## *UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON*

## *FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS*

### *ESCUELA DE GRADUADOS EN*

### *ADMINISTRACION E INGENIERIA INDUSTRIAL*

# VALIDACION MATEMATICA DE UN NUEVO METODO PARA SOLUCION DE ALGUNOS TIPOS DE PROBLEMAS RELACIONADOS CON ALGEBRA LINEAL

*T E S I S*

QUE EN OPCION AL GRADO DE
MAESTRIA EN INGENIERIA INDUSTRIAL
CON ESPECIALIDAD EN SISTEMAS

P R E S E N T A

**ING. MARCO ANTONIO MENDEZ CAVAZOS M. EN C.**

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS

ESCUELA DE GRADUADOS EN

ADMINISTRACION E INGENIERIA INDUSTRIAL

# VALIDACION MATEMATICA DE UN NUEVO METODO PARA SOLUCION DE ALGUNOS TIPOS DE PROBLEMAS RELACIONADOS CON ALGEBRA LINEAL

T E S I S

QUE EN OPCION AL GRADO DE

MAESTRIA EN INGENIERIA INDUSTRIAL

CON ESPECIALIDAD EN SISTEMAS

P R E S E N T A

ING. MARCO ANTONIO MENDEZ CAVAZOS M. EN C.

En el transcurso de este trabajo presentarse la validación matemática, así como ejemplos de un nuevo método para solución de algunos problemas relacionados con Algebra Lineal, Método que fue descubierto de manera empírica por el Ingeniero Rene Mario Montante Pardo, Maestro de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Dicho método lo veremos aplicado a la solución de sistemas de ecuaciones lineales, obtención de la adjunta de una matriz, obtención de la inversa de una matriz, obtención del valor de un determinante, así como al método simplex de programación lineal. Donde podremos observar que este método tiene la ventaja de nunca generar elementos fraccionarios durante el proceso intermedio de solución, por lo que facilita la solución de los casos antes expuestos y además y más importante aún es el que se evitará los truncamientos de fracciones y la acumulación de un error en la respuesta, evitándose así el trabajo necesario para la corrección de dicho error.

Veamos primero el método como una serie de pasos a realizar (sin fundamentación matemática) aplicandolo a la transformación de una matriz regular en una matriz identidad.

En la matriz.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & -3 & -4 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Generamos una segunda matriz.

1° Seleccionaremos en cada paso como elemento pivote uno de la diagonal mayor $\neq 0$ (seleccionados en el orden $a_{11}$, $a_{22}$, ...., $a_{nn}$).

para nuestro ejemplo $a_{11} = 3$

2° Hagamos cero todos los elementos de la columna del pivote excepto él mismo

3° Dejemos igual toda la fila del pivote.

4° Calcular el resto de los elementos de la nueva matriz.

Para lo cuál llamaremos:

$a_{ij}$ = Al elemento en la posición i,j de la matriz actual.

$a^*_{ij}$ = Al elemento en la posición i, j de la matriz por generar.

# p. = Número pivote anterior.

# p.a. = Número pivote actual.

E.C.R.P. = Al elemento correspondiente al $a_{ij}$ buscando en el renglón del pivote.

E.C.C.P. = Al elemento correspondiente al $a_{ij}$ buscando en la columna del pivote.

Entonces para las filas diferentes de la del pivote calcularemos

$$a^*_{iJ} = \left[ (a_{iJ}) (\# \text{ P.A.}) - (\text{E.C.C.P.}) (\text{E.C.R.P.}) \right] / \#p.$$

Cálculos para la segunda matriz.
(Suponiendo #p. = 1)

$$a^*_{22} = (4)(3) - (5)(-2) = 22$$
$$a^*_{23} = (-3)(3) - (5)(5) = -34$$
$$a^*_{24} = (-4)(3) - (5)(3) = -27$$
$$a^*_{32} = (1)(3) - (7)(-2) = 17$$
$$a^*_{33} = (2)(3) - (7)(5) = -29$$
$$a^*_{34} = (1)(3) - (7)(3) = -18$$
$$a^*_{42} = (-3)(3) - (4)(-2) = -1$$
$$a^*_{43} = (1)(3) - (4)(5) = -17$$
$$a^*_{44} = (-5)(3) - (4)(3) = -27$$

Quedandonos:

$$\text{Segunda Matriz.} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 22 & -34 & -27 \\ 0 & 17 & -29 & -18 \\ 0 & -1 & -17 & -27 \end{bmatrix}$$

Generación de una tercera, cuarta, ...., enésima matriz.

a) Tomamos el nuevo pivote (el elemento siguiente en la diagonal mayor).

b) Pasemos unos ejes imaginarios sobre la fila y la columna del pivote.

c) Dejemos igual la fila del pivote.

d) Hagamos cero los elementos de la columna del pivote ecepto êl

e) Hagamos cero los elementos del II y III cuadrante, si no pertenecen a la diagonal mayor. E igual al nuevo pivote si pertenecen a ella

f) Calculemos solo los elementos del I y IV cuadrante por la misma formula.

