{aligned} \quad (28)$$

From (21), the term (27) reads as  $(S_2^{-1} C^T + \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T) \Sigma$  which is the gain in the  $\hat{x}$  equation (12) of observer (12)-(16), while the term (28) is  $S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma$ , namely the gain in the  $\hat{\theta}$  equation (13) of observer (12)-(16), and the conclusion follows.  $\square$

At this point, we can conjecture that excitation conditions (6) and (2) for system (10) should be equivalent to some condition of the form (6) for the extended system (20).

From the discussion of this section, it results that choosing a time-varying gain as in (4) in the adaptive design (3) leads to the same design as the usual Kalman one for the system extended with the parameter vector. This increases the on-line computation burden, but as a counterpart, from the above computations (e.g. equation (19)), it allows to tune the rate of convergence of the observer for both state and parameter estimation, by simple tuning of  $\rho_x$  and  $\rho_\theta$  (or only  $\rho$ ).

An example of practical use of such an adaptive observer is presented in next section.

### III. APPLICATION TO SYNCHRONOUS MACHINES

As an illustrative example of adaptive state affine observation, let us consider here the problem of monitoring synchronous machines.

#### A. Machine model and observer design

Let us consider a nominal flux decay model of a single machine connected to an infinite bus through purely reactive transmission lines to the rest of the network, which is represented by an infinite bus (i.e. a machine rotating at constant synchronous speed  $\omega_0$  and capable of absorbing or delivering any amount of energy). Such a generator can be modelled by the following differential equations:

*Mechanical equation*

$$M \ddot{\delta} + D \dot{\delta} + P_g = P_m$$

*Electrical equation*

$$T_{do}' \dot{E}_q' + \frac{X_d}{X_d'} E_q' = - \left( \frac{X_d' - X_d}{X_d'} \right) V \cos(\delta) + E_{fd}$$

where  $\delta = \angle E_q' - \angle V$  is the generator rotor angle referred to the infinite bus (power angle),  $\omega = \dot{\delta}$  is the rotor angular speed and  $E_q'$  is the transient voltage (transient electromagnetic force).  $M$  is the per unit inertia constant,  $D$  is the per unit damping constant,  $P_m$  is the constant mechanical power supplied by the turbine, and  $T_{do}'$  is the open circuit transient time constant.  $X_d = x_d + x_L$  is the augmented reactance, where  $x_d$  is the direct axis reactance

and  $x_L$  is the line reactance,  $X_d'$  is the transient augmented reactance and  $V$  is the infinite bus voltage which is fixed.  $P_g$  is the generated power while  $E_{fd}$  is the field excitation voltage respectively given by:

$$\begin{aligned} P_g &= \frac{1}{X_d'} E_q' V \sin(\delta_m) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d'} \right) V^2 \sin(2\delta_m) \\ E_{fd} &= \frac{\omega_s M_f}{\sqrt{2} r_f} v_f, \end{aligned}$$

where  $v_f$  is the field excitation voltage,  $x_d'$  is the transient direct axis reactance,  $x_q$  is the quadrature axis reactance and  $X_q$  the quadrature axis augmented reactance,  $M_f$  is the mutual inductance between stator and rotor windings, from phase windings to the field winding and  $r_f$  is the field resistance. Finally, a state-space model reads as:

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_0 \quad (29)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_0}{2H} P_m - \frac{\omega_0}{2H} \left( \frac{V}{x_d'} \right) \sin(\delta) E_q' \quad (30)$$

$$- \frac{\omega_0}{2H} V^2 \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d'} \right) \cos(\delta) \sin(\delta) \quad (31)$$

$$- \frac{D}{2H} (\omega - \omega_0)$$

$$\dot{E}_q' = - \left( \frac{x_d}{T_{do}' x_d'} \right) E_q' + \left( \frac{x_d - x_d'}{T_{do}' x_d'} \right) V \cos(\delta) + \frac{1}{T_{do}'} E_f$$

The equilibrium points of the above system are solutions of:

$$\begin{aligned} \omega^* - \omega_0 &= 0 \\ m_1 - m_2 \sin(\delta^*) E_q'^* - \\ - m_3 \cos(\delta^*) \sin(\delta^*) - m_4 (\omega^* - \omega_0) &= 0 \\ - m_5 E_q'^* + m_6 \cos(\delta^*) + m_7 E_{fd}^* &= 0 \end{aligned}$$

where the parameters  $m_i$  depend on the machine type, the transmission line parameters, the rotor inertia and the infinite bus constant voltage, and which are constant at only one operating point. These constants are all positive and are given by:

$$m_1 = \frac{P_m}{M}, m_2 = \frac{V}{M X_d'}, m_3 = \frac{V^2}{M} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d'} \right), m_4 = \frac{D}{M},$$

$$m_5 = \frac{X_d}{T_{do}' X_d'}, m_6 = \left( \frac{X_d - X_d'}{T_{do}' X_d'} \right) V, m_7 = \frac{1}{T_{do}'}$$

For a given constant field voltage  $E_{fd} = E_{fd}^*$ , the generator possesses two equilibrium points - one stable and one unstable. In what follows, the analysis and design is made around the stable equilibrium point, which we denote by  $col[\delta^*, \omega^*, E_q'^*]$ . Then, the system equations in terms of the set point error variables  $\bar{\delta} = \delta - \delta^*$ ,  $\bar{\omega} = \omega - \omega^*$ ,

$\ddot{E}'_q = E'_q - E'_q{}^*$  and  $u = E_{fd} - E'_{fd}$  are:

$$\dot{\delta} = \omega \quad (32)$$

$$\dot{\omega} = m_1 - m_2 \sin(\delta + \delta^*) (\dot{E}'_q + E'_q{}^*) - \frac{m_3}{2} \sin(2(\delta + \delta^*)) - m_4 \omega \quad (33)$$

$$\dot{E}'_q = -m_5 (\ddot{E}'_q + E'_q{}^*) + m_6 \cos(\delta + \delta^*) + m_7 (u + E'_{fd}) \quad (34)$$

Let us assume that the rotor angle is available for measurement, and that  $\omega$  and  $E'_q$  are bounded, while all parameters are known except the mechanical power  $P_m$ , i.e. the parameter  $m_1$  which represents the acceleration provided by the turbine is assumed to be unknown.

Then with the notations:

$$x_1 = \delta, \quad x_2 = \omega, \quad x_3 = \ddot{E}'_q, \quad \theta = m_1$$

system (32) is of a state affine form (10) as follows:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_4 & -m_2 \sin(x_1 + \delta^*) \\ 0 & 0 & -m_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 \sin(x_1 + \delta^*) E'_q{}^* - \frac{m_3}{2} \sin(2(x_1 + \delta^*)) \\ -m_5 E'_q{}^* + m_6 \cos(x_1 + \delta^*) + m_7 (u + E'_{fd}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \theta$$

$$y = x_1 \quad (35)$$

From this, an observer (12)-(16) can be designed to estimate  $x$  and  $\theta$ , with:

$$A(u, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_4 & -m_2 \sin(x_1 + \delta^*) \\ 0 & 0 & -m_5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi(u, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 \sin(x_1 + \delta^*) E'_q{}^* - \frac{m_3}{2} \sin(2(x_1 + \delta^*)) \\ -m_5 E'_q{}^* + m_6 \cos(x_1 + \delta^*) + m_7 (u + E'_{fd}) \end{pmatrix},$$

and here with  $\Sigma = I$ .

