UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

DEMOSTRACION Y COMPROBACION DE CONOCIMIENTOS

T E S I S

QUE EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO
EN METODOLOGIA DE LAS CIENCIAS

PRESENTA:

SANTIAGO ALFREDO SALAS DE LEON

MONTERREY, N. L., OTOÑO DE 1986.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

DEMOSTRACION Y COMPROBACION DE CONOCIMIENTOS

T E S I S

QUE EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN METODOLOGIA DE LAS CIENCIAS

PRESENTA:

SANTIAGO ALFREDO SALAS DE LEON

MONTERREY, N. L., OTOÑO DE 1986.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

DEMOSTRACION Y COMPROBACION DE CONOCIMIENTOS

TESIS

QUE EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN
METODOLOGIA DE LAS CIENCIAS PRFSENTA:

SANTIAGO ALFREDO SALAS DE LEON

MONTERREY, N. L. OTOÑO DE 1986

DEMOSTRACION Y COMPROBACION DE CONOCIMIENTOS

PROLOGO

La Maestría en Metodología de la Ciencia. Ha tendido diversas faces desde su fundación a iniciativa de Eli de Gortari y Tomás González. Hasta el momento actual cuenta con una fisonomía propia, y un cuerpo docente con relativa permanencia.El discurso del método que se manejo en el transcurso de la existencia de la maestría, pasaba del materialismo - dialéctico al positivismo, conservando algunos rasgos comunes, pero también reafirmando algunos errores. Los lógicos hablan error de homonimía- cuando a un concepto se le asignan diferentes contenidos. Este es un --- error comun en la teoría del método. Pero el error que en este trabajo - trato de abordar; es el que se comete haciendo sinónimos, categorías tales como; hipótesis y supuesto, principios y fundamentos, tésis y teoremas, leyes y reglas, etc., las operaciones metodológicas no escapan a -- esta confusión, se confunde ordenación con clasificación, comprobación - con demostración, división con partición, etc. Es claro que habrá que -- precisar el contenido de categorias y operaciones metodológicas y este - es un primer intento.

SANTIAGO A. SALAS DE LEON

OTOÑO DE 1986

2. INTRODUCCION.

Este trabajo pretende distinguir entre el proceso de demostrar conocimientos por un lado y por el otro probarlos. Para muchas personas demostrar y probar son sinónimos, e incluso algunos lógicos y metodólogos de la ciencia confunden dichas categorías con frecuencia. Para un estadístico existe una diferencia clara entre confiabilidad y validez, diferencia que no perciben las personas no versadas en la estadística que toma éstos términos como sinónimos; El físico por ejemplo distingue entre velocidad y acelaración, cosa que no podemos hacer todas las personas; el matemático distingue entre semejanza y congruencia que se antojan sinónimos, finalmente el economista distingue entre precio y valor. La tesis que se sostiene y argumenta en este trabajo establece que:

" LA DEMOSTRACION Y LA PRUEBA SON OPERACIONES METODOLOGICAS DE NATURALEZA DISTINTA; LA DEMOSTRACION ES UNA OPERACION METODOLOGICA POR MEDIO DE LA CUAL SE PUEDE ENCONTRAR LA VALIDEZ DE UN CONOCIMIENTO, LA PRUEBA ES UNA OPERACION METODOLOGICA POR MEDIO DE LA CUAL SE DETERMINA LA VERACIDAD DE UN CONOCIMIENTO. LIGADO A LA DEMOSTRACION ESTA LA TESIS, EN TANTO QUE LA PRUEBA ESTA LIGADA A LA HIPOTESIS. LOS CONOCIMIENTOS DEMOSTRADOS SON VALIDOS EN TANTO QUE LOS PROBADOS SON VERDADEROS".

Las consecuencias filosóficas a que llevan el hacer sinónimo la demostración y la prueba son graves, púes llevan de inmediato al idealismo, que es un reducto al que con frecuencia caen los científicos ingenuos filosóficamente, y lo más grave es que también un gran número de filósofos no han escapado de la trampa.

Los filósofos griegos "intuyeron" la diferencia, Arquímides decía que sus máquinas sólo servían para demostrar sus teoremas que era lo que realmente le preocupaba, un dicípulo de Diógenes escuchando de boca de su maestro que Zenón de Elea decía que el movimiento no existía se paró y empezó a caminar diciendo "el movimiento se demuestra andando" cosa que causó -- gran enojo en su maestro, ya que éste sabía del contenido racional de la-demostración.

El jóven Marx planteó correctamente el problema pero no pudo resolverlo, en sus tesis sobre Feurbach afirmaba: "el probelma de la verdad no es un problema teórico, es un problema práctico, es en la práctica donde-el hombre demuestra la terrenalidad de su conocimiento". Marx no estaba, en el momento en que escribió esta tesis, en condiciones de resolver el - problema púes se econtraba aún bajo una fuerte influencia de Hegel.

Quiero ahora mencionar a Luis Althusser filósofo contemporáneo a --- quien se reconoce como uno de los más grandes filósofos de los últimos -- tiempos. Althusser afirma en congruencia con el marxismo que la práctica-juega un doble papel epistemológico, por un lado como fuente de conocimientos y por otro como criterio de verdad, de modo que el matemático -- ejerce una "práctica teoríca" para probar sus conocimientos. Althusser -- pronto se dió cuenta de su desviación teoricista que reconoce en su "autocrítica", pero, a pesar de sus rectificaciones no logró superar su deficiencia. Afirmó que el matemático encontraba la veracidad de sus teorías-a través de la práctica teórica, confundiendo con ello la validez con la-veracidad.

Este trabajo está formado esencialmente de dos partes: una que se avoca a explicar la naturaleza de la demostración y otra que trata de explicar la naturaleza de la prueba.

Se da un conceptó de demostración y se establece su relación con las tesis, se subraya su naturaleza lógica y se establecen sus limitaciones, - se dá una clasificación de las demostraciones siguiendo a De Gortari, - aunque esa clasificación puede ser extendida o refinada no es intención- de este trabajo hacerlo. Se presta especial atención a la inducción matemática por su carácter inductivo ya que la demostración con frecuencia esta asociada con la deducción, se procede después a dar algunos ejemplos de demostraciones en diferentes áreas del conocimiento, en geometría se -- presentan varias formas de demostración del teorema de Pitágoras para -- ejemplificar que existen diversos caminos para la demostración, es decir, pueden existir varias demostraciones de una misma tesis, se tomó la estadística porque a ella está ligada directamente la prueba de hipótesis, - finalmente se dá un ejemplo de demostración en la economía política, demostración que considero de gran importancia. Kolmogorov no inventó la - teoría de probabilidades pero la ordenó, la sistematizó, la teoría de -- probabilidades es a la estadística coma la teoría del valor a la economía. En esta parte demuestro la teoría del valor.

Para dar una idea de la naturaleza de la prueba he seguido algunos algoritmos de las pruebas de hipótesis en estadística.

A excepción de la demostración de la teoría del valor, los argumentos -- que se presentan a favor de la tesis central son lugares comunes en otras diciplinas y no reclamo en ningún momento originalidad alguna.

3. LA DEMOSTRACION

3.1. Definición:

La demostración es una operación metodológica mediante la cúal - se llega a conclusiones a partir de premisas de una forma rigurosa.
Se pueden hacer demostraciones inductivas, deductivas o transductivas conforme a ellos podemos encontrar tres tipos de demostraciones:

a) Demostración por inducción (Inductiva)

b) Demostración por substitución (Transductiva)

c) Demostración por deducción (Deductiva)

La demostración encuentra la validez o invalidez de una proposición. Una-proposición demostrada es válida con respecto a cierta teoría. La demostración nada tiene que ver con la verdad. Examinemos el siguiente caso:

Definición:	$a \circ b = 2b$	
Teorema:	$(a \circ b) \circ c = 2c$	
Demostración:	$a \circ b = 2b$	por definición
	$2b \circ c = 2c$	por substitución
	$2c = 2c$	

Ahora podemos preguntarnos si el teorema $(a \circ b) \circ c = 2c$ es verdadero, no-podemos dar respuesta a esta pregunta por la demostración que acabamos de hacer, lo que podemos afirmar es que el teorema en cuestión es válido, es decir no contradictorio con respecto a un conjunto de conocimientos dados; la validez es por tanto un problema de sintaxis, en tanto que la veracidad es un problema de semántica.

Zenón de Elea en sus aporías argumentó contra el atomismo y el fraccionamiento del tiempo y del espacio, buscó a través de la reducción a lo absurdo, contradicciones con respecto al movimiento. Se cuenta que en una ocasión Diógenes narraba los argumentos de Zenón y uno de sus dicípulos - afirmó "el movimiento se demuestra andando" lo que causó gran molestia al maestro. Los griegos distinguieron entre demostración y verificación.

Algunos conocimientos válidos han tenido que esperar largo tiempo -- para ser probados (o verificados), así sucedió con las geometrías no eu - clidianas que habiendo sido demostrados muchos de sus teoremas no podían- contrastarse contra el mundo "real", existiendo dicha geometría sólo como expresión del pensamiento. Los viajes del hombre fuera de la atmósfera -- dieron la oprtunidad de verificar varios de éstos teoremas.

3.2. CLASIFICACION.

A juicio de De Gortari la demostración es una operación metodológica en la que de un conjunto de conocimientos se infiere otro conocimiento, éstas inferencias pueden ser inductivas, deductivas, transductivas o la- combinación de éstas. La demostración es por lo tanto una relación entre un conocimiento nuevo y un conjunto de conocimientos de modo que un conocimiento demostrado dentro de una teoría es congruente con éstos (no contradictoria). "A través de la demostración se explican recíprocamente -- unos conocimientos con otros" (1)

Una vez comprendido lo que es la demostración para De Gortari podemos tratar su clasificación de las demostraciones:

---

(1) Gortari, Eli De. Lógica General, Grijalbo, México, D.F. 1977, p-236

a) Demostración Directa. Consiste en establecer la relación de necesidad lógica entre premisas (axiomas o postulados) y conclusiones. En algunos-casos puede decirse que lo demostrado se infiere de las premisas en forma corta, pero en otros casos se requiere de una cadena de razonamiento-bastante largos, en éste camino se utilizan tesis previamente demostra - das.

Euclides propuso que: "en todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, y la suma de los tres ángulos internos del triángulo es igual a dos rectos"
(los Elementos I.32)
La demostración esta basada en un teorema prevíamente demostrado y en -- las definiciones, postulados y nociones comunes establecidas al princi - pio de los Elementos que se refieren a puntos, líneas, rectas incidentes, triángulos retílineos, ángulos internos, ángulos externos, etc.
Dibujemos un triángulo cualquiera ABC, tal como aparece en la siguiente-figura 1.

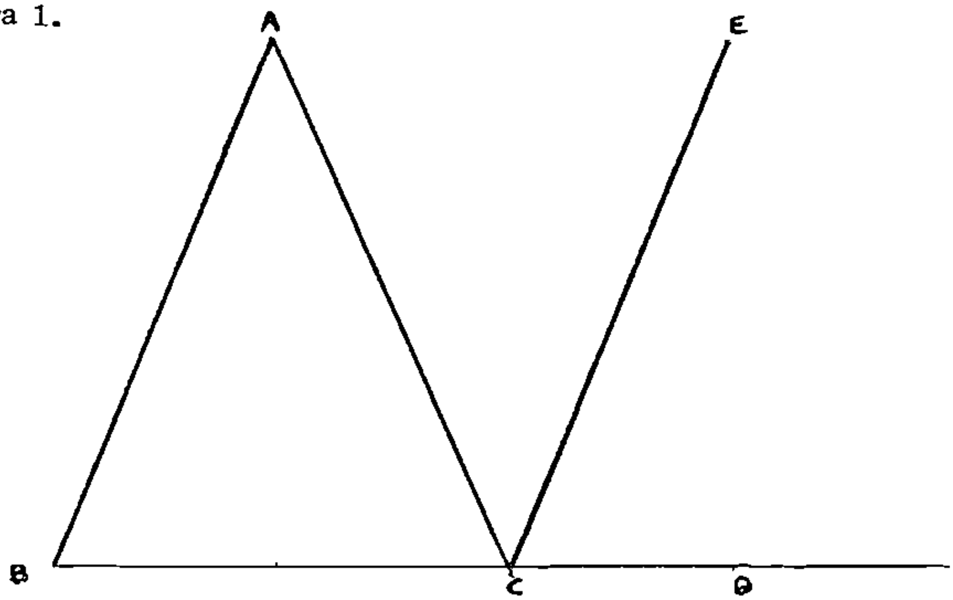


FIGURA 1

prolongamos uno de sus lados, de BC a BD. Tracemos la recta CE tal que - CE sea paralela a BA entonces de acuerdo al teorema que dice: "Una recta- que incide sobre dos rectas parelelas hace ángulos alternos iguales entre sí y el extremo igual al interno y opuesto y la suma de los internos del- mismo lado igaul a dos rectos" (los Elementos I.29).

Las rectas paralelas de que se habla quedarían de la siguiente forma:

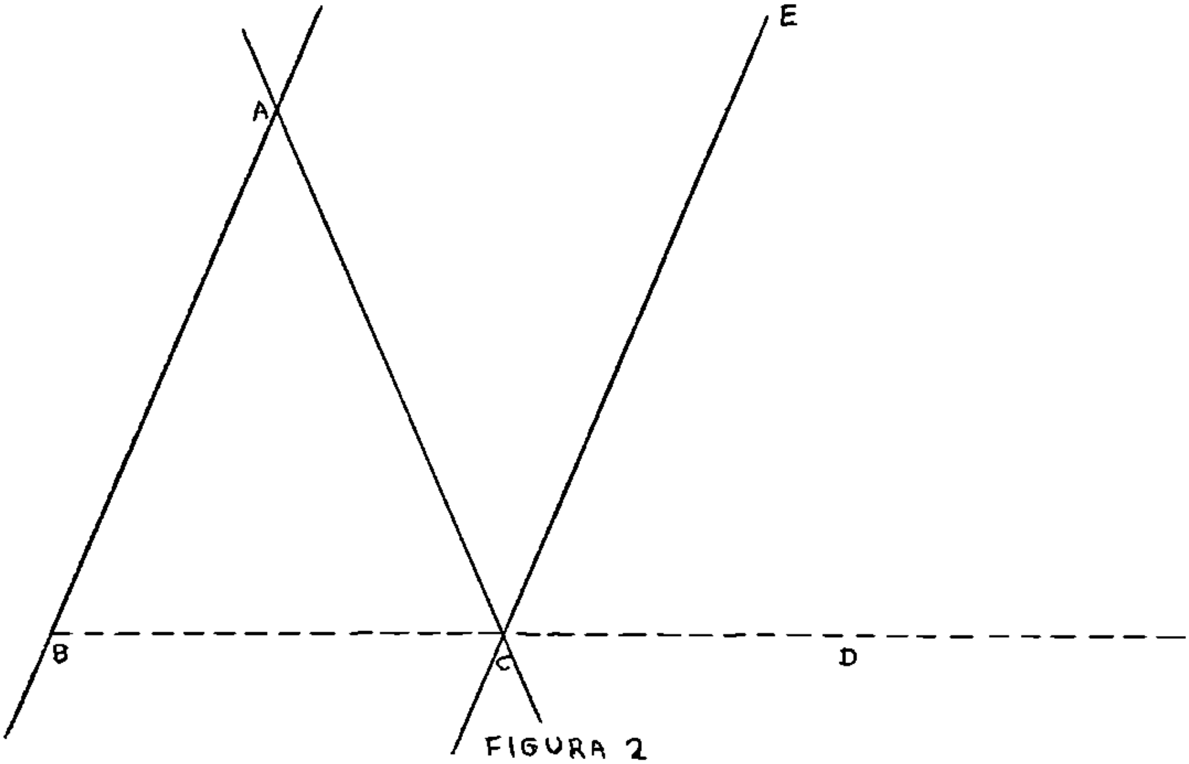


FIGURA 2

Podemos ahora deducir que los ańgulos alternos BAC y ACE son iguales en - tre sí; Así mismo conforme al teorema mencionado el ángulo externo ECD es igual al interno y opuesto ABC. Por lo tanto el ángulo ACD es igual a la- suma de BCA y ABC, quedando demostrado que el ángulo externo ACD es igual a la suma de los ángulos internos y opuestos BAC y ABC. Además la suma de los ángulos ACD y ACB es igual a dos rectos y ACB es el otro ángulo interno del triángulo por lo tanto la suma de los ángulos ACD y ACB es igual a la suma de los tres ángulos internos de un triángulo (ABC, BAC, y ACB) es igual a dos rectos.

b) Demostración por Recursión. Esta demostración se utiliza particularmente en la teoría de los números, es concocida por los matemáticos como inducción matemática y esta basada en los postulados de Peano. Para realizar una demostración por recursión se:

1) 'Prueba" para el caso en el que la variable vale 1

2) "Prueba" para el caso en que la variable vale k

3) Se encuentra la consistencia del caso en que la variable vale k+1.

