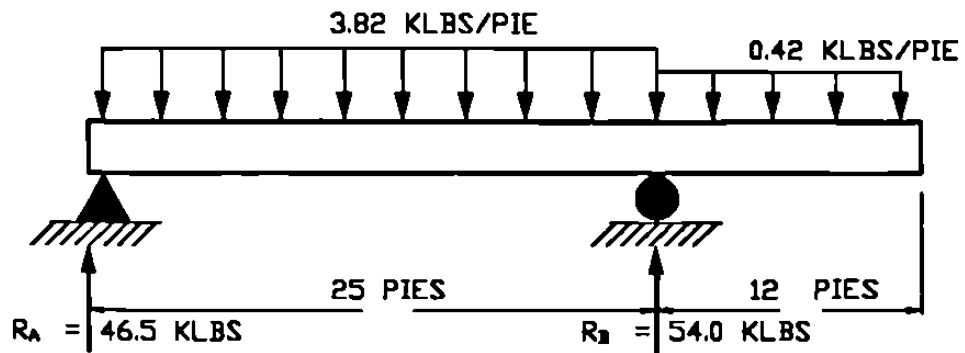
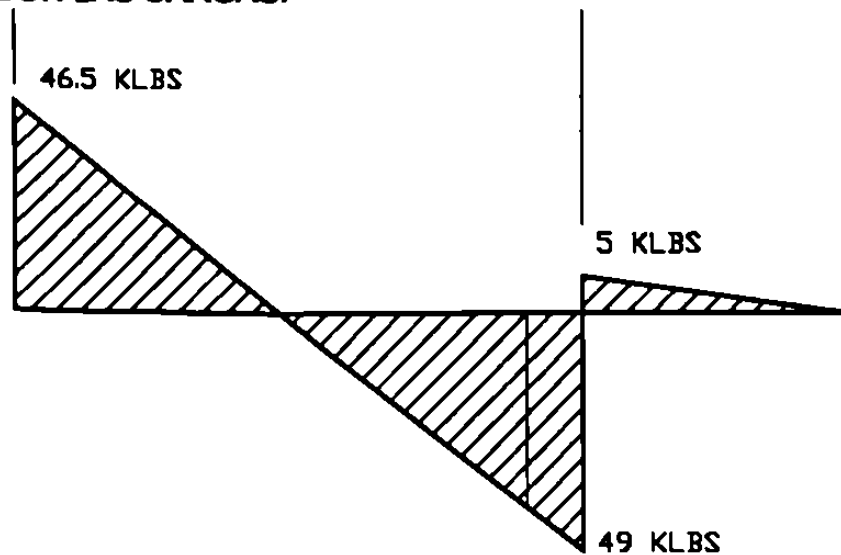


**SECCION PARA  
MOMENTO NEGATIVO**

COMBINACION DE CARGA PARA MOMENTO POSITIVO MAXIMO  
TOTAL EN EL CLARO Y MUERTA EN EL VOLADIZO



**(a) VIGA CON LAS CARGAS.**



**(b) DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES.**

Del diagrama de cuerpo libre de una parte del claro con origen en A el momento  $M_u$  a una distancia  $x$ , es:

$$M_u = 46.5x - \frac{3.82x^2}{2} \text{ KLBS-pie.}$$

A la mitad del claro la viga tiene 2#9 más 2#8. Si se cortan las 2#8. La capacidad de las varillas que quedan; (2#9) es:

$$\phi M_n = \frac{0.9x(2x1.0x60,000\left(21.5 - \frac{2.0x60,000}{17x3000x12}\right))}{12,000}$$

$$= 176 \text{ KLBS-pie.}$$

Igualando  $\phi M_n = M_u = 176 \text{ KLBS-pie}$ , en la ecuación anterior queda:

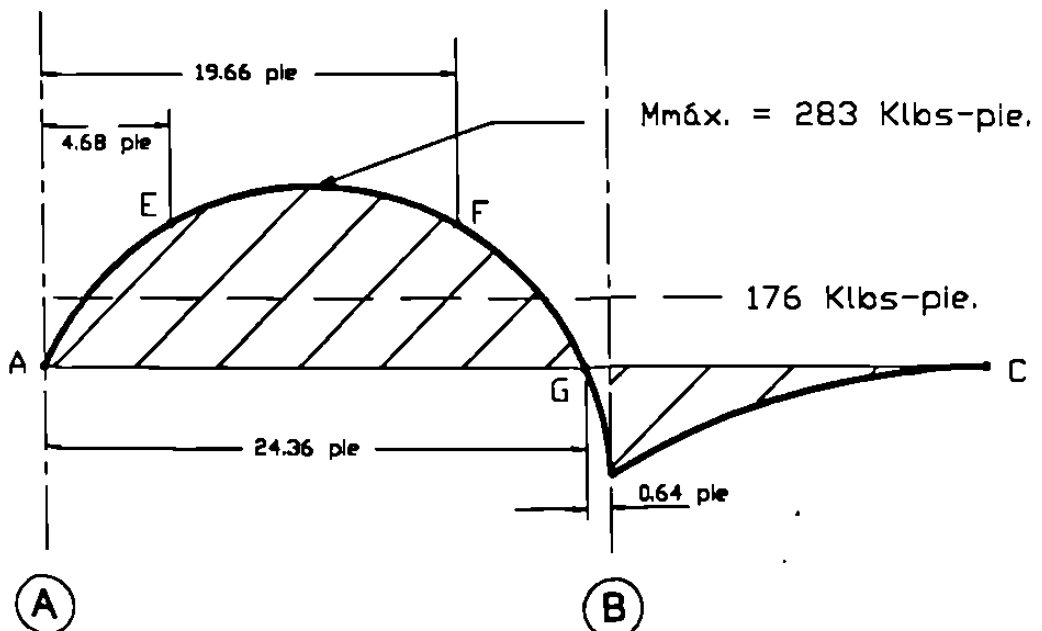
$$1.9x^2 - 46.5x + 176 = 0$$

La cual es una cuadrática en  $x$ , de la forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

cuya solución es: 
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Entonces,  $x = 4.68 \text{ pies}$  y  $19.66 \text{ pies}$ , a partir de A, dibujando el diagrama de momentos tenemos:



Se tienen en el diagrama los puntos de corte por flexión E y F, y G es el punto de momento cero o punto de inflexión.

2.- Longitudes de desarrollo para varillas inferiores:

$$\text{Espaciamiento} = \frac{12 - 2(15 + 0.375) - 2 \times 1.128 - 2 \times 1.0}{3} = 1.33 \text{ pulg.}$$

esto excede  $d_b$  tanto para la #8 como para la #9 y satisface el mínimo de estribos por lo que la fórmula a utilizar es:

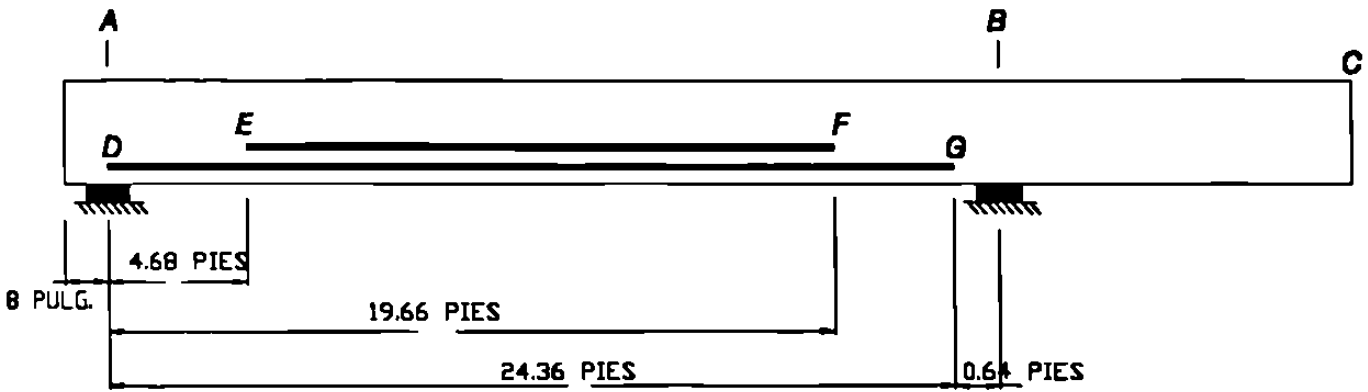
$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{20 \sqrt{f'_c}} = \frac{60,000 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0}{20 \sqrt{3,000}} = 54.8$$

Entonces para las varillas #8,  $\ell_d = 54.8$  pulg., y para las varillas #9,  $\ell_d = 61.8$  pulg.

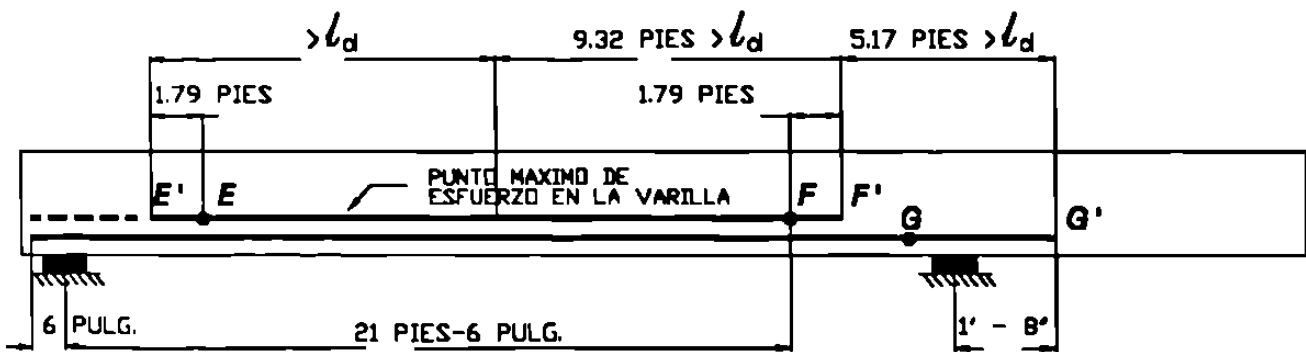
3.- Puntos de corte para refuerzo positivo.

Se aplican las 6 reglas vistas anteriormente:

Con el diagrama de momentos se tienen los siguientes puntos:



(a) PUNTOS DE CORTE POR FLEXION PARA ACERO POSITIVO.



(b) PUNTOS DE CORTE FINALES PARA ACERO POSITIVO..

(a) Corte de F:

2 Varillas #8 serán cortadas y deben satisfacer las reglas 1 y 2.

**Regla 1:** Prolongar las varillas el mayor de  $d = 21.5$  pulg = 1.79 pies y  $12d_b = 1$  pie. Entonces la posición final de F está a  $19.66 + 1.79 = 21.45$  pies del centro del apoyo A, es decir 21 pie 6 pulg., como se muestra en el inciso (b) de la figura anterior.

**Regla 2:** Las varillas se deben extender un mínimo de  $l_d$  a partir de los puntos de máximo esfuerzo. Para estas varillas el corte se localiza en F', el máximo esfuerzo se localiza a la mitad del claro (aprox.), por lo tanto la longitud hasta F' es  $21.5 - 12.18 = 9.32$  pies y para las varillas #8  $l_d = 54.8$  pulg., entonces está bien.

Cortar las varillas en F' localizado a 21 pie, 6 pulg desde A.

(b) Corte de G:

2 Varillas #9 serán cortadas y deberán satisfacerse las reglas 2 y 3 para G, y la regla 4 para momento positivo en el punto de inflexión.

**Regla 3:** Un mínimo de 1/3 de las varillas deberán extenderse 6" (15 cm) dentro del apoyo. Para el apoyo B deberán extenderse hasta 25 pies 6 pulg. , a partir de A.

**Regla 2:** Las varillas deberán extenderse un mínimo de  $l_d$  de los puntos de corte de las varillas adyacentes. La  $l_d$  para las varillas #9 es 61.8 pulg. = 51.5 pies.

La distancia entre F' y G' es  $(25'6") - (21' 6") = 4$  pies = 48 pulg., menor que  $l_d$ , luego las varillas no se extenderán  $l_d$ , entonces las varillas se extenderán  $21.45$  pies +  $5.15$  pies =  $26.6$  pies =  $26'8"$ .

**Regla 4:** Deberá satisfacerse la ecuación:

$$l_d \leq \frac{M_n}{V_n} + l_a \text{ en el punto de inflexión, (punto de momento cero).}$$

El punto de inflexión está a 0.64 pie del apoyo, como se puede apreciar en el croquis del diagrama de momentos de la página 204. En este punto  $V_u = 46.5$  KLBS y el momento  $M_n$  es la capacidad de las varillas en el punto de inflexión (2 varillas #9) el cuál es:

$$M_n = 176x \frac{12}{0.9} = 2345 \text{ KLBS - pulg.}$$

$l_a$  = el mayor de "d" = 21.5 pulg., ó  $12d_b = 13.5$  pulg., pero no mayor que la actual extensión de las varillas en el punto de inflexión ( $26.67 - 24.36 = 2.31$  pies = 27.7 pulg.) Entonces  $l_a = 21.5$  pulg., y:

$$\frac{M_n}{V_n} + l_a = \frac{2345}{46.5} + 21.5 = 71.9 \text{ pulg.}$$

Como esto excede  $l_d = 61.8$  pulg. Esta bien cortar las 2 varillas #9 a 1 pie 8 pulg de B.

(c) Corte E.

Se cortarán dos varillas #8 y deberán satisfacer las reglas 1 y 2.

**Regla 1:** Extender las varillas  $l_d = 1.79$  pies después del punto de corte por flexión. Entonces, cortar en E', que esta a  $4.68 - 1.79 = 2.89$ , (2'10") de A.

**Regla 2:** La distancia del punto del momento máximo al punto de corte excede  $l_d = 54.8$  pulg., entonces está bien.

Cortar las 2 varillas #8 a 2 pies 10 pulg de A. (Punto E', de la figura anterior)

(d) Corte D.

Se cortarán 2 varillas #9 y deben satisfacer las reglas 2, 3 y 4.

**Regla 3:** Prolongar las 2 varillas #9, 6 pulg., después de A.

**Regla 2:** Deberán extenderse las varillas  $l_d$  del punto de corte E', donde:

$l_d = 61.8$  pulg (Varillas #9). La máxima longitud posible es 2 pies 10 pulg + 6 pulg = 40 pulg. Como es menor que  $l_d$ , debemos usar ganchos en los extremos de las varillas o usar varillas de menor diámetro o eliminar el punto de corte E'. Entonces, extender las 4 varillas 6 pulgadas después de "A".

**Regla 4:** Se debe satisfacer la siguiente ecuación en el apoyo:

$$l_d \leq 1.3 \frac{M_n}{V_u} + l_a$$

$$V_u = 46.4 \text{ KLBS}$$

$$M_n = \frac{3.58 \times 60,000 \left( 21.5 - \frac{3.58 \times 60,000}{1.7 \times 3,000 \times 12} \right)}{1000}$$

= 3860 KLBS - pulg

$l_a = 6$  pulg

$l_d$  menor o igual que:  $\frac{1.3M_u}{V_u} + l_a = \frac{1.3 \times 3860}{46.4} + 6 = 113.9$  pulg.  $> l_d$

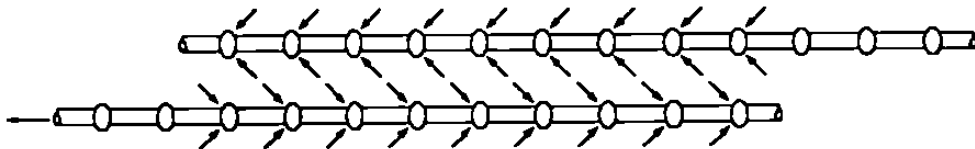
La regla 4 se satisface  $\therefore$  Cortar como lo marca la figura.

Con un procedimiento similar, se determinan los puntos de corte en las varillas para momento negativo siguiendo las reglas descritas anteriormente, incluyendo los estribos extra que se requieren en los puntos de corte.

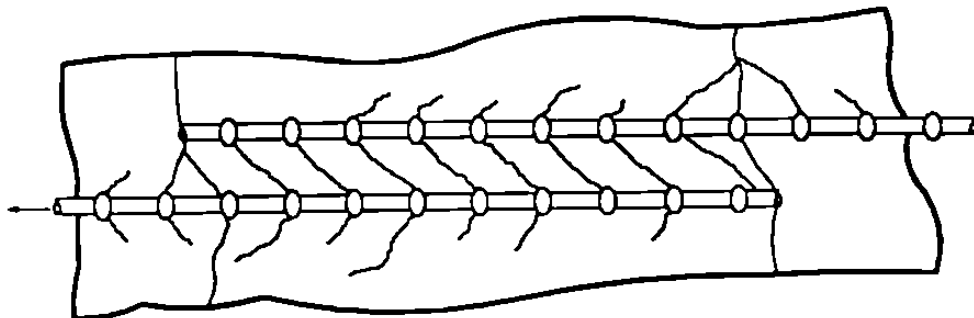
## 7-6 TRASLAPES

### Traslapes en Tensión

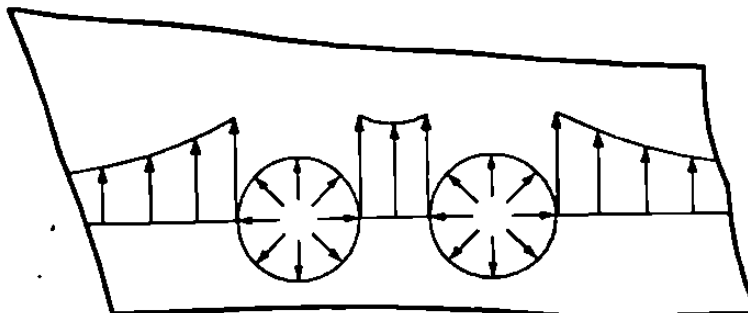
En un traslape entre dos varillas, la fuerza en una varilla se transfiere a el concreto, el cual la transfiere a la varilla adyacente. El mecanismo de la transferencia se muestra en la siguiente figura.



(a) FUERZAS EN LAS VARILLAS EN TRASLAPE.



(b) GRIETAS INTERNAS EN EL TRASLAPE.



(c) FUERZAS RADIALES EN EL CONCRETO Y ESFUERZOS EN LAS VARILLAS TRASLAPADAS.

### TRASLAPES EN TENSION.

El mecanismo de transferencia de la fuerza mostrado en el inciso (a) provoca el patrón de agrietamiento del inciso (b). La transferencia de fuerzas en el exterior de la varilla hacia el concreto causa una presión radial en el concreto como se muestra en el inciso (c), el cual puede provocar una grieta en todo lo ancho de un elemento estructural (viga) en la cama de las varillas. Cuando esto ocurre el traslape falla. Las grietas en los traslapes se inician en los extremos del traslape, donde la presión es mayor que en medio. Como se muestra en el inciso (b), las grietas grandes transversales ocurren en la discontinuidad de los extremos de las varillas traslapadas. El refuerzo transversal en la región del traslape *retrasa* la separación de las varillas traslapadas y la aparición de grietas lo cual reduce la capacidad del traslape.

El ACI Sección 12.15 distingue dos tipos de traslapes en tensión, dependiendo de la fracción de varillas traslapadas en una longitud dada y del esfuerzo en las varillas traslapadas. La tabla R 12.15.2 de los comentarios del ACI se reproduce al final como la Tabla 7-2. La equivalencia entre ( $A_s$  proporcionado/ $A_s$  requerido) y  $f_s/f_y$  dadas en la Tabla 7-2 no aparece en el Código de 1995, se expresó en términos de  $f_s/f_y$  en el Código 1971 pero después no fue cambiado. Las longitudes de traslape para cada clase de traslape son las siguientes:

Traslape Clase A:  $1.0 l_d$

Traslape Clase B:  $1.3 l_d$

Debido a que el nivel de esfuerzo se considera en la Tabla 7-2, la reducción en la longitud de desarrollo por exceso de refuerzo permitida por la Sec. 12.2.5 del ACI no es aplicada para calcular  $l_d$  para este propósito.

**TABLA 7 - 2 TIPOS DE TRASLAPES REQUERIDOS EN TENSIÓN.**

$A_s$ proporcionada / $A_s$ requerida	ó $f_s/f_y$	Máximo porcentaje de $A_s$ traslapado con longitud de traslape requerida	
		50%	100%
2 ó más	0.5 o menos	Clase A	Clase B
menor de 2	más de 0.5	Clase B	Clase B

La distancia centro a centro entre dos varillas en un traslape no debe ser mayor de 1/5 de la longitud del traslape con un máximo de 6 pulg. (ACI Sección 12.14.2.3).



Las varillas mayores que la #11 no podrán ser traslapadas, excepto en las juntas zapata-columna (ACI Sección 15.2.8.4). Los traslapes deberán siempre ser encerrados con estribos, anillos o espirales para prevenir la pérdida de capacidad del traslape.

Como se indica en las Secciones 12.2.2 y 12.2.3, la presencia de refuerzo transversal acorta  $l_d$  y por lo tanto se tendrán traslapes menores.

El ACI Sección 21.3.2.3 requiere que los traslapes en tensión del refuerzo por flexión en vigas para resistir cargas sísmicas sean encerradas en anillos o espiral.

### **Traslapes en compresión**

En un traslape en compresión, una parte de la fuerza se trasmite al concreto a través del extremo de la varilla. Esto, y el hecho de que se presentan grietas transversales por tensión en la longitud del traslape, permite que los traslapes por compresión sean mucho más cortos que los traslapes de tensión (ACI Sección 12.16). Frecuentemente, un traslape de compresión fallará por desgarre del concreto bajo los extremos de la varilla.

### **Empalmes soldados y uniones mecánicas**

Además de los traslapes, las varillas esforzadas a tensión o compresión pueden traslaparse y soldarse, o por varios dispositivos mecánicos, así como con camisas metálicas. El uso de estos empalmes y uniones mecánicas está gobernado por las secciones 12.14.3 y 12.16.3 del ACI.

## 7-7 PROBLEMAS

7 - 1.- En la figura mostrada la viga cantiliver tiene  $b = 30$  cm y esta reforzada con 3 varillas #7, las cuales están ancladas a la columna con ganchos estándar a  $90^\circ$ .  $f_c = 350$  kg/cm<sup>2</sup> y  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>. Considerando que el acero es esforzado al  $f_y$  en la cara de la columna, pueden estas varillas:

(a) Anclarse con ganchos dentro de la columna. El recubrimiento lateral libre de los ganchos es 7 cm. El recubrimiento libre de la extensión de las varillas al paño de la columna es 5 cm. La junta está encerrada por estribos @ 15 cm c. a. c.

(b) Desarrollarse en la viga. Las varillas terminan 5 cm del extremo de la viga. La viga tiene estribos #3 @ 20 cm.

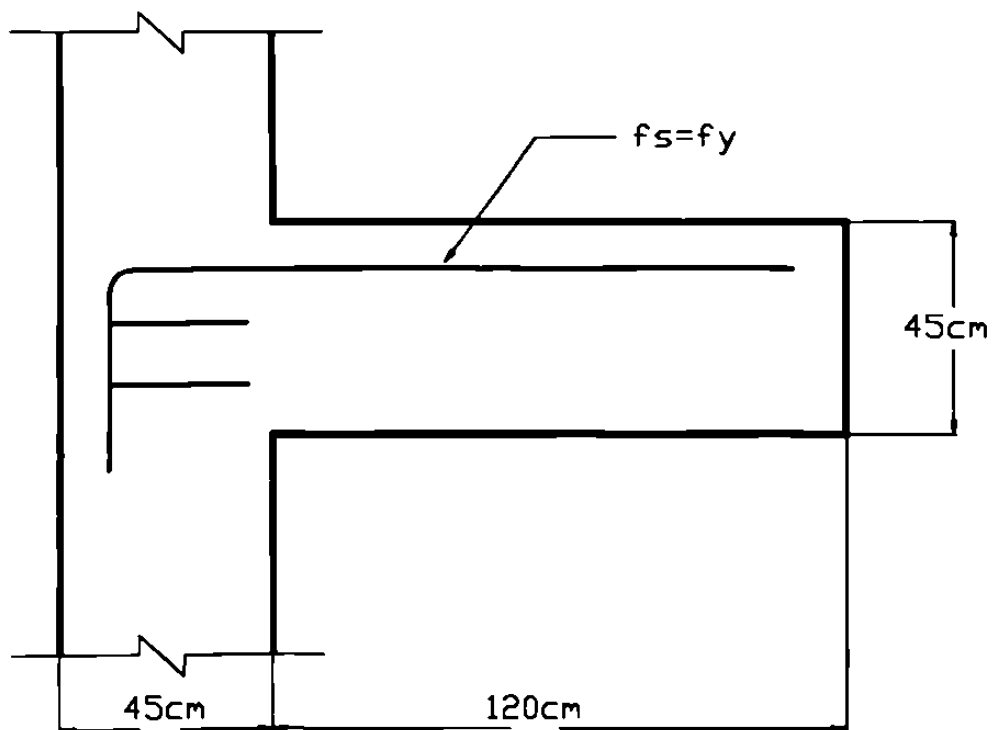


FIGURA P7-1

**7 - 2.-** Dar dos razones por las cuales la longitud de desarrollo en tensión es mayor que en compresión.

**7 - 3.-** Porque el espaciamiento y el recubrimiento de las varillas afecta la adherencia de las varillas.

**7 - 4.-** Una viga simplemente apoyada de sección rectangular con  $b = 35$  cm y  $d = 44$  cm y estribos mínimos #3 con un claro de 4.50 m soporta una carga uniforme total factorizada de 9 ton/m incluyendo el peso propio. El concreto es de  $f_c = 210$  kg/cm<sup>2</sup> y reforzada con 2 varillas #10 con  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup> las cuales se extienden 13 cm después de la línea de centros del apoyo en cada extremo con el mínimo de estribos #3. ¿Satisface esta viga la Sección 12.11.3 del ACI? Si no, ¿cuál es el tamaño de varilla adecuado?

**7 - 5.-** Cuál de las Secciones del ACI 12.10.3 ó 12.12.3 requiere que las varillas se extiendan "d" después de los puntos de corte por flexión.

**7 - 6.-** Una viga de sección rectangular tiene  $b = 35$  cm,  $h = 60$  cm y  $d = 54$  cm soporta una carga total factorizada de 5.75 ton/m incluyendo su peso propio. La viga está simplemente apoyada en un claro de 6.50 m. Está reforzada con 6 varillas #6 grado 60, dos de las cuales se cortarán entre el centro y el apoyo y las otras cuatro se extenderán 12 pulg., después del apoyo.  $f_c = 280$  kg/cm<sup>2</sup>. La viga tiene estribos #3 que satisfacen la Sección 11.5.4 del ACI y la 11.5.5.3.

- (a) Dibujar a escala el diagrama de momentos factorizado.  $M = Wlx/2 - Wx^2/2$ , donde "x" es la distancia del apoyo y "l" es el claro.
- (b) Redibujar el diagrama de momentos desplazado una distancia "d", hacia los apoyos.
- (c) Dibujar el diagrama de momento resistente y localizar los puntos de corte para las dos varillas cortadas.

# **CAPÍTULO 8 :**

## **COLUMNAS CORTAS. CARGA AXIAL Y FLEXION.**

**8.1.- Introducción**

**8.2.- Columnas con estribos y columnas con espiral.**

**8.3.- Diagramas de interacción.**

**8.4.- Diagramas de interacción para columnas de concreto.**

**8.5.- Diseño de columnas cortas.**

**8.6.- Solución aproximada para columnas con estribos. Falla por compresión.**

**8.7.- Columnas cargadas biaxialmente.**

## **8.1.- INTRODUCCION.**

Una columna es un miembro estructural que transmite cargas en compresión axial con o sin momentos. Las columnas soportan cargas verticales de las azoteas y pisos para transmitir las a la cimentación.

En construcción, después de colar la cimentación se coloca el acero de refuerzo de las columnas, y posteriormente las formas o cimbra y se cuela después el concreto, el cual cuando ha endurecido (fraguado) se retira la cimbra, para después cimbrar losas y vigas y continuar. Una columna normalmente lleva dos tipos de refuerzo: el refuerzo longitudinal, o principal y el refuerzo transversal al eje de la columna; el cual puede ser, estribos, anillos o espirales.