### B. Simulation results

The purpose here is to illustrate the results obtained with the proposed adaptive observer via digital simulations. The numerical values for the generator parameters (per unit) here considered are:

$$X'_d = 0.408, \quad X_d = 1.07, \quad H = 6.68, \quad T'_{do} = 5.4, \quad X_l = 0.415, \quad E_f = 1.3, \quad P_m = 1 \text{ and } \omega_s = 377.$$

Under this choice the stable equilibrium position of the generator is:

$$\delta^* = 1.12, \quad \omega^* = 0, \quad E'_q{}^* = 0.91469.$$

The initial value of state variables in all simulations are:  $\delta(0) = 1.17$ ,  $\omega(0) = 0.01$  and  $E'_q(0) = 0.91$ , while the initial conditions of the adaptive observer are  $\hat{x}_1(0) = 1.0$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0.05$ ,  $\hat{x}_3(0) = 1.0$ . The observer gain is initialized at  $S_x(0) = I$  for  $\hat{x}$ , and  $S_\theta(0) = 10$  for  $\hat{\theta}$ , and simulations were performed for various choices of  $\rho_x$  and  $\rho_\theta$ , so as to illustrate the effect of the tuning parameters on the observer performances.

The pictures of Figure 1 depict the dynamical behavior of both real and estimated state variables for  $\rho_x = 5$  and  $\rho_\theta = 5$ , as well as the estimated value for  $m_1$  versus its actual constant value. A good converging performance of the estimated variables can be observed. In the pictures of Figure 2 are shown the responses of each variable under parametric variation of parameter  $m_1$  in order to emphasize the performance of the adaptive law. From those pictures it can be seen that all state variables are still well estimated, while the parameter estimation tracks its actual value under step changes.

Finally, in order to illustrate how the convergence of the adaptive observer can be affected by parameters  $\rho_x$  and  $\rho_\theta$ , simulation results are shown for different values: it can be seen how for larger values, the convergence speed increases (inducing in turn some overshoots). In figure 3 we show the performance of the adaptive observer for  $\rho_x$  and  $\rho_\theta$  taking the following values:  $\rho_x = \rho_\theta = 5, 10, 15$ . It is clear that the corresponding time of convergence of the adaptive observer is improved.

## IV. CONCLUSIONS

The problem of adaptive observer for the class of state affine systems has been discussed at the light of recent results on adaptive observers for time-varying linear systems and available state observers for state affine systems. In particular it has been shown how an adaptive design with a purpose of arbitrarily tunable rate of convergence is equivalent to a state affine observer for an extended system.

The practical interest of such observers has been illustrated in simulation by the example of a single synchronous machine connected to an infinite bus, for which the state vector and some parameter have been jointly estimated.

## V. REFERENCES

- [1] A.S. Bazanella, A.S. Silva, P.V. Kokotovic, "Lyapunov design of excitation control for synchronous machines", Proc. 36th IEEE CDC, pp. 211-216, San Diego, California, USA, 1997.
- [2] G. Bastin and M. Gevers, "Stable adaptive observers for nonlinear time vary systems", IEEE Trans. Automatic Control, vol. 37, pp.650-658,1988.
- [3] A. Bergen, Power System Analysis, Prentice-Hall, 1986.

[4] G. Besançon, H. Hammouri and G. Bornard "Observer synthesis for a class of nonlinear control systems", *European Journal of Control*, Vol. 2, No. 3, pp. 176-192, 1996.

[5] G. Besançon, "Remarks on nonlinear adaptive observer design", *Systems and Control Letters*, Vol. 41, pp. 271-280, 2000.

[6] K. Busawon, J. De Leon Morales and M. Aguilera-Hernandez, "A new high gain observer for uniformly observable systems", *IASTED, Austria*, Feb. 1999.

[7] R.L. Carol and D.P. Lindorff, "An adaptive observer for single-input single-output linear systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 18 pp. 428-435, 1973.

[8] Chen, C.T., "Introduction to linear system theory", *HRW series in Electrical Engineering, Electronics, and Systems*, 1970.

[9] J.W. Chapman, M.D. Ilic, C.A. King, L. Eng, H. Kaufman, "Stabilizing a multimachine power system via decentralized feedback linearizing excitation control", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 8, No. 1, pp. 830-839, February 1993.

[10] J. H. Chow, P. Kokotovic, R. J. Thomas, Editors, *Systems and Control Theory for Power Systems*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 64, Springer-Verlag, 1995.

[11] EPRI, "Power-Angle Instrument for large Synchronous Machines", EPRI EL-3667, Final Report, August, 1984.

[12] Hammouri, H. and De Leon J., "On systems equivalence and observer synthesis", *New Trends in Systems Theory*, 340-347, 1991.

[13] H. Hammouri and J. De León-Morales, 1990. "Observers synthesis for state affine systems", in *Proc. of the 29th IEEE Conf. Dec. and Control*, pp. 784-785, Honolulu, Hawaii.

[14] G. Kreisselmeier, "Adaptive observers with exponential rate of convergence", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 22, No. 7, pp. 2-8, 1977.

[15] R. Marino and P. Tomei, "Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 40, No. 7, pp. 1300-1304, July 1995.

[16] F. P. de Mello, C. Concordia, "Concepts of Synchronous Machine Stability as Affected by Excitation Control", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, pp. 316-329, April, 1969.

[17] W. Mielczarski, A. M. Zajaczkowzki, "Nonlinear field voltage control of a synchronous generator using feedback linearization", *Automatica*, Vol. 30, No. 10, pp. 11625-1630, 1994.

[18] M.A. Pai, *Energy Function Analysis for Power System Stability*, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[19] P. W. Sauer, S. Ahmed-Zaid, P. V. Kokotovic, "An integral manifold approach to reduced order dynamic modeling of synchronous machines", *IEEE Trans on Power Systems*, Vol. 3, No. 1, pp. 17-23, Feb. 1988.

[20] Q. Zhang and A. Clavel, 2001. "Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time-varying systems",

in *Proc. of the 40th IEEE Conf. Dec. and Control*, pp. 3886-3891, Orlando, USA.

[21] Q. Zhang, "Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems", *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol. 47, No. 3, pp. 525-529, 2002.

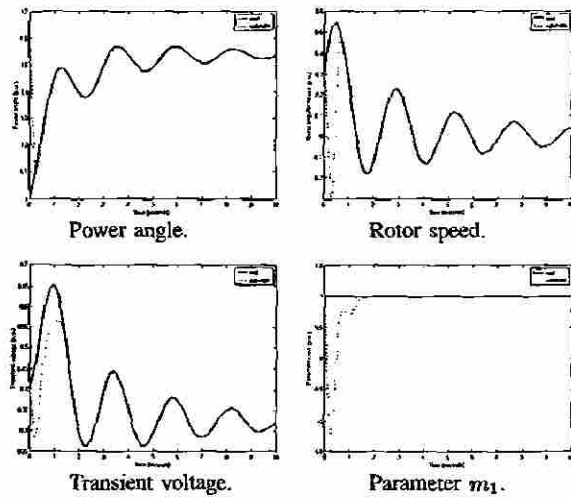


Fig. 1. State variables and parameter  $m_{11}$  with their estimates.

