

Sección I**Marco de Referencia:
los Sistemas Dinámicos.****§I.1 Introducción.**

El marco conceptual donde surge el concepto de caos es la teoría de los sistemas dinámicos, en particular de los sistemas dinámicos no-lineales. El objetivo de la presente sección es el de presentar los conceptos fundamentales de la teoría de caos, empezando naturalmente con la terminología básica de la teoría de los sistemas dinámicos. Al final, se tratan con detalle algunos enfoques metodológicos del problema de la cuantificación del grado de caos de un sistema.

Como veremos en la sección II de esta Tesis, la teoría de los sistemas dinámicos fue fundada por Henri Poincaré, en el siglo pasado, y a lo largo de los años se han producido importantes contribuciones que la han enriquecido, y que hasta en nuestros días se mantiene en constante crecimiento.

§1.2 Los sistemas dinámicos.

El concepto fundamental de la teoría de los sistemas dinámicos es naturalmente el de sistema dinámico. Una definición formal sería la siguiente [De Souza-Machado *et al.*, 1990]:

Un sistema dinámico consiste de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, lineales y de primer orden de la forma

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{L})$$

donde \mathbf{X} es un vector del espacio de fases (X_1, X_2, \dots, X_n) , X_i son las coordenadas del espacio de fases, \mathbf{L} es un espacio de parámetros L_1, L_2, \dots, L_m , \mathbf{G} es una función vectorial, y n es la dimensión del espacio de fases.

Es decir, un sistema dinámico hace referencia a dos cosas: un espacio, o colección de estados del sistema (la máxima información posible sobre un sistema) y una dinámica o regla que describe cómo evolucionan los estados en el tiempo. El estudio de un sistema dinámico estriba en ver cómo varían sus estados e_t , a través del tiempo. Se desea al menos describir la variación, y en el mejor de los casos, predecirla:

$$e_t \rightarrow e_{t+1}$$

Los primeros análisis de los sistemas dinámicos tienen su origen en Isaac Newton [1967]. Antes de Newton, los modelos del universo - el sistema físico cuyo estudio es el que tiene más antigüedad - eran más bien geométricos. Newton ideó una teoría física, que incluía la gravitación universal y las leyes del movimiento, de la cual derivó las ecuaciones diferenciales que determinaban la dinámica de los cuerpos celestes. Posteriormente, Henri Poincaré y luego George D. Birkhoff iniciaron un estudio más abstracto, topológico, de las ecuaciones diferenciales.

§I.3 El espacio de fases.

La evolución de los estados del sistema suele representarse gráficamente en el denominado espacio de fases (\mathbf{X} , en la definición), cuyas coordenadas son los componentes del estado, o en otras palabras, los grados de libertad del sistema. En general, las coordenadas dependen de la naturaleza del fenómeno que se esté estudiando. Por ejemplo, para el péndulo clásico las coordenadas serán su posición y su velocidad. En su evolución, el sistema pasa por una serie de estados, e_1, e_2, \dots ; llamaremos órbita a tal conjunto de estados.

El concepto de espacio de fases (también llamado de configuraciones, o de estados) posee un extraordinario valor a la hora de estudiar dinámicas caóticas. La geometrización de la dinámica resulta muy útil para caracterizar el comportamiento asintótico de los sistemas dinámicos, lo cual lleva a uno de los conceptos básicos de la teoría de caos, el de conjunto atractor (ver §I.5).

§I.4 Modelación matemática de los sistemas dinámicos.

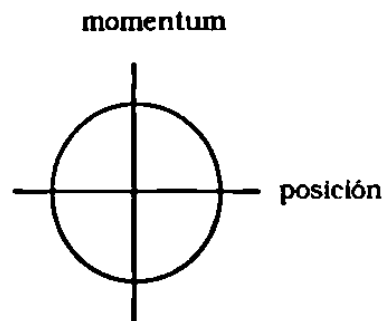
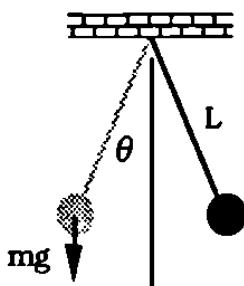
Además de las ecuaciones diferenciales, existen otros modelos matemáticos que se utilizan para definir la dinámica de un sistema:

- ecuaciones de diferencias
- ecuaciones dinámicas de símbolos.

§I.4.1 Ecuaciones diferenciales.

La ecuación dada arriba de la definición de sistema dinámico determina un conjunto de soluciones $\mathbf{X}(t)$, denominado el flujo en el espacio de fases. Las soluciones son consideradas como las trayectorias en el espacio de fases. La función vectorial corresponde al campo vectorial generalizado del *momentum* (o impulso) asociado con el flujo. El ejemplo clásico de un flujo es el del movimiento de un péndulo, descrito desde Newton por una ecuación diferencial ordinaria:

$$\ddot{\theta} + (g/L) \text{sen } \theta = 0$$



§I.4.2 Ecuaciones de diferencias.

Las ecuaciones de diferencias, también llamadas mapeos, se derivan de los flujos continuos estudiando el comportamiento del sistema en tiempos discretos, esto es, $x_n = x(t_n)$. Los mapeos de primer y segundo orden tienen las formas

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

y

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

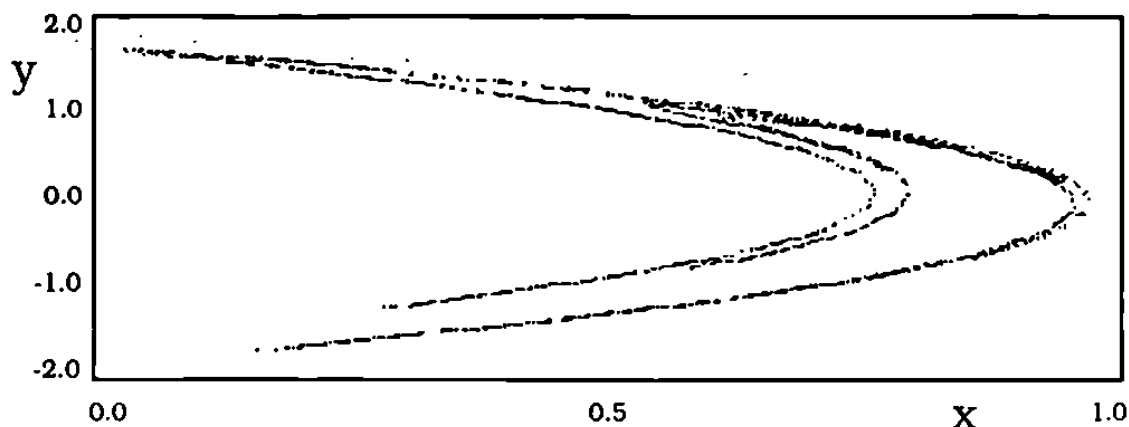
$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

Un ejemplo clásico de una ecuación de diferencias de primer orden lo constituye la ecuación logística, que estudiaremos en la Sección III.

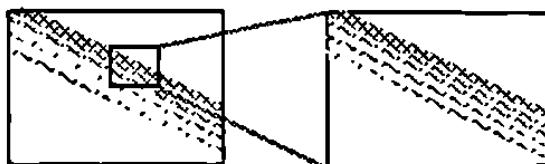
El ejemplo más importante para un mapeo de segundo orden es el descubierto por Michel Hénon [1976], astrónomo francés del Observatorio de Niza. El sistema dinámico está dado por el siguiente par de ecuaciones de diferencias:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_t + 1 - A x_t^2 \\ y_{t+1} &= B x_t \end{aligned}$$

Para valores de los parámetros de control $A = 1.4$ y $B = 0.3$, Hénon encontró el atractor que lleva su nombre, el cual se muestra en la siguiente figura:



Si se selecciona cualquier parte del atractor, puede notarse que éste presenta autosimilitud, es decir, constituye un objeto fractal:



El aspecto más interesante es que si se observa el comportamiento punto a punto, éstos aparecen de una manera aparentemente aleatoria, y resulta extraño que al final de un número relativamente grande de iteraciones (Hénon obtuvo 5 millones de puntos en su computadora IBM 7040), se tenga esa forma.

§I.4.3 Ecuación dinámica de símbolos.

Una ecuación dinámica de símbolos se obtiene cuando la variable x_n está restringida a un conjunto de valores discretos, digamos $\{0, 1, 2\}$. En este caso no hay necesidad de pensar en términos numéricos porque se puede realizar una correspondencia entre $\{0, 1, 2\}$ y cualquier conjunto de símbolos tales como $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{I, C, D\}$, o $\{R, V, A\}$. Así, en algunos sistemas podemos interesarnos en la posición de una partícula, izquierda (I), centro (C), o derecha (D). O bien, los estados podrían tener algún color asociado, rojo (R), verde (V) o azul (A). La evolución del sistema se expresa entonces en la forma

$$a_{n+1} = h(a_n)$$

Sin embargo, pudiera ser que $h(a_n)$ no tenga una expresión algebraica explícita, y que más bien se trabaje con desigualdades. Por ejemplo, si $x(t_n)$ es la posición de la partícula en el tiempo t_n , podríamos tener

$$a_{n+1} = I \quad \text{si } x_n < 0$$

$$a_{n+1} = D \quad \text{si } x_n \geq 0$$

Una órbita de equilibrio podría ser IIII... , mientras que un movimiento en forma de ciclo límite podría ser IIDIID... , o también DIDI.... Si el sistema fuera caótico, las trayectorias serían aperiódicas, por ejemplo IDIIDDDDI...

§I.5 Atractores.

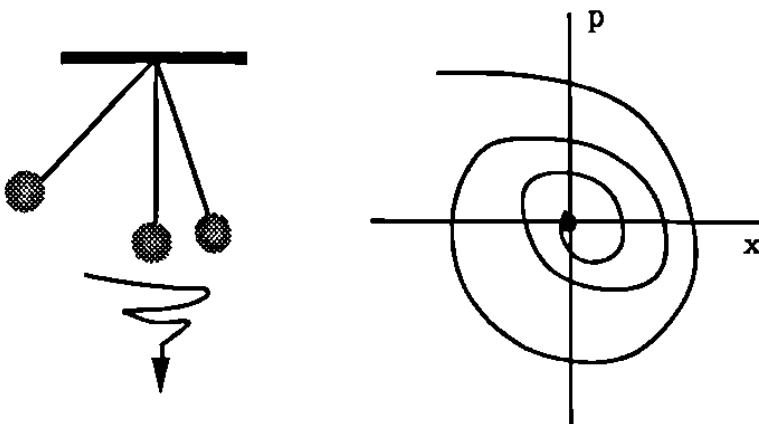
A medida que $t \rightarrow \infty$, cualquier trayectoria de un sistema disipativo (es decir, aquel que no conserva su energía) se aproximará a una región limitada del espacio de fases, el atractor. Es decir, un atractor será aquel conjunto del espacio de fases hacia el cual tiende o es atraído el comportamiento de un sistema. Un hecho interesante en la teoría de los sistemas dinámicos es que el comportamiento asintótico de un sistema disipativo puede ocurrir en tan sólo cuatro formas típicas, es decir, existen cuatro tipos de atractores:

- punto fijo
- ciclo límite
- toro
- atractor extraño

§I.5.1 Punto fijo.

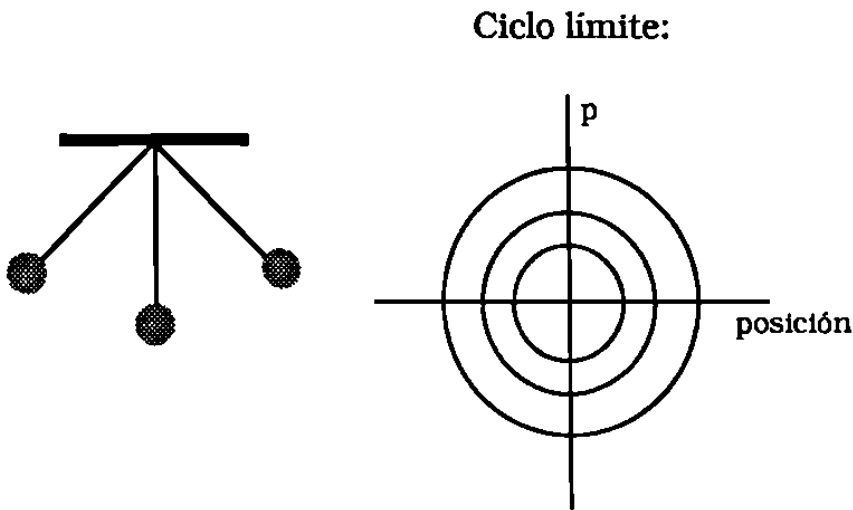
Si un péndulo tiene rozamiento, sus órbitas serán gradualmente atraídas hacia un punto, el origen, con posición y *momentum* nulos. Este punto fijo, será el atractor del sistema dinámico que describa al péndulo:

Punto fijo: el origen



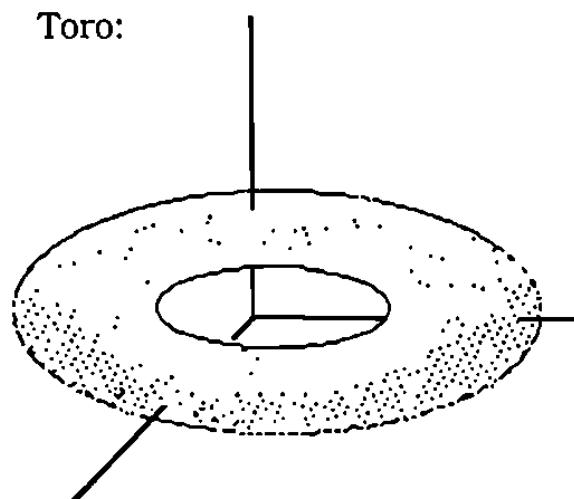
§1.5.2 Ciclo límite.

Si el péndulo se mueve sin rozamiento, el movimiento que describe es el de una circunferencia. Entonces el atractor es ahora un ciclo límite, periódico:



§1.5.3 Toro.

En ocasiones los sistemas dinámicos tienen un comportamiento más complejo que el de un punto fijo o el de un ciclo límite. En este sentido, un atractor frecuente es un toro, donde los puntos tienen movimientos cuasiperiódicos:



Una característica importante de las trayectorias en los atractores toroides es que su movimiento, a pesar de su complejidad, es predecible. Casos típicos de atractores toroides ocurren en sistemas de dos osciladores acoplados - péndulos, planetas o un depredador y su presa. Si bien las trayectorias nunca se repiten, son regulares si las frecuencias de los osciladores carecen de divisor común. Lo importante aquí es que las órbitas que empiezan cerca la una de la otra permanecen siempre cercanas, por lo que se garantiza la predecibilidad a largo plazo.

§I.5.4 Atractor extraño.

Por mucho tiempo se pensó que el catálogo de atractores estaba completo, es decir, se creía que el comportamiento asintótico de un sistema disipativo estaba confinado a una de tres opciones: el punto fijo, el ciclo límite o el toro. Sin embargo, investigaciones como la de Edward N. Lorenz en la década de los sesentas revelaron la posibilidad de un comportamiento fuera de lo común (ver §II.9), lo que llevó a bautizar a los atractores como atractores extraños. La denominación no era casual, pues el comportamiento de algunos sistemas dinámicos no-lineales era altamente complejo, las órbitas seguían trayectorias aparentemente aleatorias, esto es, caóticas. El atractor de Lorenz resultó ser de hecho el primer atractor extraño reportado en la literatura. Los atractores extraños poseen las siguientes propiedades:

- 1 No importa qué tanto tiempo se considere, las órbitas no escapan del espacio de fases, sino más bien se mueven dentro de un volumen confinado de él. Esto se debe al "doblamiento y estiramiento" del espacio de fases (ver §II.10).
- 2 Algunos atractores extraños son fractales - exhiben autosimilitud al ser ampliados - y otros no lo son.
- 3 Todo atractor extraño es fuertemente dependiente de cambios pequeños en las condiciones iniciales. Esto significa que dos puntos iniciales divergen rápidamente, de modo exponencial, rumbo a un caos aparente. Esta última propiedad es la razón por la cual la teoría de caos elimina la predecibilidad del sistema (ver la Sección IV).

§1.6 Cuencas de atracción.

Un sistema puede tener varios atractores, y entonces diferentes condiciones iniciales conducirán al sistema a alguno de ellos. El conjunto de parámetros que conforman el estado inicial que evoluciona hacia el atractor se denomina su cuenca de atracción.

§1.7 Rutas al caos.

Existen al menos tres escenarios en los cuales el comportamiento regular de un sistema cambia a un comportamiento caótico: duplicación del periodo, intermitencia, y cuasiperiodicidad. No todos los sistemas siguen estas rutas, y es posible el descubrimiento de otras en el futuro.

§1.7.1 Duplicación del periodo.

En este primer escenario el periodo de la solución se bifurca en ciertos valores de un parámetro, hasta que cuando el parámetro alcanza un valor crítico la solución es caótica. Un hecho interesante es que la duplicación del periodo presenta universalidad, en el sentido de que sin importar el contexto, se cumple para cualquier sistema que la tasa de la diferencia de los valores en los que se da la bifurcación es constante; este punto lo trataremos en particular para la ecuación logística, en la Sección III.

§1.7.2 Intermitencia.

En este caso, una señal regular se ve interrumpida por algunos brotes o estallidos de caos; cuando el parámetro de control alcanza un valor crítico, la señal se vuelve caótica, de una manera continua.

§1.7.3 Cuasiperiodicidad.

Para este escenario, el sistema se aproxima al caos vía el rompimiento de una órbita cuasiperiódica (o atractor toro).

§1.8 Definición de caos.

James Gleick, en su libro Chaos [1987] ofrece un inventario de definiciones concernientes a nuestro objeto de estudio, el caos:

Orbitas atractoras complicadas y aperiódicas, de ciertos sistemas dinámicos (usualmente de baja dimensión).

Philip Holmes

Cierto tipo de orden sin periodicidad. También: Campo de estudio de rápida expansión al cual matemáticos, físicos, hidrodinamicistas, ecologistas y muchos otros han hecho importantes contribuciones.

Hao Bai-Lin

Comportamiento aparentemente recurrente y aleatorio en un sistema determinístico (tipo reloj) simple.

H. Bruce Stewart

El comportamiento irregular e impredecible de sistemas dinámicos no-lineales determinísticos.

Roderick V. Jensen

Dinámica con entropía métrica positiva, pero finita. Comportamiento que produce información (amplifica pequeñas incertidumbres), pero que no es completamente impredecible.

James Crutchfield

Dinámica liberada al fin de los grilletes del orden y de la predecibilidad ... Sistemas liberados para explorar aleatoriamente cada una de sus posibilidades dinámicas ... Variedad exótica, riqueza de elección, una cornucopia de oportunidad.

Joseph Ford

§1.9 Medición del caos.

Uno de las cuestiones cruciales en la teoría de caos es el problema de poder determinar si un sistema exhibe un comportamiento caótico, y en cualquier caso, en qué medida. Existen varios enfoques que atacan este problema, de los cuales presentamos los más utilizados en la práctica.

§1.9.1 Dimensión de correlación de Grassberger y Procaccia.

En este punto se estudiará uno de los métodos utilizados para determinar si una serie de tiempo $\{x_t\}$ obedece a un patrón de comportamiento caótico. Este método se utiliza más bien para detectar caos en sistemas muy simples. El estudio de caos de mayor complejidad requeriría tener disponible una cantidad infinita de datos (en la práctica, el número de datos que se analizan es del orden de 100, 000 ó más).

¿Cómo se prueba la existencia del caos de baja dimensión? Supóngase una lista de datos $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, x_T$. Un método es observar que los mapas caóticos no llenan todo el espacio en alta dimensión. Por ejemplo, considérense dos conjuntos de datos a_t generados por el mapa de tienda de acampar (ver §1.8.1.1), y b_t una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Si graficamos a_t en una dimensión, será uniforme en el intervalo $[0, 1]$, de modo que llena tanto espacio como b_t . Sin embargo, consideremos dos vectores (a_{t-1}, a_t) y (b_{t-1}, b_t) . Si los graficamos en dos dimensiones, los datos del mapa de tienda caerán en la tienda, mientras que los datos de la variable aleatoria se distribuirán uniformemente en el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$. En otras palabras, los datos del mapa de tienda dejan agujeros (áreas vacías) grandes en el espacio bidimensional, cosa que no hacen los datos aleatorios.

Para sistemas caóticos más complejos, necesitamos ver los datos en dimensiones mayores. Un proceso caótico puede llenar las primeras n dimensiones, pero deja agujeros grandes en la $(n + 1)$ -ésima dimensión.

Obviamente, este procedimiento gráfico no es práctico para sistemas caóticos complejos.

Grassberger y Procaccia [1983] desarrollaron un método basados en el concepto de "dimensión de correlación". Este método para detectar caos ha sido utilizado con éxito por varios investigadores en ciencias naturales. Para evaluar esta cantidad, se tiene el siguiente método (ver Brock, [1991]):

paso I Remover la autocorrelación, si existe. La autocorrelación puede afectar algunas de las pruebas de caos, así que debe removerse de los datos. Esto puede hacerse filtrando los datos usando una autorregresión.

paso II Formar n-historias de los datos filtrados. Estos se denotan así:

$$1\text{-historia: } x_t^1 = x_t$$

$$2\text{-historia: } x_t^2 = (x_{t-1}, x_t)$$

...

$$n\text{-historia: } x_t^n = (x_{t-n+1}, \dots, x_t)$$

Una n-historia es un punto en el espacio n-dimensional; n se denomina la "dimensión encajada".

paso III Calcular la integral de correlación:

$$C_n(\epsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \# \{ (t, s), 0 < t, s < T: \| x_t^n - x_s^n \| < \epsilon \} / T^2$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma sup- o máx. Expresado en palabras, la integral de correlación $C_n(\epsilon)$ se define como la fracción de pares $(x_t^n - x_s^n)$, que están cerca uno de otro, en el sentido que

$$\max_{i=0, \dots, n-1} \{ |x_{s-i} - x_{t-i}| \} < \epsilon.$$

paso IV Calcular la pendiente de la gráfica de $\log C_n(\epsilon)$ versus $\log \epsilon$ para pequeños valores de ϵ . Más precisamente, queremos calcular la siguiente cantidad:

$$v_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C_n(\epsilon)}{\log \epsilon}$$

Si v_n no aumenta con n , los datos son consistentes con un comportamiento caótico. De hecho, la dimensión de correlación de Grassberger-Procaccia está definida por

$$v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

El significado de la dimensión de correlación puede aclararse si consideramos el mapa de tienda de acampar.

§I.9.1.1 Mapeo de tienda de acampar.

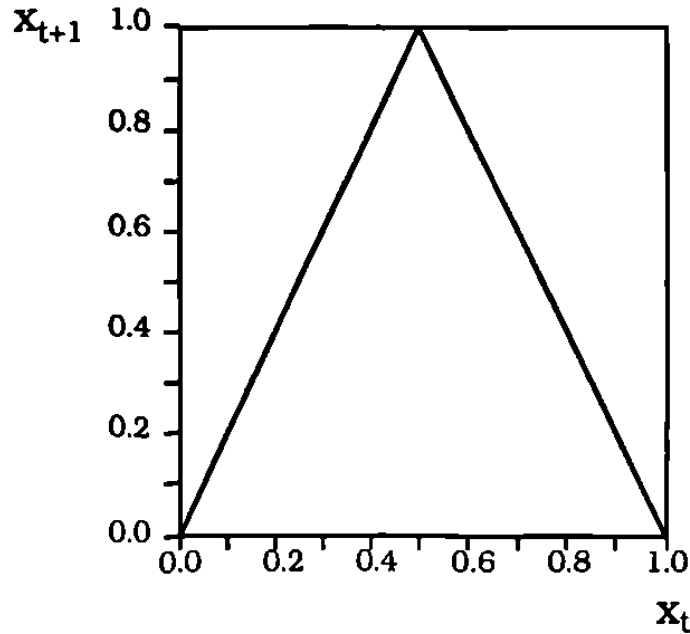
Uno de los procesos caóticos más simples es el conocido como mapeo de tienda de acampar. La dinámica de este sistema no-lineal está dada por las siguientes ecuaciones acopladas:

$$x_t = 2x_{t-1} \quad \text{si } x_{t-1} < 0.5$$

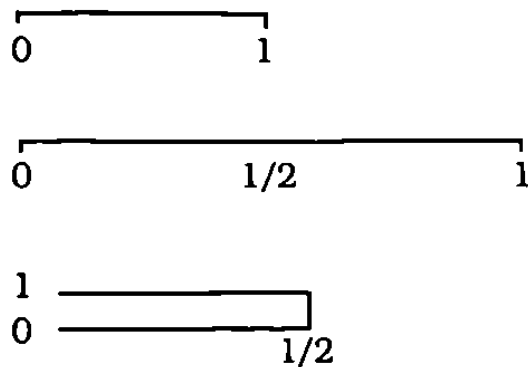
$$x_t = 2(1 - x_{t-1}) \quad \text{si } x_{t-1} \geq 0.5$$

donde $x_t \in [0, 1]$.