En términos más generales los miembros en compresión o miembros sujetos a carga axial y flexión pueden ser columnas, muros o miembros de armaduras o marcos de concreto.

Estos pueden ser verticales, inclinados u horizontales. Una columna es un caso especial de un miembro a compresión que es vertical.

Los efectos de estabilidad deben ser considerados en el diseño de miembros a compresión.

Si los momentos inducidos por efectos de esbeltez deforman una columna apreciablemente, se considera como "columna esbelta" o "columna larga". La mayoría de las columnas son lo suficientemente proporcionadas que los efectos de esbeltez pueden ignorarse. A estas se les conoce como "columnas cortas".

Aunque la teoría desarrollada en este capítulo se aplica a columnas en regiones sísmicas. Estas columnas requieren un detallado especial para resistir las fuerzas cortantes y los ciclos de carga repetida por los sismos.

## **8.2.- COLUMNAS CON ESTRIBOS Y ESPIRAL**

Alrededor de un 95% de las columnas de edificios están en zona no sísmica y se utilizan con estribos.

Los estribos para columnas pueden ser cuadrados, rectangulares, en forma de L, circulares o cualquier otro tipo de forma requerido. Ocasionalmente cuando se requiere alta resistencia y/o alta ductilidad, las varillas principales se colocan dentro de un refuerzo transversal circular en

forma de hélice o espiral, con un paso de 1 3/8 a 3 3/8 de pulgada. A una columna así se le denomina "columna con espiral". Las columnas con espiral generalmente son circulares, aunque pueden ser cuadradas o en forma de polígono en casos especiales.

La espiral actúa restringiendo la expansión lateral de la columna provocada por las cargas axiales que causan agrietamiento y con esto se evita la falla del núcleo, haciendo la columna más dúctil, como se discute en la próxima sección.

### **Comportamiento de columnas con estribos y con espiral**

En la siguiente figura se muestra una porción del núcleo de una columna con espiral. Las cargas de compresión producen un esfuerzo en el concreto en la dirección longitudinal  $f_1$ , y debido a la relación de Poisson's se expande lateralmente. Esta expansión lateral se restringe con la espiral la cual trabaja a tensión.

Por equilibrio el concreto está sujeto a un esfuerzo de compresión lateral  $f_2$ . Tomando un elemento del núcleo en cuerpo libre como se muestra en (c) sujeto a compresión triaxial, la cual demuestra que el incremento en la resistencia del concreto es:

$$f_1 = f'_c + 4.1 f_2$$

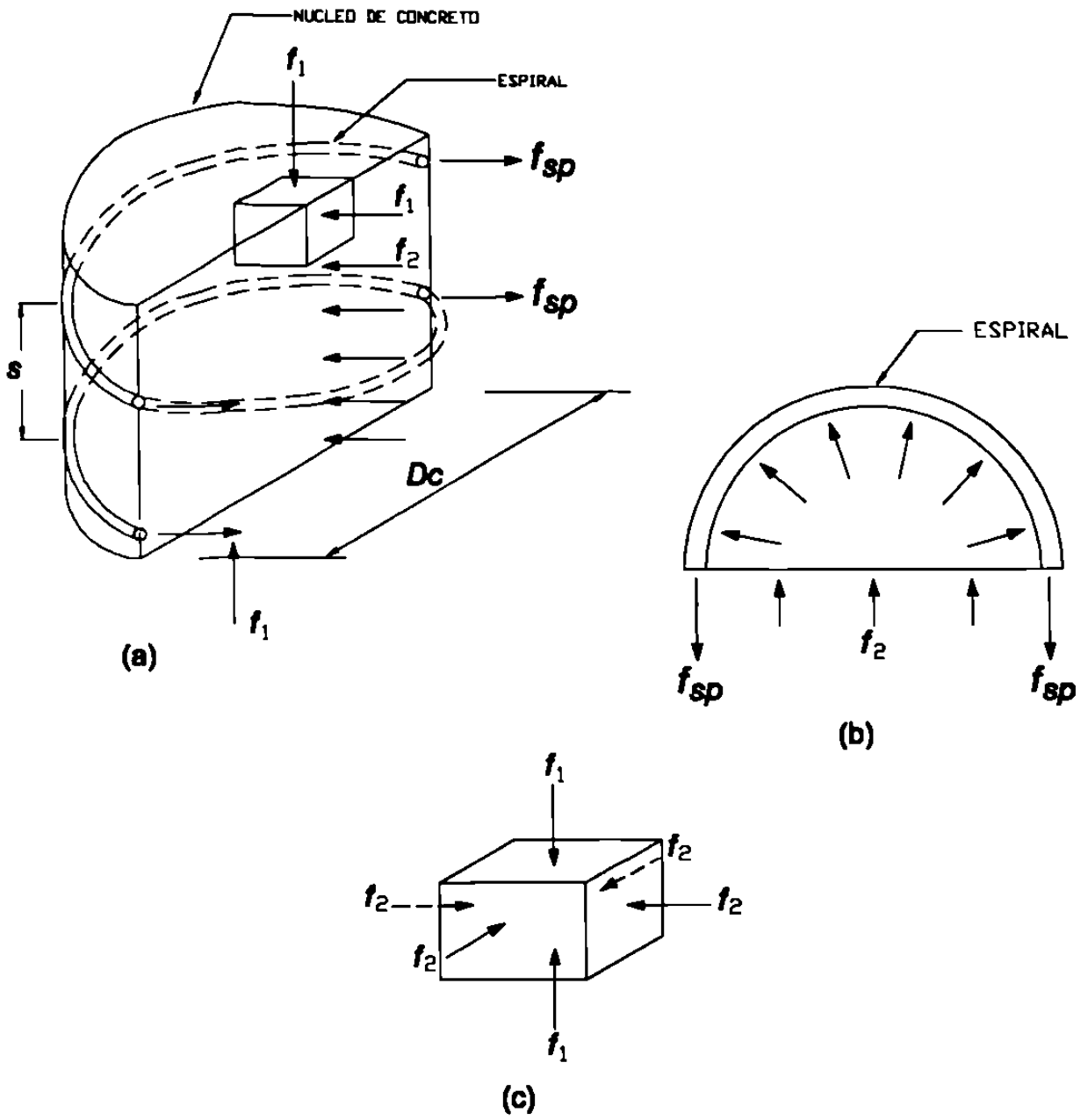
Más adelante se usará esta ecuación para calcular la cantidad de refuerzo en espiral que necesita la columna.

En ensayos hechos a columnas, se ha determinado que las columnas con espiral tienen mayor ductilidad por eso se les ha asignado un factor de reducción de capacidad,  $\phi$  de 0.75 y un valor de  $\phi = 0.70$  para columnas con estribos.

Las columnas con refuerzo en espiral se usan cuando la ductilidad es importante o cuando se tienen cargas elevadas y se requiere hacer un diseño económico utilizando la resistencia extra al tener un mayor factor de reducción de resistencia.

### **Resistencia de columnas cargadas axialmente**

Cuando una columna simétrica está sujeta a una carga concentrada axial,  $P$ , las deformaciones longitudinales,  $\epsilon$  se desarrollan uniformemente en la sección transversal. Como las varillas longitudinales están confinadas en el



**FIGURA 8-1**  
**ESFUERZOS TRIAXIALES EN EL NUCLEO DE UNA COLUMNA CON ESPIRAL.**

concreto las deformaciones en el concreto y el acero son iguales. Para cualquier deformación dada es posible calcular los esfuerzos en el concreto y el acero usando las gráficas esfuerzo - deformación de ambos materiales.

Las fuerzas,  $P_c$ , y  $P_s$ , en el concreto y acero respectivamente son iguales al producto de los esfuerzos por sus respectivas áreas. La carga total,  $P_o$ , es la suma de estas dos cantidades. La falla ocurre cuando  $P_o$  alcanza un máximo. Para un acero con una resistencia de fluencia bien definida, esto ocurre cuando  $P_c = f_c A_c$  y  $P_s = f_s A_{st}$ , donde  $f_c = C f'_c$  es la resistencia del concreto a la compresión. Basándose en pruebas de 564 columnas probadas en la Universidad de Illinois y en la Universidad de Lehigh de 1927 a 1933 el ACI toma  $C = 0.85$ .

Entonces para una columna con resistencia a la fluencia definida su capacidad es:  $P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$ .

donde  $A_g$  es el área total y  $A_{st}$  el área del acero.

### 8-3.- DIAGRAMAS DE INTERACCION.

Casi todos los miembros a compresión de estructuras de concreto están sujetos también a momentos, además de las cargas axiales. Esto puede ser debido a que la carga no está concentrada en la columna, como se muestra en la figura 8-2.

Esto produce momentos en la columna. La distancia "e" es la excentricidad de la carga. La carga  $P$  y el momento  $M$  se calculan respecto al eje geométrico centroidal de la sección.

Sumando los esfuerzos producidos por la carga axial  $P$  y el momento  $M$ , se tiene:

$$P/A + \frac{My}{I} = f_{cu}$$

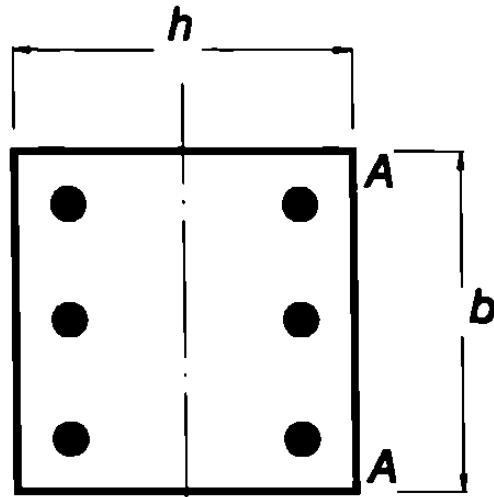
donde :  $f_{cu}$  = Es la resistencia a la compresión.

$A$ ,  $I$  = Área y momento de Inercia de la sección transversal, respectivamente.

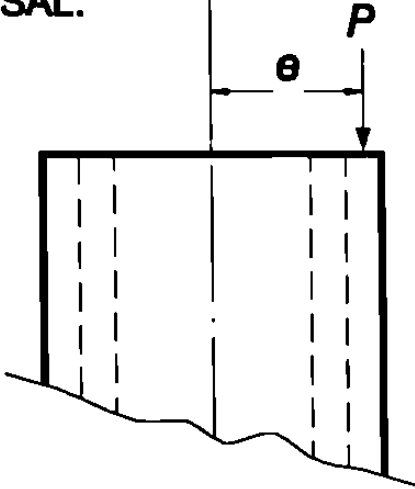
$y$  = Distancia del eje centroidal a la fibra extrema en compresión (superficie A-A).

$P$  = Carga axial, positiva en compresión.

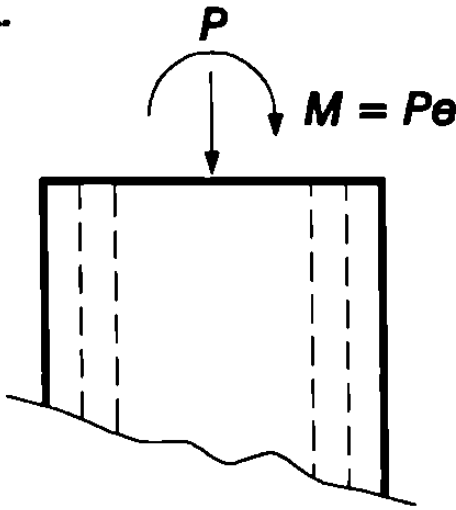




SECCION TRANSVERSAL.



CARGA EXCENTRICA.



CARGA AXIAL Y MOMENTO.

FIGURA 8-2  
COLUMNA FLEXOCOMPRESION.

$M$  = Momento flexionante.

Dividiendo ambos miembros entre  $f_{cu}$  da:

$$\frac{P}{f_{cu}A} + \frac{My}{f_{cu}I} = 1$$

La máxima carga axial que soporta la columna ocurre cuando  $M = 0$ , y es  $P_{max} = f_{cu}A$ .

Similarmente, el momento máximo que soporta la columna ocurre cuando  $P = 0$ , y es  $M_{max} = f_{cu}I/y$ .

Sustituyendo  $P_{max}$  y  $M_{max}$  da:

$$\frac{P}{P_{max}} + \frac{M}{M_{max}} = 1$$

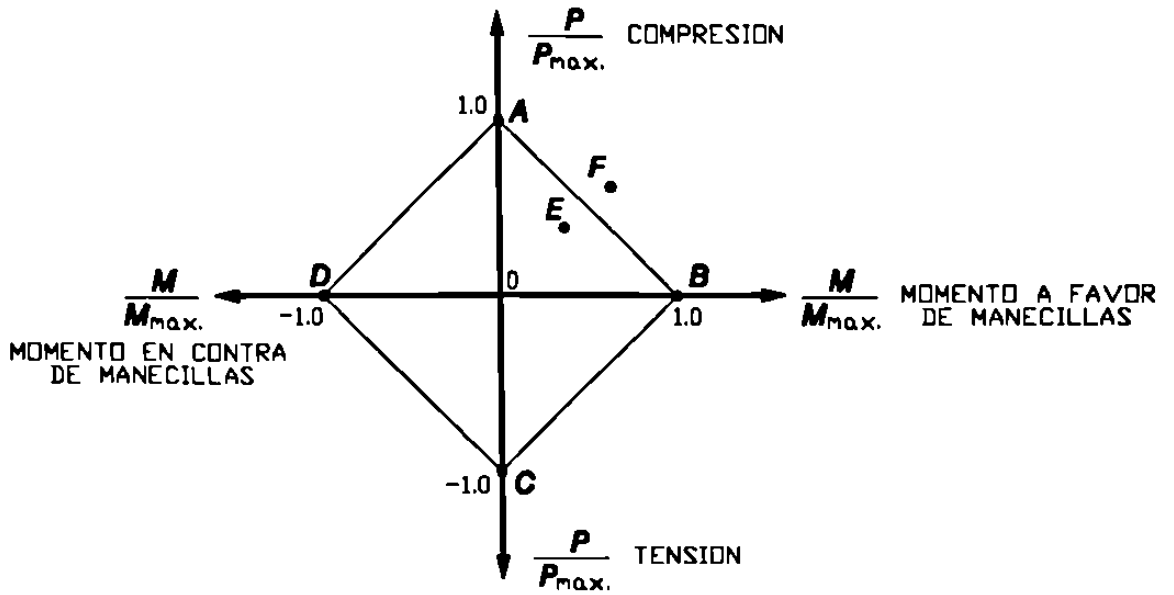
Esta ecuación es conocida como "ecuación de Interacción" porque muestra la interacción de, o la relación entre  $P$  y  $M$  en la falla.

Esto está representado por la línea  $AB$  de la Figura 8-3. Una ecuación similar para la carga de tensión,  $P$ , gobernada por  $f_{tu}$ , da la línea  $BC$  de esta figura, y las líneas  $AD$  y  $DC$  resultan de los momentos con signos opuestos.

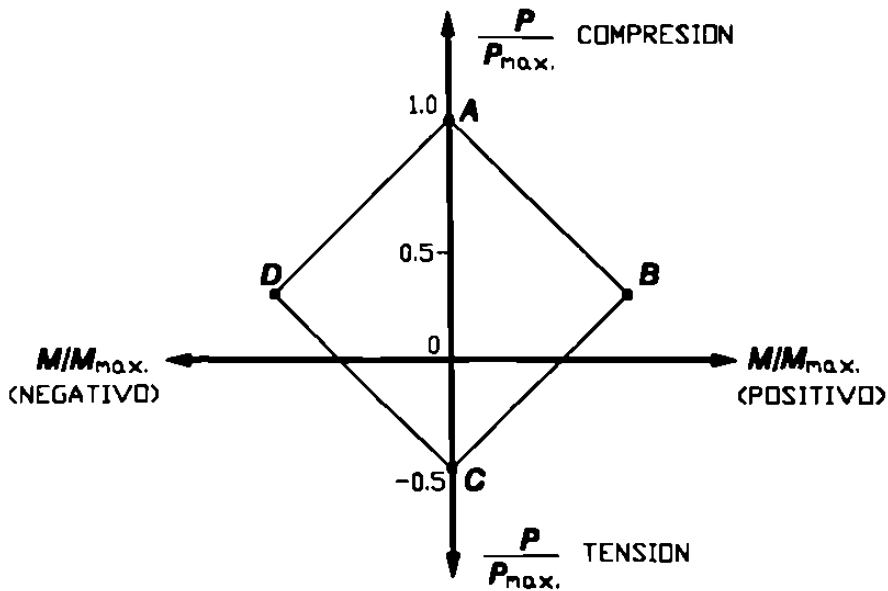
Los puntos del diagrama de interacción representan las combinaciones de  $P$  y  $M$  correspondientes a la resistencia de la sección. Un punto dentro del diagrama como el  $E$ , representa una combinación de  $P$  y  $M$  que *No* causan la falla. Las combinaciones de carga que causan la falla quedan fuera de la línea, como el punto  $F$ , exceden las resistencia de la columna.

En la figura 8-4 se muestra un diagrama de interacción para un material con  $f_{tu} = -f_{cu}/2$ .

Las líneas  $AB$  y  $AD$  indican las combinaciones de carga correspondientes a la falla inicial por compresión (gobernada por  $f_{cu}$ ) mientras que las líneas  $BC$  y  $DC$  indican, las fallas iniciadas por tensión. Los puntos  $B$  y  $D$  representan la "Falla Balanceada" en la cual las resistencias a tensión y a compresión se alcanzan simultáneamente.



**FIGURA 8-3**  
**DIAGRAMA DE INTERACCION PARA COLUMNA ELASTICA.**  
 $f_{cu} = f_{tu}$



**FIGURA 8-4**  
**DIAGRAMA DE INTERACCION PARA COLUMNA ELASTICA.**  
 $f_{tu} = -f_{cu}/2$

#### 8-4.- DIAGRAMAS DE INTERACCION PARA COLUMNAS DE CONCRETO.

Se pueden derivar una familia de ecuaciones para determinar la resistencia de columnas sujetas a las combinaciones de cargas axiales y momentos, pero estas ecuaciones son tediosas para usarse. Por esta razón, se elaboran una serie de diagramas de interacción para calcular los valores de P y M.

En la figura 8-5 se ilustra el proceso de cálculo para una distribución particular de deformación.

La máxima deformación de compresión de 0.003, corresponde a la falla de la sección. La localización del eje neutro se calcula con el diagrama de deformaciones. Con este diagrama se calcula el diagrama de esfuerzos en el concreto y en cada nivel del refuerzo con  $f = E\varepsilon$  (figura 8-5c).

Las fuerzas en el concreto y en los niveles de acero como se muestra en la Figura 8-5d se calculan multiplicando los esfuerzos por las áreas correspondientes. Finalmente, la fuerza axial  $P_n$  se calcula sumando las fuerzas individuales en el concreto y el acero y el momento  $M_n$  se calcula sumando los momentos de estas fuerzas con respecto al centroide geométrico de la sección transversal. Estos valores de  $P_n$  y  $M_n$  representan un punto del diagrama de interacción.

En la siguiente figura (8-6) se ilustran una serie de distribuciones de deformación y los puntos resultantes del diagrama de interacción. El punto A representa compresión axial pura. El punto B corresponde al agrietamiento en una cara y cero tensión en la otra. Si la resistencia a tensión del concreto se ignora en los cálculos, esto implica el agrietamiento en la cara de tensión de la sección.

Todos los puntos abajo de este diagrama de interacción representan casos en los cuales la sección es parcialmente agrietada. El punto C corresponde a una distribución con una deformación de compresión máxima de 0.003 en el concreto y una deformación de fluencia  $\varepsilon_y$  en el acero en tensión.

Esto representa la "falla balanceada" en la cual se presentan simultáneamente el agrietamiento del concreto y la fluencia del acero. Arriba del punto C representan falla por compresión y abajo "falla por tensión". El punto D corresponde a una distribución de deformaciones en que la deformación en el acero en tensión es mayor que la de fluencia, antes de que el concreto alcance la deformación de agrietamiento.

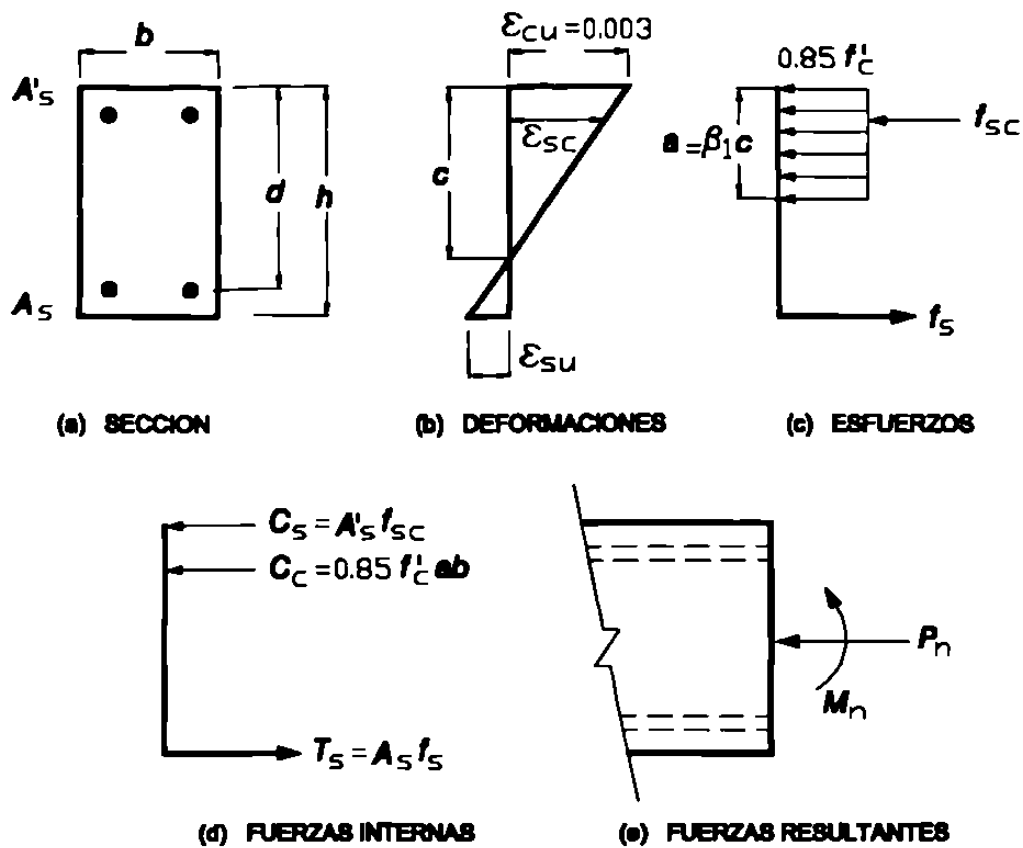


FIGURA 8-5  
CALCULO DE  $P_n$  Y  $M_n$  PARA UNA DISTRIBUCION DE UNA DEFORMACION DADA.

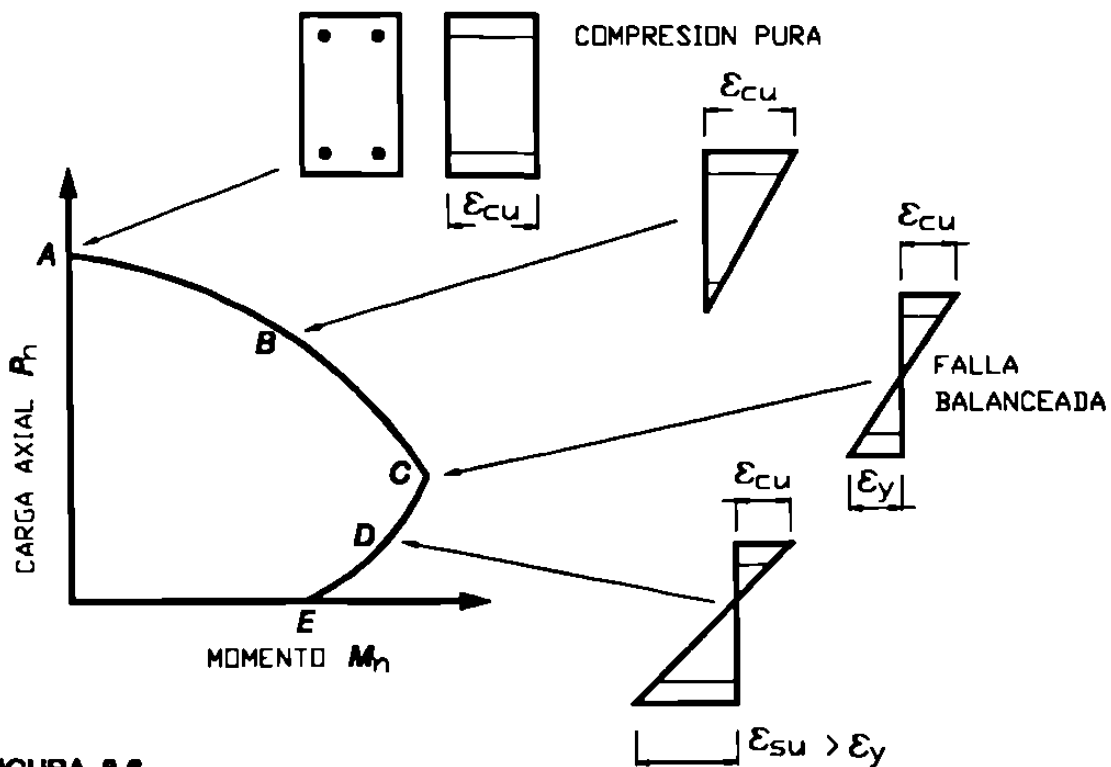


FIGURA 8-6  
DISTRIBUCION DE DEFORMACIONES PARA EL DIAGRAMA DE INTERACCION.

Esto implica comportamiento dúctil. En contraste con la distribución del punto B, la columna falla cuando la deformación de compresión alcanza 0.003 y el acero no ha fluido y la columna falla de una manera frágil (súbita).

### Carga axial máxima:

Como se vio antes, la resistencia de una columna a carga axial puede escribirse como:  $P_o = (0.85 f_c)(A_g - A_{st}) + f_y(A_{st})$

donde:  $0.85 f_c$  = Esfuerzo máximo del concreto

$A_g$  = Area de la sección total (concreto y acero).

$f_y$  = Esfuerzo de fluencia del acero.

$A_{st}$  = Area del acero

El valor de  $0.85f_c$  fue derivado de pruebas ; para tomar en cuenta el efecto de momentos accidentales. El ACI Secciones. 10.3.5.1 y 10.3.5.2 especifica que la carga máxima en una columna no debe exceder de 0.85 veces el valor dado por la ecuación anterior para columnas con espiral ni de 0.80 veces para columnas con estribos.

Columnas con espiral:

$$\phi P_{n(max)} = 0.85\phi[0.85f_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad (\text{ACI Ec. 10-1})$$

Columnas con estribos:

$$\phi P_{n(max)} = 0.80\phi[0.85 f_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad (\text{ACI Ec. 10-2})$$

### Factor de reducción de resistencia para columnas

En el diseño de columnas, la capacidad a carga axial y momento debe satisfacer:  $\phi P_n \geq P_u$                        $\phi M_n \geq M_u$

donde:  $P_u$  y  $M_u$  = Carga y momento factorizados aplicados a la columna, calculados del análisis del marco.

$P_n$  y  $M_n$  = Resistencias nominales de la sección transversal de la columna.

$\phi$  = Factor de reducción de resistencia, es el mismo para carga axial y momentos.

Los valores de  $\phi$  para columnas están dados en la sección 9.3.2.2. (b) del ACI y en el apéndice B.9.3.2. Para valores altos de carga axial, ambos procedimientos especifican  $\phi$  igual a 0.70 para columnas con estribos y  $\phi = 0.75$  para columnas con espiral.

El valor de  $\phi$  es menor que 0.90 usado en vigas porque la resistencia de una columna es más afectada por las variaciones en la resistencia del concreto que una viga, y porque la falla de una columna trae consecuencias más graves que la falla de una viga. Una columna con estribos tiene un valor de  $\phi$  menor que una columna con espiral porque la falla de la primera es más súbita (frágil).