Supongamos que queremos encontrar la suma de los números enteros y representamos su suma como:

$S= 1 + 2 + 3 \ldots. + (n-1) + n$

Esta suma la sumamos a sí misma sólo que inviertiendo el orden de sus términos

$$
\begin{array}{l}
S = 1 + 2 + 3 + \ldots. + (n-1) + n \\
S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots + 2 + 1 \\
\hline
2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots.+ (n+1)\ (n+1)
\end{array}
$$

En la última expresión aparece n veces el factor (n+1) así que:

$2S = n(n+1)$

y

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Es decir que la suma es el cociente del producto del último número por su secesor entre dos. La demostración quedaría:

sí $n = 1$

$$S = \frac{1\ (1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Sí $n = 2$

$S = 1+2 = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{2(3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Sí $n = k$

$S = 1+2+3+.....+k = \frac{k(k+1)}{2}$

Sí agregamos al primer miembro un término más tendremos

$S = 1+2+3+.....+ k +(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

Omitiendo el primer miembro y trabajando con el segundo

$$S = \frac{k\ (k+1)}{2} = (k+1)$$

$$S = \frac{k^2+k+2(k+1)}{2}$$

$$S = \frac{k^2+k+2k+2}{2}$$

$$S = \frac{(k+1)\ (k+2)}{2}$$

Que es el último término multiplicado por su sucesor y dividido entre dos

c) Demostración por integración. Este tipo de demostración se emplea cuando la tesis por demostrar se puede descomponer en varios casos particulares relativamente independientes. La descomposición en varias partes debe ser tal que esas partes formen la totalidad, se demuestra cada caso individualmente, por inducción completa quedará demostrado el teorema. Tomemos de Euclides el siguiente teorema:

'El ángulo inscrito en un círculo por un arco dado, es igual a la mitad del ángulo formado por ese mismo arco en el centro del círculo" (los Elementos III.20). En este caso existen tres posibilidades: cuando uno de los lados del ańgulo inscrito es diámetro del círculo. El segundo caso se da cuando el centro del círculo queda comprendido dentro del ángulo inscrito, y el tercer caso, se da cuando el centro del círculo es exterior al ángulo inscrito, las figuras siguientes muestran los casos mencionados

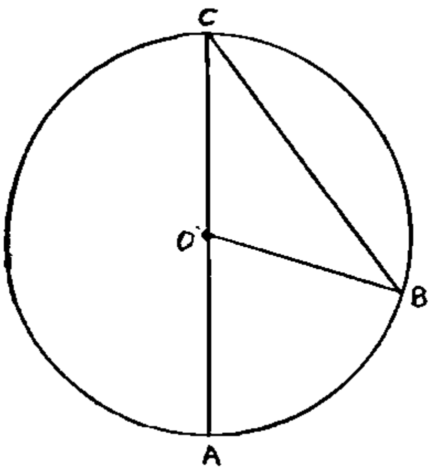


FIGURA 3

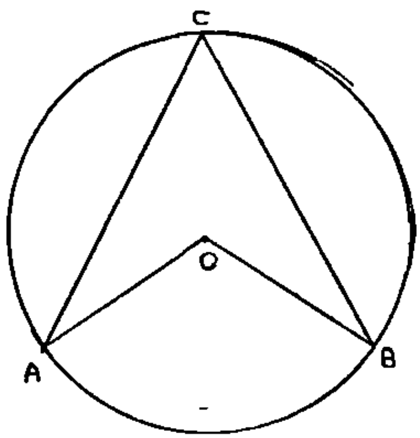


FIGURA 4

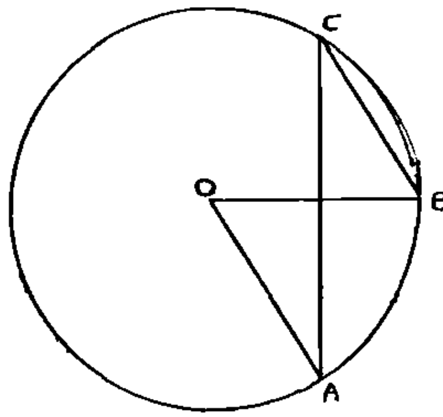


FIGURA 5

Para los tres casos el ángulo inscrito es ACB = β. y el ángulo formado en el centro es AOB = α.

Para el primer caso tenemos que el triángulo BOC es isóseles ya que sus lados OB y OC son radios del círculo. Entonces los ángulos ACB y OBC son iguales y como OCB = ACB = β, tenemos que OCB = OBC = β. El ángulo COB = $(180-2\beta)$, como AOB es su suplemento es igual a 2β. Pero AOB = α entonces AOB = α 2β que es el teorema por demostrar.

En el segundo caso el diámetro es CE como se muestra en las siguientes - figuras:

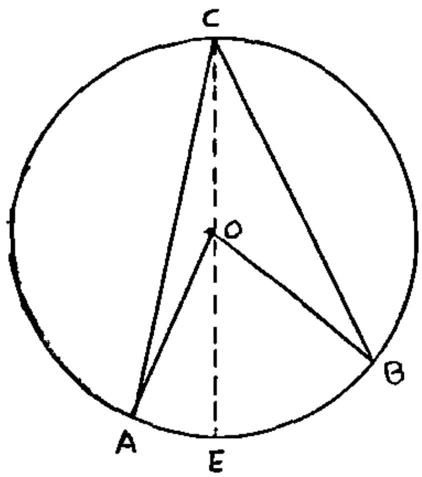


FIGURA 6

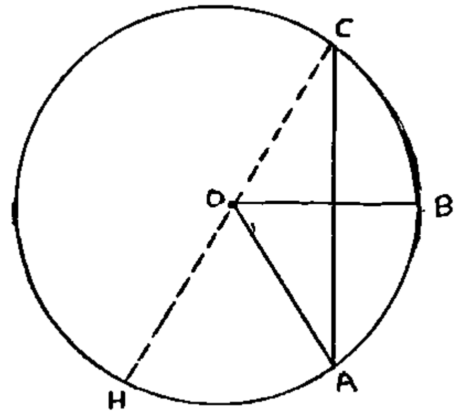


FIGURA 7

Repetimos el razonamiento anterior para demostrar que ángulo ACE = β' o-sea $\alpha' = 2\beta'$. Por el mismo razonamiento demostramos que ángulo EOB $= \alpha''$ es igual al ángulo ECB al que denominamos β'' es decir que $\alpha'' = 2\beta''$. Y-entonces tenemos que AOB y el ángulo ACB = ACE + ECB, y resulta que --- $\alpha' + \alpha'' = 2\ (\beta' + \beta'')$. Por otro lado $\alpha = \alpha' + \alpha''$ y $\beta = \beta' + \beta''$ entonces-$\alpha = 2\beta$ con lo que se demuestra el teorema para el caso en cuestión.

El tercer caso (que se muestra en la figura 7) se traza el diámetro CH, con el mismo razonamiento anterior podemos demostrar que el ángulo ---- HOB$= \alpha''' = 2$HCB $= 2\beta''$ es decir que $\alpha''' = 2\beta'''$. Después podemos de - mostrar que HOA $= \alpha^{IV} = 2$HCA $= 2\beta^{IV}$ de donde tenemos que $\alpha^{IV} = 2\beta^{IV} = 2\ (\beta''' - \beta^{IV})$. Por otro lado $\alpha''' - \alpha^{IV} = \alpha$ y $\beta''' - \beta^{IV} = \beta$ tenemos que-es el enunciado del teorema por demostrar.

Hasta aquí se han demostrado tres casos que son todos los posibles, por lo que utilizando la inferencia por inducción completa concluimos que -

el teorema es válido para todos los casos.

d) Demostración por reducción a lo absurdo. Entendemos por absurdo lo - formalmente contradictorio, y por tanto un concepto absurdo lleva a una incompatibilidad, "lo absurdo es aquello que viola las leyes de la lógica, un concepto absurdo es un concepto cuyos elementos son incompatibles. Un juicio absurdo es un juicio que contiene o implica una consecuencia, un razonamiento absurdo es un razonamiento formalmente falso y una demostración por reducción a lo absurdo es aquella que prueba la -- validez de una tesis por la falsedad de una consecuencia" (2)

En este caso se parte de una premisa falsa, una vez demostrado que ésta es falsa entonces se aplica el principio de tercero excluido, tomemos - el siguiente ejemplo.

"si dos ángulos de un tríangulo son iguales, los lados subtendidos bajo tales ángulos serán también iguales" (los Elementos I.6).

Para demostrar el teorema en cuestión tracemos la siguiente figura:

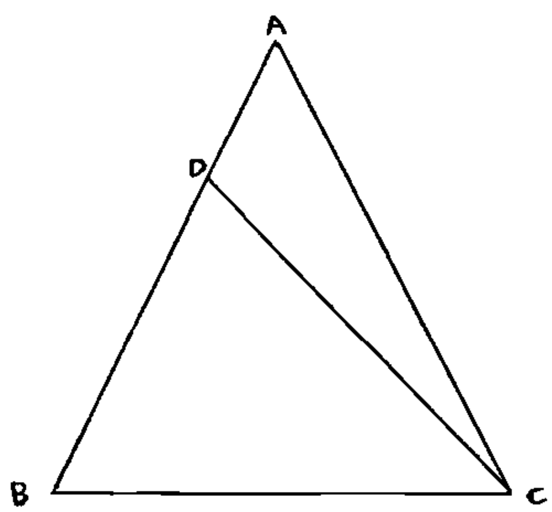


FIGURA 8

(2) Gortari Eli De, opus. cit. p-247

En el triángulo ABC tenemos que ABC = ACB, se propone que el lado AB=AC. Aceptamos que AB > AC, auxiliandonos del punto D de modo que BD = AC tracemos DC. Puesto que DB = AC y el lado BC es común; entonces AB = AC y - BC = CB y el ángulo DBC = ACB, sabemos que: "Sí dos ángulos tienen lados respectivamente iguales uno a uno e iguales los ángulos correspondientes comprendidos por tales rectas iguales, tendrán bases iguales entre sí y- será un triángulo igual al otro y serán iguales los ángulos restantes, cada uno con su correspondiente: con él que subtienda ángulos iguales" (los Elementos I.4).

Entonces AC = AB y los triángulos ABC Y ACB serán iguales, tenemos que - el lado menor es igual al mayor lo ques es absurdo, por lo que queda --- demostrado que sí dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados subtenidos bajo tales ángulos serán también iguales.

e) Demostración por Eliminación. En este caso de una tesis se desprenden varias "hipótesis" posibles incluyendo la tesis propuesta se van refutando cada una de las "hipótesis" de modo que sólo quede en pie la tesis -- por demostrar que no pudo ser refutada.

f) Demostración por Representación. Se presenta cuando los elementos del teorema son transcritos bíunivocamente como elementos de otro conjunto,- esto ocurre en la geometría analítica púes las tesis geométricas se transfieren a un lenguaje algebráico y la conclusión se toma como válida a -- la geometría, es decir, se hacen demostraciones algebráicas a proposiciones geométricas, por ejemplo:

Tesis: La circunferencia tiene como expresión analítica la ecuación

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

La demostración consiste en tomar un punto cualquiera en un cuadrante - cartesiano y un valor r cualquiera que será la magnitud del radio de la circunferencia. Sí al punto seleccionado se le asignan las coordenadas - (h,k) y se le toma como centro de la circunferencia, tal como se mues - tra en la figura No. 9

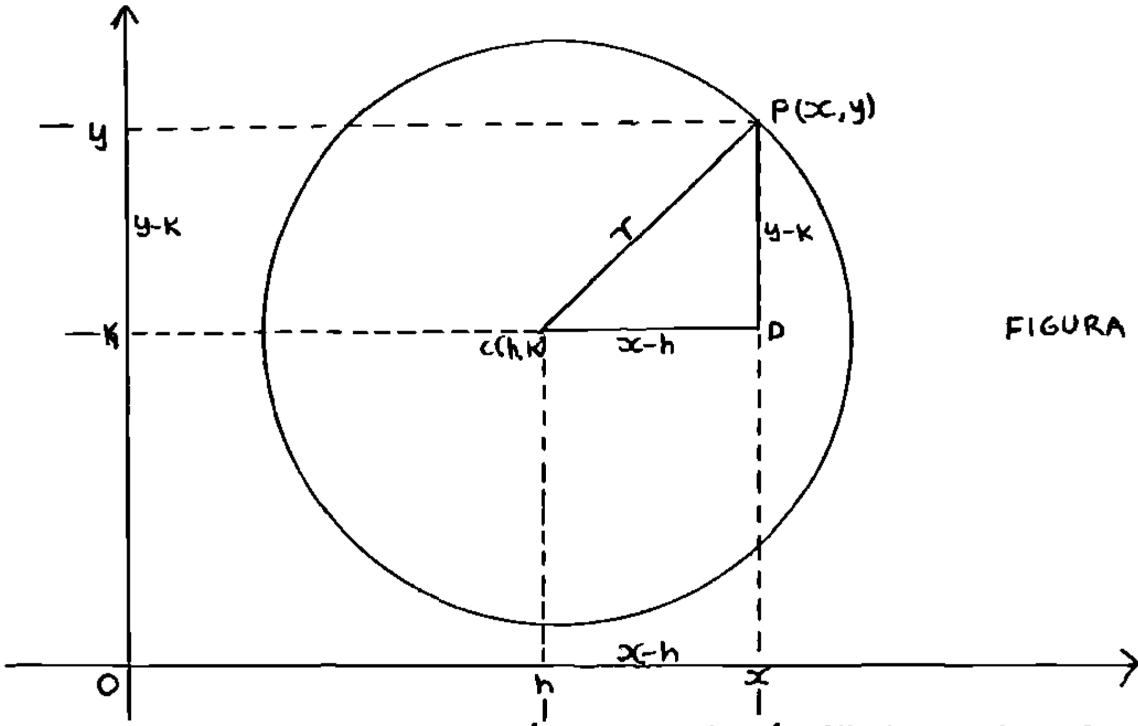


FIGURA 9

tomemos un punto p(x,y) que varía y su variación dibuja la circunferencia buscada, entonces la distancia entre el punto p(x,y) y el centro es constante y es el valor del radio r. Los catetos del triángulo CPD son- (x-h) y (y-k), por el teorema de pitágoras tenemos que $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, con lo que deduce algebráicamente que una circunferencia con centro en- (h,k) y radio r tiene por ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$.

3.3. INDUCCION

Peano realizó un intento por ordenar la "aritmética", propuso un sistema basado en postulados y reglas de operación que son los siguientes:

P.1 El cero es un número

P.2 El sucesor de cualquier número es un número

P.3 Dos números no tienen nunca el mismo sucesor

P.4 El cero no es sucesor de ningún número

P.5 Sí p es una propiedad tal que:

a) Cero tiene la propiedad p

b) Siempre que un número tiene la propiedad p, entonces el sucesor de n tiene también la propiedad p.

Las reglas del sistema son:

a) Para la suma

-) $n+0 = n$

-) $n+k' = (n+k)'$

b) Para la multiplicación:

-) $n\ (0) = 0$

-) $n\ (k') = nk+n$

Este sistema se propone para el sistema de los números naturales.

Estos postulados y estas reglas permiten establecer lo que se conoce como inducción matemática, para comprender ésto considere la siguiente serie:

$$S_n = \frac{1}{(1)\ (2)} + \frac{1}{(2)\ (3)} + \frac{1}{(3)\ (4)} + \ldots\ldots + \frac{1}{n\ (n+1)}$$

De donde se puede "inferir" la siguiente "hipótesis"

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Podemos probar para los cuatro primeros términos que la proposición se cumple

$$S_1 = \frac{1}{1\ (2)} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\ (2)} + \frac{1}{2\ (3)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1\ (2)} + \frac{1}{2\ (3)} + \frac{1}{3\ (4)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1\ (2)} + \frac{1}{2\ (3)} + \frac{1}{3\ (4)} + \frac{1}{4\ (5)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

Pero no podemos hacerlo para un número infinito de términos por lo que se recurre a la inducción matemática, que se conoce también como recursión matemática, cuyo principios dicen: Una proposición se cumple para todo número natural 'n' si se satisfacen las condiciones siguientes:

1) La proposición se cumple cuando 'n' = 1
2) Si la proposición se cumple para cualquier número natural n = k, entonces se cumple para el sucesor n = k+1.

Procedemos ahora a demostrar éste principio.

Se desea demostrar que sí se cumplen las dos condiciones antes mencionadas, entonces la proposición es válida para todo número natural n. En éste caso se puede manejar una demostración indirecta, si la proposición fuera falsa habría un número natural m el menor de todos para los cuales la proposición es falsa, por la primera condición $m \neq 1$, por lo que $m > 1$, de modo que m-1 es un número natural, pero m es el menor número para el cúal la proposición es falsa, entonces la proposición es válida para m-1, pero falsa para su sucesor (m-1) + 1 = m, lo que se contrapone a la segunda condición de ahí que la proposición debe ser válida para todo número natural.

Apliquemos ahora el principio ya demostrado a la serie antes mencionada.

Dada la serie

$$S_n = \frac{1}{1\ (2)} + \frac{1}{2\ (3)} + \frac{1}{3\ (4)} + \frac{1}{4\ (5)} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Se infiere la "hipótesis" que

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

La "hipótesis" es válida para n = 1, puesto que

$$S_1 = \frac{1}{1\ (2)} = \frac{1}{2}$$

Supongase que la "hipótesis" es válida para n = k esto es

$$S_k = \frac{1}{1\ (2)} + \frac{1}{2\ (3)} + \frac{1}{3\ (4)} + \ldots\ldots + \frac{1}{k\ (k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Donde k es cualquier número natural, ahora nos resta saber si la demostración se cumple para n = k+1, es decir

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$$

Pero

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)\ (k+2)}$$

Substituyendo el valor encontrado para S_k, se tiene que

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\ (k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\ (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

por ello se puede concluir que la "hipótesis"

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Es válida.

La inducción matemática se puede usar para descubrir conjenturas defec - tuosas, Supongamos que se estableció la siguiente "hipótesis" para la -- serie que estamos estudiando.

Se sabe que

$$S_n = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

La "hipótesis" es

Para n = 1 tenemos que $S_1 = 1/2$, puesto que se supone que la "hipótesis" es verdadera, entonces se cumple para k y

$$S_k = \frac{k + 1}{3k+ 1}$$

Faltará saber sí la "hipótesis" se cumple para n = k + 1, es decir

$$S_{k+1} = \frac{K + 2}{3k + 4}$$

Pero

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k + 1)(K + 2)} = \frac{k + 1}{3k+ 1} \cdot \frac{1}{(k + 1)\ (k + 2)}$$

$$S_{k+1} = \frac{k^3 + 4k^2 + 8k + 3}{(k+1)\ (k+2)\ (3k+1)}$$

Y esto no es lo que esperamos, por lo tanto la "hipótesis" no es válida- y entonces es falsa.