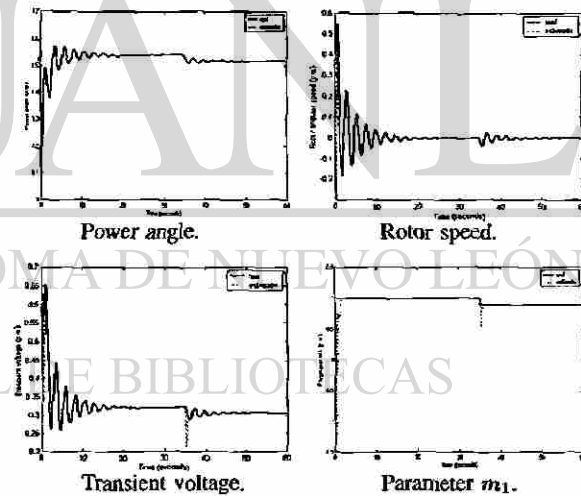


Fig. 2. Variables and estimates under parametric variation.

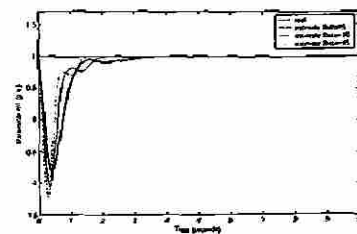


Fig. 3. Sensitivity of the adaptive law ( $\rho_x = \rho_\theta = 5, 10, 15$ ).

**XI CONGRESO LATINOAMERICANO DE CONTROL AUTOMATICO**

**AUT103**

**CONTROL DESIGN FOR MULTI-MACHINE POWER SYSTEMS USING A CONTINUOUS SLIDING MODE APPROACH**

J. de León-Morales, D.Georges, O. Huerta-Guevara

Contacto: [drileon@hotmail.com](mailto:drileon@hotmail.com).

Universidad Autónoma de Nuevo León, Laboratoire d'Automatique de Grenoble

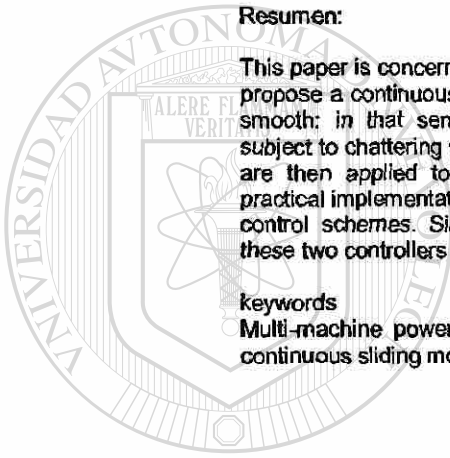
México, Francia

**Resumen:**

This paper is concerned with the control of multimachine power systems. We propose a continuous slidingmode control design. The designed controller is smooth; in that sense, it differs from classical sliding mode controllers subject to chattering phenomena. Two versions of the sliding-mode controller are then applied to the control of a multi-machine power system. The practical implementation of these two controllers leads to a fully decentralized control schemes. Simulations results demonstrate better performances of these two controllers compared to a Hamiltonian passive controller.

**keywords**

Multi-machine power systems, large-scale decentralized nonlinear control, continuous sliding mode control.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Control Design for Multi-machine Power Systems Using Continuous Sliding Mode Approach<sup>1</sup>

J. de León-Morales<sup>+,2</sup>, Didier Goerges<sup>\*</sup>, Oscar Huerta-Guevara<sup>+</sup>

<sup>+</sup> *Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ing. Mecánica y Eléctrica  
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, MEXICO*

<sup>\*</sup> *Laboratoire d'Automatique de Grenoble CNRS/INPG UMR 5528  
ENSIEG-BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, FRANCE*

## Abstract

This paper is concerned with the control of multi-machine power systems. We propose a continuous sliding-mode control design. The designed controller is smooth: in that sense, it differs from classical sliding mode controllers subject to chattering phenomena. Two versions of the sliding-mode controller are then applied to the control of a multimachine power system. The practical implementation of these two controllers leads to a fully decentralized control schemes. Simulations results demonstrate better performances of these two controllers compared to a Hamiltonian passive controller.

**Keywords:** Multi-machine power systems, large-scale decentralized nonlinear control, continuous sliding mode control.

## 1. Introduction

The stability of an electrical power system (EPS) may be defined as the ability to remain in synchronous operation under normal operating conditions as well as after a disturbance (a default like a short-cut or a change of operating conditions for example).

Ensuring the transient stability under different operating conditions in order to maintain synchronism between generators is an important issue in power system control and we will focus our attention on this problem hereafter.

Excitation control, that is one of the possible actions to maintain transient stability of power systems under disturbed conditions, will be considered in this paper.

The use of advanced control techniques for power system control has been one of the more promising application areas of automatic control. To enhance transient stability of power systems, a great attention has been paid to the application of nonlinear control theory.

To improve the robustness of closed-loop power systems, different approaches based on nonlinear control

theory have been proposed; for example, those based on variable structure, singular perturbation methods, control Lyapunov function (Bazanella, 1997), Hamiltonian function method (Masschke et al., 1998, Ortega et al., 1998) or adaptive control.

Recently, port-controlled Hamiltonian systems have been introduced in (Masschke et al., 1998, Ortega et al., 1998). For this class of systems the Hamiltonian function is considered as the total energy and play the role of Lyapunov function for the system. The key feature of this technique is to express the electrical power system dynamics under the form of a port-controlled Hamiltonian representation. This method has already been applied for improving the transient stability of a multi-machine power system by means of decentralized nonlinear excitation control (Xi, 2002).

Another technique for improving robustness under parameter uncertainties and external disturbances is sliding-mode control design which has attracted a number of researches (see De Carlo et al., 1988, Utkin, 1992). It can be viewed as a high-speed switching controller that provides a robust means of controlling nonlinear systems by forcing the trajectories to reach a sliding manifold in finite time and to stay on the manifold for all time.

<sup>1</sup> this work was sponsored in part by PAICYT-UANL, MEXICO

<sup>2</sup> corresponding author. e-mail: drjleon@hotmail.com

## 2. Dynamical model of a multi-machine power system

Now we consider a power system made of  $n$  generators. Under some standard assumptions, the motion of the interconnected generators can be described by the classical model with flux decay dynamics. The generator is modeled by the voltage behind direct axis transient reactance. The angle of the voltage coincides with the mechanical angle relative to the synchronous rotating frame. The network has been reduced to internal bus representation. The dynamical model of the  $i$ -th machine is represented by (Bergen, 1986, Pai et al., 1989):

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i - \omega_0 & (1) \\ \dot{\omega}_i &= \frac{1}{2H_i} (-D_i(\omega_i - \omega_0) + \omega_0(P_{m_i} - P_{e_i})) \\ \dot{E}'_{q_i} &= \frac{1}{T'_{d_i}} (E_{f_i} - E_{q_i})\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}P_{e_i} &= E'_{q_i} \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{q_j} B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \\ E_{d_i} &= E'_{q_i} - (X_{d_i} - X'_{d_i}) \sum_{j=1, i \neq j}^n E'_{q_j} B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)\end{aligned}$$

and  $\delta_i(t)$  is the power angle of the  $i$ -th generator,  $\omega_i(t)$  represents the relative speed,  $E'_{q_i}(t)$  is the transient EMF in the quadrature axis

We consider that the  $E_{f_i}(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  are the control inputs and the  $\delta_i(t)$  are measurable outputs, together with the  $P_{e_i}$  and  $V_{i_i}$ , where  $V_{i_i}$  represents the terminal voltage at generator  $i$ . The  $P_{m_i}$  are supposed to be constant (standard assumption).

