

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL DEL SISTEMA DE TRACCIÓN
DE UN VEHÍCULO ELÉCTRICO

POR

ING. JUAN LUIS MARTÍNEZ CERROS

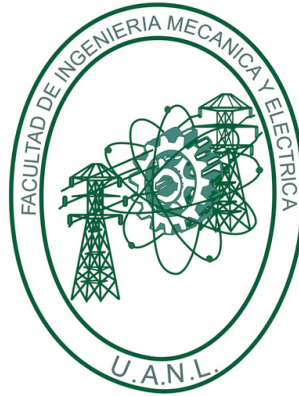
TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA
CON ORIENTACIÓN EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

ABRIL DE 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL DEL SISTEMA DE TRACCIÓN
DE UN VEHÍCULO ELÉCTRICO

POR

ING. JUAN LUIS MARTÍNEZ CERROS

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA
CON ORIENTACIÓN EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

ABRIL DE 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Control del sistema de tracción de un vehículo eléctrico**” realizada por el alumno **Ing. Juan Luis Martínez Cerros**, matrícula 1210580 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis

Asesor
Dr. Jesús de León Morales

Revisor:
Dr. Miguel F. Escalante Gutiérrez

Revisor:
Dr. Rubén Salas Cabrera

Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado
Cd. Universitaria, a Abril de 2011

Para mi familia y seres queridos

Gracias por todo...

Agradecimientos

Agradezco...

Al Ser Supremo que mueve los hilos del universo.

Al Dr. Jesús de León Morales por la formación y el apoyo para realizar este trabajo.

A mis revisores, el Dr. Miguel F. Escalante Gutiérrez de esta misma institución y el Dr. Rubén Salas Cabrera del Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, quienes con sus consejos y comentarios ayudaron a mejorar el contenido del presente trabajo de investigación.

Agradezco a los profesores del programa doctoral, quienes con sus cátedras ayudaron a mi formación profesional.

A mis compañeros y amigos.

Al CONACyT y a la Universidad Autónoma de Nuevo León por su apoyo económico que facilitó la realización del presente proyecto de tesis.

RESUMEN

Publicación No. _____

Juan Luis Martínez Cerros, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2011

Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales

Un Vehículo Eléctrico (VE) es un vehículo cuya propulsión se realiza con un motor eléctrico, en lugar del tradicional motor de combustión interna. La configuración básica de un VE alimentado por una sola fuente está integrada por: el motor eléctrico, el control electrónico, el sistema de baterías y el sistema de suspensión.

Se elige trabajar con el motor de inducción como fuente de propulsión ya que presenta las ventajas de funcionar en rangos altos de velocidad, su mantenimiento es bajo y es de peso ligero; cabe mencionar que su control es complejo, esto debido a la no linealidad y al alto acoplamiento existente entre sus estados; para estudiar el comportamiento dinámico del motor de inducción es necesario representar adecuadamente las principales variables que lo describen, lo cual lleva a revisar las representaciones matemáticas de estado no lineal del motor de inducción, en donde se opta por utilizar la representación en variables de estado en el sistema de coordenadas dq , realizándose también un estudio de observabilidad para resaltar las zonas observables e inobservables de éste.

Las variables que se consideran disponibles para la medición en el motor son las corrientes y voltajes del estator; para estimar los flujos del rotor, la velocidad angular y el par de carga se propone utilizar observadores por modos deslizantes de primer y segundo orden (los cuales tienen un tiempo de convergencia finito). Una vez que se cuenta con todas las variables disponibles se propone utilizar un controlador por modos deslizantes de alto orden (el cual

tiene un tiempo de convergencia finito que es fijado *a priori*) para evaluar el desempeño del esquema *Observador-Control* mediante el banco de pruebas *Control sin sensor mecánico*. Se verifica que el esquema es robusto con respecto a la resistencia del estator, esto introduciendo una variación del +50% en su valor nominal. Al diseñar los algoritmos de observación y de control utilizando técnicas de modos deslizantes aseguramos que el principio de separación se aplica y que la convergencia del esquema es en tiempo finito.

Se incluye un estudio del modelo matemático de 1/4 de un vehículo (el cual contiene las no linealidades existentes), esto con la finalidad de conocer las capacidades de la suspensión activa. Se utiliza un controlador por modos deslizantes de primer orden, con el cual se analiza la dinámica de la suspensión ante un perfil de superficie ondulado r , todo esto asumiendo que se cuenta con la medición de los estados. Se logra atenuar el efecto de r sobre el estado x_1 , que representa la diferencia entre la posición de la masa suspendida y su posición de equilibrio, mejorando con esto el confort en la marcha del vehículo.

Índice General

Resumen	v
Índice General	vii
Índice de Tablas	x
Índice de Figuras	xi
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	9
1.3. Contenido	10
2. Modelado y Observabilidad del Motor de Inducción	12
2.1. Introducción	12
2.2. Modelo matemático del motor de inducción	13
2.2.1. Presentación del motor	13
2.2.2. Transformación de Park-Blondel	14
2.2.3. Ecuaciones eléctricas generalizadas del motor de inducción bajo la transformación de Park	17
2.3. Modelo de estado no lineal	20
2.3.1. Modelo de estados en el sistema rotatorio generalizado dq	20
2.3.2. Modelo de estados en el marco de referencia fijo respecto al estator $\alpha\beta$	22
2.3.3. Modelo de estados en el marco de referencia giratorio dq vinculados con el flujo del rotor	23

2.4.	Observabilidad del motor de inducción sin sensores mecánicos	24
2.4.1.	Observabilidad del motor de inducción con medición de velocidad	26
2.4.2.	Observabilidad del motor de inducción sin medición de velocidad	27
2.4.3.	Caso 1: $\dot{\Omega} = 0$	30
2.4.4.	Caso 2: $\omega_s = 0$	32
2.4.5.	Caso 3: $\dot{\phi}_{rd} = \dot{\phi}_{rq} = \omega_s = 0$	35
2.4.6.	Caso 4: $\dot{\phi}_{rd} = \dot{\phi}_{rq} = \omega_s = 0$ y $\dot{\Omega} = 0$	37
2.5.	Recta de inobservabilidad	39
2.6.	Banco de prueba <i>Control sin sensor mecánico</i>	41
3.	Control y observador por modos deslizantes	43
3.1.	Introducción	43
3.2.	Observador por modos deslizantes	44
3.2.1.	Síntesis del Observador por modos deslizantes de primer y segundo orden	45
3.3.	Control por modos deslizantes de alto orden	48
3.3.1.	Formulación del problema	50
3.3.2.	Síntesis de un controlador por modos deslizantes de alto orden	52
3.4.	Aplicación al motor de inducción	60
3.4.1.	Síntesis de la ley de control	69
3.5.	Análisis de estabilidad del esquema <i>Observador - Control</i>	72
4.	Estudio del Movimiento Vertical de un Vehículo	76
4.1.	Introducción	76
4.2.	Modelo matemático de 1/4 del vehículo	77
4.3.	Limitación de las oscilaciones verticales del vehículo	81
4.4.	Control por modos deslizantes de primer orden	84
5.	Resultados	88
5.1.	Simulación del esquema <i>Observador-Control</i>	89
5.1.1.	Caso 1: Parámetros nominales del motor de inducción	92

5.1.2. Caso 2: Variación en la resistencia del estator R_s (+50%)	95
5.2. Simulación de la suspensión activa	99
5.2.1. Sistema en lazo abierto	100
5.2.2. Sistema bajo el control por modos deslizantes de primer orden	101
6. Conclusiones	104
A. Corrientes y voltajes del estator	107
A.1. Caso 1: Parámetros nominales del motor de inducción	107
A.2. Caso 2: Variación en la resistencia del estator R_s (+50%)	110
Bibliografía	113

Índice de cuadros

1.1. Tipos de motores eléctricos.	4
5.1. Características del motor de inducción.	90
5.2. Parámetros nominales del motor de inducción.	90
5.3. Valores de los parámetros del estimador de par mecánico y de los observadores. .	91
5.4. Valores de los parámetros del control por modos deslizantes de alto orden. . . .	91
5.5. Desempeño de esquemas <i>Observador-Control</i>	98
5.6. Parámetros de la suspensión activa.	99
5.7. Valores de los parámetros del control modos deslizantes de primer orden.	100

Índice de figuras

1.1. Configuración básica de un sistema de tracción de un VE	4
1.2. Sistema de suspensión pasiva.	6
1.3. Sistema de suspensión semi-activa.	6
1.4. Sistema de suspensión activa.	7
2.1. Transformación de Concordia.	15
2.2. Transformación de Park.	17
2.3. Recta de Inobservabilidad	40
2.4. Banco de prueba <i>Control sin sensor mecánico</i> : a) velocidad de referencia $\Omega^*(rad/s)$, b) flujo de referencia $\phi^*(Wb)$, c) par de carga $T_l(N.m)$	42
4.1. Esquema de 1/4 de vehículo	77
4.2. Modelo de 1/4 de vehículo	80
5.1. Banco de prueba <i>Control sin sensor mecánico</i> : a) velocidad de referencia $\Omega^*(rad/s)$, b) flujo de referencia $\phi^*(Wb)$, c) par de carga $T_l(N.m)$	89
5.2. Sistema <i>Control-Motor de Inducción-Observador</i>	92
5.3. Seguimiento de trayectoria, esquema <i>HOSMC-FOSMO</i> , caso nominal : a) Ω_m , b) $\hat{\Omega}$, c) T_l , d) \hat{T}_l , e) ϕ^* , f) $\hat{\phi}_{rd}$	93
5.4. Error de seguimiento, esquema <i>HOSMC-FOSMO</i> , caso nominal: a) $\epsilon_{p\Omega} = \Omega_m - \hat{\Omega}$, b) $\epsilon_{pT_l} = T_l - \hat{T}_l$, c) $\epsilon_{p\phi} = \phi^* - \hat{\phi}_{rd}$	93
5.5. Seguimiento de trayectoria, esquema <i>HOSMC-SOSMO</i> , caso nominal : a) Ω_m , b) $\hat{\Omega}$, c) T_l , d) \hat{T}_l , e) ϕ^* , f) $\hat{\phi}_{rd}$	94
5.6. Error de seguimiento, esquema <i>HOSMC-SOSMO</i> , caso nominal: a) $\epsilon_{s\Omega} = \Omega_m - \hat{\Omega}$, b) $\epsilon_{sT_l} = T_l - \hat{T}_l$, c) $\epsilon_{s\phi} = \phi^* - \hat{\phi}_{rd}$	94

5.7. Seguimiento de trayectoria, esquema <i>HOSMC-FOSMO</i> , variación del +50 % en R_s : a) Ω_m , b) $\hat{\Omega}$, c) T_l , d) \hat{T}_l , e) ϕ^* , f) $\hat{\phi}_{rd}$	96
5.8. Error de seguimiento, esquema <i>HOSMC-FOSMO</i> , variación del +50 % en R_s : a) $\epsilon_{p\Omega} = \Omega_m - \hat{\Omega}$, b) $\epsilon_{pT_l} = T_l - \hat{T}_l$, c) $\epsilon_{p\phi} = \phi^* - \hat{\phi}_{rd}$	96
5.9. Seguimiento de trayectoria, esquema <i>HOSMC-SOSMO</i> , variación del +50 % en R_s : a) Ω_m , b) $\hat{\Omega}$, c) T_l , d) \hat{T}_l , e) ϕ^* , f) $\hat{\phi}_{rd}$	97
5.10. Error de seguimiento, esquema <i>HOSMC-SOSMO</i> , variación del +50 % en R_s : a) $\epsilon_{s\Omega} = \Omega_m - \hat{\Omega}$, b) $\epsilon_{sT_l} = T_l - \hat{T}_l$, c) $\epsilon_{s\phi} = \phi^* - \hat{\phi}_{rd}$	97
5.11. Superficie rugosa.	99
5.12. Sistema <i>Control-Suspensión Activa</i>	100
5.13. Sistema de suspensión activa en lazo abierto: a) x_1 , b) r c) x_2	101
5.14. Control por modos deslizantes de primer orden: a) x_1 , b) r , c) x_2 , d) F	101
5.15. F del control por modos deslizantes de primer orden.	102
5.16. Superficie deslizante de primer orden.	102
A.1. Voltajes del estator, esquema <i>HOSMC-FOSMO</i> , caso nominal : a) u_{sd} , b) u_{sq} , c) $u_{s\alpha}$, d) $u_{s\beta}$	108
A.2. Corrientes del estator, esquema <i>HOSMC-FOSMO</i> , caso nominal : a) i_{sd} , b) i_{sq} , c) $i_{s\alpha}$, d) $i_{s\beta}$	108
A.3. Voltajes del estator, esquema <i>HOSMC-SOSMO</i> , caso nominal : a) u_{sd} , b) u_{sq} , c) $u_{s\alpha}$, d) $u_{s\beta}$	109
A.4. Corrientes del estator, esquema <i>HOSMC-SOSMO</i> , caso nominal : a) i_{sd} , b) i_{sq} , c) $i_{s\alpha}$, d) $i_{s\beta}$	109
A.5. Voltajes del estator, esquema <i>HOSMC-FOSMO</i> , variación del +50 % en R_s : a) u_{sd} , b) u_{sq} , c) $u_{s\alpha}$, d) $u_{s\beta}$	110
A.6. Corrientes del estator, esquema <i>HOSMC-FOSMO</i> , variación del +50 % en R_s : a) i_{sd} , b) i_{sq} , c) $i_{s\alpha}$, d) $i_{s\beta}$	111
A.7. Voltajes del estator, esquema <i>HOSMC-SOSMO</i> , variación del +50 % en R_s : a) u_{sd} , b) u_{sq} , c) $u_{s\alpha}$, d) $u_{s\beta}$	111
A.8. Corrientes del estator, esquema <i>HOSMC-SOSMO</i> , variación del +50 % en R_s : a) i_{sd} , b) i_{sq} , c) $i_{s\alpha}$, d) $i_{s\beta}$	112

Capítulo 1

Introducción

En el presente capítulo se realiza una descripción del problema a tratar, se establecen los objetivos que habrá de cumplir la tesis y finalmente se presenta la estructura del contenido del presente trabajo de investigación.

1.1. Introducción

Una de las industrias que más influencia tiene en la economía de los países desarrollados es la automotriz, pues provee empleo directo e indirecto a miles de personas en diversos sectores productivos y de servicios, entre ellos: acereras, vidrieras, huleras, electrónicas, entre otras. El automóvil, casi desde su invención, ha utilizado motores de combustión interna (CI) los cuales funcionan con derivados del petróleo, sin que durante mucho tiempo se haya planteado algún sustituto viable comercialmente.

La reciente crisis del 2008 tuvo efectos importantes en las grandes plantas armadoras de autos en Estados Unidos y quedó demostrada la fuerte dependencia que tiene la economía con la industria automotriz y lo vulnerable que ésta es al entorno económico; debido a la globalización se ha generado una reacción en cadena junto con otras industrias, al grado de

afectar la economía mundial de manera considerable.

Durante años se han presentado diferentes crisis petroleras, sin embargo la más impactante ha sido la del 2008, ya que ésta demostró no sólo ser una crisis petrolera, sino una más importante, la del transporte, particularmente la del transporte individual. Diferentes naciones han propuesto diversas estrategias para reducir al máximo la dependencia del petróleo. La posibilidad de nuevas fuentes de energía renovables ha permitido diversificar sus formas y reducir la dependencia y sus costos, sin embargo no ha sido suficiente. Una estrategia para reducir el consumo de petróleo que ha comenzado a tener auge es el uso de los Vehículos Eléctricos, sin embargo éste no pudo hacer su aparición con anterioridad ya que la producción mundial de petróleo, así como su precio, estaban bajo el control de grandes compañías petroleras.

Además de que el automóvil está asociado con el petróleo como fuente de energía, también existen otros problemas relacionados con esta industria, y uno de los más importantes es la contaminación del medio ambiente a través de la emisión de CO_2 a la atmósfera. Ya que una de las mayores críticas que se le han hecho al sector automotriz es la contaminación ambiental, surge también la necesidad de buscar soluciones que disminuyan este problema, es por eso que aparecieron automóviles compactos de menor consumo mediante el diseño de motores de CI más eficientes. Otras soluciones han sido propuestas y es así que hacen su aparición los vehículos eléctricos híbridos con dos tipos de motores, el de CI y el eléctrico. Esta dualidad proviene de la dificultad para almacenar energía eléctrica, complicando la autonomía del vehículo; en cuanto esto sea resuelto, ya sea mediante baterías de mayor capacidad o celdas de combustible más compactas, se incrementará la autonomía del automóvil y se transformará en un vehículo eléctrico.

Los autos eléctricos resultan ser la opción más ecológica y económica en la actualidad. El precio se estima 6 veces menor que el de un automóvil de diesel o de gasolina; parte importante

de esta eficiencia se logra durante los congestionamientos de tráfico, cuando el auto eléctrico en reposo no consume energía, a diferencia del auto de combustión interna que continúa consumiendo combustible y contaminando el medio ambiente con emisiones de CO_2 .

Un Vehículo Eléctrico (VE) es un vehículo cuya propulsión se realiza con un motor eléctrico, en lugar del tradicional motor de combustión interna [1]; estos pueden clasificarse en tres categorías:

- VE alimentado con una sola fuente de energía, tales como baterías o celdas de combustible, entre otros.
- VE constituido de una combinación de máquina de combustión interna (CI) y un generador, usualmente llamados vehículos Diesel-Eléctrico o Máquina-Eléctrico.
- VE alimentados con dos fuentes de energía (vehículos con fuentes combinadas) en serie o paralelo, llamados Vehículos Eléctricos Híbridos (VEH).

En los VE se utilizan uno o más sistemas eléctricos de propulsión, lo cual representa la estructura principal del VE. En la Figura 1.1 se muestra la configuración básica de un sistema de tracción de un VE, la cual está integrada principalmente por un motor eléctrico, el control electrónico, el sistema de baterías y el sistema de suspensión.

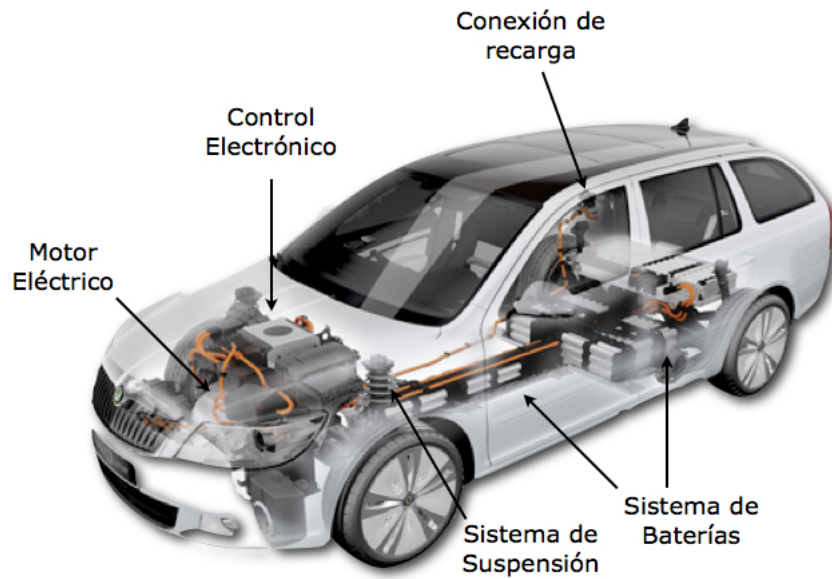


Figura 1.1. Configuración básica de un sistema de tracción de un VE

La siguiente tabla muestra una comparativa entre los motores eléctricos que se pueden utilizar como fuente de propulsión [1].

Motor	Ventajas	Desventajas
Inducción	Altas rpm Bajo mantenimiento Bajo peso	Precio elevado Control complejo (no lineal)
DC Brushless	Bajo mantenimiento	Control caro
Imanes permanentes	Eficientes	Banda pequeña de rpm Elevado mantenimiento Precio elevado
DC	Control sencillo	Costos Pobre desempeño

Tabla 1.1. Tipos de motores eléctricos.

El control del sistema de propulsión eléctrico se efectúa mediante el sistema de control electrónico. En [1] se puede encontrar los diferentes tipos de baterías que están disponibles en la actualidad para abastecer los requerimientos de energía del VE, se puede hacer mención de las principales: Ácido-Plomo de ciclo profundo, Níquel-Cadmio (Ni-Cd) / Níquel-Hierro (Ni-Fe), Litio-Hierro, entre otras; de igual forma se mencionan otras tecnologías en baterías tales como: volantes de inercia (*flywheels*) y ultracapacitores.

El sistema de suspensión es uno de los componentes más importantes de un vehículo, el cual tiene el papel de tratar con las características de desempeño y confort en la marcha del vehículo. Este sistema actúa como un puente entre los ocupantes del vehículo y el camino por el cual transitan. Tiene dos funciones principales [2]:

- Aislar el cuerpo del vehículo con sus pasajeros de las perturbaciones externas, las cuales en su mayoría vienen de las irregularidades en la superficie del suelo. Se relaciona con la *calidad en la marcha*.
- Mantener un contacto firme entre el camino y los neumáticos para proveer orientación a lo largo del camino. Esto es llamado *desempeño de manejo*.

Existen tres ramas en los sistemas de suspensión: pasiva, semi-activa y activa.

El sistema de suspensión pasiva consiste en resortes y amortiguadores convencionales como se aprecian en la Figura 1.2. Éste es utilizado en la mayoría de los coches; se asume que los resortes y los amortiguadores tienen características lineales y fijas, por tanto no tienen mecanismos para control por retroalimentación.

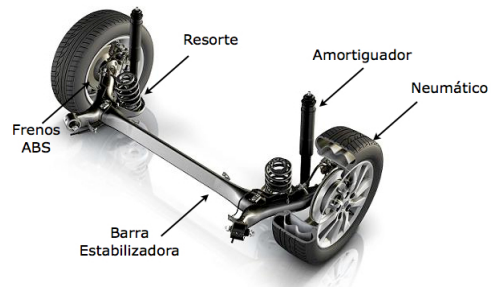


Figura 1.2. Sistema de suspensión pasiva.

El sistema de suspensión semi-activa provee de una disipación de energía controlada en tiempo real. Ésta es lograda a través de un dispositivo llamado *amortiguador activo*, el cual es utilizado en paralelo con un resorte convencional. La característica principal de este sistema es la habilidad de ajustar el amortiguamiento de la suspensión sin el uso de un actuador.

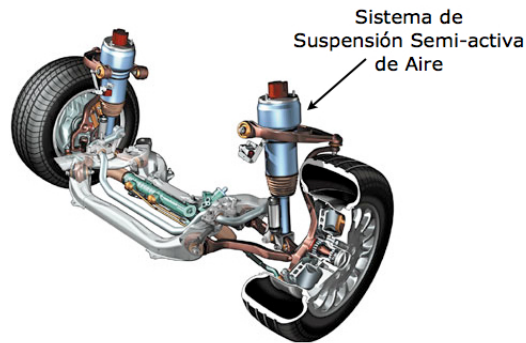


Figura 1.3. Sistema de suspensión semi-activa.

En la Figura 1.3 se muestra un sistema de suspensión semi-activa, el cual utiliza aire comprimido en los resortes para mantener constantes los niveles del vehículo en cualquier terreno.

El sistema de suspensión activa emplea actuadores neumáticos, hidráulicos o eléctricos que a su vez crean la fuerza deseada en el sistema de suspensión. El actuador es utilizado en paralelo con el resorte y el amortiguador. Este sistema requiere de sensores localizados en diferentes

partes del vehículo para medir la información de la dinámica del éste. Esta información es utilizada en un *controlador en línea* para accionar al actuador con la finalidad de proporcionar la cantidad necesaria de fuerza para mantener los niveles del vehículo.