Apliquemos los principios de la inducción, el conocido Teorema de Newton.

5) Los coeficientes de los términos son simétricos; si n es par entonces existe un término central que sirve de referencia a la simetría.

6) El primero y último coeficiente es uno.

7) Si multiplicamos el exponente de a en un término por su coeficiente y este producto se divide entre el exponente de b más uno obtenemos el coeficiente del siguiente término.

Apliquemos los principios de la inducción al conocido teorema de Newton. Supongamos que tenemos un binomio que queremos elevar a una potencia determinada.

$(a + b)^n$

Donde n es entero y positivo, podemos calcular los primeros valores:

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a + b)^4 = (a+b)^2 (a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2) (a^2+2ab+b^2)$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Sí observamos cuidadosamente podemos llegar a las siguientes conclusiones:

1) El número de términos es igual al exponente del binomio más uno.
2) En el primer término el exponente de a es n y disminuye en una unidad por cada término que se desarrollará hasta llegar a cero
3) En el primer término el exponente de b es cero y aumenta en una unidad por cada término que se desarrolla hasta llegar a n.
4) La suma de los exponentes de a y b es siempre n para cualquier término.
5) Los coeficientes de los términos son simétricos, si n es par entonces existe un término central que sirve de referencia a la simetría.
6) El primero y último coeficiente es uno.
7) Sí multiplicamos el exponente de a en un término por su coeficiente y este producto se divide entre el exponente de b más uno obtenemos el coeficiente del siguiente término.

Con estas observaciones podemos proponer que el desarrollo del binomio - obedece a la siguiente fórmula:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n\ (n-1)}{1\ (2)} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)\ (n-2)}{1\ (2)\ (3)} a^{n-3} b^3 + \ldots$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1\ (2)\ (3)\ldots(r-1)} a^{n-r+1} b^{r-1} + \ldots + b^n$$

Si utilizamos factoriales tendremos el teorema del binomio

$$(a+b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)\ (n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-r\ 2)}{(r-1)\ !} a^{n-r+1} b^{r-1} + b^n$$

Donde el término de orden r es:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(r-1)\ !} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

Este teorema se puede 'probar' para n = 1,2,3 y 4 como se hizo con anterioridad. Tenemos entonces el teorema:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2\ !} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ (n-r+3)}{(r-2)\ !} a^{n-r+2} b^{r-2}$$

$$\frac{n(n-1)\ldots\ (n-r+2)}{(r-1)\ !} a^{n-r+1} b^{r-1} + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Si esto es cierto para k tenemos:

$$(a+b)^k = a^k + ka^{k-1} b + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-r+3)}{(r-2)\ !} a^{k-r+2} b^{r-2}$$

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)\ !} a^{k-r+1} b^{r-1} + \ldots + kab^{k-1} + b^k$$

Si multiplicamos por ab, tendremos:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + ka^kb + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)\,!}\, a^{k-r+2}b^{r-1} + \ldots + ab^k$$

$$a^kb + \frac{k(k-1)\ldots(k-r+3)}{(r-2)!}\, a^{k-r+2}b^{r-1} + \ldots + kab^k + b^k + 1$$

sumando estas dos expresiones:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + (k+1)a^kb + \ldots + \left[\frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)!} + \frac{k(k-1)\ldots(k-r+3)}{(r-2)!}\right]$$

$$+ a^{k-r+2}b^{r-1} + \ldots + (k+1)ab^k + b^{k+1}$$

El coeficiente del término k puede expresarse como:

$$\frac{k\,(k-1)\ldots(k-r+2)}{(r-1)\,!} + \frac{k\,(k-1)\ldots(k-r+3)}{(r-2)\,!}$$

$$= \frac{k\,(k-1)\ldots(k-r+3)}{(r-1)\,!}(k-r+2) + \frac{k(k-1)\ldots(k-r+3)}{(r-1)\,(r-2)\,!}(r-1)$$

$$= \frac{k\,(k-1)\ldots(k-r+3)}{(r-1)\,!}(k-r+2+r-1)$$

$$= \frac{k\,(k-1)\ldots(k-r+3)}{(r-1)\,!}(k+1)$$

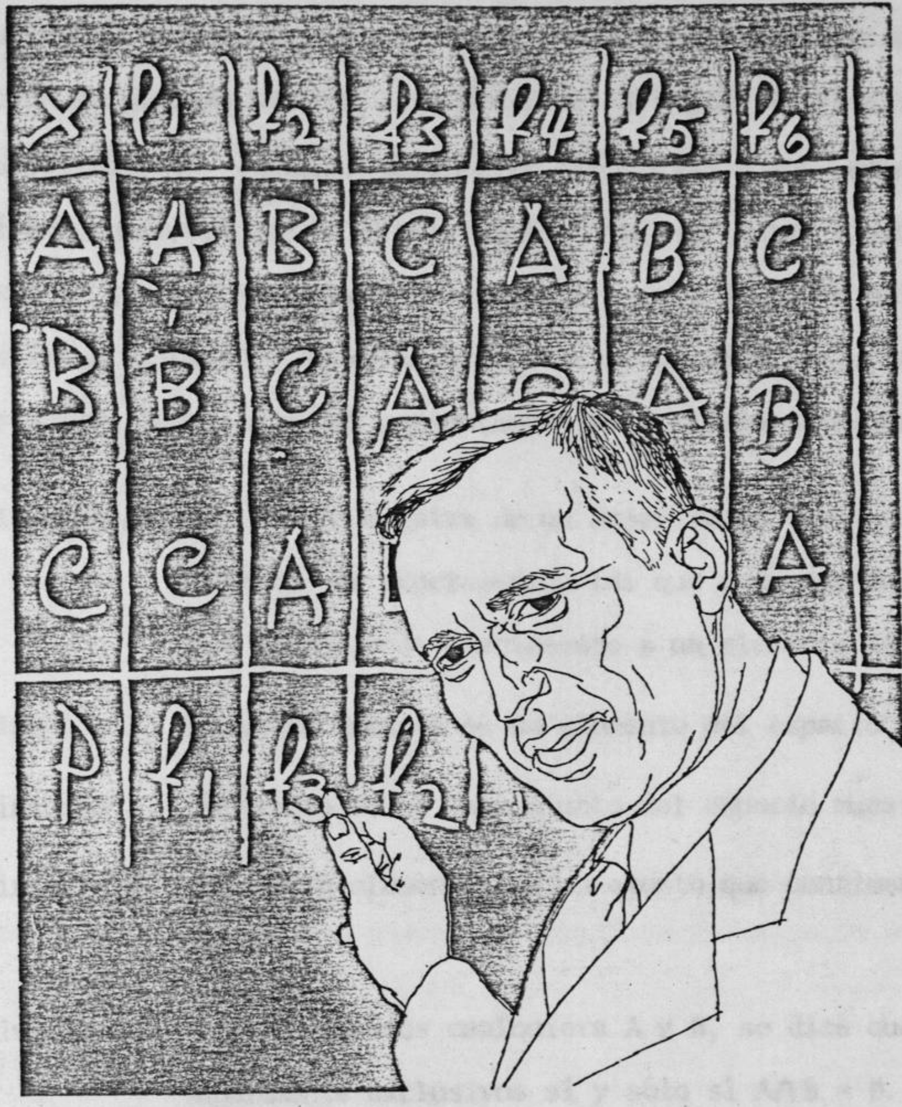
$$= \frac{(k+1)\,k\,(k-1)\ldots(k-r+3)}{(r-1)\,!}$$

Y finalmente tenemos que:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + (k+1)a^kb + \ldots + \frac{(k+1)k\ldots(k-r+3)}{(r-1)\,!}\, a^{k-r+2}b^{r-1} + \ldots$$

$$(k+1)ab^k + b^{k+1}$$

Si interpretamos este resultado entonces observamos que con respecto al teórema la diferencia se elimina al hacer $n = k+1$ lo cual significa que el teórema fué demostrado.



Andrei Nikolaevich Kolmogorov (nacido en 1903), matemático ruso que presentó en la monografía **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung** (1933), el primer tratamiento axiomático de la teoría de la probabilidad, basado en la teoría de la medida.

3.4 SISTEMAS DEMOSTRATIVOS.

La demostración es una operación metodólogica que adquiere una gran importancia en los llamados sistemas axiomáticos, presentaremos a continuación un pequeño sistema axiomático de la teoría de probabilidades. La probabilidad fué estudiada durante el siglo pasado por Laplace, Bayes, - Meré etc. pero fué Andrei Nicolaevich Kolmogorov quien sistematizó la -- teoría de las probabilidades presentando a esta en forma ordenada.
El sistema axiomático de Kolmogorov se compone de axiomas, teoremas y -- corolarios, que pueden ser presentados de la siguiente manera:

Definición 1. Un espacio muestra de un experimento es un conjunto de resultados de experimentos tal que cada uno de los resultados corresponde exactamente a un elemento del conjunto.

Definición 2. Un punto muestra es un elemento del espacio muestra.

Definición 3. Un evento es un subconjunto del espacio muestra.

Definición 4. Un evento elemental es un evento que contiene un sólo elemento.

Definición 5. Para dos eventos cualquiera A y B, se dice que A, y B, son mutuamente exclusivos sí y sólo sí $A \cap B = \emptyset$.

Definición 6. Para cualquier espacio muestra finito $S = [0_1, \ldots 0_n]$, la probabilidad de un evento E es un número p (E) tal que se cumplen los siguientes axiomas de probabilidad.

Axioma 1 $1 \leq P(E) \leq 0$

Axioma 2 $1 = P(S)$

Axioma 3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

sí A y B son eventos mutuamente exclusivos

Teorema 1 $P(\emptyset) = 0$

Demostración; Sí hacemos $A = \emptyset$, y $B=S$ tenemos:

$$\emptyset \cap S = \emptyset$$

tenemos por tanto dos conjuntos mutuamente exclusivos, S y $\emptyset$

$P(\emptyset) + P(S) = P(S)$

$P(S) = 1$ por el axioma 2

substituyendo

$P(\emptyset) + 1 = 1$

$P(\emptyset) = 1 - 1$

$P(\emptyset) = 0$

que es el teorema que se quiere demostrar.

Teorema 2. Sí A es un evento contenido en un espacio muestra finito tal-que la unión de n evento elemental $E_1, E_2, \ldots E_n$ es A entonces $P(A) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$.

Demostración; Sí A es un conjunto vacio, y apoyandonos en el teorema 1,-tenemos que:

$P(A) = P(\emptyset) = 0$

Ahora supongamos que A no es el conjunto vació sino que es la unión de -n evento elemental diferentes $E_1, E_2, \ldots E_n$.

Sí $n = 1$ entonces

$P(A) = P(E_1)$

sí $n = 2$ entonces

$P(A) = P(E_1 \cup E_2)$ por el axioma 3 tenemos que:

$P(A) = P(E_1) + P(E_2)$.

Sí $n = 3$ entonces:

$P(A) = P(E_1 U\ E_2 U\ E_3)$, agrupados convenientemente y aplicando el teorema 3 tenemos:

$P(A) = P(E_1 U\ E_2 U\ E_3)$

$= P(E_1 U\ E_2)\ U\ E_3$

$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$

Se puede seguir aplicando los pasos antes mencionados para llegar a:

$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n)$

se puede demostrar por inducción matemática que

$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_k) + \ldots + P(E_n)$

Ahora tenemos un E_{n+1} que es excluyente del resto de las E_i donde E_i es- un evento cualquiera.

$P(A) = P(E_1\ U\ E_2\ U \ldots E_n\ U\ E_{n+1})$

agrupando

$P(A) = P(E_1\ U\ E_2\ U\ E_n)\ U\ (E_{n+1})$ por el axioma 3

$P(A) = P(E_1\ U\ E_2\ U \ldots E_n)\ U\ P(E_{n+1})$

Encontramos la probabilidad para la primera expresión.

$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) + P(E_{n+1})$

por lo que queda demostrado el teorema.

Definición 7. El complemnto $\bar{E}$ de un evento E es el conjunto de todos -- los elementos del espacio muestra S que no son elementos- de E.

Teorema 3. Dos eventos A y B son complentarios si y sólo sí A y B son - mutuamente exclusivos y la unión de A con B es el espacio -- muestra S.

Demostración: Puesto que A y B son excluyentes entonces;

$A \cap B = \emptyset$ además $A \cup B = S$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ por el axioma 3

$P(A \cup B) = P(S)$

$P(A) + P(B) = 1$ que es la expresión del teorema.

Teorema 4 $P(A) = 1- P(A)$

Demostración; puesto que dos eventos complementarios son mutuamente exclusivos.

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ por axioma 3

pero $A \cup \bar{A} = S$

$P(S) = P(A) + P(\bar{A})$

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$ por el axioma 2

$P(A) = 1-P(\bar{A})$ que es el teorema a demostrar

Teorema 5 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración;

$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$

$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

por tanto

$P(A \cup B) = P(A \cup (\bar{A} \cap B))$

$\qquad = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

por otro lado

$P(B) = P(A \cap B) \cup P(\bar{A} \cap B))$

$\qquad = P(A \cap B) \cup P(\bar{A} \cap B)$

$P(B) - P(A \cap B) = P(\bar{A} \cap B)$

Substituyendo $P(\bar{A} \cap B)$ en $P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

tenemos que

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definición 8; Para dos eventos cualesquiera A y B tales que

$$P(B) \neq 0 \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición 9; A y B son eventos independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Teorema 6 Sí A y B son dos eventos independientes y $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$ entonces $P(A/B) = P(A)$ Y $P(B/A) = P(B)$

Demostración; Por la definición 8 tenemos que

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dado que A y B son eventos independientes

$P(A \cap B) = P(A) \quad P(B)$

de modo que

$$P(A/B) = \frac{P(A) \ P(B)}{P(B)}$$

$P(A/B) = P(A)$

ahora

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Puesto que A y B son eventos independientes

$P\ (B/A) = P(A)\ P(B)$

de modo que

$$P(B/A) = \frac{P(A) \quad P(B)}{P(A)}$$

$$P(B/A) = P(B)$$

Teorema 7 Si A y B son eventos independientes entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \quad P(B)$$

Demostración; por el teorema 5 tenemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

además por la definición 9 tenemos que

$$P(A \cap B) = P(A) \quad P(B)$$

entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \quad P(B)$$

Teorema 8 Sí A y B son eventos independientes entonces $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son eventos independientes

Demostración; Sabemos que

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

por el teorema 4 tenemos que

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

entonces

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [\, P(A) + P(B) - P(A) \quad P(B)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \quad P(B) \\ &= [(1 - P(A)] \quad [\, 1 - P(B)] \\ &= P(\bar{A}) \quad P(\bar{B}) \end{aligned}$$

de modo que $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes

Definición 10 Una colección de subconjuntos de un conjunto dado es una partición sí y sólo sí cada uno de los elementos del conjunto original esta incluido en uno y sólo uno de los -- subconjuntos.

Definición 11 Los eventos A_1, A_2, ... A_n son mutuamente exclusivos sí y sólo sí dos cualquiera de ellos son mutuamente exclusivos.

Teorema 9 Sí el evento E ha sido separado en n subconjuntos E_1, E_2, ... E_n entonces

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$$

Este teorema se puede demostrar de igual forma que el teorema 2.

Teorema 10 Si un conjunto de eventos Q_1, Q_2, ... Q_n son particiones de un conjunto Q, y E es un subconjunto de Q entonces

$$P(E) = P(Q_1)\ P(E/Q_1) + P(Q_2)\ P(E/Q_2) + \dots + P(Q_n)\ P(E/Q_n)$$

Demostración Dado que E es un subconjunto de Q la partición Q_1, Q_2,... Q_n determina una partición de E es decir

$E \subset Q$

$Q_1 \cap E = E_1$

$Q_2 \cap E = E_2$

$Q_n \cap E = E_n$

Por tanto E_1, E_2, ... E_n es una partición de E

$P(E_1) = P(Q_1 \cap E)$

por definición de probabilidad condicional

$P(Q_1 \cap E) = P(Q_1)\ P(E/Q_1)$

en general

$P(E_k) = P(Q_k)\ P(E/Q_k)$ para $k = 1,2,\ldots n$.

Por el teorema 9

$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$

substituyendo para $P(E_k)$

$P(E) = P(Q_1)\ P(E/Q_1) + P(Q_2)\ P(E/Q_2) + \ldots + P(QN)\ P(E/Q_n)$

o de otra forma

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(Q_k)\ P(E/Q_k)$$

Teorema 11 (Teorema de Bayes), sí los eventos Q_1, Q_2, ... Q_n forman - una partición de Q y E es un subconjunto de Q, entonces.

$$P(Q_i/E) = \frac{P(Q_1)\ \ P(E/Q_i)}{P(Q_1)\ \ P(E/Q_1) + \ldots + P(Q_n)\ P(E/Q_n)}$$

Demostración: Por la definición de probabilidad condicional para dos - eventos cualesquiera E y Q_i

$P(E)\ P(Q_i/E) = P(Q_i)\ P(E/Q_i)$

de modo que

$$P(Q_i/E) = \frac{P(Q_i)\ P(E/Q_i)}{P(E)}$$

por el teorema 10 y substituyendo en P(E) tenemos que

$$P(Q_i/E) = \frac{P(Q_i)\ \ P(E/Q_i)}{P(Q_i)\ \ P(E/Q_1) + \ldots + P(Q_n)\ \ P(E/Q_n)}$$

eso significa que

$$P(Q_i/E) = \frac{P(Q_i)\ P(E/Q_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(Q_k)\ P(E/Q_k)}$$

3.5 LA DEMOSTRACION EN GEOMETRIA.

Veremos ahora como funciona la demostración en diversos campos del saber. He seleccionado la geometría por ser uno de los campos en que la demostración se desarrolló. Pues a la estadística con frecuencia se le asocia exclusivamente con la inferencia y con la prueba de hipótesis como lo explicaremos en el siguiente capítulo, y a la economía política por dos razones; porque la economía política estaba hasta hace poco ajena a la demostración y porque el ejemplo que uso es producto de un prolongado trabajo personal.