Then, the state representation of a  $n$ -machine power system is given by

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i1} &= x_{i2} \quad i = 1, \dots, n & (2) \\ \dot{x}_{i2} &= -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \sin(x_{i1} - x_{j1}) \\ \dot{x}_{i3} &= -e_i x_{i3} + d_i \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) + u_i\end{aligned}$$

where  $a_i = D_i/2H_i$ ,  $b_i = (\omega_0/2H_i)P_{m_i}$ ,  $c_i = (\omega_0/2H_i)$ ,  $d_i = (X_{d_i} - X'_{d_i})/T'_{d_i}$ ,  $e_i = 1/T'_{d_i}$ , are the systems parameters,  $[x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}]^T = [\delta_i(t), \omega_i(t), E'_{q_i}(t)]^T$  represents the state vector, and the control input is given by  $u_i = (1/T'_{d_i})k_{ci}u_{fi}(t)$

$$f_i(x) = \begin{bmatrix} x_{i2} \\ -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \sin(x_{i1} - x_{j1}) \\ -e_i x_{i3} + d_i \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) \end{bmatrix}$$

$$g_i = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

We will now present our controller design based on the idea of continuous sliding mode control. In the

same time, we present a controller design based on passivity theory in order to compare the performances of these two methodologies.

## 3. A continuous sliding-mode controller design

We consider the class of affine nonlinear systems described in the state space by

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

where  $t_0 \geq 0$ ,  $x \in B_x \subset \mathbb{R}^n$  is the *state vector*,  $u \in \mathbb{R}^r$  is the *control input vector*,  $f$  and  $g$  are assumed to be bounded with their components being smooth functions of  $x$ .  $B_x$  denotes a closed and bounded subset centered at the origin.

The continuous sliding-mode control for the system (3), is designed as follows. Consider the following  $(n-r)$ -dimensional nonlinear sliding surface defined by

$$\sigma(x - x^*) = (\sigma_1(x - x^*), \dots, \sigma_r(x - x^*))^T = 0 \quad (4)$$

where  $x^*$  is equilibrium point and each function  $\sigma_i : B_x \times B_x \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , is a  $C^1$  function such that  $\sigma_i(0) = 0$ .

The so-called *equivalent control method* (see De Carlo, 1988, Utkin, 1992) is used to determine the system motion restricted to surface  $\sigma(x - x^*) = 0$ , leading to the *equivalent control*

$$u_e = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) \right] \quad (5)$$

where the matrix  $[\partial \sigma / \partial x]g(x)$  is assumed to be non-singular for all  $x, x^* \in B_x$ .

In order to complete the control design an additional control term  $u_N$  is added to the control input:

$$u = u_e + u_N \quad (6)$$

where  $u_e$  is the equivalent control (5), which acts when the system is restricted to  $\sigma(x - x^*) = 0$ , while  $u_N$  acts when  $\sigma(x - x^*) \neq 0$ .

The control  $u_N$  is selected as

$$u_N = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} L \sigma(x - x^*) \quad (7)$$

where  $L$  is an  $r \times r$  positive definite matrix.

We can easily check that the system trajectory  $x(t)$  is such that the following stable ordinary differential equation

$$\dot{\sigma}(x - x^*) = -L \sigma(x - x^*) \quad (8)$$

is satisfied for all  $t$ . This means that the system trajectory reaches the sliding surface asymptotically, since  $\sigma(x(t) - x^*) = e^{-L(t-t_0)} \sigma(x(t_0) - x^*)$ ,  $\forall t_0 > 0$ , then,  $\sigma(x(t) - x^*) \rightarrow 0$ , when  $t \rightarrow +\infty$ . In fact, the input-output behavior of the closed-loop system (with the output  $y = \sigma(x(t) - x^*)$ ) is given by equation (8).

On the basis of the continuous sliding-mode control described above, the resulting the composite control is given by

$$u = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) + L\sigma(x - x^*) \right]. \quad (9)$$

When the composite control (9) is applied to (3), one obtains the closed-loop nonlinear system

$$\dot{x} = f_e(x, x^*) + p(x, x^*) \quad (10)$$

where

$$f_e(x, x^*) = \left\{ I_{n \times n} - g(x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \right\} f(x).$$

and

$$p(x, x^*) = -g(x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right]^{-1} L\sigma(x - x^*).$$

Now, in order to study the stability properties of the closed-loop system, we introduce the following assumption.

**Assumption 1.** The equilibrium point  $x^*$  of  $\dot{x} = f_e(x, x^*)$  is locally exponentially stable.

By use of Lyapunov's converse theorem (see Khalil, 1996), Assumption 1 ensures the existence of a Lyapunov function  $V(e)$  with  $e = x - x^*$  which satisfies the following inequalities

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial V(e)}{\partial e} \right\| &\leq \alpha_4 \|e\|, \quad \alpha_1 \|e\|^2 \leq V(e) \leq \alpha_2 \|e\|^2 \\ \frac{\partial V(e)}{\partial e} \{ f_e(e + x^*, x^*) + p(e + x^*, x^*) \} &\leq -\alpha_3 \|e\|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

for some positive constants  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  and  $\alpha_4$ .

Let consider  $V(e)$  as a Lyapunov function candidate to investigate the stability of the origin  $e = 0$  as an equilibrium point for the system (10). From both Assumption 1 and equation (11), the time derivative of  $V$  along the trajectories of (10) satisfies

$$\dot{V}(e) \leq -\alpha_3 \|e\|^2 \quad (12)$$

then the system (10) is exponentially stable.

The Lyapunov function candidate  $V$  is instrumental to investigate the stability properties of the closed-loop system obtained when the composite control  $u$  is used. Then the following proposition can be stated.

**Proposition 1:** Consider the nonlinear system (3) for which a composite control (5), (6), (7) is designed such that Assumption 1 is satisfied. Then, the closed-loop nonlinear system (10) is locally exponentially stable.

#### 4. Hamiltonian controller design

Now we derive an excitation controller using the methodology based on the notions of energy function and port-controlled Hamiltonian systems (PCHS).

We consider the following affine nonlinear system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (13)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$  is the state vector of the system,  $u \in \mathbb{R}^m$  is the control vector and  $y \in \mathbb{R}^p$  is the output vector. In this paper we are interested in the class of systems that can be equivalently represented in a Hamiltonian form with dissipative terms in the following way

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x)) \frac{\partial H^T}{\partial x} + g(x)u \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H^T}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

where  $x, u, y$  are the energy variables,  $H(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  represents the total stored energy and the interconnection structure is captured in the  $n \times n$  matrix  $\mathcal{J}(x)$  and the  $n \times m$  matrix  $g(x)$ . The matrix  $\mathcal{J}(x)$  is skew-symmetric, i.e.

$$\mathcal{J}(x) = -\mathcal{J}^T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

and  $\mathcal{R}(x)$  is a non-negative symmetric matrix depending on  $x$ , i.e.