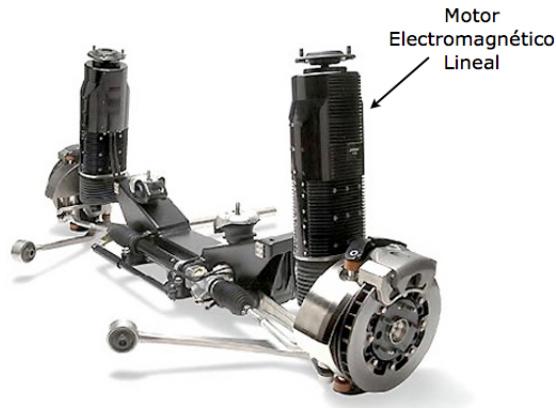


Figura 1.4. Sistema de suspensión activa.

En la Figura 1.4 se muestra un sistema de suspensión activa, el cual utiliza un motor electromagnético lineal como actuador que levanta o baja al vehículo dependiendo de las necesidades.

Existen varios parámetros que se deben considerar para el diseño del sistema de suspensión, entre ellos destacan cuatro:

- Confort de marcha: está directamente relacionado con la aceleración percibida por los pasajeros.
- Movimiento del cuerpo: el rebote, cabeceo y balanceo (*bounce, pitch, roll*) de la masa suspendida son creados por las curvas y aceleración o desaceleración.
- Manejo del camino: asociado con las fuerzas de contacto de los neumáticos y la superficie del suelo.

- Viaje de la suspensión: se refiere al desplazamiento entre la masa suspendida y la masa no suspendida.

Existen tres tipos de modelos matemáticos utilizados para analizar la dinámica del movimiento vertical de un vehículo [3]: el de 1/4 del vehículo, el de medio vehículo y el del vehículo completo. Cada uno de ellos ha sido desarrollado para analizar y diseñar sistemas de control de la suspensión activa. Estos modelos se han investigado en términos de diferentes preocupaciones de compromisos entre confort en la marcha y seguridad.

En primer lugar, el modelo de 1/4 del vehículo fue inicialmente desarrollado para explorar las capacidades de la suspensión activa y con esto nació el concepto de *Amortiguación Skyhook* y la nivelación de carga rápida, los cuales actualmente se desarrollan en aplicaciones de producción a gran escala.

El modelo de medio vehículo, incluyendo el cabeceo (*pitch*) y los modos de oscilación vertical se desarrollaron para simular las características de marcha de un vehículo completo simplificado, que conlleva a una mejora significativa en la marcha y el manejo.

Por último, el modelo completo del vehículo se propuso con la finalidad de estudiar de cerca los estados acoplados de los cuatro modelos de 1/4 del vehículo y manejar las compensaciones entre el confort en la marcha y la seguridad.

En el presente trabajo de investigación se utilizará el esquema de un vehículo eléctrico cuya propulsión se realizará con un motor de inducción, debido a que puede operar a altas rpm, presenta un bajo mantenimiento y su peso es ligero; su fuente de alimentación será un banco de baterías, quedando como trabajos a futuro el estudio de las baterías, así como del convertidor de potencia, el cual puede ser un inversor y tiene como función convertir la corriente directa (suministrada por las baterías) a corriente alterna (a la salida del inversor) la cual es necesaria para alimentar al motor de inducción. De igual forma se estudiará el modelo matemático de

1/4 de un vehículo, esto con la finalidad de explorar las capacidades de la suspensión activa, así como entender su funcionamiento.

1.2. Objetivos

El objetivo principal es analizar los modelos matemáticos que describen el comportamiento individual del sistema de tracción de un vehículo eléctrico, compuesto por el motor de inducción y la suspensión activa, así como evaluar el desempeño dinámico de estos.

Con la finalidad de cumplir con el objetivo principal se definen los siguientes objetivos específicos:

- Examinar los modelos matemáticos de los elementos que componen al sistema de tracción, tales como el motor de inducción y la suspensión activa.
- Analizar la observabilidad del motor de inducción.
- Obtener un observador mediante la técnica de modos deslizantes para estimar el par de carga, los flujos del rotor y la velocidad angular del motor de inducción.
- Estudiar y aplicar un controlador diseñado mediante la técnica de modos deslizantes de alto orden, tal que podamos evaluar y validar el desempeño del esquema *Observador-Control* mediante el banco de pruebas *Control sin sensor mecánico* [4].
- Aplicar un controlador diseñado mediante la técnica de modos deslizantes para el sistema de suspensión activa, con la finalidad de evaluar la dinámica de las variables de estado ante la presencia de un perfil de superficie determinado.
- Comprobar los resultados obtenidos mediante simulaciones.

1.3. Contenido

La presente tesis se desarrolla de la siguiente forma:

En el Capítulo 1 incluimos la definición de un Vehículo Eléctrico, sus clasificaciones según el número de fuentes que lo alimentan, además de los diferentes tipos de suspensión que existen, así como a los diferentes modelos utilizados para caracterizar la dinámica de un vehículo. Así mismo, se incluyen los objetivos y el contenido de la tesis.

El Capítulo 2 muestra las Transformaciones de Concordia y de Park-Blondel, las cuales son utilizadas para obtener los modelos matemáticos del motor de inducción en los marcos de referencia α, β y dq respectivamente. También se incluye un análisis de observabilidad del motor de inducción en el marco de referencia dq . Se da una breve explicación del banco de prueba *Control sin sensor mecánico*, el cual se utilizará para evaluar el desempeño del esquema *Observador-Control* ante trayectorias precalculadas, tomando en cuenta los problemas de observabilidad del motor de inducción a muy baja velocidad.

En el Capítulo 3 se aborda el estudio de una clase de observador diseñado mediante técnicas de modos deslizantes y un control por modos deslizantes de alto orden, los cuales serán utilizados para obtener las variables no medibles del MI y controlar el sistema utilizando el banco de pruebas *Control sin sensor mecánico*, respectivamente.

En el Capítulo 4 se realiza un análisis al sistema de suspensión activa, en donde se muestra el modelo matemático que será utilizado para analizar la dinámica de las variables de estado en la presencia de un perfil de superficie de desplazamiento utilizando un controlador por modos deslizantes de primer orden y asumiendo que se dispone de la medición de los estados.

En el Capítulo 5 se muestran los resultados de simulación del esquema *Observador-Control* al utilizar el banco de pruebas *Control sin sensor mecánico*. De manera similar se muestran los

resultados obtenidos en el sistema de suspensión activa ante un perfil de superficie determinado utilizando un control diseñado con la técnica de modos deslizantes de primer orden.

Por último, se presentan las conclusiones del presente trabajo de investigación, así como algunas propuestas de trabajo a futuro.

Capítulo 2

Modelado y Observabilidad del Motor de Inducción

En este capítulo se presentan los modelos dinámicos en una representación de estado no lineal del motor de inducción (MI) como primera parte. Después se estudiará la propiedad de observabilidad del MI sin sensores mecánicos, la cual permitirá determinar las propiedades de observación así como el diseño del observador del MI, que es importante en la reconstrucción del estado no medible del sistema, y que posteriormente permitirá la implementación de cualquier ley de control que dependa del estado completo del sistema. Por último se mostrará el banco de pruebas Control sin sensor mecánico, utilizado para validar los observadores y leyes de control sin sensores.

2.1. Introducción

Los motores eléctricos forman parte importante de cualquier actividad industrial, gracias a sus ventajas de transformar energía eléctrica en mecánica, la cual es parte fundamental en el desarrollo de cualquier proceso de transformación. Además, más del 60 por ciento de la energía producida en el país es consumida por motores eléctricos, de ahí que sea importante mejorar

su desempeño para economizar energía y optimizar su operación. En la últimas décadas se ha mostrado mucho interés en el control del motor de inducción (MI) dado las crecientes demandas de energía y sus diferentes aplicaciones, como es el caso de los autos eléctricos, donde una área de oportunidad se está presentando para el control de máquinas eléctricas y el uso adecuado de energías no renovables.

2.2. Modelo matemático del motor de inducción

Para el control del motor de inducción (MI) es necesario estudiar las propiedades estructurales del modelo matemático de éste como lo es la observabilidad, con el fin de diseñar estrategias de control que permitan aumentar la eficiencia en el comportamiento dinámico del MI. Recientemente han surgido nuevos retos y cambios en la construcción y uso de los MI; en base al estudio de estas propiedades se define el banco de prueba [4]: *Control sin sensor mecánico*, para estudiar de manera experimental la eficiencia de estos algoritmos bajo distintas condiciones de operación. Este banco de prueba permite validar el esquema *Observador-Control sin sensor mecánico*. Además, se presta especial atención a la operación a muy baja velocidad (zona de inobservabilidad) del MI, donde éste pierde la propiedad de observabilidad y por lo tanto, la posibilidad de reconstruir el estado del sistema.

2.2.1. Presentación del motor

Ahora presentaremos algunos resultados importantes sobre el modelado matemático de un motor de inducción (MI).

El MI está compuesto principalmente de las siguientes elementos: el estator, el rotor, los

componentes mecánicos que permiten la rotación y el mantenimiento de los diferentes subconjuntos. El estator, con forma cilíndrica, representa la parte estática de la máquina y se compone de una bobina, por lo general de tres fases que se encuentran en las ranuras y se conectan a la fuente de alimentación. El rotor es la parte giratoria y puede tomar diferentes aspectos que distinguen a los diferentes tipos de MI:

- Rotor devanado.
- Rotor jaula de ardilla.

Está claro que existen muchos otros tipos de MI que según su aplicación pueden ser considerados. En este trabajo sólo nos concentraremos en el MI de jaula de ardilla, aunque este trabajo se puede extender a otras máquinas eléctricas.

2.2.2. Transformación de Park-Blondel

Para estudiar el comportamiento dinámico de un motor de inducción (MI) es necesario representar adecuadamente las principales variables que lo describen. Para este fin se ha recurrido a las diferentes representaciones que mejor describen las dinámicas del MI. Las dos más conocidas se basan en aquellas que se obtienen mediante las transformaciones de Concordia y de Park-Blondel.

Estas transformaciones permiten representar las ecuaciones eléctricas de un motor trifásico por las de un motor bifásico equivalente. La ventaja de este modelo equivalente por fase, es esencialmente una simplificación de la representación eléctrica de la máquina.

Ahora, considere el MI trifásico en un sistema de coordenadas abc fijo, el cual se desea transformar en un sistema de coordenadas $0\alpha\beta$.

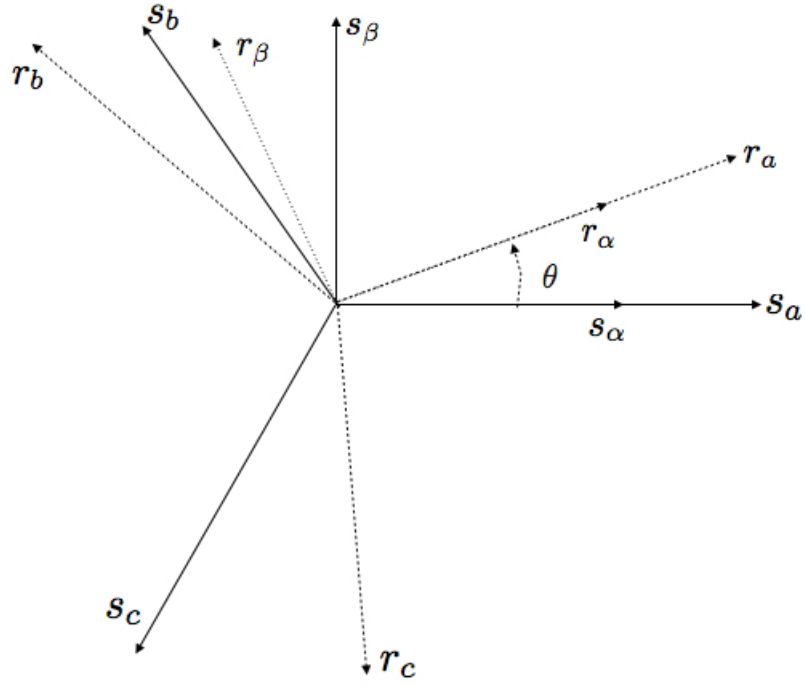


Figura 2.1. Transformación de Concordia.

La transformación se basa en la forma normal de las ecuaciones eléctricas de la diagonalización de las matrices de inductancias. Esta nueva representación se realiza mediante la matriz de transformación T_3 .

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = T_3^T \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

$$\text{donde } T_3 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Las componentes de T_3 son los valores propios de la matriz de inductancias $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$. Estos valores propios se definen de tal forma que se normaliza la matriz de transformación T_3 , es decir $\|\lambda_i\| = 1$, que corresponde a la invarianza de la energía en la transformación.

Si la alimentación es trifásica y balanceada, entonces se tiene que $\sum i = 0$. De este modo, de la ecuación (2.2.1) se puede verificar fácilmente que $i_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i_a + i_b + i_c) = 0$. Así tanto la corriente como el flujo se anulan sobre el eje homopolar 0. En este caso y en lo que sigue de este trabajo, no se considerará más ese eje.

Entonces, la transformación trifásica se vuelve en bifásica, tal que:

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = T_{32}^T \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

$$\text{donde } T_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, la transformación inversa se obtiene directamente $x_{abc} = T_{32}x_{\alpha\beta}$, ya que T_3 es una matriz ortogonal.

A partir de esta transformación, hay un desajuste entre el eje del estator y el eje del rotor, dado por el ángulo mecánico θ (Figura 2.1). Con el fin de expresar todas las variables en un único sistema de referencia se usará la transformación de Park, que consiste en pasar de la referencia bifásica fija $\alpha\beta$ a un sistema rotatorio con referencia al estator. Por lo tanto, las variables del estator y del rotor se proyectan en un marco de referencia generalizado dq , que se compensa con un ángulo θ_s en relación con la referencia fija $\alpha\beta$ (Figura 2.2). En esta figura, el índice r se refiere a las variables del rotor y s a las variables del estator.

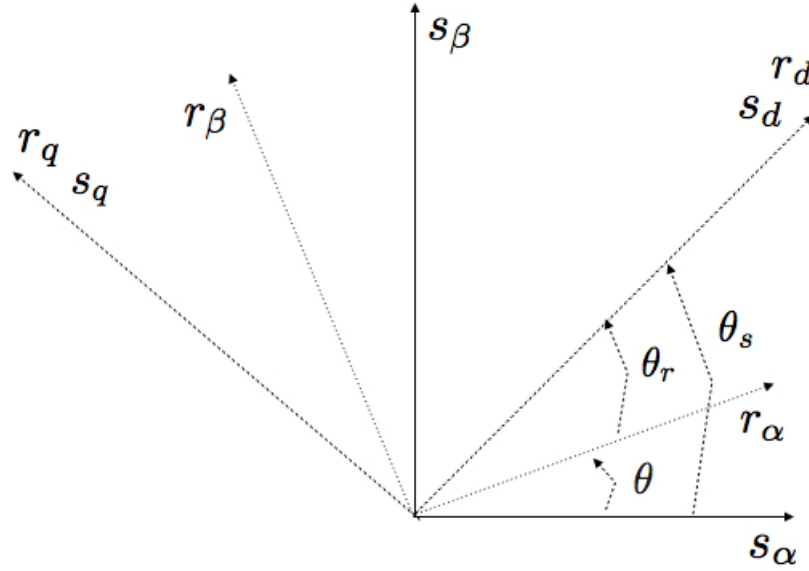


Figura 2.2. Transformación de Park.

Esta transformación no lineal se realiza mediante la matriz de Park P .

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = P(-\xi) \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

donde $P(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix}$.

Para las variables del estator $\xi = \theta_s$ y para las variables del rotor $\xi = \theta_s - \theta_r$. La transformación inversa se obtiene fácilmente con $x_{\alpha\beta} = P(\xi)x_{dq}$ mediante $P(-\xi) = P(\xi)^{-1} = P(\xi)^T$.

2.2.3. Ecuaciones eléctricas generalizadas del motor de inducción bajo la transformación de Park

Sea Λ la matriz de inductancias del motor de inducción (MI). Entonces [4]:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{sr}^T & L_r \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

$$\text{con } L_s = \begin{bmatrix} l_{as} & M_{as} & M_{as} \\ M_{as} & l_{as} & M_{as} \\ M_{as} & M_{as} & l_{as} \end{bmatrix}, L_r = \begin{bmatrix} l_{ar} & M_{ar} & M_{ar} \\ M_{ar} & l_{ar} & M_{ar} \\ M_{ar} & M_{ar} & l_{ar} \end{bmatrix},$$

$$L_{sr} = \begin{bmatrix} M \cos \theta & M \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & M \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_{as} & M \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ M \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & M \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Las matrices de inductancias deben verificar las siguientes expresiones:

$$T_3^{-1} L_s T_3 = \begin{bmatrix} l_{as} + 2M_{as} & 0 \\ 0 & (l_{as} - M_{as})I_d \end{bmatrix}, T_3^{-1} L_r T_3 = \begin{bmatrix} l_{ar} + 2M_{ar} & 0 \\ 0 & (l_{ar} - M_{ar})I_d \end{bmatrix},$$

$$L_{sr} = M_{sr} T_{32} P(\theta) T_{32}^T$$

$$\text{con } I_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } M_{sr} = \frac{3}{2}M.$$

Además, los flujos magnéticos están dados por la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{aligned} \phi_s &= L_s i_s + L_{sr} i_r \\ \phi_r &= L_{sr} i_s + L_r i_r. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Por otra parte, mediante la aplicación de la transformación de Concordia (2.2.2) a las ecuaciones de flujo (2.2.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi_{s_{\alpha\beta}} &= L_s i_{s_{\alpha\beta}} + M_{sr} P(\theta) i_{r_{\alpha\beta}} \\ \phi_{r_{\alpha\beta}} &= L_r i_{s_{\alpha\beta}} + M_{sr} P(-\theta) i_{s_{\alpha\beta}} \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

con $L_s = l_{as} - M_{as}$ y $L_r = l_{ar} - M_{ar}$.

Las ecuaciones de las tensiones del MI en el marco de referencia bifásico son:

$$\begin{aligned} u_{s_{\alpha\beta}} &= R_s i_{s_{\alpha\beta}} + \frac{d(\phi_{s_{\alpha\beta}})}{dt} \\ u_{r_{\alpha\beta}} &= L_r i_{s_{\alpha\beta}} + \frac{d(\phi_{r_{\alpha\beta}})}{dt}. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Con la aplicación de la transformación de Park (2.2.3) a las ecuaciones (2.2.6) y (2.2.7), obtenemos las ecuaciones de un MI jaula de ardilla en un marco de referencia generalizado dq como se muestra:

$$\begin{aligned}
 \phi_{sd} &= L_s i_{sd} + M_{sr} i_{rd} \\
 \phi_{sq} &= L_s i_{sq} + M_{sr} i_{rq} \\
 \phi_{rd} &= L_r i_{rd} + M_{sr} i_{sd} \\
 \phi_{rq} &= L_r i_{rq} + M_{sr} i_{sq}
 \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

y

$$\begin{aligned}
 u_{sd} &= R_s i_{sd} + \dot{\phi}_{sd} - \dot{\theta}_s \phi_{sq} \\
 u_{sq} &= R_s i_{sq} + \dot{\phi}_{sq} + \dot{\theta}_s \phi_{sd} \\
 u_{rd} &= 0 = R_r i_{rd} + \dot{\phi}_{rd} - \dot{\phi}_r \phi_{rq} \\
 u_{rq} &= 0 = R_r i_{rq} + \dot{\phi}_{rq} + \dot{\phi}_r \phi_{rd}.
 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Para simplificar las expresiones, tenemos que:
$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{\theta}_s = \omega_s \\
 \dot{\theta} = p\Omega \\
 \dot{\theta}_r = \omega_r = \omega_s - p\Omega \\
 \sigma = 1 - \left(\frac{M_{sr}^2}{L_s L_r}\right)
 \end{array} \right.$$

Las relaciones entre flujos y corrientes son:

$$\begin{aligned}
 i_{sd} &= \frac{1}{\sigma L_s} \phi_{sd} - \frac{1 - \sigma}{\sigma M_{sr}} \phi_{rd} \\
 i_{sq} &= \frac{1}{\sigma L_s} \phi_{sq} - \frac{1 - \sigma}{\sigma M_{sr}} \phi_{rq} \\
 i_{rd} &= \frac{1}{\sigma L_r} \phi_{rd} - \frac{1 - \sigma}{\sigma M_{sr}} \phi_{sd} \\
 i_{rq} &= \frac{1}{\sigma L_r} \phi_{rq} - \frac{1 - \sigma}{\sigma M_{sr}} \phi_{sq}.
 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

El par electromagnético es:

$$T_e = \frac{pM_{sr}}{L_r} (\phi_{rd} i_{sq} - \phi_{rq} i_{sd}). \tag{2.2.11}$$

La ecuación (2.2.11) muestra que el par es proporcional a un producto vectorial que representa una expresión no lineal. Para obtener el modelo completo del MI añadimos la ecuación de la velocidad mecánica:

$$\dot{\Omega} = \frac{T_e}{J} - \frac{T_l}{J} - \frac{f_v}{J}\Omega. \quad (2.2.12)$$

2.3. Modelo de estado no lineal

La representación en espacio de estados de un modelo consiste en definir el vector de estados x , el vector de entrada u y el vector de salida y . El vector de estados está constituido de variables eléctricas (corrientes), variables magnéticas (flujos) y variables mecánicas (velocidad). El vector de entrada se compone de los voltajes en el estator. Se eligen las corrientes medidas del estator como vector de salida, esto debido a que el flujo del motor de inducción es difícilmente accesible.

Nota 1: En el caso del control con sensor de velocidad, la variable velocidad se puede considerar como una salida medible. En general, el par de carga se considera como entrada (a menudo desconocida), nosotros la consideraremos como una variable a estimar.