En geometría escogí el teorema de Pitágoras y presento diversas demostraciones con el objeto de dejar claro que para un mismo teorema existen diferentes demostraciones.

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

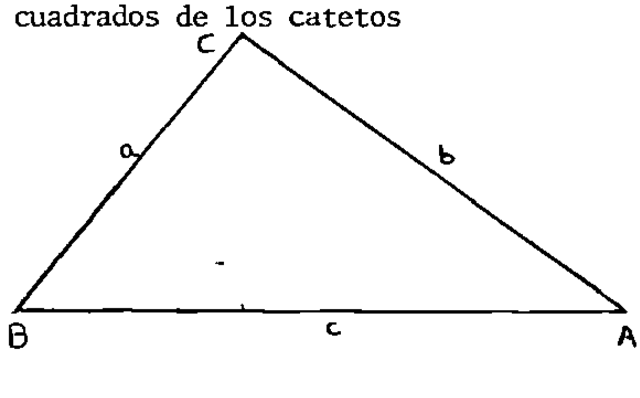


FIGURA 10

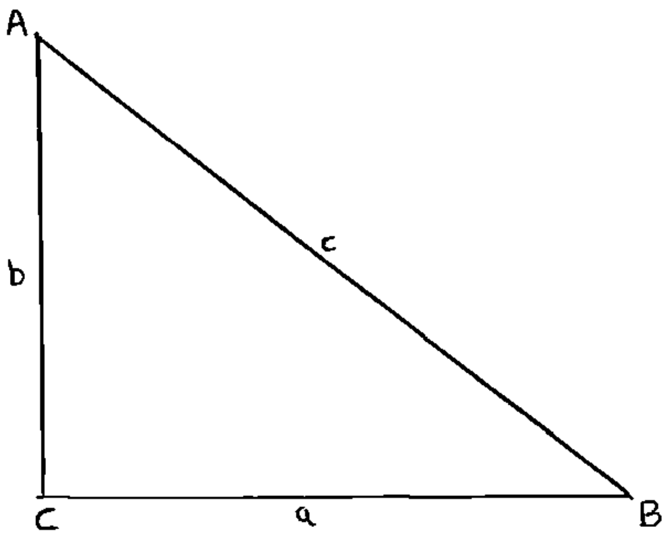


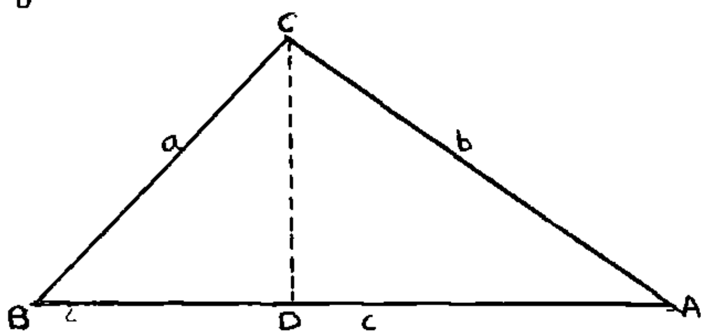
FIGURA 10-b

"hipótesis": ABC es un triángulo rectángulo, sea C el ángulo recto y AB- la hipótenusa, por comodidad adoptaremos la notación siguiente:

AB = c BC = a AC = b

debemos demostrar que

$c^2 = a^2 + b^2$



dibujemos la altura desde el vértice C respecto al lado AB, y denotemos- por D el pie de esta altura, usemos x, e, y como las longitudes BD y AD- respectivamente, entonces demostraremos que:

$\Delta ABC \sim CBD$

por el postulado que dice dos ángulos de un triángulo son congruentes -- con dos ángulos de otro triángulo estos triángulos son semejantes

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ por el mismo postulado ya mencionado, de ahí tenemos que- los lados correspondientes son proporcionales y, en particular

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} \quad y \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

sustituyendo en éstas proporciones las letras minúsculas tendremos que:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{x} \quad y \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{y}$$

de modo que

$$a^2 = cx \quad y \quad b^2 = cy$$

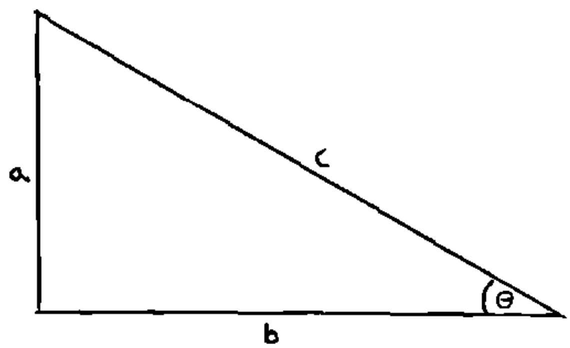
sumando éstas igualdades y sabiendo que $x + y = c$

$$a^2 + b^2 = cx + cy = c(x+y) = c^2$$

o sea

$a^2 + b^2 = c^2$ que es el enunciado del teorema por demostrar.

Otra forma de demostrar el teorema de Pitagóras es utilizando las iden - tidades trigonométricas, para ello nos auxiliaremos de la siguiente figu ra



Por definición $\text{sen } \theta = \frac{a}{c}$

Por definición $\cos \theta = \frac{b}{c}$

Por conocimiento $\text{sen } \theta + \cos \theta = 1$

se trata de demostrar que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

por lo tanto

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

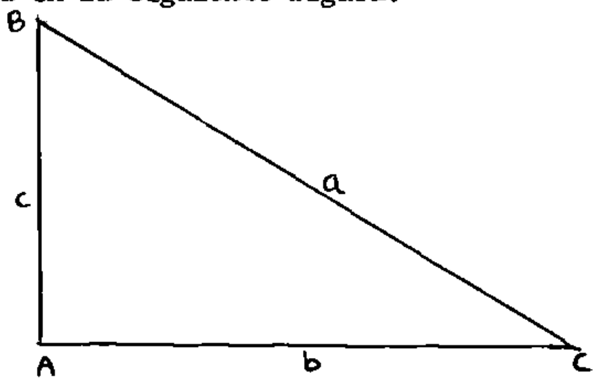
entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

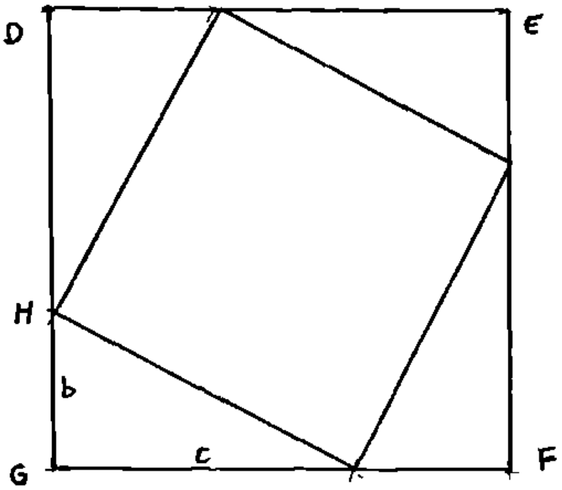
que es precisamente lo que se quiere demostrar

Otra demostración muy común es la siguiente:

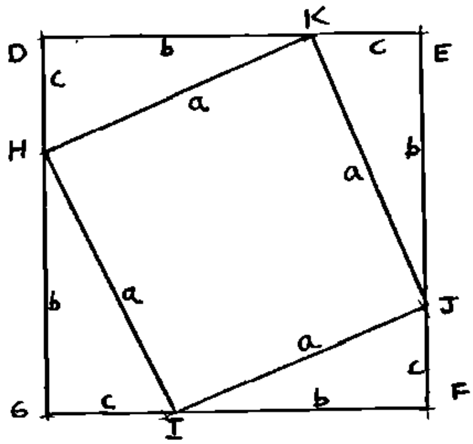
Tomemos un triángulo rectángulo ABC donde BCA = 90° y denotemos las longitudes de los segmentos por BC, CA, y AB por a, b, c, respectivamente - como se muestra en la siguiente figura:



Ahora formamos un cuadrado de lado b + c y denotemoslo como DEFG, tal como se muestra en la siguiente figura



localizemos H en el segmento GD tal que GH = b y HD = c, igualmente loca lizemos un punto I tal que GI = c e IF = c quedando el triángulo original como GHI, si continuamos el procedimiento tendremos el siguiente cuadro



Observemos que el triángulo GIH es congruente con el triángulo ABC puesto que

HIG = 90° y BAC = 90° de donde HGI = BAC

GH = b y AC = b de donde GH = AC

GI = c y AB = c de donde GI = AB

de ahí por el postulado que dice: sí dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes con dos de los lados y el -

ángulo correspondiente de otro triángulo, entonces los triángulos son -- congruentes, por lo tanto

GIH = ABC

puesto que FJ = c y JE = b y además KE = c y KD = b del mismo modo en -- que se demuestra que los triángulos ABC y GIH son congruentes se puede - demostrar que los triángulos ABC, GIH, FJI, EKJ, y DHK son congruentes - por lo tanto su hipótenusa mide a.

Además el ángulo HIJ = 90°, puesto que GHI y FJI son congruentes de donde IHG = JIF y HIG = IJF. Además sabemos que IHG = HIG = 90° de donde -- HIG = JIF = 90°, por lo tanto HIJ = 90°.

Del mismo modo podemos ver que los ángulos IJK, JKH, KHI, miden 90°, de ésto y del hecho que HK = KJ = JI = IH = a deducimos que IHKJ es un cuadrado.

Además tenemos que el área del cuadrado IHKJ es igual al área del cuadrado DEFG menos el área de los triángulos GIH, FJI, EKJ, DHK y que:

El área del cuadrado IHKJ es igual al área de los triángulos GIH, FJI, - EKJ, DHK y que:

El área del cuadrado HIJK = a^2

El área del cuadrado DEFG = $(b + c)^2$

El área del triángulo GHI = $\frac{bc}{2}$

El área del triángulo EKL = $\frac{bc}{2}$

El área del triángulo DHK = $\frac{bc}{2}$

Sabemos que $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$

tenemos que:

$$a^2 = (b + c)^2 - \frac{bc}{2} - \frac{bc}{2} - \frac{bc}{2} - \frac{bc}{2}$$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc$$

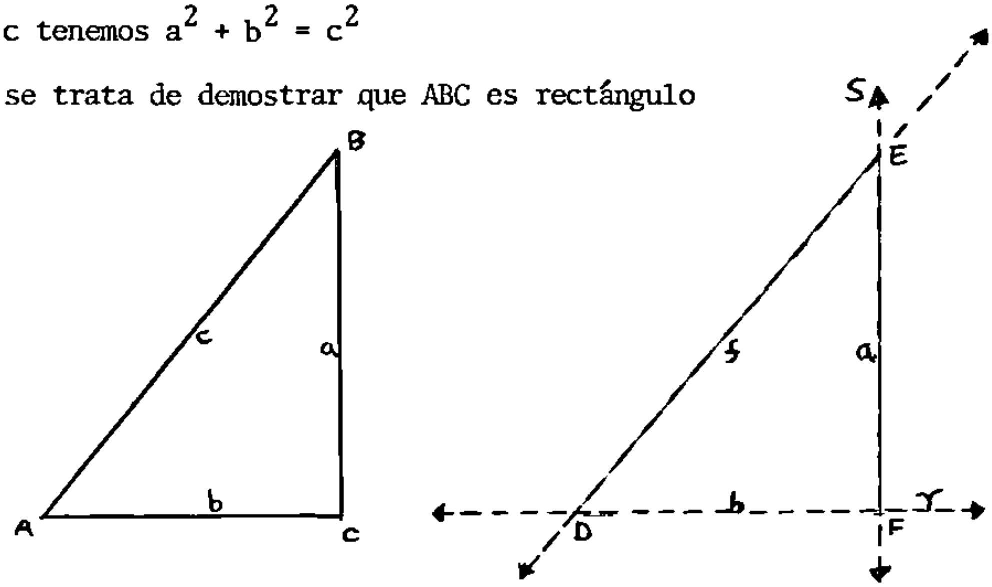
$$a^2 = b^2 + c^2$$

que es precisamente el teorema de pitágoras.

Un teorema que esta relacionado con el teorema de Pitágoras dice: Sí la- suma de los cuadrados de dos lados es un triángulo igual al cuadrado del tercer lado, entonces el triángulo es rectángulo.

"hipótesis": En el triángulo ABC, cuyos lados tienen longitudes a, b, y- c tenemos $a^2 + b^2 = c^2$

se trata de demostrar que ABC es rectángulo



dibujemos dos rectas perpendiculares S y R que se intersectan en el punto F sobre la recta r, coloquemos un punto D tal que DF = b y sobre la - recta s coloquemos el punto E tal que EF = a tracemos el segmento DE cuya longitud es f por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + b^2 = f^2$ y por "hipótesis" tenemos que:

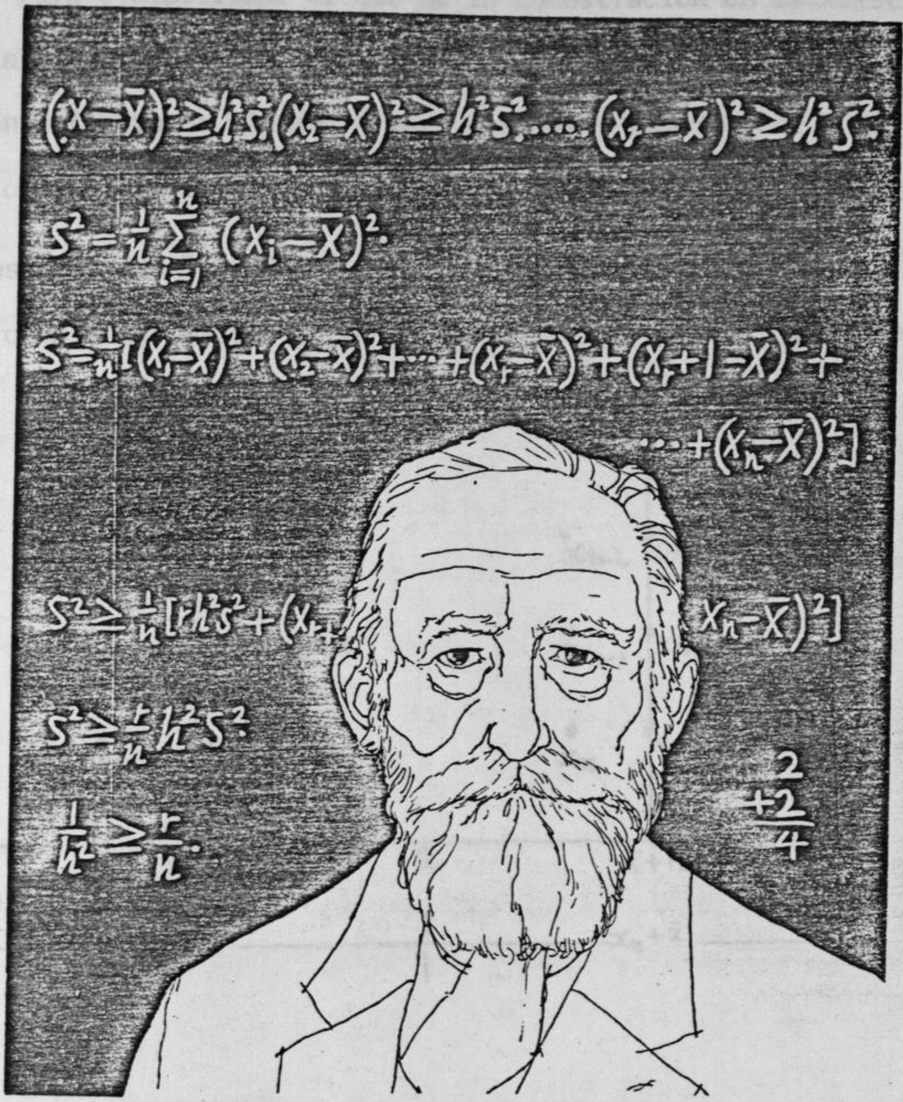
$a^2 + b^2 = c^2$

de donde

$f^2 = c^2$

entonces como f y c son números positivos por el postulado que dice: Sí- tres lados de un triángulo son semejantes entonces estos dos triángulos- son semejantes, ABC = DEF de donde sus águlos correspondientes son con - gruentes, así que c = f

pero f es un ángulo recto, entonces C es un ángulo recto, de donde ABC - es recto.

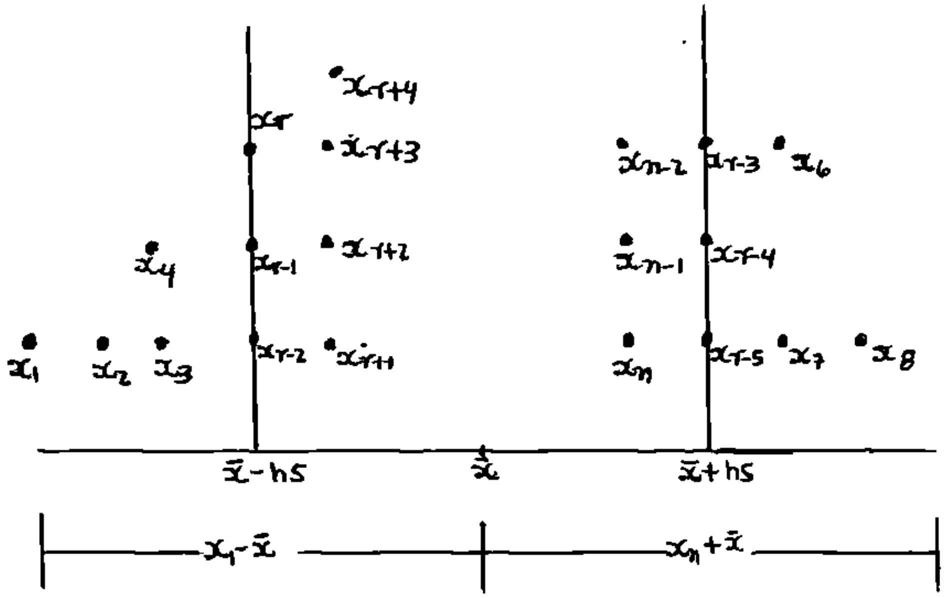


Pafnuti Lvovich Chebyshev (1821-1894). Contribuyó a la teoría de los números primos, a la probabilidad, al análisis matemático y a la matemática aplicada. En la teoría de la probabilidad, la desigualdad de Chebyshev, debido a su generalidad, resulta ser una herramienta teórica muy importante. Esta desigualdad se aplica en cualquier distribución con medias y variancias finitas.