$$a^*_{ij} = \frac{(a_{ij})\ (\#\ P.A.) - (E.C.C.P.)\ (E.C.R.P.)}{\#\ P.}$$

Calculos para generar una tercer matriz en nuestro ejemplo.

$$a^*_{13} = \frac{(5)\ (22) - (-2)\ (-34)}{3} = 14$$

$$a^*_{14} = \frac{(3)\ (22) - (-2)\ (-27)}{3} = 4$$

$$a^*_{33} = \frac{(-29)\ (22) - (17)\ (-34)}{3} = 20$$

$$a^*_{34} = \frac{(-18)\ (22) - (17)\ (-27)}{3} = 21$$

$$a^*_{43} = \frac{(-17)\ (22) - (-1)\ (-34)}{3} = -136$$

$$a^*_{44} = \frac{(-27)\ (22) - (-1)\ (-27)}{3} = -207$$

Quedandonos:

$$\text{Tercera Matriz.} = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 14 & 4 \\ 0 & 22 & -34 & -27 \\ 0 & 0 & -20 & 21 \\ 0 & 0 & -136 & -207 \end{bmatrix}$$

Cuarta Matriz.

Calculos;

$$a^*_{14} = \frac{(\ 4)\ (-20) - (\ 14)\ (21)}{22} = 17$$

$$a^*_{24} = \frac{(-27)\ (-20) - (-34)\ (\ 21)}{22} = 57$$

$$a^*_{34} = \frac{(-207)(-20) - (-136)(21)}{22} = 318$$

Quedandonos:

$$\text{Cuarta Matriz} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & -20 & 0 & 57 \\ 0 & 0 & -20 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 318 \end{bmatrix}$$

Quinta Matriz.

$$\text{Quinta Matriz} = \begin{bmatrix} 318 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 318 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 318 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 318 \end{bmatrix}$$

Donde el determinante de la matriz vale 318, en cuanto a la identidad dividiremos la matriz entre 318 para obtenerla.

1° Nunca trabajamos con números faraccionarios lo cual de más facilidad de manejo y evita el error por redondeo o truncamiento.

2° Proporciona facilmente el valor de un determinante de orden n.

3° Al pasar de una matriz a otra se reduce el número de cálculos.

Veamos ahora el nuevo método aplicado a la solución de un sistema de ecuaciones lineales y comparemos contra la solución del mismo sistema por un método alternativo (gauss-jordan). En el cual se mantendrán los elementos fraccionarios como quebrados para evitar el error (cabe mencionar que si resolviesemos el sistema en una computadora tendriamos que trabajar los elementos como fraccionarios y ocasionar truncamientos y un error acumulativo).

$$
\begin{aligned}
3X - 2Y + 5Z + 3W &= 8\\
5X - 4Y - 3Z - 4W &= 10\\
7X + Y + 2Z + W &= 9\\
4X - 3Y + Z - 5W &= 13
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
3 & -2 & 5 & 3 & 8\\
5 & 4 & -3 & -4 & 10\\
7 & 1 & 2 & 1 & 9\\
4 & -3 & 1 & -5 & 13
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
3 & -2 & 5 & 3 & 8\\
0 & 22 & -34 & -27 & -10\\
0 & 17 & -29 & -18 & -29\\
0 & -1 & -17 & -27 & 7
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
22 & 0 & 14 & 4 & 52\\
0 & 22 & -34 & -27 & -10\\
0 & 0 & -20 & 21 & -156\\
0 & 0 & -136 & -207 & 48
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
-20 & 0 & 0 & -17 & 52\\
0 & -20 & 0 & 57 & -232\\
0 & 0 & -20 & 21 & -156\\
0 & 0 & 0 & 318 & -1008
\end{array}\right]
$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 318 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 318 & 0 & 0 & 816 \\ 0 & 0 & 318 & 0 & 1422 \\ 0 & 0 & 0 & 318 & -1008 \end{array}\right]$$

$$X = \frac{30}{318} = \frac{5}{53}$$

$$Y = \frac{816}{318} = \frac{136}{53}$$

$$Z = \frac{1422}{318} = \frac{237}{53}$$

$$W = \frac{-1008}{318} = \frac{-168}{53}$$

DETERMINANTE = 318

# GAUSS - JORDAN

$$\frac{1}{3}\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & -3 & -4 & 10 \\ 7 & 1 & 2 & 1 & 9 \\ 4 & -3 & 1 & 5 & 13 \end{array}\right] \sim \quad -4 \quad -7 \quad -5 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ 5 & 4 & -3 & -4 & 10 \\ 7 & 1 & 2 & 1 & 9 \\ 4 & -3 & 1 & -5 & 13 \end{array}\right]$$

$$\frac{3}{22}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} & -\frac{34}{3} & -9 & -\frac{10}{3} \\ 0 & \frac{17}{3} & \frac{29}{3} & -6 & -\frac{29}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & -\frac{17}{3} & -9 & \frac{7}{3} \end{array}\right] \sim \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{17}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{11} & -\frac{27}{22} & \frac{-5}{11} \\ 0 & \frac{17}{3} & -\frac{29}{3} & -6 & -\frac{29}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{17}{3} & -9 & \frac{7}{3} \end{array}\right]$$