2.3.1. Modelo de estados en el sistema rotatorio generalizado dq

En este punto de referencia, el vector de estados x , el vector de entrada u y el vector de salida y son, respectivamente:

$$x_{dq} = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ T_l \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix}.$$

Mediante la sustitución de las corrientes del rotor y los flujos del estator en (2.2.9), por sus expresiones (2.2.10), y el par electromagnético de la ecuación (2.2.12), por su expresión (2.2.11), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{i}_{sd} &= ba\phi_{rd} + bp\Omega\phi_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq} + m_1 u_{sd} \\
\dot{i}_{sq} &= ba\phi_{rq} - bp\Omega\phi_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd} + m_1 u_{sq} \\
\dot{\phi}_{rd} &= -a\phi_{rd} + (\omega_s - p\Omega)\phi_{rq} + aM_{sr}i_{sd} \\
\dot{\phi}_{rq} &= -a\phi_{rq} - (\omega_s - p\Omega)\phi_{rd} + aM_{sr}i_{sq} \\
\dot{\Omega} &= m(\phi_{rd}i_{sq} - \phi_{rq}i_{sd}) - c\Omega - \frac{1}{J}T_l.
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Los parámetros a , b , c , γ , σ , m y m_1 están definidos por:

$$a = R_r/L_r, \quad b = M_{sr}/\sigma L_s L_r, \quad c = f_v/J,$$

$$\gamma = \frac{L_r^2 R_s + M_{sr}^2 R_r}{\sigma L_s L_r^2}, \quad \sigma = 1 - (M_{sr}^2/L_s L_r),$$

$$m = pM_{sr}/JL_r, \quad m_1 = 1/\sigma L_s.$$

De este modo, el modelo de estados no lineal del motor de inducción (MI), en el sistema rotatorio generalizado dq (Figura 2.2), está representado por [4]:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \\ \dot{\phi}_{rd} \\ \dot{\phi}_{rq} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba\phi_{rd} + bp\Omega\phi_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq} \\ ba\phi_{rq} - bp\Omega\phi_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd} \\ -a\phi_{rd} + (\omega_s - p\Omega)\phi_{rq} + aM_{sr}i_{sd} \\ -a\phi_{rq} - (\omega_s - p\Omega)\phi_{rd} + aM_{sr}i_{sq} \\ m(\phi_{rd}i_{sq} - \phi_{rq}i_{sd}) - c\Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ T_l \end{bmatrix}. \tag{2.3.2}$$

En el modelo (2.3.2) el par de carga T_l , el cual es un parámetro generalmente desconocido, se considerará como una perturbación en el sistema. Por otra parte, para el caso del control sin sensor mecánico es necesario estimar el par de carga. El vector de estados x se amplía con

la introducción del par de carga T_l como variable de estado. Se supondrá que el par de carga varía lentamente, esto estará descrito por medio de la ecuación:

$$\frac{d(T_l)}{dt} = 0. \quad (2.3.3)$$

El modelo de estados no lineal extendido del MI, en el sistema rotatorio generalizado dq , es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \\ \dot{\phi}_{rd} \\ \dot{\phi}_{rq} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{T}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba\phi_{rd} + bp\Omega\phi_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq} \\ ba\phi_{rq} - bp\Omega\phi_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd} \\ -a\phi_{rd} + (\omega_s - p\Omega)\phi_{rq} + aM_{sr}i_{sd} \\ -a\phi_{rq} - (\omega_s - p\Omega)\phi_{rd} + aM_{sr}i_{sq} \\ m(\phi_{rd}\dot{i}_{sq} - \phi_{rq}\dot{i}_{sd}) - c\Omega - \frac{1}{J}T_l \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

con $x_{edq} = [i_{sd} \ i_{sq} \ \phi_{rd} \ \phi_{rq} \ \Omega \ T_l]^T$.

2.3.2. Modelo de estados en el marco de referencia fijo respecto al estator $\alpha\beta$

El modelo de estados no lineal del motor de inducción (MI) en el marco fijo $\alpha\beta$ se obtiene directamente del modelo en dq (2.3.2), se establece el ángulo de proyección θ_s y su derivada iguales a cero ($\theta_s = 0$ y $\dot{\theta}_s = \omega_s = 0$). De modo que, el vector de estados x , el vector de entrada u y el vector de salida y son, respectivamente:

$$x_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \\ T_l \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix}.$$

Entonces, el modelo de estados no lineal del MI es [4]:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{s\alpha} \\ \dot{i}_{s\beta} \\ \dot{\phi}_{r\alpha} \\ \dot{\phi}_{r\beta} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba\phi_{r\alpha} + bp\Omega\phi_{r\beta} - \gamma i_{s\alpha} \\ ba\phi_{r\beta} - bp\Omega\phi_{r\alpha} - \gamma i_{s\beta} \\ -a\phi_{r\alpha} - p\Omega\phi_{r\beta} + aM_{sr}i_{s\alpha} \\ -a\phi_{r\beta} + p\Omega\phi_{r\alpha} + aM_{sr}i_{s\beta} \\ m(\phi_{r\alpha}i_{s\beta} - \phi_{r\beta}i_{s\alpha}) - c\Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \\ T_l \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

El modelo de estados no lineal extendido del MI (con el par de carga visto como una variable de estados) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{s\alpha} \\ \dot{i}_{s\beta} \\ \dot{\phi}_{r\alpha} \\ \dot{\phi}_{r\beta} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{T}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba\phi_{r\alpha} + bp\Omega\phi_{r\beta} - \gamma i_{s\alpha} \\ ba\phi_{r\beta} - bp\Omega\phi_{r\alpha} - \gamma i_{s\beta} \\ -a\phi_{r\alpha} - p\Omega\phi_{r\beta} + aM_{sr}i_{s\alpha} \\ -a\phi_{r\beta} + p\Omega\phi_{r\alpha} + aM_{sr}i_{s\beta} \\ m(\phi_{r\alpha}i_{s\beta} - \phi_{r\beta}i_{s\alpha}) - c\Omega - \frac{1}{J}T_l \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

con $x_{e\alpha\beta} = [i_{s\alpha} \ i_{s\beta} \ \phi_{r\alpha} \ \phi_{r\beta} \ \Omega \ T_l]^T$.

Nota 2: De los modelos (2.3.5) y (2.3.6) se expresan las variables del estator y del rotor en el mismo sistema de ejes $\alpha\beta$ (correspondiente a los ejes s_α y s_β de la Figura 2.1). Por lo que estos modelos son desarrollados a partir del modelo generalizado dq ((2.3.2) y (2.3.4)).

2.3.3. Modelo de estados en el marco de referencia giratorio dq vinculados con el flujo del rotor

Los modelos de estado (2.3.2) y (2.3.4) en el marco dq generalizado dependen de la frecuencia del estator ω_s . Ésta se puede calcular suponiendo una perfecta orientación del marco dq , es decir, que el eje d coincida con el vector de flujo del rotor, por consecuencia, la componente del flujo

en el eje de cuadratura q , así como sus derivadas se anulan, esto es:

$$\dot{\phi}_{rq} = \dot{\phi}_{rq} = 0. \quad (2.3.7)$$

A partir de (2.3.2) y (2.3.7), resulta que:

$$\dot{\rho} = \omega_s = p\Omega + \frac{aM_{sr}}{\phi_{rd}}i_{sq}. \quad (2.3.8)$$

Ahora bien, la ecuación de par electromagnético (2.2.11) se convierte en:

$$T_e = \frac{pM_{sr}}{L_r}\phi_{rd}i_{sq}. \quad (2.3.9)$$

Entonces, el modelo no lineal del motor de inducción, en el marco de referencia giratorio relacionado con el campo del rotor, resulta directamente del modelo generalizado (2.3.2) al remplazar la frecuencia del estator ω_s y la ecuación diferencial de ϕ_{rd} , por el ángulo ρ , obtenido a partir de (2.3.8) [4]:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \\ \dot{\phi}_{rd} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba\phi_{rd} + p\Omega i_{sq} - \gamma i_{sd} + a\frac{M_{sr}}{\phi_{rd}}i_{sq}^2 \\ -bp\Omega\phi_{rd} - p\Omega i_{sd} - \gamma i_s - a\frac{M_{sr}}{\phi_{rd}}i_{sd}i_{sq} \\ -a\phi_{rd} + aM_{sr}i_{sd} \\ p\Omega + a\frac{M_{sr}}{\phi_{rd}}i_{sq} \\ m\phi_{rd}i_{sq} - c\Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ T_l \end{bmatrix}. \quad (2.3.10)$$

Nota 3: De la ecuación (2.3.8) y $\omega_r = \omega_s - p\Omega$ con $\omega_r = \frac{aM_{sr}}{\phi_{rd}}i_{sq}$, que es la frecuencia de deslizamiento, se recupera una propiedad física del motor de inducción en régimen permanente.

2.4. Observabilidad del motor de inducción sin sensores mecánicos

El problema de observabilidad de los sistemas no lineales es complejo, debido a que depende de la entrada del sistema. Ahora, utilizaremos el criterio de rango genérico de observabilidad

para el estudio de la observabilidad del motor de inducción (MI) ([4], [5]).

Sea el sistema no lineal de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y &= h(x(t))\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la salida del sistema. $f(.,.)$ y $h(.)$ son funciones analíticas.

Definición 1: Espacio Genérico de Observabilidad, ([4], [5]). Considere el sistema (2.4.1). El espacio genérico de observabilidad está definido por $\mathcal{O} = \mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} + \mathcal{U})$, con:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \text{Span}_K dx \\ \mathcal{U} &= \text{Span}_K du^{(v)}, v \geq 0 \\ \mathcal{Y} &= \text{Span}_K dy^{(w)}, w \geq 0\end{aligned}$$

donde K es el conjunto de funciones meromorfas. El sistema (2.4.1) es genéricamente observable si y sólo si:

$$\dim \mathcal{O} = n.\tag{2.4.2}$$

Suponga que la condición de rango para observabilidad genérica (2.4.2) se satisface. Entonces, se puede verificar que:

$$\text{rang}_K \begin{bmatrix} dy \\ dy \\ \vdots \\ dy^{(n-1)} \end{bmatrix} = n.\tag{2.4.3}$$

Sólo se necesita que *el jacobiano (2.4.4) sea de rango pleno.*

$$\frac{\partial(y, \dots, y^{(n-1)})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.\tag{2.4.4}$$

2.4.1. Observabilidad del motor de inducción con medición de velocidad

Considere el modelo del motor de inducción (MI) (2.3.4), donde se asume que la velocidad es medible (se considera como una salida).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \Omega \\ T_l \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \omega_s x_2 \\ bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \omega_s x_1 \\ -ax_3 + (\omega_s - px_5)x_4 + aM_{sr}x_1 \\ -ax_4 - (\omega_s - px_5)x_3 + aM_{sr}x_2 \\ m(x_3x_2 - x_4x_1) - cx_5 - \frac{1}{j}x_6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $P_0(x)$ el conjunto de funciones C^∞ (suaves e infinitamente diferenciable) generadas a partir de las mediciones y de sus derivadas como sigue:

$$P_0(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_5 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix}.$$

El jacobiano $J_0(x)$ de $P_0(x)$, con respecto al estado x , será utilizado para caracterizar la observabilidad del sistema (2.4.5) en el sentido de rango como se muestra:

$$J_0(x) = \frac{\partial(P_0(x))}{\partial(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma & \omega_s & ba & bpx_5 & bpx_4 & 0 \\ -\omega_s & -\gamma & -bpx_5 & ba & -bpx_3 & 0 \\ -mx_4 & mx_3 & mx_2 & mx_1 & -c & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}.$$

Entonces, el determinante $D_0(x)$ de $J_0(x)$ está dado por:

$$D_0(x) = -\frac{b^2}{J}(a^2 + (px_5)^2).$$

El determinante $D_0(x)$ es diferente de cero para cualquier velocidad. Entonces, la matriz $J_0(x)$ es de rango completo. De esta forma, el MI es observable cuando existe la medición de velocidad y corrientes.

2.4.2. Observabilidad del motor de inducción sin medición de velocidad

El objetivo de este trabajo de investigación es obtener un control sin sensores mecánicos, esto es, sin sensor de velocidad y sensor de torque. Sin embargo, antes de implementar dicho control es necesario un estudio de observabilidad para determinar bajo que condiciones se preserva ésta y diseñar un observador de los estados no medibles. Para ello, el estudio de observabilidad se realizará considerando la velocidad no medible [4]. Considere el modelo del motor de inducción

(MI) donde la velocidad no es medible (2.3.4).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \Omega \\ T_l \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \omega_s x_2 \\ bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \omega_s x_1 \\ -ax_3 + (\omega_s - px_5)x_4 + aM_{sr}x_1 \\ -ax_4 - (\omega_s - px_5)x_3 + aM_{sr}x_2 \\ m(x_3x_2 - x_4x_1) - cx_5 - \frac{1}{J}x_6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, sea $P_1(x)$ el conjunto de funciones C^∞ generadas a partir de las salidas medibles y de sus derivadas, las cuales están dadas por:

$$P_1(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Se utiliza el jacobiano $J_1(x)$ de $P_1(x)$, con respecto al estado x , para caracterizar la observabilidad del sistema (2.4.6) en el sentido de rango como se muestra:

$$J_1(x) = \frac{\partial(P_1(x))}{\partial(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & \omega_s & ba & bpx_5 & bpx_4 & 0 \\ -\omega_s & -\gamma & -bpx_5 & ba & -bpx_3 & 0 \\ j_{15,1} & j_{15,2} & j_{15,3} & j_{15,4} & j_{15,5} & j_{15,6} \\ j_{16,1} & j_{16,2} & j_{16,3} & j_{16,4} & j_{16,5} & j_{16,6} \end{bmatrix}$$

donde:

$$j_{15,1} = \gamma^2 - bM_{sr}a^2 - bpx_4^2 - \omega_s^2$$

$$j_{15,2} = bmpx_3x_4 + bpaM_{sr}x_5 + \dot{\omega}_s - 2\gamma\omega_s$$

$$j_{15,3} = -ba^2 + bpx_2x_4 + bp^2x_5^2 - \gamma ba - 2bpx_5\omega_s$$

$$j_{15,4} = -2bapx_5 + bp(mx_2x_3 - mx_4x_1 - cx_5 - \frac{1}{J}x_6) - \gamma bpx_5 - bpx_4x_1 - 2ba\omega_s$$

$$j_{15,5} = -bapx_4 - bpcx_4 + bp(-ax_4 + px_5x_3 + aM_{sr}x_2) - \gamma bpx_4 + bp^2x_5x_3 - 2bpx_3\omega_s$$

$$j_{15,6} = -\frac{bp}{J}x_4$$

y

$$j_{16,1} = bpx_3x_4 - bpaM_{sr}x_5 - \dot{\omega}_s + 2\gamma\omega_s$$

$$j_{16,2} = \gamma^2 + bM_{sr}a^2 - bpx_3^2 - \omega_s^2$$

$$j_{16,3} = 2bapx_5 - bp(mx_2x_3 - mx_4x_1 - cx_5 - \frac{1}{J}x_6) + \gamma bpx_5 - bpx_2x_3 - 2ba\omega_s$$

$$j_{16,4} = -ba^2 + bpx_1x_3 + bp^2x_5^2 - \gamma ba - 2bpx_5\omega_s$$

$$j_{16,5} = bapx_3 + bpcx_3 - bp(-ax_3 - px_5x_3 + aM_{sr}x_1) - \gamma bpx_3 + bp^2x_5x_3 - 2bpx_4\omega_s$$

$$j_{16,6} = \frac{bp}{J}x_3.$$

Por otro lado, se calcula el determinante $D_1(x)$ de $J_1(x)$. Éste viene dado por:

$$D_1(x) = -\frac{b^3 p^2}{J} [-(px_5 x_3 + ax_4)(x_3 j_{15,3} + x_4 j_{16,3}) \\ + (ax_3 - px_4 x_5)(x_3 j_{15,4} + x_4 j_{16,4}) + (\frac{a}{p^2} - px_5^2)(x_3 j_{15,5} + x_4 j_{16,5})].$$

Ahora bien, a partir de las expresiones de: $j_{15,3}$, $j_{15,4}$, $j_{15,5}$, $j_{16,3}$, $j_{16,4}$ y $j_{16,5}$, el determinante $D_1(x)$ de la matriz $J_1(x)$ es difícil de resolver. Para un mejor estudio de la observabilidad del MI sin sensor de velocidad se consideraran los siguientes casos especiales.

2.4.3. Caso 1: $\dot{\Omega} = 0$

Para el caso en que la velocidad del motor de inducción (MI) es constante, el modelo (2.3.4), resulta de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5 x_4 - \gamma x_1 + \omega_s x_2 \\ bax_4 - bpx_5 x_3 - \gamma x_2 - \omega_s x_1 \\ -ax_3 + (\omega_s - px_5) x_4 + aM_{sr} x_1 \\ -ax_4 - (\omega_s - px_5) x_3 + aM_{sr} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, sean $P_2(x)$ y $P_3(x)$ los conjuntos de funciones C^∞ generadas a partir de las salidas medibles y de sus derivadas, los cuales estan definidos como sigue:

$$P_2(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \dot{h}_1 \\ \ddot{h}_1 \\ h_2 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad P_3(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \dot{h}_1 \\ h_2 \\ \dot{h}_2 \\ \ddot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Los jacobianos $J_2(x)$ de $P_2(x)$ y $J_3(x)$ de $P_3(x)$, con respecto al estado x , son utilizados para caracterizar la observabilidad del sistema (2.4.7) en el sentido de rango como se muestra:

$$J_2(x) = \frac{\partial(P_2(x))}{\partial(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & \omega_s & ba & bpx_5 & bpx_4 \\ \gamma^2 + ba^2M_{sr} - \omega_s & bM_{sr}apx_5 - 2\omega_s\gamma & j_{23,3} & j_{23,4} & j_{23,5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_s & -\gamma & -bpx_5 & ba & -bpx_3 \end{bmatrix}$$

$$J_3(x) = \frac{\partial(P_3(x))}{\partial(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & \omega_s & ba & bpx_5 & bpx_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_s & -\gamma & -bpx_5 & ba & -bpx_3 \\ -bM_{sr}apx_5 + 2\omega_s\gamma & \gamma^2 + ba^2M_{sr} - \omega_s^2 & j_{35,3} & j_{35,4} & j_{35,5} \end{bmatrix}$$

donde:

$$j_{23,3} = -ba^2 + bp^2x_5^2 - \gamma ba - 2bp\omega_sx_5$$

$$j_{23,4} = -2bapx_5 - bp\gamma x_5 + 2ba\omega_s$$

$$j_{23,5} = -bpa x_4 + bp\dot{x}_4 + bp^2x_5x_3 - \gamma bpx_4 - bp\omega_sx_3$$

y

$$\begin{aligned}
 j_{3_{5,3}} &= 2bapx_5 + bp\gamma x_5 - 2ba\omega_s \\
 j_{3_{5,4}} &= -ba^2 + bp^2x_5^2 - \gamma ba - 2bp\omega_s x_5 \\
 j_{3_{5,5}} &= bapx_3 - pb\dot{x}_3 + bp^2x_5x_4 + \gamma bpx_3 - bp\omega_s x_4.
 \end{aligned}$$

Calculando los determinantes de los jacobianos anteriores, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 D_2(x) &= -b^3p^3(\dot{x}_4 + \omega_s x_3)\left(\frac{a^2}{p^2} + x_5^2\right). \\
 D_3(x) &= b^3p^3(\dot{x}_3 - \omega_s x_4)\left(\frac{a^2}{p^2} + x_5^2\right).
 \end{aligned}$$

Ambos determinantes, $D_2(x)$ y $D_3(x)$ muestran que en el punto $\dot{x}_4 = -\omega_s x_3$, $\dot{x}_3 = \omega_s x_4$ ó $\dot{x}_4 = \dot{x}_3 = \omega_s = 0$, aparece una singularidad de observabilidad (física) del sistema. Por lo tanto, la condición suficiente de observabilidad del MI no se satisface.

2.4.4. Caso 2: $\omega_s = 0$

Para el caso en que $\omega_s = 0$, el modelo del motor de inducción (MI) (2.3.4) resulta de la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\
 y &= h(x)
 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \Omega \\ T_l \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 \\ bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 \\ -ax_3 - px_5x_4 + aM_{sr}x_1 \\ -ax_4 + px_5x_3 + aM_{sr}x_2 \\ m(x_3x_2 - x_4x_1) - cx_5 - \frac{1}{J}x_6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definiendo como $P_4(x)$ el conjunto de funciones C^∞ generadas a partir de las salidas medibles y de sus derivadas, resulta que:

$$P_4(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}.$$

De modo que, el jacobiano $J_4(x)$ de $P_4(x)$, con respecto al estado x , es determinado para caracterizar la observabilidad del sistema (2.4.8) en el sentido de rango como se muestra:

$$J_4(x) = \frac{\partial(P_4(x))}{\partial(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & ba & bpx_5 & bpx_4 & 0 \\ 0 & -\gamma & -bpx_5 & ba & -bpx_3 & 0 \\ j_{45,1} & bpmx_3x_4 + bpM_{sr}ax_5 & j_{45,3} & j_{45,4} & j_{45,5} & \frac{-bpx_4}{J} \\ bpmx_3x_4 - bpM_{sr}ax_5 & j_{46,2} & j_{46,3} & j_{46,4} & j_{46,5} & \frac{bpx_3}{J} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 j_{45,1} &= -bpmx_4^2 + \gamma^2 + bM_{sr}a^2 \\
 j_{45,3} &= bpmx_4x_2 - \gamma ba - ba^2 + bp^2x_5^2 \\
 j_{45,4} &= bp\dot{x}_5 + bpmx_4x_1 - \gamma bpx_5 - 2bpa x_5 \\
 j_{45,5} &= -bpcx_4 - bp\gamma x_4 - 2bpa x_4 + bp^2x_5x_3 + bpaM_{sr}x_2
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 j_{46,2} &= -bpmx_3^2 + \gamma^2 + bM_{sr}a^2 \\
 j_{46,3} &= -bp\dot{x}_5 + bpmx_3x_2 + \gamma bpx_5 + 2bapx_5 \\
 j_{46,4} &= bpmx_3x_1 + \gamma ba + bp^2x_5^2 - ba^2 \\
 j_{46,5} &= bpcx_3 + bp\gamma x_3 + 2bpa x_3 + 2bp^2x_4x_5 - bpaM_{sr}x_1.
 \end{aligned}$$

Calculando el determinante del jacobiano $J_4(x)$, resulta que:

$$D_4(x) = \frac{b^4p^3a}{J} \underbrace{(x_3^2 + x_4^2)}_{\phi_{rd}^2 + \phi_{rq}^2} \left(\dot{x}_5 + \frac{a}{bp}x_5 + \frac{p}{ba}x_5^3 \right) + \frac{b^3pM_{sr}a^2}{m} \underbrace{m(x_3x_2 - x_4x_1)}_{T_e}.$$

Puesto que el determinante $D_4(x)$ es difícil de analizar, algunas consideraciones pueden ser tomadas en cuenta, por ejemplo, se puede ver que en $T_e = 0$ y $\phi_{rd}^2 + \phi_{rq}^2 = 0$, aparece una singularidad de observabilidad (física) del sistema. Este caso presenta interés físico, ya que se tendrá un flujo en el rotor y un torque electromecánico igual a cero.

2.4.5. Caso 3: $\dot{\phi}_{rd} = \dot{\phi}_{rq} = \omega_s = 0$

Ahora consideraremos el caso $\dot{\phi}_{rd} = \dot{\phi}_{rq} = \omega_s = 0$, del cual resulta que el modelo del motor de inducción (MI) (2.3.4) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \Omega \\ T_l \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 \\ bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 \\ 0 \\ 0 \\ m(x_3x_2 - x_4x_1) - cx_5 - \frac{1}{J}x_6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere ahora a $P_5(x)$ como el conjunto de funciones C^∞ generadas a partir de las salidas medibles y de sus derivadas representado por:

$$P_5(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}.$$

El jacobiano $J_5(x)$ de $P_5(x)$ con respecto al estado x que permite caracterizar la propiedad de observabilidad del sistema (2.4.9) en el sentido de rango, se tiene obtiene de la siguiente forma:

$$J_5(x) = \frac{\partial(P_5(x))}{\partial(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & ba & bpx_5 & bpx_4 & 0 \\ 0 & -\gamma & -bpx_5 & ba & -bpx_3 & 0 \\ j_{55,1} & bpmx_3x_4 & j_{55,3} & j_{55,4} & j_{55,5} & \frac{-bpx_4}{J} \\ bpmx_3x_4 & j_{56,2} & j_{56,3} & j_{56,4} & j_{56,5} & \frac{bpx_3}{J} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} j_{55,1} &= -bpmx_4^2 + \gamma^2 \\ j_{55,3} &= bpmx_4x_2 - \gamma ba \\ j_{55,4} &= bp\dot{x}_5 + bpmx_4x_1 - \gamma bpx_5 \\ j_{55,5} &= -bpcx_4 - bp\gamma x_4 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} j_{56,2} &= -bpmx_3^2 + \gamma^2 \\ j_{56,3} &= -bp\dot{x}_5 + bpmx_3x_2 + \gamma bpx_5 \\ j_{56,4} &= bpmx_3x_1 + \gamma ba \\ j_{56,5} &= bpcx_3 + bp\gamma x_3. \end{aligned}$$

De igual forma, calculando el determinante de $J_5(x)$, se tiene que:

$$D_5(x) = \frac{b^4 p^3 a}{J} \underbrace{(x_3^2 + x_4^2)}_{\phi_{rd}^2 + \phi_{rq}^2} (\dot{x}_5).$$

Entonces, el determinante $D_5(x)$ se anula en $\phi_{rd}^2 + \phi_{rq}^2 = 0$. Interpretando este resultado podemos ver que se tendrá un flujo en el rotor igual a cero. El tener $\dot{x}_5 = 0$ implica que la velocidad es constante.