3.6 DEMOSTRACION EN ESTADISTICA

Para ejemplificar el uso de la demostración en estadística tomaremos la demostración del teorema de Chebyshev que dice: "Para cualquier conjunto finito de números y para cualquier número real h tal que $h > 1$, por lo menos la fracción $1 - \frac{1}{h^2}$ de esos números cae dentro de h desviaciones estándar de la medida"

Para comprender éste teorema lo ilustraremos con la siguiente figura.



La desviación estándar tiene ciertas propiedades matemáticas que le dan ventaja sobre otras medidas de dispersión. Dadas la medida aritmética y la desviación estándar de un conjunto de datos, se puede garantizar que al menos un cierto porcentaje de los datos cae dentro de digamos, 2 desviaciones estándar de la media. Se puede garantizar que por lo menos --

75% de los datos estan entre 2 desviaciones estándar de la medida, y que 7/8 (87.5%) están entre 3 desviaciones estándar de la media. Sí los datos tienen propiedades adicionales (como normalidad), es posible prede - cir que un alto porcentaje de los datos caerá dentro de dos desviaciones estándar de la medida (95%), o bien tres desviaciones estándar de la media (99.7%).

Sea $\bar{x}$ media y s la desviación estándar de los números. Se hace la grá - fica de los números en un diágrama de frecuencia de puntos y se dibujan- segmentos de recta verticales que pasen por los puntos, cuyas coordena - das en el eje horizontal son $\bar{x}$ - hs y $\bar{x}$ + hs. Si todos los números están dentro del intervalo de $\bar{x}$ - hs a $\bar{x}$ + hs y puesto que h $\geq$ 1, seguramente- la fracción $1 - \frac{1}{h^2}$ de esos números está dentro del intervalo, si esto -- es así el teorema estará demostrado.

Supongamos que hay r números que no están dentro del intervalo, asigne - mos subíndices a los números, de tal forma que aquellos números cuyos -- subíndices sean menores que o iguales a r no esten dentro del intervalo- y los que tengan subíndices mayores que r, sí lo estén, así los números- $x_1, x_2, \ldots x_r$, no están dentro del intervalo, en tanto que los números, - $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n$ sí lo están.

La distancia del punto 1 al señalado como medio es $|x_1 - \bar{x}|$ tenemos que- $|x_i - \bar{x}| \geq hs$. Entonces tenemos que desde i=1 hasta i=r $|x_1 - \bar{x}| \geq hs$, esto es $|x_1 - \bar{x}| \geq hs$, $|x_2 - \bar{x}| \geq hs \ldots |x_r - \bar{x}| \geq hs$. Dado que h y s son- ambos positivos y sus cuadrados son positivos, los signos del valor ab - soluto se pueden cancelar, si ambos miembros se elevan al cuadrado. Por- lo tanto $(x_1 - \bar{x})^2 \geq h^2s^2$, $(x_2 - \bar{x})^2 \geq h^2s^2, \ldots (x_r - \bar{x})^2 \geq h^2s^2$

Por definición

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Y ya que $r < n$

$$S^2 = \frac{1}{N} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_r - \bar{x})^2 + (x_{r+1} - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \right]$$

tenemos que

$$\sum_{J=r+1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 \geqslant 0$$

Puesto que $h^2\ S^2$ es menor o igual a cada uno de los primeros r sumandos- de la expresión anterior se obtiene la siguiente desigualdad

$$h^2\ s^2 \leqslant (x_i = \bar{x})^2 \ \forall_{i=1}^{r} \ x_i$$

$$S^2 \geqslant \frac{1}{n} \left[r\ h^2 s^2 + (x_{r+1} - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \right]$$

$$R\ h^2 s^2 \quad \sum_{i=1}^{r} (x_i - \bar{x})^2 \forall\ i$$

Puesto que el cuadrado de cualquier número real es mayor o igual a cero, podemos remplazar los últimos n-r términos y obtendremos

$$s^2 \geqslant \frac{r}{n} h^2 s^2$$

simplificando

$$\frac{1}{h^2} \geqslant \frac{r}{n}$$

Pero $\frac{r}{n}$ es la fracción de número que no está dentro del intervalo entonces la fracción es menor que o igual a $\frac{1}{h^2}$. Multiplicando por -1 esta -- última desigualdad, se tiene $-\frac{1}{h^2} \leqslant -\frac{r}{n}$

Sumando 1 a cada uno de los miembros de la desigualdad, se tiene

$$1 - \frac{1}{h^2} \leq \frac{n}{n} - \frac{r}{n}$$

Puesto que $\frac{n}{n} - \frac{r}{n}$ es la fracción de los números que están dentro del intervalo, $1-\frac{1}{h^2}$ es menor o igual a esta fracción, que es lo que enuncia el teorema.

3.7 DEMOSTRACION EN LA ECONOMIA POLITICA

LA ECONOMIA POLITICA COMO CIENCIA de las relaciones sociales de producción se enfrenta al problema de la VERIFICACIÓN de sus conocimientos. Este no es un problema teórico sino práctico, pues es en la práctica donde el hombre PRUEBA la terrenalidad de su pensamiento. Cuando se argumenta o se refuta teóricamente se mueve el pensamiento en el terreno teórico (aquí podemos ver que la práctica teórica es una falsa salida).

En determinadas ciencias cuyo grado de abstracción es muy elevado (por ejemplo, las matemáticas) se recurre a la "demostración"; ésta no es más que una serie de inferencias lógicas que encuentran una conexión lógica entre premisas y conclusiones, donde en general funcionan internamente los principios canónicos de la lógica. Afirmamos que un "jucio demostrado no necesariamente es verdadero", aludiendo al concepto de verdad como relación entre teoría y práctica.

Un problema central de toda teoría económica es y ha sido el problema de la determinación del valor; aquí es donde se puede captar la posición ideológica de la teoría económica. La teoría marxista ha tomado de - la economía clásica inglesa la elaboración y desarrollo que en esta escuela dio a la teoría valor-trabajo.

No sólo existe la teoría de valor-trabajo sino que existen múltiples teorías del valor. Algunas de ellas encuentran la explicación del valor - en la rareza, la utilidad, los costos, etcétera. En términos generales, - podemos agrupar las teorías del valor en dos grandes grupos: las teorías- objetivas y las teorías subjetivas.

Los fundamentos de esta demostración han sido tomados de El capital- de Carlos Marx, particularmente del tomo I, en el que encontramos lo siguiente: En el capitalismo los productos se convierten en mercancía y éstas desdoblan su valor en valor de uso y valor de cambio. El primero, es- la capacidad que tiene un producto de satisfacer una necesidad y que forma la condición necesaria para que una "cosa" sea mercancía. Por otro lado, tenemos el valor de cambio, que es el valor que adquieren los productos al ser intercambiados, y es el paso de la forma relativa del valor a- la forma equivalente. En general, decimos que para que dos mercancías se- cambien se requiere que estas mercancías posean:

1) Distinto valor de uso.
2) Igual valor de cambio.

La igualdad del valor en el cambio se sintetiza en la ley del valor- y la distinción se explica en el doble carácter del trabajo (abstracto y- concreto) materializado en la mercancía.

Podemos descomponer el valor de una mercancía, con fines analíticos, en:

$$W = C + V + P \quad [1]$$

$$W = f(C,V,P,) \quad [2]$$

Donde:

W es el valor,

C es el valor de los medios de producción incorporados a la mercancía (capital constante),

V es el valor de la fuerza de trabajo al trabajador (capital variable)

y

P es la masa de plusvalía (valor de plusproducto)

En el mercado capitalista existen múltiples mercancías debido a la gran división del trabajo, es decir, existe una gran variedad de valores de uso y, por tanto, gran variedad de trabajo concreto. Esto se puede representar de la siguiente manera:

$$W = (w_1, w_2, w_3, \ldots w_i \ldots w_n) \quad [3]$$

Donde:

w_i es una mercancía "i" cualquiera.

y denominamos producto social global:

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots w_k + \ldots w_n \quad [4]$$

$$W = P.S.G. = \sum_{i=1}^{n} w_i \quad [5]$$

Si analizamos la jornada de trabajo, podemos dividir el trabajo en necesario y adicional. El primero es el tiempo de trabajo que toma un trabajador para crear un valor equivalente, valor que recibe como salario --

(valor de cambio de la mercancía-trabajo). Las restantes horas de la jornada de trabajo las denominamos trabajo adicional:

$$J = Tn + Ta \qquad [6]$$

Donde:

J es el tiempo que comprende la jornada de trabajo,

Tn es el tiempo de trabajo necesario y

Ta es el tiempo de trabajo adicional

A la materialización del trabajo empleado durante el tiempo necesario lo denominaremos "producto", y al producto creado durante el tiempo adicional lo denominaremos "plusproducto".

Con el desarrollo de las formas del valor surge una mercancía universal que es el dinero. El desarrollo de éste nos permite valorizar la producción (desarrollo que sólo se logra en el capitalismo). Así que podemos definir la tasa de explotación como:

$$\bar{e} = \frac{Ta}{Tn} \qquad [7]$$

$\bar{e}$ es la tasa de explotación.

Aquí podemos observar que $\bar{e}$ es directamente proporcional al tiempo de trabajo adicional pero inversamente proporcional al tiempo de trabajo necesario. Además, podemos afirmar que $\bar{e}$ está determinada exógenamente con respecto a nuestro modelo y depende del carácter clasista de las relaciones sociales de producción, por lo que al propietario de los medios de producción le conviene incrementar el tiempo de trabajo adicional, mientras que al trabajador le conviene aumentar el tiempo de trabajo necesario. Como ambos "coexisten" en la jornada de trabajo, y uno es directamente proporcional al otro e inversamente proporcional a la tasa de explotación, podemos decir que existe una lucha entre los propietarios de-los medios de producción y los trabajadores en las sociedades divididas en clases.

En el capitalismo, el "producto" es equivalente al valor de cambio de la fuerza de trabajo, fuerza de trabajo que, una vez valorizada, es el salario que percibe el trabajador y viene a ser el capital variable y la valorización del plusproducto es la plusvalía. De donde la tasa de explotación se convierte en tasa de plusvalía.

Podemos entonces definir:

$$\bar{e} = \bar{p} \qquad [8]$$

$$\bar{p} = \frac{p}{v} \qquad [9]$$

$$p = \bar{p}v \qquad [10]$$

substituyendo el valor de p en [1]:

$$W = C + V \quad \bar{p}V \qquad [11]$$

$$W = C + V\ (1 + \bar{p}) \qquad [12]$$

De donde:

$$W = f\ (C,V) \qquad [13]$$

Resulta aparentemente paradójica la proposición de que sólo el trabajo determina el valor y no los medios de producción como parece indicar la ecuación [13]. Sin embargo, podemos dar un desarrollo cronológico a la ecuación [13], y así tendremos:

$$W_t = C_t + V_t\ (1 + \bar{p}_t) \qquad [14]$$

$$V_t' = V_t\ (1 + \bar{p}_t) \qquad [15]$$

Donde:

V'_t es el capital variable multiplicado por un parámetro que es la tasa de plusvalía más la unidad. Así, substituyendo [15] en - [14], tenemos:

$$W_t = C_t + V'_t \qquad [16]$$

$$W_t = f(C_t, V'_t) \qquad [17]$$

El valor hasta aquí está determinado (aparentemente) por c y v.

Si tratamos a C_t como una mercancía, tendremos:

$$C_t = C_{t-1} + V'_{t-1} \qquad [18]$$

Substituyendo [18] en [16] tendremos:

$$W_t = C_{t-1} + V'_{t-1} + V'_t \qquad [19]$$

Aplicando la ley asociativa y conmutativa:

$$W_t = C_{t-1} + (V'_t + V'_{t-1}) \qquad [20]$$

Es el caso de la "primera regresión en el tiempo" para buscar la - explicación de la determinación del valor.

Para la segunda regresión tendremos:

$$C_{t-1} = C_{t-2} + V'_{t-2} \qquad [21]$$

Substituyendo [21] en [20] tendremos:

$$W_t = C_{t-2} + V'_{t-2} + (V'_t + V'_{t-1}) \qquad [22]$$

Aplicando las leyes asociativa y conmutativa tendremos:

$$W_t = C_{t-2} + (V'_t + V'_{t-1} + V'_{t-2}) \qquad [23]$$

Que es la ecuación para la segunda regresión.

Ahora podemos calcular la k-ésima regresión:

$$W_t = C_{t-k} + (V'_t + V'_{t-1} + V'_{t-2} + \ldots V'_{t-k}) \qquad [24]$$

y podemos calcular la n-ésima regresión:

$$W_t = C_{t-n} + (V'_t + V'_{t-1} + V'_{t-2} + \ldots V'_{t-k} + \ldots V'_{t-n}) \qquad [25]$$

Ahora podremos demostrar que la serie:

$$C_{t-n}, C_{t-(n+1)}, C_{t-(n+2)}, \ldots C_t \qquad [26]$$

es creciente (es la formalización de la ley de acumulación capitalista).

$$C_{t-k} = C_{t-(k+1)} + V'_{t-(k+1)} \qquad [27]$$

Pero

$$V'_{t-(k+1)} > 0 \qquad [28]$$

Debido a que sólo se puede considerar positiva la aplicación de la-fuerza de trabajo y la desaplicación de la fuerza de trabajo, carece de-sentido económico.

$$C_{t-k} > C_{t-(k+1)} \qquad [29]$$

Por tanto, podemos ordenar la serie [26] de la siguiente forma:

$$C_{t-n} < C_{t-(n+1)} < C_{t-(n+2)} < C_{t-(n+3)} < \ldots C_t \qquad [30]$$

pero, además, carece de significado que

$$C_{t-k} < 0$$

Por tanto:

$$C_{t-k} > 0 \qquad [31]$$

$$C_{t-k} + V'_{t-k} > C_{t-k} \qquad [32]$$

Cancelando en ambos miembros de la inecuación:

$$V'_{t-k} > 0 \qquad [33]$$

Volviendo a la ecuación [24]

Si hacemos que $n \rightarrow \infty$ es decir, un número muy grande de regresiones:

$$C_{t-n} \rightarrow 0 \qquad [34]$$

Por ser una serie decreciente, cuando es creciente n.

Además, la serie:

$$V'_t + V'_{t+1} + V'_{t+2} + \ldots V'_{t-n} \qquad [35]$$

es una serie creciente debido a que todos los términos son positivos. De modo que por [24] y tomando límites cuando se efectúan "n" regresiones, donde "n" es un número muy grande, tenemos:

$$W_t = V'_t + V'_{t-1} + V'_{t-2} + \ldots V'_{(t-k)} + \ldots V'_{(t-n)} \qquad [36]$$

que se reduce a:

$$W = f(V)$$

Que significa que el valor de las mercancías está determinado por el trabajo.

Que es lo que queríamos demostrar.

3.8 ERRORES EN LA DEMOSTRACION.

Existe una gran variedad de errores en las demostraciones que llevan a resultados inesperados, en algunos casos la intuición o imaginación nos engañan, hacemos falsas generalizaciónes, aceptamos proposiciones sin demostrar.

Tomemos los siguientes casos de falsas demostraciones;

demostremos que

$2 \times 2 = 5$

Se parte de la igualdad

$-20 = -20$

que puede ser expresada como

$16 - 36 = 25 - 45$

se puede agregar a cada miembro de la expresión una cantidad y no se altera la igualdad

$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$$

se agrupan los trinomios cuadrados perfectos

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

se obtiene la raíz cuadrada en ambas expresiones $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$

se suma 9/2 a cada miembro

$4 = 5$

substituyendo 2 X 2 en 4

$2 \times 2 = 5.$

Igual razonamiento se sigue para demostrar que $2 = 3$

partimos de la igualdad

$-6 = -6$

que equivale a

$4 - 10 = 9 - 15$

se suma a ambos miembros 25/4

$4 - 10 + 25/4 = 9 - 15 + 25/4$

agrupando el trinomio cuadrado perfecto tenemos:

$(2 - 5/2)^2 = (3 - 5/2)^2$

obteniendo la raíz cuadrada a cada miembro nos queda

$2 - 5/2 = 3 - 5/2$

sumando 5/2 a cada miembro tenemos que:

$2 = 3$

El error en el último caso consiste en que de la expresión

$(2 - 5/2)^2 = (3 - 5/2)^2$

se dedujo que

$2 - 5/2 = 3 - 5/2$

aunque los cuadrados sean iguales, no puede deducirse que son idénticas las primeras potencias pues $(-5)^2 = 5^2$, pero -5 no es igual a 5. El error de la primera "demostración" se explíca de la misma forma.