$$\frac{11}{10}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} & \frac{26}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{11} & -\frac{27}{22} & \frac{-5}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{11} & \frac{21}{22} & -\frac{78}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{68}{11} & -\frac{207}{11} & -\frac{24}{11} \end{array}\right] \sim \quad \frac{68}{11} \quad \frac{-7}{11} \quad +\frac{17}{11} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} & \frac{26}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{11} & -\frac{27}{22} & \frac{-5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{20} & \frac{39}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{68}{11} & -\frac{207}{22} & \frac{24}{11} \end{array}\right]$$

$$-\frac{10}{159}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{20} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{57}{20} & \frac{58}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{20} & \frac{39}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{159}{10} & \frac{252}{5} \end{array}\right] \sim \quad \frac{17}{20} \quad \frac{57}{20} \quad \frac{21}{20} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{20} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{57}{20} & \frac{58}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{20} & \frac{39}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{168}{53} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{53} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{136}{53} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{237}{53} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{168}{53} \end{array}\right]$$

$$X = \frac{5}{53}$$

$$Y = \frac{136}{53}$$

$$Z = \frac{237}{53}$$

$$W = -\frac{168}{53}$$

En este punto veremos los efectos de los truncamientos al encontrar la inversa de una matriz "A" de orden 3X3 utilizando solo tres decimales en cada operación y por el método de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.137 & -0.164 & -0.016 \\ 0.015 & -0.200 & 0.208 \\ -0.070 & 0.356 & -0.142 \end{bmatrix}$$

donde el producto de $A.A^{-1}$ debería darnos una identidad, pero debido a los truncamientos nos da

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.982 & 0.000 & 0.002 \\ -0.004 & 1.000 & -0.002 \\ -0.001 & 0.008 & 0.988 \end{bmatrix}$$

Mientras que por el nuevo método en todos los pasos intermedios solo existirán elementos enteros evitándose los truncamientos, mejorando la aproximación.

Ahora veamos el nuevo método aplicado al método simplex - de programación lineal y hagamos una comparación contra el método simplex con el procedimiento de Dantzig, donde podremos - observar que en este último aparecen una gran cantidad de fracciones, las cuales al ser truncadas a la milésima ocasionan un error acumulativo. Y nos daremos cuenta cuando lleguemos a la última tabla (donde todos los elementos del renglón índice son mayores o iguales a cero), la respuesta "óptima" de las diferentes variables resulta que son diferentes de la respuesta -- real, y por lo tanto el valor de la función objetivo menor.

De tal forma que a pesar de que el procedimiento de --- Dantzig sea correcto, debido a los truncamientos necesarios en cualquier computadora nos dará una respuesta que no será exactamente la óptima. Mientras que por el nuevo procedimiento la respuesta es exactamente la óptima.

Una segunda observación será el hecho de que si en el problema original se requería que el valor de las variables fuese en enteros, por el procedimiento de Dantzig nos da el valor de las variables con fracciones mientras que el valor real es entero. Por lo que por el procedimiento de Dantzig sería necesario aplicar otro procedimiento como el método Gomory para llegar a valores enteros, lo cuál por el nuevo procedimiento no - sería necesario para este problema.

$$-2X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$4X_1 + 10X_2 \leq 40$$
$$7X_1 + 12X_2 \leq 84$$
$$-5X_1 + 3X_2 \leq 15$$
$$5X_1 + 8X_2 = Z\ (MAX)$$

DANTZIG

| | | | 5 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | X1 | X2 | WA | WB | WC | WD |
| 0 | WA | 4 | -2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | WB | 40 | 4 | 10 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | WC | 84 | 7 | 12 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | WD | 15 | -5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | 0 | -5 | -8 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | 5 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | X1 | | WA | WB | WC | WD |
| 8 | X2 | 2 | -1 | 1 | .500 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | WB | 20 | .4 | 0 | -5 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | WC | 60 | 19 | 0 | -6 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | WD | 9 | -2 | 0 | -1 .500 | 0 | 0 | 1 |
| | | 16 | -13 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | WA | WB | WC | WD |
| 8X2 | 3.428 | 0 | 1 | .143 | .071 | 0 | 0 |
| 5X1 | 1.428 | 1 | 0 | -.357 | .071 | 0 | 0 |
| OWC | 32.868 | 0 | 0 | .783 | -1.349 | 1 | 0 |
| OWD | 11.856 | 0 | 0 | -2.214 | .142 | 0 | 1 |
| | 34.564 | 0 | 0 | -.641 | .923 | 0 | 0 |

| | | | | | | WB | WC | WD |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | WA | 23.972 | 0 | 6.993 | 1 | .496 | 0 | 0 |
| 5 | X1 | 9.986 | 1 | 2.496 | 0 | .249 | 0 | 0 |
| 0 | WC | 14.097 | 0 | -5.475 | 0 | -1.737 | 1 | 0 |
| 0 | WD | 64.930 | 0 | 15.480 | 0 | 1.240 | 0 | 1 |
| | | 49.93 | 0 | 4.482 | 0 | 1.240 | 0 | 0 |