De esta forma, podemos concluir que el determinante se anula cuando la velocidad es constante. Por tanto, la observabilidad del sistema (2.4.9) no se puede determinar en todas las circunstancias, particularmente cuando se tienen los estados estacionarios a velocidad constante, la frecuencia del estator ω_s igual a cero y cuando ϕ_{rd} y ϕ_{rq} se mantienen constantes y singulares.

Nota 4: El último caso es de suma importancia, ya que para el control de flujo orientado se requiere que ϕ_{rd} sea constante y $\phi_{rq} = 0$. Así, la observabilidad del sistema (2.4.9) no se mantiene cuando la velocidad es constante (régimen permanente) y la frecuencia del estator es cero. De los **casos 1 y 3** se concluye que no es posible verificar la observabilidad del MI utilizando únicamente las mediciones y sus derivadas de orden superior (segundo orden).

Ahora se tratará de determinar la observabilidad del sistema únicamente con la medición de corrientes y sus derivadas de alto orden (segundo orden), cuando la velocidad del motor es constante $\dot{\Omega} = 0$, las componentes del flujo del rotor son constantes $\dot{\phi}_{rd} = \dot{\phi}_{rq} = 0$, y la frecuencia del estator es nula $\omega_s = 0$. Esto nos da el siguiente caso.

2.4.6. Caso 4: $\dot{\phi}_{rd} = \dot{\phi}_{rq} = \omega_s = 0$ y $\dot{\Omega} = 0$

Para este caso, el modelo del motor de inducción (MI) (2.3.4) se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 \\ bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere la siguiente función $P_6(x)$ suave y suficientemente diferenciable, la cual se genera a partir de las mediciones y de sus derivadas como sigue:

$$P_6(x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_2 \\ h_1^{(3)} \\ h_2^{(3)} \\ h_1^{(4)} \\ h_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{bmatrix}.$$

El jacobiano $J_6(x)$ de $P_6(x)$ con respecto al estado x es utilizado para caracterizar la

propiedad de observabilidad del sistema (2.4.10) en el sentido de rango y está dado por:

$$J_6(x) = \frac{\partial(P_6(x))}{\partial(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & ba & bpx_5 & bpx_4 & 0 \\ 0 & -\gamma & -bpx_5 & ba & -bpx_3 & 0 \\ \gamma^2 & 0 & -\gamma ba & -\gamma bpx_5 & -\gamma bpx_4 & 0 \\ 0 & \gamma^2 & \gamma bpx_5 & -\gamma ba & \gamma bpx_3 & 0 \\ -\gamma^3 & 0 & \gamma^2 ba & \gamma^2 bpx_5 & \gamma^2 bpx_4 & 0 \\ 0 & -\gamma^3 & -\gamma^2 bpx_5 & \gamma^2 ba & -\gamma^2 bpx_3 & 0 \\ \gamma^4 & 0 & -\gamma^3 ba & -\gamma^3 bpx_5 & -\gamma^3 bpx_4 & 0 \\ 0 & \gamma^4 & \gamma^3 bpx_5 & -\gamma^3 ba & \gamma^3 bpx_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta que: $\frac{\partial \ddot{h}_1}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \ddot{h}_2}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial x}$, $\frac{\partial h_1^{(3)}}{\partial x} = \gamma^2 \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial x}$, $\frac{\partial h_2^{(3)}}{\partial x} = \gamma^2 \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial x}$, $\frac{\partial h_1^{(4)}}{\partial x} = -\gamma^3 \frac{\partial \dot{h}_1}{\partial x}$, $\frac{\partial h_2^{(4)}}{\partial x} = -\gamma^3 \frac{\partial \dot{h}_2}{\partial x}$, resulta que la observabilidad del sistema (2.4.10) no se puede establecer para el caso particular en que los flujos son constantes, la velocidad es constante y la frecuencia del estator es nula, incluso con las derivadas de orden superior de las mediciones.

2.5. Recta de inobservabilidad

A partir de (2.3.9), la frecuencia del estator (2.3.8) puede escribirse como:

$$\omega_s = p\Omega + \frac{R_r T_e}{p\phi_{rd}^2} \quad (2.5.1)$$

$\omega_s = 0$, implica que:

$$T_e = -K\Omega \quad (2.5.2)$$

donde: $K = \frac{p^2 \phi_{rd}^2}{R_r}$.

Si la velocidad del motor de inducción (MI) es constante ($\dot{\Omega} = 0$), la ecuación dinámica (2.2.12) se vuelve:

$$T_e = f_v \Omega + T_l. \quad (2.5.3)$$

De (2.5.2) y (2.5.3) se obtiene una línea recta (Figura 2.3) en el plano de par de carga-velocidad mecánica (T_l, Ω):

$$T_l = -M\Omega \quad (2.5.4)$$

con $M = \frac{p^2 \phi_{rd}^2}{R_r} + f_v$.

Esta línea recta de inobservabilidad se sitúa en el segundo y cuarto cuadrantes del plano (T_l, Ω), que corresponden a la función de generador (el par de carga y la velocidad mecánica tienen signo opuesto) como se muestra en la Figura 2.3. Se utiliza en la especificaciones de drives industriales para caracterizar el comportamiento de los reguladores a bajas velocidades.

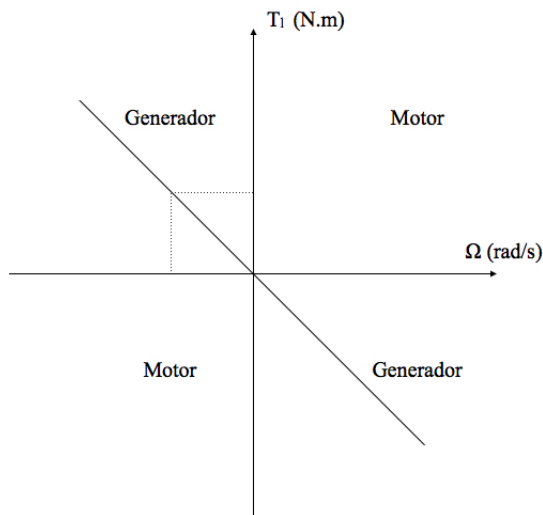


Figura 2.3. Recta de Inobservabilidad

2.6. Banco de prueba *Control sin sensor mecánico*

El estudio de la observabilidad del motor de inducción (MI) sin sensor de velocidad que acabamos de realizar permite dar condiciones suficientes para la pérdida de observabilidad. Hemos visto que una condición suficiente para la pérdida de observabilidad del MI es tener la velocidad mecánica constante y la frecuencia del estator igual a cero. Se ha definido un banco de prueba llamado *Control sin sensor mecánico* [4], éste es utilizado para validar los observadores y leyes de control sin sensor mecánico en trayectorias precalculadas, tomando en cuenta la dificultad de problemas como la pérdida de observabilidad del MI a baja velocidad.

La principal motivación de este banco de pruebas (Figura 2.4) es analizar el desempeño en trayectorias precalculadas del esquema *Observador-Control* tomando en cuenta los problemas de observabilidad del MI a muy baja velocidad. Específicamente, los valores iniciales de la velocidad mecánica y el par de carga se mantienen en cero para permitir que el flujo se estabilice en el motor. En $t = 0.75$ s la velocidad del motor se incrementa a 20 rad/s y permanece constante hasta $t = 3$ s. Entonces se aplica el par de carga entre los segundos 1.5 s y 2.5 s.

En la primera fase se prueba y evalúa el desempeño de la ley de control sin sensores a baja velocidad con carga. Se acelera el motor hasta que alcance una velocidad alta (100 rad/s), después en $t = 5$ s, se vuelve a aplicar el par de carga.

La segunda fase apunta a probar el comportamiento de la ley de control durante un largo transitorio de velocidad, robustez y alta velocidad. Entonces, mientras se mantiene el par de carga, el motor se desacelera rápidamente alcanzando en $t = 7$ s una velocidad baja negativa, manteniéndose constante hasta $t = 9$ s. Esta velocidad fue elegida para obtener una frecuencia del estator igual a cero. Esta última fase resaltaré el fenómeno de inobservabilidad del motor cuando se tienen una velocidad baja constante y una frecuencia del estator igual a cero. Por último, las trayectorias llevan al MI fuera de las condiciones de inobservabilidad.

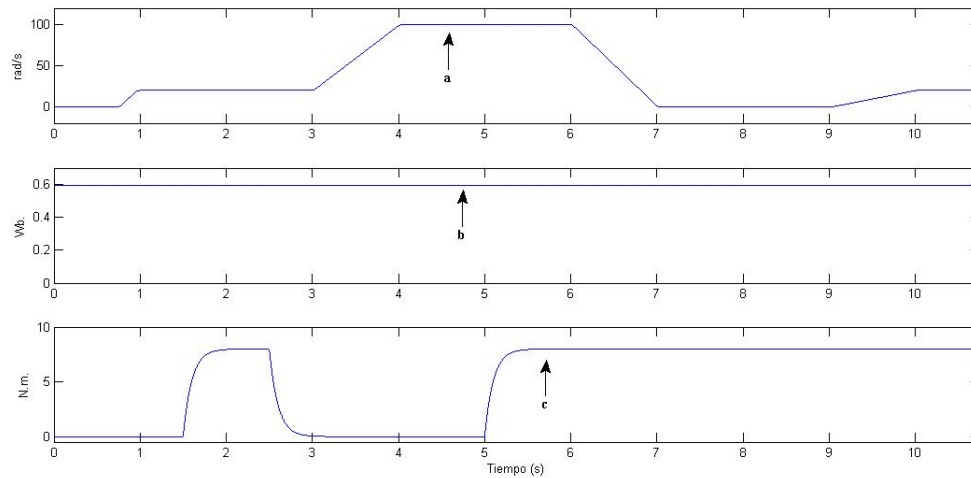


Figura 2.4. Banco de prueba *Control sin sensor mecánico*: a) velocidad de referencia Ω^* (rad/s), b) flujo de referencia ϕ^* (Wb) , c) par de carga T_l (N.m) .

En este capítulo se presentó el modelo matemático del comportamiento dinámico del MI. En base al modelo matemático, se realizó un estudio sobre la propiedad de observabilidad del MI bajo diferentes condiciones de operación, para determinar la zona en que el sistema es observable. Como consecuencia de éste se determinó bajo cuales condiciones es posible diseñar un observador cuando el MI no considera sensores mecánicos para medir la velocidad. De igual forma se mostró el banco de pruebas *Control sin sensor mecánico*, el cual será utilizado para eventualmente validar el funcionamiento del esquema *Observador-Control*.

Capítulo 3

Control y observador por modos deslizantes

En este capítulo se diseñará un algoritmo de control basado en la técnica de modos deslizantes de orden superior para una clase de sistemas no lineales. Puesto que en general, no se dispone de toda la información del vector de estado del sistema y para poder implementar esta estrategia de control es necesario reconstruirlo, se proponen observadores basado en modos deslizantes de primer y segundo orden para estimar las variables no medibles del sistema no lineal.

3.1. Introducción

El control por modos deslizantes es un esquema de control robusto basado en el concepto de una estructura variable del control en respuesta a los cambios de estado del sistema, con la finalidad de obtener la dinámica deseada. Entre las características principales de los modos deslizantes estándar se encuentran su alta precisión y robustez con respecto a perturbaciones internas y externas.

Se utiliza una ley de control con alta velocidad de conmutación entre diferentes estructuras

y la trayectoria del sistema es forzada a moverse a través de una determinada superficie de conmutación o variedad en el espacio de estado. El comportamiento del sistema en lazo cerrado es determinado por la superficie deslizante. Cabe mencionar que el control por modos deslizantes permite la separación del movimiento del sistema completo en componentes parciales independientes de dimensiones más bajas y reduce la sensibilidad a las variaciones de los parámetros de la planta y perturbaciones.

El problema que presenta es el fenómeno del *chattering*, i.e. peligrosas vibraciones de alta frecuencia en el sistema controlado. Para solucionar este inconveniente y mejorar el desempeño del controlador se propone un enfoque llamado *Modo deslizante de alto orden* en [6], [7] y [8]. En lugar de actuar en la primera derivada de la superficie deslizante, la función *signo* actúa en sus derivadas con respecto al tiempo de alto orden. El efecto del *chattering* se atenúa y se provee de precisión de alto orden, manteniendo las ventajas principales del control por modos deslizantes estándar [8].

3.2. Observador por modos deslizantes

Un observador por modos deslizantes es aquel que tiene como entradas funciones discontinuas del error entre las salidas estimadas y medidas. La reconstrucción del estado se puede lograr mediante la aplicación del modo deslizante. Como bien sabemos, la dinámica del sistema en el modo deslizante está en función de las superficies elegidas en el espacio de estados y no se ve afectada por la incertidumbre. Afortunadamente, en estos observadores se pueden aprovechar las ventajas de la metodología del control por modos deslizantes tales como reducción de orden, rechazo de perturbaciones y robustez fuerte.

Se ha elegido el uso de observadores por modos deslizantes ya que provee un tiempo de convergencia finito para los estados estimados [9].

3.2.1. Síntesis del Observador por modos deslizantes de primer y segundo orden

Tomando en cuenta las suposiciones comunes tenemos que el modelo del motor de inducción (MI) en el marco de referencia ortogonal del estator (α, β) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{s\alpha} \\ \dot{i}_{s\beta} \\ \dot{\phi}_{r\alpha} \\ \dot{\phi}_{r\beta} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba\phi_{r\alpha} + bp\Omega\phi_{r\beta} - \gamma i_{s\alpha} \\ ba\phi_{r\beta} - bp\Omega\phi_{r\alpha} - \gamma i_{s\beta} \\ -a\phi_{r\alpha} - p\Omega\phi_{r\beta} + aM_{sr}i_{s\alpha} \\ -a\phi_{r\beta} + p\Omega\phi_{r\alpha} + aM_{sr}i_{s\beta} \\ m(\phi_{r\alpha}i_{s\beta} - \phi_{r\beta}i_{s\alpha}) - c\Omega - \frac{1}{J}T_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

con: $x = [i_{s\alpha} \ i_{s\beta} \ \phi_{r\alpha} \ \phi_{r\beta} \ \Omega]^T$, donde $i_{s\alpha}$, $i_{s\beta}$, $\phi_{r\alpha}$, $\phi_{r\beta}$, $u_{s\alpha}$, $u_{s\beta}$, Ω , T_l , son las corrientes del estator, flujos del rotor, entradas de voltaje del estator, velocidad angular y par de carga respectivamente. Los subíndices s y r se refieren al estator y rotor respectivamente. Los parámetros a , b , c , γ , σ , m y m_1 se definen como: $a = R_r/L_r$, $b = M_{sr}/\sigma L_s L_r$, $c = f_v/J$, $\gamma = (L_r^2 R_s + M_{sr}^2 R_r)/\sigma L_s L_r^2$, $\sigma = 1 - (M_{sr}^2/L_s L_r)$, $m = pM_{sr}/JL_r$, y $m_1 = 1/\sigma L_s$, respectivamente. R_s y R_r son las resistencias, L_s y L_r las inductancias propias y M_{sr} la inductancia mutua entre los devanados del estator y el rotor, p es el número de pares de polos, J es la inercia del sistema (motor y carga) y f_v es el coeficiente de amortiguamiento viscoso.

Sea la inversa de la Transformación de Park dada por:

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = P(\xi) \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

donde $P(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix}$.

Se define $\xi = \rho$, donde ρ es la posición angular del marco de referencia dq con respecto al marco de referencia fijo del estator $\alpha\beta$ donde se definen las variables físicas. De esta forma se obtienen las corrientes y voltajes del estator, los cuales son necesarios para la realización del

observador, tal como se muestra:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{s\alpha} \\ \dot{i}_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\rho) & -\text{sen}(\rho) \\ \text{sen}(\rho) & \cos(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\rho) & -\text{sen}(\rho) \\ \text{sen}(\rho) & \cos(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

Se propone el siguiente estimador del par de carga:

$$\begin{aligned} \hat{T}_l &= \hat{T}_{l_0} \text{sign} [k_1 m [-\hat{\phi}_{r\alpha} (\hat{i}_{s\beta} - i_{s\beta}) + \hat{\phi}_{r\beta} (\hat{i}_{s\alpha} - i_{s\alpha})]] - k_2 \\ &= \hat{T}_{l_0} \text{sign} [k_1 m [-\hat{\phi}_{r\alpha} \tilde{i}_{s\beta} + \hat{\phi}_{r\beta} \tilde{i}_{s\alpha}]] - k_2 \end{aligned}$$

donde: $\tilde{i}_{s\alpha, s\beta} = \hat{i}_{s\alpha, s\beta} - i_{s\alpha, s\beta}$ son los errores en la estimación de las corrientes, \hat{T}_{l_0} es una constante, $m = pM_{sr}/JL_r$, $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ son constantes.

A continuación se muestran los observadores por modos deslizantes de corrientes del estator y flujos del rotor de primer y segundo orden [9], en donde hemos aportado la ecuación para estimar la velocidad mecánica:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{i}}_{s\alpha} &= ba\hat{\phi}_{r\alpha} + bp\hat{\Omega}\hat{\phi}_{r\beta} - \gamma\dot{i}_{s\alpha} + m_1 u_{s\alpha} + K_{F1}\mu \\ \dot{\hat{i}}_{s\beta} &= ba\hat{\phi}_{r\beta} - bp\hat{\Omega}\hat{\phi}_{r\alpha} - \gamma\dot{i}_{s\beta} + m_1 u_{s\beta} + K_{F2}\mu \\ \dot{\hat{\phi}}_{r\alpha} &= -a\hat{\phi}_{r\alpha} - p\hat{\Omega}\hat{\phi}_{r\beta} + aM_{sr}\dot{i}_{s\alpha} + K_{F3}\mu \\ \dot{\hat{\phi}}_{r\beta} &= -a\hat{\phi}_{r\beta} + p\hat{\Omega}\hat{\phi}_{r\alpha} + aM_{sr}\dot{i}_{s\beta} + K_{F4}\mu \\ \dot{\hat{\Omega}} &= m(\hat{\phi}_{r\alpha}\dot{i}_{s\beta} - \hat{\phi}_{r\beta}\dot{i}_{s\alpha}) - c\hat{\Omega} - \frac{1}{J}\hat{T}_l + \hat{\omega} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Para seleccionar $\hat{\omega}$ y μ se siguen los principios de la teoría de modos deslizantes. Primero definimos las superficies de deslizamiento s_n y s_μ como funciones no lineales de los errores de estimación de las corrientes del estator y la estimación de flujo del rotor:

$$s_n = \tilde{i}_{s\beta}\hat{\phi}_{r\alpha} - \tilde{i}_{s\alpha}\hat{\phi}_{r\beta} \quad (3.2.6)$$

$$s_\mu = \tilde{i}_{s\alpha}\hat{\phi}_{r\alpha} + \tilde{i}_{s\beta}\hat{\phi}_{r\beta} \quad (3.2.7)$$

A continuación se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{s}_n &= b\omega(\hat{\phi}_\alpha\phi_\alpha + \hat{\phi}_\beta\phi_\beta) - b\hat{\omega}(\hat{\phi}_\alpha^2 + \hat{\phi}_\beta^2) + (K_{F2}\hat{\phi}_\alpha - K_{F1}\hat{\phi}_\beta)\mu - \hat{\omega}s_\mu \\ &+ ba(\hat{\phi}_\alpha\tilde{\phi}_\beta - \hat{\phi}_\beta\tilde{\phi}_\alpha) - a(s_n + M_{sr}(i_\beta\tilde{i}_\alpha - i_\alpha\tilde{i}_\beta)) + (K_{F3}\tilde{i}_\beta - K_{F4}\tilde{i}_\alpha)\mu\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned}\dot{s}_\mu &= ba(\hat{\phi}_\alpha^2 + \hat{\phi}_\beta^2) - ba(\hat{\phi}_\alpha\phi_\alpha + \hat{\phi}_\beta\phi_\beta) - b\omega(\hat{\phi}_\alpha\phi_\beta - \hat{\phi}_\beta\phi_\alpha) + (K_{F1}\hat{\phi}_\alpha + K_{F2}\hat{\phi}_\beta)\mu \\ &- a(s_\mu - M_{sr}(i_\alpha\tilde{i}_\alpha + i_\beta\tilde{i}_\beta)) - \hat{\omega}s_n + (K_{F3}\tilde{i}_\alpha + K_{F4}\tilde{i}_\beta)\mu\end{aligned}\quad (3.2.9)$$

Sean definidos los términos K_{Fi} con $i = 1, \dots, 4$; como:

$$\begin{aligned}K_{F1} &= -b\hat{\phi}_{r\alpha} \\ K_{F2} &= -b\hat{\phi}_{r\beta} \\ K_{F3} &= C\hat{\phi}_{r\beta} \\ K_{F4} &= -C\hat{\phi}_{r\alpha}\end{aligned}\quad (3.2.10)$$

donde $C > 0$ es una constante.

Observador por modos deslizantes de primer orden

Sean $\hat{\omega}$ y la variable auxiliar μ parámetros discontinuos dados por:

$$\hat{\omega} = \omega_0 \operatorname{sign}(s_n) \quad (3.2.11)$$

$$\mu = \mu_0 \operatorname{sign}(s_\mu) \quad (3.2.12)$$

con ω_0, μ_0 constantes.

Observador por modos deslizantes de segundo orden

Sean $\hat{\omega}$ y la variable auxiliar μ parámetros discontinuos dados por:

$$\hat{\omega} = \theta_1 \sqrt{|s_n|} \cdot \text{sign}(s_n) + \omega_1 \quad (3.2.13)$$

$$\dot{\omega}_1 = \varsigma_1 \cdot \text{sign}(s_n) \quad (3.2.14)$$

$$\mu = \theta_2 \sqrt{|s_\mu|} \cdot \text{sign}(s_\mu) + \mu_1 \quad (3.2.15)$$

$$\dot{\mu}_1 = \begin{cases} \mu, & \text{si } |\mu| > G \\ \varsigma_2 \cdot \text{sign}(s_\mu), & \text{si } |\mu| \leq G \end{cases} \quad (3.2.16)$$

donde: $\theta_1 > 0$, $\varsigma_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\varsigma_2 > 0$ son constantes a elegir y $G = \mu_{max}$.

