Anexo 1

A continuación se presentan los conceptos0 básicos de optimización y un ejemplo básico de optimización numérica donde se muestra cómo se aplican las técnicas numéricas de optimización para obtener la solución de un problema de optimización sin restricciones. Este ejemplo se describe y presenta con el mayor detalle en el libro de Vanderplaats[1].

A1.1 Conceptos básicos de optimización

De forma general, los métodos de optimización requieren encontrar el valor de *X* que minimice o maximice la función objetivo *F(X)* y que cumpla con las restricciones que puede tener el problema. De forma matemática se escribe de la siguiente forma[1] :

Minimizar: $F(X)$ Función objetivo (4.1)

Sujeta a:

$g_j(X) \leq 0$ $j = 1, m$ Restricciones de desigualdad (4.2)

$h_k(X) = 0$ $k = 1, l$ Restricciones de igualdad (4.3)

$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u$ $i = 1, n$ Restricciones de frontera (4.4)

donde X es igual al vector de variables de diseño:

$$X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad \text{Variables de diseño}$$

$g_j(X)$ representa el conjunto de restricciones tecnológicas de no igualdad en función de las variables de diseño.

$h_k(X)$ representa el conjunto de restricciones tecnológicas de igualdad en función de las variables de diseño.

X_i^l y X_i^u representan los límites inferior y superior de los valores factibles de las variables de diseño X_i.

Ahora, para entender de una forma sencilla lo que describe la represtación matemática, considere que se encuentra en una colina y desea llegar a la cima pero con los ojos vendados, ver Figura A1.1. La función objetivo es la altura o elevación, la cual se desea maximizar. Ahora, si se desea pensar en términos de minimización, la función *F(X)* = -Elevación. Las cercas representan las restricciones tecnológicas del sistema, $g_j(X)$ y $h_k(X)$.

EL PROBLEMA FISICO

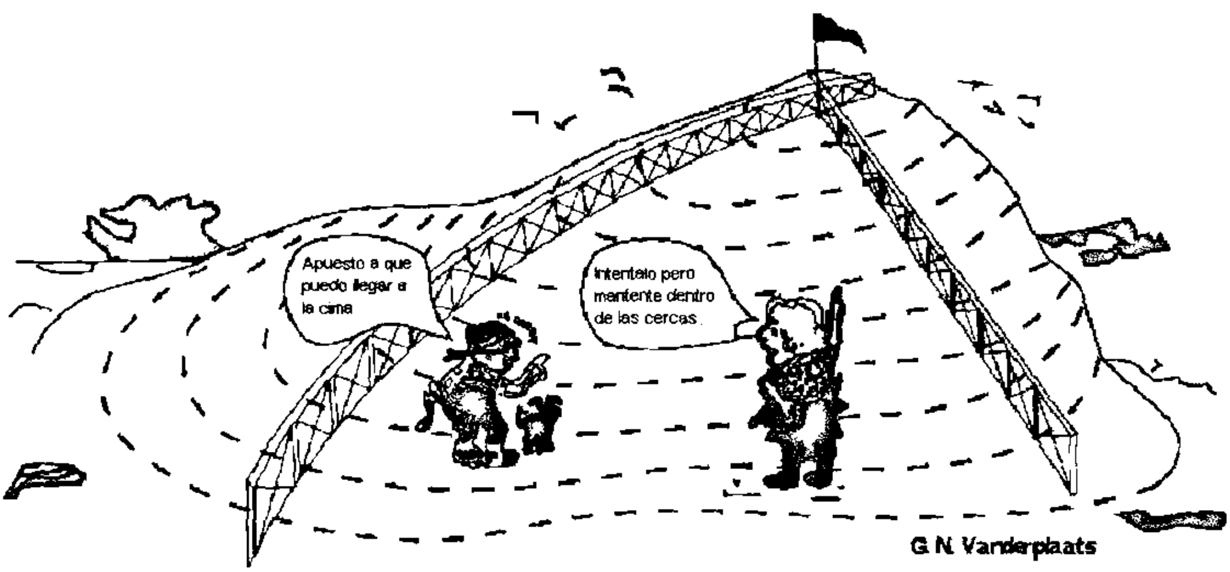


Figura A1.1 Ilustración del problema de optimización[1].