El eje horizontal del diagrama de interacción corresponde a "flexión pura". Aquí el factor de reducción de resistencia,  $\phi$ , es igual o aproximado a 0.90 para considerar la transición entre  $\phi = 0.70$  ó  $0.75$  para carga axial alta y  $\phi = 0.90$  para flexión pura. La transición se hace como lo especifica ACI en Sección 9.3.2.2. (b) y B. 9.3.2.

#### **ACI Sección 9.3.2.2 (b)**

El cambio de  $\phi$  comienza para la capacidad a carga axial,  $\phi P_a$ , la cual es igual a la menor de la carga balanceada,  $\phi P_b$ , o,  $0.1f_c A_g$ . Generalmente,  $\phi P_b$  excede  $0.1f_c A_g$  excepto para algunas columnas no rectangulares. El valor de  $\phi$  varía linealmente desde  $\phi P_n$  hasta cero.

#### **ACI Sección B. 9.3.2.**

En el ACI en el apéndice B la transición en  $\phi$ , es una función de la deformación,  $\epsilon_t$ , del refuerzo extremo de la cara de compresión.

Cuando esta deformación está entre 0.003 en compresión y  $\epsilon_y$  (dónde estos son negativos) la sección se dice que está en "compresión controlada". Cuando  $\epsilon_t$  es menor (más negativo a mayor tensión) de -0.005, la sección se dice que está en "tensión controlada". El valor de  $\phi$  varía linealmente como una función de  $\epsilon_t$  cuando esta varía desde  $-\epsilon_y$  hasta -0.005.

## 8-5.-DISEÑO DE COLUMNAS CORTAS.

### Tipos de cálculos. Análisis y diseño

Si la sección transversal se conoce y se requiere determinar la capacidad, se trata de un *análisis* o *revisión*. Por otro lado, si las cargas y los momentos se conocen y es necesario seleccionar una sección transversal para resistirlos, el procedimiento consiste en un *diseño* o *dimensionamiento*. Ambos se facilitan usando los diagramas de interacción como ayuda de diseño.

### Factores que afectan la selección de una columna

- **Elegir el tipo de columna**

Se puede tener la misma calidad de materiales  $f'_c$  y  $f_y$ , la misma cantidad de acero,  $A_{st}$  y la misma cantidad de sección transversal,  $A_g$  pero pueden diferir en el arreglo del refuerzo y en la forma de la sección transversal pudiendo ser, cuadrada, rectangular o circular.

Para relaciones de excentricidad,  $e/h$ , menores que 0.1, una columna con espiral es más eficiente en términos de capacidad de carga. Esto es debido a que  $\phi = 0.75$  comparado con 0.70 para columnas con estribos. Esta economía puede compensarse por el costo de la cimbra y de la espiral el cual es mayor que en una columna con estribos.

Para relaciones de excentricidad,  $e/h$  mayores de 0.2, para flexión en un solo sentido se recomienda una sección rectangular por ser más eficiente, incrementando la capacidad en el eje de flexión.

Las columnas con estribos con varillas en las cuatro caras se recomiendan para relaciones  $e/h$ , menores o cerca de 0.2 y cuando se tiene flexión en ambos ejes. Las columnas con espiral generalmente se usan poco en zonas no sísmicas. En zonas sísmicas o donde la ductilidad es importante, se usan frecuentemente las columnas con espiral.

- **Estimación del tamaño de la columna**

El paso inicial para diseñar una columna involucra estimar una sección requerida de la columna. No hay una regla directa, porque depende de la magnitud de la carga axial y del momento. Sin embargo, basándose en la capacidad a carga axial se obtiene una relación aproximada:

$$A_{g \text{ (tanteo)}} \geq \frac{P_u}{0.45 (f'_c + f_y \rho_t)}$$



donde:  $\rho_t = \frac{A_{st}}{A_g}$ , para columnas con estribos.

y  $A_g \text{ (tanteo)} \geq \frac{P_u}{0.55 (f'_c + f_y \rho_t)}$ ; para columnas con espiral.

Estas ecuaciones no consideran la presencia de los momentos, por lo que corresponden a la porción de línea horizontal del diagrama de interacción  $\phi P_n$ ,  $\phi M_n$ .

Generalmente, tanto el ancho como el peralte se incrementan 2 pulg. (5 cm.). El ACI no especifica un tamaño mínimo de columna, la dimensión mínima de una columna con estribos colada en el lugar es 10 pulg. (25 cm.). El diámetro mínimo de una columna con espiral es 12 pulg. (30 cm.)

### Columnas esbeltas

Una columna esbelta se flexiona lateralmente debido a las cargas. La reducción de la capacidad a carga axial debida a esta flexión se le denomina efecto de esbeltez. El ACI en la Sección 10.12.2 establece que se desprecien los efectos de esbeltez si:

$$\frac{K \ell_u}{r} \leq 34 - 12 \frac{M_1}{M_2}$$

donde: K = Factor de longitud efectiva el cual, para un marco arriostrado, será menor o igual a 1.0.

$\ell_u$  = Longitud libre de la columna.

r = Radio de giro igual a 0.3 de la dimensión menor de la columna en sección rectangular y 0.25 del diámetro en sección circular.

$M_1/M_2$  = Relación de momentos en los dos extremos de la columna la cual, para un marco arriostrado está entre +0.5 y -0.5.

En este capítulo se considerará que  $K = 1.0$  y  $M_1/M_2 = +0.5$ , lo cual es conservador. Para esta combinación, las columnas son cortas si  $K \ell_u / r \leq 28$ .

Para una columna cuadrada, esto corresponde a  $\ell_u / h \leq 8.4$ .

## **Requisitos de espaciamiento de varillas**

El ACI Sección 7.7.1. requiere un recubrimiento libre no menor que 1 ½ pulg. (≈ 4cm.), en columnas con estribos o espiral. En otros casos se requiere mayor recubrimiento. El concreto al ser colado en la forma de la columna debe fluir alrededor de las varillas. Para facilitar esto, el Código ACI requiere que la distancia mínima libre entre varillas longitudinales no debe ser menor que ; el mayor de : 1.5 veces el diámetro de varillas longitudinales, 1.5 pulg. (≈ 4 cm.) (ACI Sección 7.6.3) ó 1 1/3 veces el tamaño máximo del agregado grueso (ACI Sección 3.3.2). Esta distancia libre también debe darse en el caso de traslapes (ACI Sección 7.6.4) como se puede apreciar en la Figura 8-7.

## **Espaciamiento y requisitos de construcción de estribos**

Los estribos se colocan en las columnas por cuatro razones:

**1.- Evitar el pandeo de las varillas longitudinales.** El ACI en las Secciones 7.10.5.1, 7.10.5.2 y 7.10.5.3 dan los límites de tamaño, separación y arreglo de los estribos. El tamaño mínimo es el #3 para varillas longitudinales #10 o menores y estribo #4 para varillas mayores a la #10. El espaciamiento vertical de los estribos no debe exceder 16 veces el diámetro de la varilla longitudinal, 48 veces el diámetro del estribo, ni la dimensión menor de la sección transversal.

En regiones sísmicas se requieren estribos cerrados (ACI Sección 21.4.4).

El ACI Sección 7.10.5.3 como se ilustra en la figura 8-8 especifica que, la separación mínima entre esquinas de estribos, para evitar el desplazamiento lateral de las varillas longitudinales, debe ser 6 pulg., o menor lo cual también sirve para mantener a las varillas en su posición correcta al vaciar el concreto y compactarlo con el vibrador. Los extremos de los estribos deben anclarse con ganchos a 90° o 135° alrededor de la varilla longitudinal más una extensión de 6 diámetros del estribo pero no menor de 2 ½ pulg.

En zona sísmica, se requieren ganchos a 135° más una extensión de 6 diámetros del estribo.

- 2.- Los estribos sujetan al refuerzo durante el proceso de construcción.**
- 3.- Confinan el núcleo de concreto, aumentando la ductilidad.**
- 4.- Sirven como refuerzo de cortante a la columna.**

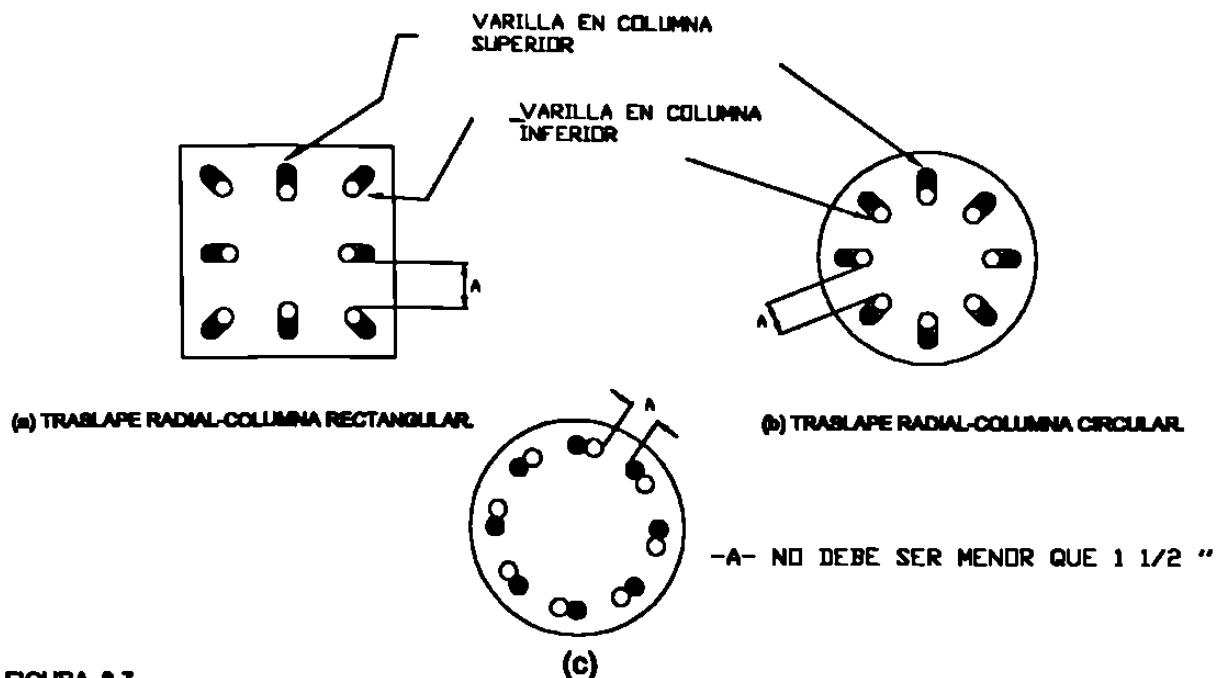


FIGURA B-7  
ARREGLO DE VARILLAS TRASLAPADAS EN COLUMNAS.

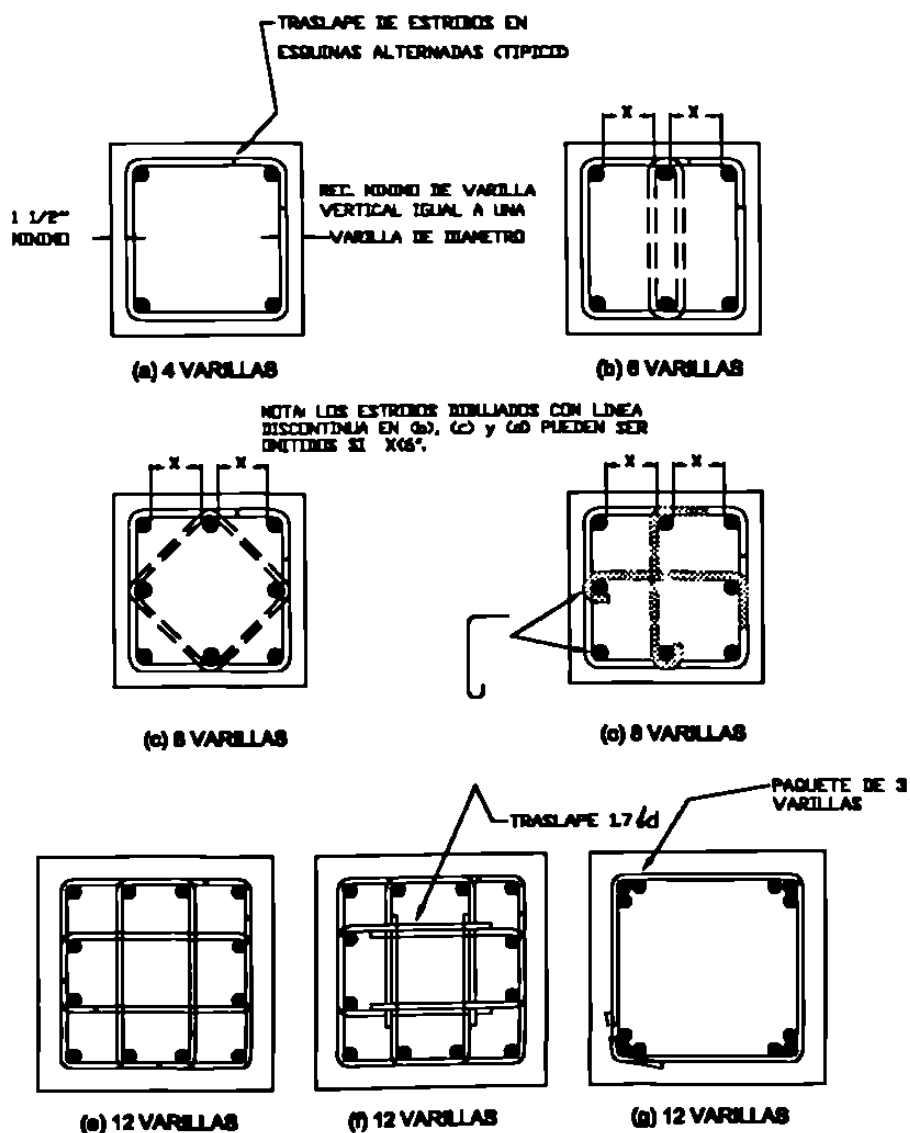
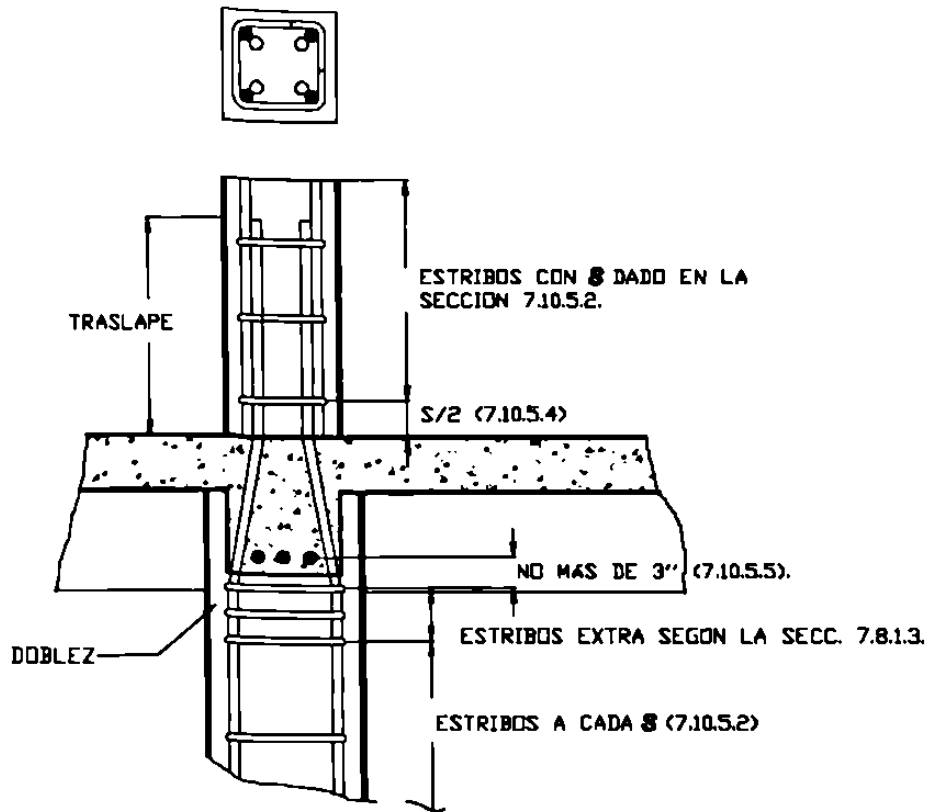
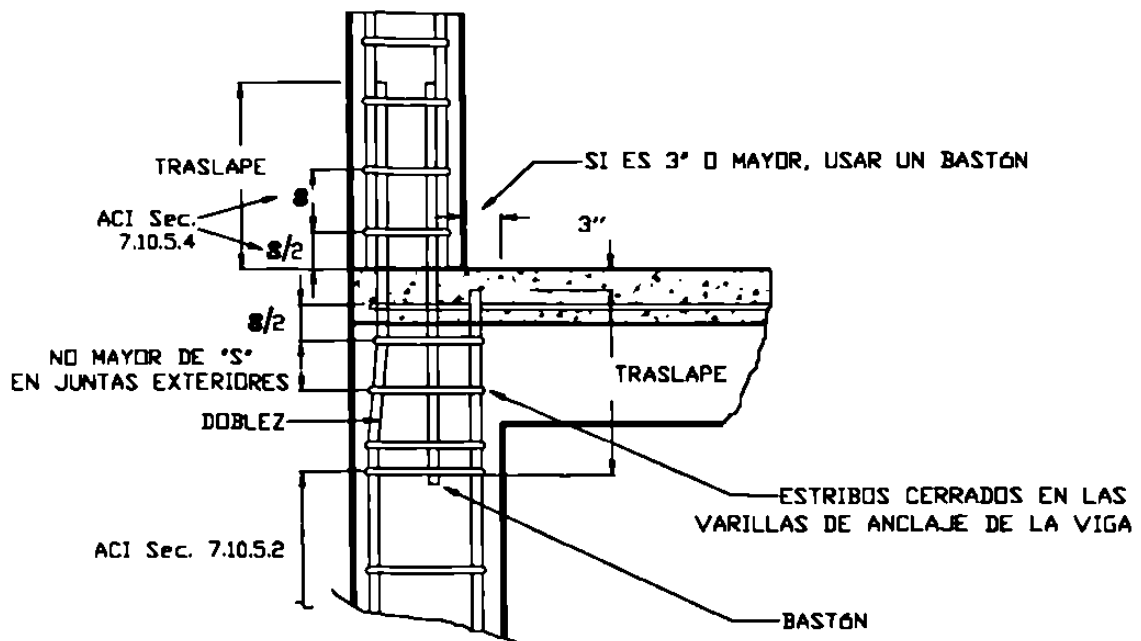


FIGURA B-8  
ARREGLOS TÍPICOS DE ESTRIBOS



(a) ESPACIAMIENTO DE ESTRIBOS EN JUNTA VIGA-COLUMNA INTERIOR.



(b) ESTRIBOS EN VIGA-COLUMNA EXTERIOR.

FIGURA 8-9  
ESPACIAMIENTO DE ESTRIBOS EN JUNTAS VIGA-COLUMNA.

Si el cortante  $V_u/\phi$  excede  $0.5V_c$ , se requiere refuerzo por cortante (ACI Sección 11.5.5.1). Los estribos como refuerzo de cortante no pueden espaciarse a más de  $d/2$  (ACI Sección 11.5.4.1)

El ACI Secciones 7.10.5.4 y 7.10.5.5 requiere que los estribos se coloquen como lo indica la figura 8-9, en las juntas de viga-columna interior y viga-columna exterior.

Finalmente, se requieren estribos extras debajo de la losa o viga en el extremo de la columna para resistir la componente horizontal de las varillas tal como se describe en la Sección 7.8.1 del ACI.

### Cantidad de espiral y requisitos de espaciamiento

La cantidad del refuerzo de la espiral se define usando una relación de refuerzo de espiral,  $\rho_s$ , dado por:

$$\rho_s = \frac{A_{sp}L_{sp}}{A_cL_c}$$

donde:

$$A_{sp} = \text{Área de la varilla de la espiral} = \frac{\pi (d_{sp})^2}{4}$$

$d_{sp}$  = Diámetro de la varilla de la espiral.

$L_{sp}$  = Longitud de una vuelta de la espiral =  $\pi D_c$ .

$D_c$  = Diámetro del núcleo.

$A_c$  = Área del núcleo,  $\pi(D_c)^2/4$

$L_c$  = Paso de la espiral =  $s$ .

$$\text{Entonces: } \rho_s = \frac{(A_{sp})(\pi D_c)}{(\pi D_c^2/4)s}$$

$$\rho_s = \frac{4A_{sp}}{sD_c}$$

Del diagrama de cuerpo libre de la espiral.

$$2f_{sp} A_{sp} = f_2 D_c s$$

$$f_2 = \frac{f_{sp} \times \rho_s}{2}$$

La resistencia de la columna en el primer máximo es:

$$P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}.$$

La resistencia en el segundo máximo es:

$$P_2 = 0.85 f_1 (A_c - A_{st}) + f_y A_{st}$$

Entonces si  $P_2$  es igual a  $P_o$ ,  $0.85 f_1 (A_c - A_{st})$  puede ser igual a  $0.85 f'_c (A_g - A_{st})$ . Siempre que  $A_{st}$  es pequeña comparada con  $A_g$  o  $A_c$ , lo que da:

$$f_1 = \frac{A_g f'_c}{A_c}$$

tomando  $f_{sp}$  igual a la resistencia de fluencia de la espiral,  $f_y$ , el porcentaje de acero da:

$$\rho_s = 0.45 (A_g/A_c - 1) (f'_c/f_y) \quad (\text{ACI Ec. 10 - 6})$$

El espaciamiento de la espiral se puede determinar por tres reglas:

1.- Resolviendo la ecuación anterior lo cual da:

$$S \leq \frac{\pi d_{sp}^2 f_y}{0.45 D_c f'_c [(A_g/A_c) - 1]}$$

2.- El ACI Sección 7.10.4.3 limita el espaciamiento libre entre espiral ; (paso), a no más de 3 pulg. (7.5 cm).

3.- Para evitar problemas de colado del concreto. El espaciamiento libre no será menor que 1 1/3 veces el tamaño del agregado grueso (ACI Sección 3.3.3) y no menor de 1 pulg. (ACI Sección 7.10.4.3).

La terminación de la espiral tanto arriba como abajo de la columna se rige por las Secciones 7.10.4.6 a 7.10.4.8. Otra vez, las juntas de refuerzo deben satisfacer la Sección 7.9.1 del ACI.

## EJEMPLOS DE DISEÑO

**Ejemplo 8-1.** Diseño de una columna con estribos para  $P_u$  y  $M_u$  dados

$$P_u = 350 \text{ KLbs.} \quad M_u = 110 \text{ KLbs- pie.} \quad \text{y} \quad V_u = 16 \text{ KLbs.}$$

La columna está en un marco arriostrado y mide 10 pies, 6 pulg.

1.- Seleccionar materiales y proponer sección.

Usar  $f_y = 60$  KLbs y  $f_c = 3$  KLbs/pulg<sup>2</sup>. Un porcentaje económico de acero esta entre 1 y 2%. Consideremos  $\rho_t = 0.015$  como primer tanteo.

$$A_g \text{ (tanteo)} \geq \frac{P_u}{0.45 (f_c + f_y \rho_t)}$$

$$\geq \frac{350}{0.45 (3 + 60 \times 0.015)} \geq 199 \text{ pulg}^2$$

ó 14.1 pulg x 14.1 pulg.

Como la fórmula anterior no considera el efecto del momento  $M_u$ , se propondrá una sección de 16 x 16 pulg., como primer tanteo.

Para proponer el arreglo del refuerzo, calculamos la relación e/h:

$$e = \frac{M_u}{P_u} = \frac{110}{350} = 0.314 \text{ pies.} \quad \frac{e}{h} = 0.236$$

Para este rango de e/h, se recomienda una columna reforzada en dos caras como eficiente.

Relación de esbeltez: Este efecto puede despreciarse si:

$$Kl_u/r \leq 34 - 12(M_1/M_2)$$

Como la columna está arriostrada propondremos  $K \leq 1.0$  y  $M_1/M_2$  normalmente estará entre +0.5 y -0.5, propondremos  $K = 1.0$  y  $M_1/M_2 = +0.5$

$$\frac{Kl_u}{r} = \frac{1.0 \times 126}{0.3 \times 16} = 26.3$$

$$34 - 12 (M_1/M_2) = 34 - 12 (+0.5) = 28.0$$

El efecto de esbeltez puede despreciarse.

## 2.- Calcular $\gamma$

$\gamma$ , es la relación entre la distancia a centros de varillas y la dimensión total h de la columna, se requiere para definir que diagrama de interacción se usara.

$$\gamma = \frac{16 - 2 (1.5 + 0.375 + 0.5)}{16} = 0.703$$

Como se tienen diagramas de interacción para  $\gamma = 0.60$  y  $\gamma = 0.75$  tendrá que interpolarse.

### 3.- Uso de los diagramas de interacción para determinar $\rho_t$ .

Datos para entrar a los diagramas:

$$\frac{\phi P_n}{A_g} = \frac{P_u}{A_g} = \frac{350}{16 \times 16} = 1.367$$

$$\frac{\phi M_n}{A_g h} = \frac{M_u}{A_g h} = \frac{110 \times 12}{16 \times 16 \times 16} = 0.322$$

Del diagrama de interacción para  $\gamma = 0.60$ ,  $\rho_t = 0.014$ .

Del diagrama de interacción para  $\gamma = 0.75$ ,  $\rho_t = 0.013$ .

Interpolando linealmente para  $\gamma = 0.703$ .

$$\rho_t = 0.014 - 0.001 \times \frac{0.103}{0.150} = 0.0133$$

Si este valor hubiese resultado mayor de 0.03 ó 0.04 aumentar sección, y si hubiese resultado menor de 0.01 es necesario recalcular usando una sección más pequeña (ACI Sección 10.9.1).

### 4.- Selección del refuerzo

$$A_{st} = \rho_t \times A_g.$$

$$= 0.0133 \times 16 \times 16 = 3.41 \text{ pulg}^2$$

Posibles combinaciones:

4 varillas # 9,  $A_{st} = 4.00 \text{ pulg}^2$  (2 en cada cara).

8 varillas # 6,  $A_{st} = 3.52 \text{ pulg}^2$  (4 en cada cara).

6 varillas # 7,  $A_{st} = 3.60 \text{ pulg}^2$  (3 en cada cara).

Se propone una columna cuadrada de 16" de lado con 6 varillas #7.

### 5.- Revisar capacidad a carga axial máxima.

$$P_u \text{ no debe exceder } \phi P_{n(\max)} = 0.85 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y (A_{st})]$$



La línea horizontal superior del diagrama de interacción representa  $\phi P_{n(max)}$  y la sección falla arriba de este límite. Al usar el diagrama de interacción se ve que  $P_u$  no excede  $\phi P_{n(max)}$ .

## 6.- Diseñar traslapes de varillas.

En los diagramas de interacción, los esfuerzos en las varillas adyacentes a la cara de tensión para  $P_u/bh = 1.367$  y  $M_u/bh^2 = 0.322$  están cerca de  $0.2f_y$ , en tensión. En las Secciones. 12.17.2.2 y 12.17.2.3, el traslape debe ser Clase B si más de la mitad de las varillas son traslapadas en cualquier sección o clase A si menos de la mitad son traslapadas. Normalmente todas las varillas son traslapadas en la misma sección. Consideraremos que esto se da. El traslape debe ser  $1.3\ell_d$ .

Del ACI Sección 12.2.2,  $\ell_d$  para varillas #7 es:

$$\ell_d = \frac{(f_y \alpha \beta \lambda)}{(20 \sqrt{f_c})} d_b = \frac{(60,000 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0)}{(20 \sqrt{3,000})} \times 0.875$$

$$\ell_d = 47.9 \text{ pulg.}$$

$$1.3 \ell_d = 1.3 \times 47.9 = 62.3 \text{ pulg.}$$

Este traslape es muy grande, casi media altura de entrepiso. Por esta razón, consideraremos el uso de 8 varillas #6, cuatro en cada cara. Con un espaciamiento libre de 3.08 pulg. ( $\approx 8$  cm) el cual excede  $1.5d_b$ .

Para las varillas #6,  $\ell_d$  es:

$$\ell_d = \frac{(f_y \alpha \beta \lambda)}{(25 \sqrt{f_c})} d_b = 38.3 \text{ pulg.}$$

La longitud del traslape es  $1.3 \times 38.3 = 49.8$  pulg.  $\approx 50$  pulg.