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^T(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

The main advantage of this kind of representation is that the total energy function can be considered as a Lyapunov function. Moreover, from (14), we obtain the power-balance equation

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \mathcal{R}(x) \frac{\partial H^T}{\partial x} + u^T y$$

with  $u^T y$  the power externally supplied to the system and  $-\frac{\partial H}{\partial x} \mathcal{R}(x) \frac{\partial H^T}{\partial x}$  representing the energy-dissipation due to the resistive elements. As it is well known (see Maschke et al., 1998), the equality above establishes the passivity properties of the system in the following sense.

**Definition 1:** System (13) is passive with respect the output  $y = h(x)$  if there exists a smooth non-negative function  $H(x)$ , such that  $H(0) = 0$  and the following inequality holds

$$H(x(t)) - H(x(0)) \leq \int_0^t u(s)y(s)ds. \quad (15)$$

If in addition, the system satisfies the detectability properties stated in the next definition

**Definition 2:** The system (13) is zero-state detectable if  $u(t) = 0, y(t) = 0 \forall t \geq 0$ , implies that  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

Then it is possible to formulate the following result, that is fundamental concerning the stability properties of the considered class of systems.



**Theorem 1:** Consider the class of systems defined by (14). Assume that the system is zero-state detectable and that the generalized Hamiltonian has a strict local minimum. Then it follows that  $x^*$  is a Lyapunov stable equilibrium point of the unforced dynamics. Moreover, the following output feedback

$$u = -Fy = -Fg^T(x) \frac{\partial H^T}{\partial x} \quad (16)$$

renders the equilibrium point asymptotically stable.

## 5. Application to a multi-machine power system

A three-machine power system is now introduced to demonstrate the effectiveness of the continuous sliding mode controller. In this system, generator 3 is considered as an infinite bus, then generator 3 is used as the reference, i. e. ( $E'_{q3} = \text{const} = 1\angle 0^\circ$ )

The system has the following state-space representation

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} &= x_{12}, \quad \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{12} &= \frac{1}{2H_1} [-D_1 x_{12} + \omega_0 (P_{m1} - P_{e1})] \\ \dot{x}_{22} &= \frac{1}{2H_2} [-D_2 x_{22} + \omega_0 (P_{m2} - P_{e2})] \\ \dot{x}_{13} &= \frac{1}{T'_{d1}} (E_{f1} - E_{q1}), \quad \dot{x}_{23} = \frac{1}{T'_{d2}} (E_{f2} - E_{q2}) \end{aligned} \quad (17)$$

where  $x_{11} = \delta_1$ ,  $x_{21} = \delta_2$ ,  $x_{12} = \omega_1$ ,  $x_{22} = \omega_2$ ,  $x_{13} = E'_{q1}$ ,  $x_{23} = E'_{q2}$

### 5.1 Sliding-mode control design

In this paper we introduce two continuous sliding mode controllers corresponding to two particular choices of the sliding surface:

#### Sliding-Mode Control 1

We consider the following nonlinear switching surface defined by

$$\sigma(x, x^*) = (\sigma_1(x, x^*), \sigma_2(x, x^*))^T = 0$$

where

$$\sigma_i(x, x^*) = s_{i1}(x_{i1} - x_{i1}^*) + s_{i2}(x_{i2} - x_{i2}^*) + s_{i3}(x_{i3} - x_{i3}^*)$$

for  $i = 1, 2$  and  $x_i^* = (x_{i1}^*, x_{i2}^*, x_{i3}^*)$ , for  $i = 1, 2$ , is an equilibrium point of system (17).

Then, the equivalent control is given by

$$\begin{aligned} u_{e_i} &= - \left[ \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} g_i(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} f_i(x) \right] \\ &= - \frac{1}{s_{i3}} \left\{ \begin{array}{l} s_{i1}x_{i2} + s_{i3} \left( \begin{array}{l} -e_i x_{i3} + d_i \sum_{j=1}^n x_{j3} \\ B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) \end{array} \right) \\ + s_{i2} \left( \begin{array}{l} -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \\ \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \sin(x_{i1} - x_{j1}) \end{array} \right) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

On the other hand, the control  $u_{N_i}$  is selected as

$$\begin{aligned} u_{N_i} &= - \left[ \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} g_i(x) \right]^{-1} L_i \sigma_i(x, x^*) \\ &= - \frac{L_i}{s_{i3}} \left\{ \begin{array}{l} s_{i1}(x_{i1} - x_{i1}^*) + s_{i2}(x_{i2} - x_{i2}^*) \\ + s_{i3}(x_{i3} - x_{i3}^*) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

#### Sliding-Mode Control 2

Now, let us consider the following nonlinear switching surface given by

$$\sigma_i(x, x^*) = s_{i1} \ddot{x}_{i1} + s_{i2} \dot{x}_{i1} + s_{i3} \ddot{x}_{i1}$$

where  $\ddot{x}_{i1} = x_{i1} - x_{i1}^*$ .

This is equivalent to

$$\begin{aligned} \sigma_i(x, x^*) &= s_{i1}(x_{i1} - x_{i1}^*) + s_{i2}x_{i2} \\ &+ s_{i3} \left( \begin{array}{l} -a_i x_{i2} + b_i - c_i x_{i3} \\ \sum_{j=1}^{n=3} x_{j3} B_{ij} \sin(x_{i1} - x_{j1}) \end{array} \right) \end{aligned}$$

where

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} g_i(x) = -s_{i3} c_i \sum_{j=1}^{n=3} x_{j3} B_{ij} \sin(x_{i1} - x_{j1})$$

for all  $x_i \in B_{x_i}$ .

**Remarks:**

1. The coefficients  $s_{ij}$ ,  $j = 1, 2, 3$  of sliding mode controller 1 must be chosen in order Assumption 1 is verified.
2. We can notice that the sliding surface of controller 2 differs from the surface of controller 1 by only one term:  $x_{i3} - x_{i3}^*$  is replaced by  $\ddot{x}_{i1}$ . In this case, when the  $s_{i1}$  are some positive constants, the sliding surfaces can be viewed as some stable second-order ordinary differential equations in the power angle  $\delta_i$ , ensuring convergence of the power angles to their equilibrium values, when the system trajectory remains on the sliding surface.
3. Furthermore the equivalent control  $u_e$  can be viewed as an output linearizing controller rendering the system dynamics equivalent to the linear dynamics

$$\ddot{\sigma}_i(x, x^*) = s_{i1} \ddot{x}_{i1} + s_{i2} \dot{x}_{i1} + s_{i3} \ddot{x}_{i1} = 0$$

The relative degree of each output (power angle) is equal to 3, thus the system has no zero dynamics in this case. Furthermore, stability can be stated by using stability analysis arguments (Lasalle theorem (Khalil, 1996)) apart from Lyapunov function candidate  $V(x - x^*) = \frac{1}{2} \sigma^T(x - x^*) \sigma(x - x^*)$ .

## 5.2 Hamiltonian Control design

Now we design a control law based on passivity theory and energy function. The system is described in a Hamiltonian representation providing that the stability of the system can be guaranteed.