3.3. Control por modos deslizantes de alto orden

Sea $\sigma(x, t)$ ($x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado) la variable deslizante con grado relativo igual a r ; en el caso del modo deslizante de orden r , la idea es forzar al sistema a deslizarse en el siguiente conjunto de condiciones de restricción $\sigma(x, t) = \dot{\sigma}(x, t) = \dots \sigma^{(r-2)}(x, t) = \sigma^{(r-1)}(x, t) = 0$ donde $r \in \mathbb{N}$ [8]. Muchos trabajos han dado solución para el caso del control por modos deslizantes de segundo orden ($r = 2$) (por ejemplo [6], [7] y [8]). En [10] se da una solución para el caso de un control por modos deslizantes de tercer orden. En [11], [12], [13] y [14] se propuso un controlador de orden arbitrario para sistemas de una entrada-una salida (SISO) con tiempo de convergencia finito. El algoritmo publicado en [11] permite el seguimiento de señales suaves con sólo ajustar un parámetro de ganancia y conociendo el grado relativo de la salida. Ya que el control necesita el conocimiento de las derivadas de alto orden de la salida, el autor propone utilizar un diferenciador robusto con convergencia en tiempo finito basado en el algoritmo *super-twisting* [15], el cual únicamente puede ser acotado. El inconveniente en [11] es

que el método de ajuste de ganancia no está formalizado y no hay una forma exacta de calcular el tiempo de convergencia, el cual únicamente puede ser acotado. En [12] y [14] se presenta un primer intento de diseñar una variedad deslizante, la cual permite el establecimiento del modo deslizante de alto orden y usa control lineal cuadrático. A pesar de las ventajas reales (enfoque constructivo, aplicabilidad práctica [12] y [16]), este enfoque sufre de un inconveniente: el modo deslizante de alto orden es sólo práctico, esto es, el control asegura que las trayectorias alcancen una pequeña vecindad del origen arbitraria en tiempo finito. En [13] y [17], el controlador utiliza el concepto de modo deslizante integral y permite el establecimiento del modo deslizante de orden r . Las ventajas de este método son que la implementación es muy simple, el tiempo de convergencia es fijado *a priori* y que la robustez está asegurada durante toda la respuesta del sistema. Sin embargo, este controlador utiliza una parte en lazo abierto, lo cual puede causar problemas en el caso de mediciones con ruido.

El diseño del controlador combina el control por modos deslizantes estándar con el lineal continuo original en un intervalo de tiempo finito [14]. Como en [11], el problema de control es formulado en términos de entrada-salida sólo a través de la diferenciación de la variable deslizante σ y es equivalente a la estabilización en tiempo finito de una cadena de integradores con incertidumbres no lineales acotadas. Se determina una variedad de conmutación considerando el sistema lineal incierto. El modo deslizante estándar sobre esta variedad conduce al establecimiento de un modo deslizante de orden r en tiempo finito con respecto a σ . El algoritmo necesita el conocimiento del grado relativo del sistema con respecto a σ , las cotas de las incertidumbres y las condiciones iniciales. Las ventajas del algoritmo son:

- El tiempo de convergencia se conoce *a priori* y la ley de control puede ser ajustada arbitrariamente
- El modo deslizante ocurre en el tiempo inicial, lo cual asegura las características de robustez sobre toda la respuesta del sistema

- La estrategia puede ser aplicada para cualquier valor del orden de modo deslizante (mayor o igual al grado relativo).

3.3.1. Formulación del problema

Considere el sistema no lineal incierto [18]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado, $u \in \mathbb{R}$ la entrada de control y $h(x) \in \mathbb{R}$ es la salida definida para satisfacer los objetivos de control. Además, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inciertas suaves. Sea la variable de deslizamiento definida como $s(x, t) = h(x) - h_d(t)$, donde $h_d(t)$ es la trayectoria de referencia deseada suficientemente diferenciable; asuma lo siguiente:

Hipótesis 1: El grado relativo r de (3.3.1) con respecto a $s(x, t)$ se asume conocido y constante y las dinámicas cero asociadas son estables.

El objetivo del control es cumplir con las restricciones $s(x, t) = 0$ en un tiempo finito y mantenerlo así mediante una retroalimentación.

El modo deslizante de orden r se establece mediante la siguiente definición:

Definición 1 [19]: Considere el sistema no lineal (3.3.1) y sea este sistema cerrado por alguna retroalimentación discontinua dinámica. Entonces, con la condición de que $s, \dot{s}, \dots, s^{r-1}$ son funciones continuas y el conjunto:

$$S^r = \{x \mid s(x, t) = \dot{s}(x, t) = \dots = s^{(r-1)}(x, t) = 0\}$$

llamado *conjunto deslizante de orden r* es no vacío y consiste localmente de trayectorias de Filippov; las trayectorias en S^r son llamadas *modo deslizante de orden r* con respecto a la

variable de deslizamiento s .

El enfoque de control por modos deslizantes de orden r permite la estabilización a cero en un tiempo finito de la variable deslizante s y sus primeras $r - 1$ derivadas al definir una función de control discontinua adecuada.

Entonces, la salida s satisface:

$$s^{(r)} = \vartheta(x, t) + \gamma(x)u - h_d^{(r)}(t) := \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x)u \quad (3.3.2)$$

donde $\vartheta(x, t) = L_f^r h(x)$, $\gamma(x) = \varphi_2(x) = L_g L_f^{r-1} h(x)$ y $\varphi_1(x, t) = L_f^r h(x) - h_d^{(r)}(t)$.

Hipótesis 2: Las soluciones son entendidas en el sentido de Filippov [20] y se suponen las trayectorias del sistema infinitamente extendibles en el tiempo para cualquier entrada Lebesgue acotada y medible.

Hipótesis 3: Las funciones $\varphi_1(x, t)$ y $\varphi_2(x)$ son inciertas y acotadas, sin pérdida de generalidad, sea también el signo de $\varphi_2(x)$ estrictamente positivo. Así, existen unas constantes positivas $K_m > 0$, $K_M > 0$ y $C_0 \geq 0$ tales que $0 < K_m < \varphi_2(x) < K_M$ y también $|\varphi_1(x, t)| \leq C_0$, para $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, siendo \mathcal{X} un subconjunto abierto acotado de \mathbb{R}^n en el que la acotación de la dinámica del sistema es asegurada y $t > 0$.

Así, el control por modos deslizantes de orden r de (3.3.1), con respecto a la variable de deslizamiento s , es equivalente a la estabilización en tiempo finito de:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= A_{11}Z_1 + A_{12}Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= \varphi_1 + \varphi_2 u \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

con $Z_1 = [Z_{10} \ Z_{11} \ \cdots \ Z_{1r-2}] := [s \ \dot{s} \ \cdots \ s^{(r-2)}]^T$ y $Z_2 = s^{(r-1)}$. $A_{11(r-1) \times (r-1)}$ y $A_{12(r-1) \times 1}$ son tales que las dinámicas de Z_1 se expresan en la forma lineal de Brunovsky. Bajo la **Hipótesis 3**, el sistema (3.3.3) puede ser visto como una cadena de integradores con términos φ_1 y φ_2 inciertos acotados.

3.3.2. Síntesis de un controlador por modos deslizantes de alto orden

La síntesis del controlador por modos deslizantes de alto orden para (3.3.1) consiste en dos pasos:

1. Diseño de un control lineal con tiempo finito de convergencia, utilizado para *inducir las trayectorias de referencia* en el sistema (3.3.3), y define la variedad deslizante en la cual el sistema se desliza tan pronto como $t = 0$.
2. Diseño de la ley de control discontinua ν , utilizada para mantener las trayectorias del sistema en la variedad deslizante, la cual asegura el establecimiento del modo deslizante de orden r .

Controlador con tiempo finito de convergencia para una clase de sistemas lineales

Considere el sistema lineal bajo la forma de Brunovsky [21]:

$$\dot{\zeta} = A_{11}\zeta + A_{12}w \quad (3.3.4)$$

donde: $\zeta = [\zeta_1 \ \cdots \ \zeta_{r-1}]^T \in \mathbb{R}^{r-1}$ ($r > 1$) es el vector de estados y $w \in \mathbb{R}$ es la entrada de control. El conjunto de condiciones iniciales $\zeta(0)$ es acotado.

Hipótesis 4: Existe un entero j tal que $1 \leq j \leq r - 1$ y $\zeta_{r-j}(0) \neq 0$.

La ley de control w se define como:

$$w = KF^{r-1}e^{Ft}T\zeta_{r-j}(0) \quad (3.3.5)$$

donde: F es una matriz de dimensión $2r \times 2r$ y T es un vector de dimensión $2r \times 1$. La matriz de ganancias K de dimensión $1 \times 2r$ es ajustada de tal forma que el sistema (3.3.4) es estabilizado

en el origen en un tiempo finito $t_F > 0$. Esta matriz permite fijar restricciones en las condiciones finales de ζ_i ($1 \leq i \leq r - 1$) y en las condiciones iniciales y finales de w .

Considere el sistema (3.3.4) bajo la ley de control w . Una solución puede ser ($1 \leq i \leq r - 1$):

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= Ke^{Ft}T\zeta_{r-j}(0) \\
 \zeta_2 &= KF e^{Ft}T\zeta_{r-j}(0) \\
 &\vdots \\
 \zeta_{r-2} &= KF^{r-3}e^{Ft}T\zeta_{r-j}(0) \\
 \zeta_{r-1} &= KF^{r-2}e^{Ft}T\zeta_{r-j}(0)
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

La ganancia K permite fijar arbitrariamente lo siguiente:

1. Las condiciones finales de ζ en $t = t_F$, esto es $\zeta_F := \zeta(t_F)$, con solo tomar en cuenta las condiciones iniciales $\zeta(0)$. Para nuestro caso, el valor final es $\zeta_F = 0$.
2. Las condiciones iniciales y finales de la ley de control w . En nuestro caso, como el objetivo es estabilizar el sistema (3.3.4) en ζ_F en un tiempo finito t_F se tiene que: $w_F := w(t_F) = 0$.

Entonces, se deben resolver $2r$ ecuaciones en K (una ecuación que corresponde a los valores iniciales y finales para cada variable de estado y para la entrada de control). De (3.3.6) se tiene

que ($0 < t_F < \infty$):

$$\begin{aligned}
(a) \quad w(0) &= KF^{r-1}T\zeta_{r-j}(0) \quad \rightarrow \quad KF^{r-1}T\zeta_{r-j}(0) = w(0) \\
(b) \quad w(t_F) &= KF^{r-1}e^{Ft_F}T\zeta_{r-j}(0) \quad \rightarrow \quad KF^{r-1}e^{Ft_F}T = 0 \\
(c) \quad \zeta_{r-1}(0) &= KF^{r-2}T\zeta_{r-j}(0) \quad \rightarrow \quad KF^{r-2}T\zeta_{r-j}(0) = \zeta_{r-1}(0) \\
(d) \quad \zeta_{r-1}(t_F) &= KF^{r-2}e^{Ft_F}T\zeta_{r-j}(0) \quad \rightarrow \quad KF^{r-2}e^{Ft_F}T = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad \zeta_1(0) = KT\zeta_{r-j}(0) \quad \rightarrow \quad KT\zeta_{r-j}(0) = \zeta_1(0) \\
&\qquad\qquad\qquad \zeta_1(t_F) = Ke^{Ft_F}T\zeta_{r-j}(0) \quad \rightarrow \quad Ke^{Ft_F}T = 0
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

- Las ecuaciones (3.3.7a) y (3.3.7b) se derivan de $\dot{\zeta}_{r-1} = w$ y reúnen, a través de K , las condiciones iniciales y finales de ζ_{r-j} y w . Las condiciones finales de $w(t_F)$ se fijan arbitrariamente a 0, esto para asegurar la estabilización del sistema (3.3.4) en el origen para $t \geq t_F$.
- Las ecuaciones (3.3.7c) y (3.3.7d) se derivan de la primera línea de (3.3.6) y cumplen, a través de K , con las condiciones iniciales y finales de ζ_{r-j} y ζ_{r-1} .

Lema 1: Existe una matriz estable (valores propios con parte real negativa) F y una matriz T tales que la matriz \mathcal{K} definida por:

$$\mathcal{K} = [F^{r-1}T\zeta_{r-j}(0) \mid F^{r-1}e^{Ft_F}T \mid F^{r-2}T\zeta_{r-j}(0) \mid F^{r-2}e^{Ft_F}T \mid \cdots \mid T\zeta_{r-j}(0) \mid e^{Ft_F}T] \tag{3.3.8}$$

es invertible.

Del **Lema 1**, como el sistema (3.3.6) de $2r$ ecuaciones es lineal en la matriz de ganancias K de dimensiones $1 \times 2r$, su solución es trivial y existe una única solución:

$$K = [w(0) \ 0 \ \zeta_{r-1}(0) \ 0 \ \cdots \ \zeta_1(0) \ 0] \cdot \mathcal{K}^{-1} \tag{3.3.9}$$

Lema 2: Considere al sistema lineal (3.3.4) con la **Hipótesis 4** cumplida. Entonces la ley de control será:

$$w = \begin{cases} KF^{r-1}e^{Ft}T\zeta_{r-j}(0) & \text{para } 0 \leq t \leq t_F \\ 0 & \text{para } t > t_F \end{cases} \quad (3.3.10)$$

donde: F es una matriz de dimensión $2r \times 2r$ y T es un vector de dimensión $2r \times 1$ que satisfacen el **Lema 1**. La matriz de ganancias K de dimensión $1 \times 2r$ es la solución de (3.3.9) y $0 < t_F < \infty$, aseguran que el sistema (3.3.4) alcance el origen en un tiempo finito t_F .

Nota 5: La **Hipótesis 4** no es restrictiva. Si el vector de estados inicial es igual a 0 significa que el sistema lineal (3.3.4) aún está en el origen: $w = 0$ mantiene al sistema en el origen.

Nota 6: La elección de una matriz F estable y el acotamiento de t_F implica el acotamiento en los valores de K . Se induce que existe $\Theta > 0$ tal que:

$$|KF^{r-1}e^{Ft}T\zeta_{r-j}(0)| < \Theta \quad (3.3.11)$$

Diseño de las trayectorias y la superficie de deslizamiento

En la sección anterior se presentó la generación de una trayectoria mediante un control lineal. Considere lo siguiente: $Z_1 = [Z_{10} \ Z_{11} \ \cdots \ Z_{1r-2}]^T := [s \ \dot{s} \ \cdots \ s^{r-2}]^T (r > 1)$,

$$\dot{Z}_1 = A_{11}Z_1 + A_{12}Z_2 \quad (3.3.12)$$

y el Z_2 es el estado y la entrada del sistema (3.3.12); suponga lo siguiente:

Hipótesis 5: Existe un entero j tal que $1 \leq j \leq r$ y $Z_{1r-j} \neq 0$ está acotado.

A partir de los **Lemas 1 y 2**, la ley de control $Z_2 = s^{(r-1)}$ que asegura que $Z_1(t_f) = Z_2(t_f) = 0$ se escribe como:

$$\begin{aligned} Z_2(t) = & KF^{r-1}e^{Ft}TZ_{1r-j}(0) - \lambda_{r-2}[Z_{1r-2} - KTF^{(r-2)}e^{Ft}Z_{1r-j}(0)] \\ & - \cdots - \lambda_0[Z_{10} - KTe^{Ft}Z_{1r-j}(0)] \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

donde: F es una matriz estable de dimensión $2r \times 2r$, T un vector de dimensión $2r \times 1$, K es una matriz de ganancias definida de tal forma que el sistema (3.3.12) se estabiliza en el origen en un tiempo finito t_f . $\lambda_{r-2}, \dots, \lambda_0$ son definidos de tal forma que $P(z) = z^{(r-1)} + \lambda_{r-2}z^{(r-2)} + \dots + \lambda_0$ es un polinomio Hurwitz en la variable z . La matriz de ganancias K se define como:

$$K = [Z_2(0) \ 0 \ Z_{1r-2}(0) \ 0 \ \dots \ Z_{10}(0) \ 0] \cdot \mathcal{K}^{-1} \quad (3.3.14)$$

Hipótesis 6: Existe una constante $\Theta > 0$ tal que, para $0 \leq t \leq t_f$:

$$\begin{aligned} \Theta > & | -KTF^r e^{Ft} Z_{1r-j}(0) + \lambda_{r-2}[Z_{1r-1} - KTF^{r-1} e^{Ft} Z_{1r-j}(0)] \\ & + \dots + \lambda_0[Z_{11} - KTF e^{Ft} Z_{1r-j}(0)]|. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Sea $\sigma(Z, t)$ la superficie de deslizamiento definida por:

$$\begin{aligned} \sigma(Z, t) = & Z_2 - KTF^{r-1} e^{Ft} Z_{1r-j}(0) + \lambda_{r-2}[Z_{1r-2} - KTF^{r-2} e^{Ft} Z_{1r-j}(0)] \\ & + \dots + \lambda_0[Z_{10} - KTF e^{Ft} Z_{1r-j}(0)]. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

El control lineal del sistema (3.3.3) se utiliza para generar la trayectoria deseada de Z_2 . Las dinámicas para obtener la estabilización en tiempo finito del vector $[Z_1^T \ Z_2]^T$ en cero se obtienen de la ecuación $\sigma(Z, t) = 0$. Así, la superficie de deslizamiento en la que el sistema (3.3.1) se desliza vía un control discontinuo ν se define por:

$$S = \{Z \mid \sigma(Z, t) = 0\}. \quad (3.3.17)$$

Considerando la ecuación (3.3.7a) se obtiene $\sigma(Z, 0) = 0$ en el momento inicial y el sistema evoluciona continuamente en la superficie de deslizamiento.

Diseño del control discontinuo

Después de calcular la superficie de deslizamiento que permite la convergencia de un sistema en tiempo finito a cero prestaremos atención a la síntesis de la ley de control discontinua ν que fuerza a las trayectorias de estado del sistema a evolucionar en S . Una vez que la convergencia se establece, la ley de control ν mantiene al sistema en la trayectoria de referencia.

Teorema 1 [21]: Considere el sistema (3.3.1) con grado relativo r con respecto a $s(x, t)$. Suponga las **Hipótesis 1, 2, 3, 4 y 6** se cumplen. Sea r el orden del modo deslizante y t_f el tiempo de convergencia deseado ($0 < t_f < \infty$). Sea $S \in \mathbb{R}$ definido por:

Para $0 \leq t \leq t_f$

$$\begin{aligned} S = & s^{r-1} - KTF^{r-1}e^{Ft}s^{r-j}(0) + \lambda_{r-2}[s^{(r-2)} - KTF^{r-2}e^{Ft}s^{(r-j)}(0)] \\ & + \cdots + \lambda_0[s(x, t) - KTe^{Ft}s^{r-j}(0)]. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Para $t > t_f$

$$S = s^{r-1} + \lambda_{r-2}s^{(r-2)} + \cdots + \lambda_0s(x, t) \quad (3.3.19)$$

donde: K es la solución única de (3.3.14), F es una matriz estable de dimensión $2r \times 2r$, T un vector de dimensión $2r \times 1$ tales que el **Lema 1** es verdadero. Así, la ley de control es definida por:

$$\nu = -\alpha \cdot \text{sign}(S) \quad (3.3.20)$$

donde:

$$\alpha \geq \frac{C_0 + \Theta + \eta}{K_m} \quad (3.3.21)$$

con: C_0 , K_m definidos en la **Hipótesis 3**, Θ definido por (3.3.15) y la condición de atractividad η aseguran el establecimiento de un modo deslizante de orden r con respecto a s . El tiempo de convergencia es t_f .

Prueba del Teorema 1: La estabilización a cero en tiempo finito de $[s \dot{s} \dots s^{(r-1)}]^T$ es alcanzada cuando se da el deslizamiento sobre la superficie definida por:

$$S = \{x \in \mathcal{X} \mid S = 0\}. \quad (3.3.22)$$

La ley de control discontinua que garantiza el deslizamiento sobre la superficie S para $t \geq 0$ satisface la siguiente condición:

$$\dot{S} \cdot S < -\eta |S| \quad (3.3.23)$$

donde: $\eta > 0$ es un valor real positivo; consideremos dos caso:

Para $0 \leq t \leq t_f$

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \varphi_1 + \varphi_2 \cdot \nu - KTF^r e^{Ft} s^{r-j}(0) + \lambda_{r-2}[s^{(r-1)} - KTF^{r-1} e^{Ft} s^{(r-j)}(0)] \\ &+ \dots + \lambda_0[\dot{s} - KTF e^{Ft} s^{r-j}(0)] \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

suponiendo que $S > 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} -\eta &> \varphi_1 - \varphi_2 \cdot \alpha - KTF^r e^{Ft} s^{r-j}(0) + \lambda_{r-2}[s^{(r-1)} - KTF^{r-1} e^{Ft} s^{(r-j)}(0)] \\ &+ \dots + \lambda_0[\dot{s} - KTF e^{Ft} s^{r-j}(0)] \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

según la **Hipótesis 3** se dice que: $0 < K_m < \varphi_2(x) < K_M$ y $|\varphi_1(x, t)| \leq C_0$, así de la ecuación (3.3.25) se tiene que:

$$\alpha > \frac{C_0 + \Theta + \eta}{K_m} \quad (3.3.26)$$

ahora suponiendo que $S < 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \eta &> \varphi_1 - \varphi_2 \cdot \alpha - KTF^r e^{Ft} s^{r-j}(0) + \lambda_{r-2}[s^{(r-1)} - KTF^{r-1} e^{Ft} s^{(r-j)}(0)] \\ &+ \dots + \lambda_0[\dot{s} - KTF e^{Ft} s^{r-j}(0)] \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

según la **Hipótesis 3** se dice que: $0 < K_m < \varphi_2(x) < K_M$ y $|\varphi_1(x, t)| \leq C_0$, así de la ecuación (3.3.27) se tiene que:

$$\alpha > \frac{C_0 + \Theta + \eta}{K_m} \quad (3.3.28)$$

Para $t > t_f$

$$\dot{S} = \varphi_1 + \varphi_2 \cdot \nu + \lambda_{r-2}s^{(r-1)} + \dots + \lambda_0 \dot{s} \quad (3.3.29)$$

suponiendo que $S > 0$ se tiene que:

$$-\eta > \varphi_1 - \varphi_2 \cdot \alpha + \lambda_{r-2}s^{(r-1)} + \dots + \lambda_0 \dot{s} \quad (3.3.30)$$

según la **Hipótesis 3** se dice que: $0 < K_m < \varphi_2(x) < K_M$ y $|\varphi_1(x, t)| \leq C_0$, así de la ecuación (3.3.30) se tiene que:

$$\alpha > \frac{C_0 + \Theta + \eta}{K_m} \quad (3.3.31)$$

ahora suponiendo que $S < 0$ tenemos:

$$\eta > \varphi_1 - \varphi_2 \cdot \alpha + \lambda_{r-2}s^{(r-1)} + \dots + \lambda_0 \dot{s} \quad (3.3.32)$$

según la **Hipótesis 3** se dice que: $0 < K_m < \varphi_2(x) < K_M$ y $|\varphi_1(x, t)| \leq C_0$, así de la ecuación (3.3.32) se obtiene la siguiente condición suficiente:

$$\alpha > \frac{C_0 + \Theta + \eta}{K_m} \quad (3.3.33)$$

La condición $\dot{S} \cdot S < -\eta |S|$ es válida utilizando la ley de control $\nu = -\alpha \cdot \text{sign}(S)$ y respetando la desigualdad de ganancia $\alpha > \frac{C_0 + \Theta + \eta}{K_m}$.

Implementación del control discontinuo

La ley de control discontinua ν se escribe:

- Para $0 \leq t \leq t_f$ el control discontinuo es $\nu = -\alpha \cdot \text{sign}(S)$. En el instante $t = t_f$ el sistema satisface $s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots s^{(r-1)} = 0$.

- Para $t > t_f$, el objetivo consiste en mantener al sistema en el estado $s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots s^{(r-1)} = 0$, lo cual se logra gracias al control discontinuo $\nu = -\alpha \cdot \text{sign}(s^{(r-1)} + \lambda_{r-2}s^{(r-2)} + \dots + \lambda_0 s)$.