## 7.- Estribos.

El ACI Sección 7.10.5.1 especifica que el estribo mínimo a usar es el #3. Espaciamiento mínimo (ACI Sec. 7.10.5.2) el menor de :

- 6 diámetros varilla longitudinal =  $16 \times \frac{3}{4} = 12$  pulg.
- 48 diámetros estribo =  $48 \times \frac{3}{8} = 18$  pulg.
- Dimensión mínima de columna = 16 pulg.

Si  $V_u > 0.5\phi V_c$  los estribos deben satisfacer el ACI Capítulo 11 y también el ACI Sección 7.10.5.

$$V_c = 2 \left( 1 + \frac{N_u}{2000 A_g} \right) \sqrt{f'_c} b_w d$$

$$= 2 \left( 1 + \frac{350,000}{2000 \times 16 \times 16} \right) \sqrt{3,000} \times 16 \times 13.6 = 40.1 \text{ KLbs}$$

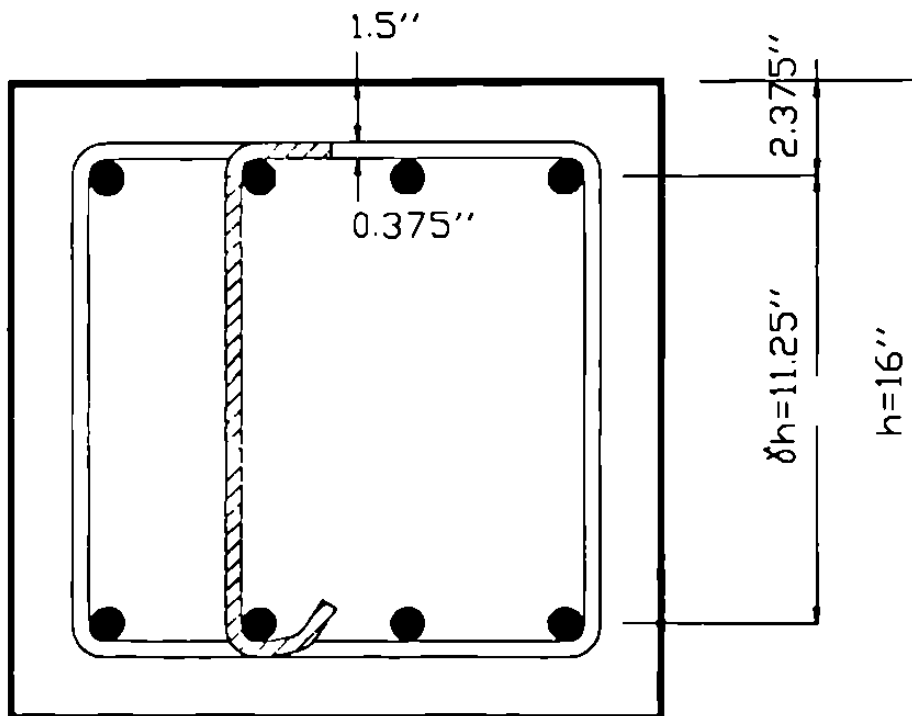
$V_u = 16 \text{ KLbs}$  es menor que  $0.5\phi V_c = 0.5 \times 0.85 \times 40.1$

$$= 17.1 \text{ KLbs}$$

Entonces, la Sección 7.10.5 del ACI rige.

(Si  $0.5\phi V_c < V_u \leq \phi V_c$ , sería necesario satisfacer las Secciones 7.10.5, 11.5.4.1 y 11.5.5.3 del ACI)

Usar estribos #3 @ 12 pulg. c.a.c., y 8 varillas #6 para la columna mostrada en la Figura 8-10, de 16"x16".



ACI SEC. 7.10.5.3

TRASLAPES DE 50" EN TODAS LAS VARILLAS LONGITUDINALES.

FIGURA 8-10

**Ejemplo 8-2. Diseño de una columna con espiral para carga axial grande y momento pequeño.**

$$P_u = 1600 \text{ KLbs}$$

$$M_u = 150 \text{ KLbs - pie.}$$

1.- Proponer sección:

Proponiendo  $\rho_t = 0.04$

$$A_g \text{ (tanteo)} = \frac{P_u}{0.55 (f'_c + f_y \rho_t)} = 455 \text{ pulg}^2$$

Esta corresponde a un diámetro de 24.1 pulg.

Se propone  $d = 24$  pulg.

2.-Calcular  $\gamma$

Suponiendo espiral de varilla #3 y refuerzo longitudinal con varillas #10:

$$\gamma = \frac{24 - 2(1.5 + 0.375 + 1.27/2)}{24} = 0.791$$

3.- Calcular  $\rho_t$ :

Usando los diagramas de interacción:

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{1600}{\pi(12)^2} = 3.54$$

$$\frac{M_u}{A_g x h} = \frac{150 x 12}{\pi(12)^2 x 24} = 0.166$$

Interpolando entre las figuras A-13 y A-14 (Diagramas de interacción con  $\gamma = 0.75$  y  $0.90$  de las ayudas de diseño al final) da  $\rho_t = 0.038$ . Debido a que los valores de  $P_u/A_g$  y  $M_u/A_g h$  quedan arriba de la línea horizontal del diagrama de interacción, se usará la capacidad a carga axial máxima para calcular  $A_{st}$ .

4.- Acero de refuerzo.

$$A_{st} = \rho_t \times A_g.$$

$$= 0.038 \times \pi (12)^2 = 17.19 \text{ pulg}^2$$

11 varillas #11 dan  $A_{st} = 17.16 \text{ pulg}^2$  y la tabla A-21 muestra que se acomodan correctamente en una columna de 24 pulg. de diámetro.

5.- Revisión de la capacidad máxima a carga axial.

$$\begin{aligned}\phi P_{n(\max)} &= 0.85 \times 0.75 [0.85 \times 4(\pi \times 12^2 - 17.16) + 60 \times 17.16] \\ &= 1600 \text{ KLbs}\end{aligned}$$

6.- Cálculo de la espiral:

El tamaño mínimo de la espiral es la #3 (ACI Sección 7.10.4.2) el paso,  $s$ , está dado por la ecuación:

$$s < \frac{\pi (d_{sp})^2 f_y}{0.45 D_c f_c [(A_g/A_c) - 1]} \quad \text{donde:}$$

$d_{sp}$  = Diámetro de la espiral = 0.375 pulg.

$f_y$  = Esfuerzo de fluencia del acero de la espiral

$D_c$  = Diámetro del núcleo (al exterior de la espiral)

$$= 24 - 2 \times 1.5 = 21 \text{ pulg.}$$

$$A_g = \text{Area total} = \pi (12)^2 = 452 \text{ pulg}^2$$

$$A_c = \text{Area del núcleo} = (10.5)^2 \pi = 346 \text{ pulg}^2$$

Entonces:

$$S \leq \frac{\pi (0.375)^2 \times 60,000}{0.45 \times 21 \times 4000 [(452/346) - 1]} \leq 2.29 \text{ pulg.}$$

Entonces, centro a centro de la espiral no debe exceder 2.29 pulg. revisando los pasos de la espiral, tenemos: ACI Sección 7.10.4.3 es 3 pulg. Paso max. =  $3.0 + 0.375 = 3.375 \text{ pulg.}$

Paso mínimo: ACI Sección 7.10.4.3 es 1 pulg., ó 11/3 veces el tamaño máximo del agregado grueso (ACI Sección 3.3.3). Para ¾ pulg., del agregado grueso el paso mínimo es 1.375 pulg.

Usar espiral No. 3 con 2 1/4 pulg., de paso.

## 7.-Traslapes:

Con el diagrama de interacción  $f_y$ , está en compresión. Entonces, para traslape en compresión (ACI Sección 12.6.1).

De la tabla A-19.

Longitud de traslape = 42.3 pulg.

Para varillas dentro de espiral (ACI Sección 12.17.2.5)

Factor = 0.75

$\ell_{(\text{traslape})} = 0.75 \times 42.3 = 31.7$  pulg.

## 8.6.- SOLUCIÓN APROXIMADA PARA COLUMNAS CON ESTRIBOS. FALLA POR COMPRESIÓN.

El diagrama de interacción calcula la capacidad de secciones transversales de columnas, esto es teóricamente correcto, pero no da una solución directa para el diseño de la columna. En 1942 Whitney desarrolló una ecuación aproximada para la parte del diagrama de interacción en falla por compresión. Este análisis considera  $f_y = 50,000$  Lbs/pulg<sup>2</sup> ( $f_y = 3500$  Kg/cm<sup>2</sup>). Actualmente muchas columnas son diseñadas con  $f_y = 60,000$  Lbs/pulg<sup>2</sup>. Por esta razón, la ecuación de Whitney modificada basada en  $f_y = 60,000$  Lbs/pulg<sup>2</sup> se presenta aquí. Las siguientes consideraciones son necesarias:

1.- La columna tiene una sección transversal rectangular con refuerzo en dos caras paralelas al eje de flexión y a la misma distancia de él.

2.- El refuerzo en compresión ha fluido. Esto es generalmente cierto para fallas en compresión, particularmente para excentricidades pequeñas.

3.- el área de concreto desplazada por el acero en compresión puede ser despreciada.

4.- El diagrama de interacción para fallas en compresión puede ser representado por una línea recta para la capacidad a carga axial pura  $P_{no}$ , y momento correspondiente a la falla balanceada.

5.- La profundidad del bloque de esfuerzos en compresión para falla balanceada es  $a = \beta_1 c$ . De la compatibilidad de deformaciones consideramos que  $f_c \leq 4000 \text{ Lbs/pulg}^2$  y  $f_y = 60,000 \text{ Lbs/pulg}^2$   $a = 0.51d$ .

Sumando momentos con respecto al eje del refuerzo en tensión da:

$$P_n \frac{(e+d-d')}{2} = c(d-a/2) + C_s(d-d')$$

$$\text{ó } P_n = \frac{C(d-a/2)}{e + [(d-d')/2]} + \frac{C_s}{[e/(d-d')] + 1/2}$$

Sustituyendo los valores en la fluencia:

$$c(d-a/2) = [0.85 f_c (0.51d) b] \frac{(d-0.51d)}{2} = 0.323 f_c b d^2$$

$$\text{y, } C_s = A'_s f_y, \text{ esto da:}$$

$$P_n = \frac{0.323 f_c b d^2}{e+1/2(d-d')} + \frac{A'_s f_y}{[e/(d-d')] + 1/2}$$

lo cual puede escribirse como:

$$P_n = \frac{0.323 f_c b h}{(eh/d^2) + [(d-d')h]/2d^2} + \frac{A'_s f_y}{[e/(d-d')] + 1/2} \quad \text{----- (A)}$$

Si la excentricidad correspondiente a la falla balanceada se conoce,  $P_{nb}$ . Para esta ecuación corresponde al rango entre  $P_{no}$  y  $P_{nb}$  y es necesario satisfacer para la condición límite  $e = 0$ . Entonces:  $P_n = 0.85 f_c b h + 2 f_y A'_s$ .

Sustituyendo  $e = 0$  y este valor de  $P_n$ , la ecuación (A) da:

$$\frac{(d-d')h}{2d^2} = 0.38$$

Sustituyendo este valor dentro de la ecuación (A) y considerando que  $A_{st} = 2A'_s$ , da la ecuación de Whitney modificada:

$$P_n = \frac{0.323 f_c b h}{eh/d^2 + 0.38} + \frac{A_{st} f_y}{1 + 2e/(d-d')}$$

**Ejemplo 8-3.** Usando la ecuación de Whitney modificada seleccionar el refuerzo de una columna.

$$P_u = 560 \text{ KLbs}$$

$$M_u = 210 \text{ KLbs - pie}$$

$$f_c = 5000 \text{ Lbs/pulg}^2$$

$$f_y = 60,000 \text{ Lbs/pulg}^2$$

1.- Seleccionar sección:

$$A_{g(\text{tanteo})} \geq \frac{P_u}{0.45(f'_c + f_y \rho_t)}$$

$$\text{con } \rho_t = 0.02 \quad A_{g(\text{tanteo})} \geq \frac{560,000}{0.45 + (5000 + 60,000 \times 0.02)}$$

$$A_{g(\text{tanteo})} \geq 200.72 \text{ pulg}^2$$

$$h = \sqrt{A_g} = \sqrt{200.72} = 14.1 \text{ pulg.}$$

Proponemos una columna de 16 x 16 pulg.

$$d = 16" - 2.5" = 13.5" \quad d - d' = 11.0 \text{ pulg.}$$

$$\text{excentricidad, } e = \frac{M_u}{P_u} = \frac{210 \times 12}{560} = 4.5 \text{ pulg.}$$

2.- ¿Es aplicable la ecuación modificada de Whitney?

Es aplicable si  $P_n \geq 0.6 f'_c b h$

$$0.6 \times 5 \times 16 \times 16 = 768 \text{ KLbs.}$$

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{560}{0.7} = 800 \text{ KLbs} \quad \text{Por lo tanto, si es aplicable.}$$

3.- Cálculo de  $A_{st}$ :

$$800 = \frac{0.323 \times 5 \times 16 \times 16}{[(4.5 \times 16) / (13.5)^2] + 0.38} + \frac{A_{st} \times 60}{1 + [(2 \times 4.5) / 11.0]}$$

$$800 = 533 + 33A_{st}$$

$$A_{st} = 8.08 \text{ pulg}^2$$

Usar una columna cuadrada de 16" X 16" con  $A_{st} = 8.08 \text{ pulg}^2$

Usando el diagrama de interacción  $A_{st} = 8.00 \text{ pulg}^2$ . En este caso la ecuación aproximada de Whitney es más precisa.

Se pueden deducir ecuaciones similares para la falla por tensión, pero son menos precisos y como la mayoría de las columnas fallan por compresión, no son tan necesarias. En caso de falla por tensión se recomienda usar los diagramas de interacción.

## 8.7.- COLUMNAS CARGADAS BIAXIALMENTE.

Este tipo de columnas están sujetas a carga axial y flexión en dos ejes perpendiculares.

Un ejemplo común es el caso de una columna de esquina de un marco. Para una sección transversal dada, podemos dibujar el diagrama de interacción con la carga axial y los momentos en ambos ejes, como se muestra en la figura 8-11:

El cálculo de cada punto en la superficie involucra una doble interacción: (1) el gradiente de deformación a través de la sección es variable y (2) El ángulo del eje neutro es variable.

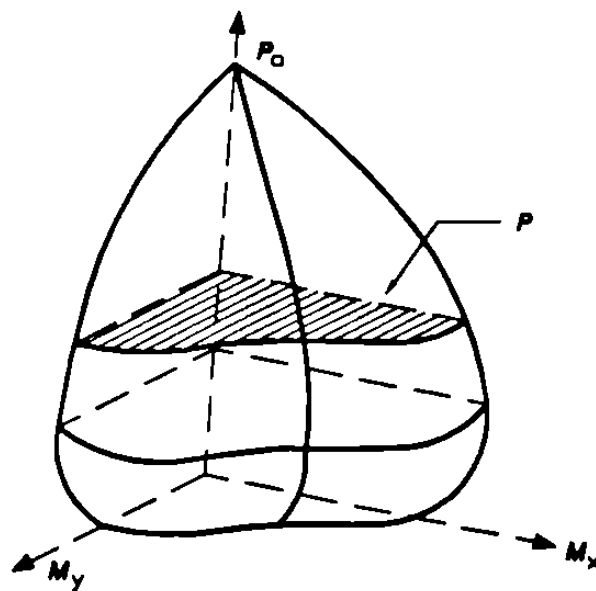


FIGURA 8-11

DIAGRAMA DE INTERACCION CON LA CARGA AXIAL Y LOS MOMENTOS EN AMBOS EJES

Una sección horizontal a través del diagrama de interacción genera, o se asemeja a un cuadrante de círculo o de una elipse y de altura la carga axial, y dependiendo del arreglo de las varillas.

Tres procedimientos son comúnmente usados para diseñar columnas rectangulares sujetas a cargas biaxiales.

1.- Las excentricidades biaxiales,  $e_x$  y  $e_y$ , pueden ser reemplazadas por una excentricidad uniaxial equivalente,  $e_{ox}$ , y la columna se diseña para flexión



uniaxial y carga axial. Definiremos como  $e_x$ , la excentricidad paralela al eje x, como se muestra en la figura 8-12:

Donde el momento  $M_y$ , es con respecto al eje y

:

$$M_{uy} = P_u e_x$$

$$M_{ux} = P_u e_y$$

$$\text{si } \frac{e_x}{x} \geq \frac{e_y}{y}$$

------(D)

Entonces la columna podrá diseñarse para  $P_u$  y un momento

$$M_{oy} = P_u e_{\alpha x}, \text{ donde } e_{\alpha x} = e_x (\alpha e_y / y)x$$

----- (E)

$$\text{donde, para } \frac{P_u}{f_c A_g} \leq 0.4$$

$$\alpha = \left(0.5 + \frac{P_u}{f_c A_g}\right) \frac{f_y + 40,000}{100,000} \geq 0.6$$

$$\text{y para } P_u / f_c A_g > 0.4$$

$$\alpha = \left(1.3 - \frac{P_u}{f_c A_g}\right) \frac{f_y + 40,000}{100,000} \geq 0.5$$

En estas ecuaciones  $f_y$  esta en Lbs/pulg<sup>2</sup> si la desigualdad (D) no se satisface, las x's y las y's se intercambian en la ecuación (E).

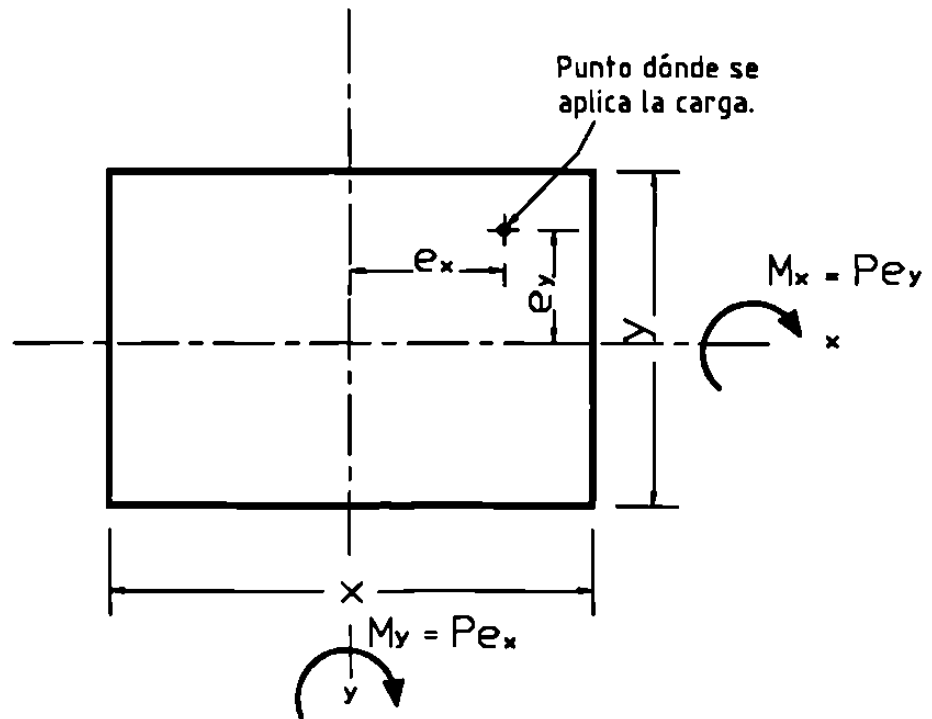
Este procedimiento se limita a columnas simétricas en ambos ejes y con relaciones x/y entre 0.5 y 2.0. El refuerzo debe colocarse en las cuatro caras de la columna.

2.-Las relaciones de Charts trazando secciones a 45° en el diagrama de interacción ( $M_x$  y  $M_y$  del punto A de la figura 8-13) y en esto se basa el diseño.

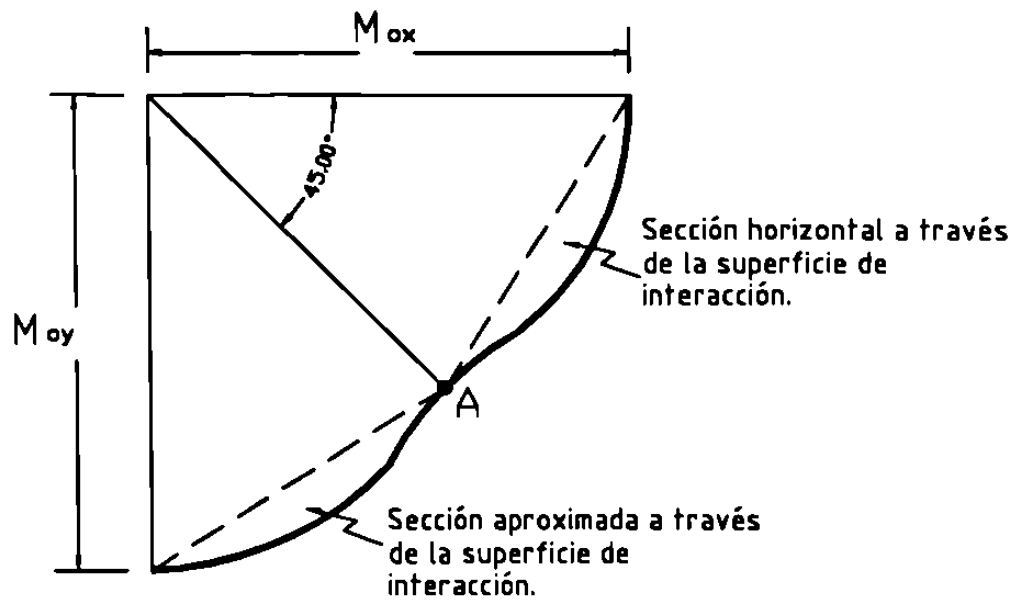
3.- Los comentarios del ACI Secciones 10.3.5 y 10.3.6 presentan la siguiente ecuación, originalmente presentada por Bresler, para calcular la capacidad para flexión biaxial:

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{\phi P_{nx}} + \frac{1}{\phi P_{ny}} - \frac{1}{\phi P_{no}}$$

donde:



**FIGURA 8-12**  
**DEFINICION DE TERMINOS: COLUMNAS CARGADAS BIAIXIALMENTE.**



**FIGURA 8-13**  
**APROXIMACIÓN DE LA SECCIÓN A TRAVÉS DE LA SUPERFICIE DE INTERACCIÓN.**

$P_u$  = Carga axial factorizada.

$\phi P_{nx}$  = Capacidad a carga axial factorizada correspondiente a la excentricidad  $e_x$  y el acero correspondiente con  $e_y = 0$ .

$\phi P_{ny}$  = Capacidad a carga axial factorizada correspondiente a la excentricidad  $e_y$  y el acero correspondiente con  $e_x = 0$ .

$\phi P_{no}$  = Capacidad a carga axial factorizada para  $e_x = 0$  y  $e_y = 0$ .

$M_{nx}$  = Momento con respecto al eje x, ( $P_u e_y$ ).

$e_x$  = Excentricidad medida paralela al eje y.

x = Dimensión de la columna paralela al eje x

y = Dimensión de la columna paralela al eje y.

#### Ejemplo 8-4: Diseño de una columna cargada biaxialmente. Método de la excentricidad.

Seleccionar la sección transversal de una columna con estribos para resistir las cargas y momentos factorizados  $P_u = 360$  KLbs,  $M_{ux} = 70$  KLbs-pie,  $M_{uy} = 80$  KLbs-pie. Usar  $f_y = 60$  KLbs/pulg<sup>2</sup>,  $f_c = 3$  KLbs/pulg<sup>2</sup>

1.- Sección propuesta:

Considerando  $\rho_t = 0.015$ . La sección será reforzada en las cuatro caras ya está cargada biaxialmente.

$$\begin{aligned} A_g \text{ (tanteo)} &\geq \frac{P_u}{0.45 (f_c + f_y \rho_t)} \\ &\geq \frac{360}{0.45 (3 + 60 \times 0.015)} \\ &\geq 205 \text{ pulg}^2 \text{ ó } 14.3 \text{ pulg. de lado.} \end{aligned}$$

Se propone una columna cuadrada de 16x16 pulg.

2.- Cálculo de  $\gamma$  :

$$\gamma = 0.703 \quad (\text{Ejemplo anterior})$$

3.- Calcular  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_{ox}$  y  $e_{oy}$ :

$$e_x = \frac{M_{uy}}{P_u} = \frac{80 \times 12}{360} = 2.67 \text{ pulg.}$$

$$e_y = \frac{M_{ux}}{P_u} = \frac{70 \times 12}{360} = 2.33 \text{ pulg.}$$

Por inspección  $e_x/x \geq e_y/y$ , entonces:

$$\frac{P_u}{f_c A_g} = \frac{360}{3 \times 256} = 0.469 > 0.4$$

$$\alpha = (1.3 - \frac{P_u}{f_c A_g}) \frac{f_y + 40,000}{100,000} \text{ pero no menor de 0.5}$$

$$= (1.3 - 0.469) \frac{60,000 + 40,000}{100,000} = 0.831$$

$$e_{\alpha} = e_x + \frac{\alpha e_y x}{y} = 2.67 + \frac{0.831 \times 2.33 \times 16}{16} = 4.61 \text{ pulg.}$$

Entonces, el momento equivalente uniaxial es:

$$M_{oy} = P_u e_{\alpha} = 360 \times 4.61 = 1658 \text{ KLbs-pulg.}$$

La columna se diseñará para  $P_u = 360 \text{ KLbs}$  y  $M_{oy} = 1658 \text{ KLbs-pulg.}$

4.- Usar diagramas de interacción para determinar  $\rho_t$ :

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{360}{256} = 1.41 \text{ KLbs/pulg}^2$$

$$\frac{M_{oy}}{A_g h} = \frac{1658}{(16)^3} = 0.405 \text{ KLbs/pulg}^2$$

De las figuras A-9 y A-10.

$$\text{Para } \gamma = 0.60 \quad \rho_t = 0.033$$

$$\text{Para } \gamma = 0.75 \quad \rho_t = 0.026$$

Usando interpolación lineal,  $\rho_t = 0.031$  para  $\gamma = 0.703$ .

5.- Calcular  $A_{st}$  y seleccionar el refuerzo.

$$A_{st} = \rho_t A_g = 7.94 \text{ pulg}^2$$

De la tabla A-22, seleccionar 8 varillas #9, tres en cada cara,  $A_{st} = 8.00 \text{ pulg}^2$ .  
 Diseñar estribos y traslapes como ejemplos anteriores.

**Ejemplo 8-5.- Diseño de una columna cargada biaxialmente. Método de la carga recíproca de Bresler.**

Mismos datos de ejemplo anterior.

1.- Proponer sección:

Se propone sección de 16"x16", usando la misma ecuación que ejemplo 8-4.

2.- Calcular  $\gamma$ :  $\gamma = 0.703$

3.- Calcular  $\phi P_{nx}$ :

$\phi P_{nx}$ , es la capacidad a carga axial factorizada correspondiente a  $e_x$  y  $\rho_t$ .

$$\rho_t = \frac{8 \times 0.79}{16 \times 16} = 0.0247$$

$$\frac{e_x}{x} = \frac{M_{ux}}{P_{ux}} = \frac{80 \times 12}{360 \times 16} = 0.167$$

De la figura A-9, para  $e_x/x = 0.167$  y  $\rho_t = 0.0247$  da  $\phi P_{nx}/bh = 1.76$  para  $\gamma = 0.60$ .  
 De la figura A-10,  $\phi P_{nx}/bh = 1.85$  para  $\gamma = 0.75$ . Interpolando da  $\phi P_{nx}/bh = 1.82$   
 y  $\phi P_{nx} = 466 \text{ KLbs}$

4.- Calcular  $\phi P_{ny}$ :

$$\frac{e_y}{y} = \frac{M_{uy}}{P_{uy}} = \frac{70 \times 12}{360 \times 16} = 0.146$$

De la figura A-9,  $\phi P_{ny}/bh = 1.88$  para  $\gamma = 0.60$   
 De la figura A-10,  $\phi P_{ny}/bh = 1.95$  para  $\gamma = 0.75$   
 Interpolando da  $\phi P_{ny}/bh = 1.93$  y  $\phi P_{ny} = 494 \text{ KLbs}$ .