Consider system (2) and the following energy function

$$H = \sum_{i=1}^{n=3} \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2c_i} x_{i2}^2 - \frac{b_i}{c_i} x_{i1} + \frac{e_i}{2d_i} x_{i3}^2 \\ -\frac{1}{2} x_{i3} \sum_{j=1}^{n=3} x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) \end{array} \right) \quad (18)$$

It follows that the system dynamics can be written as a generalized Hamiltonian control system with dissipation according to what follows

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ -c_i & -c_i a_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_i} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_i \quad (19)$$

where

$$x_i = \text{col}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), \quad \mathcal{J}_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ -c_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_i a_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix}, \quad g_i(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Let  $(x_{i1}^*, x_{i2}^*, x_{i3}^*)$  be the equilibrium point of (2), obtained from the following equations

$$\begin{aligned} x_{i2}^* &= 0 \\ -a_i x_{i2}^* + b_i - c_i x_{i3}^* \sum_{j=1}^{n=3} x_{j3}^* B_{ij} \sin(x_{i1}^* - x_{j1}^*) &= 0 \\ -e_i x_{i3}^* + d_i \sum_{j=1}^n x_{j3}^* B_{ij} \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*) + \tilde{u}_i &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Defining the constant excitation control  $\tilde{u}_i$ , it follows that

$$\tilde{u}_i = e_i x_{i3}^* - d_i \sum_{j=1}^{n=3} x_{j3}^* B_{ij} \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*). \quad (21)$$

Now, defining the energy function which includes the equilibrium point of the following form

$$H_e = \sum_{i=1}^{n=3} \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2c_i} x_{i2}^2 - \frac{b_i}{c_i} (x_{i1} - x_{i1}^*) + \frac{e_i}{2d_i} (x_{i3} - x_{i3}^*)^2 \\ + \sum_{i=1}^{n=3} \left( \begin{array}{c} x_{i3} \sum_{j=1}^n x_{j3} B_{ij} \cos(x_{i1} - x_{j1}) \\ + x_{i3} \sum_{j=1}^n x_{j3}^* B_{ij} \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Then, system (19) can be represented by the Hamiltonian system with dissipation as

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ -c_i & -c_i a_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \frac{\partial H_e}{\partial x_i} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_i.$$

Since  $H_e$  is bounded from below, because of  $x_{i1} \in [-\pi, \pi]$ , and  $\forall l > 0$  the set  $\{x : H_e(x) \leq l\}$  is compact. Thus  $H_e(x)$  has a strict local minimum at  $(x_{i1}^*, x_{i2}^*, x_{i3}^*)$ .

Then, a control law which stabilizes the multi-machine power system is given by

$$u_i = \tilde{u}_i + v_i.$$

where

$$\begin{aligned} v_i &= -f_i g_i^T \frac{\partial H_e}{\partial x_i} \\ &= -f_i \left( \begin{array}{c} -\sum_{j=1}^{n=3} B_{ij} \begin{bmatrix} x_{j3} \cos(x_{i1} - x_{j1}) \\ -x_{j3}^* \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*) \end{bmatrix} \\ + \frac{e_i}{d_i} (x_{i3} - x_{i3}^*) \end{array} \right) \\ &= -f_i \left\{ \begin{array}{c} I_{d_i} + \frac{e_i}{d_i} x_{i3} \\ + \frac{1}{d_i} \left( \begin{array}{c} d_i \sum_{j=1}^{n=3} B_{ij} x_{j3}^* \\ \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*) - e_i x_{i3}^* \end{array} \right) \end{array} \right\} \\ &= -f_i \left\{ I_{d_i} + \frac{e_i}{d_i} x_{i3} - \frac{1}{d_i} \tilde{u}_i \right\} \end{aligned}$$

where  $\tilde{u}_i = e_i x_{i3}^* - d_i \sum_{j=1}^{n=3} x_{j3}^* B_{ij} \cos(x_{i1}^* - x_{j1}^*)$ . Next, using  $E_{q_i} = E_{q_i}' + (X_{d_i} - X_{d_i}') I_{q_i}$ , and  $d_i = (X_{d_i} - X_{d_i}')/T_{d_i}'$ ,  $e_i = 1/T_{d_i}'$ , it follows that  $\frac{e_i}{d_i} = \frac{1}{(X_{d_i} - X_{d_i}')}$ . Finally, the controller can be expressed only in terms of local measurable signals:

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}_i - f_i \left\{ \frac{1}{(X_{d_i} - X_{d_i}')} E_{q_i} - \frac{1}{d_i} \tilde{u}_i \right\} \\ &= \tilde{u}_i + \frac{f_i}{d_i} \tilde{u}_i - \frac{f_i}{(X_{d_i} - X_{d_i}')} \left( V_{t_i} + \frac{Q_{e_i} X_{d_i}}{V_{t_i}} \right) \end{aligned}$$

where  $E_{q_i} = V_{t_i} + \frac{Q_{e_i} X_{d_i}}{V_{t_i}}$ . Consequently, the resulting controller is a decentralized static output feedback.

## 6. Simulation results

The effectiveness of the here-proposed sliding-mode controller design has been validated through computer simulations.

The numerical values of the generator parameters (in per unit) were  $D_1 = 5$ ,  $D_2 = 3$ ,  $X_{d_1}' = 0.252$ ,  $X_{d_2}' = 0.319$ ,  $X_{d_1} = 1.863$ ,  $X_{d_2} = 2.36$ ,  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = 2$ ,  $T_{d_1}' = 6.9$ ,  $T_{d_2}' = 7.96$ ,  $E_{f_1} = 1.3$ ,  $P_{m_1} = 0.35$ ,  $P_{m_2} = 0.35$  and  $\omega_s = 377$ ,  $B_{12} = 0.56$ ,  $B_{13} = 0.53$ ,  $B_{23} = 0.6$ ,

With this parameter choice, the stable equilibrium state of the generator is

$$\begin{aligned} x_{11}^* &= 0.6654, & x_{12}^* &= 0, & x_{13}^* &= 1.03 \\ x_{12}^* &= 0.6425, & x_{22}^* &= 0, & x_{23}^* &= 1.01 \end{aligned}$$

The initial value of the states variables are

$$\begin{aligned} x_{11}(0) &= 0.8, & x_{12}(0) &= 0.3, & x_{13}(0) &= 1.5 \\ x_{12}(0) &= 0.5, & x_{22}(0) &= -0.3, & x_{23}(0) &= 0.5 \end{aligned}$$

The controller parameters are chosen as follows

#### Control 1

$$s_{11} = 10, \quad s_{12} = 15, \quad s_{13} = 8, \quad L_1 = 25$$

#### Control 2

$$s_{21} = 10, \quad s_{22} = 15, \quad s_{23} = 8, \quad L_2 = 25$$

The system responses obtained for the rotor angle are shown in figures 1-3. From the different figures, we can see that the dynamic response of the rotor angle is such that their equilibrium position is reached.

From these figures, it can be also seen that the sliding mode controller 2 can provide better transient performances than the sliding mode controller 1. However, the transient response of the two continuous sliding mode controllers is significantly better than the one of the Hamiltonian controller. We suggest that an explanation can be found in the fact that the sliding controller 2 has no zero dynamics due to the particular choice of the sliding surface whose time-derivative corresponds to a equivalent linear system obtained via an input-output linearization technique, without zero dynamics in this case.