Matemáticamente, el valor negativo de la distancia que lo separa de la cerca es la cantidad por la cual se satisface la restricción. Si se llega a tocar la cerca el valor de la restricción es cero. Puesto que se esta con los ojos vendados, no se puede ver el punto con mayor elevación dentro de las cercas. De alguna manera hay que buscar este punto. Una manera de hacerlo seria tomar un pequeño paso en la dirección norte-sur y luego otro paso en dirección este-oeste y de esta forma calcular la pendiente de la colina. De esta manera, lo que se habrá hecho es calcular el gradiente de la función (- Elevación) por diferencias finitas.

Existirá entonces un vector de dirección entre estos dos puntos. La pendiente de este vector es la dirección de búsqueda por la cual se debería llegar a la cima de una forma rápida. Matemáticamente, el gradiente del objetivo se refiere como la dirección de pasos ascendentes y como se busca minimizar la $F(X)$, se utiliza el gradiente negativo o de pasos descendentes. Ya teniendo la dirección hay que moverse en dicha dirección hasta encontrar una cerca o la cima o punto óptimo.

Hay que notar que el número de pasos que se den en esa dirección representa un parámetro escalar, el cual es entero o fraccionario. Si ahora se define el punto inicial como 0, en ese caso 0 contiene 2 entradas, siendo la longitud y la latitud del punto de inicio. Para la primera iteración, la dirección en la que se mueve se le designa como 1. Ya sea que se encuentre en esa dirección el punto más alto o se llegue a una cerca, entonces se actualiza la expresión matemática siguiente, ecuación (A1.5).

$$X^1 = X^0 + \alpha^* S^1 \qquad \text{(A1.5)}$$

El valor de α^* es el óptimo en la dirección de búsqueda S^1. Si no se logra llegar al punto mas alto de la colina en esta primera iteración, se busca una nueva dirección de búsqueda y se actualiza la ecuación (A1.5) y se realiza una nueva iteración, así hasta que se llegue al punto óptimo o sea el más alto de la colina, dentro de las cercas. En la Figura A1.2 se representa la aplicación de estos conceptos matemáticos para resolver el problema planteado en la Figura A1.1.

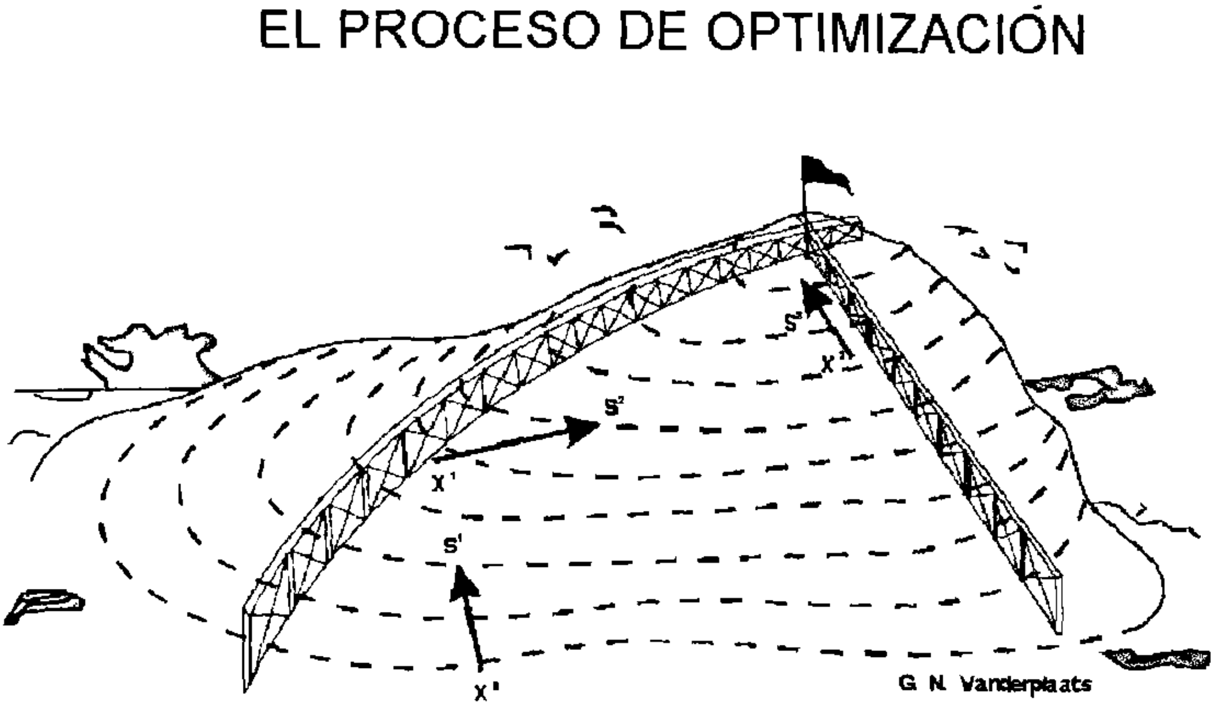


Figura A1.2 Ilustración de la solución del problema de optimización planteado en la Figura A1.1[1].