La gráfica de x_t versus x_{t+1} se muestra a continuación; la forma de tienda de acampar es evidente, de allí la razón del nombre de este mapeo.



Intuitivamente, este mapeo toma el intervalo unitario $[0, 1]$, lo estira hasta el doble de su longitud, y luego lo dobla por su mitad. La aplicación repetida de este estiramiento y doblaje aleja puntos que están cerca unos de otros. Este tipo de estiramiento y doblaje es característico de los mapeos caóticos. El comportamiento de los puntos $\{x_t\}$ se hace un tanto difícil, de modo que la serie parece aleatoria:



El mapeo de tienda de acampar posee cuatro propiedades:

- (1) Los puntos $\{x_t\}$ llenan el intervalo unitario $[0, 1]$ uniformemente a medida que $t \rightarrow \infty$. Esto significa que la fracción de puntos en $\{x_t\}$ que caen en algún intervalo intermedio $[a, b]$ es $a - b$, para cualesquier $0 < a < b < 1$.
- (2) Cualquier error en la medición del valor inicial x_0 será incrementado rápidamente, de manera exponencial.
- (3) El comportamiento de x_t parece estocástico, a pesar de que es un proceso determinístico (pues la regla de evolución del sistema, esto es, su dinámica, se conoce). De hecho, la estocasticidad de este sistema se "asegura" dado que la función empírica de autocovarianza $\rho_{xx}(k)$ toma un valor de cero, como si se tratara de una fuente de ruido blanco:

$$\rho_{xx}(k) = E[x_t x_{t-k}] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=0}^{\infty} x_t x_{t-k}}{T} = 0$$

- (4) El comportamiento de x_t puede tener una secuencia de pequeños incrementos, y de pronto declinar bruscamente.

Puesto que el mapa está uniformemente distribuido en el intervalo $[0, 1]$, la cantidad $C_1(\epsilon)$ se duplica si ϵ se duplica. Entonces, para valores pequeños de ϵ ,

$$v_1 = \frac{\log C_1(\epsilon)}{\log \epsilon} = 1$$

Pero las 2-historias no llenan el cuadrado unitario $[0, 1] \times [1, 0]$. De hecho, todos los puntos caen en la tienda. Para valores pequeños de ϵ , $C_2(\epsilon)$ se duplica si ϵ se duplica, de modo que

$$v_2 = \frac{\log C_2(\epsilon)}{\log \epsilon} = 1$$

Esto sigue siendo válido para cualquier n , esto es,

$$v_n = \frac{\log C_n(\epsilon)}{\log \epsilon} = 1$$

En consecuencia, la dimensión de correlación para el mapa de tienda de acampar es $v = 1$.

Si aplicamos esto al pseudogenerador de números aleatorios, tenemos que la variable se encuentra uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 1]$. De nuevo, podemos ver que $C_1(\epsilon)$ se duplica si ϵ se duplica, por lo que

$$v_1 = \frac{\log C_1(\epsilon)}{\log \epsilon} = 1$$

Sin embargo, dado que las 2-historias llenan uniformemente el cuadrado unitario $[0, 1] \times [1, 0]$, $C_2(\epsilon)$ se cuadruplica si ϵ se duplica, y

$$v_2 = \frac{\log C_2(\epsilon)}{\log \epsilon} = 2$$

En general,

$$v_n = \frac{\log C_n(\epsilon)}{\log \epsilon} = n$$

En fin, la dimensión de correlación para el proceso aleatorio vale ∞ .

Utilizando este método, Grassberger y Procaccia [1983] determinaron las dimensiones de correlación para varios sistemas caóticos. Los resultados se dan en la siguiente tabla:

Sistema caótico:	ν
Ecuación logística	1.00 ± 0.02
Mapa de Hénon	1.22 ± 0.01
Mapa de Lorenz	2.05 ± 0.01
Ecuación de Mackey-Glass	7.50 ± 0.15

Estos resultados muestran que los mapas caóticos no llenan suficiente espacio en una dimensión encajada alta, lo cual es una propiedad genérica de los procesos caóticos. Hay que enfatizar que la dimensión de correlación es una medida de qué tanto espacio está llenado por una serie de datos. Por esto, la dimensión de correlación no necesariamente toma valores enteros. Además, la dimensión de correlación no está relacionada con el número de "factores independientes" que gobiernan un sistema. Así, por ejemplo, la ecuación univariada de Mackey-Glass (Mackay, Michael C. y Glass, Leon [1977]):

$$\dot{x}(t) = \frac{ax(t-c)}{1+x(t-c)^{10}} - bx(t)$$

con $a = 0.2$, $b = 0.1$ y $c = 100$, tiene una dimensión de correlación de cerca de 7.

§1.9.2 Complejidad algorítmica.

El término "complejidad algorítmica" se refiere a la medida de aleatoriedad de las órbitas de un sistema dinámico (ver Ingraham, [1992]). Este concepto, tomado de la ciencia computacional, se utiliza como una medida de caos, pues se toman como iguales el caos y la aleatoriedad. Para definir la complejidad algorítmica de una dinámica, necesitamos una definición preliminar:

Una palabra finita s_N es una cadena de N letras de algún alfabeto \mathfrak{N} , por ejemplo $\mathfrak{N} = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. Un caso especial es el alfabeto binario $\mathfrak{N} = \{0, 1\}$.

Luego,

La complejidad algorítmica $K(s_N)$ de una palabra finita s_N es la longitud (el número de símbolos) del algoritmo más corto que pueda imprimir tal palabra.

La definición, aunque remite a la teoría de las máquinas de Turing, puede manejarse independiente de un contexto computacional. Un algoritmo puede conceptualizarse como un "programa", "relaciones recursivas" o unas "reglas". En cualquier caso, tenemos que $1 \leq K(s_N) \leq N$. Si, para N grande, $K(s_N)$ no es apreciablemente menor que N , se dice que la palabra es aleatoria.

La complejidad algorítmica de una palabra infinita se define como

$$K(s_\infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K(s_N)}{N}$$

donde s_N es la cadena de las primeras letras de s_∞ . Si $K(s_\infty) > 0$, la palabra infinita se dice que es aleatoria.

Ahora, considérese un mapeo $F: X \rightarrow X$, donde el espacio de fases X es muy general. X es particionado en un número finito de conjuntos disjuntos $\{E_1, E_2, \dots, E_p\} \equiv \mathcal{E}$. La órbita real $F^n(x)$, con $n \geq 0$, se remplaza por su itinerario: la palabra infinita $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ dependiendo si el enésimo punto cae dentro del conjunto $E_{\omega_n} : F^n(x) \in E_{\omega_n}$. Se define entonces la complejidad algorítmica de esta palabra infinita de la misma forma dada antes.

Puesto que el itinerario depende del punto inicial x , la partición \mathcal{E} , y el mapeo F , denotemos la complejidad algorítmica por $K(x, F, \mathcal{E})$:

$$K(x, F, \mathcal{E}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K(\tilde{\omega}_N)}{N}$$

donde $\tilde{\omega}$ es la secuencia $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_m$. Ahora, sea $K(x, F)$ el límite superior de $K(s_\infty)$ sobre todas las particiones \mathcal{E} . Entonces decimos que la órbita basada en x es aleatoria si $K(x, F) > 0$.

Podemos ver la idea que motiva este formalismo. Si la órbita es realmente aleatoria, en el sentido intuitivo, no existe ningún algoritmo corto disponible para imprimirla. Debemos simplemente calcular la órbita completa. Esto significa que $K(x, F) > 0$.

§I.9.3 Entropía de Kolmogorov y otras entropías.

Este enfoque (ver Ingraham, [1992]) está estrechamente relacionado con el anterior, y de nuevo se trabajan mapeos generales F . La entropía $h(F)$ mide la incertidumbre al predecir el $(N + 1)$ -ésimo punto de un itinerario, dados los primeros N puntos, para $N \gg 1$. También, se utiliza la partición \mathcal{E} del espacio de fases. La entropía (o métrica) de Kolmogorov utiliza la teoría de la medida y órbitas genéricas. La entropía topológica se define de una manera ligeramente distinta, siguiendo las órbitas individuales de F . En suma, la dinámica es aleatoria o impredecible, *i. e.*, es caótica, si la entropía $h(F) > 0$.

Sección II

Desarrollo Histórico
de la Teoría de Caos

§II.1 Introducción.

Los orígenes de la teoría de caos se remontan al siglo XIX, con las ideas de Henri Poincaré, quien inició el estudio formal de los sistemas dinámicos. Posteriormente, diversos científicos y matemáticos trabajaron con distintos aspectos de esta teoría.

De particular importancia para nosotros resulta el hecho de que el desarrollo cronológico de los conceptos y técnicas que constituyen la teoría de caos ocurrió desde diferentes vertientes. En el recorrido histórico que presentaremos enseguida podremos constatar el carácter multidisciplinario de esta nueva teoría. Por lo antes dicho, el desarrollo histórico dado a continuación no presenta una estructura estrictamente lineal. Veremos cómo la teoría de caos se ha nutrido de la matemática (H. Poincaré, G. Cantor, A. M. Liapunov, S. Smale), la ecología y la dinámica de poblaciones (R. May), la ingeniería eléctrica (Duffing y van der Pol), la meteorología (E. Lorenz), y la hidrodinámica y los fenómenos de turbulencia (D. Ruelle y F. Takens).

En la actualidad, el cariz multidisciplinario de la teoría de caos se deja ver en sus polifacéticas aplicaciones, que abarcan áreas tan (aparentemente) dispares como la macro y microeconomía, fisiología cardíaca, astronomía planetaria, tráfico vehicular, mercado de valores, láseres, reacciones químicas, etc. La teoría de caos aún no está terminada, y se sigue nutriendo y manifestando en numerosas disciplinas científicas, tanto en el campo natural como en el social. La lista de aplicaciones se amplía continuamente, lo que ha traído como consecuencia que la teoría de caos se consolide cada vez más.

§II.2 Georg Cantor.

Uno de los aspectos esenciales en el desarrollo de la teoría de caos es la geometría fractal. En 1883, el matemático alemán Georg Cantor [1915] estudió el primer objeto fractal, conocido como "conjunto de Cantor" (también se denomina polvo de Cantor. Ian Stewart [1989] aclara que la invención del conjunto se debe a Henry Smith, matemático inglés del siglo XIX). La construcción de este conjunto es simple: partiendo del intervalo unitario $[0, 1]$, se remueve su tercio central (como intervalo abierto). Este proceso se repite *ad infinitum* para los segmentos que van quedando. En la n -ésima etapa se habrán removido 2^n intervalos abiertos. Por ejemplo, si hacemos esto cuatro veces obtenemos la siguiente figura:



Lo sorprendente de este conjunto es que el producto final tiene longitud cero (la medida de Lebesgue es cero) mientras que su dimensión fractal vale $\ln 2 / \ln 3 = 0.6309 \dots$, lo cual equivale a decir que el conjunto de Cantor no llena completamente el espacio unidimensional del segmento unitario de recta. Una versión bidimensional del conjunto de Cantor es la "alfombra de Sierpinski", que se construye removiendo iterativamente los novenos centrales de un cuadrado. En tres dimensiones se tiene la "esponja de Menger", resultado de remover iterativamente los vigésimo-séptimos centrales de un cubo (con volumen final cero, pero con un área superficial ¡infinita!).

La importancia del conjunto de Cantor - y en general de la geometría fractal - fuera de la mera curiosidad matemática y estética, no fue apreciada sino hasta hace apenas unos años, cuando se asoció con ciertos procesos caóticos, por ejemplo, con el fenómeno de la "escalera del diablo" (ver Bak, [1986]), o bien, de interés para nosotros, con el diagrama de bifurcaciones de la ecuación logística.

§II.3 Henri Poincaré.

El matemático francés Henri Poincaré (1854 - 1912) está considerado como el fundador de la rama matemática de los sistemas dinámicos. El fue quien introdujo el concepto de espacio de fases, reconociendo su importancia. La contribución más grande de Poincaré a la teoría de los sistemas dinámicos fue la del estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales (Poincaré [1899]). Uno de los problemas que estudió Poincaré fue el "problema de los tres cuerpos", o en general, el problema de n cuerpos. En este último sentido, el problema comprende un sistema de ecuaciones de la forma

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde el movimiento del i -ésimo cuerpo depende de las posiciones de los demás. Para $n = 2$, la solución es trivial, y los movimientos futuros de los dos cuerpos puede predecirse con absoluta certeza. De hecho, esta fue la base del optimismo ingenuo de Laplace (ver la Sección IV: "Teoría de Caos y el Determinismo Laplaciano").

Para $n \geq 3$, las soluciones se vuelven muy complicadas y dependen de consideraciones adicionales. De aquí surgió la teoría cualitativa de Poincaré, para tratar de entender las características que tendrían las soluciones; por ejemplo, se quería saber si los cuerpos escaparían al infinito, permanecerían cerca unos de otros, o bien colisionarían. El objetivo, en fin, era ver el comportamiento asintótico del sistema, o en otras palabras, determinar su estabilidad a largo plazo.

Después de analizar el problema de la existencia o no de la estabilidad del sistema, Poincaré siguió con la cuestión de la robustez del sistema: si el sistema fuera levemente perturbado, ¿sería su comportamiento igual al del caso original o tendría lugar algún cambio significativo en la estabilidad estructural del mismo? Si ésto último fuera el caso, entonces el sistema sería estructuralmente inestable, y existiría un punto de "bifurcación".

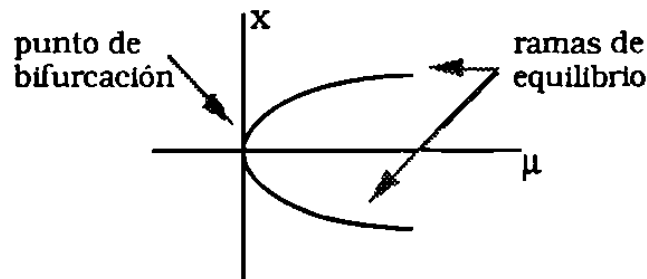
El concepto de bifurcación es de crucial importancia en la teoría de caos, y vale la pena detenernos en este punto para ofrecer un breve examen de su significado (Rosser, [1991]). Supongamos una familia de ecuaciones diferenciales cuyo comportamiento depende de un parámetro de control μ :

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ \mu \in \mathbb{R}^k \end{array}$$

Las soluciones al equilibrio de este sistema dinámico están dadas por $f_{\mu}(x) = 0$. Pero resulta que este conjunto de soluciones se bifurcará en dos ramas separadas en una singularidad, o un punto crítico degenerado (esto es, el punto en el cual el jacobiano $D_x f_{\mu}$ tiene una parte real para cada uno de sus eigenvalores). Por ejemplo, si

$$f_{\mu}(x) = \mu x - x^3$$

su jacobiano es $D_x f_{\mu} = \mu - 3x^2$. El punto de bifurcación será $(x, \mu) = (0, 0)$. La figura siguiente muestra el punto de bifurcación y las ramas de equilibrio:

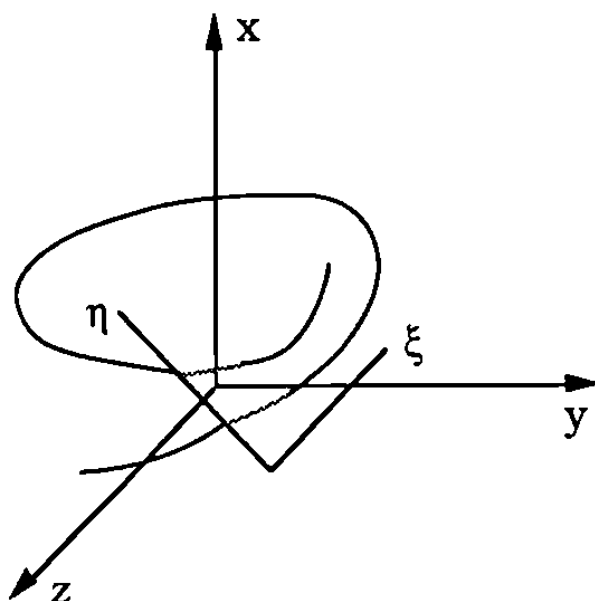


La rama central es inestable, mientras que las ramas externas son estables. La degeneración en el punto $(0, 0)$ puede explicarse viendo que la primera derivada de $f_{\mu}(x)$ es cero en ese punto, pero $(0, 0)$ no es un punto extremo de la función. Tales degeneraciones, o singularidades, juegan un papel muy importante al estudiar el problema general de la estabilidad estructural de un sistema dinámico.

Mapas de Poincaré: Para analizar el comportamiento de los cuerpos, Poincaré examinó las secciones transversales de las órbitas en una dimensión menos que el espacio de fases original. Estos gráficos, conocidos como "mapas de Poincaré", pueden mostrar el conjunto límite del sistema (su atractor, diríamos).

Para ilustrar cómo se obtiene un mapa de Poincaré, supongamos que un sistema de ecuaciones diferenciales tiene las soluciones (x, y, z) , donde $x_1(t) = x$, $x_2(t) = y$, $x_3(t) = z$. Si las soluciones están limitadas, entonces la curva solución está contenida dentro de algún volumen finito en el espacio de fases en cuestión.

Ahora, consideremos alguna superficie que sea atravesada por las órbitas. Si definimos un sistema de coordenadas (ξ, η) para esta superficie, entonces la posición de la perforación de la $(n+1)$ -ésima órbita (ξ_{n+1}, η_{n+1}) será función de la anterior, según el sistema de ecuaciones diferenciales. El mapa de Poincaré podría ser en consecuencia como sigue:



Poincaré, al aplicar este concepto al problema de los tres cuerpos, llegó a dos conclusiones:

Por una parte, surgió el siguiente teorema, para el movimiento planar (Gómez-Font, [1989]):

Teorema de Poincaré-Bendixson.- Sea \mathbf{F} un campo vectorial diferenciable en $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Los conjuntos límites de cualquier solución son:

1. Un punto de equilibrio.
2. Una órbita periódica.
3. Un grafo.

De interés para la teoría de caos es el tercer caso, que corresponde a las uniones de puntos fijos y trayectorias que los conectan. Estas trayectorias se clasifican en dos tipos: se dicen heteroclínicas cuando conectan puntos distintos, y homoclínicas si conectan un punto consigo mismo. Estas últimas resultan esenciales a la hora de estudiar los atractores extraños.

La segunda conclusión que obtuvo Poincaré fue la siguiente. En el caso del problema de los tres cuerpos, Poincaré vio la posibilidad de una solución de gran complejidad, una especie de rejilla infinitamente densa, análoga en ciertos aspectos al conjunto de Cantor. El descubrimiento de los atractores caóticos se quedó, para Poincaré, a la vuelta de la esquina.

§II.4 A. M. Liapunov y la Escuela Rusa.

El primer estudio de la conexión entre los valores del jacobiano de un sistema dinámico en el equilibrio y su estabilidad estructural fue realizado por el matemático ruso A. M. Liapunov [1966]. Él demostró que la condición suficiente para la estabilidad local era que las partes reales de los eigenvalores del jacobiano debían ser negativas.

Liapunov puede ser considerado el fundador del mayor grupo de investigadores de los sistemas dinámicos en el mundo, la denominada Escuela Rusa, que entre sus miembros ha contado con los siguientes (citados por Rosser [1991]; se menciona entre paréntesis el año alrededor del cual realizaron sus trabajos):

- A. A. Andronov y L. S. Pontryagin (1937) quienes desarrollaron la teoría de la estabilidad estructural.
- A. N. Kolgomorov (1941), uno de los más grandes matemáticos de este siglo, quien hizo importantes contribuciones a la teoría de la turbulencia.
- V. I. Arnold (1968), quien llevó a cabo la clasificación más exhaustiva de las singularidades.

§II.5 Teoría de la oscilaciones: Duffing y van der Pol.

Una de las áreas que han contribuido a la comprensión del fenómeno del caos lo constituye la teoría de las oscilaciones, donde varios modelos eléctricos y electromecánicos exhiben un comportamiento caótico. Las primeras aportaciones (mencionados por Rosser, [1991]) provienen de las investigaciones de G. Duffing, con su modelo de una viga vibrante electromagnetizada, y de Balthasar van der Pol, quien estudió los circuitos eléctricos con un triodo cuya resistencia varía con la intensidad de la corriente.

El estudio formal del oscilador de Duffing, cabe decir en el contexto de la teoría de caos, fue efectuado por Philip J. Holmes y Francis C. Moon [1979]. Ellos demostraron que conforme ocurría la variación de un parámetro el oscilador podía exhibir una secuencia de bifurcaciones del tipo duplicación del periodo, hasta alcanzar un estado caótico.

Balthasar van der Pol pudo notar el comportamiento "caótico" del oscilador que lleva su nombre, aunque no le dedicó más atención. El estudio moderno del oscilador forzado de van der Pol se debe a Levi [1981].

En la versión sin forzamiento del oscilador de van der Pol surgió un concepto importante para la teoría de caos, la bifurcación de Hopf. Este fenómeno ocurre cuando la desaparición de la parte real de un eigenvalor coincide con las raíces imaginarias conjugadas. Esto indica la aparición de un comportamiento de ciclos límite a partir de una dinámica no cíclica.

La ecuación de van der Pol es

$$\ddot{x} = \epsilon (x^2 - b) \dot{x} + x = 0$$

donde $\epsilon > 0$ es una variable de control. Para $b < 0$, existe un punto atractor en el origen. La bifurcación de Hopf ocurre cuando $b = 0$, y si $b > 0$ el conjunto atractor es un paraboloides de radio $2\sqrt{b}$.

§II.6 George D. Birkhoff.

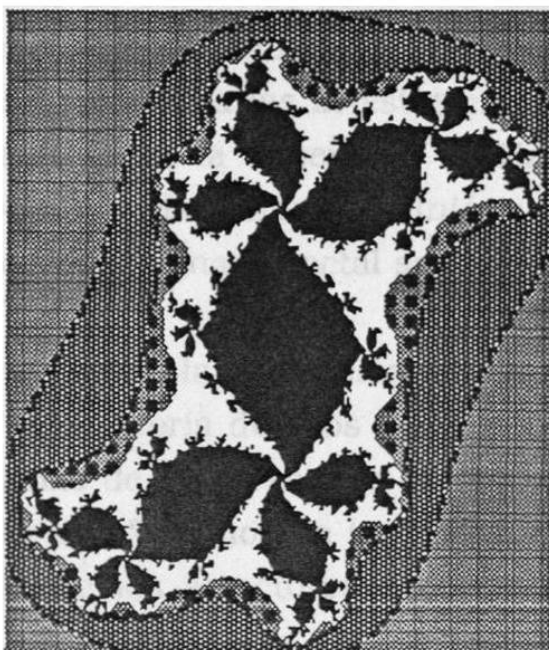
George D. Birkhoff (1884-1944) prosiguió los estudios de Poincaré. En particular, los resultados del Teorema de Poincaré-Bendixson los extendió y los colocó en un contexto teórico más riguroso (Birkhoff, [1950]). Sin embargo, exceptuando casos como el análisis de estabilidad de Liapunov, las ideas de Poincaré no tuvieron suficiente impacto en la comunidad científica de la época, tanto que sus aportaciones permanecieron sin uso cerca de medio siglo. Esto pudo deberse quizás a que tanto las investigaciones de Poincaré como las de Birkhoff eran en el campo de la mecánica celeste, donde el interés recaía en los sistemas hamiltonianos para los cuales el teorema de Liouville se cumple:

Teorema Si el sistema es hamiltoniano (sin fricción) entonces el flujo es incomprensible.

Los sistemas disipativos, por otra parte, tienen la propiedad de que un conjunto de estados en evolución ocupa una región en el espacio de fases cuyo volumen disminuye con el tiempo. A largo plazo, esta contracción de volumen tiene una fuerte tendencia a simplificar la estructura topológica de las trayectorias en el espacio de fases. Esto a menudo significa que un sistema dinámico de gran complejidad con un espacio de fases de dimensionalidad infinita - por ejemplo, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales - se puede estacionar en un subespacio de tan sólo unas cuantas dimensiones.

§II.7 Gaston Julia y Pierre Fatou.