WA = 23.972; X1 = 9.986; WC = 14.097

WD = 64.930; Z = 49.93

NUEVO METODO

| | | | 5 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | X1 | X2 | WA | WB | WC | WD |
| 0 | WA | 4 | -2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | WB | 40 | 4 | 10 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | WC | 84 | 7 | 12 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | WD | 15 | -5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | 0 | -5 | -8 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | 5 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | X1 | | WA | WB | WC | WD |
| 8 | X2 | 4 | -2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | WB | 40 | 28 | 0 | -10 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | WC | 120 | 38 | 0 | -12 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | WD | 18 | -4 | 0 | -3 | 0 | 0 | 2 |
| | | 32 | -26 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | WA | WB | WC | WD |
| 8X2 | 96 | 0 | 28 | 4 | 2 | 0 | 0 |
| 5X1 | 40 | 28 | 0 | -10 | 2 | 0 | 0 |
| 0WC | 920 | 0 | 0 | 22 | -38 | 28 | 0 |
| 0WD | 332 | 0 | 0 | -62 | 4 | 0 | 28 |
| | 968 | 0 | 0 | -18 | 26 | 0 | 0 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | WB | WC | WD |
| OWA | 96 | 0 | 28 | 4 | 2 | 0 | 0 |
| 5X1 | 40 | 4 | 10 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| OWC | 56 | 0 | -22 | 0 | -7 | 4 | 0 |
| OWD | 260 | 0 | 62 | 0 | 5 | 0 | 4 |
| | 200 | 0 | 18 | 0 | 5 | 0 | 0 |

$WA = \frac{96}{4} = 24$; $X1 = \frac{40}{4} = 10$; $WB = \frac{56}{4} = 14$

$WC = \frac{260}{4} = 65$; $Z = \frac{200}{4} = 50$

Un Ejemplo mas Aplicado a un Modelo de Dietas de Programación Lineal.

Ej.

Se desea encontrar la mezcla optima de ingredientes X1, X2, X3, X4, para formar un producto final con características tales que posea de la característica "A" a lo mucho 42 gr./Kg. - de la característica "B" entre 50 y 80 gr./Kg. y de la característica "C" a lo mucho 20 gr./Kg. del producto total.

Se conocen las características de cada ingrediente así como su costo. Los cuales se resumen en la siguiente tabla.

| | "A" | "B" | "C" | COSTO ($) |
|---|---|---|---|---|
| X1 | 40 gr/Kg | 10 gr/Kg | 12 gr/Kg | 35. |
| X2 | 35 | 50 | 16 | 10. |
| X3 | 10 | 25 | 18 | 4. |
| X4 | - | 15 | 25 | 30. |

función objetivo:

$$-35\ X1 - 10\ X2 - 4X3 - 30\ X4 = Z\ (MAX)$$

S.r.

$$30\ X1 + 35\ X2 + 10X3 \leq 42$$

$$10\ X1 + 50\ X2 + 25X3 + 15\ X4 \leq 50$$

$$10\ X1 + 50\ X2 + 25X3 + 15\ X4 \leq 80$$

$$12\ X1 + 16\ X2 + 18X3 + 25\ X4 \leq 20$$

Primera Tabla:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | -35 | -10 | -4 | -30 | 0 | 0 | -M | 0 | 0 |
| | | | X1 | X2 | X3 | X4 | WB | WA | U1 | WC | WD |
| 0 | WA | 42 | 30 | 35 | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| -M | U1 | 50 | 10 | 50 | 25 | 15 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | WC | 80 | 10 | 50 | 25 | 15 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | WD | 20 | 12 | 16 | 18 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | -50M | -10M + 35 | -50M + 10 | -25M + 4 | -15M + 30 | M | 0 | 0 | 0 | 0 |

Segunda tabla:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | -35 | | -4 | -30 | 0 | 0 | -M | 0 | 0 |
| | | | X1 | | X3 | X4 | WB | WA | U1 | WC | WD |
| 0 | WA | 350 | 1150 | 0 | -375 | -525 | 35 | 50 | -35 | 0 | 0 |
| -10 | X2 | 50 | 10 | 50 | 25 | 15 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | WC | 1500 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 | 0 | -50 | 50 | 0 |
| 0 | WD | 200 | 440 | 0 | 500 | 1010 | 16 | 0 | -16 | 0 | 50 |
| | | -500 | 1650 | 0 | -50 | 1000 | 10 | 0 | 50M - 10 | 0 | 0 |

**Tercera Tabla:**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | -35 | | | -30 | 0 | 0 | -M | 0 | C |
| | | | X1 | | | X4 | WB | WA | U1 | WC | WD |
| 0 | WA | 5000 | 14800 | 0 | 0 | -5130 | 470 | 500 | -470 | 0 | 375 |
| -10 | X2 | 400 | -120 | 500 | 0 | 6995 | -18 | 0 | 18 | 0 | -25 |
| 0 | WC | 15000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 500 | 0 | -500 | 500 | 0 |
| -4 | X3 | 200 | 440 | 0 | 500 | 1010 | 16 | 0 | -16 | 0 | 50 |
| | | -4800 | 16940 | 0 | 0 | 11010 | 116 | 0 | 500M - 26 | 0 | 50 |