5.- Calcular  $\phi P_{no}$  :

De las figuras A-9 y A-10,  $\phi P_{no}$  es el punto de intersección con la curva para  $\rho_t = 0.0247$  interseca el eje vertical,  $\phi P_{no}/bh = 2.75$  y  $\phi P_{no} = 704 \text{ KLbs}$ .

## 6.-Calcular $P_u$

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{\phi P_{rx}} + \frac{1}{\phi P_{ry}} - \frac{1}{\phi P_{no}}$$

$$= \frac{1}{466} + \frac{1}{494} + \frac{1}{704}$$

$$P_u = 364 \text{ KLbs.}$$

La capacidad requerida es 360 KLbs; entonces, el diseño de la columna es adecuado.

Usar 8 varillas #8, tres en cada cara,  $A_{st} = 6.32 \text{ pulg}^2$

\*La cantidad de acero usada por los dos métodos difiere en 25%. Ambos métodos son empíricos, no es posible establecer cual diseño es el mejor.

## PROBLEMAS.

8-1.- La columna mostrada en la Figura P8-1 está hecha con concreto de  $280 \text{ kg/cm}^2$  y acero grado 60

- (a) Calcular la capacidad teórica a carga axial pura.
- (b) Calcular  $\phi P_n$  máxima permisible para la columna.

8-2.- Calcular la carga axial balanceada y la capacidad a momento de la columna del problema anterior.  $f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .

8-3.- Usar los diagramas de interacción para calcular el momento máximo,  $M_u$  que puede soportar la columna del problema 8-1

- (a)  $P_u = 260 \text{ ton.}$
- (b)  $P_u = 58 \text{ tons.}$

(c)  $e = 10 \text{ cm.}$  Usar  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

8-4.- Usar diagramas de interacción para diseñar una columna para las cargas dadas abajo. Usar  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Diseñar

estribos. Calcular los traslapes requeridos, dibujar la sección transversal mostrando refuerzo principal y estribos.

(a)  $P_u = 175$  tons.  $M_u = 30$  ton-m., Columna cuadrada con varillas en dos caras.

b)  $P_u = 320$  tons.  $M_u = 7$  ton-m. Columna cuadrada con varillas en las cuatro caras.

(c)  $P_u = 58$  tons.  $M_u = 33$  ton-m. Columna cuadrada con varillas en las cuatro caras.

8-5.- Usar los diagramas de interacción para diseñar una columna con espiral para soportar las cargas dadas abajo. En cada caso, usar  $f'_c = 280$  kg/cm<sup>2</sup> y  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>. Diseñar espiral, calcular traslapes y dibujar la sección transversal típica mostrando varillas y espiral.

(a)  $P_u = 270$  tons.  $M_u = 9$  ton-m.

(b)  $P_u = 225$  tons.  $M_u = 67$  ton-m.

8-6.- Usar la ecuación modificada de Whitney para diseñar la sección transversal y el refuerzo de una columna que soporta  $P_u = 175$  tons.  $M_u = 30$  ton-m. Usar  $f'_c = 210$  Kg/cm<sup>2</sup>,  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>

8-7.- Seleccionar la sección transversal y el refuerzo para soportar  $P_u = 200$  tons,  $M_{ux} = 45$  ton-m,  $M_{uy} = 58$  ton-m. Usar  $f'_c = 210$  kg/cm<sup>2</sup>,  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>.

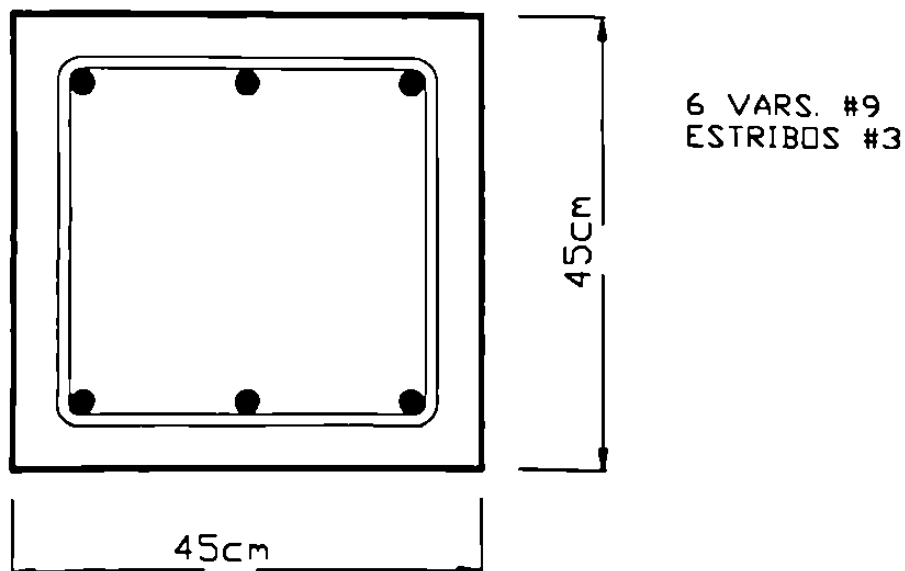


FIGURA P8-1

# **TEMA 9**

## **Columnas esbeltas**

**9.1.- Introducción.**

**9.2.- Comportamiento y análisis de columnas articuladas.**

**9.3.- Diseño de columnas de marcos arriostrados (sin desplazamiento).**

**9.4.- Ejemplo de diseño de una columna de un marco no arriostrado (con desplazamiento).**

**9.5.- Problemas.**



## 9.1.- INTRODUCCION

### Definición de Columna Esbelta.

Una columna cargada excéntricamente como se muestra en la Figura 9-1a en la que los momentos en los extremos son:

$$M_e = Pe$$

Cuando las cargas  $P$  son aplicadas, la columna se flexiona lateralmente una cantidad  $\Delta$  como se muestra. Por equilibrio, el momento interno a la mitad de la altura es (Figura 9-1a).

$$M_c = P(e+\Delta)$$

La deflexión incrementa los momentos para los que la columna será diseñada. Para esta columna simétrica el momento máximo ocurre a la mitad de la altura.

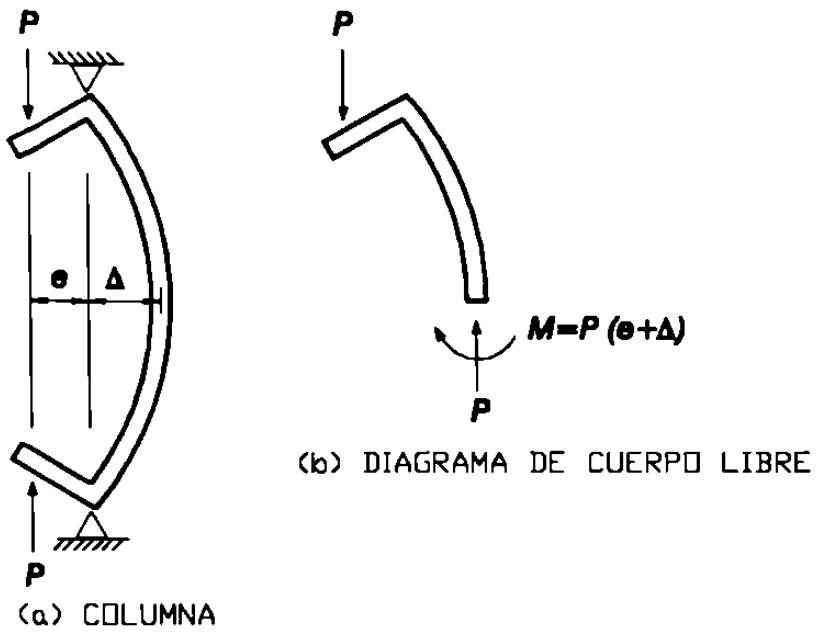
En la Figura 9-2 se muestra un diagrama de interacción para una columna de concreto reforzado. Este diagrama da las combinaciones de carga axial y momento requeridas para causar la falla de la sección transversal de la columna. La línea radial O-A representa los momentos en los extremos de la columna como se muestra en la Figura 9-1. Mientras esta carga se aplique con una excentricidad constante,  $e$ , el momento extremo,  $M_e$ , es una función lineal de  $P$ ,  $M_e = Pe$

La línea curva O-B continua, es el momento  $M_c$ , a la mitad de la altura de la columna, dado por la ecuación:  $M_c = P(e+\Delta)$

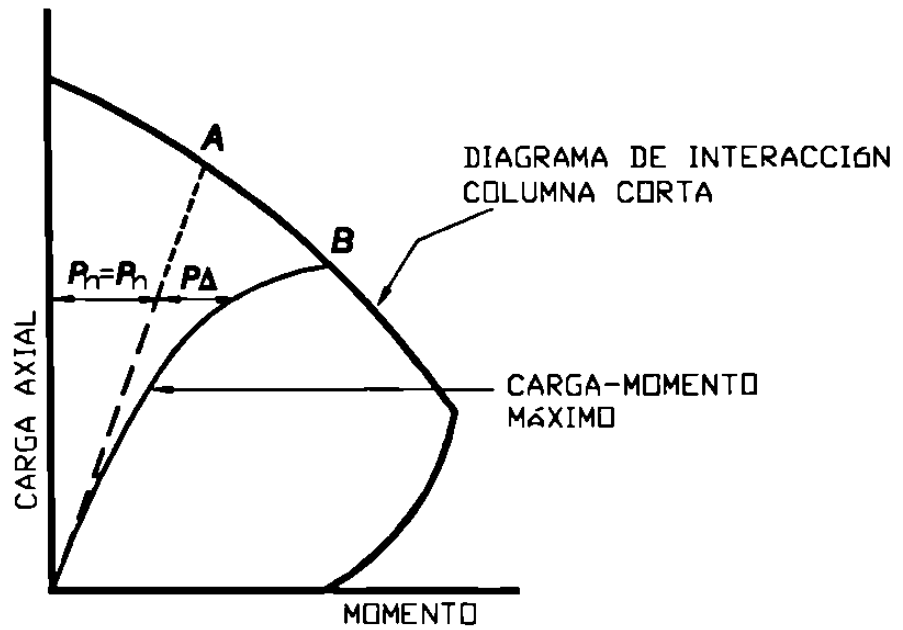
Para cualquier valor dado de  $P$ , el momento a la mitad de la altura es la suma del momento en el extremo,  $Pe$ , y el momento debido a las deflexiones,  $P\Delta$ . La línea O-A se conoce como "curva carga-momento" para el momento extremo, mientras que la línea O-B es la "curva carga-momento" para el momento máximo en la columna.

La falla ocurre cuando la curva carga-momento O-B para el punto de momento máximo intersecta el diagrama de interacción para la sección transversal. Entonces, la carga y el momento correspondientes a la falla están representados por el punto B de la Figura 9-2.

Debido al incremento en el momento máximo por las deflexiones, la capacidad a carga axial se reduce de A a B. Esta reducción en la capacidad a carga axial se le conoce como "efecto de esbeltez".



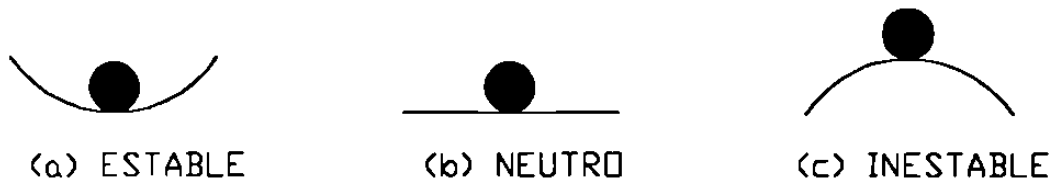
**FIGURA 9-1**  
**FUERZAS EN LA COLUMNA SECCIONADA.**



**FIGURA 9-2**  
**CARGA Y MOMENTO EN UNA COLUMNA.**

Una columna esbelta se define como una columna que tiene una "reducción significativa" en su capacidad a carga axial debida a los momentos resultantes de deflexiones laterales de la columna.

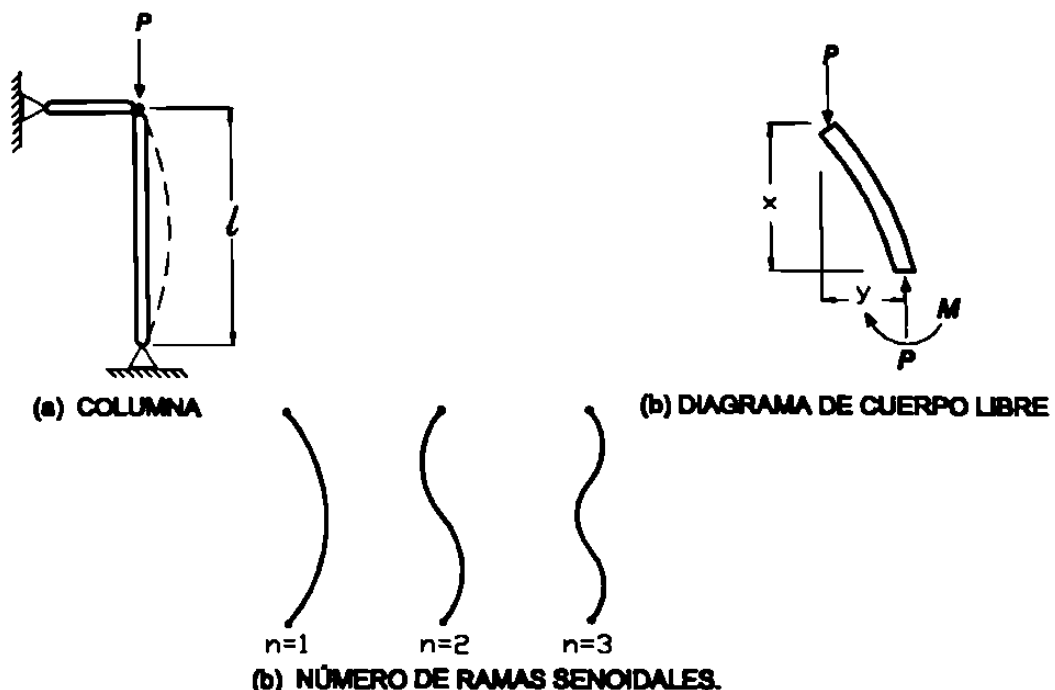
En la figura 9-3 se ilustran tres estados de equilibrio.



**FIGURA 9-3  
ESTADOS DE EQUILIBRIO.**

Si la bola de la Figura 9-3a se desplaza lateralmente y se suelta, regresa a su posición original. Esto es equilibrio estable. Si la bola de la Figura 9-3c se desplaza lateralmente y se suelta, la bola abandona la superficie. Esto es equilibrio inestable. La transición entre equilibrio estable e inestable es equilibrio neutro, se ilustra en la Figura 9-3b. Aquí la bola se desplaza y ahí permanece. Estados de equilibrio similares existen para una columna cargada axialmente como en la Figura 9-4a. Si la columna regresa a su posición original cuando es empujada lateralmente a la mitad de su altura y regresa está en equilibrio estable.

La figura 9-4b muestra una porción de la columna en estado de equilibrio estable.



**FIGURA 9-4  
PANDEO DE UNA COLUMNA ARTICULADA.**

La ecuación diferencial para esta columna es:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py$$

En 1744, Leonhard Euler derivó la ecuación anterior y su solución es:

$$P_c = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

donde:

$EI$  = rigidez a flexión

$l$  = longitud de la columna.

$n$  = número de ondas senoidales en la longitud de la columna.

Casos con  $n=1, 2$  y  $3$  son ilustrados en la Figura 9-4c.

El valor menor de  $P_c$  ocurrirá con  $n=1.0$  esto da lo que se conoce como "carga de pandeo de Euler":

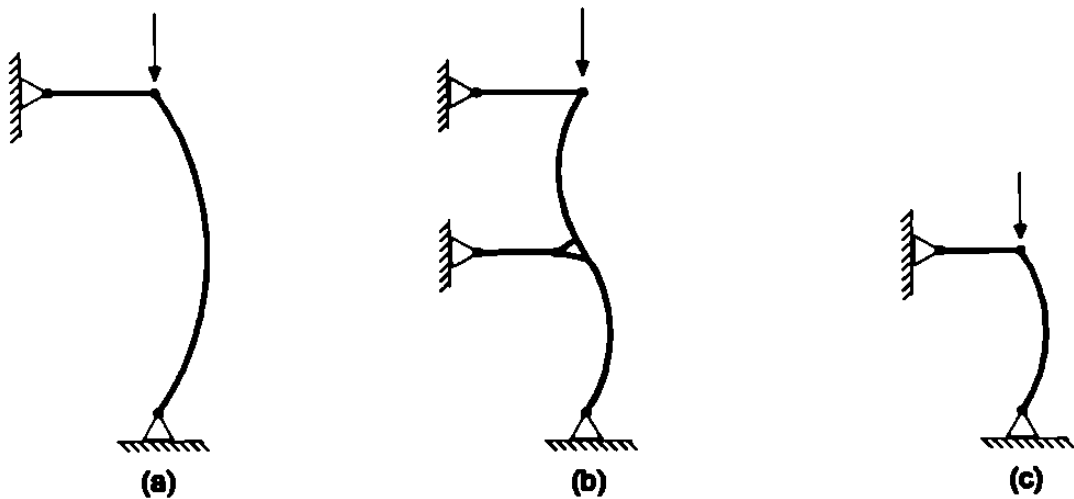
$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Si a la columna mostrada en la Figura 9-5a se le coloca una riostra a la mitad de la altura como se muestra en la Figura 9-5b, el valor de  $n=2$  y la carga de pandeo sería:

$$P_c = \frac{(2)^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

La cual es cuatro veces la carga crítica de la misma columna sin la riostra.

Otra factor que influye en el pandeo de una columna es el concepto de "Longitud efectiva" de la columna. La longitud efectiva es la longitud entre extremos articulados de la columna que tienen la misma carga de pandeo. Entonces la longitud efectiva de la columna de la Figura 9-5c tiene la misma carga de pandeo que la de la Figura 9-5b, la longitud efectiva es en este caso  $l/2$ , donde  $l/2$  es la longitud de cada onda senoidal de la deformada de la columna de la Figura 9-5b.



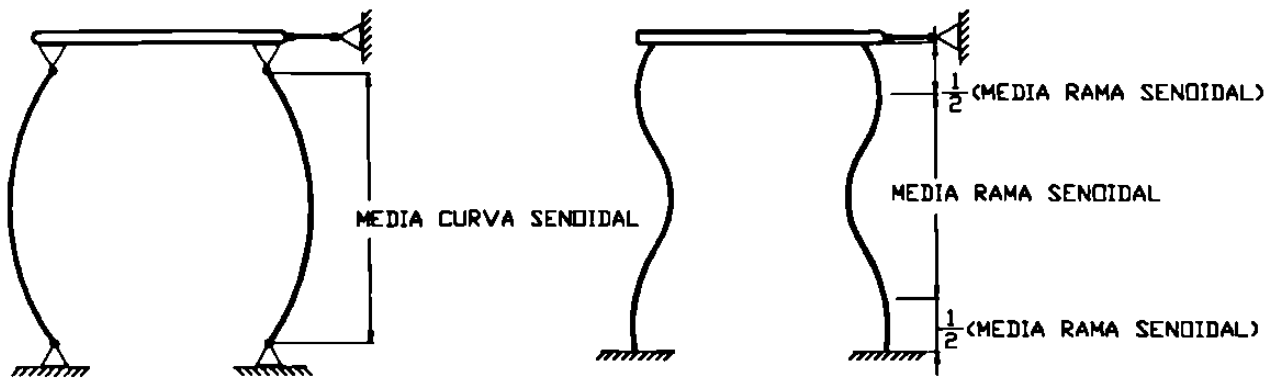
**FIGURA 9-5**  
**LONGITUD EFECTIVA DE COLUMNAS.**

La longitud efectiva,  $kl$ , es igual  $l/n$ . El factor de longitud efectiva es  $K=1/n$ .

La ecuación de la carga crítica de Euler se escribe generalmente como:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2}$$

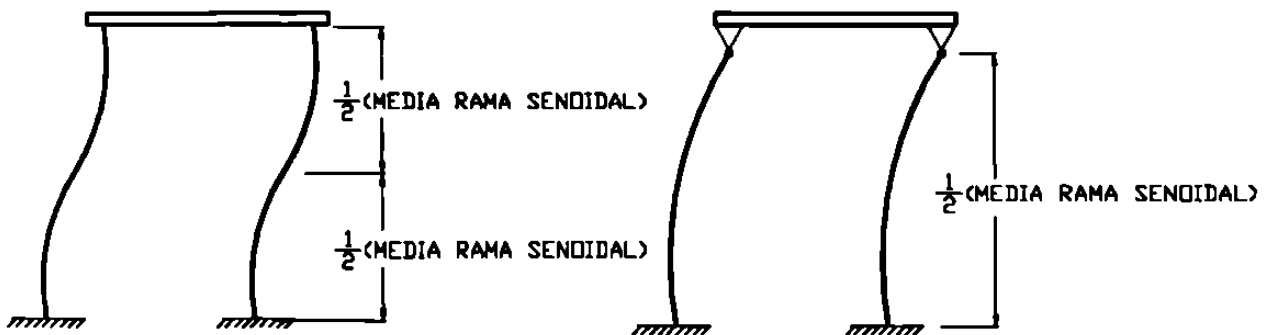
Cuatro casos idealizados se muestran en la Figura 9-6 con sus correspondientes valores de  $kl$



(a)  $n=1, kl=l$

(b)  $n=2, kl=\frac{1}{2}l$

MARCOS ARRIOSTRADOS CONTRA EL DESPLAZAMIENTO



(c)  $n=1, kl=l$

(d)  $n=\frac{1}{2}, kl=2l$

MARCOS LIBRES DE DESPLAZARSE LATERALMENTE

FIGURA 9-6  
LONGITUDES EFECTIVAS DE COLUMNAS IDEALIZADAS.

Los marcos (a) y (b) están prevenidos contra el desplazamiento lateral. Se dice que el marco esta "arriostrado".

Los marcos (c) y (d) están libres de desplazarse lateralmente. Son llamados "no arriostrados".

Las cargas críticas de las columnas mostradas en la Fig. 9-6; guardan una relación de 1:4:1:1/4.

Entonces podemos ver que las restricciones a las rotaciones de los extremos y el desplazamiento lateral tiene un mayor efecto en la carga de pandeo en una columna elástica cargada axialmente.

## 9.2.- COMPORTAMIENTO Y ANÁLISIS DE COLUMNAS ARTICULADAS.

Si la carga axial aplicada a una columna está por abajo de la carga crítica, el proceso convergerá en una situación estable. Si la carga es mayor que la carga crítica, esto no ocurrirá. Esto se conoce como proceso de "segundo orden", porque se describe por la ecuación diferencial de segundo orden:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py$$

### Fallas de material y fallas de estabilidad

Las curvas carga-momento para columnas con tres longitudes se muestran en la Figura 9-7, todas con la misma excentricidad, e.

La curva carga-momento O-A es para una columna corta y es prácticamente la misma que la línea Pe.

Para una columna de longitud moderada, línea O-B, las deflexiones comienzan a ser significativas, reduciendo la carga de falla. Esta columna falla cuando la curva carga-momento interseca el diagrama de interacción en el punto B. Esta es llamada "falla del material" y es común en columnas de marcos arriostrados. Si la columna es muy esbelta, y puede alcanzar una deflexión  $\Delta$  en la cual un valor de  $\partial M/\partial P$  tiende a infinito o comienza a hacerse negativo. Cuando esto ocurre, la columna se vuelve inestable y para pequeñas deflexiones la capacidad a momento baja.

Este tipo de falla se conoce como "falla de estabilidad" y ocurre solamente en columnas arriostradas, pero muy esbeltas o columnas esbeltas de marcos con desplazamiento.

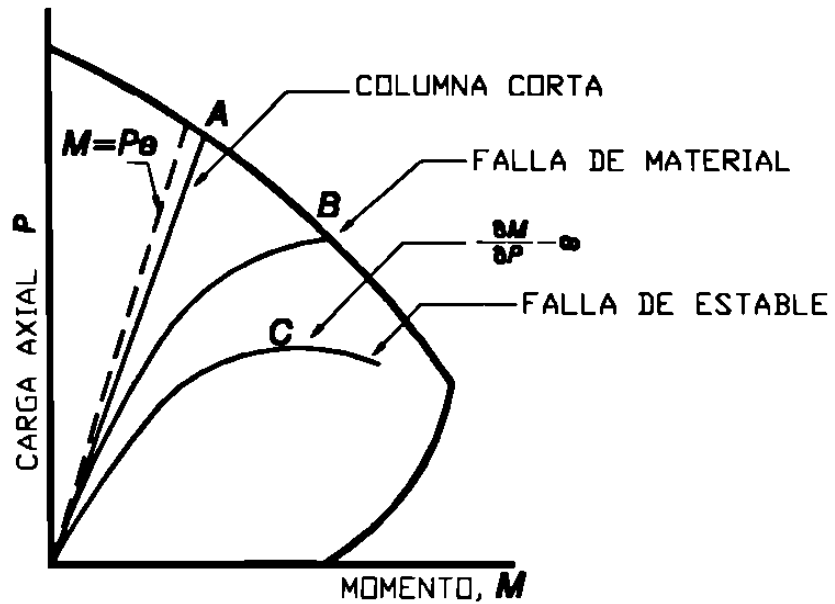


FIGURA 9-7  
FALLAS DE DE MATERIAL Y DE ESTABILIDAD.

### Curvas de interacción para columnas esbeltas

Para visualizar los efectos que influyen en la resistencia de una columna, es algunas veces conveniente usar las curvas de interacción para columnas esbeltas. La línea 0-B, en la Figura 9 - 8a muestra la curva carga-momento máximo para una columna con esbeltez  $l/h = 30$  y está dada por la excentricidad en el extremo  $e_1$ .