La geometría fractal, que como se ha visto, guarda una estrecha relación con la teoría de caos, nació en la época de la Primera Guerra Mundial, con las aportaciones de dos matemáticos franceses, Gaston Julia y Pierre Fatou. Julia había mostrado (Julia, [1918]), que ciertos mapeos sencillos de números involucrando números complejos podrían resultar en unas formas geométricas de gran complejidad, como la que se muestra a continuación (cabe aclarar que esta imagen fue obtenida por computadora, recurso inexistente en la época de Julia):



Pierre Fatou [1919] realizó al mismo tiempo los mismos estudios de Julia, y entre los dos lograron dar al área una forma más o menos completa. La forma definitiva de la geometría fractal se debe al matemático Benoit Mandelbrot [1983], pionero moderno de la geometría fractal, con cuyo apellido ésta se asocia (él acuñó el término 'fractal', del latín *fractus*, quebrado). Mandelbrot estudió el trabajo original de cerca de 200 páginas de Julia, y en la década de los 70's presentó las primeras imágenes del conjunto que lleva su nombre, con la ayuda insustituible de la computadora.

§II.8 Felix Hausdorff y A. S. Besicovitch.

Hausdorff y Besicovitch (Rosser, [1991]) idearon un concepto de dimensión completamente diferente del tradicional, esto es, el euclidiano, para describir de un modo cuantitativo la irregularidad de conjuntos tales como el conjunto de Cantor. La medida implica la estimación de la tasa a la que el conjunto de puntos del conjunto se aglomera sobre sí cuando se decrecienta la escala de medición. Esto se conceptualiza como el cubrir el conjunto con esferas de radio decreciente. Lo interesante del enfoque es que la dimensión de algunos conjuntos puede no ser entera.

Por ejemplo, para el conjunto de Cantor se tiene una dimensión euclidiana de cero, mientras que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es $\ln 2 / \ln 3$. Estas ideas se convirtieron en centrales para las investigaciones de Mandelbrot y la geometría fractal. En la actualidad la dimensión de Hausdorff-Besicovitch se denomina dimensión fractal, y Mandelbrot definió un fractal como aquel conjunto cuyas dimensiones euclidiana y fractal son diferentes.

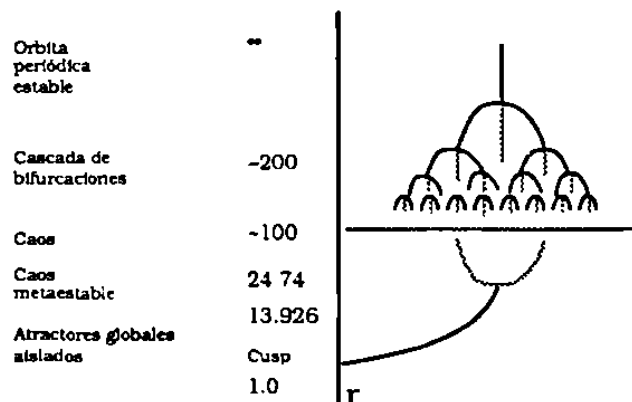
De cualquier modo que se llame, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es importante en la historia de la teoría de caos porque fue la primer tentativa de caracterizar la irregularidad de los atractores extraños de algunos sistemas dinámicos no-lineales. Más aun, muchos de los enfoques contemporáneos al problema de la dimensión de los atractores caóticos se basan en la idea original de Hausdorff.

§II.9 Edward N. Lorenz.

En 1963, Edward N. Lorenz, un matemático trabajando en problemas de meteorología en el M. I. T., publicó un artículo clásico en la literatura de caos, denominado "Deterministic Non-Periodic Flow". En él presentaba los resultados que obtuvo a raíz de enfrentar el problema de la modelación matemática de la dinámica atmosférica del planeta. A Lorenz se le atribuye el descubrimiento del caos determinístico. El modelo implicaba una versión truncada de las ecuaciones de Navier-Stokes. En su formulación original, las ecuaciones son diferenciales, más que ecuaciones de diferencias:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma (y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

donde σ es el número de Prandtl, r es el número de Rayleigh, y β es un factor geométrico. Usualmente, los parámetros σ y β se fijan (Lorenz trabajó con $\sigma = 10$ y $\beta = 8/3$), y luego se varía r . Este sistema describe un fluido de dos capas calentadas desde arriba, y las ecuaciones representan el gradiente térmico de la convección inducida gravitacionalmente del fluido. Esto se aplica para modelar océanos, atmósferas planetarias, calentamiento doméstico y diversos dispositivos ingenieriles. El sistema de Lorenz ha sido extensamente analizado; un resumen de algunos de los resultados se muestra en la siguiente figura (Robbins, [1979]):



Si denotamos por $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \mathbf{V}$ el vector de velocidad en el espacio de fases, entonces

$$\nabla \mathbf{V} = -(\sigma + \beta + 1) < 0$$

Es decir, la divergencia de \mathbf{V} es negativa, lo cual significa que el volumen en el espacio de fases se encoge, hasta alcanzar un valor nulo. De hecho, puede demostrarse que este atractor extraño contrae el espacio de fases por un factor de 10^{-6} en cada iteración. El atractor de Lorenz posee estructura fractal, aunque como la contracción es tan rápida resulta prácticamente imposible percibirla. La dimensión fractal del atractor de Lorenz es igual a 2.06. Esto indica que el movimiento de los puntos ocurre cerca de una superficie bidimensional.

La figura siguiente muestra una sección de Poincaré del atractor de Lorenz: nótese la forma característica de este atractor, como los ojos de un mapache:

§II.10 Steve Smale.

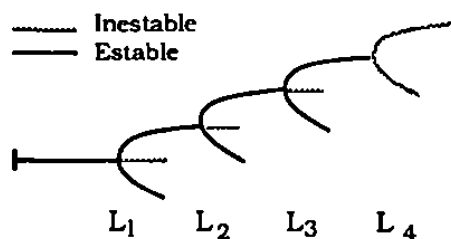
Aunque Lorenz presentó los resultados de su investigación en 1963, algunos matemáticos ya habían iniciado el estudio de lo que él descubrió en su modelo simplificado del clima terrestre. Uno de tales pioneros en la investigación matemática del caos es Steve Smale (ver Smale, [1967]), quien en la década de los sesentas realizó estudios acerca de la estabilidad estructural de flujos planares. En particular, descubrió que muchos sistemas de ecuaciones diferenciales contienen un "mapa de herradura" que posee un conjunto de Cantor, un conjunto contable infinito de órbitas periódicas de periodos arbitrariamente largos, un conjunto incontable de flujos limitados aperiódicos y una órbita densa. (El "flujo limitado aperiódico" ha sido sinónimo de caos desde mediados de la década de los setentas, aunque "turbulencia" y "dinámica irregular" también han sido utilizados.)

El concepto de "herradura de Smale" conlleva una de las ideas más interesantes y útiles para comprender la complejidad de las órbitas de un sistema caótico. Smale consideró que un sistema dinámico no-lineal realiza sobre las variables dos operaciones esenciales, que denominó "estirar" y "doblar" (palabras tomadas del proceso físico de amasar una pasta de hojaldre: algunas veces este proceso se llama también "transformación del panadero"). La operación de estiramiento hace que dos puntos cercanos se alejen una distancia bastante grande, y el doblado acerca puntos que están alejados. El resultado final es que el sistema permanece acotado en el espacio de fases, y los puntos siguen una órbitas intrincadas. Como hecho importante la herradura de Smale presenta una estructura completamente similar al conjunto de Cantor (más correctamente a dos conjuntos de Cantor cruzados). Muchos sistemas dinámicos, como por ejemplo los mencionados osciladores de Duffing y de van der Pol, poseen herraduras de Smale. Lo relevante para nosotros es que los atractores extraños son aquellos que presentan la estructura de herradura (aunque una herradura de Smale no es necesariamente un atractor). El concepto de Smale representó la primera incursión matemática explícita en el campo de los sistemas caóticos, al tiempo que le dio respetabilidad científica al conjunto de Cantor.

§II.11 David Ruelle y Floris Takens.

El interés científico por el caos en el área de las ciencias naturales se inició a principios de la década de los setentas, con un trabajo publicado por los franceses D. Ruelle y F. Takens, denominado "On the Nature of Turbulence" (Ruelle y Takens, [1971]). En esta investigación, pionera y controversial, Ruelle y Takens argumentaban que el modelo tradicional del flujo turbulento de fluidos era estructuralmente inestable y que el sistema dinámico que convergía a un atractor caótico de baja dimensión constituía un mejor modelo, al menos para ciertos casos.

El trabajo de Ruelle y Takens es interesante en la historia de la teoría de caos porque ellos fueron los primeros en descubrir un atractor extraño en un sistema físico. Ruelle y Takens también propusieron una manera útil de ver las transiciones a la turbulencia. El procedimiento que sugirieron consistía de los siguientes pasos (Rosser, [1991]). Primero, escribir una ecuación diferencial para modelar el sistema, $d\mathbf{X}/dt = G(\mathbf{X}, \mathbf{L})$, donde \mathbf{x} era el estado del sistema y \mathbf{L} un vector de parámetros. El estado podría ser un vector de dimensión finita o, en el caso de un fluido, un punto en un espacio de dimensión infinita. Luego habría que estudiar el comportamiento a largo plazo del sistema. La idea era que este comportamiento convergería a algún conjunto atractor $\Lambda(\mathbf{L})$, y la evolución del sistema podía variar en función de cambiar \mathbf{L} . Por ejemplo, el parámetro sería el número de Reynolds para un experimento con algún fluido. Después construyeron un diagrama de una secuencia de cuatro bifurcaciones de Hopf para valores crecientes de \mathbf{L} , proceso que culminaba en una solución turbulenta dominada por atractores extraños luego de la última bifurcación. Podemos observar este proceso de transición al caos en la siguiente figura:



La solución $x = 0$ persiste hasta cuando $L = L_1$, donde ocurre la primera bifurcación de Hopf. Luego se presenta un ciclo límite con una solución periódica estable con frecuencia ω_1 . Esto se mantiene hasta la segunda bifurcación, en $L = L_2$. Ahora hay un toro límite con un flujo cuasiperiódico gobernado por dos frecuencias, ω_1 y ω_2 . Para valores mayores de L el flujo oscila rápidamente entre un movimiento periódico y uno aperiódico. En $L = L_3$ ocurre la tercera bifurcación, tras la cual el movimiento se da en un toro triple y estable con componentes de frecuencias ω_1 , ω_2 y ω_3 , otra vez cuasiperiódicas. Cuando $L = L_4$, se presenta la cuarta bifurcación de Hopf y el flujo es sobre un toro cuádruple con cuasiperiodicidad y frecuencias ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 . Sin embargo, este toro es inestable, y Ruelle y Takens demostraron que el conjunto abierto de perturbaciones posee atractores extraños conteniendo herraduras de Smale y por lo tanto "turbulencia" (caos, para nosotros).

La propuesta de Ruelle y Takens era radical. Esto se comprende si consideramos que la turbulencia es un proceso estocástico por antonomasia. La idea de que un sistema con unos cuantos modos activos pudiera generar un comportamiento tan complejo - observado en la naturaleza - resultaba realmente controversial. Pero la experimentación análoga en otras ramas de la ciencia confirmaron la validez de la propuesta, y ésta ayudó a consolidar la teoría del caos.

§II.12 Tien-Yien Li y James Yorke.

Fue en 1975 cuando el término "caos" se introdujo en la literatura científica, en el artículo "Period Three Implies Chaos", de Li y Yorke. Ellos demostraron que para cualquier mapeo continuo unidimensional sobre sí mismo, la existencia de una órbita no degenerada de periodo 3 implicaría también la existencia de órbitas no degeneradas de todos los periodos así como un número incontable de órbitas asintóticamente aperiódicas. Para estos investigadores, estos constituía el caos. El resultado de Li y Yorke fue probado esencialmente en un artículo de la Escuela Rusa por A. N. Sarkovskii. El teorema de Sarkovskii es el siguiente (Weiss, [1991]):

Teorema: Sea f una función continua cuyo dominio y rango es el conjunto de los números reales. Si f tiene un punto de periodo 3, entonces tiene punto de periodo n , con $n = 1, 2, \dots$.

El artículo de Li y Yorke inspiró a su tiempo el trabajo de Robert M. May acerca de las dinámicas poblacionales caóticas en ecología (ver la Sección III), quien por su parte motivó el estudio del caos en escenarios económicos.

§II.13 Mitchell J. Feigenbaum.

El artículo de Sarkovskii sirvió de base para elaborar el concepto de "secuencias de duplicación del periodo". Este fenómeno fue descubierto explícitamente por M. J. Feigenbaum [1978], quien expuso sus resultados en el artículo "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations". El fenómeno no es otro que el de la cascada de bifurcaciones, en donde cada bifurcación lleva a la duplicación del periodo de las órbitas de un sistema a medida que se aproxima al caos. Feigenbaum utilizó las técnicas de renormalización para analizar los aspectos "universales" - de allí su mérito - de las secuencias de duplicación del periodo (ver la Sección III).

§II.14 Grupo de Sistemas Dinámicos.

A finales de la década de los setentas, cuatro jóvenes estudiantes de postgrado de la Universidad de California en el campus Santa Cruz - J. Doyne Farmer, James P. Crutchfield, Robert S. Shaw y Norman H. Packard - formaron una asociación, que denominaron Grupo de Sistemas Dinámicos, para realizar estudios de sistemas caóticos. Ellos habían tenido contacto con las investigaciones de Lorenz, evento que les condujo a experimentar y posteriormente a la tarea de darle cientificidad a la teoría naciente del caos.

Con el tiempo, la asociación atrajo a muchos otros entusiastas, y fue precisamente esta asociación la que abrió las puertas de la ciencia a la teoría de caos. En 1979 B. A. Huberman y J. P. Crutchfield lograron publicar en la prestigiada revista Physical Review Letters el artículo "Chaotic States of Anharmonic Systems in Periodic Fields". Este suceso, junto con otras publicaciones de los miembros de esta asociación terminó por darle cientificidad a la teoría de caos.

En el nivel popular, es interesante mencionar la publicación del artículo "Chaos", por los fundadores de la asociación, Crutchfield, Farmer, Packard y Shaw, en el número de diciembre de 1986 de la revista Scientific American.

A raíz de tales publicaciones, la comunidad científica del mundo se interesó vivamente por esta nueva teoría, lo cual se puede ver reflejado por el número cada vez creciente de trabajos reportados en la literatura, así como por la publicación de libros y la edición de revistas especializadas en el tema.

Sección III

Introducción a la Teoría de Caos:
la Ecuación Logística.

§III.1 Introducción.

A mediados del siglo pasado P. F. Verhulst [1838], un científico interesado en las matemáticas del crecimiento poblacional, introdujo un nuevo enfoque en tal estudio. La idea de Verhulst (ver Briggs, J. y Peat, D. F., [1989]) consistía en considerar un término extra para describir cómo se desarrolla una población en un área cerrada. Había una ecuación de la dinámica poblacional, pero con este término, la ecuación se convertía en no-lineal; este era un medio ingenioso y simple de calcular el impacto de todos los otros factores ambientales en la expansión poblacional.

De este problema surgió la ecuación denominada "logística", que utilizaremos en esta sección para describir la ruta más conocida al caos, conocida como de "duplicación del periodo". El estudio de la ecuación logística es interesante en más de un sentido. Atrás de su aparente simplicidad, encontramos un comportamiento complejo (caos), las constantes universales de Feigenbaum, y la característica definitiva del caos, la gran sensibilidad ante minúsculas variaciones en las condiciones iniciales.

Este estudio nos servirá para fundamentar algunas ideas de la Sección IV. acerca del determinismo laplaciano y la predecibilidad de los sistemas dinámicos no-lineales.

§III.2 La ecuación logística.

La ecuación logística ha sido estudiada extensivamente por diversos autores. La investigación primaria de este tema se debe a autores tales como M. Feigenbaum [1978] y R. M. May [1976].

Aun cuando denotemos con x_t a la población, en un contexto de ciencias biológicas, existen muchas disciplinas científicas donde se aplica esta ecuación fundamental. La siguiente es una lista parcial de aplicaciones de la ecuación logística:

Epidemiología: x_t es la fracción de la población infectada en el tiempo t .

Economía: modelación de la relación entre la cantidad de la mercancía y el precio; la teoría de los ciclos financieros, y las secuencias temporales generadas por diversas variables económicas.

Ingeniería: difusión de innovaciones.

Sociología: modelos de aprendizaje, donde x_t es el número de unidades de información que pueden recordarse después de un intervalo t ; propagación de rumores en sociedades bien establecidas, donde x_t es el número de personas que han escuchado el rumor tras un tiempo t .

Economía: ciclos de negocios, crecimiento de mercados.

El modelo continuo está dado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Para $k < 0$, la relación está indefinida para la dinámica poblacional.

Esta relación es la ecuación de crecimiento o decaimiento exponencial que se utiliza para estudiar la población, x_t , de cierta especie (biológica, química, etc.). En esta relación, t es el tiempo y k es una constante.

La ecuación diferencial modela el sistema en tiempo continuo. En la práctica, se considera mejor la evolución del sistema en etapas discretas de tiempo. Cada etapa o paso podría ser una generación, o quizá una semana en la vida de la población. El modelo discreto está dado por la siguiente ecuación de diferencias:

$$x_{t+1} = k x_t$$

Sin embargo, este sistema no es tan realista. Verhulst, en el siglo pasado, introdujo en esta ecuación un término que daba como resultado un modelo más exacto:

$$\frac{dx}{dt} = kx (L - x)$$

donde L es el límite de la población. Al escribir esta ecuación de esta manera se hace una verificación de crecimiento/muerte.

Esta relación, en la forma análoga de una ecuación de diferencias, conduce a una dinámica extremadamente compleja y eventualmente al caos.

La ecuación de diferencias, al reescalar, es

$$x_{t+1} = A x_t (1 - x_t)$$

Este será entonces el mapeo logístico a estudiar en el intervalo unitario:

$$x_{t+1} = A x_t (1 - x_t)$$

$$x_t \in [0, 1] \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En consecuencia, el tamaño de la población será un número que puede variar entre 0 y 1, es decir, $x_t \in [0, 1]$. Esta normalización de x_t permite la comparación de poblaciones diferentes. Por lo tanto, $x_t = 1$ representará la máxima población, y $x_t = 0.5$ será la mitad de la población. No importará el tipo de la población, lo mismo da si se trata de peces que de mariposas.

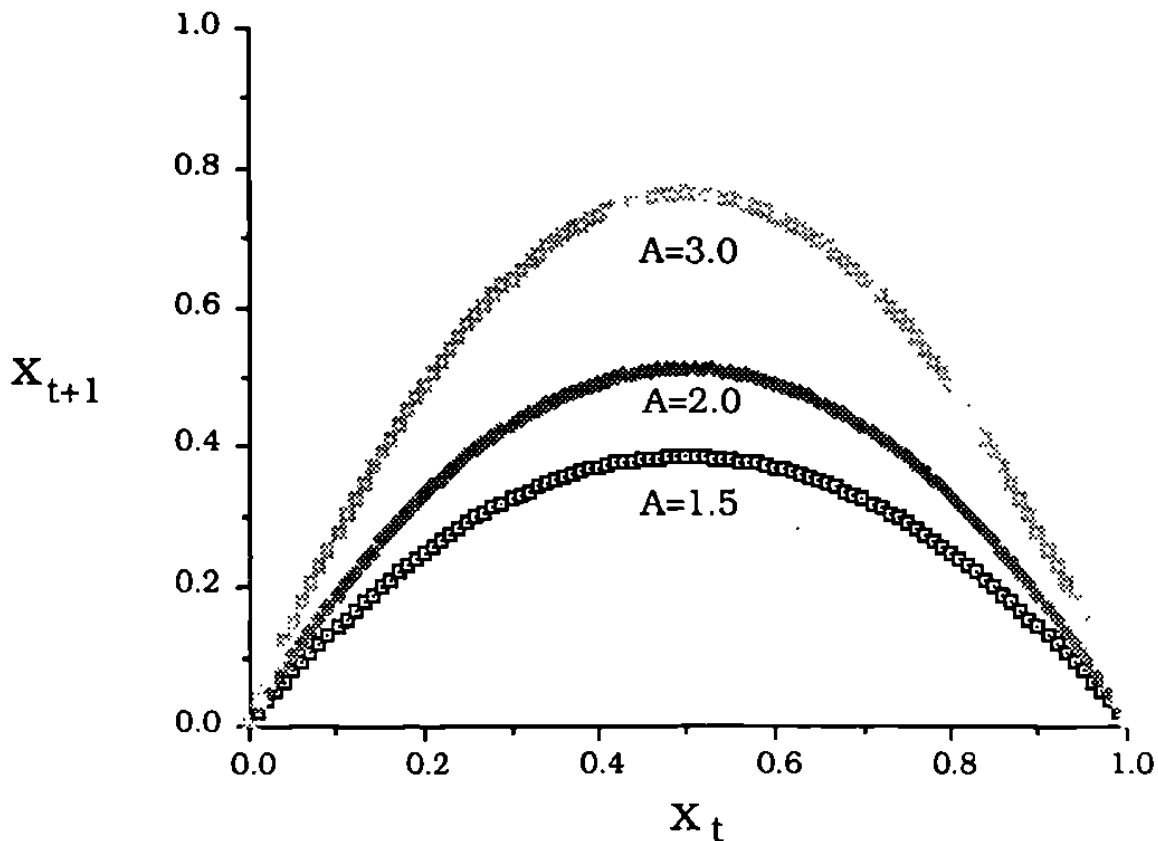
Si x_t es mayor que 1, entonces x_{t+1} será negativo, lo cual no tiene significado para una dinámica poblacional. A esto se debe porque el análisis se restringe al intervalo $0 \leq x \leq 1$. En resumen, la ecuación logística transforma un punto cualquiera en el intervalo unitario en otro punto dentro del mismo intervalo.

Por último, la ecuación logística, en la forma dada arriba, representa una familia de parábolas, con un parámetro de afinación o de control, el número real A . En el análisis que realizaremos de la ecuación logística encontraremos que A debe confinarse al intervalo cerrado $[0, 4]$.

§III.3 Atractores y bifurcaciones en la ecuación logística.

La forma de la curva representada por la ecuación logística es parabólica. Cada punto de la curva tiene coordenadas (x_t, x_{t+1}) , donde la abscisa es el valor de x_t , y la ordenada es el valor de x_{t+1} .

La siguiente figura muestra la gráfica de la ecuación logística para varios valores del parámetro A. Naturalmente, la parábola tendrá un grado de curtosis que dependerá del valor del parámetro de control A.



El primer problema que trataremos es el de la determinación gráfica de los puntos fijos de la ecuación logística. Por definición, los puntos fijos son aquellos para los cuales la expresión $x_t = x_{t+1}$ es verdadera. Esta ecuación tiene como gráfica una recta de 45°, que inicia en el origen (0, 0).

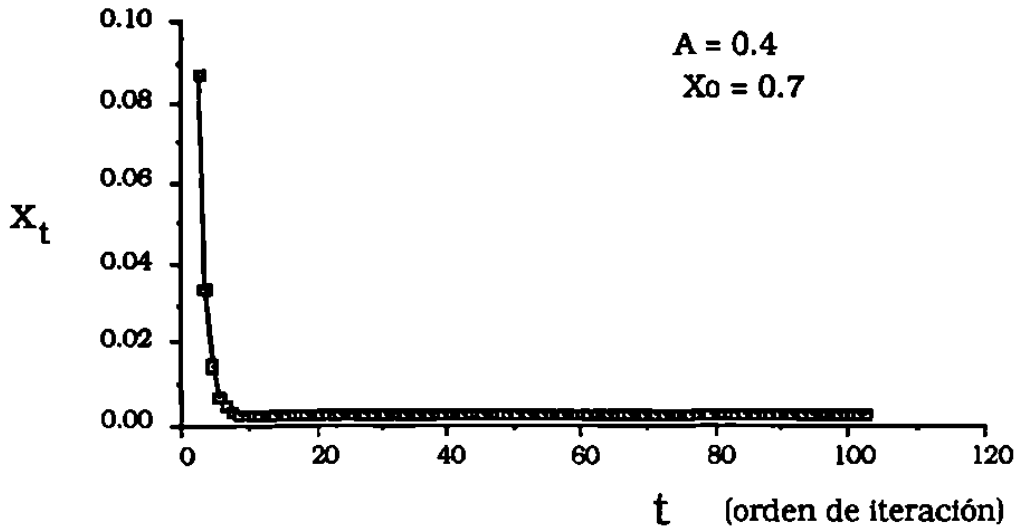
Utilizando esta definición, los puntos fijos, ya sean estables o inestables, se encuentran siguiendo un proceso iterativo: a partir del valor inicial x_0 (o valor semilla) se traza una recta vertical hasta la curva. Desde ese punto se dibuja luego una línea horizontal que intersecte la diagonal. Así se tendrá el valor x_1 , que prácticamente es una nueva semilla. Estos pasos se repiten indefinidamente.