RESPUESTA:

$WA = \frac{5000}{50} = 10.$ ; $WC = \frac{15000}{500} = 30$

$X2 = \frac{400}{500} = .8$ ; $X3 = \frac{200}{500} = .4$

$$Z = - \frac{4800}{500} = - 9.6$$

" VALIDACION MATEMATICA DEL MODELO"

Si tenemos la matriz regular Aij de orden nxn formada por los elementos enteros

$$Aij = \begin{bmatrix} A\ 11 & A\ 12 & \cdots & A\ 1n \\ A\ 21 & A\ 22 & \cdots & A\ 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A\ n1 & An2 & \cdots & A\ nn \end{bmatrix}$$

La cual queremos transformar en una identidad. El procedimiento tradicional (Gauss-Jordan) consiste en.

1° Seleccionar un elemento Akp como elemento pivote (normalmente k = p).

2° Dividir los elementos de la fila "K" entre el número pivote.

3° Sumar a las restantes filas $i \neq K$
La fila obtenida en el paso anterior multiplicada por el negativo del elemento correspondiente a la fila "i" en la columna del pivote ("P").

4° Repetir el procedimiento hasta encontrar la identidad.

Para expresar el procedimiento anterior en función de transformaciones elementales de matrices hagamos lo siguiente.

1° # pivote = akp

2° $H_k \left( \frac{1}{a_{k_p}} \right)$ Multiplicar la fila "K" por $\frac{1}{a_{k_p}}$

Lo cual transformara los elementos de la fila K en:

$\frac{a_{i_j}}{a_{k_p}}$ para $i = k$; $j = 1, 2, \ldots; n$

3° $H_{ik} \; (-a_{i_p})$ sumar a la fila i la fila k transformada en el paso anterior por $- a_{i_p}$ para $i \neq k$

Lo cual transforma los elementos de la fila $i \neq k$ en:

$$\text{nuevo } a_{i_j} = \text{Anterior } a_{i_j} + \frac{a_{kj}}{a_{kp}} (-a_{i_p})$$

Donde si llamamos

$$a'_{ij} = \text{Nuevo } a_{ij}$$

$$a_{ij} = \text{Anterior } a_{ij}$$

Nos queda:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \left[\frac{a_{kj} \quad a_{ip}}{a_{kp}}\right]$$

Por lo que los elementos de la segunda matriz estaran dados por:

para la fila $i \neq k$ $\quad a'_{ij} = a_{ij} - \left[\frac{a_{kj} \quad a_{ip}}{a_{kp}}\right]$

para la fila $i=k$ $\quad a'_{ij} = a_{ij} \,/\, a_{kp}$

Una objeción a este método tradicional es el hecho de que debido a la forma de obtener los elementos de una segunda matriz genera normalmente una gran cantidad de ( quebrados ) elementos con fracciones las cuales al utilizar una computadora o calculadora se truncan ocasionando un error que se acumula durante el gran número de operaciones efectuadas. Debido a lo cual si tratamos de resolver un sistema de ecuaciones lineales el resultado contará con un grado de error el cual será mayor entre mayor sea el sistema por lo que para corregir este, será necesario de un segundo procedimiento (uso de las ecuaciones de error ).

Por lo que tratando de evitar ese problema es posible modificar el método tradicional y llegar a la respuesta sin que en los pasos intermedios existan números con fracciones.

Para demostrar el nuevo método tendremos :

1° Una matriz regular $A_{ij}$ de orden n formada por elementos enteros.

2° Para mayor facilidad supondremos todos los elementos pivotes como parte de la diagonal principal seleccionados en el orden a11, a22, a33, .....,ann.

partiendo de las fórmulas del método tradicional.

para la fila $i \neq k$ $\quad a'_{i_j} = a_{i_j} - \left[ \frac{a_{k_j} \quad a_{i_p}}{a_{k_p}} \right]$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $a_{k_p}$ (número pivote)

$$a'_{i_j} \quad a_{k_p} = a_{i_j} \quad a_{k_p} - a_{k_j} \quad a_{i_p}$$

y para la fila $i=k$

$$a'_{i_j} = \frac{a_{i_j}}{a_{k_p}}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $a_{k_p}$ (número pivote)

$$a'_{i_j} \times a_{k_p} = a_{i_j}$$

Donde el elemento $a'_{i_j}$ representa el elemento de la segunda matriz por el método tradicional y el $a'_{i_j} \times a_{k_p}$ representa el elemento de la segunda matriz por el nuevo método.