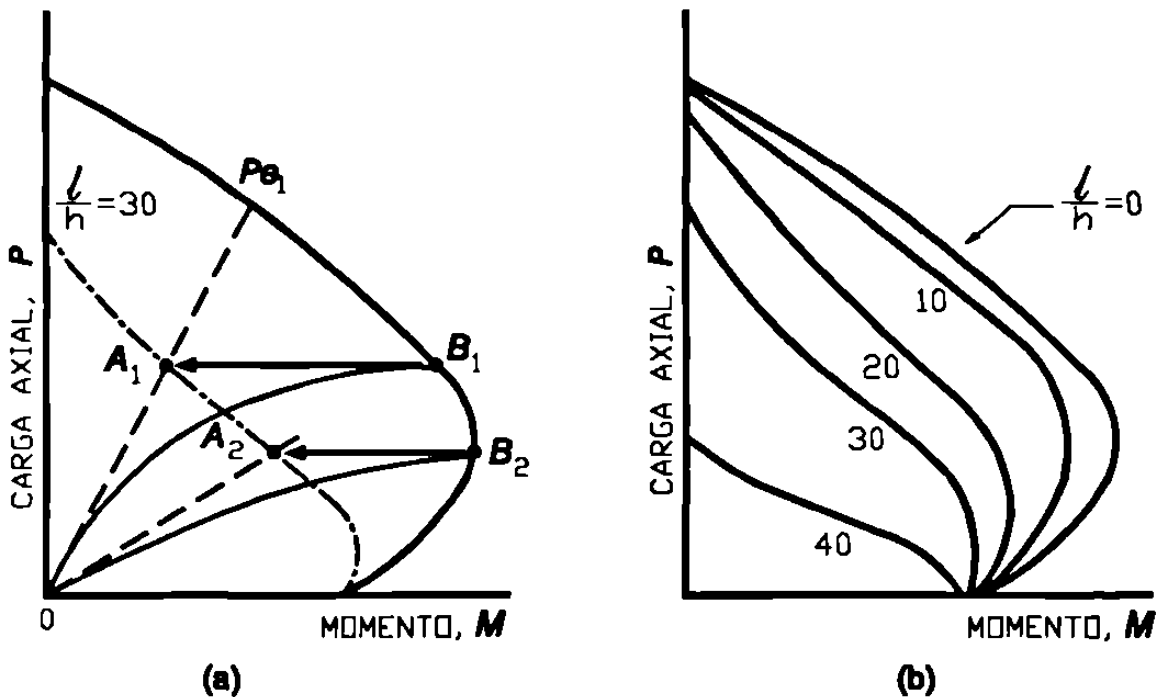


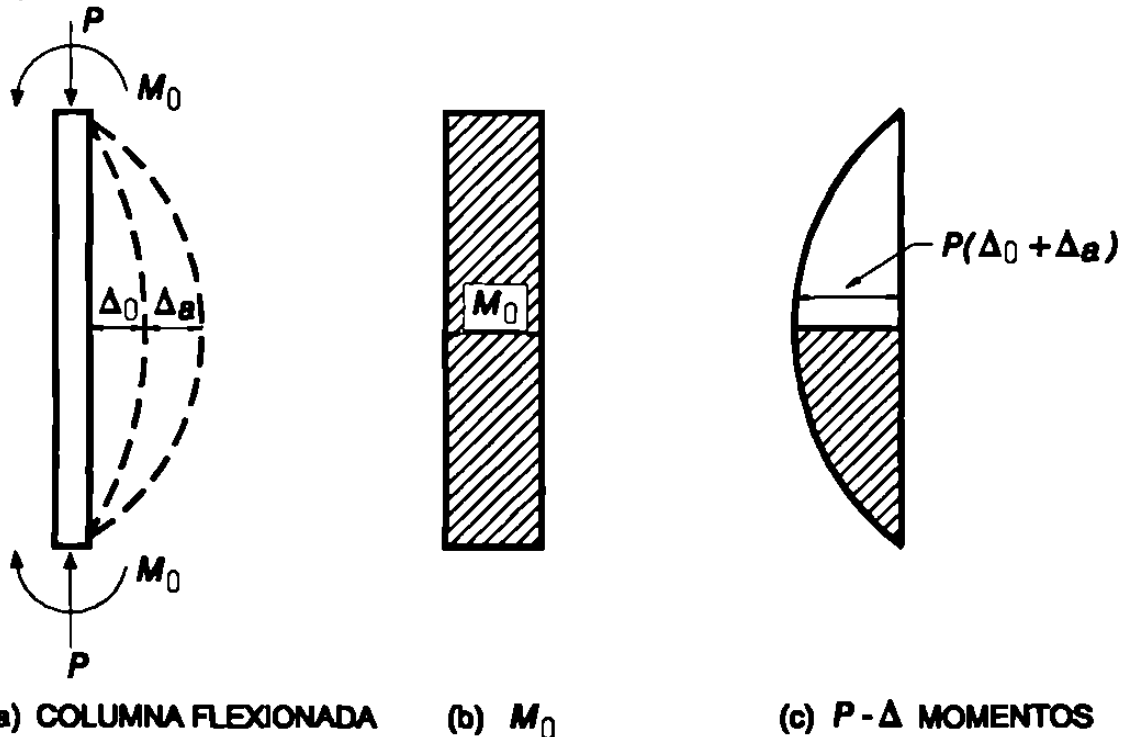
FIGURA 9-8  
CURVAS DE INTERACCION PARA COLUMNAS ESBELTAS.



Esta columna falla cuando la curva carga-momento intersecta el diagrama de interacción en el punto B<sub>1</sub>. Al momento de la falla, la carga y el momento en el extremo están dados por el punto A<sub>1</sub>. Si este proceso se repite un número de veces podemos pasar de A<sub>1</sub> a A<sub>2</sub> como se muestra por la línea punteada del diagrama de interacción. Una familia de diagramas de interacción para columnas esbeltas se muestra en la Figura 9-8b para columnas con la misma sección transversal pero diferentes relaciones de esbeltez.

**Momento amplificado para viga-columna articulada cargada simétricamente**

En la figura 9-9a se muestra una columna bajo la acción de momentos en los extremos M<sub>0</sub>, que producen una deflexión Δ<sub>0</sub>. Esta será llamada como deflexión de "primer orden".



**FIGURA 9-9  
MOMENTOS EN COLUMNA FLEXIONADA.**

Cuando las cargas axiales P son aplicadas, la deflexión se incrementa una cantidad Δ<sub>a</sub>.

La deflexión final a la mitad de la altura es Δ = Δ<sub>0</sub> + Δ<sub>a</sub>. Esta deflexión total se referirá como "deflexión de segundo orden". Se considerará que la deformada final adopta una onda senoidal.

El diagrama de momento primario,  $M_0$ , se muestra en la Figura 9-9b, y los momentos secundarios,  $P\Delta$ ; se muestran en la Figura 9-9c. Si se considera que la deformada es una onda senoidal el diagrama de momentos  $P\Delta$  es también senoidal. Usando el método Area-Momento y observando que la deformada es simétrica, la deflexión  $\Delta_s$  es el momento con respecto al apoyo del diagrama  $M/EI$  entre el apoyo y el centro del claro, mostrado por el área achurada de la Figura 9-9c. El área de esta porción es:

$$\text{área} = [(P/EI) (\Delta + \Delta_s)] l/2 \times 2/\pi$$

donde el centroide se localiza a  $l/\pi$  del apoyo.

Entonces:

$$\Delta_s = [(P/EI) (\Delta_0 + \Delta_s) l/2 \times 2/\pi] (l/\pi)$$

y haciendo  $P_E = \pi^2 EI/l^2$

$$\Delta_s = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI} (\Delta_0 + \Delta_s) = (\Delta_0 + \Delta_s) \frac{P}{P_E}$$

Despejando  $\Delta_s$ ;  $\Delta_s = \Delta_0((P/P_E)/(1-P/P_E))$

y la deflexión final  $\Delta$ , es:

$$\Delta = \Delta_s + \Delta_0 = \Delta_0 + \Delta_0 \frac{P/P_E}{1 - P/P_E} \quad \text{ó}$$

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{1 - P/P_E}$$

Esta ecuación da la deflexión de segundo orden  $\Delta$ , la cual se incrementa conforme  $P/P_E$  se incrementa, y alcanza un valor infinito cuando  $P = P_E$ .

El momento flexionante máximo es:  $M_c = M_0 + P\Delta$

Aquí  $M_c$  se refiere como "momento de segundo orden", y  $M_0$  se refiere como "momento de primer orden".

Sustituyendo el valor de  $\Delta$  en la ecuación anterior.

$$M_c = M_0 + \frac{P\Delta_0}{1 - P/P_E}$$

Para el diagrama de momentos mostrado anteriormente

$$\Delta_0 = \frac{M_0 l^2}{8EI}$$

Sustituyendo este valor y  $P = (P/P_E) \pi^2 EI / l^2$  en la ecuación de  $M_c$ , da:

$$M_c = \frac{M_0(1+0.23 P/P_E)}{1 - P/P_E}$$

El coeficiente 0.23 es una función de la forma del diagrama de  $M_0$ . Este comienza con -0.38, por ejemplo, para un diagrama triangular con  $M_0$  en un extremo y cero en el otro.

En el Código ACI el término  $(1+0.23 P/P_E)$  se omite porque el factor 0.23 varía con el diagrama de momentos y el valor de  $M_c$  queda como:

$$M_c = \delta M_0 \quad \text{donde:}$$

$\delta$  es un factor de amplificación de momento dado por:

$$\delta = \frac{1}{1 - P/P_c} \quad \text{donde:}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2} \quad \text{para una columna articulada.}$$

La ecuación anterior considera momentos iguales en los extremos de la columna.

### **Efecto de momentos desiguales en la resistencia de una columna esbelta**

En el punto anterior se consideró que la columna está sujeta a momentos iguales en los extremos.

Esto es un caso muy especial para el cual el máximo momento  $P\Delta$ , ocurre en una sección donde el momento debido a la carga aplicada  $P_e$ , también es un máximo por lo que estas cantidades se pueden sumar directamente.

Un caso usual, en que la excentricidad es  $e_1 = M_1/P$  y  $e_2 = M_2/P$ , no son iguales, esta dado por los diagramas de momentos mostrado en la Figura 9-10b y c.

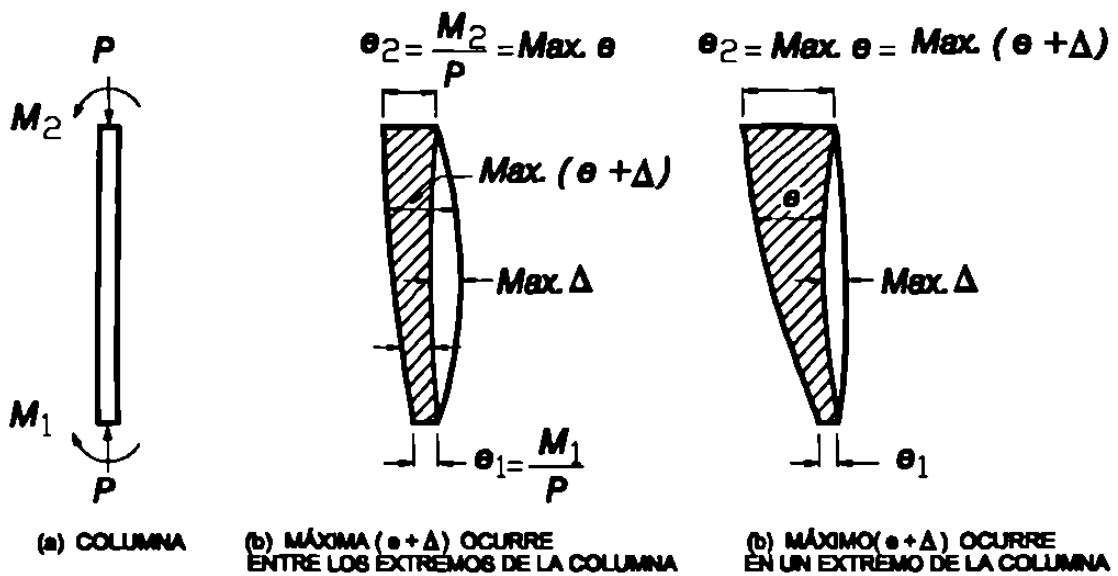


FIGURA 9-10  
MOMENTOS EN COLUMNAS CON MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DESIGUALES.

El máximo valor de  $\Delta$  ocurre entre los extremos de la columna mientras que el máximo valor de  $e$  ocurre en uno de los extremos de la columna.

Por esta razón  $e_{max}$  y  $\Delta_{max}$  no pueden ser sumados directamente. Existen dos casos diferentes.

Para una columna esbelta con pequeñas excentricidades en los extremos, la suma máxima de  $e + \Delta$  ocurrirá en un extremo de la columna como se muestra en la Figura 9-10c.

Estos dos tipos de comportamiento pueden ser identificados en los diagramas de interacción para una columna esbelta mostrados en las Figuras 9-8 y 9-11.

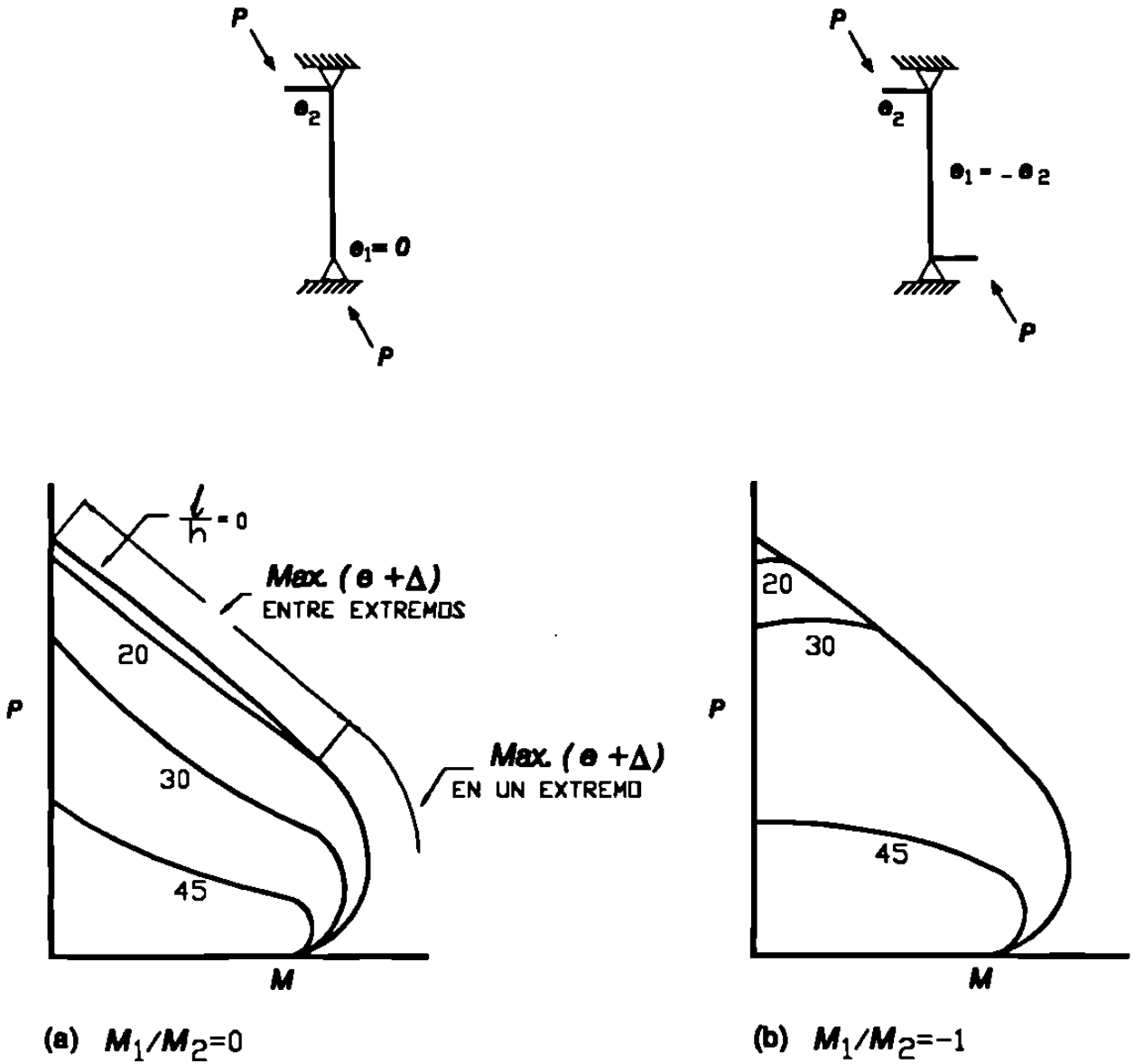


FIGURA 9-11  
 EFECTO DE LA RELACION  $M_1/M_2$  EN LOS DIAGRAMAS DE INTERACCION PARA COLUMNAS ESBELTAS ARTICULADAS.

Para  $e_1 = e_2$  (Figura 9-11b) en el diagrama de interacción para  $l/h = 20$ , por ejemplo, muestra una reducción en la resistencia a través del rango de excentricidades. Para un solo momento en el extremo ( $e_1/e_2 = 0$ , Figura 9-11a), la máxima excentricidad  $e+\Delta$  ocurre entre los extremos de la columna para excentricidades pequeñas, y en un extremo para excentricidades grandes.

Un caso posterior es cuando no hay efectos de esbeltez y la columna se considera como "columna corta".

En el caso de curvatura invertida con  $e_1/e_2 = -1$  el rango de columna esbelta es a menudo muy pequeño, por eso una columna con  $\lambda/h = 20$  sujeta a curvatura invertida no tiene efectos de esbeltez como se muestra en la Figura 9-11b.

En el procedimiento de diseño por amplificación de momento, una columna sujeta a momentos desiguales en sus extremos como se muestra en la Figura 9-12a se reemplaza por otra columna sujeta a momentos iguales a  $C_m M_2$  en ambos extremos como se muestra en la Figura 9-12b.

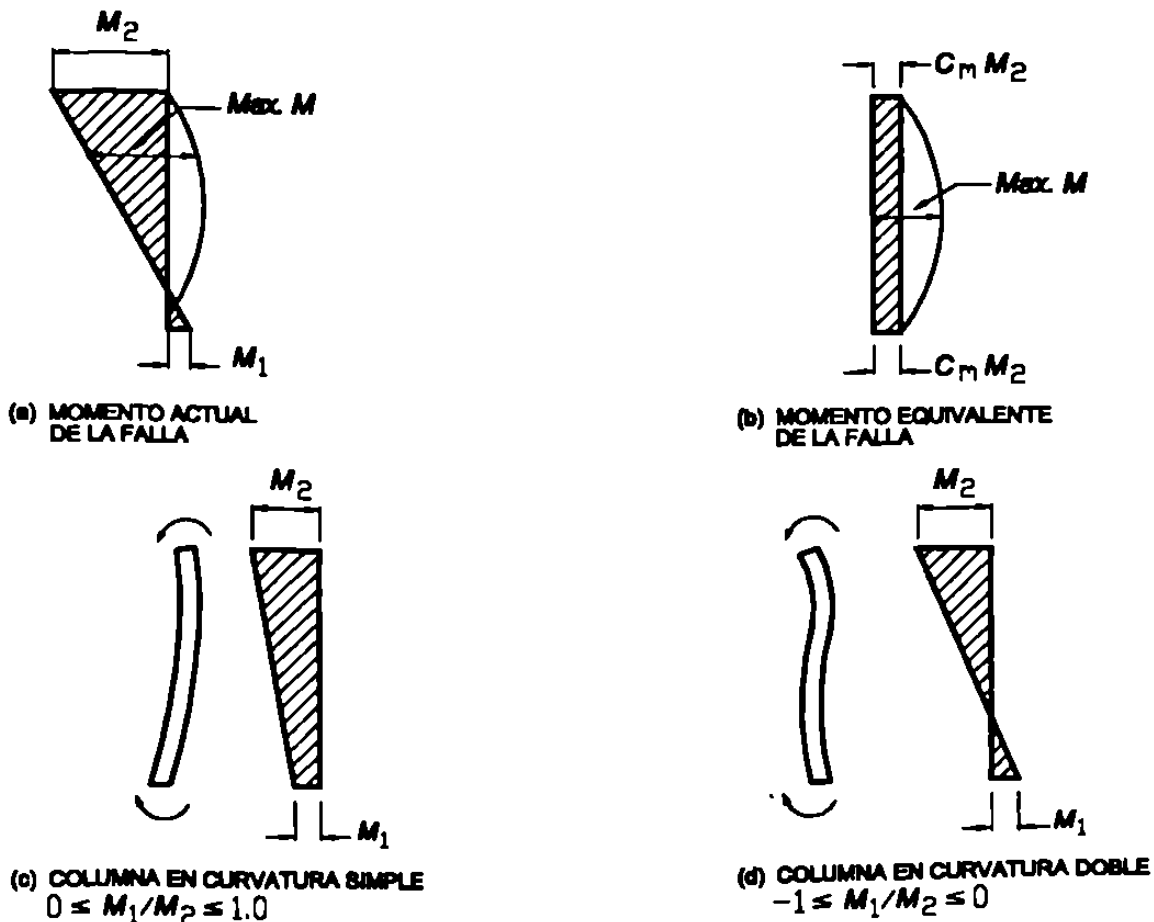


FIGURA 9-12  
 FACTOR DE MOMENTO EQUIVALENTE  $C_m$ .

Los momentos,  $C_m M_2$ , son escogidos de manera que el momento máximo amplificado es el mismo en ambas columnas.

La expresión de el "factor de momento equivalente  $C_m$ ", fue originalmente derivada para usarse en el diseño de vigas-columna de acero y después fue adoptada para diseño de concreto sin cambios (ACI Sec. 10.12.3.1):

$$C_m = 0.6 + 0.4(M_1/M_2) \geq 0.4 \quad (\text{ACI Ec. 10 - 14})$$

En esta ecuación los momentos  $M_1$  y  $M_2$  son el menor y mayor de los momentos en los extremos, respectivamente, calculados usando un análisis convencional elástico de primer orden.

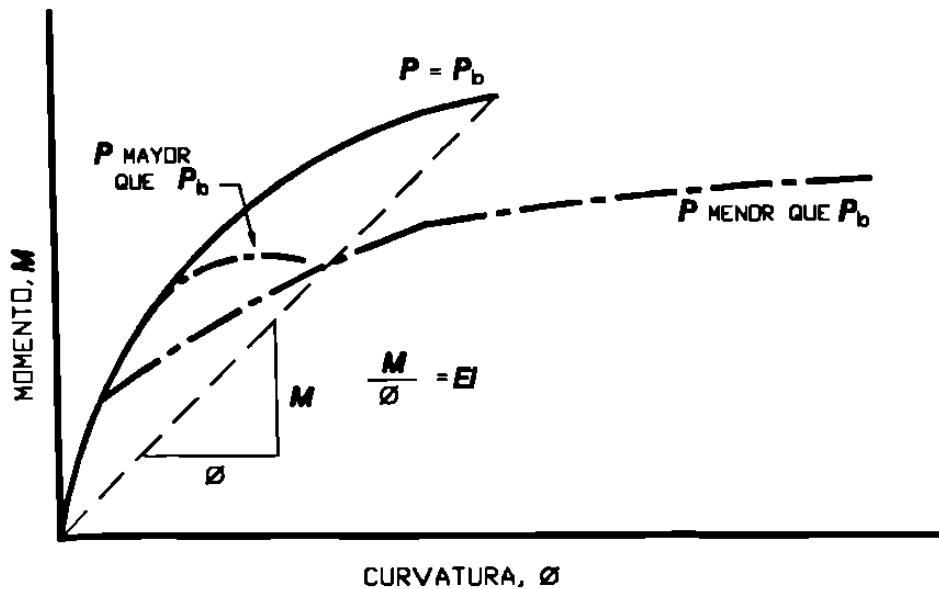
La convención de signos para la relación de  $M_1/M_2$  se ilustra en la Figura 9 - 12c. Si los momentos  $M_1$  y  $M_2$  producen flexión en curvatura simple sin punto de inflexión entre los extremos, como se muestra en la Figura 9-12c,  $M_1/M_2$  es positiva. Si los momentos  $M_1$  y  $M_2$  flexionan la columna en curvatura doble con un punto de momento cero entre sus extremos, como se muestra en la Figura 9 - 12d  $M_1/M_2$ , es negativa.

La ecuación  $C_m = 0.6 + 0.4M_1/M_2$  se aplica solamente a columnas articuladas o columnas de marcos arriostrados, cargados con carga axial y momentos en sus extremos. En todos los demás casos, incluyendo columnas sujetas a cargas transversales entre sus extremos y cargadas concéntricamente (sin momentos extremos),  $C_m$  se toma igual a 1. (ACI Sec. 10.12.3.1). El término  $C_m$  no se incluye en la ecuación de momento amplificado para marcos no arriostrados.

### Rigidez de la columna, EI

Para calcular la carga crítica,  $P_c$ , usando la ecuación  $P_c = \pi^2 EI / (kl)^2$  involucra la rigidez a flexión EI, de la columna. El valor de EI se escoge para una sección dada de columna, a nivel de carga axial y la esbeltez puede ser aproximada para el EI de la columna al momento de la falla, tomando en cuenta el tipo de falla (del material o estabilidad) y el efecto de agrietamiento, flujo y distribución no lineal de la curva esfuerzo-deformación en el momento de la falla. En la Figura 9-13 se muestran los diagramas momento-curvatura para tres diferentes niveles de carga para una sección típica de columna. ( $P_b$  es la carga en la falla balanceada). La línea radial mostrada en el diagrama tiene pendiente  $M/\phi = EI$ . El valor de EI depende entonces de la línea radial seleccionada. En "falla de material", esta falla se presenta cuando la sección es altamente esforzada (punto B de la Figura 9-7).

Para este caso, la línea radial apropiada será la que intersecte el extremo del diagrama momento-curvatura como se muestra para  $P=P_b$  (carga balanceada) en la Figura 9-13.



**FIGURA 9-13**  
**DIAGRAMA DE MOMENTO DE CURVATURA PARA UNA**  
**SECCIÓN DE COLUMNA.**

Por otro lado, una "falla de estabilidad" ocurre antes de que la sección transversal falle (punto C de la Figura 9-7). Esta corresponde a la línea con pendiente alta de la Figura 9-13 con un valor alto de EI. Una multitud de líneas radiales pueden dibujarse en la Figura 9-13 pero no todas corresponden al valor de EI de la columna. Los Códigos Australiano y Suizo basan sus valores de EI en la gráfica momento-curvatura en la falla balanceada, dados por la línea interrumpida de la Figura 9-13.

Las expresiones adoptadas por el Comité del Código ACI en 1971 fueron:

$$EI = (0.2 E_c I_g + E_s I_{sc}) / (1 + \beta_d) \quad (\text{ACI Ec. 10-12})$$

o

$$EI = (0.4 E_c I_g) / (1 + \beta_d) \quad (\text{ACI Ec. 10-13})$$



donde:

$E_c$ ,  $E_s$  = Módulos de elasticidad del concreto (ACI Sec. 8.5.1) y  
acero, respectivamente.

$I_g$  = Momento de inercia de la sección de concreto con respecto al eje  
centroidal ignorando el acero.

$I_{se}$  = Momento de inercia del acero con respecto al eje centroidal.

El término  $(1+\beta_d)$  refleja el efecto del flujo plástico del concreto en las  
deflexiones de la columna.

La ecuación (10-12) del ACI es más aproximada que la ecuación (10-13)  
pero es más laboriosa porque se supone el acero para calcular  $I_{se}$ .

La Sección 10.11.1 del ACI da varios valores de momento de inercia,  $I$ ,  
para usarse:

- (a) En análisis de marco elástico para calcular los momentos en vigas y  
columnas, y deflexiones laterales en marcos, y
- (b) Para calcular el valor de  $\psi$  que se usa al calcular el factor de longitud  
efectiva,  $k$ .

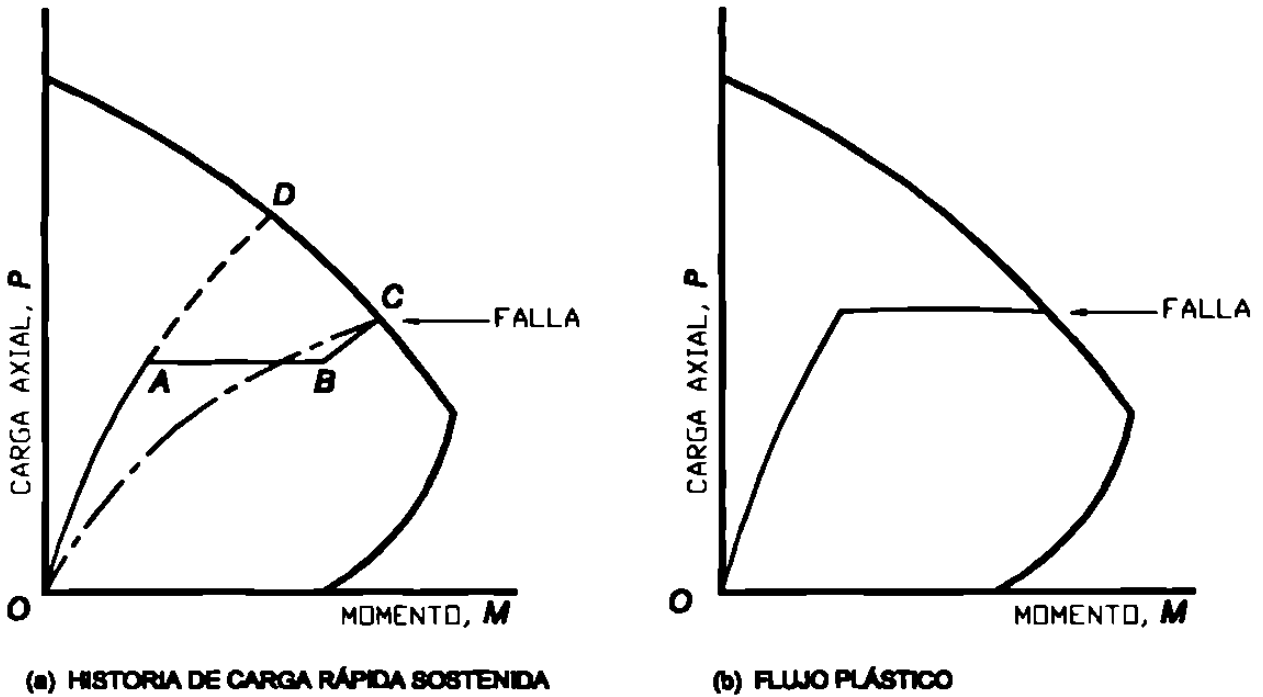
La deflexión lateral de un marco es afectada por las rigideces de todas  
las vigas y columnas del marco. Por esta razón, los momentos de inercia de la  
Sec. 10.11.1 del ACI se recomiendan para representar un promedio de los  
valores de  $I$  en cada tipo del miembro del marco. De forma similar, la longitud  
efectiva de una columna de marco se ve afectada por las rigideces a flexión de  
vigas y columnas. Es incorrecto usar los valores de  $I$  de la Sección 10.11.1  
del ACI para calcular la carga crítica de Euler en una columna.