El resultado de este procedimiento nos proporcionará un conjunto de valores de la variable, $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, es decir, obtendremos la órbita del sistema dinámico. La determinación de los puntos fijos se realizará observando precisamente el comportamiento asintótico de la órbita, es decir, nos interesa conocer

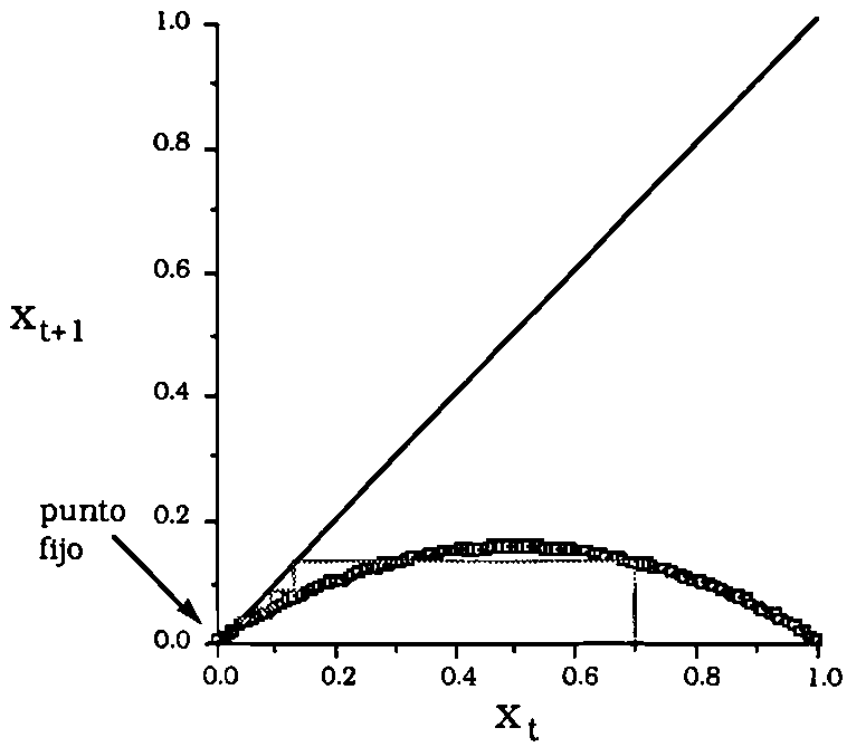
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{x_t\}$$

Las siguientes figuras fueron obtenidas iterando la función logística un número determinado de veces (50 ó 100), para diversos valores del parámetro A, y para diferentes valores iniciales de x_t , con $t = 0$. Cada punto graficado corresponde al orden de la iteración *versus* el valor de la función, (t, x_t) .

Tomando un valor semilla $x_0 = 0.7$ y para $A = 0.4$ tenemos la siguiente gráfica:

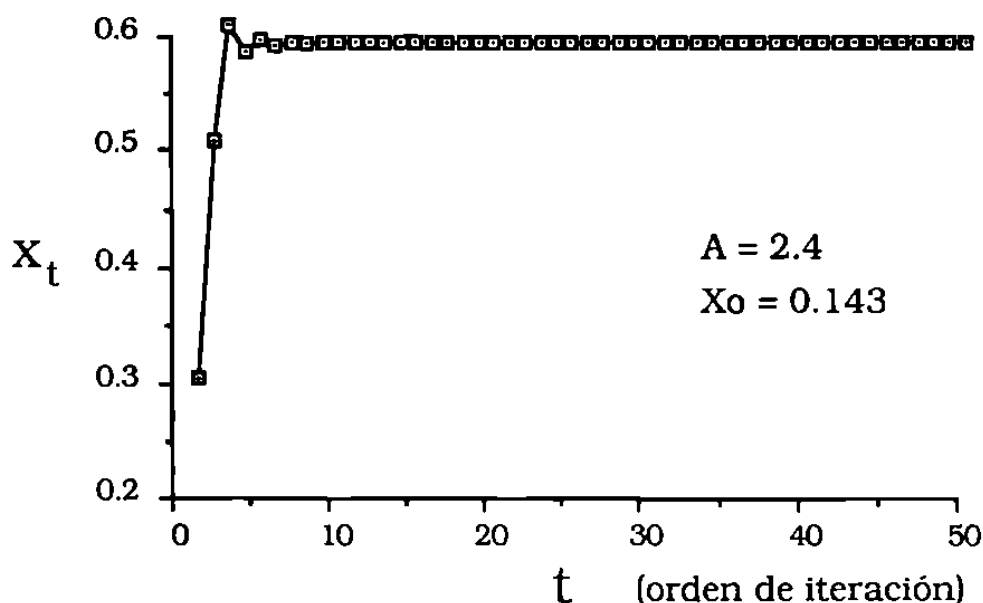
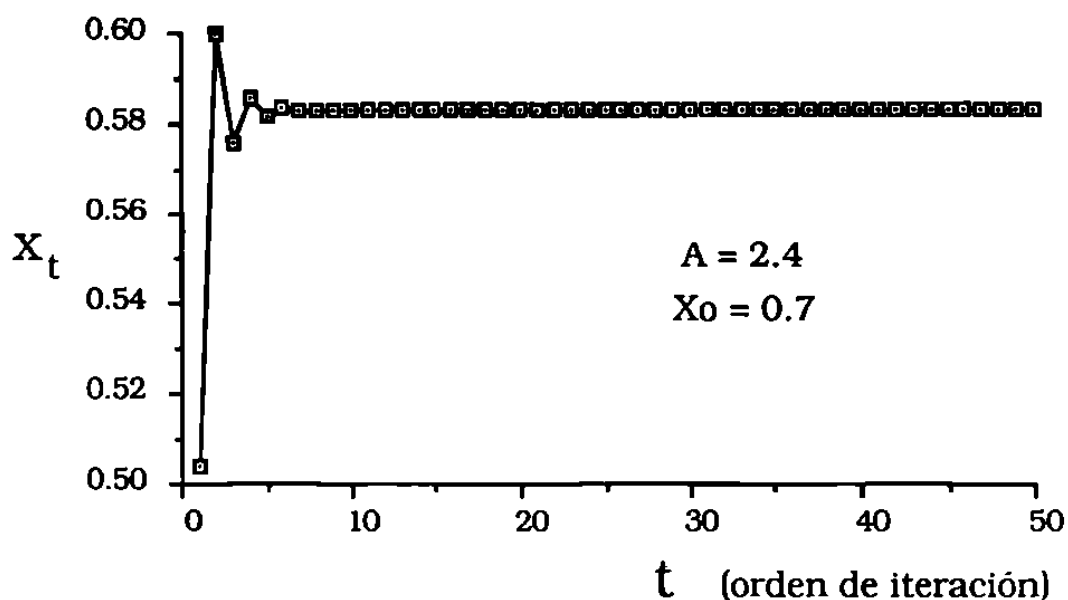


La parábola correspondiente es la siguiente; podemos ver que existe un punto fijo, el cero:

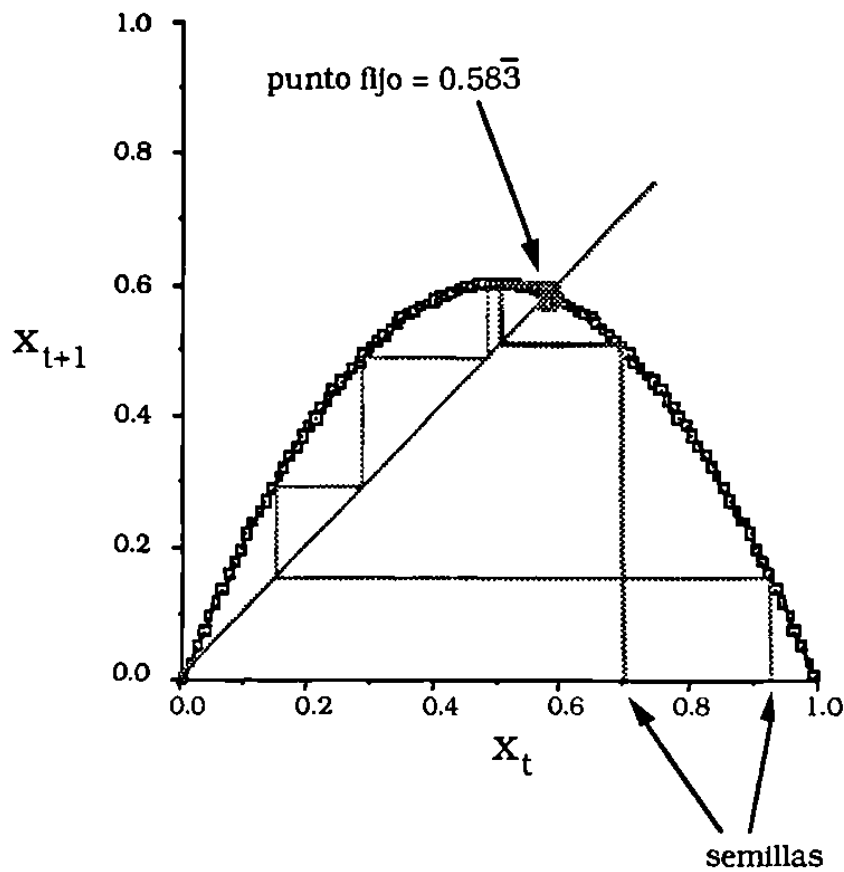
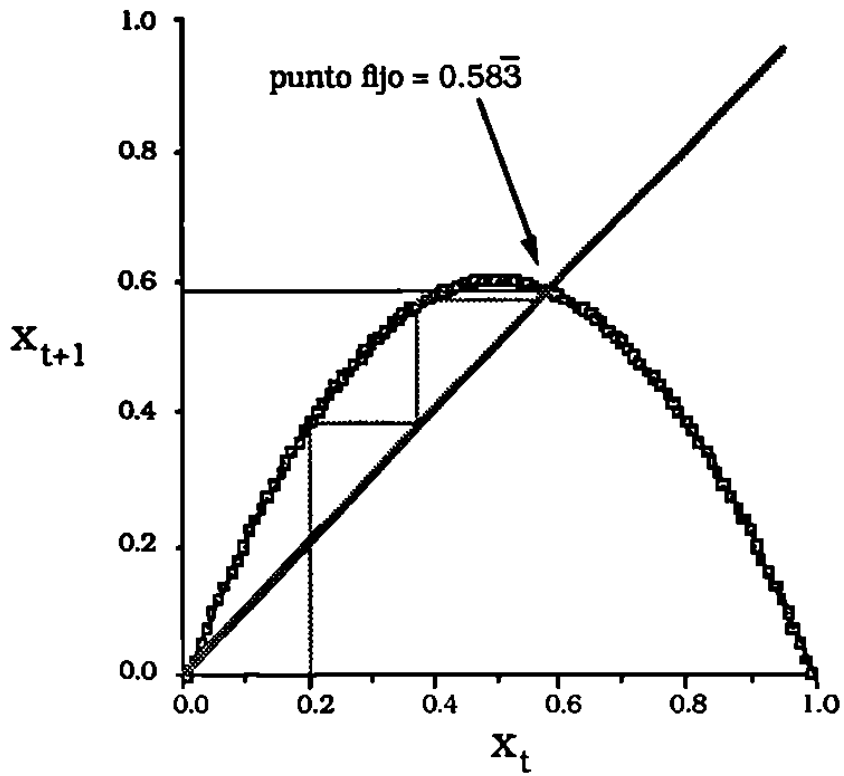


Un examen de la figura nos lleva a concluir que el punto fijo 0 se alcanza sin importar el punto inicial o semilla.

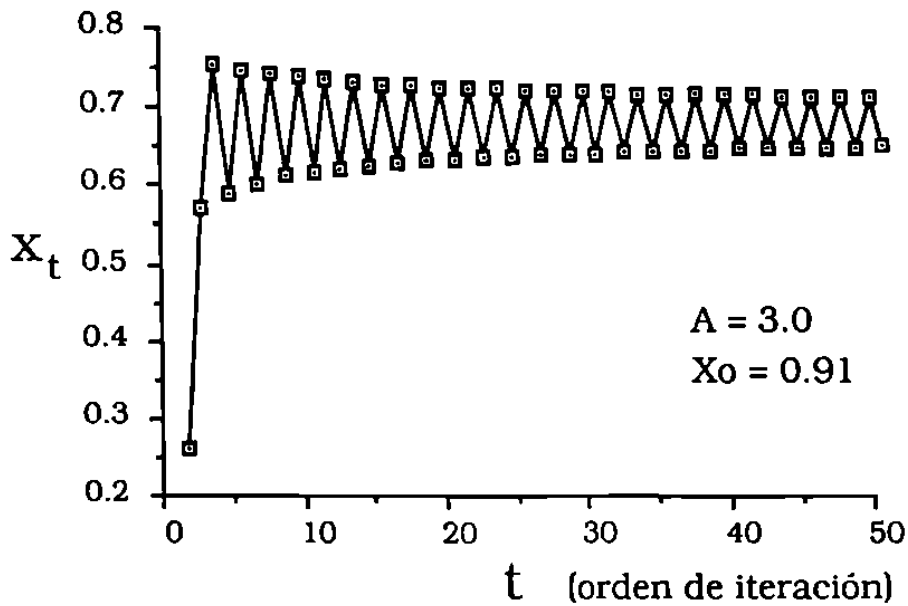
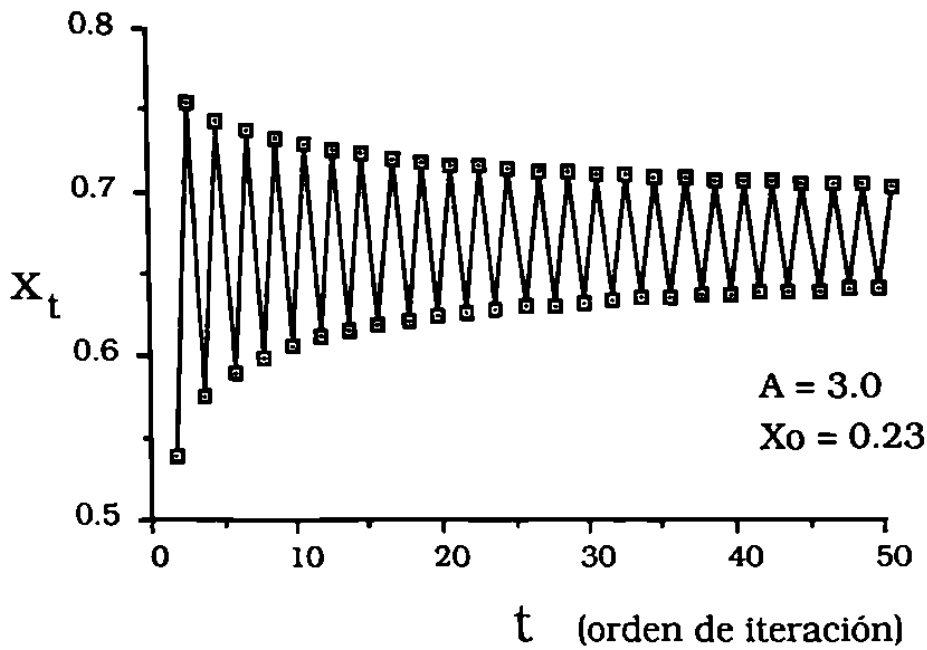
Veamos ahora qué sucede si el parámetro de control se incrementa hasta tomar un valor de, digamos, 2.4. Nuevamente, tenemos un valor fijo (además del caso trivial cero), que de hecho es 0.5833... Como se acaba de mencionar, el atractor se alcanza sin importar el valor inicial, y esto lo podemos ver en las figuras siguientes (nótese que el número de iteraciones es de 50):



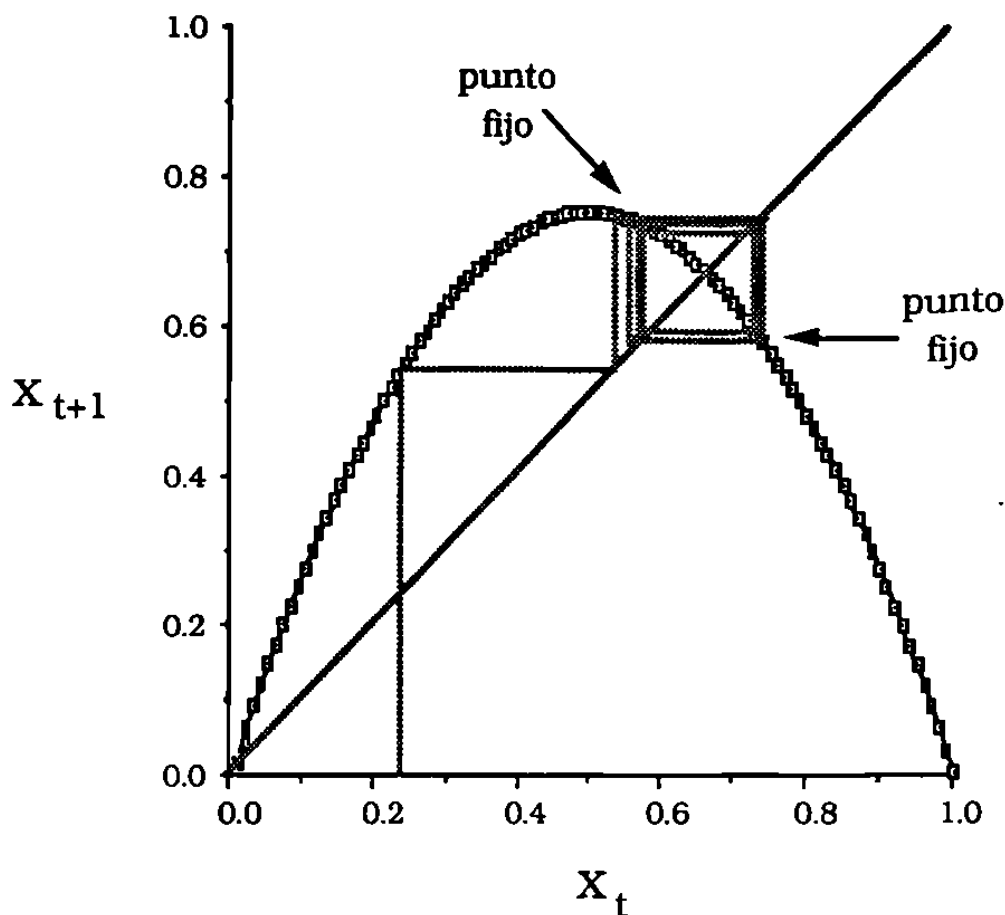
La obtención del punto fijo $x = 0.5833$ se puede observar igualmente en la parábola:



El comportamiento de las órbitas es similar para valores de $A < 3.0$, es decir, existe un solo atractor o punto fijo (exceptuando el cero). Sin embargo, para valores de $A \geq 3.0$ (pero menores que 3.57, como luego veremos), sucede algo inesperado: los valores de x_t no se establecen en un solo nivel. Por ejemplo, para $A = 3.0$ se tienen dos puntos fijos. Decimos entonces que en $A = 3.0$ existe un punto de bifurcación. Esto se muestra en las figuras siguientes, utilizando dos valores iniciales diferentes:

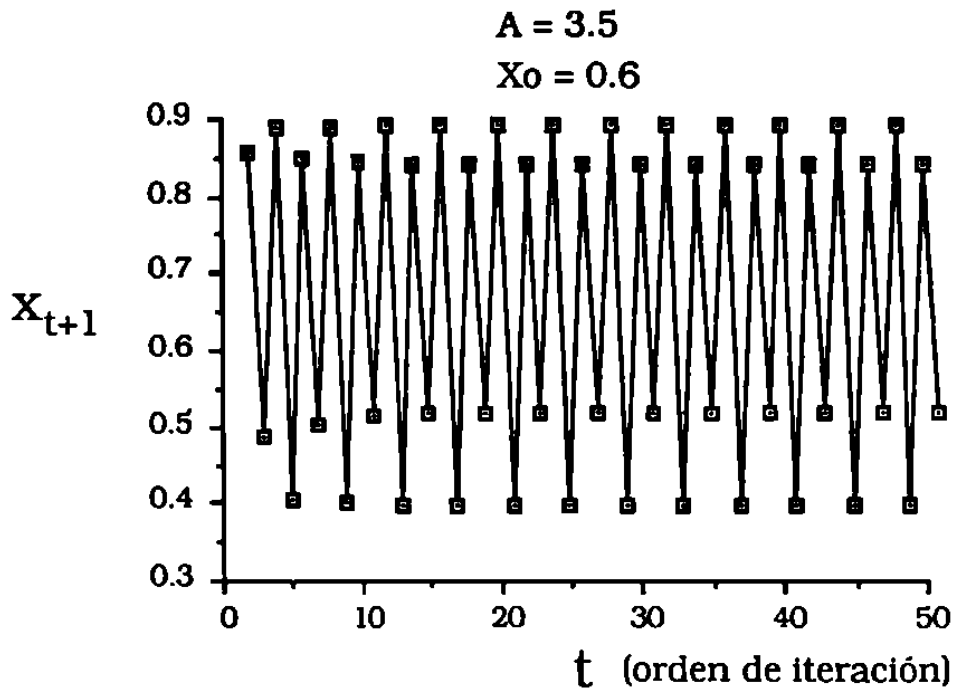


Viendo esto en la parábola, y siguiendo el procedimiento para encontrar los puntos fijos, tenemos la siguiente figura; cualquier valor semilla (exceptuando $x_0 = 0$) será atraído hacia los dos puntos fijos con la misma energía:



En los puntos inestables, o puntos de bifurcación, encontraremos que las iteraciones entran en ciclos de periodo armónico 2, 4, 8, ... , ∞ ; 3, 6, 12, ... , ∞ ; 5, 10, 20, ... , ∞ ; etc. (según el teorema de Sarkovskii, §2.12). Se habla entonces de la "duplicación del periodo". Si continuamos moviéndonos en el espacio de parámetros $\{A_k\}$, encontraremos que la duplicación del periodo conduce finalmente al caos.