Para facilidad de manejo definamos $a''_{i_j} = a'_{i_j} \times a_{k_p}$ y observemos lo siguiente:

primero:

$$a''_{i_j} = a_{i_j} \quad a_{k_p} (-) \; a_{i_p} a_{k_j} \quad \text{para} \quad i \neq k$$

El cual esta dado por el producto de dos enteros menos el producto de otros dos por lo que será otro entero.

segundo:

$$a''_{i_j} = a_{i_j} \quad \text{para} \quad i = k$$

El cual será el entero original.

Tercero:

Si los elementos obtenidos por el método tradicional son $a_{i_j}$ y los obtenidos por el nuevo método son $a_{i_j} \; a_{k_p}$ entonces la segunda matriz del nuevo método será $a_{k_p}$ (pivote) veces la del método tradicional.

Cuarto:

a).- Como los elementos de la filas $i \neq k$ estan dados por

$$a''_{i_j} = a_{i_j} \; a_{k_p} - a_{k_j} \; a_{i_p}$$

Cuando evaluemos los elementos de la columna " p " ( columna del pivote ) es decir $j = p$ la ecuación se transforma en:

$$a''_{i_j} = a_{i_p} \; a_{k_p} - a_{k_p} \; a_{i_p} = 0$$

b).- Como los elementos de la fila $i=k$ estan dados por

$$a''_{i_j} = a_{i_j}$$

entonces estos no cambian de una tabla a otra.

Hasta ahora solo hemos generado una segunda matriz por el nuevo método partiendo de esta y con lo antes expuesto veamos la forma de generar una tercera, cuarta, enésima matriz.
El procedimiento a seguir es similar al antes empleado excepto por que al generar una nueva matriz a cada fila $i \neq k$ (diferente de la del pivote ) se le aplica una transformación elemental del tipo $H_{i(k)}$ DONDE LA Constante k es igual al inverso del pivote anterior. Lo cual es perfectamente válido

$$H_{i}\left(\frac{i}{a_{k_p}}\right)$$

Lo importante ahora es demostrar que apesar de la división anterior los elementos generados siguen siendo enteros. Para lo cual recordaremos que en la primera y segunda matriz solo tenemos enteros

Además llamaremos:

$a_{i_j}$ = elemento de la matriz original.

$a^*_{i_j}$ = elemento de la segunda matriz

$a^{**}_{i_j}$ = elemento de la tercer matriz.

Tambien sabemos que el pivote anterior fue $a_{k_p} = a_{11}$ y el nuevo pivote será $a_{k+1\ p+1} = a_{22}$

FORMACION DE LA TERCERA MATRIZ.

1° Los elementos de la fila del pivote debido a la fórmula por la cual se encuentran permaneceran iguales y por lo tanto enteros.

2° Los elementos de las filas que no pertenescan a la fila del pivote son de dos tipos.

I.- Los que en la matriz anterior (primera) fueron de la fila $i=k$ los cuales no cambiaron, ya que se encontraron por la fórmula:

$$a^*_{i_j} = a_{i_j} \quad \text{para } i = k$$

II.- Los que en la matriz anterior (primera) fueron de una fila $i \neq k$ que fueron generados por la fórmula:

$$a^*_{i_j} = a_{i_j} a_{k_p} - a_{k_j} a_{i_p}$$

Ahora tendremos que los elementos de la tercer matriz para las filas diferentes de la del pivote seran generados por la fórmula.

$$a^{**}_{i_j} = \frac{a^*_{i_j} \quad a^*_{kp} - a^*_{k_j} \quad a^*_{i_p}}{a_{k_p}}$$

Es decir la fórmula original agregandole el efecto de la transformación elemental $H_i\left(\frac{1}{a_{k_p}}\right)$

Entonces si el $a^{**}_{i_j}$ buscado pertenecio a la fila del pivote anterior ( primera matriz ) este será del tipo $a^{**}_{1j}$ y como el pivote anterior = $a_{k_p}$ = $a_{11}$ *y el nuevo* pivote = $a^*_{k_p}$ = $a_{22}$.

Entonces la fórmula se transforma en:

$$a^{**}_{1_j} = \left[a^*_{1_j} \quad a^*_{22} - a^*_{2_j} \quad a^*_{12}\right] / a_{11}$$

Expresando estos elementos *en función de los de la* primera ma triz.

$a^*_{1j}$ = $a_{1_j}$ No cambio ya que fue parte de la fila del pivote *anterior.*

$a^*_{22}$ = $a_{22} \quad a_{11} - a_{21} \quad a_{12}$

$a^*_{2j}$ = $a_{2j} \; a_{11} - a_{1j} \; a_{21}$

$a^*_{12}$ = $a_{12}$ No cambio ya que fue parte de la fila del pivote anterior.