#### 7. Conclusions

A nonlinear control strategy for a class of nonlinear systems has been developed and successfully applied to multi-machine power system control. Two new controllers have been designed using continuous sliding-mode techniques. This controller design has been successfully applied to a three-machine power system, where two different switching surfaces have been considered. The overall methodology can be obviously extended to a more general system made of  $n$  generators. Closed-loop performance of these two controllers appears to be better than the one obtained with a port-controlled Hamiltonian design.

#### References

- Bazanella A.S, Silva A.S, Kokotovic P.V. (1997), "Lyapunov design of excitation control for synchronous machines", Proc. 36th IEEE CDC, pp. 211-216, San Diego, California, USA.
- Bergen A. (1986), Power System Analysis, Prentice-Hall.
- De Carlo R.A., Zak S.H. and Matthews G.P. (1988), "Variable structure control of nonlinear multi-variable systems: A tutorial", Proc. of the IEEE, Vol. 76, No. 3, pp. 212-233.
- Khalil H. (1996), "Nonlinear Systems", 2nd. Edition, Prentice Hall.
- Pai M.A. (1989), Energy Function Analysis for Power System Stability, Kluwer Academic Publishers.
- Maschke B.M.J., Ortega R., Van der Schaft A.J. (1998), "Energy-based Lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation", Proc. of the 37th IEEE CDC, Tampa, Florida.

Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J. and Sira-Ramirez H. (1998). "Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems". Springer-Verlag.

Utkin V.I. (1992), "Sliding Modes in Control and Optimization", Springer-Verlag, Heidelberg.

Xi Z. (2002), "Nonlinear decentralized saturated controller design for multi-machine power systems", Int. J. of Control, Vol. 75, pp. 1002-1011.

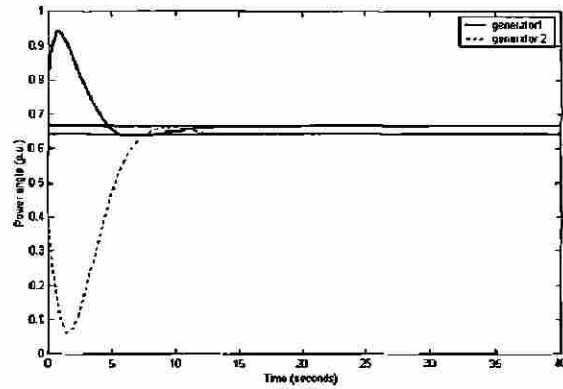


Fig. 1 Rotor angle with sliding modes 1 control

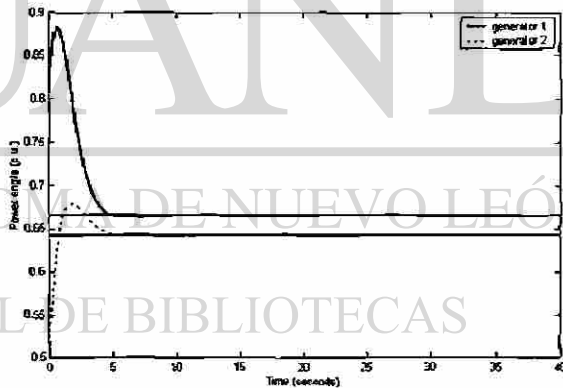


Fig. 2 Rotor angle with sliding modes 2 control

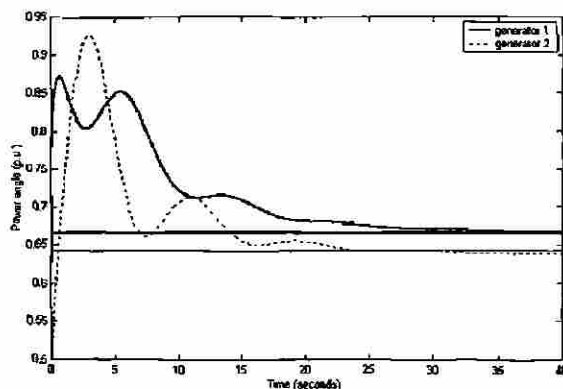


Fig. 3 Rotor angle with Hamiltonian control

## Bibliografía

- [1] Guadalupe Acosta, "Técnicas de control para sistemas no lineales", Tesis de Doctorado, Doctorado en Ingeniería Eléctrica, opción Control Automático, FIME-UANL, San Nicolás de los Garza, N.L, México, Junio 2002.
- [2] J. H. Anderson, "The control of Synchronous Machine Using Optimal Control Theory" Proc. IEEE Vol. 59, pp. 25-35, Jan. 1971.
- [3] A. S. Bazanella, A.S. Silva, P.V. Kokotovick, "Lyapunov design of excitation control for synchronous machines", Proceedings 36<sup>th</sup> IEEE CDC, pp. 211-216, San Diego, California, USA, 1997.
- [4] A. Bergen, "Power System Analysis", Prentice-Hall, 1986.
- [5] G. Besançon, H. Hammouri and G. Bornard, "Observer synthesis for a class of nonlinear control systems", European Journal of Control, Vol. 2, No. 3, pp. 176-192, 1996.
- [6] G. Besançon, "Remarks on nonlinear adaptive observer design", Systems and Control Letters, Vol. 41, pp. 271-280, 2000.
- 
- [7] K. Busawon, M. Saif and J. De León Morales, "Estimation and control for a class of Euler discretized nonlinear system", American Control Conference, pp. 3579-3583, San Diego Cal., USA, June 1999.
- [8] K. Busawon, J. De León Morales and M. Aguilera-Hernandez, "A new high gain observer for uniformly observable systems", IASTED, Austria, Feb. 1999.
- [9] K. Busawon, "Sur les observateurs des systèmes nonlinéaires et le principe de separation", Ph. D. Thesis, Université Claude Bernard Lyon I, Lyon France, 1993
- [10] J.W. Chapman, M.D. Ilic, C.A. King, L. Eng, H. Kaufman, "Stabilizing a multimachine power system via decentralized feedback linearizing excitation control", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 8, No. 1, pp. 830-839, February 1993.
- [11] C. Califano, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. "On the discrete-time normal form", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 11, pp. 1654-1658, 1998.