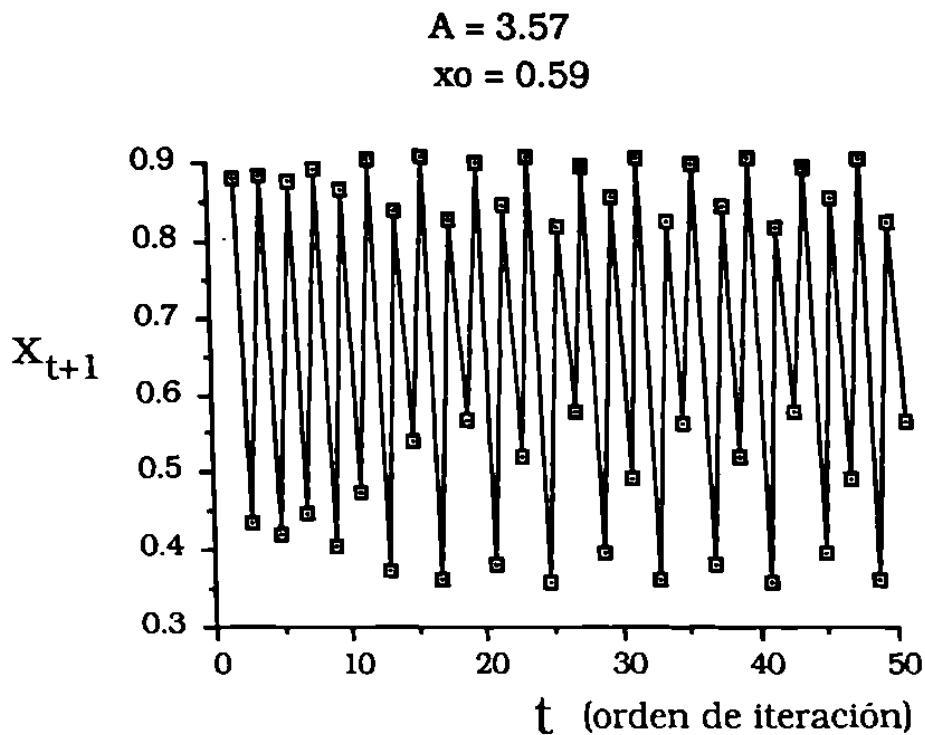
Para $A = 3.5$, y $x_0 = 0.6$, el sistema se estaciona en un ciclo de periodo cuatro. es decir, hay cuatro puntos fijos:



Para la figura anterior, se tienen cuatro valores fijos, a los cuales se llega en menos de 30 iteraciones, para luego repetirse indefinidamente:

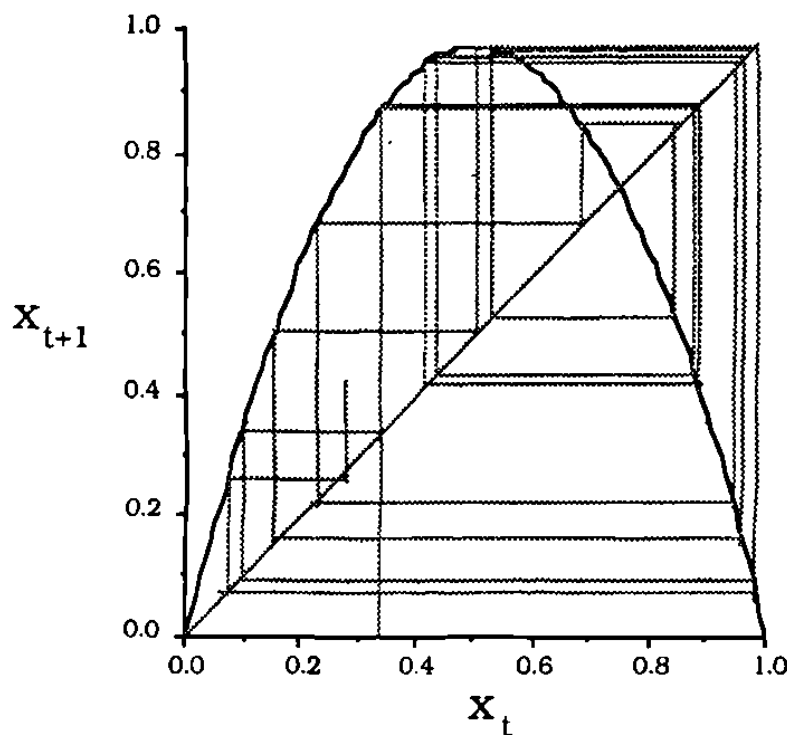
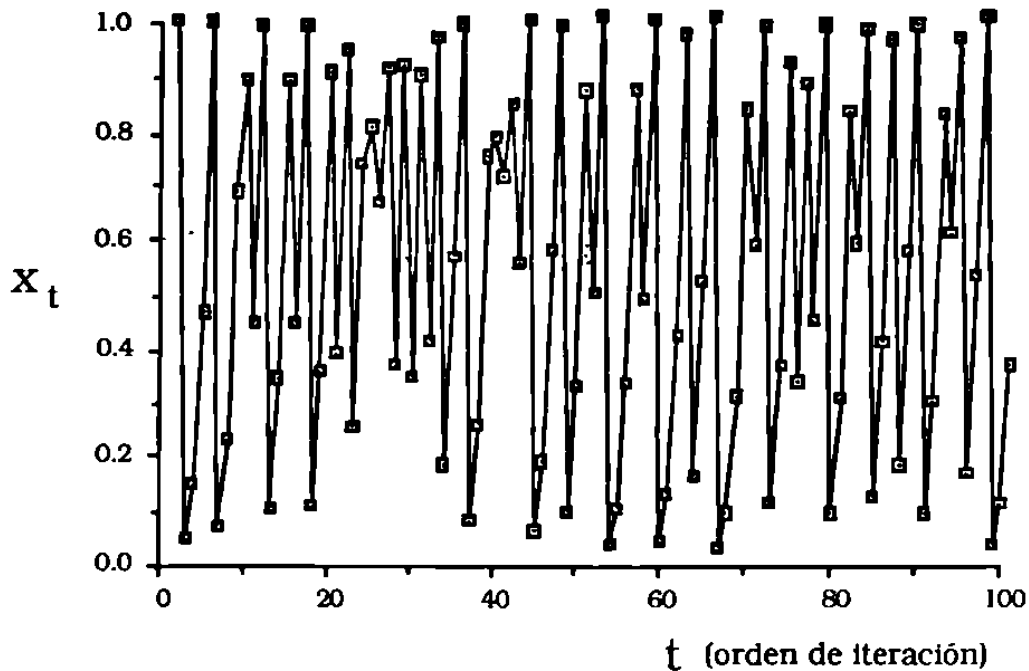
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <div style="margin-left: 5px;">0.38281968</div> </div>	Periodo cuatro.
0.82694070	
0.50088421	
0.87499726	
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <div style="margin-left: 5px;">0.38281968</div> </div>	
0.82694070	
0.50088421	
0.87499726	

En $A \approx 3.57$, aparece el estado caótico. La región caótica está entre $A \approx 3.57$ y $A < 4$. Es una región donde los x_t parecen estar aleatoriamente distribuidos dentro de la banda de valores $[0, 1]$. La figura siguiente muestra la situación para $A = 3.57$ y un valor inicial (irrelevante) de 0.59:



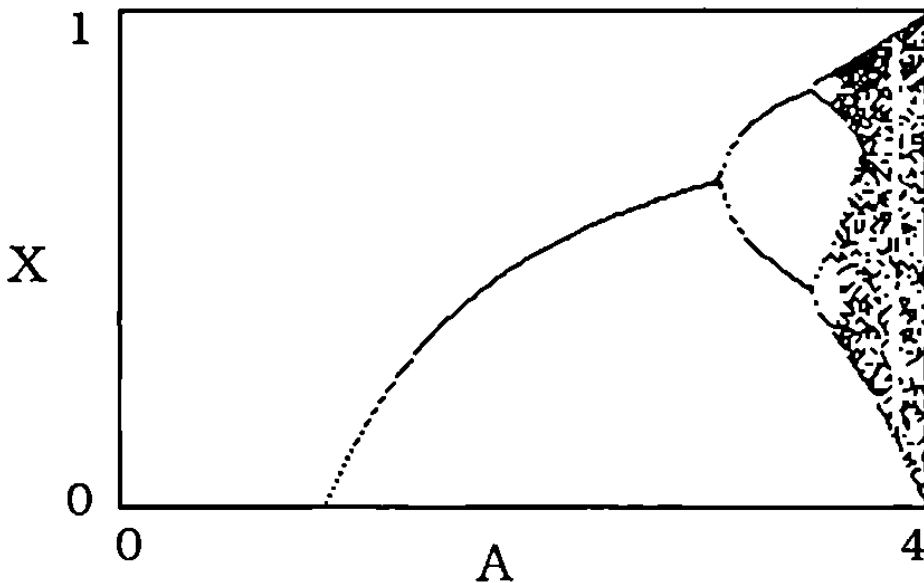
Es interesante notar el hecho de que el comportamiento de los valores x_t en la región caótica no es verdaderamente aleatorio. Por el contrario, es determinístico, en el sentido que se conoce una regla (la dinámica del sistema, en este caso la ecuación logística) con la cual exactamente los mismos valores de A y x_0 producen exactamente el mismo valor de x_t al cabo de un número dado de iteraciones. Por esta razón, a veces el fenómeno del caos se denomina caos determinístico.

Veamos un ejemplo final, para un valor del parámetro A superior a 3.57. Se proporcionan a continuación las gráficas de las órbitas y la parábola. Nótese que en el caso de la parábola, el procedimiento para encontrar los puntos fijos no tiene terminación. Esto significa que estamos en presencia de un "atractor extraño". Para el caso presente, $A = 3.87$ y $x_0 = 0.32$:

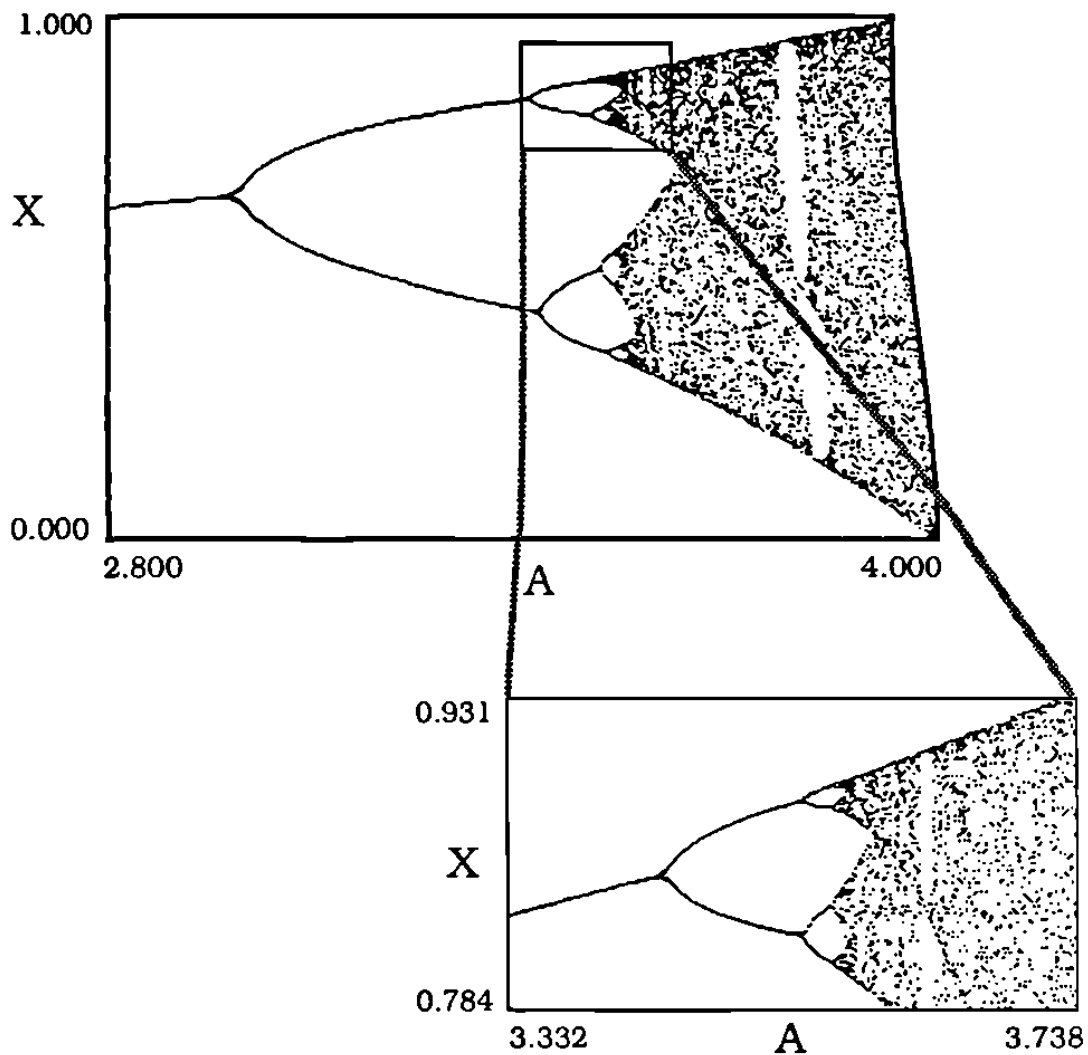


§III.4 El diagrama de bifurcaciones.

El diagrama de bifurcaciones es una herramienta que permite la visualización del comportamiento completo de un mapeo, es decir, proporciona una imagen del atractor extraño del sistema dinámico. La figura siguiente es el diagrama de bifurcación para la ecuación logística. El diagrama se construye explorando todo el espectro del parámetro de control A . Computacionalmente, esto implica partir de un valor inicial x_0 y luego efectuar un proceso iterativo de la ecuación para todos los valores posibles de A (se parte de $A = 0.0$ y se incrementa en alguna cantidad pequeña, hasta que alcance el valor $A = 4.0$). Los primeros resultados de x_t se desechan y se grafican los valores límite:



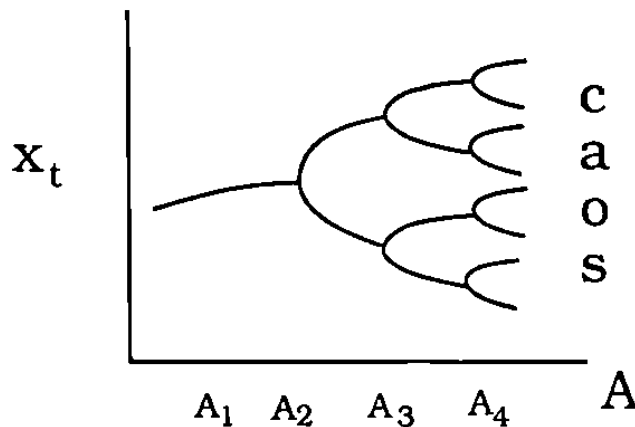
El diagrama de bifurcaciones posee una estructura fractal, como puede notarse en las siguientes figuras. La figura superior muestra el diagrama de bifurcación para un rango de valores de A de 2.8 a 4.0. De aquí se seleccionó la parte correspondiente a valores de A de 3.332 hasta 3.738, la cual se encuentra ampliada en la figura inferior. Puede apreciarse la similitud de las figuras, como reflejo del carácter fractal o autosimilar del diagrama, es decir, cada parte del diagrama tiene una estructura similar al todo del cual proviene:



§III.5 El diagrama de bifurcaciones y las constantes de Feigenbaum.

La duplicación del periodo, como acabamos de ver, es una de las varias rutas que existen que conducen al caos. Para la ecuación logística vimos que la región caótica se presenta en el subespacio del parámetro A [3.57, 4). Sin embargo, Mitchel Feigenbaum [1978] encontró que el valor crítico $A \approx 3.57$ no era exclusivo de la ecuación logística, y que más bien era compartido por cualquier mapeo unidimensional que presentara un solo pico. Un ejemplo práctico es la investigación de Albert Libchaber [1982] de la convección de un fluido calentado en un tubo. El también halló que para el valor 3.57 se daba la turbulencia. Este descubrimiento era realmente sorprendente, pues reflejaba un comportamiento universal de ciertos sistemas dinámicos no-lineales.

Feigenbaum también encontró un par de constantes universales. El siguiente es un diagrama de bifurcaciones para mapeos unidimensionales. Cada punto de bifurcación A_k da lugar a dos ramas (duplicación del periodo).



A medida que se incrementa el valor de A , aumenta la densidad de los puntos de bifurcación y de los puntos fijos. Para determinar la densidad se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$d_n = x_n^* - 0.5$$

Esta ecuación da una medida de la distancia que existe entre un punto crítico x^* y el punto fijo $x = 0.5$. Feigenbaum definió la razón de la distancia como sigue:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}}$$

y encontró el valor constante

$$\alpha = 2.502907875 \dots$$

Otra constante universal descubierta por Feigenbaum está dada por la relación

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{A_{n+2} - A_n}$$

con valor

$$\delta = 4.6692016091 \dots$$

§III.6 Sensibilidad a las condiciones iniciales.

Antes del advenimiento de los productos electrónicos, y con mayor razón del de los computadores, varios científicos famosos sabían que algunos sistemas dinámicos exhibían una gran sensibilidad a cambios pequeños en las condiciones iniciales. Maxwell escribía en 1873 (citado por Bygrave, [1989]):

Existen ciertas clases de fenómenos ... en los cuales un error pequeño en los datos solamente introduce un pequeño error en los resultados ... En estos casos, el desarrollo (curso) de los eventos es estable. Hay otras clases de fenómenos que son más complicados, en los que pueden ocurrir casos de inestabilidad, el número de tales casos se incrementa, de manera extremadamente rápida, en la medida en que aumenta el número de variables.

De modo similar, Poincaré [1944] notaba que:

Una causa muy pequeña que se nos escape determina un efecto considerable que no podemos ignorar, decimos entonces que este efecto es debido al azar. Si conociésemos las leyes de la Naturaleza y la situación del Universo en el instante inicial, podríamos predecir con exactitud la situación de este Universo en un instante ulterior. Pero aun cuando las leyes naturales no tuvieran más secretos para nosotros, no podríamos conocer la situación inicial más que aproximadamente. Si esto nos permite prever la situación ulterior con la misma aproximación, es todo lo que necesitamos, decimos entonces que el fenómeno ha sido previsto, que es regido por las leyes. Pero no acaece siempre así, puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales engendren muy grandes en los fenómenos finales; un pequeño error sobre los primeros produciría un error enorme sobre los últimos. La predicción se ha vuelto imposible y nos encontramos con el fenómeno fortuito.

Y tal parece que el mismo Eddington [1958] se anticipó al descubrimiento de Lorenz cuando escribió que la predicción del clima del año siguiente no era probable que fuera práctica porque

requeriríamos un conocimiento extremadamente detallado de las condiciones actuales, puesto que una pequeña desviación local puede ejercer una influencia siempre en expansión.

La gran sensibilidad que poseen los sistemas dinámicos que exhiben un comportamiento caótico se ha convertido en su sello distintivo.

Veamos cómo los valores de x_t de la ecuación logística son extremadamente sensitivos a pequeñas variaciones en el valor inicial, x_0 . Seleccionando arbitrariamente un valor del parámetro de control $A = 3.725$, queremos saber qué les sucede a las órbitas $\{x_t\}$ y $\{x_t\}^*$, cuando x_0 se incrementa de 0.1 a 0.1000001. Los valores x_t después de algún número de iteraciones, son completamente diferentes para cada órbita. La tabla muestra los resultados entre x_{50} y x_{70} :

$X_0 = 0,1$	$X_0 = 0,1000001$
0,722401155	0,815061365
0,74700303	0,561492853
0,7039859	0,917164393
0,776251828	0,283002663
0,646976354	0,75584778
0,850782369	0,687418627
0,472895193	0,800406611
0,928513352	0,595090608
0,247251743	0,897567717
0,693290738	0,342476166
0,792079123	0,838818751
0,613469452	0,503626906
0,883289446	0,931201
0,384007273	0,238644725
0,881132685	0,67680799
0,39014859	0,814802532
0,886299187	0,562100137
0,375379194	0,916884809
0,873399464	0,283871283
0,411883831	0,757249207
0,902327389	0,6847401

El efecto es sorprendente: por ejemplo, vemos de la tabla que el cambio de una parte por millón en el valor inicial x_0 cambia para x_{67} de 0.375379194 a 0.916884809. En la Sección IV mencionaremos este hecho en relación al problema del determinismo laplaciano, la impredecibilidad de los sistemas caóticos, y la repetibilidad de los experimentos.

Sección IV

Teoría de Caos y el
Determinismo Laplaciano.

§IV.1 El determinismo laplaciano.

Desde la formulación de las leyes del movimiento por Isaac Newton, la práctica científica se ha basado en la idea de considerar un sistema físico como un conjunto de objetos que pueden interactuar, obedeciendo precisamente tales leyes. La tarea del científico es entonces la de predecir el comportamiento futuro del sistema, o sea, empleando el lenguaje de sistemas dinámicos, el predecir cómo cambian los estados del sistema en el tiempo. La forma más exagerada de esta postura epistemológica fue expuesta por Pierre Simon de Laplace en su Ensayo filosófico sobre las probabilidades (citado por Crutchfield *et. al.*, [1986]):

El estado presente del sistema de la naturaleza es evidentemente una consecuencia de lo que era en el momento anterior y, si imaginamos una inteligencia que en un instante abarcara todas las relaciones entre los entes de este universo, podría decir las posiciones respectivas, los movimientos y las propiedades generales de todos estos entes en cualquier tiempo del pasado o del futuro. La astronomía física, la rama del conocimiento que hace el honor más alto a la mente humana, nos da una idea, aunque imperfecta, de lo que sería tal inteligencia. La simplicidad de la ley del movimiento de los cuerpos celestes y las relaciones entre sus masas y distancias permite al análisis seguir su movimiento hasta cierto punto; y, para determinar el estado del sistema de estos grandes cuerpos en los siglos pasados o futuros, le basta al matemático que sus posiciones y velocidades sean conocidas por la observación en cualquier momento del tiempo. El hombre debe

esta capacidad al poder del instrumento que emplea y al pequeño número de relaciones que utiliza en sus cálculos. Pero la ignorancia de las diversas causas implicadas en la producción de sucesos, así como su complejidad, junto a la imperfección del análisis, impide que lleguemos a la misma certidumbre sobre la vasta mayoría de los fenómenos. Por ello hay cosas inciertas para nosotros, cosas más o menos probables, y buscamos compensar la imposibilidad de conocerlas determinando su diferente grado de probabilidad. Así es como debemos a la debilidad de la mente humana una de las más delicadas e ingeniosas de las teorías matemáticas, la ciencia del azar y la probabilidad.

La visión de Laplace era la de un universo cuyo futuro podía conocerse totalmente, a través de la mera aplicación de las leyes de Newton a su estado inicial. Este punto de vista se difundió a todas las disciplinas científicas, y ha prevalecido hasta nuestros días. En resumidas cuentas, lo que se creía era que dada la dinámica de un sistema, misma que determinaba la sucesión de sus estados, se aseguraba la predicción. Esta postura, que aquí denominaremos "determinismo laplaciano", se mantuvo válida durante mucho tiempo. Sin embargo, el desarrollo de la ciencia del presente siglo ha dado dos descubrimientos que han desacreditado la creencia en el determinismo laplaciano. El primero de ellos está relacionado con la mecánica cuántica; el segundo, de mayor interés para nosotros, proviene de la teoría de caos.

En este sentido, Ilya Prigogine [1980] menciona que

La base de la visión de la física clásica era la convicción de que el futuro está determinado por el presente, y que por consiguiente, un estudio cuidadoso del presente permite revelar el futuro. Sin embargo, nunca fue esto nada más que una posibilidad teórica. Aunque de todos modos esta predecibilidad ilimitada fue un elemento esencial de la imagen científica del mundo físico. Podemos incluso llamarlo el mito fundamental de la ciencia clásica. Hoy en día, la situación ha cambiado enormemente ...

§IV.2 El determinismo laplaciano y la mecánica cuántica.

La postulación del Principio de Incertidumbre de Heisenberg en las primeras décadas de este siglo, provocó la invalidez del determinismo laplaciano en los sistemas cuánticos. Este principio establece que a todo proceso de observación le es inherente una perturbación que no es posible evitar, con lo cual se tiene una incertidumbre cada vez que se repite la observación (medición). En particular, este principio establece que para el caso de un objeto con movimiento unidimensional, las incertidumbres propias del proceso de medición de la velocidad y la posición están relacionadas mediante la expresión:

$$\Delta X \Delta V = \hbar$$

Las incertidumbres cuánticas no son consecuencia de las limitaciones experimentales de los científicos, ni tampoco se deben a las "variables ocultas" propuestas por Einstein. Estas variaciones son más bien inherentes a la naturaleza. Por ejemplo, el momento exacto del decaimiento de un cierto núcleo radiactivo es intrínsecamente incierto. Hay en la naturaleza un elemento de auténtica impredecibilidad.

A pesar del Principio de Incertidumbre de Heisenberg, subsiste en la mecánica cuántica una versión "débil" del determinismo laplaciano, porque la evolución de un sistema no perturbado la determina el operador hamiltoniano. Si se conoce el estado del sistema en un momento dado, puede calcularse el estado a un tiempo posterior, y usarse para predecir las probabilidades relativas que pueden tener los valores de los distintos observables en la medición. Por lo tanto, la mecánica cuántica tiene un carácter determinista, al menos en un sentido probabilístico. Si bien esta teoría explica la aleatoriedad de ciertos sistemas físicos, comoquiera que sea tiene todavía rasgos de la perspectiva newtoniana-laplaciana. El segundo frente del ataque al determinismo lo constituye la teoría de caos, en la cual estos rasgos no están presentes, tanto a nivel del macromundo como del micromundo.

§IV.3 El determinismo laplaciano y la teoría de caos.

La invalidez del determinismo laplaciano en el micromundo, en su sentido estricto, no impidió que la ciencia conservara la creencia de que el comportamiento de los sistemas clásicos podía predecirse, al menos afuera de las limitaciones impuestas en las mediciones por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg. La base de esta fe era que para la gran mayoría de ellos se conocía su dinámica, es decir, se conocía la regla determinista de los estados del sistema.

Joseph Ford [1983], uno de los físicos que más han hecho por difundir la nueva ciencia del caos, expresa lo siguiente:

La teoría de la complejidad algorítmica junto con la dinámica no-lineal han establecido el hecho de que el determinismo reina solamente sobre un dominio muy finito; fuera de este pequeño reino de orden yace el vasto terreno del caos, casi inexplorado en toda su extensión, donde el determinismo se ha borrado en la memoria efímera de los teoremas de existencia y donde solamente el azar sobrevive.

La diferenciación entre el determinismo y la predecibilidad se hará evidente en los siguientes apartados, donde se trata esta cuestión teniendo en cuenta los sistemas caóticos. La conclusión a la que llegaremos será sorprendente: los sistemas caóticos, si bien son deterministas (dado que se conoce para ellos su dinámica) no son predecibles. La teoría de caos invalidará la correlación determinismo/predecibilidad, y en consecuencia, el determinismo laplaciano.

§IV.4 Diferenciación entre el determinismo laplaciano y la predecibilidad.

En este apartado abordaremos la cuestión de la correlación entre determinismo y predecibilidad. El objetivo que perseguimos es el de mostrar que, al menos para los sistemas caóticos, tal correlación es falsa. Tenemos dos enfoques para cumplir con tal objetivo: por tipos de algoritmos y por la sensibilidad a las condiciones iniciales.

a) Por tipos de algoritmos:

En términos generales, la predicción es el proceso por medio del cual podemos determinar un estado desconocido del sistema a partir de uno conocido. De acuerdo con el determinismo laplaciano, el efectuar una predicción implica aplicar las ecuaciones del sistema dinámico, es decir, su dinámica o flujo ϕ , a las mediciones del estado actual del sistema físico modelado por ϕ , para así generar una descripción de algún estado futuro del sistema. Para efectos de análisis, llamaremos *entrada* al conjunto de mediciones del estado presente del sistema, *algoritmo* a la dinámica, y *salida* a la predicción generada:



La cuestión planteada arriba se puede expresar en estos términos: dado el algoritmo gobernador de un sistema, ¿puede utilizarse efectivamente para realizar una predicción? La respuesta a esta pregunta la encontraremos considerando dos tipos generales de algoritmos: aquellos de forma abierta o explícitos, y los de forma cerrada, o implícitos. Veremos cómo los algoritmos abiertos, típicos de los sistemas caóticos, impiden la predicción.