Substituyendo:

$$a^{**}_{1_j} = \frac{a_{1j} \left[a_{22} \; a_{11} - a_{21} \; a_{12}\right] - \left[a_{2j} \; a_{11} - a_{ij} \; a_{21}\right] a_{12}}{a_{11}}$$

Simplificando:

$$a^{**}_{1_j} = \frac{a_{1j} \; a_{22} \; a_{11} - \cancel{a_{1j} \; a_{21} \; a_{12}} - a_{2j} \; a_{11} \; a_{12} + \cancel{a_{1j} \; a_{21} \; a_{12}}}{a_{11}}$$

$$a^{**}_{1_j} = \frac{a_{1j} \; a_{22} \cancel{a_{11}} - a_{2j} \cancel{a_{11}} \; a_{12}}{a_{11}}$$

$$A^{**}_{1j} = a_{1j} \; a_{22} - a_{2j} \; a_{12}$$

*Por lo que si el* elemento fue del *tipo I*. Será un entero *ya* que al final de cuentas es generado por el producto de dos en teros menos el producto de otros dos.

Si el $a^{**}_{ij}$ buscado pertenecio en la matriz anterior (primera) a una fila diferente de la del pivote será ahora generado por la fórmula:

$$a^{**}_{ij} = \frac{a^{*}_{ij} \; a^{*}_{22} - a^{*}_{i2} \; a^{*}_{2j}}{a_{11}}$$

Expresado los elementos de la segunda matriz en función de los de la primera.

$$a^{*}_{ij} = a_{ij} \; a_{11} - a_{i1} \; a_{1j}$$

$$a^{*}_{22} = a_{22} \; a_{11} - a_{21} \; a_{12}$$

$$a^{*}_{i2} = a_{i2} \; a_{11} - a_{i1} \; a_{12}$$

$$a^{*}_{2j} = a_{2j} \; a_{11} - a_{21} \; a_{1j}$$

substituyendo en la ecuación del $a^{**}_{ij}$ buscando:

$$A^{**}_{ij} = \frac{\left[A_{ij} A_{11} - A_{i1} A_{1j}\right] \left[A_{22} A_{11} - A_{21} A_{12}\right] - \left[A_{i2} A_{11} - A_{i1} A_{12}\right] \left[A_{2j} A_{11} - A_{21} A_{1j}\right]}{A_{11}}$$

Simplificando.

$$A^{**}_{ij} = \frac{A_{ij}A_{11}A_{22}A_{11} - A_{ij}A_{11}A_{21}A_{12} - A_{i1}A_{1j}A_{22}A_{11} + A_{i1}A_{1j}A_{21}A_{12} - A_{i2}A_{11}A_{2j}A_{11} + A_{i2}A_{11}A_{21}A_{1j} + A_{i1}A_{12}A_{2j}A_{11} - A_{i1}A_{12}A_{21}}{A_{11}}$$

$$A^{**}_{ij} = \frac{A_{ij}A_{11}A_{22}\cancel{A_{11}} - A_{ij}\cancel{A_{11}}A_{21}A_{12} - A_{i1}A_{1j}A_{22}\cancel{A_{11}} - A_{i2}A_{11}A_{2j}\cancel{A_{11}} + A_{i2}\cancel{A_{11}}A_{21}A_{1j} + A_{i1}A_{12}A_{2j}\cancel{A_{11}}}{\cancel{A_{11}}}$$

$$A^{**}_{ij} = A_{ij}A_{11}A_{22} - A_{ij}A_{21}A_{12} - A_{i1}A_{1j} A_{22} - A_{i2} A_{11}A_{2j} + A_{i2} A_{21} A_{1j} + A_{i1}A_{12}A_{2j}$$

Donde se puede observar que si el elemento buscado es del tipo II.- Será dado por sumas y restas de productos de enteros por lo que será otro entero.

Con lo anterior hemos demostrado que todos los elementos de la tercer matriz son enteros y como la base de esta demos - tración esta en que los elementos de las dos matrices anteriores eran enteros.

Entonces al generar una cuarta matriz el procedimiento y fórmulas será el mismo y será generada a partir de los elemen tos enteros de las matrices anteriores generandose necesaria - mente una cuarta matriz formada por elementos e teros por lo - que en general y de esa manera podemos llegar a una enésima matriz cuyos elementos sean enteros.

Además de la cualidad ya demostrada podemos deducir - partiendo de lo anterior algunas otras características - ventajosas del nuevo método.

Si imaginamos un par de ejes que pasen sobre la fila y la columna del elemento pivote nos daremos cuenta que solo - será necesario calcular para la siguiente matriz los elementos que se encuentran dentro del primer y cuatro cuadrante ya que los elementos del segundo y tercer cuadrante seran cero si no pertenecen a la diagonal principal, e igual al nuevo elemento pivote si pertenecen a ella.

veamos porque:

1° Los elementos que no forman parte de la diagonal principal.

Recordemos que cuando calculamos la segunda matriz, el elemento pivote fue $a_{11}$ todos los elementos de su columna $a_{i1}$ - excepto el se hicieron cero. Y que cuando calculamos la tercer matriz el elemento pivote fue $a^{*}_{22}$ y los elementos del II y III cuadrante que no forman parte de la diagonal principal son los $a^{**}_{i1}$ para $i \neq 1$ por lo que el elemento será cererado por

$$a^{**}_{i1} = \frac{a^{*}_{i1} \quad {}_{2} \; - \; a^{*}_{21} \; a^{*}_{i2}}{-k_p}$$

Donde tanto el $a^{*}_{i1}$ como el $a^{*}_{21}$ pertenecen a la columna uno y por lo tanto ceros convirtiendo al $a^{**}_{i1}$ en cero.