A1.2 Minimizar la energía potencial de un sistema de resortes con cargas

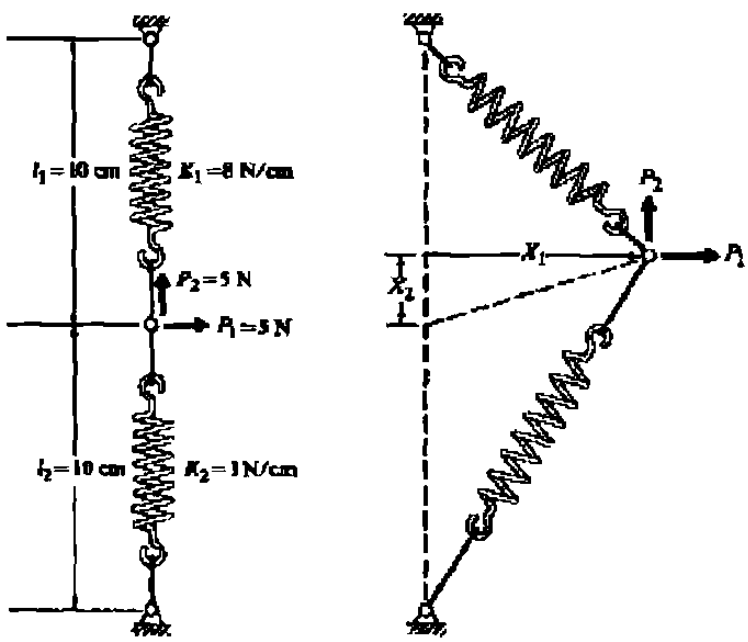
De acuerdo a la explicación del punto anterior A1.1, ahora se aplican los conceptos presentados en un problema de ingeniería. En la Figura A1.3(a) se muestra un sistema de resortes de los cuales se desea encontrar la posición de equilibrio bajo las cargas aplicadas, P1 y P2. En la Figura A1.3(b) se muestra el sistema deformado y en equilibrio después de la aplicación de las dos cargas. La posición de equilibrio se calcula minimizando la energía potencial del sistema (EP), también llamada función objetivo, la cual se expresa de acuerdo a la ecuación (A1.6). Las variables de diseño son X_1 y X_2.

$$EP=\frac{1}{2}K\ (\Delta L\ )+\frac{1}{2}K\ (\Delta L\ )-P\,X\ -P\,X \qquad (A1.6)$$

$$\Delta L\ =\left[(10-X\ )+X\ \right]^{-}-10 \qquad (A1.7)$$

$$\Delta L\ =\left[(10+X\ )+X\ \right]^{-}-10 \qquad (A1.8)$$

Donde, K_1 y K_2 representan las constantes o modulos de Young de cada uno de los resortes y X_1 y X_2 son las coordenadas en X y Y del punto de equilibrio al aplicar las cargas P_1 y P_2. En la Figura A1.4 se observa el espacio de diseño y solución del problema expresado por la Ecuación (A1.6). La solución se representa por una serie de líneas de contorno que representan un valor constante de la función objetivo en términos de X_1 y X_2.



(a). Sin Deformación (b). Deformado

Figura A1.3 Sistema de 2 resortes con 2 cargas *aplicadas*, P1 y P2[1]. (a) *Sin de* deformación. (b) Deformado.