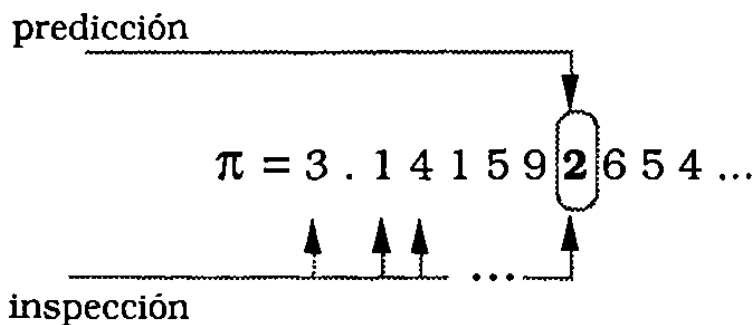
El siguiente ejemplo nos ayudará a clarificar esta tipología. ¿Cómo se puede predecir (a) la suma de los naturales de 1 a N , (b) el n -ésimo dígito decimal de π ? Para el primer problema existen dos algoritmos:

A_I sumar $1 + 2 + \dots + N$

A_{II} usar la fórmula $N(N + 1)/2$

A_I será un algoritmo de forma abierta, y **A_{II}** de forma cerrada. Lo característico de los sistemas con solución abierta o explícita es que se debe examinar cada estado del sistema para llegar a la solución (el estado que se desea predecir). Se requiere entonces de la información completa del sistema. Este método parece estar en contra de nuestra expectativa de que una predicción genera un estado desconocido del sistema, pues ¿cómo se puede realizar una predicción si el algoritmo debe recorrer cada uno de los elementos de toda la sucesión de estados para generar cualquier estado? La respuesta a esto será clara en el contexto del segundo problema.

La solución del problema de π no es de forma cerrada. Para determinar el n -ésimo dígito decimal de π , debemos examinar cada uno de los dígitos hasta alcanzar el n -ésimo. Es decir, al seguir el algoritmo, no hemos predicho lo que es el n -ésimo dígito de π . Para lograr eso, deberíamos tener un algoritmo de forma implícita, y no existe ninguno. Lo que hemos hecho, más bien, es simplemente inspeccionar π hasta identificar el n -ésimo dígito decimal. El algoritmo no nos dice cómo hacer una predicción, sino cómo efectuar una inspección:



Estos conceptos pueden extenderse al área de las teorías científicas, donde existen sistemas físicos que carecen de solución de forma cerrada. Nos referimos de hecho al área del "caos determinístico". Supongamos un sistema físico bajo estudio, y que sea determinístico. Esto significa que la evolución del sistema está gobernada por un algoritmo preciso (se conoce su dinámica), y podemos describir cualquier estado del sistema tan precisamente como queramos. Supongamos que el algoritmo es de forma abierta: ¿podemos decir que el sistema es predecible? Crutchfield et al. [1986] lo ponen de la manera siguiente:

Para saber cómo evoluciona un sistema desde un estado inicial dado, se puede recurrir a la dinámica (las ecuaciones de movimiento) que explica el movimiento, por incrementos, a lo largo de la órbita. Para determinar con este método el comportamiento de un sistema, se necesita un trabajo de cálculo que es proporcional al tiempo durante el que se desea seguir la órbita. En el caso de los sistemas simples, así sea un péndulo sin rozamiento, puede ocurrir que las ecuaciones admitan una solución explícita, o sea una fórmula que exprese cualquier estado futuro en función del inicial. ... Los éxitos en la obtención de soluciones explícitas en el caso de muchos sistemas simples, durante los primeros desarrollos de la física, suscitaron la esperanza de que tales soluciones existieran para cualquier sistema mecánico. Desgraciadamente, sabemos ahora que esto no es así, en general. El comportamiento impredecible de los sistemas dinámicos caóticos no puede expresarse mediante una solución explícita. Consecuentemente, no hay atajos para predecir su comportamiento.

Puesto que el algoritmo replica esencialmente cada estado desde el inicial hasta la predicción, no hay garantía de que se produzca una salida más rápida antes de que se alcance el estado terminal; el algoritmo requiere un esfuerzo computacional proporcional al intervalo deseado de tiempo (el sistema es el mejor simulador de él mismo). Es decir, somos incapaces de predecir antes de tiempo. La predicción no se hará sino hasta después de ocurrido el hecho, y por tanto no será predicción para nada.

Podemos ilustrar este punto tratando de predecir el valor de x_t para el caso sencillo de la ecuación logística:

$$x_{t+1} = A x_t (1 - x_t)$$

Dado el valor del parámetro A , nos interesa calcular x_t en términos precisamente de la única información que tenemos, la condición inicial x_0 . Unos cálculos sencillos nos llevan a lo siguiente:

$$x_1 = Ax_0 (1 - x_0)$$

$$x_2 = A(Ax_0 (1 - x_0) (1 - Ax_0 (1 - x_0)))$$

$$x_3 = A(A(Ax_0(1 - x_0)(1 - Ax_0(1 - x_0)))(1 - A(Ax_0(1 - x_0)(1 - Ax_0(1 - x_0)))))$$

Es claro el carácter impráctico de este procedimiento. La forma cerrada para x_t en términos de x_0 sí existe, pero cada vez se torna más incómoda, tanto por el tiempo que lleva su deducción, su tamaño (número de símbolos para escribirla) y el tiempo de computación. El atajo es prácticamente imposible. El algoritmo de forma abierta simplemente replicará toda la información relevante del sistema. Esto no es predicción.

A veces se responde a esto argumentando que lo que interesa es hacer la predicción, aun con un algoritmo de forma abierta, y así se mantiene la correlación entre determinismo y predecibilidad. Pero sucede que los sistemas caóticos actúan como amplificadores de error, que elevan las fluctuaciones microscópicas en las condiciones iniciales a un nivel macroscópico, que provoca que se impide cualquier clase de determinismo entre estados ligeramente separados en el tiempo. Esto nos conduce al segundo enfoque.

b) Por la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Si se persigue utilizar un algoritmo para realizar una predicción, requerimos lógicamente que esta predicción sea precisa, sin error. Sin embargo, si la especificación de las condiciones iniciales del sistema (la *entrada*) involucra algún grado de error, entonces la predicción (la *salida*) será imprecisa. La imprecisión, se puede pensar, será directamente proporcional al error en la *entrada*. Esto nos podría llevar a requerir para un sistema determinístico que sus condiciones iniciales fueran lo más precisas posible, es decir, con un error arbitrariamente pequeño. Esto, si bien es válido para los sistemas lineales, no lo es para sistemas dinámicos no-lineales que exhiben comportamiento caótico. Para estos sistemas, la imprecisión en la especificación de las condiciones iniciales invalida el ideal de predecibilidad asociado a todo sistema determinista (los sistemas caóticos son deterministas). Para argumentar esto, examinaremos dos cuestiones relativas a esa especificación de la *entrada* de un sistema caótico.

Cuando se efectúan observaciones sobre un sistema físico, existen errores inevitables en el proceso de medición, de manera que la especificación exacta de las condiciones iniciales del sistema se torna imposible. Así, el estado de un sistema no es puntual, sino más bien está representado por una pequeña región en el espacio de fases. Aunque el Principio de Incertidumbre de Heisenberg fija el tamaño mínimo que puede tener la región, en la práctica diversas clases de ruidos de fondo limitan la precisión de las mediciones e introducen errores más o menos grandes.

Ahora bien, situar el sistema dentro de una región arbitrariamente pequeña del espacio de fases mediante una medición proporciona cierta información sobre el sistema. Cuanto más precisa sea la medición, más conocimiento obtiene el observador sobre el estado del sistema. Pero esa descripción del espacio de fases se hace en términos de un conjunto de números reales.

Los números reales, que son las mediciones, no son precisos. Por ejemplo, el momento angular no será α , sino contendrá un margen de error, ϵ : el momento angular será entonces $\alpha \pm \epsilon$. Y aquí yace el problema, el del registro físico de los datos y cálculos. El problema no es tanto el de la medición, sino el de representación (Stone, [1989]); tenemos un problema de principio, no práctico. Puesto que nuestra *entrada* al hacer predicciones está restringida a números con representación finita, la *salida* siempre incluirá algún error, aun si el sistema es determinístico.

Para un sistema no caótico, los puntos vecinos en el espacio de fases permanecen cercanos en su evolución temporal, con lo cual la información del estado inicial se conserva en el tiempo, lo que a su vez sirve para realizar las predicciones deseadas. En cambio, las operaciones de estirado y plegado en un atractor caótico eliminan sistemáticamente la información inicial y la sustituyen por otra nueva. Los estirones amplían las incertidumbres en las escalas pequeñas, los pliegues acercan trayectorias que estaban muy separadas y destruyen información en gran escala. Entonces, tras un breve periodo, la incertidumbre incluida en la medición inicial cubre el atractor por entero, y se pierde toda capacidad predictiva: se rompe la conexión "causal" entre los estados.

Debido a su extrema sensibilidad a imprecisiones minúsculas en las condiciones iniciales, los sistemas caóticos funcionan de hecho como amplificadores de ruido. Una fluctuación pequeña en la especificación del estado inicial, causará una gran desviación de la órbita poco después. Pero hay un aspecto importante en el que los atractores caóticos difieren de los simples amplificadores de ruido. Como las operaciones de estiramiento y plegado son iterativas y continuas, la más mínima fluctuación acabará por dominar el movimiento; así, el comportamiento cualitativo es independiente del nivel de ruido. Los sistemas caóticos generan azar por sí mismos, sin necesidad de influencias aleatorias exógenas.

¿Existe alguna manera de salvar la diferencia entre el determinismo y la predecibilidad en los sistemas caóticos? Por ejemplo, podríamos requerir tan sólo que la *entrada* fuera de mayor exactitud que la exactitud de la *salida*. ¿No removería esto el problema de la amplificación del error de los sistemas caóticos? No. Entre dos estados diferentes de un sistema existe siempre alguna distancia (espacial o temporal), una medida que separa los dos estados en el espacio de configuraciones.

Supongamos que queremos mostrar que con respecto a un sistema caótico, siempre podemos obtener predicciones limitadas al error de medida ϵ . Puesto que sabemos que el error se amplifica, el problema se convierte en especificar qué error de entrada ϵ' , donde $\epsilon' < \epsilon$, requerimos para mantener el error de salida dentro de ϵ .

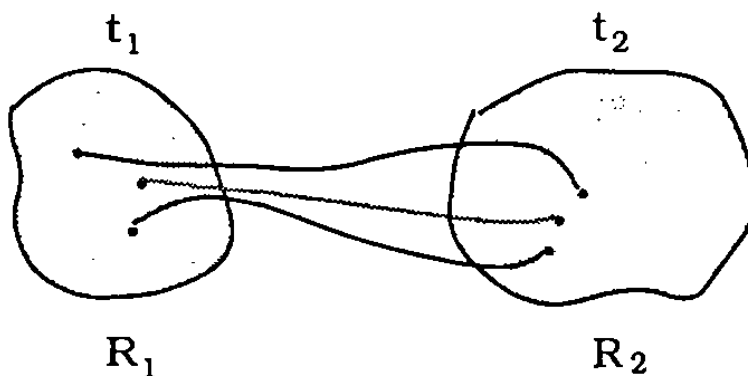
Ayuda a esto saber que la tasa de amplificación para los sistemas caóticos es esencialmente constante. De hecho esta constancia es una importante herramienta para distinguir una señal caótica de otra que no lo es. Así, podemos limitar el error de la *salida* tanto como queramos: para un estado inicial y uno final (el predicho), separados por una distancia δ , y donde el error en el sistema es amplificado a una tasa α , es un cálculo directo determinar cuál debe ser el error entrada ϵ' para que no resulte amplificado sobre δ a un valor mayor que ϵ . Sin embargo no hay una solución general para ϵ' para mantener el error abajo de ϵ para cualquier entrada en el sistema como un todo. De α es igualmente posible calcular una distancia δ' tal que ϵ' se amplifique sobre δ' a un valor mayor que ϵ .

Así, para sistemas caóticos no puede mostrarse que podamos obtener cualquier grado arbitrario de exactitud en la *salida*. El corolario es que para cualquier *entrada* habrá siempre alguna distancia sobre la cual el error será suficientemente amplificado de modo que toda la exactitud se pierde efectivamente.

Dicen Crutchfield et al. [1986]:

El crecimiento exponencial de los errores debido a la dinámica caótica es la segunda razón del hundimiento del punto de vista de Laplace. La mecánica cuántica afirma que las mediciones iniciales no pueden ser totalmente predecibles y el caos asegura que las imprecisiones darán, muy pronto, al traste con la capacidad de predecir. Sin el caos, Laplace podría esperar que los errores permaneciesen acotados o, al menos, que crecieran lo bastante despacio para permitirle alcanzar predicciones durante periodos largos. Con el caos, las predicciones están rápidamente condenadas a graves inexactitudes.

G. M. K. Hunt [1987] sugiere una manera diferente de hacer el mismo punto. Hunt sugiere que los sistemas dinámicos predecibles (él los llama "sistemas epistémicamente deterministas") deben obedecer una condición de continuidad. Esta se puede establecer como sigue: consideremos dos puntos en un sistema en un momento dado t_1 , y sea R_1 la región que los contiene. Ahora consideremos un tiempo posterior t_2 y la región R_2 , que contiene la localización de los dos puntos tras la evolución temporal del sistema en el intervalo $t_1:t_2$. El sistema es continuo si para cualesquier dos puntos, uno tercero que esté entre ellos en R_1 también está entre ellos en R_2 .



Pero como Hunt (op. cit., págs. 130-131) sugiere:

Recientemente ha sido descubierta una clase de sistemas cuyo comportamiento es mucho más complejo y falla la condición de continuidad en una forma radical. Estos son los sistemas caóticos. No importa qué tan cercanos estén dos sistemas inicialmente, su espacio de fases puede diverger arbitrariamente ... Entre cualesquier dos puntos cuyos senderos terminan en, digamos, el área A, habrá un punto cuyo camino termine en B, y viceversa. Este fenómeno ocurrirá sin importar qué tan cercanos estén los puntos elegidos.

El análisis de Hunt es otro modo de ilustrar la amplificación del error en los sistemas caóticos. Hunt (op. cit., pág. 132) llega a la misma conclusión apuntada antes:

Dada la imposibilidad de una medición perfectamente exacta, podemos restablecer la tesis del determinismo epistémico en la forma siguiente. Las predicciones pueden hacerse arbitrariamente exactas al hacer la determinación del estado inicial del sistema arbitrariamente exacta ... Pero como hemos visto en nuestra discusión, esta tesis requiere la continuidad entre los conjuntos de los estados inicial y final del sistema. Y hemos visto que los sistemas caóticos no exhiben tal continuidad.

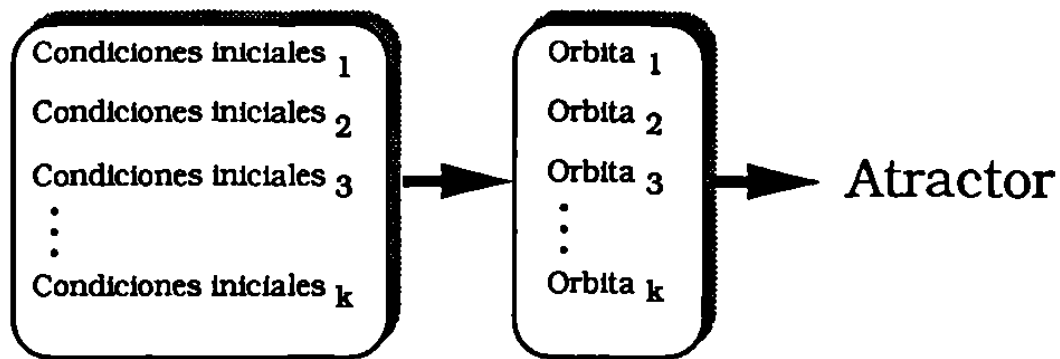
En conclusión, afirmamos que los sistemas caóticos, aunque sean determinísticos, no son predecibles (ellos no son epistémicamente deterministas).

§IV.5 La sensibilidad a las condiciones iniciales y la repetibilidad de los experimentos.

Uno de los presupuestos básicos de la metodología de la ciencia es que las teorías se mantienen vivas mientras haya experimentos que las verifiquen. Convencionalmente, la tarea científica inicia con una teoría, de la cual se derivan ciertas predicciones, y se realizan experimentos para obtener el valor de verdad de la teoría. El experimento representa así la "prueba de fuego" para cualquier teoría científica, y conlleva el objetivo de verificarla.

Considerando la propuesta metodológica de Karl R. Popper [1965], resulta que la prueba de una teoría es un asunto más bien de falsificación que de verificación. Entre más resista una teoría a ser falsificada, es más probable que sea cierta, o al menos que es más amplio el rango de condiciones bajo las cuales es cierta.

Sin embargo, una de las condiciones que se requieren para todo experimento científico es su repetibilidad, es decir, el experimento debe ser repetible por cualquier investigador trabajando en una teoría. Si dos científicos diferentes realizan el mismo experimento, tienen que llegar al mismo resultado. Para asegurar que las condiciones iniciales sean idénticas (dentro de un margen permitido de error experimental), todos los efectos que puedan cambiar los resultados deben ser tomados en cuenta y eliminados. Esta creencia, válida hasta antes del descubrimiento de los sistemas caóticos, debe ser revisada. Como hemos visto, los sistemas caóticos son altamente dependientes de las condiciones iniciales. Para los sistemas regulares (que no exhiben comportamiento caótico), las indeterminaciones en las condiciones iniciales son irrelevantes, y en todo caso quedan enmascaradas en los errores experimentales, los cuales quedan confinados dentro de ciertas cotas aceptables. Pero si el sistema es caótico, su sensibilidad a las condiciones iniciales provoca que conjuntos de condiciones iniciales apenas diferentes entre sí conduzcan a resultados completamente diferentes (en el sentido predictivo, esto es, las trayectorias caóticas serán diferentes, aunque el atractor extraño en cuestión sí es el mismo):



La consecuencia es obvia: a menos que las condiciones iniciales sean *exactamente* iguales, no es posible obtener resultados iguales. Y en la práctica, es imposible replicar las mismas condiciones iniciales para un experimento. En conclusión, el concepto de repetibilidad no puede ser aplicado a los sistemas caóticos.

La conclusión recién señalada demanda - y ha recibido - una modificación de las prácticas experimentales. Como apunta Ian Stewart [1989], los métodos experimentales deben ser rediseñados para estudiar sistemas caóticos:

De hecho una de las las más grandes contribuciones del caos es que ahora los experimentadores presentan sus datos de maneras más geométricas y más significativas - atractores más que espectros de potencia, secciones de Poincaré más que series de tiempo.

sección V

Función de la Computadora
en la Teoría de Caos.

§V.1 Introducción.

El desarrollo de la teoría de caos y su *status* actual ha sido fruto en buena medida del uso de la computadora, una herramienta que ha modificado significativamente la manera de hacer la ciencia. Es tanta la importancia que ha cobrado la computadora que hasta la fecha han surgido dos ramas científicas: la matemática experimental y la física computacional, que se distinguen de la matemática y la física tradicionales en cuanto el apoyo que reciben de la computadora. En este capítulo nos enfocaremos en la matemática experimental, pues es aquí donde las implicaciones epistemológicas se dejan sentir con más fuerza.

La matemática experimental implica el uso de la computadora para estudiar sistemas dinámicos - más bien del tipo no-lineales - y por consiguiente aumentar el nivel de comprensión de su comportamiento y también para sugerir líneas futuras de investigación analítica.

En los últimos 20 años, el juego simbiótico entre la matemática experimental y la teórica ha provocado una revolución en nuestra comprensión de los sistemas dinámicos, en particular los sistemas caóticos.

§V.2 La computadora como instrumento de investigación.

En 1944 John von Neumann dictó la Conferencia Josiah Willard Gibbs, en la ciudad de Chicago. El tema era el teorema ergódico y la mecánica estadística. Un mes después de la conferencia, von Neumann y Oscar Morgenstern publicaron su trabajo seminal, The Theory of Games and Economic Behavior. Ni la conferencia ni el libro daban idea alguna del interés y la preocupación de von Neumann respecto a la aparición de la computadora digital electrónica, en el verano de ese mismo año. No fue sino hasta unos años después que von Neumann escribiría lo siguiente, expresando claramente su esperanza y confianza en el uso de la computadora (Goldstein y von Neumann, [1963]):

Nuestros métodos analíticos actuales parecen inadecuados para la solución de importantes problemas que han surgido en relación a ecuaciones diferenciales parciales del tipo no-lineal, y, de hecho, con virtualmente todos los tipos de problemas no-lineales de la matemática pura. ... concluimos recalcando que los dispositivos computacionales, realmente eficientes y de alta velocidad, puedan proporcionarnos, en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales, así como en muchos otros campos que tienen ahora dificultad o negado su acceso, las indicaciones heurísticas que son necesarias para un genuino progreso en todas las partes de la matemática.

Con el paso del tiempo esta fe fue compartida por muchos científicos, y desde sus inicios la computadora se convirtió en una herramienta insustituible en las investigaciones científicas. El gran impacto de la computadora como instrumento de investigación era "vertical": la computadora resultaba útil para profundizar en una disciplina científica, daba a los investigadores la potencia computacional requerida para resolver problemas complejos. En la actualidad, el impacto de la computadora es más sutil y más interesante para la presente Tesis, puesto que su uso en la matemática experimental ha traído cambios significativos en la manera de practicar la ciencia.

§V.3 La matemática experimental como cambio de paradigma: matemática = deducción + inducción.

En el sentido particular de la matemática, el paradigma que ha prevalecido es el que proviene de Euclides, con una antigüedad de 2300 años, que en su esencia se puede expresar diciendo que la matemática tiene que ver con lo que se puede deducir a través de una serie de pasos lógicos. En la práctica, el carácter deductivo de la matemática se da mediante el proceso de demostración de teoremas, a partir de un sistema axiomático.

Con el advenimiento de la computadora, y a partir de los éxitos logrados en la solución de problemas que fueron intratables durante muchos años - como es el caso de la teoría de caos - la matemática se ha enriquecido, pues ahora, además del tradicional proceso deductivo, se utilizan procesos inductivos para ganar conocimiento en diversas áreas. A semejanza del trabajo de la ciencia física, los matemáticos realizan su labor de investigación diseñando experimentos, en base a patrones geométricos que se visualizan en la pantalla de la computadora.

Cabe mencionar que en la historia de las matemáticas el experimento no ha estado completamente excluido. La experimentación era por supuesto simple, consistía en hacer cálculos numéricos en papel y tratar varios casos especiales de un teorema que se pensaba era cierto. Por ejemplo, Karl F. Gauss, Pierre de Fermat, y otros, utilizaban este método con mucha frecuencia, como lo muestran sus notas privadas. Naturalmente la publicación, en aras del deductivismo, no contenía esos cálculos, y se limitaba a la presentación del teorema y su demostración. En la actualidad, con el surgimiento de la matemática experimental, se observa la tendencia a abandonar ese purismo, y sus resultados pueden por igual incluir la prueba de un teorema y los antecedentes numéricos o bien geométricos del mismo. Otro punto es concerniente a la escala de la experimentación. Mientras antes el trabajo experimental podía tomar algunas horas o varios días, en la actualidad ese tiempo se ha extendido considerablemente, y las duraciones son del orden de varias semanas o meses.

§V.4 Pros y contras de la matemática experimental.

El cambio de perspectiva metodológica propuesto por la matemática experimental ha suscitado la simpatía de unos matemáticos y la desaprobación de otros. Las posturas se dividen en cuanto a si la matemática es una cuestión de comprensión, o un asunto de demostración de teoremas.

a) Postura a favor:

Los primeros piensan que es positivo el trabajo de diseño y escritura de programas que propician la experimentación matemática con la computadora. Se cree que esto facilita la comprensión y la intuición acerca de cómo funcionan las matemáticas. Como consecuencia, la matemática experimental ha abierto nuevas áreas de estudio y originado nuevos tipos de resultados (ver infra); pero lo más importante es que ha dado lugar a novedosas técnicas y maneras de estudiar antiguos campos de las matemáticas.

b) Postura en contra:

Aquellos que desapruaban la matemática experimental creen que la matemática puede perder su espíritu, es decir, lo que la hace tan particular. La matemática es tan poderosa, dicen, precisamente porque consiste de lo que se prueba. Así, las teorías que partan de la intuición o de la experimentación estarán condenadas al fracaso.