### **Efecto de las cargas sostenidas en columnas articuladas**

Lo tratado anteriormente considera fallas en las columnas bajo cargas  
de corta duración.

Las columnas de las estructuras, por otro lado, están sujetas a cargas  
muertas sostenidas y algunas veces a cargas vivas sostenidas.

El flujo plástico del concreto bajo cargas sostenidas incrementa las deflexiones de las columnas, incrementando el momento  $M = P(e + \Delta)$ , y entonces debilita la columna. La gráfica carga - momento de la Figura 9-2 puede ser redibujada, como se muestra en la Figura 9-14, para columnas sujetas a cargas sostenidas.



**FIGURA 9-14**  
**COMPORTAMIENTO CARGA-MOMENTO PARA COLUMNAS SUJETAS**  
**A CARGAS SOSTENIDAS.**

En la figura 9-14a, la columna es cargada rápidamente con la carga de servicio (línea 0-A).

La carga de servicio actúa por un número de años y durante este tiempo las deflexiones por flujo plástico y los efectos resultantes de segundo orden incrementan el momento, como se muestra por la línea A-B.

Finalmente, la columna es rápidamente cargada hasta la falla, como lo muestra la línea B-C. La carga de falla corresponde al punto C. La columna ha sido cargada rápidamente sin el período de carga de servicio sostenida, la gráfica carga - momento sería semejante a la línea O-A-D con la falla correspondiente en el punto D. El efecto de las cargas sostenidas ha incrementado las deflexiones a la mitad de la altura de la columna y los momentos, causando una reducción en la carga de falla de D a C. Al volverse a cargar (recargado), las deflexiones de la columna son gobernadas por el EI correspondiente, debidas a las cargas aplicadas rápidamente.

El segundo tipo de comportamiento de la columna bajo cargas sostenidas se refiere al pandeo por flujo plástico. Aquí, como se muestra en la Figura 9-14b, las deflexiones en la columna continúan incrementándose bajo la carga sostenida, causando por esto, la falla. Esto ocurre solamente bajo cargas sostenidas altas que fluctúan alrededor de un 70% de la capacidad a corto plazo representada por el punto D.

Si la carga sostenida se excediera el factor de reducción de resistencia,  $\phi$ , se divide entre el factor de carga muerta,  $0.70/1.4 = 0.5$  veces la capacidad de la columna, este tipo de falla no es especialmente considerado en los procedimientos de diseño del Código ACI.

Dos procedimientos de diseño diferentes son ampliamente usados para considerar los efectos de flujo plástico. En el procedimiento de "Módulo Reducido", el valor de E para calcular  $P_c$ , se reduce para considerar la correcta carga de falla.

Este procedimiento lo ilustra la línea interrumpida O-C, de la Figura 9-14a.

El segundo procedimiento, reemplaza la excentricidad de la columna cargada  $e$ , por una carga con una excentricidad  $e + \Delta_{o,cr}$  donde  $\Delta_{o,cr}$  es la deflexión por flujo plástico de la columna, en la Fig. 9-14a, no se cargaría después del punto B.

El procedimiento de momento amplificado del Código ACI usa el "Módulo Reducido". El valor de EI se reduce dividiéndolo entre  $(1 + \beta_d)$ , como se muestra en las ecuaciones (10-12) y (10-13) del ACI, donde para columnas articuladas y columnas de marcos restringidos,  $\beta_d$  se define como la relación de la carga axial factorizada debida a la carga muerta, y la carga total axial factorizada.

La Sección 10.0 del ACI, da tres definiciones para  $\beta_d$ , dependiendo principalmente si el marco tiene o no desplazamiento. Para condiciones estables, una columna articulada puede considerarse que sus extremos no se desplazan, y en este caso  $\beta_d$ , definido por la Sección 10.0 del ACI es la relación entre la carga máxima axial factorizada muerta y la carga total axial factorizada.

### **Límites de relación de esbeltez para columnas esbeltas.**

Algunas columnas de estructuras son tan cortas que no les afecta su esbeltez. El ACI en la Sec. 10.12.2 permite ignorar los efectos de esbeltez en columnas articuladas o columnas de marcos arriostrados cuando:

$$kl_u/r < 34-12(M_1/M_2)$$

Donde, k es el factor de longitud efectiva, el cual es 1.0 para columnas articuladas (ACI Sec. 10.12.1),  $l_u$  es la longitud de la columna no-apoyada, (ACI Sec. 10.11.3.1) y r es el radio de giro, se toma 0.3h para secciones rectangulares y 0.25h para secciones circulares (ACI Sec. 10.11.2). Para otras formas el valor de r se calcula con la raíz cuadrada del momento de inercia entre el área,  $r = \sqrt{I/A}$ .

### **Secciones 10.10 Y 10.13 del Código ACI.**

En el Código ACI 1995, las secciones especificadas para el diseño de columnas esbeltas son completamente detalladas. El ACI en la Sec. 10.10 lo cubre totalmente. Especifica utilizar un análisis de segundo orden tomando en cuenta las características no-lineales y el agrietamiento de los materiales, así como los efectos de curvatura del elemento y el desplazamiento de entrepiso, duración de cargas, contracción, fluencia e interacción con la cimentación (10.10.1) y permite usar un análisis más aproximado de momento amplificado descrito en ACI Secciones 10.11, 10.12 y 10.13.

El ACI en la Sec. 10.11 "**Momentos amplificados - Generalidades**" da los lineamientos generales para el diseño de columnas esbeltas de marcos con y sin desplazamiento. Si una columna pertenece a un marco que no tiene desplazamiento, su diseño debe basarse en las Secciones 10.11 y 10.12, "**Momentos amplificados- Marcos contraventeados**". Si la columna es de un marco con desplazamiento, su diseño involucra las Secs. 10.11 y 10.13 "**Momentos amplificados - Marcos no contraventeados**" (Con desplazamiento).

En algunos casos poco comunes que involucran el diseño de columnas esbeltas de marcos no-contraventeados, el ACI Sec. 10.13.5 requiere calcular un momento amplificado adicional usando la Sec. 10.12.3 del ACI.

### **Diseño por amplificación de momento. Procedimiento para columnas esbeltas articuladas.**

Una columna articulada puede ser arriostrada por un marco u otra estructura para que permanezca estable. Siendo así será diseñada usando el ACI Sec. 10.11 "Momentos amplificados - Generalidades" y el ACI Sec. 10.12 "Momentos amplificados - Marcos contraventeados".

**1.- Longitud de columna.** La longitud de columna no apoyada  $\lambda_u$  es la distancia libre entre miembros capaces de dar apoyo lateral (ACI Sección 10.11.3.1) es la distancia entre articulaciones.

**2.- Longitud efectiva.** Para una columna articulada el factor de longitud efectiva  $k = 1.0$  (ACI Sec. 10.11.2)

**3.- Radio de giro.** Para una sección rectangular  $r = 0.3h$ , y para una sección circular  $r = 0.25h$  (ver ACI Sec. 10.11.2) para otras secciones  $r$  puede ser calculado con la raíz cuadrada del momento de inercia entre el área  $r = \sqrt{I_g/A_g}$ .

**4.- Consideración del efecto de esbeltez.** Para una columna articulada, ACI Sec. 10.12.2 permite ignorar la esbeltez si  $kl_u/r$  satisface la ecuación:

$$kl_u/r < 34-12(M_1/M_2)$$

El ACI Sec. 10.11.5 da como límite superior del  $kl_u/r = 100$  para columnas diseñadas de acuerdo con la Sec. 10.11 a 10.13.

**5.- Momento mínimo:** El ACI Sec. 10.12.3.2 requiere que el momento máximo en el extremo de la columna,  $M_2$  no será menor que:

$$M_{2,min} = P_u (0.6 + 0.03h) \quad (\text{sistema métrico}) \quad (\text{ACI Ec. 10-15})$$

Donde 0.6 y  $h$  son pulgadas. Para elementos en los cuales  $M_{2,min}$  excede  $M_2$  el valor de  $C_m$ ; de la ecuación  $C_m = 0.6+0.4 M_1/M_2$  deberá tomarse igual a 1.0 o evaluarse de acuerdo con los momentos extremos.

**6.- Ecuación de momento amplificado:** El ACI Sec. 10.12.3 establece que la columna será diseñada para una carga axial factorizada,  $P_u$  y un momento amplificado  $M_c$ , definido por:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad (\text{ACI Ec. 10-9})$$

Donde el subíndice *ns* se refiere a no desplazamiento (contraventado)  $M_2$  se define como el mayor de los que actúan en el extremo de la columna. El ACI Sec. 10.12.3 define  $\delta_{ns}$  como:

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75 P_c} \geq 1.0 \quad (\text{ACI Ec. 10-10})$$

donde:  $C_m = 0.6 + 0.4 M_1/M_2 \geq 0.4 \quad (\text{ACI Ec. 10-14})$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad (\text{ACI Ec. 10.11})$$

y  $EI = (0.2 E_c I_g + E_s I_{sc})/1 + \beta_d \quad (\text{ACI Ec. 10-12})$

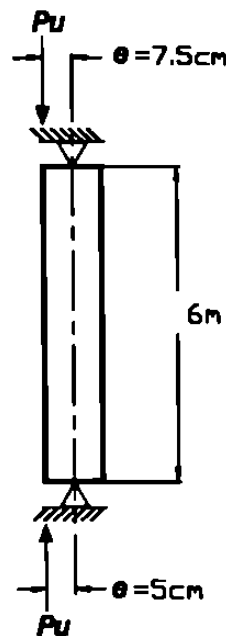
ó  $EI = (0.4 E_c I_g)/1 + \beta_d \quad (\text{ACI Ec. 10-13})$

El valor de 0.75 ha sido usado en la ecuación ACI 10-10 en lugar del símbolo  $\phi$ , para evitar confusión con el factor  $\phi$  usado para diseñar la sección transversal de la columna, el cuál es 0.70 para columnas con estribos y 0.75 para columnas con espiral.

Si se calcula  $\delta_{ns}$  y es menor que 1.0 el momento máximo ocurre, en el extremo de la columna. En éste caso  $\delta_{ns}$  se toma igual a 1.0

### Ejemplo 9-1.-Diseño de una columna esbelta articulada.

Diseñar una columna de 6.00m para soportar una carga muerta no factorizada de 40 ton y una carga viva no factorizada de 34 ton, las cargas tienen una excentricidad de 7.5 cm en la cara superior y 5 cm en la cara inferior. Usar  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$



1.- Calcular  $P_u$  y  $M_1/M_2$ :

$$P_u = 1.4 \times 40 + 1.7 \times 34 = 113.8 \text{ ton}$$

$$M_{\text{sup}} = 113.8 \times 0.075 = 8.535 \text{ ton-m}$$

$$M_{\text{inf}} = 113.8 \times 0.05 = 5.690 \text{ ton-m}$$

$$M_1 / M_2 = 5.690 / 8.535 = 0.667$$

## 2.- Estimar tamaño de columna.

Considerando  $\rho_t = 0.015$

$$A_{g \text{ (aprox)}} \geq \frac{P_u}{0.45 (f'_c + f_y \rho_t)}$$

$$A_{g \text{ (aprox)}} \geq \frac{113.800}{0.45(210+0.015 \times 4200)} \geq 926 \text{ cm}^2$$

Esto sugiere que una columna de 30cmx30cm puede ser satisfactoria

## 3.- ¿Es la columna esbelta?

$$kl_u/r < 34 - 12 M_1/M_2$$

$$kl_u/r = 1.0 (600)/0.3 \times 30 = 67$$

$$34 - 12 (0.667) = 26$$

Como  $kl_u/r = 67$  es mayor que 26 la columna es bastante esbelta por lo que la sección de 30x30 cm puede ser inadecuada debido a que  $A_{g \text{ (aprox)}}$  se basa en columnas cortas se sugiere una de 40x40cm como primer tanteo.

## 4.- Revisar momento mínimo.

Esto equivale a revisar

$$\begin{aligned} e_{\min} &= 0.6 + 0.03h \\ &= 0.6 + 0.03 \times 40 \\ &= 1.8 \text{ cm} < e \end{aligned}$$

según ACI Sec. 10.12.3.2.

$$\text{rige } M_2 = 8.535 \text{ ton-m}$$

## 5.- Calcular EI.

En este paso el área de refuerzo no se conoce y no se puede usar la ecuación 10-12 del ACI pero si se puede usar la ecuación 10-13.

$$EI = 0.40 E_c I_g / (1 + \beta_d)$$



$$\text{De ACI Sec. 8.5.1, } E_c = 15,100 \sqrt{f'_c}$$

$$= 15,100 \sqrt{210} = 218,820 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{1}{12} (40)^4 = 213,333 \text{ cm}^4$$

$$\beta_d = \frac{1.4 \times 40}{113.8} = 0.492$$

$$EI = \frac{0.40 \times 218,820 \times 213,333}{1.492} = 1.2515 \times 10^{10} \text{ Kg} \cdot \text{cm}^2$$

6.- Momento amplificado:

$$M_c = \delta_{ns} M_2$$

$$\delta_{ns} = (C_m) / (1 - P_u / 0.75 P_c)$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 M_1 / M_2 = 0.6 + 0.4 (0.667) = 0.867$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 1.2515 \times 10^{10}}{(1 \times 600)^2} = \frac{\pi^2 \times 1.2515 \times [(10)^2]^{15}}{(1 \times 6)^2 (100)^2}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 1.2515 \times (100)^3}{36} = 343,107 \text{ kg}$$

$$= 343 \text{ ton}$$

$$\delta_{ns} = \frac{0.867}{1 - 113.8(0.75 \times 343.1)} = 1.554 > 1.0$$

Si  $\delta_{ns}$  excede de 2.0 será necesario una sección transversal mayor.

$$M_c = 1.554 \times 8.535 = 13.267 \text{ ton-m.}$$

## 7.- Refuerzo de la columna

Como se tienen diagramas de interacción en sistema inglés;

$$P_u = 113.8 \text{ ton} = 113.8 \times 2.2$$

$$= 250.36 \text{ Klbs.}$$

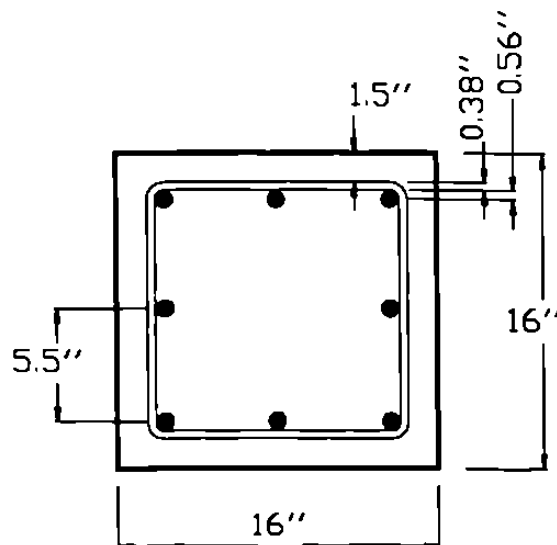
$$M_c = 13.267 \times 7.233 = 95.96 \text{ Klbs-pie}$$

$$(P_n)_{\text{req}} = \frac{P_u}{\phi} = \frac{250.36}{0.7} = 357.66 \text{ klbs}$$

$$(M_n)_{\text{req}} = \frac{M_u}{\phi} = \frac{95.96}{0.70} = 137.08 \text{ klbs-pie}$$

Para entrar a los diagramas de interacción requerimos:

$$\gamma = \frac{11}{16} = 0.6875 = 0.69$$



Considerando 8 Varillas #8

$$P = \frac{8 \times 1.0}{(16)^2} = 0.031$$

$$\frac{\phi P_n}{A_g} = \frac{250.36}{(16)^2} = 0.978$$

$$\text{Para } \gamma = .60 \quad \frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.58$$

$$\text{Para } \gamma = 0.75 \quad \frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.67$$

Interpolando: Para  $\gamma = 0.69$

$$\phi M_n / A_g \cdot h = 0.63$$

$$M_n = \frac{0.63 \times 256 \times 16}{0.70 \times 12} = 307.2 \text{ Klbs-pie}$$

$$= 307.2 \times 0.138 = 42.39 \text{ ton-m.}$$

$$42.39 > 13.267 \text{ ton-m.}$$

La sección está sobrada, considerando ahora 4 Varillas #8.

$$\rho = \frac{4 \times 1}{(16)^2} = 0.0156$$

$$\text{Para } \gamma = 0.60 \quad \frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.45$$

$$\text{Para } \gamma = 0.75 \quad \frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.48$$

Interpolando: Para  $\gamma = 0.69$ ,  $\phi M_n / A_g \cdot h = 0.47$

$$M_n = \frac{0.47 \times 256 \times 16}{0.70 \times 12} = 229.2 \text{ kLbs-pie x factor de conversión}$$

$$= 229.2 \times 0.138 = 31.62 \text{ ton-m.} > 13.26 \text{ ton-m.}$$

Usar una sección de 40x40 cm con 4 Varillas #8.

### 9-3.- DISEÑO DE COLUMNAS DE MARCOS ARRIOSTRADOS (SIN DESPLAZAMIENTO).

Diseño aproximado por efecto de restricción en los extremos.

En la figura 9-15 se muestra una columna arriostrada en un marco.

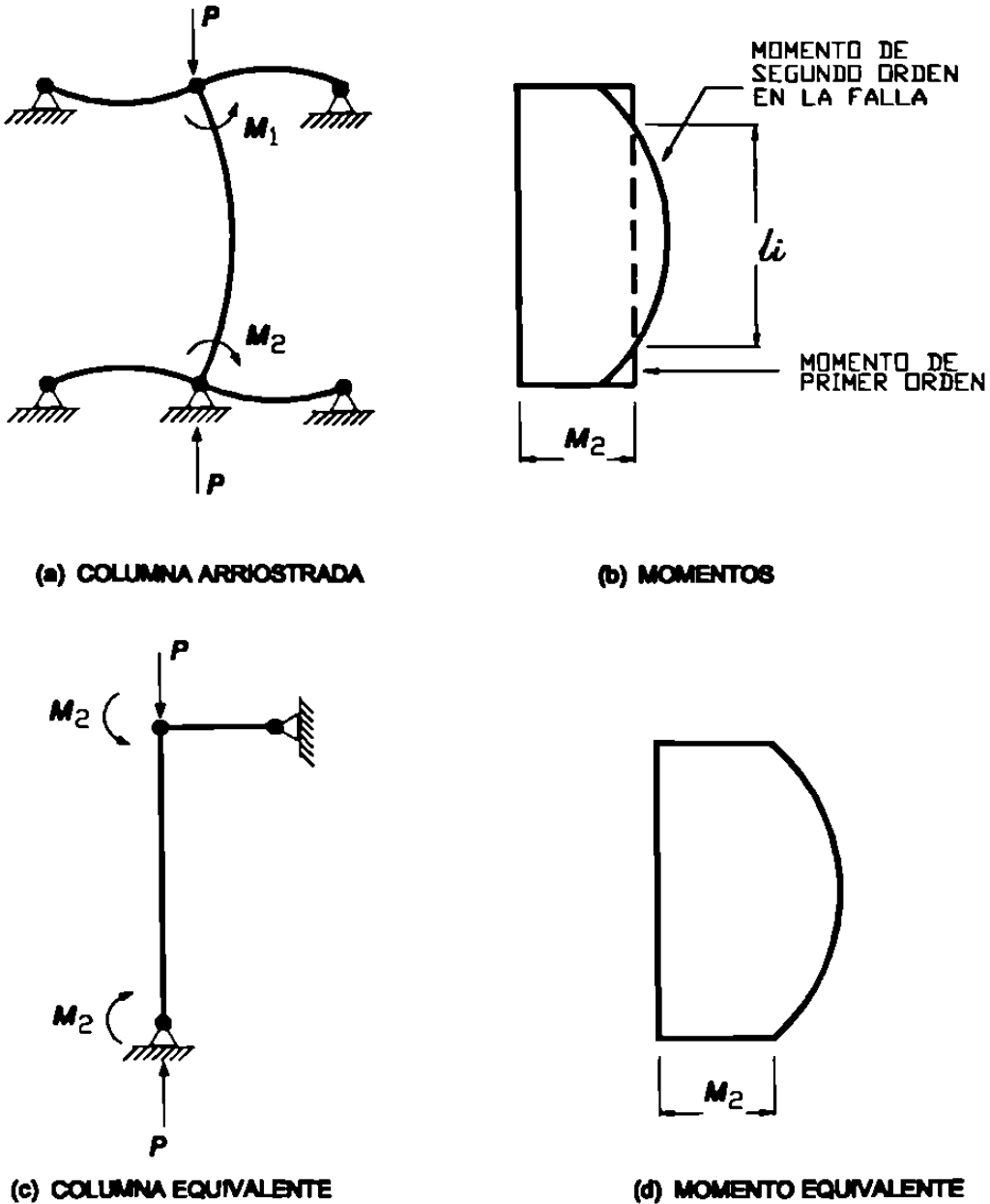


FIGURA 9-15  
SUSTITUCION DE UNA COLUMNA ARRIOSTRADA  
POR UNA ARTICULADA

La línea continua de la Figura 9-15b es el diagrama de momentos (incluyendo efectos de esbeltez) para esta columna en la falla. Superponiendo a éste el diagrama de momentos de primer orden para el mismo nivel de carga. Para diseñar es conveniente reemplazar la columna restringida por una articulada equivalente de longitud  $l_1$ , que es la distancia entre los puntos en que el diagrama de momentos de segundo orden son iguales a los momentos del diagrama de primer orden. La columna articulada equivalente será entonces diseñada para una carga axial,  $P$ , y momentos en los extremos  $M_2$ , del análisis de primer orden.

Desafortunadamente, la longitud  $l_1$  es difícil de calcular. En los códigos modernos sobre concreto y acero se hacen consideraciones empíricas haciendo que  $l_1$  se tome como la longitud efectiva por pandeo elástico,  $kl$ . La longitud efectiva de una columna  $kl_u$  se define como la longitud de una columna articulada equivalente que tiene la misma carga de pandeo.

Como se puede apreciar en la Figura 9-16 cuando se tiene un empotramiento las longitudes efectivas son mayores que cuando se tienen ambos extremos empotrados.

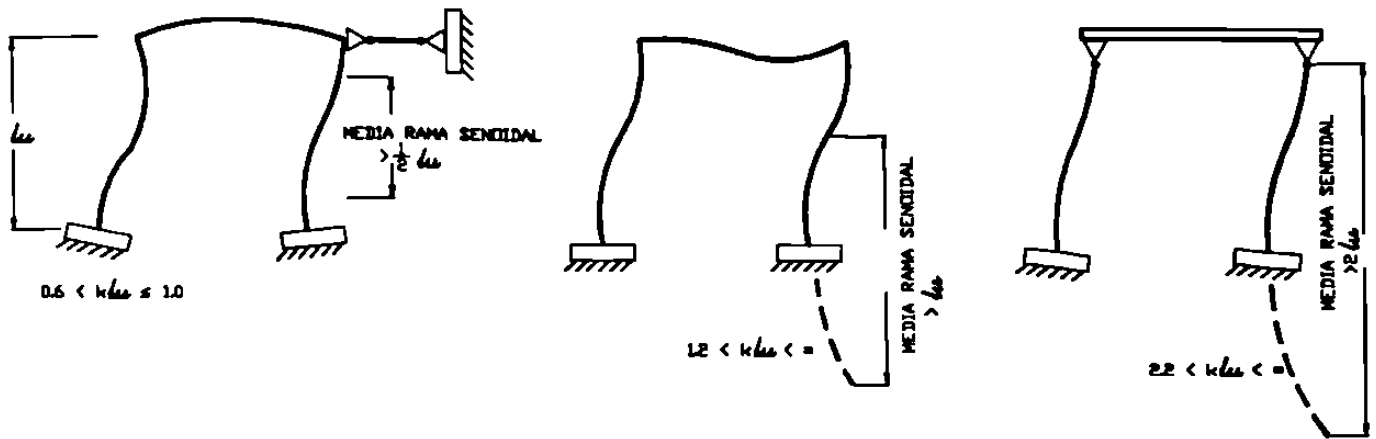
El valor actual de  $k$  para una columna elástica es una función de la rigidez relativa,  $\Psi$ , de las vigas y las columnas en cada extremo de la columna, donde  $\Psi$  es:

$$\Psi = \frac{\sum (E_c I_c / l_c)}{\sum (E_b I_b / l_b)}$$

Donde los subíndices  $b$  y  $c$  se refieren a vigas y columnas, respectivamente, y las longitudes  $l_b$  y  $l_c$  se miden centro a centro de las juntas. Si  $\Psi = 0$  en un extremo de una columna, la columna está completamente empotrada en ese extremo.

Similarmente,  $\Psi = \infty$  denota una articulación perfecta. Entonces, si  $\Psi = 0$  en los dos extremos de una columna en un marco arriostrado,  $k$  se toma como 0.5. Análogamente, cuando  $\Psi = \infty$  en los dos extremos de una columna,  $k$  se toma igual a 1.0, el valor para una columna articulada. Esto está ilustrado en la Tabla 9-1.

En estructuras prácticas o reales no existe el extremo completamente empotrado y ni el extremo completamente articulado. Valores razonables de  $\Psi$  varían de 20 y 0.2. Para columnas de marcos arriostrados,  $k$  nunca será tomado menor de 0.6. En marcos con desplazamiento  $k$  nunca será tomado menor de 1.2 en columnas con ambos extremos restringidos.

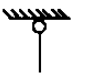











(a) MARCO ARRIOSTRADO

(b), (c) MARCOS CON DESPLAZAMIENTO

FIGURA 9-16  
LONGITUD EFECTIVA EN COLUMNAS DE MARCOS.

TABLA 9-1  
FACTORES DE LONGITUD EFECTIVA DE MARCOS ARRIOSTRADOS.

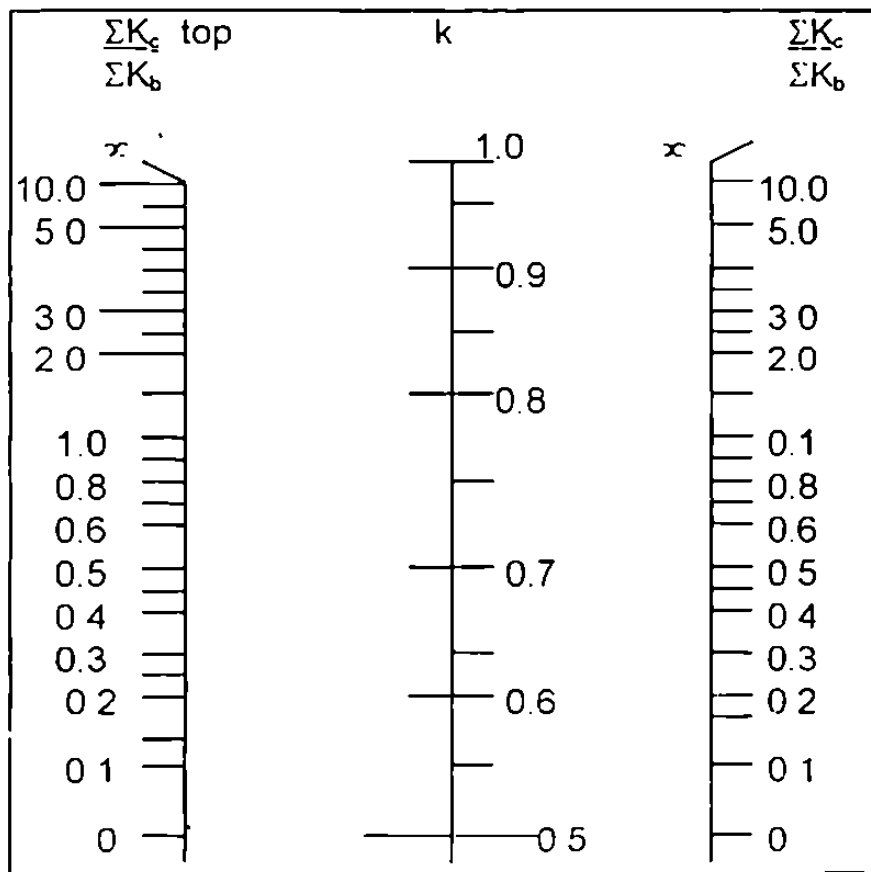
APOYO SUPERIOR	k				
ARTICULADO 	0.70	0.81	0.91	0.95	1.00
ELASTICO $\psi=3.1$ 	0.67	0.77	0.86	0.90	0.95
ELASTICO $\psi=1.6$ 	0.65	0.74	0.83	0.86	0.91
RIGIDO $\psi=0.4$ 	0.58	0.67	0.74	0.77	0.81
EMPOTRADO 	0.50	0.58	0.65	0.37	0.70
					
	EMPOTRADO	RIGIDO	ELASTICO	ELASTICO	ARTICULADO

**Cálculo de los valores de  $k_1$  usando nomogramas.**

Los nomogramas dados en la Figura 9-17 se usan también para calcular  $k$ . Para usar estos nomogramas  $\Psi$  se calcula en ambos extremos de la columna usando la ecuación.