- [12] R.L. Carol and D.P. Lindorff, "An adaptive observer for single-input single-output linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 18 pp. 428-435, 1973.
- [13] R. A. De Carlo, S. H. Zak and G.P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial", *Proc. of the IEEE*, Vol. 76, No. 3, pp. 212-233, 1988.
- [14] J. De Leon Morales, K. Busawon and G. Acosta-Villarreal, "Digital implementation of an observer-based controller for rigid robot", *IEEE CDC*, Tampa Florida, USA, 1998.
- [15] Francisco Humberto Florenzano Lara, "Diseño de Algoritmos de Control para Sistemas Multimáquinas" Tesis de Maestría, Doctorado en Ingeniería Eléctrica, opción Control Automático, FIME-UANL, San Nicolás de los Garza, N.L, México, Enero 2002.
- [16] J. P. Gauthier and I. Kupka, "Observability and Observers for Nonlinear Systems", *SIAM Journal of Control Optimization*, 32, pp. 975-994, 1994.
- [17] D. Georges, "Nonlinear Robust Control of Power Systems", *European Control Conference*, Porto Portugal, 4-7 septembre 2001.
- [18] A. Ghosh, O. P. Malik, G. S. Hope, "Power System Stabilizer Based On Adaptive Control Techniques", *IEEE Trans.* Vol. PAS-103, pp. 1983-1989, 1983.
- [19] Cesar Guerra Torres, "Diseño de controladores y observadores para sistemas no lineales", Tesis de Maestría, Doctorado en Ingeniería Eléctrica, opción Control Automático, FIME-UANL, San Nicolás de los Garza, N.L, México, Nov. 2002.
- [20] H. Hammouri and J. De León-Morales, "Observers synthesis for state affine systems", in *Proc. of the 29th IEEE CDC*, pp. 784-785, Honolulu Hawaii, USA, 1990.
- [21] Y. Wang, G. Guo, D. J. Hill, "Robust Decentralized Control of a Class of Nonlinear Systems and Applications to Multimachine Power System Stabilization", in *Proc. of the 36<sup>th</sup> IEEE CDC*, San Diego, USA.
- [22] Y. Y. Hsu, W. C. Chan, "Stabilization of Power Systems Using Variable Structure", *Journal of Electrical Engineering*, Vol. 24, pp.31-41, April 1981.

- [23] Oscar Francisco Huerta Guevara, "Observadores no lineales para generadores síncronos", Tesis de Maestría, Doctorado en Ingeniería Eléctrica, opción Control Automático, FIME-UANL, San Nicolás de los Garza, N.L, México, Mayo 2000.
- [24] H. Khalil, 1996, "Nonlinear Systems", 2nd. Edition, Prentice Hall.
- [25] Gerhard Kreisselmeier, "On sampling without Loss of Observability/Controllability", IEEE Transactions on Automatic Control, vol 44, No. 5, May 1999.
- [26] G. Kreisselmeier, "Adaptive observers with exponential rate of convergence", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, No. 7, pp. 2-8, 1977.
- [27] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, "Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional", Editorial Mir, URSS, 1975, Traducción al español por C. Vega.
- [28] P. Kundur, "Power System Stability and Control", McGraw-Hill, pp.45-136, USA, 1994.
- [29] W. Lin and C. Byrnes, "Passivity and absolute stabilization of a class of discrete-time nonlinear systems", Automatica, 31 (2), pp. 263-267, 1995.
- [30] A. Loria, "Summation-type conditions for uniform asymptotic stability of discrete-time systems", Technical report, LSS, 2004.
- [31] Patricio Tomei and Ricardo Marino, "Nonlinear Control Design, Geometric, Adaptive and Robust", Prentice Hall, 1995.
- [32] R. Marino and P. Tomei, "Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 7, pp. 1300-1304, July 1995.
- [33] B. M.J. Maschke, R. Ortega and A. J. van der Shaft. "Energy-based Lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation.", in Proc. of the 37<sup>th</sup> IEEE Conference on Control and Decision, Tampa Florida, pp. 3599-3599, 1998.
- [34] Juan Manuel Mendivil Avila, "Diseño de controladores para una clase de sistemas no lineales, aplicación al motor a pasos de magneto permanente", Tesis de Maestría, Doctorado en Ingeniería Eléctrica, opción Control Automático, FIME-UANL, San Nicolás de los Garza, N.L, México, Agosto 2002.

- [35] W. Mielczarski, A. M. Zajaczkowski, "Nonlinear field voltage control of a synchronous generator using feedback linearization", *Automatica*, Vol. 30, No. 10, pp. 1625-1630, 1994
- [36] S. Monaco and D. Normand-Cyrot, "Minimum-phase nonlinear discrete-time systems and feedback stabilization", in *Proc. of the 26th IEEE, Conference on Decision and Control*, pp. 979-986, Los Angeles, CA. USA. 1987.
- [37] Dragan Nešić and Antonio Loria, "On uniform asymptotic stability of time-varying parametrized discrete-time cascades", arXiv:math.OA/0307167 v1, 11 Jul 2003
- [38] D. Nešić and A. R. Teel, "Backstepping on Euler approximate model for stabilization of sampled-data nonlinear systems", in *Proc. of 40<sup>th</sup> IEEE, Conference on Decision and Control*, Orlando Florida USA, Dec 2001
- [39] D. Nešić, A. Teel, and P. Kokotović. "Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations". *Systems & Control Letters*, 38, pp. 259-270, 1999.
- [40] D. Nešić, A. Teel, and E. Sontag. "Formulas relating  $\mathcal{KL}$  stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems". *Systems & Control Letters*, 38, pp. 49-60, 1999.
- [41] Yuanzhang Sun, Tielong Shen, Romeo Ortega and Qianjin Liu, "Decentralized Controller Design for Multimachine Power Systems based on the Hamiltonian Structure", *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3045-3050, Orlando Florida, USA. Dec.2001.
- [42] M. A. Pai, "Energy Function Analysis for Power System Stability", Kluwer Publishers, 1989.
- [43] Mohammed S. Santina, Allen R. Stubberud and Gene H. Hostetter, "Discrete-Time Equivalents to Continuous-Time Systems", *The Control Handbook*, CRC Press, Inc., pp. 265-277.
- [44] P. W. Sauer, S. Ahmed-Zaid, P. V. Kokotovic, "An Integral Manifold Approach to Reduced Order Dynamic Modeling of Synchronous Machines", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 3, No. 1, February 1988.

- [45] P. W. Sauer and M. A. Pai, "Power System Dynamics and Stability", Prentice Hall, 1998.
- [46] R. Sepulchre, M. Janković and P. V. Kokotović, "Constructive Nonlinear Control", Springer-Verlag, London 1997.
- [47] C. Simoes, H. Nijmeijer and J. Tsinias, "Nonsmooth stabilizability and feedback linearization of discrete-time systems", *International Journal Robust Nonlinear Control*, (6), pp. 171-188, 1996.
- [48] V. I. Utkin, "Sliding Modes in Control and Optimization", Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.
- [49] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, second edition, Prentice Hall, New Jersey, 1993
- [50] Jacques L. Willems, "Direct Methods for Transient Stability Studies in Power System Analysis", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-16, No. 4, August 1971.
- [51] Z. Xi, "Nonlinear decentralized controller design for multimachine power systems using Hamiltonian function method", *Automatica*, 38, pp. 527-5324, 2002.
- [52] Zairong Xi and Daizhan Cheng, "Passivity-based stabilization and  $H_\infty$  control of Hamiltonian control systems with dissipation and its applications to power systems", *Int. J. of control*, Vol. 73, No. 18, pp. 1686-1691, 2000.
- [53] MingQing Xiao, Nikolaos Kazantzis, Costas Kravaris and Arthur J. Krener, "Nonlinear Discrete-Time Observer Design with Linearizable Error Dynamics", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 4, April 2003.
- [54] Q. Zhang and A. Clavel, 2001. "Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time-varying systems", in Proc. of the 40th IEEE CDC, pp. 3886-3891, Orlando Florida, USA.
- [55] Q. Zhang, "Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 3, pp. 525-529, 2002.