3.4. Aplicación al motor de inducción

La dinámica del modelo del motor de inducción (MI) está descrita en términos de sus ecuaciones en los ejes de rotación dq y está representada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \\ \dot{\phi}_{rd} \\ \dot{\phi}_{rq} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{T}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba\phi_{rd} + bp\Omega\phi_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq} \\ ba\phi_{rq} - bp\Omega\phi_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd} \\ -a\phi_{rd} + (\omega_s - p\Omega)\phi_{rq} + aM_{sr}i_{sd} \\ -a\phi_{rq} - (\omega_s - p\Omega)\phi_{rd} + aM_{sr}i_{sq} \\ m(\phi_{rd}i_{sq} - \phi_{rq}i_{sd}) - c\Omega - \frac{1}{J}T_l \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

con $x = [i_{sd} \ i_{sq} \ \phi_{rd} \ \phi_{rq} \ \Omega \ T_l]^T$, donde i_{sd} , i_{sq} , ϕ_{rd} , ϕ_{rq} , u_{sd} , u_{sq} , Ω , T_l , y ω_s son las corrientes del estator, flujos del rotor, entradas de voltaje del estator, velocidad angular, par de carga y frecuencia del estator respectivamente. Los subíndices s y r se refieren al estator y rotor respectivamente. Los parámetros a , b , c , γ , σ , m y m_1 se definen como: $a = R_r/L_r$, $b = M_{sr}/\sigma L_s L_r$, $c = f_v/J$, $\gamma = (L_r^2 R_s + M_{sr}^2 R_r)/\sigma L_s L_r^2$, $\sigma = 1 - (M_{sr}^2/L_s L_r)$, $m = pM_{sr}/JL_r$, y $m_1 = 1/\sigma L_s$, respectivamente. R_s y R_r son las resistencias, L_s y L_r las inductancias propias y M_{sr} la inductancia mutua entre los devanados del estator y el rotor, p es el número de pares de polos, J es la inercia del sistema (motor y carga), y f_v es el coeficiente de amortiguamiento viscoso. Sea $\gamma_1 = \gamma - m_1 R_s$, ρ ($\dot{\rho} = \omega_s$) y ω_s son la posición angular y velocidad angular respectivamente del marco de referencia dq con respecto al marco de referencia fijo del estator $\alpha\beta$ donde se definen las variables físicas.

Nota 7: El par de carga es una variable de valor desconocido, sólo está disponible su cota. La resistencia del estator cambia con la temperatura.

Sea \mathcal{D} el dominio de operación físico del MI definido por el conjunto de siguientes valores:

$$\mathcal{D} = \{X \in R^7 \mid \phi_{rd} \leq \Phi_d^{max}, |\phi_{rq}| \leq \Phi_q^{max}, |i_{sd}| \leq I_d^{max}, |i_{sq}| \leq I_q^{max}, |\Omega| \leq \Omega^{max}, |T_l| \leq T_l^{max}, |R_s| \leq R_s^{max}\}$$

con $X = [\phi_{rd} \ \phi_{rq} \ i_{sd} \ i_{sq} \ \Omega \ T_l \ R_s]^T$ y $\Phi_d^{max}, \Phi_q^{max}, I_d^{max}, I_q^{max}, \Omega^{max}, T_l^{max}$ y R_s^{max} que son los valores máximos de los flujos, corrientes, velocidad, par de carga y resistencia del estator, respectivamente.

Denote a ϕ^* y Ω^* como las señales suaves y acotadas de referencia para las variables de salida, Ω la velocidad y $\sqrt{\phi_{rd}^2 + \phi_{rq}^2}$ el módulo del flujo del rotor respectivamente. Tomando en cuenta la estrategia de control de campo orientado (*Field oriented control, FOC*) [22] ($\|\phi_{rd}\| = \sqrt{\phi_{rd}^2 + \phi_{rq}^2}, \phi_{rq} = 0$), tenemos que el torque electromagnético será:

$$T_e = \frac{pM_{sr}}{L_r} \phi_{rd} i_{sq} \quad (3.4.2)$$

el cual es proporcional al producto de las variables de estado ϕ_{rd} y i_{sq} . En (3.4.2) se puede observar que existe una relación lineal entre la variable i_{sq} y la dinámica de la velocidad al mantener constante la magnitud del flujo del rotor.

Antes de iniciar con el diseño del controlador se tiene que estimar la frecuencia del estator ω_s . Como se utiliza la estrategia de control *FOC*, tenemos que $\phi_{rq} \equiv 0$, lo cual arroja que [23]:

$$\omega_s = p\Omega + \frac{aM_{sr}}{\phi_{rd}} i_{sq} \quad (3.4.3)$$

Para limitar el efecto de las incertidumbres en la estimación de ω_s y para obtener $\phi_{rq} \equiv 0$ se tiene que:

$$\tilde{\omega}_s = p\hat{\Omega} + \frac{aM_{sr}}{\hat{\phi}_{rd}} i_{sq} - \frac{(i_{sq} - \hat{i}_{sq})}{\beta_1 \hat{\phi}_{rd}} k_{\omega_s} \quad (3.4.4)$$

donde $\tilde{\omega}_s$ es el estimado de la frecuencia del estator, $\beta_1 = M_{sr}/\sigma L_s L_r$ y $k_{\omega_s} > 0$.

Se busca diseñar un control de flujo y velocidad robusto con respecto a las incertidumbres y perturbaciones. Se define $\sigma_\phi = \phi_{rd} - \phi^*$ y $\sigma_\Omega = \Omega - \Omega^*$ como las variables de deslizamiento. De (3.4.1) tenemos que el grado relativo de σ_ϕ y σ_Ω con respecto a u es $r = 2$, lo cual implica que al menos se necesita diseñar un controlador por modos deslizantes de segundo orden para el flujo y la velocidad. Con la finalidad de evitar el efecto del *chattering* y mejorar la robustez del controlador se diseñarán controladores de tercer orden ($r = 3$) para las dos salidas, lo cual significa que el término discontinuo es aplicado a $\sigma_\phi^{(3)}$ y $\sigma_\Omega^{(3)}$ a través de \dot{u} .

Sea el sistema (3.4.1) representado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_2 \\ bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_1 \\ -ax_3 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) x_4 + aM_{sr}x_1 \\ -ax_4 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) x_3 + aM_{sr}x_2 \\ m(x_3x_2 - x_4x_1) - cx_5 - \frac{x_6}{J} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

donde: $X = [i_{sd} \ i_{sq} \ \phi_{rd} \ \phi_{rq} \ \Omega \ Tl]^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$ y $w_s = p\Omega + aM_{sr} \left(\frac{i_{sq}}{\phi_{rd}} \right) = px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right)$.

y:

$$f(x) = \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_2 \\ bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_1 \\ -ax_3 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) x_4 + aM_{sr}x_1 \\ -ax_4 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) x_3 + aM_{sr}x_2 \\ m(x_3x_2 - x_4x_1) - cx_5 - \frac{x_6}{J} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\sigma_\phi = \phi_{rd} - \phi^* = x_3 - \phi^*$, donde $r = 2$. Se tiene que:

$$\ddot{\sigma}_\phi = \varphi_{\alpha_1}(\cdot) + \varphi_{\beta_1}(\cdot)u \quad (3.4.6)$$

donde: $\varphi_{\alpha_1}(\cdot) = L_f^2 \sigma_\phi$ y $\varphi_{\beta_1}(\cdot) = L_g L_f \sigma_\phi$.

$$\text{Así: } \varphi_{\alpha_1}(\cdot) = L_f \left\{ \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial x} f(x) \right\},$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial x} f(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_2 \\ bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_1 \\ -ax_3 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) x_4 + aM_{sr}x_1 \\ -ax_4 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) x_3 + aM_{sr}x_2 \\ m(x_3x_2 - x_4x_1) - cx_5 - \frac{x_6}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \dot{x}_3. \end{aligned}$$

$$\text{Ahora, } L_f\{\dot{x}_3\} = \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x} f(x),$$

$$\text{donde: } \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x} = \begin{bmatrix} aM_{sr} & aM_{sr} \left(\frac{x_4}{x_3} \right) & -a - aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) x_4 & px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x} f(x) &= aM_{sr} \left(bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_2 \right) \\ &+ aM_{sr} \left(\frac{x_4}{x_3} \right) \left(bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_1 \right) \\ &- a\dot{x}_3 - aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) x_4 \dot{x}_3 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) \dot{x}_4. \end{aligned}$$

Al reducir el resultado anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x} f(x) &= -a\dot{x}_3 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) \dot{x}_4 \\ &+ \frac{aM_{sr}x_4 \left[\left(bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_1 \right) x_3 - x_2\dot{x}_3 \right]}{x_3^2} \\ &+ aM_{sr} \left(bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_2 \right). \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_1} &= -a\dot{\phi}_{rd} + (\omega_s - p\Omega)\dot{\phi}_{rq} + aM_{sr}(ba\phi_{rd} + bp\Omega\phi_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq}) \\ &+ aM_{sr}\phi_{rq} \frac{[(ba\phi_{rq} - bp\Omega\phi_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd})\phi_{rd} - i_{sq}\dot{\phi}_{rd}]}{\phi_{rd}^2}. \end{aligned}$$

Ahora: $\varphi_{\beta_1}(\cdot) = L_g L_f \sigma_\phi = L_g \left\{ \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial x} f(x) \right\},$

donde: $\frac{\partial \sigma_\phi}{\partial x} f(x) = \frac{\partial x_3}{\partial x} f(x) = \dot{x}_3.$

Entonces: $L_g \{ \dot{x}_3 \} = \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x} g(x),$

donde: $\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x} = \left[aM_{sr} \quad aM_{sr} \left(\frac{x_4}{x_3} \right) \quad -a - aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) x_4 \quad px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \quad 0 \quad 0 \right].$

Así:

$$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x} g(x) = \left[am_1 M_{sr} \quad am_1 M_{sr} \left(\frac{x_4}{x_3} \right) \right].$$

De esta forma tenemos que:

$$\varphi_{\beta_1} = \left[am_1 M_{sr} \quad am_1 M_{sr} \left(\frac{\phi_{rq}}{\phi_{rd}} \right) \right].$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\ddot{\sigma}_\phi &= -a\dot{\phi}_{rd} + (\omega_s - p\Omega)\dot{\phi}_{rq} + aM_{sr}(ba\phi_{rd} + bp\Omega\dot{\phi}_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq}) \\
&+ aM_{sr}\phi_{rq} \frac{[(ba\dot{\phi}_{rq} - bp\Omega\dot{\phi}_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd})\phi_{rd} - i_{sq}\dot{\phi}_{rd}]}{\phi_{rd}^2} - \ddot{\phi}^* \\
&+ \begin{bmatrix} am_1 M_{sr} & am_1 M_{sr} \left(\frac{\phi_{rq}}{\phi_{rd}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

A continuación realizamos lo siguiente:

Sea $\sigma_\Omega = \Omega - \Omega^* = x_5 - \Omega^*$, donde $r = 2$. Se tiene que:

$$\ddot{\sigma}_\Omega = \varphi_{\alpha_2}(\cdot) + \varphi_{\beta_2}(\cdot)u \tag{3.4.8}$$

donde: $\varphi_{\alpha_2}(\cdot) = L_f^2 \sigma_\Omega$ y $\varphi_{\beta_2}(\cdot) = L_g L_f \sigma_\Omega$.

Así: $\varphi_{\alpha_2}(\cdot) = L_f \left\{ \frac{\partial \sigma_\Omega}{\partial x} f(x) \right\}$,

entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\Omega}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_2 \\ bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_1 \\ -ax_3 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) x_4 + aM_{sr}x_1 \\ -ax_4 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) - px_5 \right) x_3 + aM_{sr}x_2 \\ m(x_3x_2 - x_4x_1) - cx_5 - \frac{x_6}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \dot{x}_5.
\end{aligned}$$

Ahora, $L_f \{ \dot{x}_5 \} = \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x} f(x)$,

donde: $\frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x} = \begin{bmatrix} -mx_4 & mx_3 & mx_2 & -mx_1 & -c & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}$.

Así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x} f(x) &= -mx_4 \left(bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_2 \right) \\ &+ mx_3 \left(bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_1 \right) \\ &+ mx_2 \dot{x}_3 - mx_1 \dot{x}_4 - c\dot{x}_5 - \frac{1}{J} \dot{x}_6. \end{aligned}$$

Al reducir el resultado anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x} f(x) &= m[x_2 \dot{x}_3 + x_3 \left(bax_4 - bpx_5x_3 - \gamma x_2 - \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_1 \right) \\ &- x_1 \dot{x}_4 - x_4 \left(bax_3 + bpx_5x_4 - \gamma x_1 + \left(px_5 + aM_{sr} \left(\frac{x_2}{x_3} \right) \right) x_2 \right)] \\ &- c\dot{x}_5 - \frac{1}{J} \dot{x}_6. \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_2} &= m[i_{sq} \dot{\phi}_{rd} + \phi_{rd}(ba\phi_{rq} - bp\Omega\phi_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd}) \\ &- i_{sd} \dot{\phi}_{rq} - \phi_{rq}(ba\phi_{rd} + bp\Omega\phi_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq})] \\ &- c\dot{\Omega} - \frac{1}{J} \dot{T}_l. \end{aligned}$$

Ahora: $\varphi_{\beta_2}(\cdot) = L_g L_f \sigma_\Omega = L_g \left\{ \frac{\partial \sigma_\Omega}{\partial x} f(x) \right\}$,

donde: $\frac{\partial \sigma_\Omega}{\partial x} f(x) = \frac{\partial x_5}{\partial x} f(x) = \dot{x}_5$.

Entonces: $L_g \{ \dot{x}_5 \} = \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x} g(x)$,

donde: $\frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x} = \left[-mx_4 \quad mx_3 \quad mx_2 \quad -mx_1 \quad -c \quad -\frac{1}{J} \right]$.

Así:

$$\frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x} g(x) = \left[-mm_1x_4 \quad mm_1x_3 \right].$$

De esta forma tenemos que:

$$\varphi_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -mm_1\dot{\phi}_{rq} & mm_1\dot{\phi}_{rd} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_\Omega &= m[i_{sq}\dot{\phi}_{rd} + \phi_{rd}(ba\dot{\phi}_{rq} - bp\Omega\dot{\phi}_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd}) \\ &\quad - i_{sd}\dot{\phi}_{rq} - \phi_{rq}(ba\dot{\phi}_{rd} + bp\Omega\dot{\phi}_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq})] \\ &\quad - c\dot{\Omega} - \frac{1}{J}\dot{T}_l - \ddot{\Omega}^* + \begin{bmatrix} -mm_1\dot{\phi}_{rq} & mm_1\dot{\phi}_{rd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Sea:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_{rd} \\ \ddot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha_1} \\ \varphi_{\alpha_2} \end{bmatrix} + \varphi_\beta \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} \quad (3.4.10)$$

donde:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_1} &= -a\dot{\phi}_{rd} + (\omega_s - p\Omega)\dot{\phi}_{rq} + aM_{sr}(ba\dot{\phi}_{rd} + bp\Omega\dot{\phi}_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq}) \\ &\quad + aM_{sr}\phi_{rq} \frac{[(ba\dot{\phi}_{rq} - bp\Omega\dot{\phi}_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd})\phi_{rd} - i_{sq}\dot{\phi}_{rd}]}{\phi_{rd}^2} \\ \varphi_{\alpha_2} &= m[i_{sq}\dot{\phi}_{rd} + \phi_{rd}(ba\dot{\phi}_{rq} - bp\Omega\dot{\phi}_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd}) \\ &\quad - i_{sd}\dot{\phi}_{rq} - \phi_{rq}(ba\dot{\phi}_{rd} + bp\Omega\dot{\phi}_{rq} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq})] \\ &\quad - c\dot{\Omega} - \frac{1}{J}\dot{T}_l \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$$\varphi_\beta = \begin{bmatrix} am_1M_{sr} & am_1M_{sr} \left(\frac{\phi_{rq}}{\phi_{rd}} \right) \\ -mm_1\dot{\phi}_{rq} & mm_1\dot{\phi}_{rd} \end{bmatrix}. \quad (3.4.12)$$

Debido al control de campo orientado se tiene que $\phi_{rq} = 0$, lo cual permite reescribir a φ_{α_1} , φ_{α_2} y φ_β como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_1} &= -a\dot{\phi}_{rd} + aM_{sr}(ba\dot{\phi}_{rd} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq}). \\ \varphi_{\alpha_2} &= m[i_{sq}\dot{\phi}_{rd} + \phi_{rd}(-bp\Omega\dot{\phi}_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd})] - c\dot{\Omega} - \frac{1}{J}\dot{T}_l. \end{aligned}$$

$$\varphi_\beta = \begin{bmatrix} am_1 M_{sr} & 0 \\ 0 & mm_1 \phi_{rd} \end{bmatrix}.$$

Como existen incertidumbres en varios parámetros se puede decir que:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_1} &= \varphi_{\alpha_1}^{Nom} + \Delta\varphi_{\alpha_1} \\ \varphi_{\alpha_2} &= \varphi_{\alpha_2}^{Nom} + \Delta\varphi_{\alpha_2} \\ \varphi_\beta &= \varphi_\beta^{Nom} + \Delta\varphi_\beta \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

tal que $\varphi_{\alpha_1}^{Nom}$, $\varphi_{\alpha_2}^{Nom}$ y φ_β^{Nom} son los valores nominales que se conocen a la perfección, mientras que $\Delta\varphi_{\alpha_1}$, $\Delta\varphi_{\alpha_2}$ y $\Delta\varphi_\beta$ contiene todas las incertidumbres debidas a las variaciones en los parámetros y las perturbaciones. Se supone que las incertidumbres son acotadas.

Así, la entrada de control u que se aplica al MI definida a partir de los valores nominales $\varphi_{\alpha_1}^{Nom}$, $\varphi_{\alpha_2}^{Nom}$ y φ_β^{Nom} , que son las cantidades φ_{α_1} , φ_{α_2} y φ_β sin incertidumbres paramétricas está dada por:

$$\begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} = \varphi_\beta^{Nom-1} \left[- \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{Nom} \\ \varphi_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} \right] \quad (3.4.14)$$

donde φ_β^{Nom} es invertible en el dominio de trabajo ($\phi_{rd} \neq 0$). Ésta retroalimentación permite la minimización de los valores de ganancia de la función discontinua de control.

Así, de (3.4.10), (3.4.13) y (3.4.14) tenemos que la dinámica de la variable de conmutación

es:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_{rd} \\ \ddot{\Omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{Nom} + \Delta\varphi_{\alpha_1} \\ \varphi_{\alpha_2}^{Nom} + \Delta\varphi_{\alpha_2} \end{bmatrix} + [\varphi_{\beta}^{Nom} + \Delta\varphi_{\beta}] \left[\varphi_{\beta}^{Nom-1} \left[- \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{Nom} \\ \varphi_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \right] \right] \\
&= \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{Nom} + \Delta\varphi_{\alpha_1} \\ \varphi_{\alpha_2}^{Nom} + \Delta\varphi_{\alpha_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[- \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{Nom} \\ \varphi_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \right] \\
&+ \Delta\varphi_{\beta}\varphi_{\beta}^{Nom-1} \left[- \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{Nom} \\ \varphi_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \right] \\
&= \begin{bmatrix} \Delta\varphi_{\alpha_1} \\ \Delta\varphi_{\alpha_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} - \Delta\varphi_{\beta}\varphi_{\beta}^{Nom-1} \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{Nom} \\ \varphi_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \Delta\varphi_{\beta}\varphi_{\beta}^{Nom-1} \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\varphi_{\alpha_1} \\ \Delta\varphi_{\alpha_2} \end{bmatrix} - \Delta\varphi_{\beta}\varphi_{\beta}^{Nom-1} \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{Nom} \\ \varphi_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix}}_{\Psi_{\alpha}} + \underbrace{\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \Delta\varphi_{\beta}\varphi_{\beta}^{Nom-1} \right]}_{\Psi_{\beta}} \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_{rd} \\ \ddot{\Omega} \end{bmatrix} = \Psi_{\alpha} + \Psi_{\beta} \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \quad (3.4.15)$$

$\varphi_{\alpha_1}^{Nom}$, $\varphi_{\alpha_2}^{Nom}$ y φ_{β}^{Nom} son funciones C^1 acotadas en el dominio de operación del motor de inducción \mathcal{D} , lo cual implica que Ψ_{α} y Ψ_{β} son funciones C^1 acotadas inciertas. Así,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_{\phi}^{(3)} \\ \sigma_{\Omega}^{(3)} \end{bmatrix} &= \underbrace{\dot{\Psi}_{\alpha} + \dot{\Psi}_{\beta} \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi^{*(3)} \\ \Omega^{*(3)} \end{bmatrix}}_{\varphi_1} + \underbrace{\dot{\Psi}_{\beta}}_{\varphi_2} \begin{bmatrix} \dot{\nu}_{sd} \\ \dot{\nu}_{sq} \end{bmatrix} \\
&= \varphi_1 + \varphi_2 \cdot \dot{\nu}.
\end{aligned} \quad (3.4.16)$$

3.4.1. Síntesis de la ley de control

La síntesis de la ley de control se realiza en dos pasos: la construcción de la variable de conmutación y la construcción del control discontinuo.

Vector de conmutación

De (3.3.18) y de (3.3.19), así como del **Teorema 1** se elige una superficie de conmutación, que por razones prácticas consiste de un polinomio de posición, velocidad y aceleración. Al aplicar esta corrección de trayectorias, la superficie de deslizamiento se escribe como:

Para $t \leq t_f$

$$S_\phi = \ddot{\sigma}_\phi - \chi_\phi$$

$$S_\Omega = \ddot{\sigma}_\Omega - \chi_\Omega$$

donde:

$$\chi_\phi = K_\phi F^2 e^{Ft} T \sigma_\phi(0) - 2\zeta_\phi \omega_{n\phi} [\dot{\sigma}_\phi - K_\phi F e^{Ft} T \sigma_\phi(0)] - \omega_{n\phi}^2 [\sigma_\phi - K_\phi e^{Ft} T \sigma_\phi(0)]$$

$$\chi_\Omega = K_\Omega F^2 e^{Ft} T \sigma_\Omega(0) - 2\zeta_\Omega \omega_{n\Omega} [\dot{\sigma}_\Omega - K_\Omega F e^{Ft} T \sigma_\Omega(0)] - \omega_{n\Omega}^2 [\sigma_\Omega - K_\Omega e^{Ft} T \sigma_\Omega(0)]$$

Así:

$$S_\phi = \ddot{\sigma}_\phi - K_\phi F^2 e^{Ft} T \sigma_\phi(0) + 2\zeta_\phi \omega_{n\phi} [\dot{\sigma}_\phi - K_\phi F e^{Ft} T \sigma_\phi(0)] + \omega_{n\phi}^2 [\sigma_\phi - K_\phi e^{Ft} T \sigma_\phi(0)]$$

$$S_\Omega = \ddot{\sigma}_\Omega - K_\Omega F^2 e^{Ft} T \sigma_\Omega(0) + 2\zeta_\Omega \omega_{n\Omega} [\dot{\sigma}_\Omega - K_\Omega F e^{Ft} T \sigma_\Omega(0)] + \omega_{n\Omega}^2 [\sigma_\Omega - K_\Omega e^{Ft} T \sigma_\Omega(0)]$$

Para $t > t_f$

$$S_\phi = \ddot{\sigma}_\phi + 2\zeta_\phi \omega_{n\phi} \dot{\sigma}_\phi + \omega_{n\phi}^2 \sigma_\phi$$

$$S_\Omega = \ddot{\sigma}_\Omega + 2\zeta_\Omega \omega_{n\Omega} \dot{\sigma}_\Omega + \omega_{n\Omega}^2 \sigma_\Omega$$

donde:

$$K_\phi = [\ddot{\sigma}_\phi(0) \ 0 \ \dot{\sigma}_\phi(0) \ 0 \ \sigma_\phi(0) \ 0] \cdot \mathcal{K}_\phi^{-1}$$

$$K_\Omega = [\ddot{\sigma}_\Omega(0) \ 0 \ \dot{\sigma}_\Omega(0) \ 0 \ \sigma_\Omega(0) \ 0] \cdot \mathcal{K}_\Omega^{-1}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\phi &= [F^2T\sigma_\phi(0) \quad F^2e^{Ft_f}T \quad FT\sigma_\phi(0) \quad Fe^{Ft_f}T \quad T\sigma_\phi(0) \quad e^{Ft_f}T] \\ \mathcal{K}_\Omega &= [F^2T\sigma_\Omega(0) \quad F^2e^{Ft_f}T \quad FT\sigma_\Omega(0) \quad Fe^{Ft_f}T \quad T\sigma_\Omega(0) \quad e^{Ft_f}T]\end{aligned}$$

$$\text{donde: } T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}.$$

la matriz F es de dimensión $2r \times 2r$ diagonal (no identidad), cuyos términos son negativos y los valores cercanos entre si para, $t_f = 0.5$ s es el tiempo de convergencia.