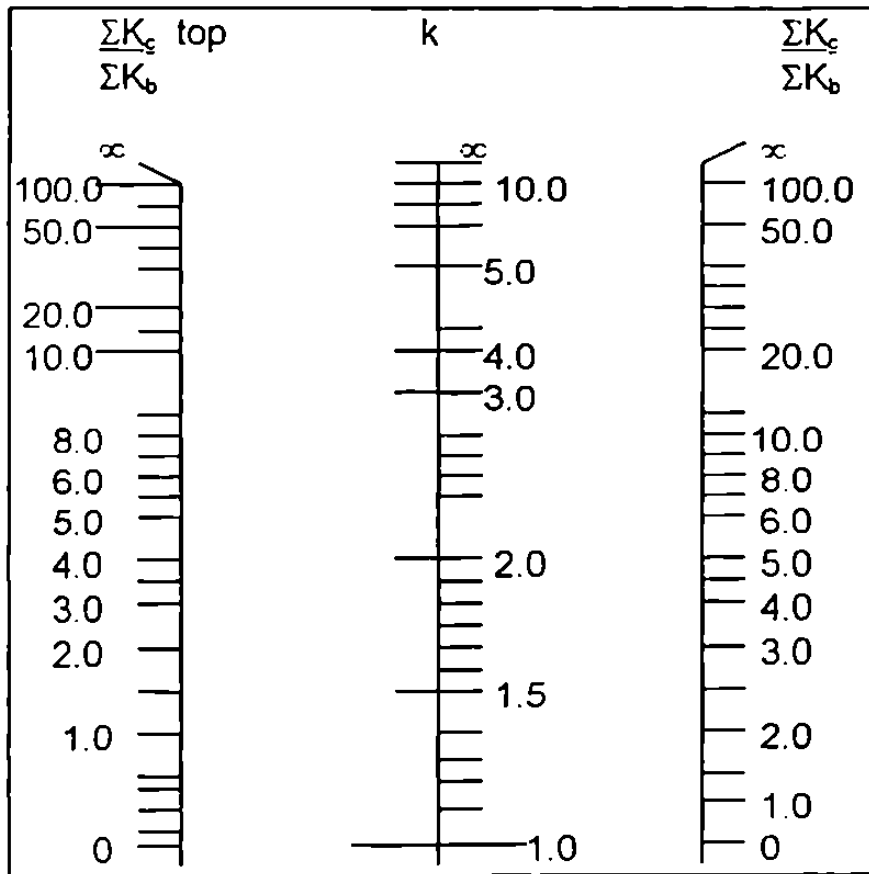
$$\Psi = \frac{\sum (E_c I_c / l_c)}{\sum (E_b I_b / l_b)}$$

y el valor, de  $k$  apropiado se encuentra en la intersección de la línea intermedia.



(a)

**MARCOS ARRIOSTRADOS**



(b)  
MARCOS NO ARRIOSTRADOS

Figura 9-17: Nomogramas para factores de longitud efectiva.



Los nomogramas se derivaron considerando una columna típica interior de un marco infinitamente alto y ancho, en el cual todas las columnas se consideraron de la misma sección transversal y longitud, así como en todas las vigas.

Se aplicaron iguales cargas en ambos extremos de cada columna, mientras que las vigas no se cargaron. Todas las columnas se considera que se pandearon para el mismo momento. Puesto que esto es muy idealizado y las consideraciones son poco reales, los nomogramas tienden a subestimar el valor de  $k$  para marcos elásticos con respecto a las dimensiones prácticas arriba del 15%. Esto entonces subestima los momentos amplificados  $M_c$ .

Un valor práctico mínimo para  $k$ , en un marco no arriostrado cuando se obtengan valores más pequeños que los dados por los nomogramas es buena práctica usar 1.2.

### Ecuaciones para $k$

Ecuaciones aproximadas para  $k$  están presentadas en la Sec. R 10.12.1 de los Comentarios del ACI.

Estas han sido derivadas considerando un factor aproximado y conservador de longitud efectiva.

Las siguientes ecuaciones se obtuvieron del Código British Standard of Practice, para columnas arriostradas como el menor de:

$$k = 0.7 + 0.05 (\psi_A + \psi_B) \leq 1.0$$

$$k = 0.85 + 0.05 \psi_{\min} \leq 1.0$$

donde:  $\psi_A$  y  $\psi_B$  son los valores de  $\psi$  en los dos extremos de la columna y  $\psi_{\min}$  es el menor de los dos valores.

Del ACI Stengh Design Handbook para miembros en compresión no - arriostrados con ambos extremos restringidos, la longitud efectiva puede ser tomada como:

Para  $\psi_m < 2$ :

$$k = \frac{20 - \psi_m}{20} \sqrt{1 + \psi_m}$$

Para  $\psi_m \geq 2$ :

$$k = 0.9 \sqrt{1 + \psi_m}$$

donde  $\psi_m$  es el promedio de los valores de  $\psi$  en ambos extremos de la columna.

Para miembros en compresión no arriostrados con un extremo libre o articulado,  $k$  puede tomarse como:

$$k = 2.0 + 0.3 \psi, \quad \text{donde } \psi \text{ es el valor para el extremo restringido.}$$

### Cálculo de $\psi$ .

La relación de rigideces  $\psi$ , calculada usando la ecuación:

$$\psi = \frac{\sum (E_c I_c / l_c)}{\sum (E_b I_b / l_b)}$$

Los valores de  $E_c I_c$  y  $E_b I_b$  serán reales para el cargado inmediatamente antes de la falla de la columna. Generalmente para éste estado de carga, las grietas de las vigas son progresivas y las columnas o no se agrietan o se agrietan ligeramente. Realmente, los valores de  $EI$  serán un reflejo del grado de agrietamiento y de la cantidad de refuerzo presente.

Esto no es práctico, sin embargo, mientras no se tenga información para esta etapa de diseño el ACI Secs. 10.12.1 y 10.13.1 establece que el cálculo de  $k$  estará basado en los valores de  $\psi$  con los valores de  $E$  y de  $I$  dados por la Sec. 10.11.1 del ACI. Cuando se calcule  $\psi$ ,  $\beta_d$  puede tomarse como cero.

Cuando se calcula  $I_b$  para una viga T, el ancho del patín puede tomarse como se define en las Secciones 8.10.2 u 8.10.3 del ACI. Para relaciones comunes de ancho de patín a peralte,  $h$ , y de ancho a ancho del alma  $b_w$ , el momento de Inercia,  $I_g$ , es aproximadamente dos veces el momento de Inercia de una sección rectangular con dimensiones  $b_w$  y  $h$ .

El valor de  $\psi$  en la parte inferior de una columna apoyada en una zapata puede calcularse por las relaciones presentadas en el PCI Desing Handbook.

$$\psi = \frac{\sum K_g}{\sum K_b}$$

donde  $\Sigma K_c$  y  $\Sigma K_b$  son las sumas de las rigideces a flexión de las columnas y de los miembros restringidos (vigas) en una junta. En una junta de columna-zapata,  $\Sigma K_c = 4E_c I_c / l_c$  para una columna arriostrada restringida en su apoyo superior y  $\Sigma K_b$  se reemplaza por la rigidez torsional de la zapata y suelo, tomada igual a:

$$K_r = \frac{M}{\theta_r}$$

Donde  $M$  es el momento aplicado a la zapata y  $\theta_r$  es la rotación de la zapata. El esfuerzo bajo la zapata es la suma de  $\sigma = P/A$  el cual causa un asentamiento hacia abajo uniforme y  $\sigma = My/I$  el cual causa una rotación. La rotación  $\theta_r$  es:

$$\theta_r = \frac{\Delta}{y}$$

Donde " $y$ " es la distancia al centroide del área de la zapata. Si  $K_s$  es el módulo subgrado, definido como el esfuerzo requerido de compresión del suelo por una cantidad unitaria ( $K_s = \sigma/\Delta$ ), entonces:

$$\theta_r = \frac{\sigma}{k_s y} = \frac{My}{I_r} \times \frac{1}{k_s y}$$

entonces:  $k_r = I_r \times k_s$

Donde  $I_r$  es el momento de inercia del área en contacto de la base de la zapata y el suelo y  $k_s$  es el módulo subgrado. Entonces el valor de  $\psi$  para una junta columna-zapata donde la columna este restringida en el extremo superior es:

$$\psi = \frac{4E_c I_c / l_c}{I_r k_s}$$

Un valor de  $\psi = 10$  es usado frecuentemente para extremos articulados, en vez de  $\psi = \infty$ .

## **Definición de marcos arriostrados y no-arriostrados.**

En las discusiones anteriores el comportamiento de una columna y los factores de longitud efectiva están basados en la consideración de que los marcos son "completamente arriostrados" o "completamente no arriostrados".

Una columna puede considerarse "arriostrada" en una dirección dada si la estabilidad lateral de la estructura se garantiza por muros, riostras o contrafuertes diseñados para resistir todas las fuerzas laterales en esa dirección.

Una columna es completamente "no arriostrada" en un plano dado si toda la resistencia a cargas laterales depende de la flexión de las columnas.

De hecho no existe un marco "completamente arriostrado", y no existen límites claros entre marcos arriostrados y no arriostrados. Algunos marcos claramente no están arriostrados, como los de la figura 9-16 (b) y (c).

Otros marcos están conectados a muros de cortante en la zona de elevadores y restringen los movimientos laterales como el marco mostrado también en la figura 9-16(a).

Aunque un muro de cortante sea completamente rígido, no siempre evita los desplazamientos laterales de un marco arriostrado, resultando algunos momentos  $P\Delta$ , debidos a estas deflexiones laterales.

Para propósitos de diseño, un marco es considerado "arriostrado" si los desplazamientos horizontales no reducen significativamente la capacidad a carga vertical de la estructura.

El procedimiento de diseño del Código ACI considera la esbeltez aplicando el momento, por lo que éste criterio considera que: Un marco puede ser considerado "arriostrado" si los momentos  $P\Delta$  debidos a deflexiones laterales son pequeños comparados con los momentos de primer orden debidos a las cargas laterales.

El ACI en la Sec. 10.11.4.1 permite a los diseñadores considerar que un marco no tiene desplazamiento si el incremento en los momentos extremos debidos a efectos de segundo orden no exceden el 5% de los momentos de primer orden. Esto se revisa en el extremo de la columna donde el momento es mayor.

Alternativamente el ACI Sec. 10.11.4.2 permite a los diseñadores que un marco no se desplace (contraventeado) si:

$$Q = (\Sigma P_u \Delta_0) / V_u l_c \quad (\text{ACI Ec.10.7})$$

es menor o igual que 0.05, donde Q es un “índice de estabilidad”,  $\Sigma P_u$  es la carga total vertical en todas las columnas y muros, en un entrepiso  $V_u$  es el cortante debido a las cargas laterales,  $\Delta_0$  es la deflexión relativa de primer orden entre la parte alta y baja del entrepiso debida a  $V_u$ , y  $l_c$  es la altura de la columna medida centro a centro de juntas del marco.

El ACI en los comentarios Sec. R 10.11.4 sugiere que, frecuentemente, una prueba de que un entrepiso tiene o no desplazamiento, puede darse por una inspección comparando la rigidez lateral total de todas las columnas en el entrepiso y la de los elementos arriostrantes en ese entrepiso, como son muros de cortante o diagonales (armaduras).

En los comentarios de los Códigos ACI 1971 a 1989 sugieren que un entrepiso no tiene desplazamiento (arriostrado) si la suma de las rigideces laterales,  $\Sigma k_l$ , de los elementos de arriostramiento, excede seis veces  $\Sigma k_l$  de las columnas en la dirección considerada .

La rigidez lateral de una columna o elemento arriostrado es  $k_l = V/\Delta$ , donde V es el cortante en el miembro y  $\Delta$  es el desplazamiento lateral relativo en los extremos de la columna debido al cortante.

## Procedimiento de diseño por momento amplificado. Columnas esbeltas en marcos arriostrados

Si una columna esta en un marco sin desplazamiento, el diseño involucra la Sec. 10.11 del ACI "Momento Amplificado - Generalidades" y la 10.12 "Momento Amplificado - Marcos Contraventados".

### 1.- Longitud de columna.

La longitud no apoyada,  $l_u$ , esta definida en la Sec. 10.11.3.1 del ACI como la altura libre entre losas o vigas capaz de dar apoyo lateral a la columna.

### 2.- Longitud efectiva.

El ACI Sec. 10.12.1 establece que los factores de longitud efectiva,  $k$ , de columnas en marcos sin desplazamiento serán 1.0 o menores. Los factores de longitud efectiva pueden estimarse de acuerdo con los conceptos antes descritos. Los dos procedimientos anteriores requieren que la relación  $\psi$ , de  $EI/l$  de las columnas y vigas se conozcan. Este factor esta dado por el ACI Sec. 10.12.1 y especifica que  $\psi$  estará basado en los valores de  $E$  e  $I$  del ACI Sec.10.11.1.

### 3.- Determinar si el marco esta arriostrado:

Frecuentemente, esto se da por simple inspección observando los elementos que arriostran, tales como muros, los cuales son considerablemente más rígidos que las columnas. Alternativamente, el marco se considera que no tiene desplazamiento si:

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_p}{V_{ulc}} \text{ es menor o igual que } 0.05.$$

### 4.- Radio de giro:

Para una sección rectangular,  $r = 0.3h$ , y para una sección circular,  $r = 0.25h$ . Para otras secciones,  $r$  puede ser calculado con el área y el momento de inercia con:

$$r = \sqrt{I_g/A} \quad (\text{ACI Sec. 10.11.2})$$

### 5.- Consideración de los efectos de esbeltez:

Para columnas en marcos arriostrados, el ACI Sec. 10.12.2 permite despreciar el efecto de esbeltez si :

$$\frac{k l_u}{r} < 34 - 12 \frac{M_1}{M_2}$$

Para columnas en marcos no arriostrados, el ACI Sec.10.12.2 permite despreciar el efecto de esbeltez si  $kl_u/r$  es menor de 22.

Si  $kl_u/r$  excede 100, el diseño se basara en un análisis de segundo orden.

**6.- Ecuación de momento amplificado:**

El ACI Sec. 10.12.3 establece que las columnas de marcos sin desplazamiento deberán diseñarse para una carga axial,  $P_u$ , y un momento factorizado amplificado,  $M_c$ , dado por:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad (\text{ACI Ec. 10-9})$$

donde  $M_2$  es el mayor de los momentos extremos, y  $\delta_{ns}$  esta dada por:

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75 P_c} \geq 1.0 \quad (\text{ACI Ec. 10-10})$$

$$C_m = 0.6 + 0.4(M_1/M_2) \geq 0.4 \quad (\text{ACI Ec. 10-14})$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad (\text{ACI Ec. 10-11})$$

$$EI = \frac{0.2 E_c I_g + E_s I_{gs}}{1 + \beta_d} \quad (\text{ACI Ec. 10-12})$$

$$\text{ó} \quad EI = \frac{0.40 E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad (\text{ACI Ec. 10-13})$$

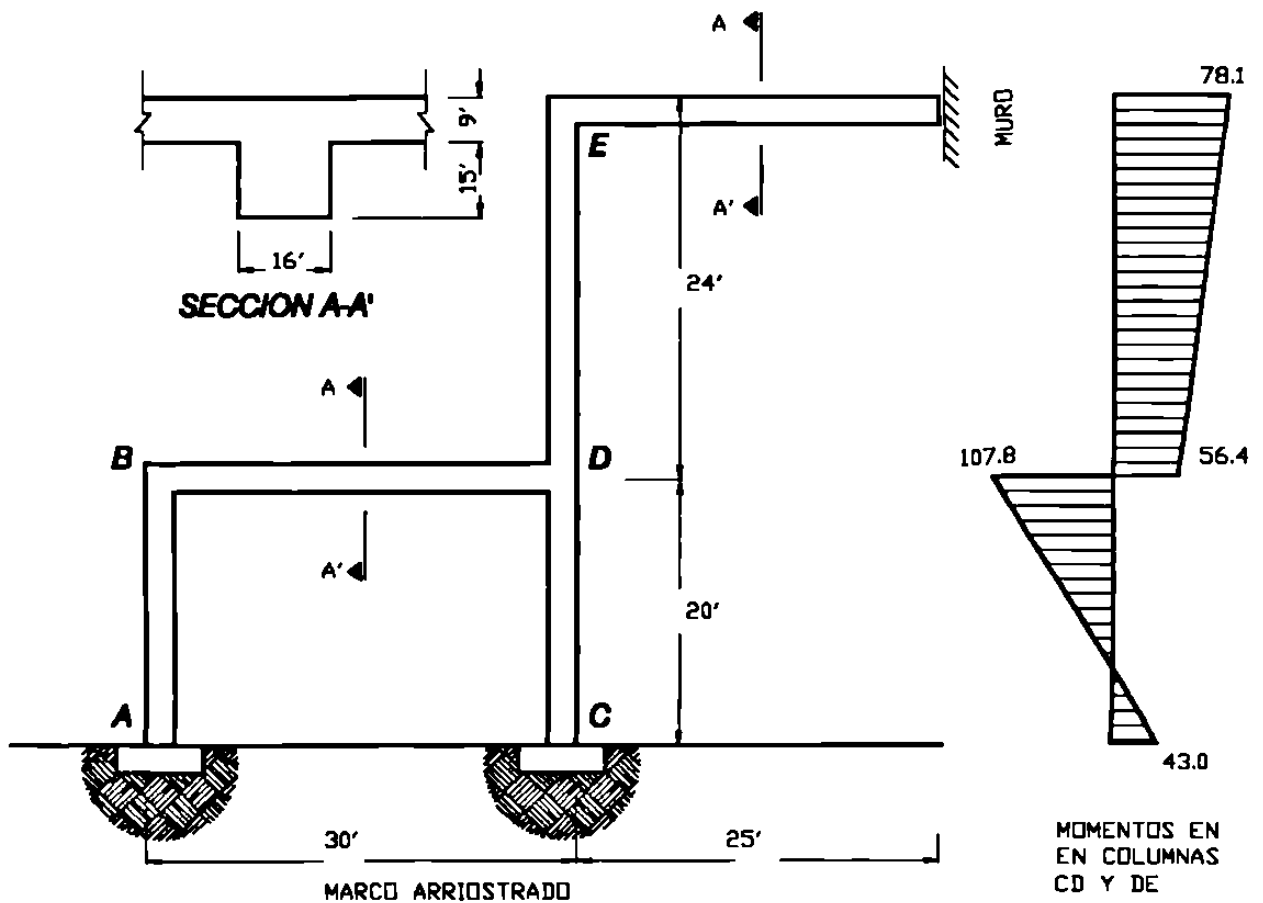
El término  $\beta_d$  tiene tres definiciones, solamente una de ellas se aplica a columnas de marcos sin desplazamiento. Para estas columnas:

$$\beta_d = \frac{\text{Carga muerta máxima axial factorizada}}{\text{Carga total axial factorizada en la columna}}$$

Si  $P_u$  excede  $0.75P_c$ ,  $\delta_{ns}$  será negativa. La rigidez será más baja de lo requerido y la columna será inestable. Entonces, si  $P_u$  excede  $0.75P_c$  la sección transversal de la columna debe aumentarse, si  $\delta_{ns}$  excede 2.0 también debe aumentarse la sección.

### Ejemplo 9-2.- Diseño de columnas de un marco arriostrado.

A continuación se muestra un marco típico de un edificio industrial.



**EJEMPLO 9-2  
DISEÑO DE COLUMNAS DE UN MARCO ARRIOSTRADO.**



1.- Cargas en la columna del marco analizado

	Columna CD	Columna DE
Cargas de Servicio, P	Muerta = 80 Klbs Viva = 24 Klbs	Muerta = 50 Klbs Viva = 14 Klbs
Momentos de Servicio en cara superior	Muerta = -60 Klbs -pie Viva = -14 Klbs -pie	Muerta = 42.4 Klbs -pie Viva = 11.0 Klbs -pie
Momentos de Servicio en cara inferior	Muerta = - 21 Klbs -pie Viva = - 8 Klbs -pie	Muerta = -32 Klbs -pie Viva = -8 Klbs -pie

\*Momentos a favor de manecillas son positivos.

Todas las fuerzas de viento se considera que son resistidas por los muros extremos del edificio.

2.- Cargas factorizadas.

(a) Columna CD:

$$P_u = 1.4 \times 80 + 1.7 \times 24 = 152.8 \text{ Klbs}$$

$$M_{sup} = 1.4 (-60) + 1.7 (-14) = -107.8 \text{ Kips-pie}$$

$$M_{inf} = 1.4 (-21) + 1.7 (-8) = -43.0 \text{ Klbs-pie}$$

(b) Columna DE:

$$P_u = 93.8 \text{ Klbs.}$$

$$M_{sup} = +78.1 \text{ Klbs-pie.}$$

$$M_{inf} = -58.4 \text{ Klbs-pie.}$$

Por definición (ACI Sec. 10.0)  $M_2$  es siempre positivo y  $M_1$  es positivo si la columna se flexiona en curvatura simple. Como la columna CD se flexiona en curvatura doble,  $M_{1b}$  es negativo. Entonces, para diseño de columna esbelta  $M_2 = +107.8 \text{ Klb-pie}$  y  $M_1 = -43.0 \text{ Klbs-pie}$ .

Entonces para columna DE:  $M_2 = +78.1 \text{ Klbs-pie}$  y  $M_1 = +58.4 \text{ Klbs-pie}$

$M_1$  es positivo mientras la columna este en curvatura simple.

### 3.- Proponer sección.

Poniendo  $\rho_t = 0.015$

$$A_g \text{ (tanteo)} \geq \frac{P_u}{0.45 (f'_c + f_y \rho_t)} = \frac{152.8}{0.45 (3 + 0.015 \times 60)}$$
$$= 87.1 \text{ pulg}^2$$

ó = 9.3 pulg., por lado

Debido a la esbeltez y porque los momentos son grandes se revisará una columna de 14x14 pulg.

### 4.- Revisión de esbeltez.

En ACI Sec. 10.12.2 una columna de un marco arriostrado es corta si:  $kl_u/r < 34 - 12 M_1/M_2$

(a) Columna CD:

$$l_u = 20 - 2 = 18 \text{ pies} = 216 \text{ pulg.}$$
$$r = 0.3 \times 14 = 4.2 \text{ pulg.}$$

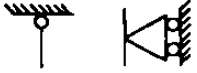









De la tabla de factores de longitud efectiva para marcos arriostrados, (siguiente página)  $k = 0.77$ , entonces:

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{0.77 \times 216}{4.2} = 39.6$$

$$34 - 12 (M_1/M_2) = 34 - 12 (-43.0/107.8) = 38.8$$

$39.6 > 38.8$ . La columna es esbelta.

## FACTORES DE LONGITUD EFECTIVA DE MARCOS ARRIOSTRADOS.

APOYO SUPERIOR	k				
ARTICULADO 	0.70	0.81	0.91	0.95	1.00
ELASTICO $\psi=3.1$ 	0.67	0.77	0.86	0.90	0.95
ELASTICO $\psi=1.6$ 	0.65	0.74	0.83	0.86	0.91
RIGIDO $\psi=0.4$ 	0.58	0.67	0.74	0.77	0.81
EMPOTRADO 	0.50	0.58	0.65	0.37	0.70
	 EMPOTRADO	 RIGIDO	 ELASTICO	 ELASTICO	 ARTICULADO

(b) Columna DE:

$$l_u = 24 \text{ pies} - 2 \text{ pies} = 264 \text{ pulg.}$$

$$k = 0.86$$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{0.86 \times 264}{4.2} = 54.1$$

$$34 - 12 \frac{M_1}{M_2} = 34 - 12 \frac{58.4}{78.1} = 25.0$$

Entonces la columna DE es también esbelta.

Ninguna excede  $kl_u/r = 100$  según ACI Sec. 10.11.5.

5.- Momento mínimo.

El ACI Sec. 10.12.3.2 requiere que una columna de marco arriostrado deberá diseñarse para una excentricidad mínima de  $(0.6 + 0.03h)$  pulg. Para 14 pulg., esta da 1.02 pulg.

$$P_u e_{min} = 152.8 \times 1.02 = 13.0 \text{ KLbs-pie}$$

y para la columna DE este  $M_{min}$  da 8.0 KLbs-pie entonces las columnas deberán diseñarse para los momentos actuantes.

6.- Calcular EI.

Como el refuerzo no se conoce podemos usar:

$$EI = 0.40 E_c I_g / (1 + \beta_d)$$

donde:

$$E_c = 57,000 \sqrt{f'_c} = 3.12 \times 10^6 \text{ Lbs/pulg}^2$$

$$I_g = (14)^4 / 12 = 3201 \text{ pulg}^4$$

$$0.40 E_c I_g = 4.00 \times 10^9 \text{ Lbs-pulg}^2$$

(a) Columna CD:

$$\beta_d = \frac{1.4 \times 80}{152.8} = 0.733$$

$$EI = \frac{4.00 \times 10^9}{1 + 0.733} = 2.31 \times 10^9 \text{ Lbs-pulg}^2$$

(b) Columna DE:

$$\beta_d = \frac{1.4 \times 50}{93.8} = 0.746$$

$$EI = \frac{4.00 \times 10^9}{1,746} = 2.29 \times 10^9 \text{ Lbs-pulg}^2$$

7.- Factores de longitud efectiva.

$$\psi = \frac{\sum E_c I_c / l_c}{\sum E_b I_b / l_b}$$

Donde el ACI Sec. 10.12.1 dice que E e I serán de acuerdo a ACI Sec. 10.11.1. Entonces,  $I_c = 0.70 I_g$ , e  $I_b = 0.35 I_g$ , donde  $I_g$  es el momento de inercia de la sección transversal dada la cual tiene un ancho efectivo de 90 pulg. Usando este ancho  $I_g = 36,000 \text{ pulg}^4$  de donde  $I_b = 0.35 \times 36,600 = 12,810 \text{ pulg}^4$ . Análogamente,  $I_c = 0.70 \times (14)^4 / 12$ ,  $I_c = 2,240 \text{ pulg}^4$ ,  $l_c$  y  $l_b$  son los claros de las columnas y vigas respectivamente, medidos centro a centro de juntas en el marco.

(a) Columna DE: El valor de  $\psi$  por E es:

$$\psi E = \frac{E_c \times 2,240 / 24 \times 12}{E_b \times 12,810 / 300}$$

donde  $E_c = E_b$  Entonces  $\psi E = 0.182$

El valor de  $\psi$  en D es:

$$\psi_D = \frac{E_c \times 2,240 / 288 + E_c \times 2,240 / 240}{E_b \times 12,810 / 460} = 0.481$$

Del nomograma para factor de longitud efectiva  $k = 0.63$ . El cual por ecuación da:

$$k = 0.7 + 0.05 (0.182 + 0.481) = 0.733 \text{ y con la tabla da } k = 0.86.$$