Si queremos demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° no apoyandose en el postulado de las paralelas, tenemos:

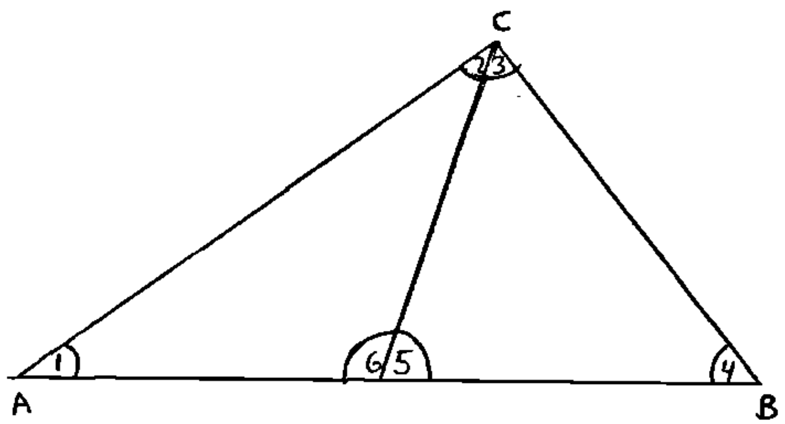


FIGURA 18

Dividiremos el triángulo ABC conforme a la figura 18 con el trazado de una recta desde el vértice C a la recta AB, numeramos los ángulos, supongamos que desconocemos cual es el valor de la suma de los ángulos internos de un triángulo, entonces:

$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 6 = x$

$\measuredangle 3 + \measuredangle 4 + \measuredangle 5 = x$

luego

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 = 2x$

pero

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 + = x$

que son la suma de los ángulos del triángulo ABC deberá ser x, pero, puesto que $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 = 180$ por ser adyacentes, substituyendo tenemos

$x + 180° = 2x$

$x = 180°$

En este caso se acepta la proposición que la suma de los ángulos de un --- triángulo es constante (180°) para todos los triángulos, por ello se parte de la idea, "denotemos la suma de los ángulos de un triángulo por x" - pero cuando se propone probar el teorema en cuestión, nada se sabe acerca de la suma de los ángulos de un triángulo y no hay base alguna para suponer que es la misma para todos los triángulos. Se podría aceptar sin demostración, el hecho de que la suma sea constante y en ese caso los argumentos planteados demostraran que la suma es igual a 180° pero esto sería introducir otro postulado en lugar del postulado de las paralelas.

Sí se quiere demostrar que son iguales las superficies de un cuadrado de - 21 cm. de lado y un rectángulo de 34 y 13 cm. de largo y ancho procedemos de la siguiente manera.

Descomponemos el cuadrado en cuatro partes como se señala en la figura siguiente y armando sus partes como se presentan a continuación las figuras.

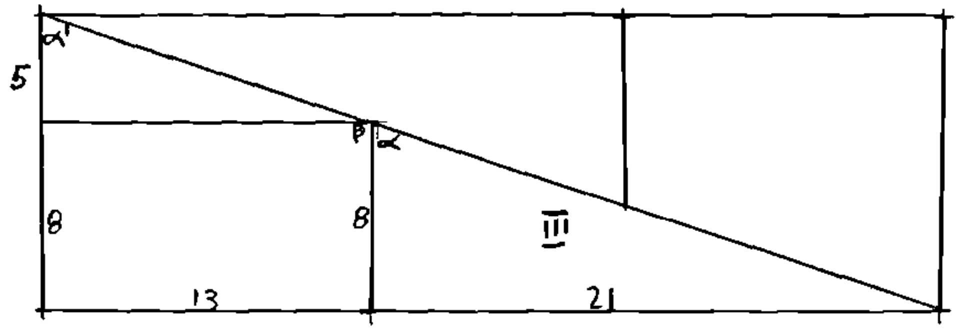


FIGURA 21

Es posible probar que los ángulos α y α' no son iguales y así mismo averiguar cual de ellos es mayor.

La tangente del agulo en el triángulo III es:

$Tg = \frac{21}{8}$

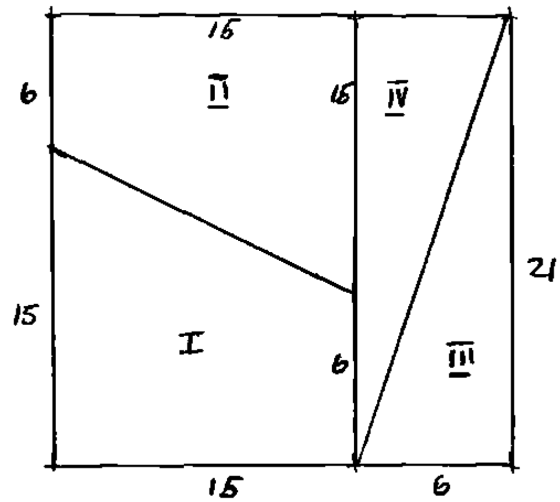


FIGURA 22

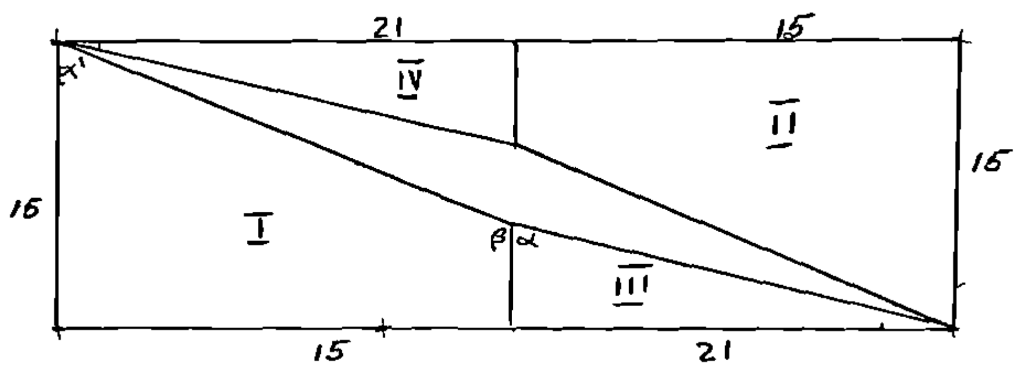


FIGURA 23

Si en el trapecio I se baja una perpendicular el vértice del ángulo β - hacia la base mayor, se forma un triángulo rectángulo con catetos de - longitud 13 y 13 - 8 de modo que

$$Tg\,\alpha' = \frac{13}{5}$$

pero 21/8 - 13/5 = 1/40 por lo tanto 21/8 $>$ 13/5 y $Tg\,\alpha > Tg\,\alpha'$

entonces $\alpha > \alpha'$ y $\alpha + \beta > 180°$

Hemos encontrado que las partes I, II, III y IV del cuadrado pueden colocarse realmente dentro del rectángulo pero no lo cubren totalmente -- quedando sin cubrir un paralelogramo muy delgado, una grieta a lo largo de la diagonal del rectángulo pero esta grieta no es visible puesto que la diagonal tiene una longitud de 36.4 en tanto que la grieta tiene una superficie de 1 cm^2 que es exactamente la diferencia del área del rectángulo R sobre el cuadrado Q.

4. PROBACION.

4.1 INTRODUCCION.

La probación es una operación metodológica por medio de la cual se prueba una hipótesis, es decir es el proceso de contrastación de la teoría con la práctica. Las tesis pueden ser válidas a través de la demostración en tanto que las hipótesis pueden ser verficadas a través de la prueba. Existe una gran diversidad de caminos en las pruebas de hipótesis. En éste trabajo sólo nos referiremos a algunos algoritmos estadísticos.

La técnica de prueba de hipótesis supone el conocimiento de la distribución normal, la media aritmética, la desviación estandar, de la inferencia estadística, etc.

La prueba de hipótesis permite saber si se puede considerar verdadera la conjetura planteda para toda la población.

Se distingue dos tipos de hipótesis: la de investigación que es la conjetura que pretende que se acepte y las hipótesis estadísticas que son propuestas para utilizar en el algoritmo de prueba, puede ser alternativa (H_1) ó nula (H_0), ésta última contradice la hipótesis de investigación. Sí en una muestra tenemos una media $\bar{x}$ y la comparamos con la media M de la población tendremos el siguiente cuadro de posibilidades.

Hipótesis de Investigación	Hipótesis Nula H_0	Hipótesis Alternativa H_1
$M \neq \bar{x}$	$M = \bar{x}$	$M \neq \bar{x}$
$M > \bar{x}$	$M \leq \bar{x}$	$M > \bar{x}$
$M < \bar{x}$	$M \geq \bar{x}$	$M < \bar{x}$

se puede también plantear la hipótesis $M > \bar{x}$ como $M - \bar{x} > 0$ esto generaría el siguiente cuadro:

Hipótesis de Investigación	Hipótesis Nula H_0	Hipótesis Alternativa
$M - \bar{x} \neq 0$	$M - \bar{x} = 0$	$M - \bar{x} \neq 0$
$M - \bar{x} > 0$	$M - \bar{x} \leq 0$	$M - \bar{x} > 0$
$M - \bar{x} < 0$	$M - \bar{x} \geq 0$	$M - \bar{x} < 0$

La estrategia para la prueba de hipótesis consiste en considerar la hipótesis nula como verdadera. Para aceptar la hipótesis de investigación no basta que la información de la muestra proporciones evidencia a su favor sino que exige que dicha información proporciones evidencia contra la hipótesis nula (H_0). La conclusión estadística será la aceptación ó rechazo de la hipótesis nula.

Sí la diferencia entre M y $\bar{X}$ es 'poca' ó 'mucha' entonces se acepta o - rechaza la hipótesis nula. Los términos 'poco' y 'mucho' son vagos e indefinidos de modo que habrá que adoptar un criterio de decisión que en- estadística se denomina regla de decisión. Sabemos que las medias muestrales, varian de muestra a muestra; pero sabemos que estas diferencias se distribuyen en forma normal. Si $\bar{x}$ difiere 'mucho' de M entonces se - puede rechazar la hipótesis nula pero podría ocurrir que:

H_0 sea verdadera por lo que se cometería el error de rechazar H_0 siendo verdadera.

Sí $\bar{x}$ difiere 'poco' de entonces se puede aceptar la hipótesis nula, -- pero podría ocurrir que:

H_0 sea falsa por lo que se cometería el error de aceptar H_0 siendo falsa.

Esto se puede resumir en el siguiente cuadro.

SITUACION REAL
(DESCONOCIDA)

		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
CONCLUSION ESTADISTICA	Se rechaza H_0	Se comete el error de tipo I	No se comete error
	No se rechaza H_0	No se comete error	Se comete el error de tipo II

Sí llamamos $P(E_1)$ a la probabilidad de cometer el error de tipo I y llamamos $P(E_2)$ a la probabilidad de cometer el error del tipo II, entonces ----

$P(E_1)$ y $P(E_2)$ son inversamente proporcionales, no pueden disminuir ambos a la vez. Se tendrá que decidir en tratar de minimizar $P(E_1)$ para una -- muestra de un tamaño determinado, además la dispersión de las medias de- las diferentes muestras del mismo tamaño de una misma muestra de pobla - ción es $s/\sqrt{n}$. por ello tendremos que evaluar $\bar{x} - M_0$ con respecto al -- error estandar muestral $s/\sqrt{n}$.

Para estimar el intervalo en que se encuentra el valor de la media pobla cional tendremos que establecer la confiabilidad utilizando la 't de stu dent'. Para constituir el intervalo de confianza, entonces

$$\left(\bar{x} - t_{[(n-1),\alpha]} \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{[(n-1),\alpha]} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Donde $t_{[(n-1),\alpha]}$ es el valor de la distribución 't de student', n es el- tamaño de la muestra, n-1 es el grado de libertad y α es el error permi- tido. La regla de decisión cuando tenemos una variable que se distribuye normalemente bajo el supuesto que la hipótesis nula es cierta, se cons - truye un intervalo de $(1-\alpha)$ 100% de confianza para el valor $\frac{x - M_0}{s/\sqrt{n}}$ si- rechazamos H_0 indebidamente la probabilidad de cometer éste error es α si-

$P(E_1) = \alpha$ y $P(E_2) = \beta$

entonces podemos concluir que:

SITUACION REAL

(DESCONOCIDA)

CONCLUSION ESTADISITICA		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
	Se rechaza H_0	Se comete el error de - tipo I, con una proba - bilidad α .	No se comete error. La - probabilidad de que esto ocurra es 1 - β.
	No se recha za. H_0	No se comete error. La probabilidad de que es- to ocurra es I - α .	Se comete el error de - tipo II, con una proba- bilidad β.

Definimos ahora el estadístico de prueba

$$T_c = \frac{\bar{x} - M_0}{s/\sqrt{n}}$$

Este estadístico tiene una distribución 't de student' con n-1 grado de- libertad

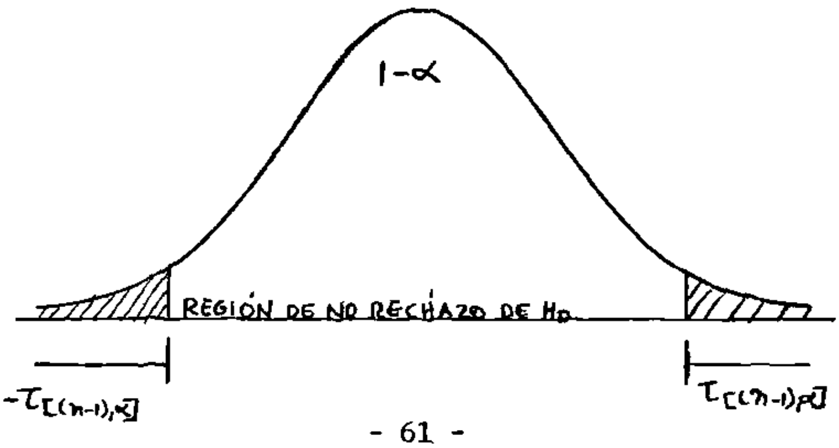


FIGURA 24

La prueba de hipótesis debe contemplar los siguientes pasos:

1) Planteamiento de la hipótesis. Se planteará la hipótesis de investigación que resulta ser la conjetura original, ésta hipótesis es idéntica a la hipótesis alternativa. La hipótesis nula es la contradicción de la hipótesis alternativa.

2) Selección del estadístico de prueba y determinación de las condiciones de su uso. Se busca el estadístico de prueba que no es más que una variable aleatoria que relaciona el planteamiento de la hipótesis nula con la información contenida en la muestra. Nos interesa la distribución que tiene el estadístico de prueba bajo el supuesto que la hipótesis nula es cierta. Es importante especificar las condiciones de uso del estadístico seleccionando y verificar si los datos de la muestra satisfacen estas condiciones.

3) Delimitación de la regla de decisión. Es imprescindible la determinación del coeficiente de confiabilidad o probabilidad con que se esta dispuesto a cometer el error del tipo I, se tienen dos casos: La prueba de hipótesis de una sóla cola y la prueba de hipótesis de dos colas. Se encontrará un valor del estadístico de prueba mediante el cual se determinen regiones de aceptación o de rechazo de la hipótesis nula.

4) Cálculos. Se encontrará el valor del estadístico de prueba correspondiente a la muestra obtenida, substituyendo valores en la expresión algebráica del estadístico de prueba.

5) Decisión estadística. Se establecerán las regiones mencionadas en el paso tres con el valor del estadístico econtrado en el paso cuatro, si este valor pertenece a la región del rechazo, se recha

za la hipótesis nula si no ocurre así entonces no se rechaza - la hipótesis nula.

6) Interpretación de los resultados. Consiste en traducir la decisión en términos de hipótesis de investigación.

Si X es una variables que se distribuye normalmente con media M, - y si se tiene una de las siguientes hipótesis nulas:

$H_0 : M = M_0$ $\qquad H_0 : M \leqslant M_0$ $\qquad H_0 : M \geqslant M_0$

donde M_0 es un valor conocido, entonces un estadístico de prueba es:

$$t_c = \frac{\bar{x} - M_0}{s/\sqrt{n}}$$

donde $\bar{x}$ y s son la media y la desviación estándar de una muestra de tamaño n representativa de la población. Si H_0 es cierta, la distribución de t_c es la distribución "t de Student" con n-1 grados de libertad.

Para una α determinada, la regla de decisión se plantea de acuerdo a la siguiente tabla:

Forma de H_1	Región de rechazo de H_0	$t_{(n-1)}$ es el - valor de t con α en
$H_1: M \neq M_0$	$(-\infty, -t_{(n-1)}] \cup [t_{(n-1)}, \infty)$	dos colas
$H_1: M > M_0$	$[t_{(n-1)}, \infty)$	una cola
$H_1: M < M_0$	$(-\infty, -t_{(n-1)})$	una cola

4.2. PRUEBA DE HIPOTESIS SOBRE UNA MEDIA POBLACIONAL.

El algoritmo anteriormente propuesto es útil para el caso de variables categóricas aunque será necesario hacerle algunas modificaciones.

Sí x es una variable que se distribuye normalmente con media M se puede tener uno de los tres siguientes casos en el planteamiento de la hipótesis nula.

$H_0 : M = M_0$ $\qquad$ $H_0 : M \leq M_0$ $\qquad$ $H_0 : M \geq M_0$

Donde M_0 es un valor conocido, entonces el estadístico de prueba será:

$$T_c = \frac{\bar{x} - M_0}{s/\sqrt{n}}$$

Donde $\bar{x}$ y s son la media y la desviación estándar de la muestra de tamaño n tomada de la población. Si H_0 es cierta la distribución de T_c toma la forma de 't de student" con n-1 grados de libertad. Dada un alfa, por el investigador, la regla de decisión se plantea conforme al siguiente cuadro:

Forma de H_1	Región de rechazo de H_0	Número de Colas
H_1: $M \neq M_0$	$(-\infty, -t_{[(n-1),\alpha]} \cup t_{](n-1),\alpha,\infty}$	Dos colas
H_1: $M > M_0$	$[t_{[(n-1),\alpha]}, \alpha]$	Una cola cola derecha
H_1: $M < M_0$	$(-\infty , -t_{[(n-1);\alpha]}$	Una cola cola izquierda

4.3 PRUEBA DE HIPOTESIS SOBRE UNA PROPORCION POBLACIONAL.

Se estudia en este apartado la prueba de hipótesis con variables categóricas, pero ahora considerada como proporción de la población. Se trata pués de un fenómeno al que se asocia una variable catégorica y es el interés comparar la proporción poblacional p con un determinado valor p_0 que es conocido y se supone dado. El conjunto de hipótesis podrá ser

$H_0 : P = P_0$	$H_0 : P \leq P_0$	$H_0 : P \geq P_0$
$H_1 : P \neq P_0$	$H_1 : P > P_0$	$H_1 : P < P_0$

De la muestra se obtiene un estimador P que se compara con la proporción de la población P_0, se trata de investigar si la diferencia $P - P_0$ es lo suficientemente 'grande' o suficientemente 'pequeña', se sabe que P esta sujeto a variación muestral y que si $NP_0 \geq 5$ y $N(1-P_0) \geq 5$ donde N es el tamaño de la muestra. Entonces la distribución muestral de P es normal y sus parámetros son:

$$M_{\hat{p}} = P \quad y \quad \sigma_{\hat{p}} \quad \frac{p(1-p)}{n}$$

puesto que $NP > 5$ y $N(1-P) > 5$ entonces los valores

$$\frac{P - M_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}}$$

se distribuye con una media igual a cero y una desviación estándar uno. Sí la hipótesis nula es cierta entonces $P = P_0$

además si $NP_0 > 5$ y $N(1-P_0) > 5$ la distribución de:

$$z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0\ (1-P_0)}{n}}}$$

Es la distribución normal estándar, a continuación se dá un resumen del tema.