Control discontinuo

La entrada de control discontinua es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu}_{sd} \\ \dot{\nu}_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_\phi \cdot \text{sign}(S_\phi) \\ -\alpha_\Omega \cdot \text{sign}(S_\Omega) \end{bmatrix} \quad (3.4.17)$$

De (3.4.16), se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{S}_\phi \\ \dot{S}_\Omega \end{bmatrix} = \varphi_1 + \varphi_2 \cdot \dot{\nu} - \begin{bmatrix} \bar{\chi}_\phi \\ \bar{\chi}_\Omega \end{bmatrix} \quad (3.4.18)$$

donde:

$$\bar{\chi}_\phi = K_\phi F^3 e^{Ft} T \sigma_\phi(0) - 2\zeta_\phi \omega_{n\phi} [\ddot{\sigma}_\phi - K_\phi F^2 e^{Ft} T \sigma_\phi(0)] - \omega_{n\phi}^2 [\dot{\sigma}_\phi - K_\phi F e^{Ft} T \sigma_\phi(0)]$$

$$\bar{\chi}_\Omega = K_\Omega F^3 e^{Ft} T \sigma_\Omega(0) - 2\zeta_\Omega \omega_{n\Omega} [\ddot{\sigma}_\Omega - K_\Omega F^2 e^{Ft} T \sigma_\Omega(0)] - \omega_{n\Omega}^2 [\dot{\sigma}_\Omega - K_\Omega e^{Ft} T \sigma_\Omega(0)]$$

Al usar el mismo método que en el **Teorema 1**, se obtiene que existen ganancias α_ϕ y α_Ω tales que $\dot{S}_\phi S_\phi \leq -\eta_\phi |S_\phi|$ y $\dot{S}_\Omega S_\Omega \leq -\eta_\Omega |S_\Omega|$. Así, la convergencia del control se comprueba.

3.5. Análisis de estabilidad del esquema *Observador - Control*

El objetivo es un control sin sensores mecánicos en el motor de inducción, de esta forma la velocidad, el flujo y el par de carga no son medidos.

Remplazamos en la ley de control la velocidad, el flujo y el par de carga por los valores estimados por el observador por modos deslizantes (3.2.5) y la frecuencia del estator estimada (3.4.4).

Sean: $\sigma_{\hat{\phi}} = \hat{\phi}_{rd} - \phi^*$ y $\sigma_{\hat{\Omega}} = \hat{\Omega} - \Omega^*$. Las ecuaciones (3.4.11) y (3.4.12) se escriben:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{\alpha_1} &= -a\dot{\hat{\phi}}_{rd} + (\tilde{\omega}_s - p\hat{\Omega})\dot{\hat{\phi}}_{rq} + aM_{sr}(ba\hat{\phi}_{rd} + bp\hat{\Omega}\hat{\phi}_{rq} - (\gamma_1 + m_1R_s)i_{sd} + \tilde{\omega}_si_{sq}) \\ &+ \frac{aM_{sr}\hat{\phi}_{rq} [(ba\hat{\phi}_{rq} - bp\hat{\Omega}\hat{\phi}_{rd} - (\gamma_1 + m_1R_s)i_{sq} - \tilde{\omega}_si_{sd})\hat{\phi}_{rd} - i_{sq}\dot{\hat{\phi}}_{rd}]}{\hat{\phi}_{rd}^2} \\ \hat{\varphi}_{\alpha_2} &= m[i_{sq}\dot{\hat{\phi}}_{rd} + \hat{\phi}_{rd}(ba\hat{\phi}_{rq} - bp\hat{\Omega}\hat{\phi}_{rd} - (\gamma_1 + m_1R_s)i_{sq} - \tilde{\omega}_si_{sd}) \\ &- i_{sd}\dot{\hat{\phi}}_{rq} - \hat{\phi}_{rq}(ba\hat{\phi}_{rd} + bp\hat{\Omega}\hat{\phi}_{rq} - (\gamma_1 + m_1R_s)i_{sd} + \tilde{\omega}_si_{sq})] \\ &- c\dot{\hat{\Omega}} - \frac{1}{J}\dot{\hat{T}}_l.\end{aligned}$$

$$\hat{\varphi}_{\beta} = \begin{bmatrix} am_1M_{sr} & am_1M_{sr} \left(\frac{\hat{\phi}_{rq}}{\hat{\phi}_{rd}} \right) \\ -mm_1\hat{\phi}_{rq} & mm_1\hat{\phi}_{rd} \end{bmatrix}.$$

Se definen los errores de estimación como:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\phi_{rd}} &= \phi_{rd} - \hat{\phi}_{rd} \\ \epsilon_{\Omega} &= \Omega - \hat{\Omega} \\ \epsilon_{T_l} &= T_l - \hat{T}_l \\ \epsilon_{\phi_{rq}} &= -\hat{\phi}_{rq} \\ \epsilon_{\omega_s} &= \omega_s - \hat{\omega}_s\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

Así:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{\alpha_1} &= \underbrace{-a\dot{\phi}_{rd} + aM_{sr}(ba\phi_{rd} - \gamma i_{sd} + \omega_s i_{sq})}_{\varphi_{\alpha_1}} \\
&+ a\dot{\epsilon}_{\phi_{rd}} + aM_{sr}(-ba\epsilon_{\phi_{rd}} - bp\hat{\Omega}\epsilon_{\phi_{rq}} - i_{sq}\epsilon_{\omega_s}) - (\tilde{\omega}_s - p\hat{\Omega})\dot{\epsilon}_{\phi_{rq}} \\
&- aM_{sr}\epsilon_{\phi_{rq}} \frac{[(-ba\epsilon_{\phi_{rq}} - bp\hat{\Omega}\hat{\phi}_{rd} - (\gamma_1 + m_1 R_s)i_{sq} - \tilde{\omega}_s i_{sd})\hat{\phi}_{rd} - i_{sq}\hat{\phi}_{rd}]}{\hat{\phi}_{rd}^2} \\
\hat{\varphi}_{\alpha_2} &= \underbrace{m[i_{sq}\dot{\phi}_{rd} + \phi_{rd}(-bp\Omega\phi_{rd} - \gamma i_{sq} - \omega_s i_{sd})]}_{\varphi_{\alpha_2}} - c\dot{\Omega} - \frac{1}{J}\dot{T}_l \\
&+ m[-i_{sq}\dot{\epsilon}_{\phi_{rd}} + \phi_{rd}(-ba\epsilon_{\phi_{rq}} - bp(-\Omega\epsilon_{\phi_{rd}} - \hat{\phi}_{rd}\epsilon_{\Omega}) - i_{sd}\epsilon_{\omega_s}) \\
&- \epsilon_{\phi_{rd}}(-ba\epsilon_{\phi_{rq}} - bp\hat{\Omega}\hat{\phi}_{rd} - (\gamma_1 + m_1 R_s)i_{sq} - \tilde{\omega}_s i_{sd}) + i_{sd}\dot{\epsilon}_{\phi_{rq}} \\
&+ \epsilon_{\phi_{rq}}(ba\phi_{rd} + bp\hat{\Omega}\hat{\phi}_{rq} - (\gamma_1 + m_1 R_s)i_{sd} + \tilde{\omega}_s i_{sq})] + c\dot{\epsilon}_{\Omega} + \frac{1}{J}\dot{\epsilon}_{T_l} \\
\hat{\varphi}_{\beta} &= \underbrace{\begin{bmatrix} am_1 M_{sr} & 0 \\ 0 & mm_1 \phi_{rd} \end{bmatrix}}_{\varphi_{\beta}} + \begin{bmatrix} 0 & -am_1 M_{sr} \left(\frac{\epsilon_{\phi_{rq}}}{\hat{\phi}_{rd}} \right) \\ mm_1 \epsilon_{\phi_{rq}} & -mm_1 \epsilon_{\phi_{rd}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Visto de otra forma tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{\alpha_1} &= \varphi_{\alpha_1} + \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_1} \\
\hat{\varphi}_{\alpha_2} &= \varphi_{\alpha_2} + \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_2} \\
\hat{\varphi}_{\beta} &= \varphi_{\beta} + \Delta\hat{\varphi}_{\beta}
\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

donde: $\Delta\hat{\varphi}_{\alpha_1}$, $\Delta\hat{\varphi}_{\alpha_2}$ y $\Delta\hat{\varphi}_{\beta}$ representan las incertidumbres paramétricas, las perturbaciones y los errores de estimación.

Ya que $\hat{\varphi}_{\beta}$ es invertible en el dominio de trabajo, entonces la ley de control se escribe:

$$\begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} = \hat{\varphi}_{\beta}^{Nom-1} \left[- \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\alpha_1}^{Nom} \\ \hat{\varphi}_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \right] \tag{3.5.3}$$

donde $\hat{\varphi}_{\alpha_1}^{Nom}$, $\hat{\varphi}_{\alpha_2}^{Nom}$ y $\hat{\varphi}_{\beta}^{Nom}$ son los valores estimados de $\varphi_{\alpha_1}^{Nom}$, $\varphi_{\alpha_2}^{Nom}$ y φ_{β}^{Nom} . De esta forma obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_{rd} \\ \ddot{\Omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\alpha_1}^{Nom} + \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_1} \\ \hat{\varphi}_{\alpha_2}^{Nom} + \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_2} \end{bmatrix} + [\hat{\varphi}_{\beta}^{Nom} + \Delta\hat{\varphi}_{\beta}] \left[\hat{\varphi}_{\beta}^{Nom-1} \left[- \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\alpha_1}^{Nom} \\ \hat{\varphi}_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \right] \right] \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\alpha_1}^{Nom} + \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_1} \\ \hat{\varphi}_{\alpha_2}^{Nom} + \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[- \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\alpha_1}^{Nom} \\ \hat{\varphi}_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \right] \\
&+ \Delta\hat{\varphi}_{\beta} \hat{\varphi}_{\beta}^{Nom-1} \left[- \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\alpha_1}^{Nom} \\ \hat{\varphi}_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \right] \\
&= \begin{bmatrix} \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_1} \\ \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} - \Delta\hat{\varphi}_{\beta} \hat{\varphi}_{\beta}^{Nom-1} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\alpha_1}^{Nom} \\ \hat{\varphi}_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \Delta\hat{\varphi}_{\beta} \hat{\varphi}_{\beta}^{Nom-1} \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_1} \\ \Delta\hat{\varphi}_{\alpha_2} \end{bmatrix}}_{\hat{\Psi}_{\alpha}} - \Delta\hat{\varphi}_{\beta} \hat{\varphi}_{\beta}^{Nom-1} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\alpha_1}^{Nom} \\ \hat{\varphi}_{\alpha_2}^{Nom} \end{bmatrix} + \underbrace{\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \Delta\hat{\varphi}_{\beta} \hat{\varphi}_{\beta}^{Nom-1} \right]}_{\hat{\Psi}_{\beta}} \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utilizando el método descrito en la síntesis de la ley de control (3.4.10 - 3.4.14), la dinámica de las variables de deslizamiento se escribe:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\phi}}^{(3)} \\ \sigma_{\hat{\Omega}}^{(3)} \end{bmatrix} &= \underbrace{\hat{\Psi}_{\alpha} + \hat{\Psi}_{\beta} \begin{bmatrix} \nu_{sd} \\ \nu_{sq} \end{bmatrix}}_{\hat{\varphi}_1} - \begin{bmatrix} \phi^{*(3)} \\ \Omega^{*(3)} \end{bmatrix} + \underbrace{\hat{\Psi}_{\beta}}_{\hat{\varphi}_2} \begin{bmatrix} \dot{\nu}_{sd} \\ \dot{\nu}_{sq} \end{bmatrix} \\
&= \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 \cdot \dot{\nu}
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

donde:

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu}_{sd} \\ \dot{\nu}_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{\phi} \cdot \text{sign}(S_{\hat{\phi}}) \\ -\alpha_{\Omega} \cdot \text{sign}(S_{\hat{\Omega}}) \end{bmatrix} \tag{3.5.5}$$

A partir de (3.5.5) y de la definición de la superficie de deslizamiento se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{S}_{\hat{\phi}} \\ \dot{S}_{\hat{\Omega}} \end{bmatrix} = \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 \cdot \dot{\nu} - \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{\hat{\phi}} \\ \bar{\chi}_{\hat{\Omega}} \end{bmatrix} \tag{3.5.6}$$

Utilizando el mismo método que en el **Teorema 1** se sabe que existen ganancias α_ϕ y α_Ω tales que:

$$\begin{aligned}\dot{S}_\phi \cdot S_\phi &\leq -\eta_\phi |S_\phi| \\ \dot{S}_\Omega \cdot S_\Omega &\leq -\eta_\Omega |S_\Omega|\end{aligned}\tag{3.5.7}$$

Lo cual implica la convergencia asintótica de los errores de seguimiento del sistema en lazo cerrado.

En este capítulo se diseñó un esquema de control y observación basados en la técnica de modos deslizantes para una clase de sistemas no lineales. El esquema de control por modos deslizantes de alto orden se basa en un algoritmo que permite fijar el tiempo de convergencia, lo que permite garantizar que la acción de control se efectúe en un tiempo determinado. Ya que no se cuenta con el vector de estados completo para su medición, se utilizaron observadores por modos deslizantes de primer y segundo orden para estimar dichas variables. Con ambas estrategias basadas en modos deslizantes se puede asegurar que el principio de separación se aplica y que la convergencia del esquema es en tiempo finito.

Capítulo 4

Estudio del Movimiento Vertical de un Vehículo

En este capítulo se realizará un estudio del modelo matemático de 1/4 de un vehículo, esto con la finalidad de observar las capacidades de la suspensión activa. Se obtendrá un controlador mediante la técnica de modos deslizantes para analizar la dinámica de las variables de estado ante un perfil de superficie de rodado determinado, esto asumiendo que se tiene disponibilidad de todo el vector de estados para su medición.

4.1. Introducción

Uno de los puntos importantes en el estudio del movimiento vertical de un vehículo es el análisis de la suspensión. Ésta tiene dos objetivos:

- Garantizar la comodidad de los pasajeros mediante el control de la suspensión.
- Velar por el manejo del vehículo.

Existen tres ramas en los sistemas de suspensión :

- Sistema de suspensión pasiva: disipa energía a través de un caudal fijo, el cual está fijado por el coeficiente de amortiguamiento.
- Sistema de suspensión semi-activa: disipa energía pero con un caudal variable, el cual es ajustado por la unidad de control que modifica el factor de amortiguamiento.
- Sistema de suspensión activa: disipa y genera energía con un caudal variable, el cual está definido por las características dinámicas del actuador (un motor eléctrico, por ejemplo).

En el presente trabajo de investigación se abordará el estudio de la suspensión activa sin tomar en cuenta la dinámica del actuador, quedando como trabajo a futuro analizar dicha dinámica.

4.2. Modelo matemático de 1/4 del vehículo

A continuación se muestra el esquema del cual se obtiene el modelo matemático de 1/4 de un vehículo:

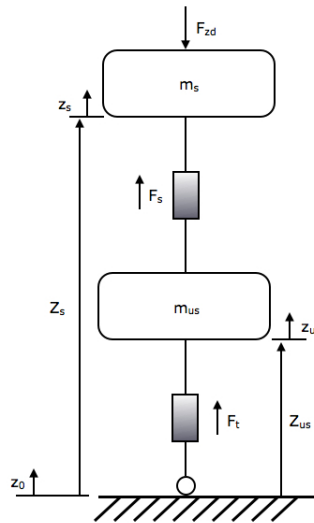


Figura 4.1. Esquema de 1/4 de vehículo

donde: m_s es la masa suspendida (1/4 de la masa del chasis), m_{us} es la masa no suspendida (piezas mecánicas que componen la rueda), F_s es la fuerza suministrada por la suspensión, F_t es la fuerza ejercida sobre el neumático, F_{zd} es una fuerza ejercida sobre el chasis, z_s y z_{us} son los movimientos verticales de la masa suspendida y de la masa no suspendida en torno a sus posiciones de equilibrio Z_s y Z_{us} y z_0 es el perfil del camino.

Al aplicar el principio fundamental de la dinámica de las dos masas se obtiene el modelo matemático de la suspensión [3].

$$m_s \ddot{z}_s = F_s - F_{ms}^0 - F_{zd} \quad (4.2.1)$$

$$m_{us} \ddot{z}_{us} = F_t - F_s^0 - F_{mus}^0 \quad (4.2.2)$$

con $F_{ms}^0 = m_s g$ y $F_{mus}^0 = m_{us} g$ son el peso de la masa suspendida y de la masa no suspendida respectivamente. Las funciones F_s y F_t son no lineales y dependientes de la naturaleza física de los componentes de la suspensión.

La fuerza F_s es la suma de las contribuciones del resorte (\tilde{F}_{ks}) y del amortiguador (\tilde{F}_{cs}) de tal forma que:

$$F_s = \tilde{F}_{ks} + \tilde{F}_{cs} \quad (4.2.3)$$

Hacemos:

$$Z_{def} = Z_s - Z_{us} + z_s - z_{us} - l_{ks} \quad (4.2.4)$$

$$\dot{z}_{def} = \dot{z}_s - \dot{z}_{us} \quad (4.2.5)$$

donde l_{ks} es la longitud del resorte. A continuación se puede obtener las siguientes relaciones:

$$\tilde{F}_{ks} = F_{ks}(Z_{def}) \quad (4.2.6)$$

$$\tilde{F}_{cs} = F_{cs}(\dot{z}_{def}) \quad (4.2.7)$$

Se puede hacer lo mismo para F_t , escribimos:

$$F_t = \tilde{F}_{kt} + \tilde{F}_{ct} \quad (4.2.8)$$

donde \tilde{F}_{kt} es la fuerza ejercida por el resorte y \tilde{F}_{ct} la fuerza ejercida por el amortiguador. Hacemos de nuevo:

$$Z_{defl} = Z_s - Z_{us} + z_{us} + z_0 - l_{kt} \quad (4.2.9)$$

$$\dot{z}_{defl} = \dot{z}_{us} - \dot{z}_0 \quad (4.2.10)$$

se puede considerar:

$$F_{kt} = -k_t Z_{defl} \quad (4.2.11)$$

$$F_{ct} = -c_t \dot{z}_{defl} \quad (4.2.12)$$

donde k_t y c_t son los coeficientes de rigidez y amortiguamiento del neumático y l_{kt} es el radio del neumático sin aplanar.

Para el diseño de las leyes de control, las fuerzas ejercidas por el resorte y el amortiguador están dadas por expresiones analíticas simples que aproximan las fuerzas que se transmiten en una suspensión.

En [24] se pueden encontrar las siguientes proposiciones:

$$F_r = k_l \cdot \Delta l + k_{nl} \cdot (\Delta l)^3 \quad (4.2.13)$$

$$F_a = \begin{cases} b_1 \dot{\Delta l} & \text{si } \dot{\Delta l} > 0 \\ b_2 \dot{\Delta l} & \text{si } \dot{\Delta l} < 0 \end{cases} \quad (4.2.14)$$

En [25] se propone una fuerza del resorte lineal. La fuerza ejercida por el amortiguador es no lineal y se puede escribir:

$$F_a = b_l \cdot \dot{\Delta l} + b_{nl} \cdot \sqrt{|\dot{\Delta l}|} \cdot \text{sign}(\dot{\Delta l}) \quad (4.2.15)$$

En [26] se establece un control basado en un modelo del vehículo completo incluyendo las no linealidades en el amortiguador (tomando en cuenta las saturaciones).

Podemos tomar el siguiente modelo matemático, asumiendo que se tienen todos los estados disponibles para su medición [27]:

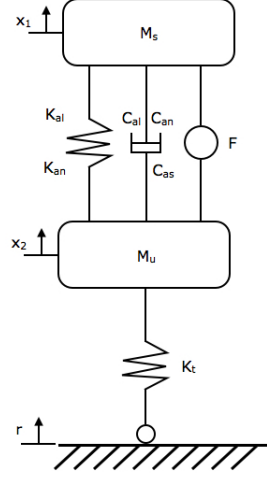


Figura 4.2. Modelo de 1/4 de vehículo

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= \frac{1}{M_s} [K_{al}(x_2 - x_1) + C_{al}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C_{as}|\dot{x}_2 - \dot{x}_1| \\
 &\quad + C_{an}\sqrt{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|} \text{sign}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_{an}(x_1 - x_2)^3 + F] \\
 \dot{x}_4 &= \frac{1}{M_u} [-K_{al}(x_2 - x_1) - C_{al}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - C_{as}|\dot{x}_2 - \dot{x}_1| \\
 &\quad - C_{an}\sqrt{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|} \text{sign}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - K_{an}(x_1 - x_2)^3 - K_t(x_2 - r) - F]
 \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

donde: x_1 es la diferencia entre la posición de la masa suspendida y su posición de equilibrio (m), x_3 es la velocidad de esta diferencia (m/s), x_2 es la diferencia entre la posición de la masa no suspendida y su posición de equilibrio (m), x_4 es la velocidad de esta diferencia (m/s),

M_s y M_u son las masas suspendida y no suspendida respectivamente (kg), K_{al} , C_{al} , C_{as} , C_{an} y K_{an} son las constantes que aparecen en las expresiones de las fuerzas de restauración y de amortiguamiento (los subíndices l indican términos lineales y n términos no lineales), F es la fuerza entregada por el accionador (N), r es el nivel del suelo relativo a una referencia fija (m).

4.3. Limitación de las oscilaciones verticales del vehículo

En primer lugar se buscará mantener a x_1 alrededor de 0 sin introducir inestabilidades en las otras variables de estado. Se va a demostrar que este enfoque conduce a una dinámica cero inestable.

Considere la salida $y = x_1$; se tratará de llevar a esta salida a cero utilizando un control por modos deslizantes de primer orden. Obtenemos el grado relativo de la salida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_3 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_3 = \frac{1}{M_s} [K_{al}(x_2 - x_1) + C_{al}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C_{as}|\dot{x}_2 - \dot{x}_1| \\ &\quad + C_{an}\sqrt{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|} \operatorname{sign}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_{an}(x_1 - x_2)^3 + F] \end{aligned}$$

como podemos observar la expresión \ddot{y} depende del control F , por lo que el grado relativo es 2.

Se define la superficie deslizante de la siguiente forma:

$$S = x_1 + \lambda x_3 \quad \text{con } \lambda > 0 \quad (4.3.1)$$

De esta forma tenemos:

$$\dot{S} = \dot{x}_1 + \lambda \dot{x}_3 = x_3 + \frac{\lambda}{M_s} [F_r(x) + F] \quad (4.3.2)$$

donde: $F_r(x) = K_{al}(x_2 - x_1) + C_{al}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C_{as}|\dot{x}_2 - \dot{x}_1| + C_{an}\sqrt{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|} \text{sign}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_{an}(x_1 - x_2)^3$.