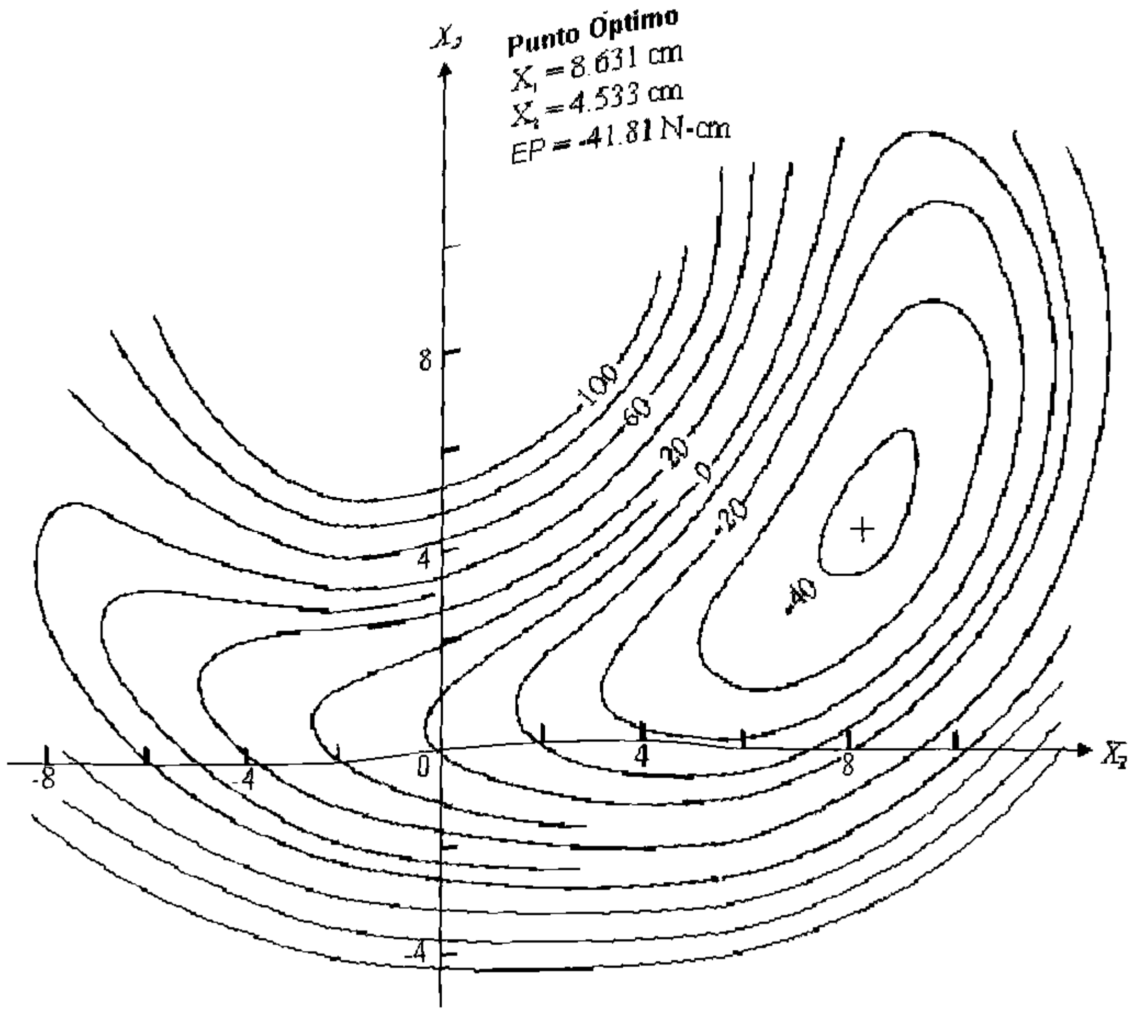


Figura A1.4 Espacio de diseño y solución del problema de la Figura A1.1[1]. La Energía Potencial, EP, representada por valores constantes en función de X_1 y X_2.

Este problema de optimización se expresa matemáticamente, utilizando las ecuaciones básicas desde la (A1.1) hasta la (A1.4), de la siguiente manera:

Minimizar: $F(X) = EP$ Energia potencial (A1.10)

Sujeta a:

$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u \quad i = 1, n$ Restricciones de frontera (A1.10)

Para este problema no existen restricciones de desigualdad o igualdad, así que la solución se realiza por medio de métodos de optimización sin restricciones.

Cualquier método de optimización no sabe cual es el tipo de problema que esta resolviendo. Simplemente intenta minimizar una función. El proceso se inicia dando un valor inicial al vector de diseño X, X^0, y se actualiza el diseño de acuerdo a la Ecuación (A1 11).

$$X^q = X^{q-1} + \alpha^* S^q \tag{A1.11}$$

donde q representa el numero de iteraciones, α^* es un valor escalar que indica la magnitud del paso en la búsqueda del punto óptimo en la dirección de búsqueda, representada por el vector S^q.