Si p es la proporción con la que ocurre cierta categoría de una varia - ble categórica en una población, y si se tiene una de las siguientes -- hipótesis nulas:

$$H_0 : p = p_0 \qquad H_0 : p \leq p_0 \qquad H_0 : p \geq p_0$$

donde p_0 es un valor conocido, entonces un estadístico de prueba es:

$$z_c = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{P_0\ (1-p_0)}{n}}}$$

donde $\hat{p}$ es la proporción con la que ocurre la categoría en una muestra-representativa de tamaño n de la población.

- Si $np_0 > 5$ y $n(1-p_o) > 5$, y si H_0 es cierta, la distribución de z_c es la normal estándar.

Para una α determinada, la regla de decisión se plantea de acuerdo a la siguiente tabla.

Forma de H_1	Región de rechazo de H_0	z es el valor de Z con en
$H_1 : p \neq p_0$	$\langle -\infty, -z] \cup [z, \infty \rangle$	dos colas
$H_1 : p \geqslant p_0$	$[z, \infty \rangle$	una cola
$H_1 : p < p_0$	$\langle -\infty, -z]$	una cola

4.4 PRUEBA DE HIPOTESIS SOBRE PROPORCIONES.

Comparación de dos proporciones. Con frecuencia los problemas se plantean en términos de proporción. La diferencia de este algoritmo con el anterior es que en éste último se compara una proporción P_0 que se conoce o se supone dada ($H_0 : P = P_0$).Ahora se trata de comprobar dos proporciones poblacionales estimado ambas con los datos de dos muestras. La variable categórica puede ser opinión y por tanto tomar valores como "si" ó "no", "a favor" ó "en contra", "aprobado" ó "reprobado" etc. Cuando hay dos poblaciones tendremos una distribución de respuestas codificadas de la siguiente forma:

Población	valor de la variable		Total
	A	B	
1	a_1	b_1	$a_1 + b_1$
2	a_2	b_2	$a_2 + b_2$

Podemos definir p_1 como

$$p_1 = \frac{a_1}{a_1 + b_1}$$

que resulta ser una proporción. Del mismo modo definimos p_2

$$p_2 = \frac{a_2}{a_2 + b_2}$$

Quedando la posibilidad de plantear las siguientes hipótesis de investigación:

a) $p_1 \neq p_2$

b) $p_1 > p_2$

c) $p_1 < p_2$

con sus respectivas hipótesis estadísticas, pero ambas por ser extraídas de muestras poblacionales distintas sólo podrán ser estimaciones y las denotamos como $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$ ambas estimaciones estan sujetas a variación muestral, por ello se requiere un estadístico de prueba que nos diga que "tan grande" es la diferencia de las proporciones.

Se quiere que se cumpla los siguientes requisitos

$$n_1 \hat{p}_1 > 5, \qquad n_1 (1-\hat{p}_1) > 5$$

$$n_2 \hat{p}_2 > 5, \quad y \; n_2 (1-\hat{p}_2) > 5$$

Se puede hacer una estimación mancomunada de la proporción poblacional común

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

Sabemos que $\hat{p}$ esta sujeta a variación muestral, sí la hipótesis nula es verdadera se tiene que:

$$\frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{p})}{n_1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{p})}{n_2}}}$$

Tiene una distribución normal estándar y se constituye en un estadístico de prueba (Z_c) por lo tanto el estadístico será:

$$z_c = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{P(1 - \hat{p})}{n_1} + \frac{P(1-\hat{p})}{n_2}}}$$

Este estadístico guarda una gran semejanza con el estadístico de la prueba de hipótesis de una proporción

$$\frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{P_0\ (1-p_0)\ /\ n}}$$

En concreto podemos afirmar que:

Si p es la proporción con la que ocurre cierta categoría de una variable categórica en una población y p_2 es la proporción con la que ocurre la misma categoría en otra población, y si se tiene una de las siguientes hipótesis nulas:

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0 \qquad H_0 : p_1 - p_2 \leq 0 \qquad H_0 : p_1 - p_2 \geq 0$$

entonces un estadístico de prueba es:

$$z_c = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1- \hat{P})}{n_1} + \frac{\hat{P}\ (1-\hat{P})}{n_2}}}$$

donde $$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{P}_1 + n_2 \hat{P}_2}{n_1 + n_2}$$

y $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ son las proporciones con las que ocurre la categoría en muestras representativas de tamaño n_1 y n_2 de las poblaciones. Si $n_1 \hat{P}_1 \geq 5$, $n_1 (1-\hat{P}_1) \geq 5$, $n_2 \hat{P}_2 \geq 5$ y $n_2(1-\hat{P}_2) \geq 5$, y si H_0 es cierta, la distribución de z_c es la normal de estándar.

Para una α determinada, la regla de decisión se plantea de acuerdo a la siguiente tabla.

Forma de H_1	Región de rechazo de H_0	z es el valor de Z con α en
$H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$	$\langle -\infty, -z] \cup [z, \infty \rangle$	dos colas
$H_1 : P_1 - P_2 > 0$	$[z, \infty \rangle$	una cola
$H_1 : P_1 - P_2 < 0$	$\langle -\infty, -z]$	una cola

Prueba de Hipótesis sobre mas de dos proporciones.

• Con frecuencia estamos interesados en saber sí los valores que adoptamos las variables categórica son independientes o no. Sí denominamos $A_1, A_2, \ldots A_n$ las modalidades de una de las variables y $B_1, B_2, \ldots B_m$ a las de la otra variable, además asignamos a las modalidades de la primera variable los valores de $k_1, k_2, \ldots k_n, \ldots k_n$ y $I_1, I_2, \ldots I_m$ como valores de las modalidades de la segunda variable entonces sí las dos variables son independientes (A y B) los eventos siguientes serán independientes:

a_i y b_j donde $(i = 1,2,...n)$ y $(j = 1,2,...m)$

Sabemos que dos eventos (a_i y b_j) son independientes sí la probabilidad de que ocurre a dado b es igual a la probabilidad de que ocurre a, es - decir:

$$P(A/B) = P(A)$$

Puesto que estamos ubicados a nivel de muestra sólo tenemos estimación- de probabilidades, el tamaño de la muestra es N,

$$N = \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{m} 1_j$$

y las probabilidades estimadas serán

$$P\ (a_1) = \frac{k_1}{N}$$

$$P\ (a_2) = \frac{k_2}{N}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$P\ (a_n) = \frac{k_n}{N}$$

Además:

$$P\ (b_1) = \frac{I_1}{N}$$

$$P\ (b_2) = \frac{I_2}{N}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$P\ (b_m) = \frac{I_m}{N}$$

Hagamos ahora nuestra tabla de contingencia

VARIABLE A	VARIABLE B				
	B_1	B_2	B_3	B_m	A_i
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1m}	k_1
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2m}	k_2
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{3m}	k_3
A_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	a_{nm}	k_n
B_j	I_1	I_2	I_3	I_m	N

Sí denominamos ICI al cuadrado de contingencia y lo tomamos como una matriz las probabilidades (P) tendremos:

$$IPI = \frac{1}{N} ICI$$

Las frecuencias esperadas serán cálculadas en base a las probabilidades, entonces la frecuencia esperada para B_1 será

$$\bar{B}_1 = \frac{I_1}{N} k_1$$

para calcular el valor de cualquier B_j tendremos

$$\bar{B}_j = \frac{I_j}{N} k_j$$

Ahora podemos hablar de una matriz cuyos elementos son los valores esperados en términos de probabilidades.

habrá que saber si las frecuencias que existen entre las frecuencias esperadas y observadas son "significativas" para ello utilizaremos el estadístico de prueba que será

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

en el que 0_i es la fecuencia observada y e_i es la frecuencia esperada en una matriz que tiene k elementos.

Sí suponemos que la hipótesis nula es cierta, entonces el estadístico de prueba distribuye como "Ji-cuadrada". esta es una familia de distribuciones, las distribuciones "Ji-cuadrada" no son simétricas, todos los valores de "Ji- cuadrada" son positivos.

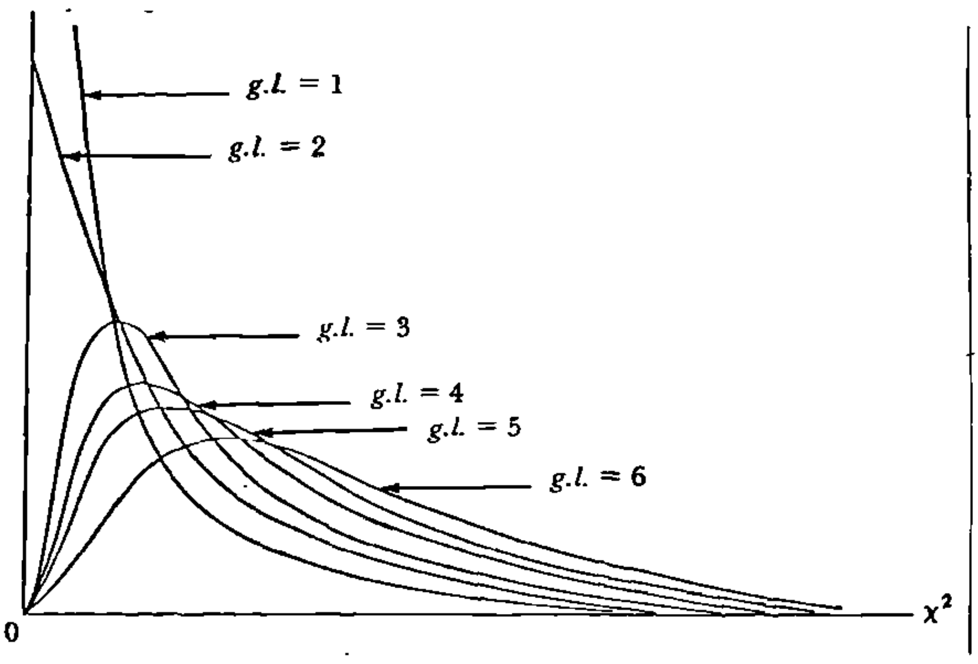


FIGURA. 25

Faltará sólo seleccionar el valor de α en la cola derecha, todas las - pruebas cuyo estadístico de prueba tenga distribución de "Ji-cuadrada"- tendrá la región de rechazo en la cola derecha de la distribución. En - resumen tenemos que:

Si en una misma población se condideran dos variables categóricas, y si se tiene la siguiente hipótesis nula con referencia a ellas:

$$H_0 : \text{Hay independencia}$$

entonces un estadístico de prueba es:

$$X_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

donde las o_i son las k frecuencias observadas y las e_i son las k frecuencias esperadas. Si $e_i > 5$ por lo menos en el 80% de los casos y $e_i > 1$- en todos los casos, y si H_0 es cierta, la distribución de X_c^2 es la distribución "Ji-cuadrada" con (r - 1) (m - 1) grados de libertad donde r - y m son el número de renglones y columnas de la tabla de contingencia.

Para una α determinada, la regla de decisión está dada por la siguiente región de rechazo de H_0:

$$\cdot \qquad X^2 \; ((r-1)\; (m-1))$$

donde $X^2_{((r-1)\;(m-1))}$ es el valor en la tabla de la distribución "Ji-cuadrada" con α en una cola y (r-1) (m-1) grados de libertad.

Para una tabla de contingencia de 2x2 se hacen algunas ligeras modificaciones y el estadístico de prueba cambia.

Si en una misma población se consideran dos variables categóricas, cada una con dos valores, y si se tiene la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 : \text{Hay independencia}$$

entonces un estadístico de prueba es:

$$X_c^2 = \frac{(|sv - tu| - \frac{1}{2} n)^2}{(s+t)(u+v)(s+u)(t+v)}$$

donde n, s, v, t y u son valores que se encuentran en la tabla de contingencia como sigue:

	Primerva variable		Total
Segunda variable	s	t	s+t
	u	v	u+v
T o t a l	s + u	t + v	n

Si las frecuencias esperadas son mayores que 5 y si H_0 es cierta, la distribución de X_c^2 es la distribución "Ji-cuadrada" con 1 grado de libertad.

Para una α determinada, la regla de decisión está dada por la siguiente región de rechazo de H_0:

$$[X^2_{(1)}, \infty)$$

donde $X^2_{(1)}$ es el valor en la tabla de la distribución "Ji-cuadrada" con α en una cola y un grado de libertad:

Una variante de la prueba de independencia es la prueba de homogenidad en la que se comparan proposiciones con las que ocurren los valores de una sóla variable categórica en varias poblaciones es decir que: Si en dos o más poblaciones se considera una misma variable categórica, y si se tiene la siguiente hipótesis nula acerca de la distribución de los valores de la variable en las poblaciones:

H_0 : Hay homogenidad

entonces un estadístico de prueba es:

a) En el caso en el que hay más de dos poblaciones o más de dos valores de la variable:

$$X_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

donde las o_i, son las k frecuencias observadas y las e_i son las - k frecuencias esperadas. Para usar este estadístico se requiere - que $e_i > 5$ por lo menos en el 80% de los casos y que $e_i > 1$ en -- todos los casos.

b) En el caso en el que hay dos poblaciones y dos valores de la variable:

$$X_c^2 = \frac{n(\,|sv - tu| - \frac{1}{2}n)^2}{(s+t)(u+v)(s+u)(t+v)}$$

donde el primer valor de la variable ocurre con frecuencias s y t, y el segundo valor con frecuencia u y v respectivamente en las - dos muestras, y n es la suma de todas las frecuencias anteriores- (n = s+t+u+v). Para usar est estadístic se requiere que todas - las frecuencias esperadas sean mayores que 5.

Si H_0 es cierta X_c^2 tiene una distribución "Ji-cuadrada" con (r-1) - (m-1) grados de libertad, donde r y m son el número de renglones y columnas de la tabla de contingencia.

Para una α determinada, la regla de decisión está dada por la siguiente región de rechazo de H_0:

$$[\ X^2_{((r-1)\ (m-1)),\ \alpha}$$

donde $X^2_{((r-1)\ (m-1))}$ es el valor en la tabla de la distribución "Ji-cuadrada" con α en una cola y (r-1) (m-1) grados de libertad.

4.5 PRUEBA DE HIPOTESIS SOBRE MEDIAS.

Cuando consideramos que la variable bajo estudio es contínua y con - distribución normal, nos referimos a dos métodos que permitan probar hi - pótesis acerca de dos medias poblacionales para muestras independientes - o pareadas y para el caso de dos o maś muestras independientes.

A) Comparación de dos medias. La comparación de medias es uno de los problemas de investigación que se presentan con mayor frecuencia, en el - caso de que las muestras sean independientes, en donde la variable es- contínua y normal.

De cada muestra debemos obtener, sus tamaños (N_1 y N_2), sus medias ($\bar{X}_1$ y- $\bar{X}_2$) y sus desviaciones estándar (S_1 y S_2). Se espera que las medias muestrales tengan una distribución muestral.

Se puede plantear las siguientes hipótesis:

$H_0 : M_1 = M_0$ $\qquad$ $H_0 = M_1 \leq M_0$ $\qquad$ $H_0 : M_1 \geq M_0$

ó

$H_0 : M_1 - M_0 = 0$ $\qquad$ $H_0 : M_1 = M_0 \leq 0$ $\qquad$ $H_0 : M_1 - M_0 \geq 0$

Suponemos que S_1 y S_2 son estimadores de σ_1 y σ_2 y que $\sigma_1 = \sigma_2$, podemos entonces tener una estimación mancomunada de la desviación estándar (S)- que calculamos como:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

los grados de libertad de ésta estimación mancomunada es la suma de los grados de libertad de S_1 y S_2 es decir:

$(N_1 - 1) + (N_2 - 1) = N_1 + N_2 - 2$

Bajo el supuesto de que la hipótesis nula es cierta se puede tomar como estadístico de prueba t_c donde

$$t_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{s}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Habrá que observar que existe similitud entre el estadístico de prueba de hipótesis de una media, con el que acabamos de mencionar

$$\frac{\bar{x} - M_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - M_0}{s\sqrt{1/n}} \quad y \quad \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{s}\sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}}$$

La distribución estadística bajo el supuesto que la hipótesis de nula es cierta tendrá una distribución "t de student" en síntesis tenemos que:

Si se tienen dos poblaciones con desviaciones estándar poblacionales iguales $(\sigma_1 = \sigma_2)$ cuyos elementos son valores de una variable continua con distribución normal, y se se tiene una de las siguientes hipótesis nulas:

$$H_0 : M_1 - M_2 = 0 \qquad H_0 : M_1 - M_2 \leqslant 0 \qquad H_0 : M_1 - M_2 \geqslant 0$$

donde M_1 y M_2 son las medias de cada población, entonces un estadístico de prueba es:

$$t_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{s}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

donde

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

y $\bar{x}_1$, s_1 son la media y desviación estándar de una muestra representativa de tamaño n_1 de la población con media M_1; y $\bar{x}_2$, s_2 son la media y -- desviación estándar de una muestra representativa de tamaño n_2 de la población con media M_2. Si H_0 es cierta, la distribución de t_c es la distribución "t de Student" con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

Para una α determinada, la regla de decisión se plantea de acuerdo a la siguiente tabla:

Forma de H_1	Región de rechazo de H_0	$t_{(n_1+n_2-2)}$ es el valor de t con α en
$H_1: M_1 - M_2 \neq 0$	$(-\infty, -t_{(n_1+n_2-2)}] \cup [t_{(n_1+n_2-2)}, \infty)$	dos colas
$H_1: M_1 - M_2 > 0$	$[t_{(n_1+n_2-2)}, \infty)$	una cola
$H_1: M_1 - M_2 < 0$	$(-\infty, -t_{(n_1+n_2-2)}]$	una cola

B) Pruebas Pareadas. Es posible que las muestras utilizadas tengan la-misma desviación estándar, también habrá que reflexionar sobre la -normalidad. Para tener una idea más precisa de la que ofrecen los -histogramas, puede realizarse una prueba de "bondad de ajuste" a la normal. Esto ocurre cuando se aplica un procedimiento a una muestra y se miden los resultados antes y después de la aplicación de la --muestra, en este caso se dice que se tienen dos muestras pareadas.