En general podemos observar de la fórmula.

$$a^{**}_{ij} = \frac{a^*_{ij} \; a^*_{k_p} - a^*_{i_p} \; a^*_{k_j}}{a_{k_p}}$$

Que contamos con dos elementos de la misma columna ( $a^*_{i_j}$ y $a^*_{k_j}$ ) los cuales si en la matriz anterior fueron ceros obligaran a que en la siguiente matriz el elemento $a^{**}_{i_j}$ que con ellos se relacione sea cero.

2° En cuanto a que los expivotes tomen el valor del nuevo pivote es debido a que en la fórmula.

$$a^{**}_{ij} = \frac{a^*_{ij} \; a^*_{k_p} - a^*_{k_j} \; a^*_{i_p}}{a_{k_p}}$$

en donde:

$a^*_{i_j}$ = es el expivote anterior = $a_{k_p}$

$a^*_{k_j}$ = es un elemento de la columna " j " del expivote sin ser el expivote y y por lo tanto cero.

substituyendo:

$$a^{**}_{ij} = \frac{a_{k_p} \; a^*_{k_p} - (0) \; a_{i_p}}{a_{k_p}}$$

$$a^{**}_{ij} = \frac{a_{k_p} \; a^*_{k_p}}{a_{k_p}}$$

$$a^{**}_{i_j} = a^*_{k_p}$$

Por lo que como el elemento buscado $a^{**}_{ij}$ era un expivote y tomará el valor de $a^{*}_{kp}$ precisamente el nuevo pivote.

De acuerdo a todo lo anterior llegamos a que la última matriz será una matriz escalar donde el valor del escalar es el del último pivote, osea que la matriz obtenida es k veces la matriz identidad por lo que solo nos restará dividirla entre k para obtener la identidad buscada, sin que en los pasos intermiedios hayan existido números fraccionarios.

Otras dos bondades del método son el hecho de que nos permite encontrar de una manera simple el valor del determinante de la matriz asi como su adjunta.

veamos porque:

Si originalmente nuestra matriz $a_{ij}$ fuera de un solo elemento (matriz de orden uno $A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ ) y la tranformamos por el nuevo método hasta que sea una matriz diagonal, la constante de la diagonal mayor será $a_{11}$ y si evaluamos el determinante de la matriz este será tambien $a_{11}$.

Si ahora nuestra matriz fuese de orden dos

$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y la transformamos por

el nuevo método hasta que sea una matriz diagonal encontramos que la consante de la diagonal mayor es $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$

y si evaluamos el determinante de la matriz este será tambien $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$

Si ahora nuestra matriz fuese de orden

tres $A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Y la transformamos por el nuevo método hasta que sea una matriz diagonal, la constante de la diagonal mayor será

$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{31} a_{22} a_{13}$

Si evaluamos el determinante de la matriz este será tambien

$$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

De esa manera podemos continuar y transformar por el nuevo método una matriz de orden n en una matriz diagonal donde el valor de la constante de la diagonal mayor estará dado por la suma algebráica de los n! productos posibles tomando como factores uno y solamente uno de los elementos de cada fila y columna dandole a cada producto un signo mas o unos menos según haya un número par o impar de inversiones de los subindices de las filas cuando los elementos de cada producto estan ordenados según el subindice de la columna. Lo cual es precisamente la definición del valor de un determinante de orden "n".

En el caso particular de la obtención del valor de un determinante en el año de 1853 chio desarrollo el método de condensación pivotal el cual posee un gran parecido con este método pero resulta inaplicable a las matrices (Desarrolladas en 1857 por cayley ) debido a la reducción de filas y columnas planteada por el método de chio además. posee una diferencia en la forma de manejar lo que en este nuevo método llamamos pivote anterior.

En cuanto a la obtención de la adjunta de la matriz. Tenemos que si a una matriz "$A_{ij}$" de orden "n" le agregamos a su derecha una matriz identidad "In" y transformamos la nueva matriz de orden "nx2n" por el nuevo método hasta que en la posición de "$A_{ij}$" se encuentre una matriz diagonal.

Solo nos restaría dividir la matriz de orden "nx2n" entre el valor de la constante de la diagonal mayor (valor del determinante de la matriz "$A_{ij}$") de dicha ratriz diagonal, para obtener en donde se encontrara "$A_{ij}$" una identidad y en la parte donde se encontraba "In" la inversa de "$A_{ij}$" $(A_{ij}^{-1})$.

Ahora como dicha inversa pudo ser encontrada tambien por la fórmula

$$A_{ij}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A_{ij})}{|A_{ij}|}$$

por lo que despejando tendremos.

$$\operatorname{Adj}(A_{ij}) = A_{ij}^{-1}\,|A_{ij}|$$

lo cual nos indica que en la posición de "In" un paso antes de dividir entre el determinante de $A_{ij}$ teniamos la adjunta de $A_{ij}$.