De forma general la aplicación del método de optimización sigue los siguientes pasos:

1. Inicia con q= 0 y $X= X^0$

2. q = q+1

3. Se evalua $F(X^{q-1})$

4. Se calcula $\nabla F\left(X^{q-1}\right)$

5. Se determina la dirección de búsqueda, S^q.

6. Se realiza una búsqueda en una dimensión para encontrar el valor de α^*.

7. Se establece el valor $X^q = X^{q-1} + \alpha^* S^q$.

8. Se checa la convergencia para saber si se ha llegado al punto óptimo. Si se satisface el criterio de convergencia, se termina el proceso, sino se regresa al punto número 2.

Las partes críticas del proceso de optimización consisten en lo siguiente:

- Encontrar una dirección de búsqueda usable, S^q.
- Encontrar el valor del parámetro escalar, α^*, que minimice la función $F\left(X^{q-1} + \alpha^* S^q\right)$.
- Checar la convergencia y terminar si el punto encontrado es el óptimo de acuerdo al criterio de convergencia.

Existen una serie de métodos numéricos de optimización[1], en este caso aplicado a un problema sin restricciones, que se podrían utilizar para llegar a la solución óptima del problema. Pero hay algunos que de plano no pueden llegar a la solución y no son recomendados, por ejemplo el Método de Pasos Descendientes, *"Steepest Descent Method"*. Para ilustrar lo anterior, se observa en la Figura A1.5 la aplicación de dicho método a la solución del problema en cuestión, mostrando la historia de algunas de las iteraciones. Aquí sólo se muestran algunas iteraciones debido a que el método rápidamente se deteriora y pasa a hacer movimientos muy pequeños.

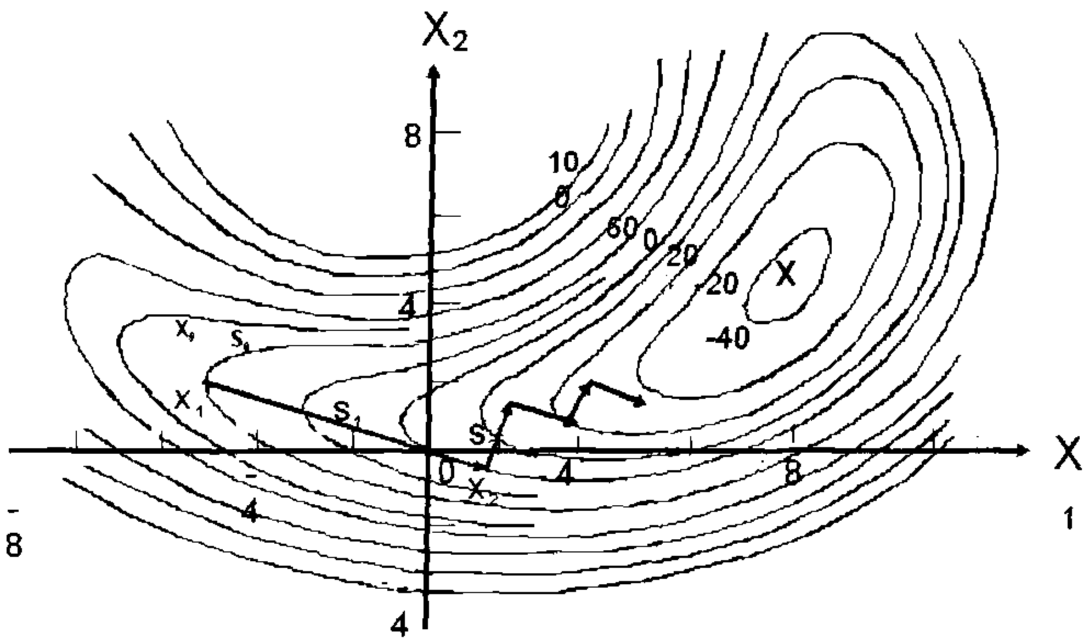


Figura A1.5 Aplicación del Método de Pasos Descendientes, "Steepest Descent Method" [1].

Por el contrario, al utilizar el método Fletcher-Reeves, Figura A1.6, se observa claramente la eficacia del mismo, llegando en unos cuantos pasos al punto óptimo del problema.