Tendremos dos poblaciones "antes" (x_1) y "después" (x_2) y podemos obtener las diferencias entre ellas ($x_1 - x_2$) y también la media de las diferentes es decir

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N}$$

además

$$S_d = \sqrt{\frac{(d_i - \bar{d})^2}{N - 1}}$$

Nuestro estádistico de prueba bajo el supuesto que la hipótesis nula es-cierta será:

$$t_c = \frac{\bar{d} - M_0}{S_d/\sqrt{N}}$$

que tienen una distribución "t de student" con n-1 grados de libertad, -en síntesis:

Si se tiene dos poblaciones cuyos elementos son valores de una variable continua con distribución normal, y si se tiene una de las siguientes hipótesis nulas:

$$H_0 : M_d = 0 \qquad H_0 : M_d \leq 0 \qquad H_0 : M_d \geq 0$$

donde $M_d = M_1 - M_2$, y M_1 y M_2 son las medias de cada población, entonces un estadístico de prueba es:

$$t_c = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

donde $\bar{d}$ y s_d son la media y desviación estándar de las diferencias d_i de n parejas de datos, obtenidos de dos muestras pareadas de tamaño n extraídas de las poblaciones. Si H_0 es cierta, la distribución de t_c es la distribución "t de student" con n-1 grados de libertad.

Para una α determinada, la regla de decisión se plantea de acuerdo a la siguiente tabla:

Forma de H_1	Región de rechazo de H_0	$t_{(n-1)}$ es el valor de t con α en.
H_1: $M_d \neq 0$	$(-\infty, -t_{(n-1)}] \cup [t_{(n-1)}, \infty)$	dos colas
H_1: $M_d > 0$	$[t_{(n-1)}, \infty)$	una cola
H_1: $M_d < 0$	$(-\infty, -t_{(n-1)}]$	una cola

Prueba de Hipótesis sobre mas de dos medias .

El método que sirve para comparar más de dos medias cuando se trabaja con una variable que se distribuye normalmente, el análisis de varianza es una colección de métodos para la prueba de hipótesis sobre dos ó -- más medias. El tipo de análisis de varianza que se aplica en cada caso - depende de la relación de los elementos de una muestra con las otras.
Sólo abordaremos el caso de comparación de medias cuando las poblaciones son independientes, en realidad es una generalización de la prueba - "t de student".

Las condiciones de uso de dicho método son:

1) Que la variable en estudio sea contínua.
2) Que la variable tenga una distribución normal
3) Que las muestras sean independientes
4) Que las muestras entre sí y la población tengan igual distribución - estándar.

Sí tomamos las medias de las muestras tenemos M_1, M_2, M_3 y...M_n se puede llegar a la hipótesis nula

$H_0 = M_1 = M_2 = M_3 = \ldots M_n$

Sí fueran sólo dos muestras tendríamos el estadístico de prueba:

$$t_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{s}\sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}}$$

En el denominador tenemos una expresión mancomunada que involucra el tamaño de las muestras y las deviaciones estándar de las muestras. Se puede decir que t_c es una variación dentro de las muestras ó que es la varia no explicada por las hipótesis de investigación.

mportante saber sí la variación entre las muestras es "grande" o -
ueña" con respecto a la variación dentro de las muestras.

el caso de tres muestras se toman las medidas de cada muestra co-
stimadores, la variación entre las muestras se medirá con la dis -
ión entre las medias $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$ entre sí. La desviación entre las-
tras se obtiene con la varianza de cada muestra

donde

$$= \frac{\sum (X_i - X)^2}{n - 1}$$

$_1$, N_2 y N_3 son los tamaños de las muestras tenemos:

$$= \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{(N_1-1) + (N_2-1) + (N_3-1)} = \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{N_1 + N_2 + N_3 - 3}$$

ariación dentro de las muestras se mide mediante la varianza manco-
da S^2. Al numerador S^2 lo denominamos suma de los cuadrados dentro-
as muestras SC_d, el denominador de S^2 esta determinado como N el to
de elementos de la población entonces:

$$N_1 + N_2 + N_3$$

arianza mancomunada $\bar{S}^2$ la llamaremos cuadrado medio dentro de las -
tras CM_d

$$= SC_d / N-3$$

enotamos como $\bar{\bar{X}}$ a la media total tendremos que:

$$= \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3}{3} \text{ ó } \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{N_1 + N_2 + \ldots N_n}$$

Podemos ahora tener una mdeia de desviación entre las medias

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}})^2 + (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})^2 + (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}})^2}{3 - 1}$$

Puesto que el tamaño de las muestras puede ser diferente se pondrán las diferencias con el tamaño de su muestra es decir:

$$\frac{N_1 (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}})^2 + N_2 (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})^2 + N_3 (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}})^2}{3 - 1}$$

Al numerador de esta varianza lo denominamos suma de cuadrados entre -- muestras SC_e el denominador será el grado de libertad entre las muestras o sea el número de muestras menos uno. A la varianza entre las muestras- lo llamamos cuadrado medio entre muestras y lo denotamos como CM_e así -- tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{N \neq 1}$$

Equivale a:

$$SC_t = \sum_{i=1}^{N} (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2$$

tenemos además que:

$SC_t = SC_e + SC_d$

Sí tomamos un dato cualquiera tenemos la siguiente figura:

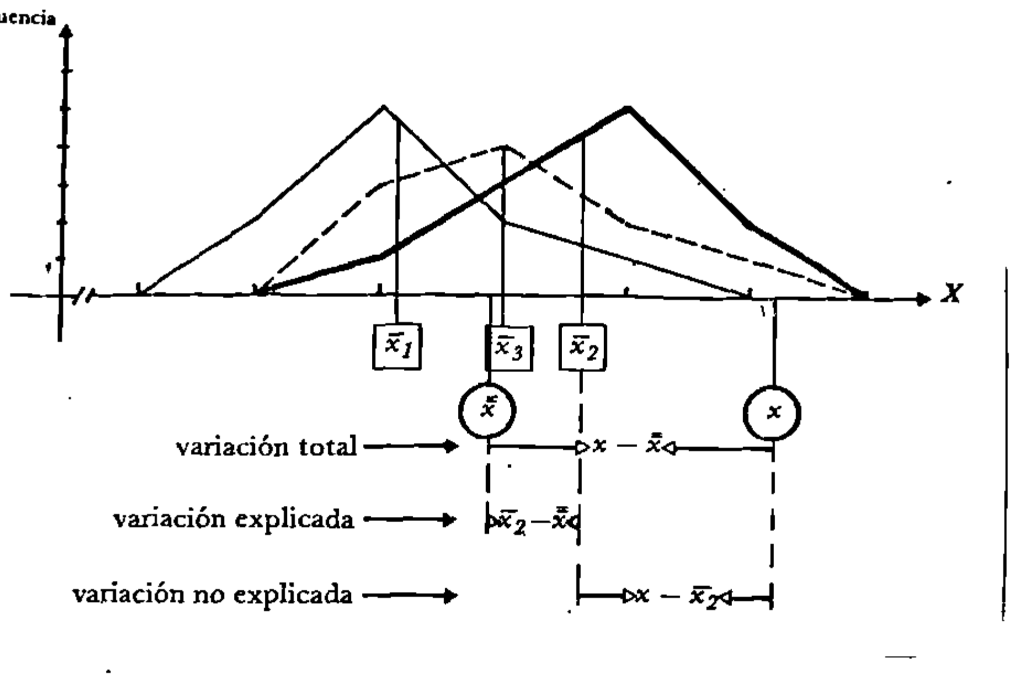


FIGURA 26

donde

$$X - \bar{\bar{X}} = (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) + (X - \bar{X}_2)$$

Lo que debemos saber es, si la variación explicada es lo suficientemente grande para rechazar la hipótesis nula.

$$H_0 : M_1 = M_2 = M_3$$

Se requiere un estadístico de prueba que nos indique si la varianza entre las muestras puede ser considerada como "grande" con respecto a la varianza dentro de las muestras. Este estadístico de prueba será:

$$\frac{CM_e}{CM_d}$$

Los valores "grandes" de éste estadístico nos llevarán a rechazar la -- hipótesis nula, en tanto que los valores "pequeños" nos llevarán a no -

rechazar. Para tomar una decisión necesitamos conocer la forma de la distribución del estadístico bajo el supuesto que la hipótesis nula es cierta. Esta distribución es conocida como la "F de Fisher", esta es una familia de distribuciones determinada por sus grados de libertad, las distribuciones "F de Fisher" no son simétricas y sus valores son todos positivos.

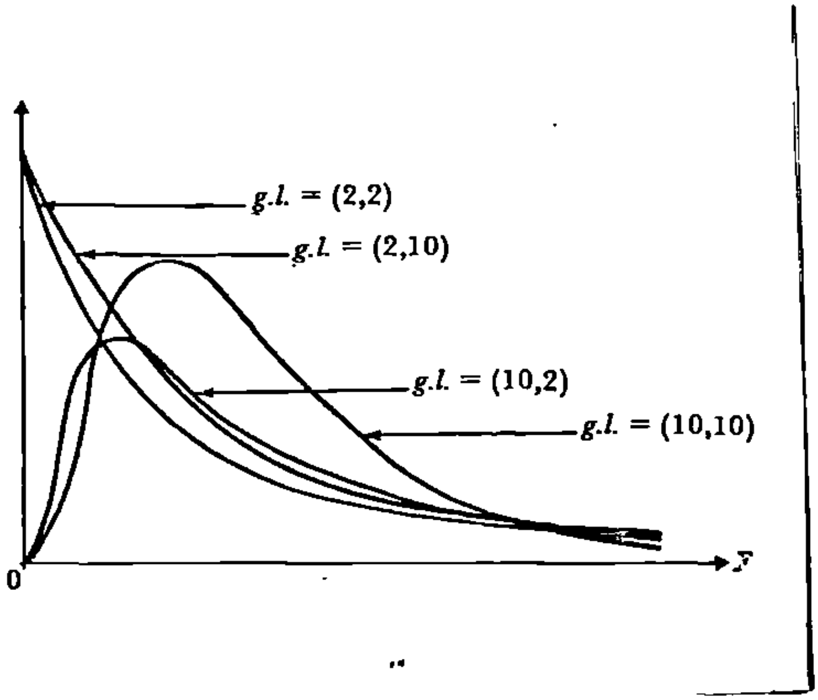


FIGURA 27

Antes de analizar la tabla de varianza es necesario considerar que:

m es el número de muestras que se estan comparando

n_j es el número de datos de la j-ésima muestra

n es el número total de datos y por tanto

$n = \sum n_j$

T_j es la suma de los datos de la j-ésima muestra

T es la suma de todos los datos, y por lo tanto

$T = \sum T_j$

Para el cálculo de la varianza entre las muestras con m-1 grados de libertad tenemos:

$$SC_e = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{T_j^2}{n_j} \right) - \frac{T^2}{n}$$

El cálculo de varianza dentro de las muestras con n-m grados de libertad es:

$$SC_d = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{T_j^2}{n_j} \right)$$

La varianza total con n-1 grados de libertad será:

$$SC_t = \sum_{i=1}^{n} X_j^2 - \frac{T^2}{n}$$

Esto se puede agrupar en la siguiente tabla

TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA				
Fuente de variación	grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F_c
Entre muestras	m - 1	$SC_e = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{T_j^2}{n_j}\right) - \frac{T^2}{n}$	$CM_e = \frac{SC_e}{m-1}$	$F_c = \frac{CM_e}{CM_d}$
Dentro de muestras	n - m	$SC_d = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{T_j^2}{n_j}\right)$	$CM_d = \frac{SC_d}{n-m}$	
Total	n - 1	$SC_d = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{T^2}{n}$		

En la última columna aparece el estadístico F_c

$$F_c = \frac{CM_e}{CM_d}$$

Bajo el supuesto que es cierta la hipótesis nula $M_1 = M_2 = M_3 \ldots M_n$ con n-1 - grados de libertad en el numerador y m-n grados de libertad en el numera dor esto se puede sintetizar diciendo que:

Si se tiene m poblaciones con varianzas poblacionales iguales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2$), constituidas por valores de una variable contínua con distribución normal, y si se tiene una hipótesis nula de la forma:

$$H_0 : M_1 = M_2 = \ldots = M_m$$

donde $M_1, M_2, \ldots, M_m$ son las medidas de cada población, entonces un estadístico de prueba es:

$$F_c = \frac{SC_e/(m-1)}{SC_d/(n-m)}$$

donde $SC_e = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{T_j^2}{n_j}\right) - \frac{T^2}{n}$, $SC_d = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j^2}{n_j}$

y x_i son los datos obtenidos en m muestras representativas e independientes de tamaños n_j ($n_1, n_2, \ldots n_m$) de las m poblaciones, $n=n_1+n_2+\ldots n_m$, T_j es la suma de los datos en cada muestra y T la suma de los datos de todas las muestras. Si H_0 es cierta, la distribución de F_c es la distribución de "F de Fisher" con m-1 grados de libertad en el numerador y n-m grados de libertad en el denominador.

Para una α determinada, la regla de decisión dada por la siguiente región de rechazo de H_0:

$$[F_{((m-1),(n-m))}, \infty)$$

donde $F_{((m-1),(n-m))}$ es el valor en la tabla de la distribución "F de Fisher" con α en una cola y m-1 grados de libertad en el numerador y n-m grados de libertad en el denominador.

Uno de los supuestos para la utilización del algoritmo que acabamos de mencionar es que la varianza sean iguales, para saber si las varianzas son iguales, es decir que:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \ldots \sigma_k^2$$

Donde k es el número de poblaciones consideradas y $k \geq 2$.

Sí tenemos la varianza S_1^2, S_2^2, ... S_k^2 de k muestras de tamaño n_1, n_2,...n_k extraídas de k poblaciones se toma la varianza de mayor valor S_a^2 y la de - menor valor (S_b^2) de modo que: $S_a^2 > S_b^2$

Se calcula el coeficiente $F_c = \dfrac{S_a^2}{S_b^2}$

y se compara el valor F'_c con la distribución "F de Fisher" con $n_a - 1$ -- grados de libertad en el numerador y con $n_b - 1$ grados de libertad en el- denominador.

Sí $F'_c < F_{(n_a - 1,\, n_b - 1)}$ se puede considerar que se cumple la condición de igualdad de varianzas, en síntesis tenemos que:

Una manera sencilla de verificar si se cumple la condición de igualdad de varianzas para el uso de la "prueba de t" o para el uso del análisis de - varianza es verificando que se cumpla la condición.

$$F'_c = \frac{S_a^2}{S_b^2} < F_{(n_a - 1,\, n_b - 1)}$$

donde S_a^2 y S_b^2 son, respectivamente, la mayor y la menor de las varianzas de las muestras cuyas medidas se desea comparar, n_a y n_b son los tamaños- de las muestras con varianzas S_a^2 y S_b^2, y $F_{(n_a - 1,\, n_b - 1)}$ es el va - lor en la tabla de la distribución "F de Fisher" con $\alpha = .05$ en una cola- y $n_a - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_b - 1$ grados de libertad - en el denominador.

BIBLIOGRAFIA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. Introducción a los Métodos Estadísticos, S.E.P., México, D.F. 1982.

FETISOV. A. I. La Demostración en Geometría. Limusa. México, D.F. 1980.

DUBNOV. YA. S. Errores de las Demostraciones Geometrícas. Limusa Wiley. México, D.F. 1973.

SOMINKIT. I. S. El Método de la Inducción Matemática. Limusa. México, D.F. 1976

GOLOVINA. L. I. e I. M. YAGLOM. La inducción en Geometría. Limusa Wiley. México, D.F. 1972.

WILLOUGHBY STEPHEN. S. Probabilidad Estadística. Publicación Cultural. México, D.F. 1974.

LEHMANN CHARLES. Algebra. Limusa. México, D.F. 1979.

SALAS DE LEON SANTIAGO. Demostración Matemática de la Teoria Marxista del Valor Trabajo. Catedra No. 11 Año V, Enero-Marzo de 1979.

GORTARI ELI DE. Lógica General. Grijalbo. México, D.F. 1972.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. Matemáticas II. SEP. México, D.F. 1981.

FECHA DE DEVOLUCION

Este libro deberá ser devuelto dentro de un término que expira en la fecha marcada por el último sello; de no ser así, el lector se obliga a pagar las multas que marcan los Reglamentos.

Salas de León, Santiago Alfredo
Demostración y comprobación de conocimientos. Maestro en Metodología de las ciencias. UANL. 1986.

Fecha de Vencimiento	Nombre del Lector