§V.5 Resultados rigurosos de la computadora.

Como se mencionó en el apartado anterior, desde la perspectiva de un matemático la matemática experimental puede parecer sospechosa y carecer de valor. Sin embargo, hay ya muchos ejemplos de resultados rigurosos que hubieran sido imposible de obtener a no ser por la ayuda de la computadora. Quizá el problema más conocido sea el de los "cuatro colores", en donde se usó la computadora para buscar todos los casos necesarios para establecer el teorema. Para nuestra área de interés, no hay que pasar por alto el papel *sine qua non* de la computadora en las investigaciones de Lorenz, donde la simulación numérica dio como resultado las gráficas de su famoso atractor.

Otro caso interesante es el del equilibrio térmico, relatado por Campbell *et al.* [1985]. Se ha sabido desde hace mucho tiempo que una parte de la energía cinética creada en el choque de partículas se convierte en calor. Puesto de una manera más general, el movimiento organizado de una colección macroscópica de átomos se convierte en los movimientos desorganizados microscópicos asociados con el calor, de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica. Aunque esto pueda parecer obvio, uno de los problemas más importantes de la física es precisamente éste, el de la demostración directa de ese hecho tan simple. Se requiere una gran comprensión de la dinámica no-lineal y sus efectos para poder resolver este problema, puesto que es relativamente fácil probar que un conjunto finito de ecuaciones lineales no sirve para modelar tal comportamiento. Siempre se había pensado que la adición de alinearidades resolvería el problema.

Poco tiempo después de que se construyera la computadora Maniac I en los años 50's, Fermi, Pasta y Ulam se dieron a la tarea de realizar una simulación numérica de un sistema no-lineal para estudiar la aproximación al equilibrio térmico. Ellos utilizaron la Maniac para simular el comportamiento de 64 partículas acopladas por resortes no-lineales. Al desplazar levemente del equilibrio unos cuantos de los resortes, ellos esperaban ver movimientos "térmicos" aleatorios, con la vibración promedio dispersada de un modo uniforme entre todas las partículas.

En lugar de esto, se sorprendieron al descubrir que la configuración original de las partículas volvía a ocurrir - ¡no había ninguna aproximación al equilibrio térmico! Esta simulación estimuló una cantidad considerable de investigación posterior.

Hoy en día, el enlace entre la matemática experimental y la teórica ha permitido encontrar la causa de este comportamiento en los solitones, ondas a manera de pulsos que existen en ciertos sistemas no-lineales de ecuaciones diferenciales. Además, la computadora ha servido de ayuda para saber más acerca de la aproximación al equilibrio térmico, a través del estudio del comportamiento caótico, aunque cabe aclarar que el problema está aún lejos de resolverse.

En un contexto amplio, la computadora ha expandido drásticamente el rango de los fenómenos no-lineales que pueden ser explorados matemáticamente, y ha motivado el desarrollo de técnicas diseñadas especialmente para manejar alinearidades. Los problemas matemáticos que pueden convertirse en tratables con la computadora incluyen:

- la solución de ecuaciones con escalas de tiempo y longitud con gran variación,
- la descripción global de la dependencia del sistema dinámico con respecto a sus parámetros,
- el análisis de las fluctuaciones en los coeficientes de ecuaciones diferenciales parciales.

Campbell *et al.* [1985] mencionan que las técnicas utilizadas para estudiar tales problemas intentan usualmente aislar o simplificar las alinearidades inherentes. Cabe mencionar que estas técnicas son *ad hoc*, aunque su análisis y su aplicación continuada deberán generar en el futuro una rica y valiosa teoría matemática.

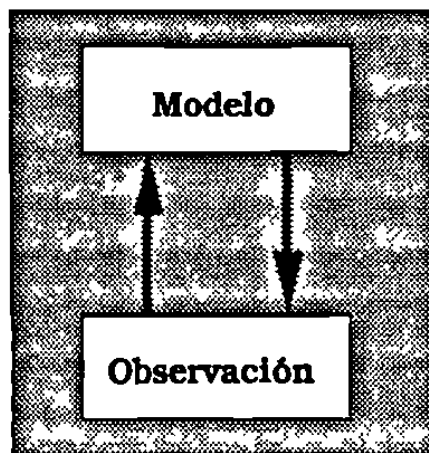
§V.6 La matemática experimental y la modelación de sistemas físicos.

Para situaciones típicas, el juego entre los estudios computacionales y la teoría matemática y física procede de una manera más bien dialéctica. En cada etapa del proceso de investigación científica, hay una pregunta fundamental:

¿Representan los resultados de la computadora nuevos e interesantes fenómenos inherentes en el problema del mundo real que se investiga, o son tan sólo artefactos computacionales que resultan de las limitaciones de los métodos numéricos utilizados o de la modelación?

Esta pregunta sirve para estimular un cuidadoso análisis matemático.

A esto hay que agregar el hecho de que existen dos problemas distintos pero relacionados que ocurren en el proceso de la investigación científica. El primer problema implica lo que se denomina modelación: dado un proceso en el mundo real, ¿cómo se puede escribir la mejor descripción matemática o modelo? El segundo es de carácter puramente matemático: dado el modelo, se busca encontrar las propiedades y la manera en que pueda resolverse el sistema de ecuaciones que lo representa.



Los científicos buscan tanto modelar el mundo físico como ser capaces de resolver los modelos resultantes, de modo que debemos tomar los dos problemas, puesto que su interacción es crucial. Por ejemplo, es fácil escribir las ecuaciones de Navier-Stokes para describir un fluido en movimiento; sin embargo, esto no revela la naturaleza turbulenta del fluido. Similarmente, la intuición acerca de aspectos cualitativos del comportamiento no-lineal puede ser muy valiosa como una guía para formular el mejor sistema de ecuaciones en el modelo.

La perspectiva moderna de la investigación científica puede sintetizarse en un proceso iterativo simple, de tan solo dos fases: se diseña un modelo o descripción abstracta del fenómeno bajo estudio, y se sigue con una observación y refinamiento del modelo.

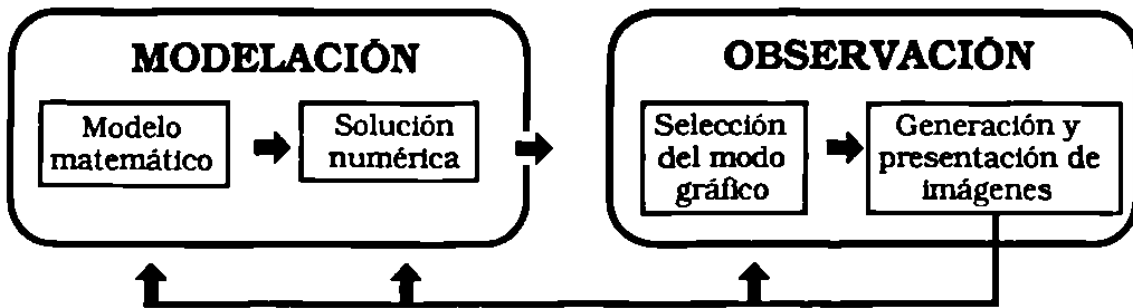
La fase de modelación abarca dos actividades:

- 1) En primer lugar, la modelación debe utilizar ecuaciones matemáticas.
- 2) En segundo lugar, estas ecuaciones deben ser resueltas. Usualmente, sólo los ejemplos de los libros de texto tienen soluciones exactas; los problemas del mundo real requieren soluciones numéricas. En este caso, los algoritmos para resolver las ecuaciones provienen de la computación científica y corren a cargo de los analistas numéricos.

La fase de observación también cubre dos actividades distintas:

- 1) La primera es la selección (y computación) de algún modo de visualizar la solución de las ecuaciones.
- 2) La segunda es la de crear las imágenes reales que se presentarán al usuario.

Esta fase requiere usualmente de técnicas convencionales de graficación. El modelo de investigación queda resumido en la siguiente figura (Nielson, G. M., [1991]):



El tiempo que toma efectuar una vuelta de este ciclo de modelar-observar no es necesariamente corto, como podría parecer; la duración puede abarcar desde algunos cuantos segundos hasta varias horas, etc.

Además, la presentación de las imágenes no es la única manera de ver los resultados, puesto que la visualización científica incluye animación, del tipo cinematográfico. Sin embargo, la estructura de este ciclo básico de información es la misma, y el análisis de esta estructura puede contribuir a entender varios aspectos de la visualización. Por ejemplo, se considera que la segunda fase, que cubre la decisión del modo gráfico y la computación de las imágenes es el problema más importante de esta nueva área científica que representa la visualización.

§V.7 El laboratorio de matemática experimental.

Por su misma naturaleza, la matemática experimental conlleva elementos de serendipia: un indicio proporcionado por una simulación numérica da lugar a una revelación intelectual que señala el camino a una verificación numérica detallada, que conduce eventualmente a su vez a una comprensión analítica. Sirve de ilustración el caso de Lorenz, quien al trabajar su sistema de ecuaciones del clima, alimentó en la computadora una cantidad apenas diferente de la que debía ser. Los resultados, inesperados, lo condujeron al descubrimiento del primer atractor caótico. Este proceso paso a paso ilustra la necesidad de contar con un amplio rango de recursos computacionales. Estos van desde máquinas de propósito especial a supercomputadoras, incluyendo entre las primeras a las computadoras digitales y a las analógicas.

a) Computadoras digitales:

Las computadoras digitales, tanto a nivel de computador central como minicomputador y la arquitectura convencional secuencial o pipeline permanecen como las herramientas de propósito general para los matemáticos experimentales. También las máquinas masivas en paralelo con arquitectura simple o concurrente ofrecen una alternativa atractiva. Las computadoras digitales de propósito especial, diseñadas para una clase particular de problemas, constituyen una importante nueva herramienta, y su uso en las investigaciones de problemas no-lineales deberá incrementarse en el futuro.

b) Computadoras analógicas:

El papel y el futuro de las computadoras analógicas en la matemática experimental no ha sido tan bien cubierto como las digitales. Aunque es difícil dar una definición general de computadora digital, ésta se considera usualmente como un número relativamente grande de módulos funcionales, basados en amplificadores operacionales, que realizan operaciones tales como suma, inversión, integración, y generación de funciones no-lineales.

Para programar una computadora analógica, estos módulos se conectan en una configuración que imita las conexiones reales del sistema bajo estudio. El comportamiento de los voltajes en la computadora representan la evolución en el tiempo de las variables de la ecuación.

En los estudios cualitativos de sistemas dinámicos finitos, las computadoras analógicas presentan varias ventajas con respecto a las computadoras digitales convencionales (mencionadas por Campbell *et al.*, [1985]):

a) Primero, dado que sus módulos pueden conectarse en arquitectura paralela, son mucho más rápidas que las computadoras digitales; más aun, suponiendo que hay un número suficiente de módulos para implementar un sistema dado, la velocidad de simulación es independiente del número de variables a simular. En comparación, la velocidad de una simulación en una computadora convencional es proporcional al tamaño del sistema modelado.

b) En segundo lugar, las computadoras analógicas se prestan perfectamente para una programación interactiva. Los parámetros del sistema, incluyendo la rapidez con la que se genera la solución, pueden variarse en tiempo real a medida que se va realizando la simulación. Esto es esencial para la búsqueda cualitativa a través del amplio rango de parámetros necesario para explorar todo el espacio de fases del sistema dinámico.

c) En tercer lugar, las computadoras analógicas resuelven ecuaciones no-lineales acopladas, que modelan un sistema físico. Dentro del rango de exactitud limitado por las tolerancias de los componentes, los errores no sistemáticos causados por las fluctuaciones térmicas y el ruido electrónico en una simulación analógica pueden ser útiles; este es el caso, por ejemplo, en los estudios cualitativos de los sistemas dinámicos caóticos. Específicamente, estas fluctuaciones borran completamente la estructura fina encontrada en la descripción matemática del caos y así mimetizan efectivamente el comportamiento burdo, de grano, que se observa en los experimentos de, por ejemplo, fluidos en convección o circuitos electrónicos no-lineales.

Estas ventajas deben contrastarse con las desventajas: un limitado rango dinámico de las variables, una exactitud limitada de las soluciones finales, y la necesidad de reparchar (en vez de reescribir) el código computacional para cada nuevo sistema a estudiar.

Para superar estas desventajas, se hace obvio el compromiso de utilizar en conjunción tanto las computadoras digitales como las analógicas. De hecho, esto es lo que se ha llevado a cabo en los laboratorios dedicados al estudio de sistemas dinámicos que exhiben caos. La computadora digital, que generalmente es una microcomputadora, es el punto final de una computadora analógica. La computadora digital es útil para configurar la analógica - establece las condiciones iniciales, los parámetros, y las funciones no-lineales. La función más importante de las computadoras digitales es doble: registrar los datos que se obtienen de la computadora analógica, y visualizarlos.

Esta configuración híbrida debe ser la base para diseñar un laboratorio de matemática experimental. Si se desean estudiar los problemas no-lineales de una manera completa, en lugar de juntar soluciones de partes separadas, se deben considerar sobre todo el rango de valores iniciales y de frontera, y en todo el espacio de fases. Esto significa generar y analizar grandes cantidades de datos. Para satisfacer estos requerimientos, el equipo computacional debe reunir tres características principales: interactividad, graficabilidad y amigabilidad.

1 Interactividad

El equipo computacional debe ser extremadamente rápido y altamente interactivo, para permitir una amplia y efectiva exploración de los parámetros del sistema dinámico, y con la posibilidad de poder manejar una gran cantidad de datos. En este sentido, lo más apropiado hasta la fecha es la arquitectura en paralelo.

2 Graficabilidad

El equipo debe tener grandes capacidades de graficación, para desplegar en forma visual los datos y estimular la intuición del investigador. También facilitaría la manipulación y la asimilación acelerada de masas abrumadoras de datos. Se deberá contar con monitores de color de alta resolución. Para las actividades de entrada, el usuario deberá tener un teclado convencional (mecanográfico), un teclado simbólico (para introducir las ecuaciones), y un dispositivo apuntador, como el *mouse*. Las salidas serían principalmente gráficas. El monitor mostraría las entradas del usuario, la lista de los parámetros de las ecuaciones, las condiciones iniciales, el tiempo de corrida, y otra información de control. El monitor se podrá programar de modo que puedan mostrarse series de tiempo, proyecciones del espacio de fases, secciones transversales de las soluciones, y varias estadísticas de la teoría de los sistemas dinámicos tales como el espectro de potencia, diagramas de bifurcación y correlaciones. Aquí es importante tener en cuenta que en las simulaciones de ecuaciones diferenciales parciales es necesario seguir las funciones de varias dimensiones tanto en el espacio como en el tiempo. Un desarrollo interesante en este sentido es la animación tipo cinematográfica de los resultados.

3 Amigabilidad

Debe ser amigable, para alentar la participación de investigadores de cualquier área científica. La amigabilidad es esencial para atraer investigadores de varias disciplinas científicas, quienes aunque puedan no tener el deseo de comprender las sofisticaciones tecnológicas que existan detrás de la pantalla del monitor, se sentirán estimulados a trabajar y obtendrán valiosos frutos del equipo computacional que reúna las características mencionadas.

§V.8 Visualización científica.

Los desarrollos alcanzados en las ciencias computacionales, en la forma de supercomputadoras, nuevas arquitecturas del equipo computacional, y las técnicas sofisticadas de los lenguajes computacionales permiten una ayuda inestimable en las tareas científicas de la modelación y simulación matemática de aspectos físicos de la realidad. Dado que los sistemas físicos estudiados presentan una gran complejidad, los resultados numéricos son de gran volumen. Por ejemplo, los satélites, radiotelescopios, sensores geofísicos o digitalizadores médicos, generan una grandísima cantidad de datos. Estos datos contienen a su vez una rica información. El problema al que se enfrentan los científicos es el de asimilar y transmitir esta información de modo que puedan ellos utilizarla efectivamente en el proceso científico. Esto requiere unos métodos de comunicación con un gran ancho de banda y una interface efectiva.

Partiendo del hecho de que más de la mitad de las neuronas del cerebro humano están dedicadas al procesamiento y comprensión de señales visuales (Levine, R., [1988]), el salto lógico es el de aprovechar esta capacidad mediante imágenes generadas de los datos. Esta capacidad es realmente impactante, pues el ancho de banda del canal óptico se calcula del orden de dos gigabits por segundo, mientras que apenas en estos tiempos la tecnología está alcanzando una magnitud de un Gbit.

La respuesta a estas necesidades y hechos aparece hoy en día como una nueva tecnología, la "visualización científica". En su acuñación original, en 1987, la National Science Foundation de los Estados Unidos (citado por Gantz, J. [1988]) habló de la visualización en tanto el uso de gráficas interactivas, en tiempo real, para interpretar datos, especialmente los datos provenientes de una simulación. Esto incluiría la capacidad de alterar, o "conducir", la simulación mientras se esté corriendo, en base a los resultados que se estuvieran viendo. Con el tiempo, la palabra ha llegado a significar todo tipo de gráficos para representar datos - incluyendo animación, representaciones clásicas, imágenes fotorrealistas, etc.

Para la presente discusión, manejaremos el término **visualización** para significar dos cosas:

- **Computación científica**
- **Interactividad gráfica.**

Esta segunda característica es la esencia verdadera de la visualización, pues es lo que permite la capacidad de interpretar las gráficas en tiempo real. También permite manipular variables o parámetros interactivamente. Por medio del color, la intensidad luminosa, la transparencia, la textura, etc., se obtienen unas imágenes que si se preparan e interpretan de una manera adecuada, pueden contener y transmitir una gran cantidad de información en un periodo corto de tiempo. A veces, se desean obtener imágenes realistas, y para esto se simulan efectos luminosos tales como sombras, reflexiones, refracciones, y la localización arbitraria del punto de vista del usuario. Los científicos también necesitan tener a su disposición el acceso a ciertas herramientas de soporte para la visualización, tales como la composición de imágenes, almacenamiento y llamada de archivos gráficos, tipos y tamaños de texto, redimensionamiento, rotación, traslación, copiado y duplicación, retoque manual y coloración.

§V.8.1 Beneficios de la visualización científica.

La visualización se ha convertido en un importante elemento del proceso de investigación científica. La tendencia actual es el cambio de lo puramente computacional y con escasas gráficas a un ambiente de visualización, situación en la cual un número cada vez creciente de científicos se dan cuenta que existe una tremenda cantidad de productividad a ganar mediante el trabajo en los ambientes gráficos de la pantalla de las computadoras. Su valor es indudable, y apenas se empiezan a explorar sus beneficios, siendo los más importantes los siguientes:

- **Mejor análisis.**

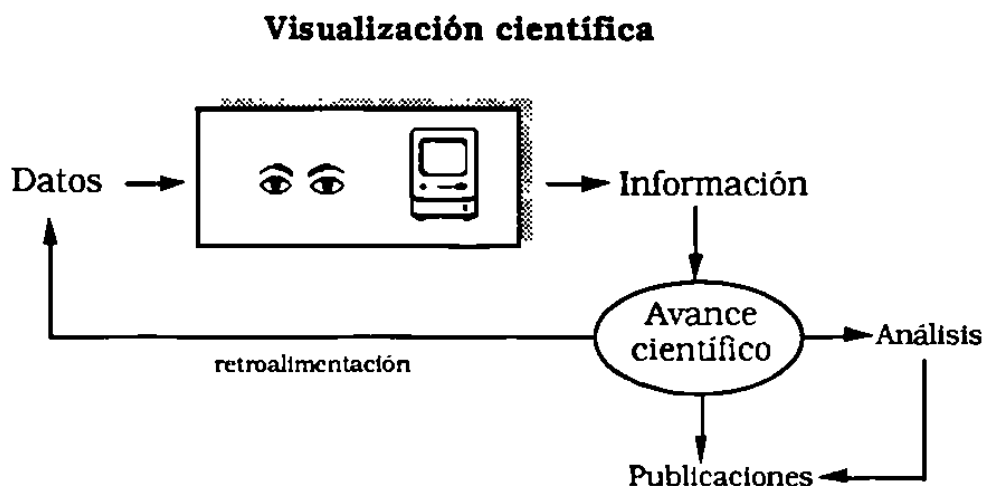
El estudio de la NSF reveló que casi un 95% del poder computacional de una supercomputadora se desperdicia (Gantz, [1988]), porque los científicos no son capaces de interpretar las cantidades exorbitantes de datos que producen. La interacción de los científicos con la simulación computacional puede ayudar a obtener una mejor interpretación de los datos y, a su vez, llevar a un mejor diseño del modelo.

- **Productividad científica.**

Al proporcionar las capacidades analíticas de interactividad, la visualización puede incrementar la productividad de los científicos. Esto implica un tiempo menor para publicar la investigación.

- **Tiempo reducido al mercado.**

Las herramientas computacionales que utilizan la simulación interactiva y el diseño integrado, pueden permitir a los ingenieros completar diseños en un tiempo menor, comparado con el que se obtendría en otros ambientes.



Además, la visualización tiene aplicaciones demostradas, desde la década de los 80's: proyectos diversos en los centros supercomputacionales de la NSF, que abarcan estudios tales como dinámicas de tormentas, la neurobiología del mal de Alzheimer, y la visión por máquina.

Un aspecto interesante son las aplicaciones dependientes de la visualización. Algunas disciplinas que alguna vez estuvieron desligadas de las ciencias computacionales están ahora inextricablemente unidas a éstas: modelación molecular, química computacional, astrofísica, dinámica de fluidos, etc.

Un beneficio adicional es el de desmitificar la ciencia para la persona promedio. Los textos llenos de fórmulas o de texto técnico a menudo alejan al interesado. Con esta tecnología naciente, es más fácil conservar el interés inicial, e incrementarlo.

§V.8.2 Visualización y sonido.

Uno de los más recientes desarrollos colaterales de la visualización científica está dado por la interesante propuesta de agregar sonido a las imágenes generadas (Iversen, [1992]). La idea central es utilizar el sonido como un canal adicional de información, aparte del visual. De esta manera, el investigador podría "oír", además de "ver", los datos resultantes del análisis numérico del modelo. En este sentido, es posible especular acerca de una percepción sinérgica entre lo auditivo y lo visual.

Naturalmente, el sonido que se utilice deberá estar determinado por los datos mismos, lo cual marca una importante diferencia con respecto a las pistas musicales con que usualmente se acompañan algunas animaciones. El sonido ofrece una gran cantidad de opciones para el usuario. Los datos pueden mapearse en frecuencia, volumen, tasas de ataque y decaimiento, duración, timbre, reverberación, brillo, y estereofonía.

Es posible que el sistema nervioso humano pueda sobresaturarse con la información visual, de donde se aprovecharía el canal auditivo. Esto podría hacerse incluso antes que se diera la saturación; el sonido se usaría para marcar una situación anómala, a modo de alarma, o para señalar eventos imperceptibles si sólo se "ven" los datos. Aquí cabe explorar las potencialidades del sistema auditivo humano. Por ejemplo, siendo que el oído puede distinguir hasta seis voces diferentes simultáneas (Iversen, [1992]), la sonificación sería útil en las situaciones donde existiera multidimensionalidad (situaciones que no son raras en los problemas del mundo real). También, el sistema auditivo ofrece una mejor discriminación que el sistema visual. Los dos oídos pueden distinguir dos sonidos separados por tan sólo 10 ó 20 microsegundos, mientras que el ojo fusiona imágenes por debajo de los 20 ó 39 ciclos por segundo. Un caso interesante es el de visualizar dos péndulos con comportamiento caótico. En ocasiones, los dos se mueven aparentemente en sincronía. Sin embargo, si se incluye un *click* en cada punto de inflexión, se encuentra que ese no es el caso.

Sección VI  Conclusiones.

§VI.1 Recapitulación.

Ha sido el objetivo de esta Tesis proporcionar una introducción a la teoría de caos, con vistas a justificar algunas consecuencias que consideramos importantes respecto a la metodología de la ciencia. Así, hemos repasado los conceptos básicos de la teoría, y presentamos la ecuación logística como un ejemplo sencillo, pero poderoso, para mostrar las principales características de los sistemas caóticos: una dinámica sencilla como generadora de un comportamiento altamente complejo e impredecible, y la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Estas dos marcas de los sistemas caóticos nos sirvieron para revisar y marcar límites a dos conceptos de la metodología de la ciencia: el determinismo laplaciano, y la repetibilidad del experimento. Por otra parte, vimos que el desarrollo de la teoría de caos se dio gracias a la computadora, herramienta científica que alcanza en la teoría de caos una condición *sine qua non*. El uso de la computadora por algunos matemáticos estudiosos de esta disciplina dio lugar a una nueva rama de la ciencia, la matemática experimental. Mencionamos que esta disciplina debe reportar en el próximo futuro avances inusitados en la matemática; dentro de poco, como en la física, no será extraño oír hablar de "matemáticos teóricos" y "matemáticos experimentales".