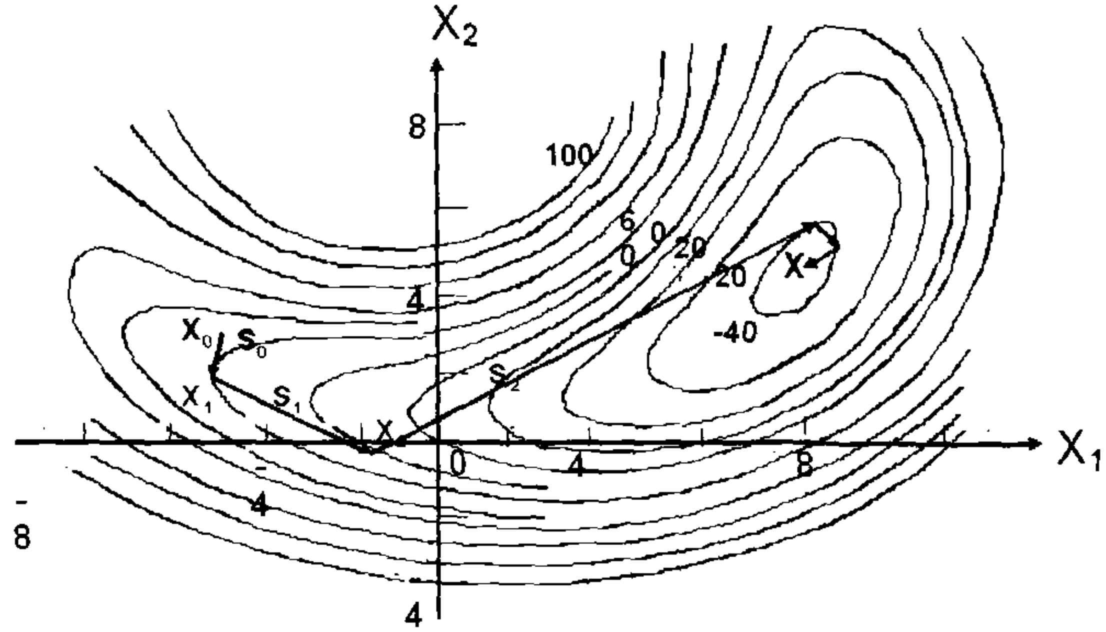


Figura A1.6 Aplicación del Método Fletcher-Reeves[1].

De esta forma, después de haber presentado este ejemplo, se espera que el lector tenga una idea mas clara de los conceptos básicos al aplicar las técnicas numéricas de optimización a un problema de ingeniería.

Referencias bibliográficas

[1] G. N. Vanderplaats, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design – With Applications", McGraw-Hill, York, EUA, 1984.

Resumen Autobiográfico

Carlos Evaristo Esparza Garcés

Candidato para obtener el Grado de Doctor en Ingeniería de Materiales

Nació en Reynosa Tamaulipas, México el 15 de Abril de 1969. Hijo de Margarito Esparza Martínez (Q.E.P.D.) y de Oralia Elida Garcés Solís. Realizo sus estudios de licenciatura en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, FIME, de la UANL, obteniendo el titulo de Ingeniero Mecánico Electricista con mención honorífica en febrero de 1992.

Posteriormente efectuó estudios de postgrado en el Programa Doctoral en Ingeniería de Materiales de la misma facultad, FIME-UANL, becado por el CONACYT, obteniendo el grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con Especialidad en Materiales en 1997. En ese mismo año inicia los estudios de doctorado en la misma institución, con el apoyo de NEMAK S.A. de C.V.

En paralelo a sus actividades académicas, ha ocupado el puesto de Ing. de Diseño CAD en 1994 en la empresa CERREY S.A. de C.V. Ese mismo año ingresa a laborar a NEMAK ocupando el puesto de Ing. de Diseño hasta 1997. De 1997 a 1999 se desempeño como Ing. de Diseño MAGMA. Desde septiembre de 1999 a la fecha a ocupado el puesto de Jefe de Ingeniería CAD/CAM/CAE.

Entre sus mayores logros profesionales incluyen el haber logrado el reconocimiento de MAGMA Inc. en 1999 nombrando el área de CAE en NEMAK como "MAGMA Certified Facility", única en México. En el 2002 NEMAK adquirió el primer PC-Cluster en América para simulaciones de MAGMA, siendo el más rápido en el mundo. Actualmente es parte del equipo de diseño del nuevo sistema de desarrollo de productos en NEMAK, NPDS.

En el año 2000 contrajo matrimonio con Maria de Jesús Talamantes Silva. Actualmente se encuentra felizmente casado y bendecido con una hija, Carolina y otra más que nacerá, primero Dios, en enero del 2004. Otra de sus pasiones es jugar ajedrez, obteniendo varios campeonatos de 1985 a 1994.

Su deseo es continuar con su desarrollo personal, familiar, académico, profesional y espiritual.

"No hay nada noble en ser superior a otros. La verdadera nobleza radica en ser superior a tu antiguo yo". - Proverbio Hindú.