La teoría de caos es una teoría en crecimiento, que se está enriqueciendo con nuevas aportaciones surgidas de investigaciones en diferentes áreas de la ciencia. La lista de publicaciones que reportan resultados positivos crece cada día, aunque la teoría de caos aún se encuentra lejos de tener una forma acabada, e igualmente sus alcances están por descubrirse.

§VI.2 Líneas de investigación sugeridas.

Como mencionamos en la Introducción, presentamos enseguida, a manera de sugerencia, algunas de las líneas de investigación que otros estudiantes pudieran tomar para enriquecer el área. La lista de líneas de investigación es parcial, pero se ofrece con el objetivo, además del ya señalado, de dar una idea de la riqueza potencial de la teoría de caos, y de apelar a la curiosidad y despertar el interés en los lectores.

§VI.2.1 La teoría de caos y las revoluciones científicas.

Consideramos que este tema es de gran importancia para los estudios de la metodología de la ciencia, pues tal parece que la teoría de caos nos ofrece la oportunidad de presenciar el surgimiento en nuestra época de un paradigma científico, o bien la de estar ante una revolución científica. El tema es fascinante y está lleno de expectativas.

Nuestro siglo ha presenciado dos de las más grandes revoluciones científicas de todos los tiempos: la teoría de la relatividad de Einstein y la mecánica cuántica. El éxito de la teoría de caos, y lo novedoso de sus propuestas, han provocado en sus seguidores más entusiastas que la consideren como la tercera revolución científica de nuestros tiempos, con la correspondiente reacción de algunos escépticos. Trataremos en este apartado de adelantar una respuesta a esta cuestión, la cual es la que más polémica ha suscitado.

Aunque la teoría de caos ha ganado un lugar respetable dentro del gran edificio de la ciencia contemporánea, aún es tiempo prematuro para dar una respuesta definitiva a la pregunta planteada arriba. Las opiniones se dividen tanto a favor como en contra, y todavía quedan por resolver ciertas cuestiones de peso como para tener una idea clara acerca de la relevancia y la importancia última de esta ciencia.

Por ejemplo, Steven Toulmin (citado por R. Pool, [1989], un filósofo de la ciencia de la Northwestern University de Chicago, opina que la teoría de caos no es una revolución científica, en el sentido que lo fueron la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica. Dice que si la mecánica cuántica presentó un nivel de comportamiento en el mundo físico completamente nuevo, la teoría de caos ofrece tan sólo una corrección a un error antiguo. *"La gente supuso por más de 200 años que el mundo newtoniano era predecible. El caos muestra que esto siempre fue una suposición equivocada"*. Sin llegar a colocarla al mismo nivel epistemológico de la teoría de la relatividad o de la mecánica cuántica, Toulmin compara la teoría de caos con la mecánica estadística, herramienta matemática utilizada en el estudio de sistemas físicos que exhiben un comportamiento estadístico. Similarmente, la teoría de caos sería una herramienta de trabajo más, no un paradigma nuevo del mundo (en un sentido fuerte, connotando revolución). En resumen, Toulmin considera que la teoría de caos contiene una muy importante revelación: toda descripción completa de la naturaleza debe incluir además de la noción de orden y regularidad, los conceptos de inestabilidad, impredecibilidad y comportamiento complejo. Esto, dice, en ningún sentido es revolucionario, y a lo más que lleva es a sugerir futuros programas de investigación.

Por nuestra parte, creemos que la teoría de caos, aunque no constituya una revolución científica en el sentido que le da Thomas S. Kuhn, sí es un nuevo paradigma científico. La esencia de este nuevo paradigma es lo señalado precisamente por Toulmin, en cuanto que la teoría de caos toma como campo de estudio lo impredecible, lo desordenado y lo complejo. Pero aquí hay algo muy interesante, en lo que respecta a las nociones de paradigma y de revolución científica propuestas por Kuhn. En 1962, Kuhn publicó una de las obras más influyentes de todos los tiempos en la filosofía de la ciencia, The Structure of Scientific Revolutions. Su tesis central es que

las revoluciones científicas son ... aquellos episodios de desarrollo no acumulativo en los cuales un paradigma anterior es remplazado todo o en parte por un paradigma nuevo e incompatible

(Kuhn, *op. cit.*, pág. 91), donde los paradigmas se definen como

ejemplos aceptados de la práctica científica en curso - ejemplos que incluyen leyes, teoría, aplicaciones, e instrumentación - que proporcionan modelos de los cuales surgen tradiciones coherentes particulares de investigación científica.

(Kuhn, *op. cit.*, pág. 10).

La noción de paradigma es central en la propuesta kuhniana, aunque el uso indiscriminado que éste le da en su obra citada lo convierte en desventaja para la tarea que nos hemos fijado. Kuhn mismo ha reconocido (Kuhn, [1982]) que el uso que le da a la palabra 'paradigma' confunde a los lectores, e identifica dos nociones muy distintas: ejemplares, y matrices disciplinarias.

Los ejemplares son soluciones concretas a problemas, aceptadas por la comunidad científica, y tienen el sentido usual de 'paradigmático'. Así, el concepto de atractor extraño de la teoría de caos es una ilustración de un ejemplar (entonces, diríamos que tanto el atractor de Lorenz como el atractor de Hénon son paradigmáticos). Por otro lado, una matriz disciplinaria está constituida por elementos compartidos que dan cuenta del carácter poco problemático de la comunicación entre profesionistas y de la relativa unanimidad de los juicios de esos profesionistas en una comunidad científica, y tienen como componentes generalizaciones simbólicas, compromisos hacia creencias en determinados modelos, valores, y ejemplares; todos estos elementos son compartidos por los miembros de la comunidad. En relación a la teoría de caos, ya se ha dado la formación y existencia de tal matriz disciplinaria, de una manera explícita en el *Grupo de Sistemas Dinámicos* (ver §II.14), y de un modo implícito en los muchos investigadores dedicados al estudio de sistemas dinámicos no-lineales en el mundo (prueba de ello lo constituye el número creciente de artículos que se publican en nuestros días, la edición de libros, la organización de congresos, etc.).

Ahora bien, Kuhn piensa que la ciencia avanza de un modo revolucionario, más que evolucionario. En su opinión, la revolución científica ocurre cuando el paradigma en uso es remplazado por uno totalmente nuevo (en el sentido que es "inconmensurable" o incompatible con el anterior). El proceso por el cual un paradigma deja de ser aceptado por la comunidad científica y se introduce otro es el siguiente. La ciencia normal, esto es, la ciencia practicada por la comunidad científica bajo cierto paradigma, se ve ocasionalmente perturbada por la aparición de ciertas anomalías, o problemas que el paradigma no puede resolver. En un momento dado, la cantidad de anomalías es tal que el paradigma en uso es puesto en duda, es decir, entra en crisis. Ante esta situación, se proponen nuevos paradigmas, que den cuenta de las anomalías. Uno de tales paradigmas será aceptado por la comunidad científica, y en consecuencia habrá ocurrido una revolución científica, en la cual un paradigma ha sustituido a otro.

El punto interesante es que la teoría de caos, vista como paradigma, no ha venido a sustituir al paradigma anterior, el de la dinámica general, sino más bien lo ha ampliado. En consecuencia, la mecánica newtoniana ha evolucionado, y se ha refinado. El origen de la teoría de caos lo debemos ver en algo que Kuhn no contempla en su modelo de las teorías científicas. Por un lado, un grupo de científicos simplemente deseó estudiar una clase diferente de problemas. Por el otro, el desarrollo tecnológico de la informática proporcionó el instrumento adecuado a sus investigaciones, la computadora. La conclusión es sorprendente: la teoría de caos representaría para los filósofos de la ciencia un contraejemplo del modelo kuhniano del desarrollo de la ciencia.

Una extensión de esta línea de investigación podría ser el análisis específico de la función del desarrollo tecnológico - la computación - respecto al avance científico. Puede servir de base el estudio de las grandes transformaciones que sufrieron ciencias como la astronomía, con la invención del telescopio y luego el radiotelescopio, la biología, con el descubrimiento del microscopio, o la microfísica y los superaceleradores de partículas.

§VI.2.2 La teoría de caos y la mecánica cuántica.

Algunos partidarios de la teoría de caos piensan que los elementos definitivamente revolucionarios de esta ciencia se verán en los próximos tiempos. Una de las líneas de investigación más prometedoras lo constituye la relación entre la teoría de caos y la mecánica cuántica.

El hecho de que se considere a la mecánica cuántica como la teoría fundamental de la naturaleza, tiene como consecuencia lógica la inclusión del caos en esa teoría en una forma u otra, puesto que el comportamiento caótico es indudablemente una parte del mundo físico. Sin embargo, el problema no es sencillo, pues para empezar no existe una definición de "caos cuántico", y los resultados experimentales son hasta la fecha escasos y ambiguos.

El punto central en esta discusión es el Principio de Correspondencia de Bohr, que conecta los sistemas cuánticos con los sistemas clásicos. El principio establece que a medida que un sistema cuántico se vuelve más grande, se convierte en un sistema clásico. Las investigaciones en torno a la posible existencia del caos cuántico se sitúan precisamente en una posición intermedia en este paso, es decir, en el paso de un sistema clásico al nivel cuántico, y viceversa. Un ejemplo de investigación en este sentido (citado por Freedman, [1991]), es el trabajo de Joseph Ford, publicado en la revista *Physica D* del mes de mayo de 1991. Ford ha demostrado que cuando un sistema físico llamado el "gato de Arnold" - se lleva al nivel cuántico y luego se regresa al estado clásico pierde uno de sus atributos clave, el comportamiento caótico. Los resultados logrados por Ford son controversiales, y la cuestión sigue en el aire. El punto interesante para nosotros es que si la discusión se define en favor de Ford, entonces se pondría en duda la validez del Principio de Correspondencia, y por lo tanto de la misma mecánica cuántica, teoría que ha superado prueba tras prueba, y que no ha sido falsificada por ningún experimento en lo que va desde su formulación. Esto, creemos, sería una verdadera revolución científica.

§VI.2.3 La matemática experimental como modalidad científica.

Si bien hemos presentado algunas características de la matemática experimental, el campo es grande y en crecimiento. ¿Cuáles son las implicaciones en el área de la metodología, y también, en la filosofía de la ciencia? ¿Representa la matemática experimental un avance real de la matemática, o puede llegar a obstaculizarla? ¿Cuál es el valor de la visualización científica? ¿Cómo podría afectar la matemática experimental o la visualización científica a la educación de la ciencia?

§VI.2.4 La teoría de caos en las ciencias sociales.

Los estudiantes de la Maestría en Metodología de la Ciencia con inclinación hacia las ciencias sociales pueden encontrar un interés especial en la teoría de caos. Las posibilidades son ilimitadas, y el área casi virgen (se sugiere la lectura del libro El Desorden. La teoría de caos y las ciencias sociales, de Georges Balandier). ¿Como aplicar los conceptos o los resultados teóricos del caos en las ciencias sociales? ¿Qué representan las bifurcaciones y los atractores en un sistema sociológico?

§VI.2.5 Aspectos metodológicos de la teoría de caos.

¿Cómo se realiza la modelación de los sistemas caóticos? ¿Cuáles son los métodos utilizados en la medición del caos? ¿Cuáles son las áreas científicas donde más se aplica la teoría de caos? ¿Cómo es la presentación de resultados (énfasis gráfico en atractores, secciones de Poincaré, etc.)? ¿Cuáles son los avances en el control y uso de los sistemas caóticos?

Es nuestro deseo que esta Tesis cumpla sus objetivos, y que despierte en otros un interés igual o mayor que el que hemos tenido hacia la teoría de caos, para que guíen sus estudios hacia ella.



Bibliografía.

Alper, Joseph y B. J. Spalding, 1986, "Chaos May Offer a Clue to Chemistry," Chemical Week, septiembre 10, pp. 29-30.

Bak, Per, 1986, "The Devil's Staircase," Physics Today, diciembre, pp. 38-45.

Balandier, Georges, 1989, El Desorden. La Teoría de Caos y las Ciencias Sociales, España: Gedisa.

Berry, Michael, 1987, "Quantum Physics on the Edge of Chaos," New Scientist, 19 de noviembre, pp. 44-47.

Birkhoff, G. D., 1950, Collected Mathematical Papers, Providence, RI: American Mathematical Society.

Borman, Stu, 1991, "Researchers Find Order, Beauty in Chaotic Chemical Systems," Chemical Engineering, enero, pp. 18-29.

Bown, William, 1991, "New-wave Mathematics," New Scientist, 3 de agosto, pp. 33-37.

Briggs, John y Peat, David F., 1989, Turbulent Mirror, New York: Harper & Row.

Brock, William A., Hsieh, David A. y LeBaron, Blake, 1991, Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability, MA: The MIT Press.

Brody, Thomas, 1989, "Los Determinismos de la Física," Revista de la Universidad Nacional Autónoma de México, agosto, pp. 23-29.

Bygrave, William D., 1989, "The Entrepreneurship Paradigm (II): Chaos and Catastrophe among Quantum Jumps?," Entrepreneurship Theory and Practice, Invierno, pp. 7-30.

Campbell, D., Crutchfield, J., Farmer, D. y Jen, E., 1985, "Experimental Mathematics: the Role of Computation in Nonlinear Science," Communications of the ACM, abril, Núm. 4, pp. 374-384.

Cantor, G., 1915, Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, New York: Dover.

Chernikov, Alexander A., Sagdeev, Roald Z. y Zaslavsky, George M., 1988, "Chaos: How Regular Can it Be?," Physics Today, noviembre, pp. 27-35.

Cipra, Barry A., 1988, "Computer-drawn Pictures Stalk the Wild Trajectory," Science 241, 2 de septiembre, pp. 1162-1163.

Crutchfield, James P., Farmer, J. Doyne, Packard, Norman H. y Shaw, Robert S., 1986, "Chaos," Scientific American 255, diciembre, pp. 38-49.

Day, Richard H., 1986, "Unscrambling Chaos Through Thick and Thin: Replay," The Quarterly Journal of Economics, mayo, pp. 425-426.

De Souza-Machado, Sergio, Rollins, R. W., Jacobs, D. T. y Hartman, J. L., 1990, "Studying Chaotic Systems Using Microcomputer Simulations and Lyapunov Exponents," American Journal of Physics 58, abril, pp. 321-329.

Devaney, Robert, L., 1990, Chaos, Fractals, and Dynamics, New York: Addison-Wesley.

Dowell, E. H. y Pezeshki, C., 1986, "On the Understanding of Chaos in Duffing's Equation Including a Comparison with Experiment," ASME Journal of Applied Mechanics 53, marzo, pp. 5-9.

Eddington, A., The Nature of the Physical World, Ann Arbor: University of Michigan Press, 1958.

Fatou, P. 1919, "Sur les équations fonctionnelles," Bull. Soc. Math. Fr. 47, pp. 161-270; 48, pp. 33-95; 48, pp. 208-314.

Feigenbaum, M., 1978, "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations," Journal of Statistical Physics 19, pp. 25-52.

- Ford, Joseph, 1983, "How Random is a Coin Toss?," Physics Today, abril, p. 4.
- Freedman, David H., 1991, "A Chaotic Cat Takes a Swipe at Quantum Mechanics," Science 253, agosto 9, p. 626.
- Gantz, John, 1988, "Scientific Visualization," Computer Graphics World, agosto, pp. 21-42.
- Gapanov-Grekovh, Andrey V. y Mikhail I. Rabinovich, 1990, "Disorder, Dynamical Chaos and Structures," Physics Today, julio, pp. 30-38.
- Goldstein, Gina, 1990, "Francis Moon: Coming to Terms with Chaos," Mechanical Engineering 112, Núm. 1, enero, pp. 40-47.
- Goldstein, H. H. y von Neumann, J., 1963, "On the Principles of Large Scale Computing Machines, en Collected Works of John von Neumann, vol. 5, A. T. Taub, New York: MacMillan Publishing Co., pp. 1-12.
- Gómez-Font, Xavier, 1989, "Un Enfoque a los Sistemas Dinámicos," Ciencia 40, pp. 233-243.
- Grassberger, Peter y Procaccia, Itamar, 1983, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors," Physica 9D, pp. 189-208.
- Grebogi, Celso, Ott, Edward, y Yorke, James A. , 1987, "Chaos, Strange Attractors, and Fractal Basin Boundary in Nonlinear Dynamics," Science 238, 30 de octubre, pp. 632-637.
- Gutzwiller, Martin C., 1992, "Quantum Chaos," Scientific American 257, enero, pp. 78-84.
- Hénon, M., 1976, "A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor," Communications in Mathematical Physics 50, pp. 69-77.
- Hobbs, Jesse, 1991, "Chaos and Indeterminism," Canadian Journal of Philosophy 21, pp. 165-193.
- Holden, Arun, 1985, "Chaos is no Longer a Dirty Word," New Scientist, 25 de abril, pp. 12-15.

- Holmes, Philip J. y Moon Francis C., 1979, "A Magnetoelastic Strange Attractor," Journal of Sound Vibrations 65, pp. 285-296.
- Holmes, Philip J. y Moon, Francis C., 1983, "Strange Attractors and Chaos in Nonlinear Mechanics," Journal of Applied Mechanics 50, diciembre, pp. 1021-1032.
- Huberman, B. A. y Crutchfield, J. P., 1979, "Chaotic States of Anharmonic Systems in Periodic Fields," Physical Review Letters, pp. 675-693.
- Hunt, G. M. K., 1987, "Determinism, Predictability and Chaos," Analysis 47, pp. 129-133.
- Ingraham, Richard Lee, 1992, A Survey of Nonlinear Dynamics, Singapore: Word Scientific.
- Iversen, Wes, 1992, "The Sound of Science," Computer Graphics World, enero, pp. 54-62.
- Julia, G., 1918, "Memoire sur l'iterationdes fonctions rationnelles," J. Math., Ser. 7, 4, pp. 47-245.
- Kelsey, David, 1988, "The Economics of Chaos or the Chaos of Economics," Oxford Economic Papers 40, pp. 21-31.
- Khurana, Anil, 1988, "Rayleigh-Bénard Experiments Probes Transition from Chaos to Turbulence," Physics Today, junio, pp. 17-21.
- Krumhansi, James A., 1991, "Unity in the Science of Physics," Physics Today, marzo, pp. 33-38.
- Kuhfittig, Peter K. y Thomas W. Davis, 1990, "Predicting the Unpredictable," Cost Engineering 32, Núm. 2, febrero, pp. 7-11.
- Kuhn Thomas S., 1982, La Tensión Esencial, México: Fondo de Cultura Económica.
- Kuhn, Thomas, S., 1962, The Structure of Scientific Revolutions, Chicago: University of Chicago Press.

Langreth, Robert, 1991, "Engineering Dogma Gives Way to Chaos," Science 252, 10 de mayo, pp. 776-778.

Levi, M., 1981, "Qualitative Analysis of the Periodically Forced Relaxation Oscillations," Memoirs of the American Mathematical Society 214, pp. 1-47.

Levine, Ron, 1988, "Visualization Barriers," Computer Graphics World, agosto, pp. 28-35.

Li, Tien-Yien, Yorke, James A., 1975, "Period Three Implies Chaos," American Mathematical Monthly 82, pp. 985-992.

Liapunov, A. M., 1966, Stability of Motion, New York: Academic Press.

Libchaber, A., 1982, "Experimental Study of Hidrodynamic Instabilities. Rayleigh-Benard Experiment: Helium in a Small Box," en Nonlinear Phenomena at Phase Transitions and Instabilities, New York: Academic Press.

Lorenz, Edward N., 1963, "Deterministic Non-Periodic Flow," Journal of Atmospheric Science 20, pp. 130-141.

Loye, David y Riane Eisler, 1987, "Chaos and Transformation: Implications of Nonquilibrium Theory for Social Science and Society," Behavioral Science 32, pp. 53-64.

Luna Acosta, Germán A., 1990, "Caos en la Mecánica de Newton," Revista Mexicana de Física 36, Núm. 2, pp. 315-333.

Mackay, Michael C. y Glass, Leon, 1977, "Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems," Science 197, p. 287.

Maddox, John, 1989, "Is Chaos Becoming Conversational?," Nature 341, 7 de septiembre, p. 17.

Mandelbrot, Benoit B., 1983, The Fractal Geometry of Nature, New York: W. H. Freeman.

May, Robert M., 1976, "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics," Nature 261, junio 10, pp. 459-467.

Melese, Francois y Transue, William, 1986, "Unscrambling Chaos through Thick and Thin," The Quarterly Journal of Economics, mayo, pp. 419-423.

Mirowski, Philip, 1989, "The Probabilistic Counterrevolution, or how Stochastic Concepts came to Neoclassical Economic Theory," Oxford Economic Papers 41, pp. 217-235.

Murray Z., Frank y Stengos, Thanasis, 1988, "Some Evidence Concerning Macroeconomic Chaos," Journal of Monetary Economics 22, pp. 423-438.

Newton, Isaac, 1967, Mathematical Papers, edición de D. T. Whiteside, New York: Cambridge University Press.

Nielson, Gregory M., 1991, "Visualization in Scientific and Engineering Computation," IEEE Computer Graphics and Applications, septiembre, pp. 58-66.

Ornstein, D. S., 1989, "Ergodic Theory, Randomness, and "Chaos"," Science 243, pp. 182-186.

Percival, Ian, 1989, "Chaos: a Science for the Real World," New Scientist, 21 de octubre, pp. 42-47.

Pérez Pascual, Rafael, 1982. "Atractores Extraños," Revista Mexicana de Física 28, Núm. 3, pp. 381-407.

Pérez Pascual, Rafael, 1989, "El Caos Determinista: los Límites de la Predicción Científica," Revista de la Universidad Nacional Autónoma de México, agosto, pp. 19-22.

Poincaré, Henri, 1899, Les Methodes Nouvelles de la Mecánica Celeste, Paris: Gauthier-Villars.

Poincaré, Henri, 1944, Ciencia y Método, Argentina: Espasa-Calpe.

Pool, Robert, 1989, "Chaos Theory: How Big an Advance?," Science 245, 7 de julio, pp. 26-28.

- Popper, Karl, R., 1965, La Lógica de la Investigación Científica, Madrid: Tecnos.
- Prigogine, Ilya y Stengers, Isabelle, 1984, Order Out of Chaos, New York: Bantam Books.
- Rañada, Antonio F., 1986, "Movimiento caótico," Investigación y Ciencia, Núm. 114, marzo, pp. 12-23.
- Rietman, Edward, 1989, Exploring the geometry of nature, PA: Windcrest Books.
- Robbins, K. A., 1979, "Periodic Solutions and Bifurcation Structure at High r in the Lorenz Model," SIAM Journal of Applied Mathematics 36, pp. 457-472.
- Rosser, J. Barkley, 1991, From Catastrophe to Chaos: a general theory of economic discontinuities," Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Ruelle, David y Takens, Floris, 1971, "On the Nature of Turbulence," Communications in Mathematical Physics 20, pp. 167-192.
- Schaffer, William M., 1985, "Order and Chaos in Ecological Systems," Ecology 66, Núm. 1, pp. 93-106.
- Smale, Steve, 1967, "Differentiable Dynamical Systems," Bulletin of the American Mathematical Society 73, pp. 747-817.
- Stewart, Ian, 1989, Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos, Cambridge, MA: Blackwell.
- Stewart, Ian, 1989, "Portraits of chaos", New Scientist, 4 de noviembre, pp. 42-47.
- Stone, Mark A., 1989, "Chaos, Prediction and Laplacean Determinism," American Philosophical Quarterly 26, Núm. 2, abril, pp. 123-131.
- Sussman, Gerald Jay y Wisdom, Jack, 1988, "Numerical Evidence That the Motion of Pluto is Chaotic," Science 241, pp. 433-437.

- Tritton, David, 1986, "Chaos in the Swing of a Pendulum," New Scientist, 24 de julio, pp. 37-40.
- Verhulst, P. F., 1838, "Notice sur la Loi que la Population Suit dans son Accroissement," Correspondence Mathématique et Physique 10, pp. 113-121.
- Vivaldi, Franco, 1989, "An Experiment with Mathematics," New Scientist, 28 de octubre, pp. 46-49.
- Weiss, Marysia, 1991, "An Early Introduction to Dynamics," The Teaching of Mathematics, agosto-septiembre, pp. 635-641.
- Wilson, Jack M. y Redish, E. F., 1989, "Using Computers in Teaching Physics," Physics Today, enero, pp. 34-41.
- Wolf, Alan, 1983, "Simplicity and Universality in the Transition to Chaos," Nature 305, 15 de septiembre, pp. 182-183.
- Zabusky, Norman J., 1984, "Computational Sinergetics," Physics Today, julio, pp. 36-45.