Entonces:

$$\dot{S} = S_1 + S_2 F \quad (4.3.3)$$

donde: $S_1 = x_3 + \frac{\lambda}{M_s} F_r(x)$ y $S_2 = \frac{\lambda}{M_s}$.

Así, el control equivalente está dado por:

$$F^{eq} = -\frac{S_1}{S_2} = -\frac{M_s}{\lambda} [x_3 + \frac{\lambda}{M_s} F_r(x)] = -\frac{M_s}{\lambda} x_3 - F_r(x) \quad (4.3.4)$$

Al sustituir (4.3.4) en las expresiones de \dot{x}_3 y \dot{x}_4 obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \frac{1}{M_s} [F_r(x) + F] = \frac{1}{M_s} [F_r(x) + F^{eq}] = \frac{1}{M_s} [F_r(x) - \frac{M_s}{\lambda} x_3 - F_r(x)] \\ &= -\frac{1}{\lambda} x_3 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{M_u} [-F_r(x) - K_t(x_2 - r) - F] = \frac{1}{M_u} [-F_r(x) - K_t(x_2 - r) - F^{eq}] \\ &= \frac{1}{M_u} [-F_r(x) - K_t(x_2 - r) + \frac{M_s}{\lambda} x_3 + F_r(x)] \\ &= -\frac{K_t}{M_u} (x_2 - r) + \frac{M_s}{\lambda M_u} x_3 \end{aligned}$$

Entonces (4.2.16) se vuelve:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{\lambda} x_3 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{K_t}{M_u} (x_2 - r) + \frac{M_s}{\lambda M_u} x_3 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

cuya estructura es lineal.

Ahora, el sistema (4.3.5) puede representarse así:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & -\frac{K_t}{M_u} & \frac{M_s}{\lambda M_u} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_t}{M_u} \end{bmatrix} r$$

Al ser un sistema lineal podemos obtener su polinomio característico como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & -\frac{K_t}{M_u} & \frac{M_s}{\lambda M_u} & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s + \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{K_t}{M_u} & -\frac{M_s}{\lambda M_u} & s \end{bmatrix} \right| \\ &= s \cdot \left| \begin{bmatrix} s & 0 & -1 \\ \frac{K_t}{M_u} & -\frac{M_s}{\lambda M_u} & s \end{bmatrix} \right| = s \cdot \left[s \cdot \left(s \cdot \left(s + \frac{1}{\lambda} \right) \right) + \frac{K_t}{M_u} \left(s + \frac{1}{\lambda} \right) \right] \\ &= s^2 \cdot \left(s + \frac{1}{\lambda} \right) + s \cdot \frac{K_t}{M_u} \left(s + \frac{1}{\lambda} \right) \\ &= s \cdot \left(s + \frac{1}{\lambda} \right) \left(s^2 + \frac{K_t}{M_u} \right) = 0 \end{aligned}$$

En la ausencia de perturbaciones, la evolución de x_2 y x_4 es sinusoidal, ya que no se ha tomado en cuenta la fricción en la dinámica de los neumáticos. La variable de estado x_2 pertenece a la dinámica cero. Bajo el efecto de la perturbación, esta variable se aleja del origen y no reconverge (segundo orden, no amortiguado). Por ello no es posible calcular un control que estabilice a x_1 alrededor de 0 debido al problema de estabilidad en términos x_2 .

A continuación se realizará un cambio en el control, para ello se define la salida:

$$y = x_1 - \bar{x}_2 \quad \text{con} \quad \bar{x}_2 = \frac{a}{s+a} x_2$$

Para un valor del parámetro a dado, x_2 es filtrado mediante un filtro pasa bajas con constante

de tiempo $\frac{1}{a}$, de tal forma que:

- En frecuencias altas $y \approx x_1 \rightarrow 0$, lo que garantiza el confort de los pasajeros.
- En frecuencias bajas $\bar{x}_2 \approx x_2$ y por tanto $y \approx x_1 - x_2 \rightarrow 0$ y se reduce la elongación en la suspensión.

El ajuste de a tiene un impacto en la rigidez de la suspensión, esto es: el aumento de su valor aumenta el ancho de banda del filtro, así, \bar{x}_2 estará más cerca de x_2 .

El control aplicado tiende a disminuir aún más la diferencia entre x_1 y x_2 .

4.4. Control por modos deslizantes de primer orden

En primer lugar obtendremos el grado relativo como se muestra:

$$\begin{aligned}
 y &= x_1 - \bar{x}_2 \\
 \dot{y} &= \dot{x}_1 - \dot{\bar{x}}_2 = x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) \\
 \ddot{y} &= \dot{x}_3 - a(\dot{x}_2 - \dot{\bar{x}}_2) = \frac{1}{M_s} [K_{al}(x_2 - x_1) + C_{al}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C_{as}|\dot{x}_2 - \dot{x}_1| \\
 &\quad + C_{an}\sqrt{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|} \operatorname{sign}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_{an}(x_1 - x_2)^3 + F] - a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)] \\
 &= \frac{1}{M_s} [F_r(x) + F] - a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)]
 \end{aligned}$$

ya que la última expresión depende del control F , entonces tenemos que el grado relativo es igual a 2.

A continuación proponemos la superficie deslizante como se muestra:

$$S = e + \lambda \dot{e} \quad \text{con } e = y - 0 = y \quad \text{y } \lambda > 0$$

Así:

$$S = y + \lambda \dot{y} = x_1 - \bar{x}_2 + \lambda(\dot{x}_1 - \dot{\bar{x}}_2) = x_1 - \bar{x}_2 + \lambda(x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2)) \quad (4.4.1)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dot{y} + \lambda \ddot{y} = x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) + \lambda[\dot{x}_3 - a(\dot{x}_2 - \dot{\bar{x}}_2)] \\ &= x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\lambda}{M_s}[F_r(x) + F] - \lambda a[x_4 - a(x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2))] \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Entonces:

$$\dot{S} = S_1 + S_2 F \quad (4.4.3)$$

donde:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\lambda}{M_s} F_r(x) - \lambda a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)] \\ S_2 &= \frac{\lambda}{M_s} \end{aligned}$$

Así, el control equivalente está dado por:

$$F^{eq} = -\frac{S_1}{S_2} = -\frac{M_s}{\lambda}[x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\lambda}{M_s} F_r(x) - \lambda a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)]] \quad (4.4.4)$$

Al sustituir (4.4.4) en las expresiones de \dot{x}_3 y \dot{x}_4 obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \frac{1}{M_s}[F_r(x) + F] = \frac{1}{M_s}[F_r(x) + F^{eq}] \\ &= \frac{1}{M_s}[F_r(x) - \frac{M_s}{\lambda}[x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\lambda}{M_s} F_r(x) - \lambda a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)]]] \\ &= -\frac{1}{\lambda}[x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) - \lambda a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)]] \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{M_u}[-F_r(x) - K_t(x_2 - r) - F] = \frac{1}{M_u}[-F_r(x) - K_t(x_2 - r) - F^{eq}] \\ &= \frac{1}{M_u}[-F_r(x) - K_t(x_2 - r) + \frac{M_s}{\lambda}[x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\lambda}{M_s} F_r(x) - \lambda a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)]]] \\ &= -\frac{K_t}{M_u}(x_2 - r) + \frac{M_s}{\lambda M_u}[x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) - \lambda a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)]] \end{aligned}$$

Entonces (4.2.16) se vuelve:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= -\frac{1}{\lambda}[x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) - \lambda a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)]] \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{K_t}{M_u}(x_2 - r) + \frac{M_s}{\lambda M_u}[x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) - \lambda a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)]] \\
 \dot{\bar{x}}_2 &= a(x_2 - \bar{x}_2)
 \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

cuya estructura es lineal.

Ahora, el sistema (4.4.5) puede representarse así:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\lambda} - a^2 & -\frac{1}{\lambda} & a & a^2 - \frac{a}{\lambda} \\ 0 & \frac{1}{M_u}[a^2 M_s - \frac{a}{\lambda} M_s - K_t] & \frac{M_s}{\lambda M_u} & -a \frac{M_s}{M_u} & a \frac{M_s}{M_u} [\frac{1}{\lambda} - a] \\ 0 & a & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_t}{M_u} \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Al ser un sistema lineal podemos obtener su polinomio característico de forma simbólica utilizando MATLAB, así:

$$s \cdot (s + \frac{1}{\lambda})(s^3 + a(1 + \frac{M_s}{M_u})s^2 + \frac{K_t}{M_u}s + a \frac{K_t}{M_u}) = 0$$

Sea $\dot{S} = -k_s \cdot \text{sign}(S)$, con $k_s > 0$.

De esta forma, el control es [28]:

$$\begin{aligned}
 F &= -\frac{S_1}{S_2} + \frac{\dot{S}}{S_2} \\
 &= -\frac{S_1}{S_2} - \frac{k_s \cdot \text{sign}(S)}{S_2} \\
 &= -\frac{M_s}{\lambda}[x_3 - a(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\lambda}{M_s}F_r(x) - \lambda a[x_4 - a(x_2 - \bar{x}_2)]] - \frac{M_s}{\lambda}k_s \cdot \text{sign}(S) \tag{4.4.6}
 \end{aligned}$$

el cual asegura que la derivada $\dot{V} = S\dot{S}$ de la función candidata de Lyapunov $V = \frac{S^2}{2}$ sea estrictamente negativa, por lo que el sistema es estable.

En este capítulo se mostró el modelo matemático de 1/4 del vehículo, el cual es utilizado para observar las capacidades de la suspensión activa. De igual forma se estudió un controlador por modos deslizantes de primer orden, el cual será utilizado para analizar la dinámica de las variables de estado ante un perfil de superficie de rodado determinado, esto asumiendo que se tiene disponibilidad de todos los estados para su medición.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se implementarán los algoritmos de control por modos deslizantes de alto orden, así como los observadores por modos deslizantes de primer y segundo orden en el modelo matemático del motor de inducción (MI) mediante MATLAB Simulink[®]. La estrategia de control es diseñada para controlar la velocidad y la magnitud del flujo del MI. Puesto que la velocidad y los flujos se consideran no medibles, y para poder implementar esta estrategia de control es necesario reconstruir el vector de estado del sistema, se proponen observadores por modos deslizantes de primer y segundo orden para estimar estas variables así como el par de carga mecánico. Los resultados en simulación son mostrados para apreciar el desempeño del esquema Observador-Control para el MI sin sensores mecánicos utilizando el banco de pruebas Control sin sensor mecánico cuando se trabaja con los parámetros nominales y cuando se introduce una variación del +50% en la resistencia del estator.

Además, se implementará un controlador por modos deslizantes de primer orden al modelo matemático de la suspensión activa, esto con la finalidad de observar la evolución de los estados ante un perfil de superficie determinado, asumiendo que se tienen los estados disponibles para su medición.

5.1. Simulación del esquema *Observador-Control*

En esta sección se presentan las simulaciones del control por modos deslizantes de alto orden, en conjunto con los observadores por modos deslizantes de primer y segundo orden que fueron aplicados al modelo matemático del motor de inducción (MI), utilizando el banco de pruebas *Control sin sensor mecánico* (Figura 5.1).

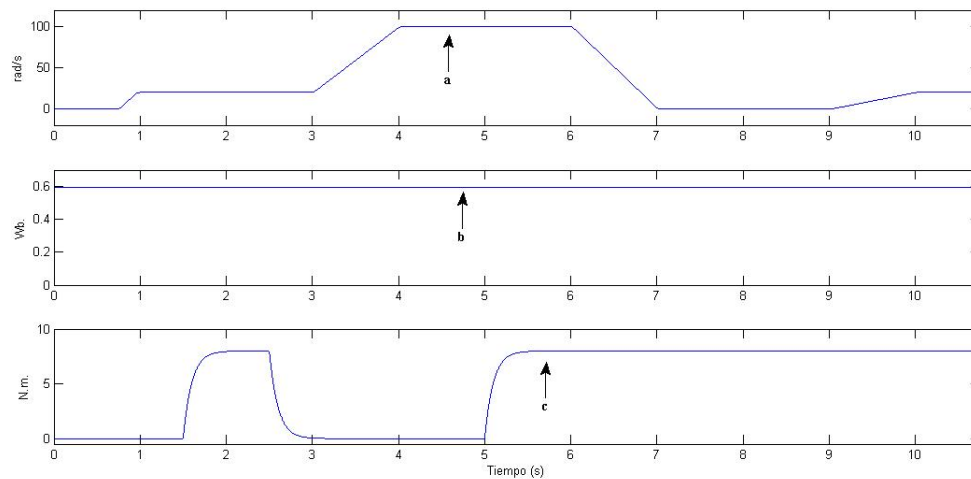


Figura 5.1. Banco de prueba *Control sin sensor mecánico*: a) velocidad de referencia $\Omega^*(rad/s)$, b) flujo de referencia $\phi^*(Wb)$, c) par de carga $T_l(N.m)$.

Ya que el algoritmo de control utilizado es transparente, lo cual quiere decir que se puede aplicar a cualquier MI, siempre y cuando se conozcan sus características y parámetros nominales y se realicen los cálculos correspondientes, y debido a que no se cuenta con los datos de un MI que pueda fungir como sistema de propulsión de un vehículo eléctrico, se realizaron las simulaciones basándose en un MI con características conocidas [18], las cuales se muestran en la siguiente tabla:

Potencia nominal	1.5 kW
Velocidad nominal	1430 rpm
Número de pares de polos	2
Voltaje nominal	220 V
Corriente nominal	6.1 A
Par de carga nominal	10 N.m

Tabla 5.1. Características del motor de inducción.

Los valores nominales de los parámetros del MI se muestran en a continuación:

R_s	1.5 Ohms
R_r	0.79 Ohms
L_s	0.105 H.
L_r	0.094 H.
M_{sr}	0.094 H.
J	$0.0077/\text{rad}/\text{s}^2$
f_v	$0.0029 \text{ N.m}/\text{rad}/\text{s}$

Tabla 5.2. Parámetros nominales del motor de inducción.

La siguiente tabla muestra los valores de los parámetros del estimador de par mecánico y de los observadores que satisfacen las condiciones de convergencia:

\hat{T}_l	FOSMO	SOSMO
$\hat{T}_{l_0} = 55$	C= 1	C= 1
$k_1 = 0.01$	$\omega_0 = 50$	$\theta_1 = 20$
$k_2 = 0.0001$	$\mu_0 = 20$	$\varsigma_1 = 0.1$
-	-	$\theta_2 = 17$
-	-	$\varsigma_2 = 0.5$
-	-	G= 9
-	$k_{\omega_s} = 2350$	$k_{\omega_s} = 1550$

Tabla 5.3. Valores de los parámetros del estimador de par mecánico y de los observadores.

Con la finalidad de optimizar el comportamiento y desempeño del motor se eligieron dos ajustes de parámetros: el primero para inducir a que el motor alcance el flujo deseado y el segundo para rechazar perturbaciones (tales como el par de carga) y asegurar un alto nivel de precisión en el seguimiento de trayectoria. Se utilizó un tiempo de convergencia de $t_f = 0.5$ s.

La siguiente tabla muestra los parámetros utilizados por el controlador por modos deslizantes de alto orden.

Para $t \leq 5$ s	Para $t > 5$ s
$\zeta_\phi = 0.32$	$\zeta_\phi = 0.32$
$\omega_{n\phi} = 316$ rad/s	$\omega_{n\phi} = 447$ rad/s
$\alpha_\phi = 6.10^4$	$\alpha_\phi = 10.10^4$
$\zeta_\Omega = 1.56$	$\zeta_\Omega = 1.75$
$\omega_{n\Omega} = 32$ rad/s	$\omega_{n\Omega} = 200$ rad/s
$\alpha_\Omega = 8.10^4$	$\alpha_\Omega = 5.10^6$

Tabla 5.4. Valores de los parámetros del control por modos deslizantes de alto orden.

Se tomaron las siguientes condiciones iniciales $\hat{\phi}_{r\alpha}(0) = \hat{\phi}_{r\beta}(0) = 0.01$ Wb y $\hat{\Omega}(0) = 0.01$

rad/s para evitar singularidades en el controlador. El tiempo de muestreo que se utilizó es $T_m = 200 \mu s$.

A continuación se muestra la Figura 5.2, la cual ilustra la forma en que está compuesto el sistema *Control-Motor de Inducción-Observador*.

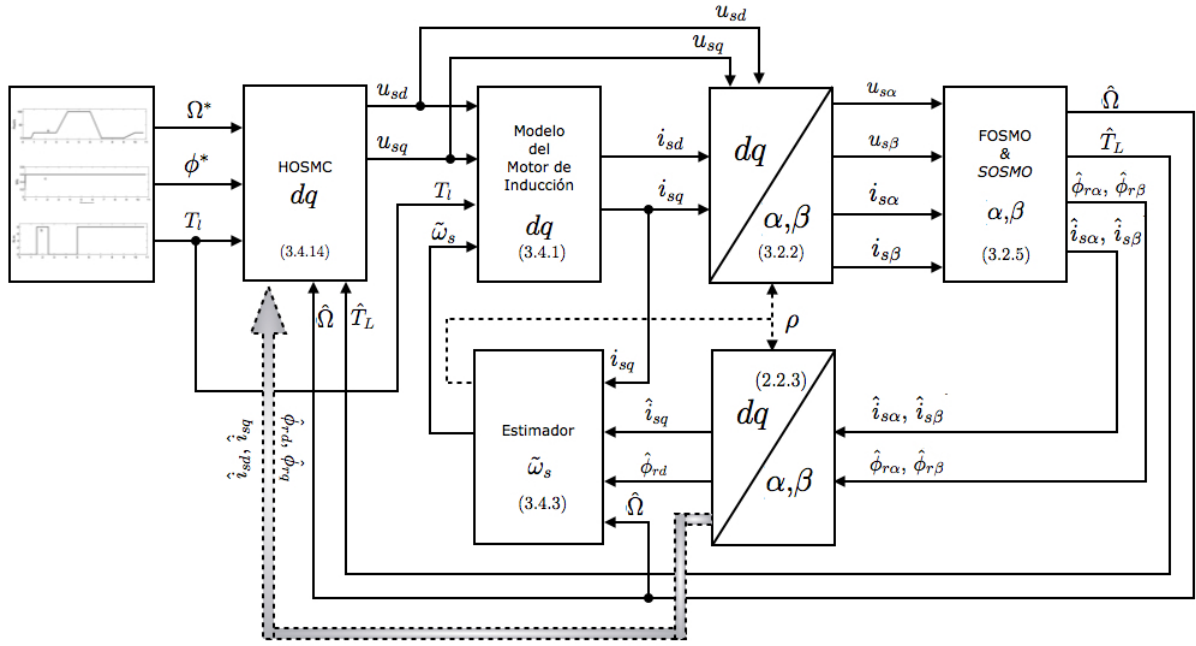


Figura 5.2. Sistema *Control-Motor de Inducción-Observador*.

5.1.1. Caso 1: Parámetros nominales del motor de inducción

Las Figuras 5.3 y 5.5 muestran los resultados obtenidos en las simulaciones cuando se utiliza el controlador por modos deslizantes de alto orden (*High Order Sliding Mode Controller, HOSMC*) en conjunto con un observador por modos deslizantes de primer y segundo orden (*First Order Sliding Mode Observer, FOSMO* y *Second Order Sliding Mode Observer, SOSMO*) respectivamente, para el caso en que se conocen los valores exactos de los parámetros. Las Figuras 5.4 y 5.6 muestran los errores de seguimiento de trayectoria ($\epsilon_{p\Omega, \phi}$ para el error de

seguimiento al utilizar el *FOSMO* y $\epsilon_{s\Omega,\phi}$ cuando se utiliza el *SOSMO*), así como el error en la estimación de par de carga (ϵ_{p,sT_l}).

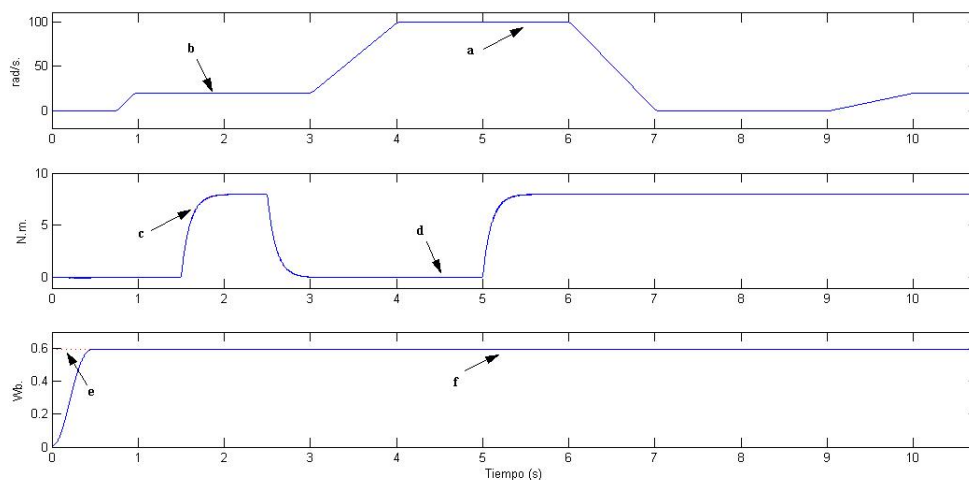


Figura 5.3. Seguimiento de trayectoria, esquema *HOSMC-FOSMO*, caso nominal : a) Ω_m , b) $\hat{\Omega}$, c) T_l , d) \hat{T}_l , e) ϕ^* , f) $\hat{\phi}_{rd}$.

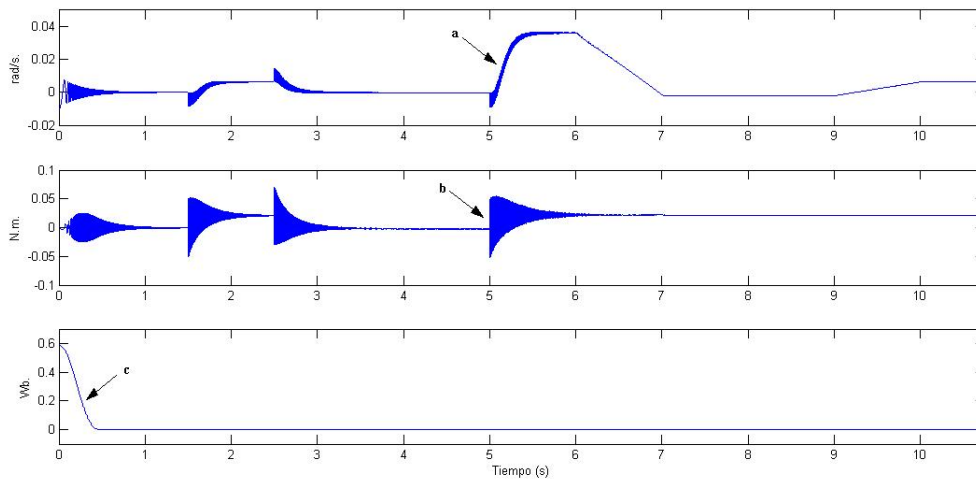


Figura 5.4. Error de seguimiento, esquema *HOSMC-FOSMO*, caso nominal: a) $\epsilon_{p\Omega} = \Omega_m - \hat{\Omega}$, b) $\epsilon_{pT_l} = T_l - \hat{T}_l$, c) $\epsilon_{p\phi} = \phi^* - \hat{\phi}_{rd}$.

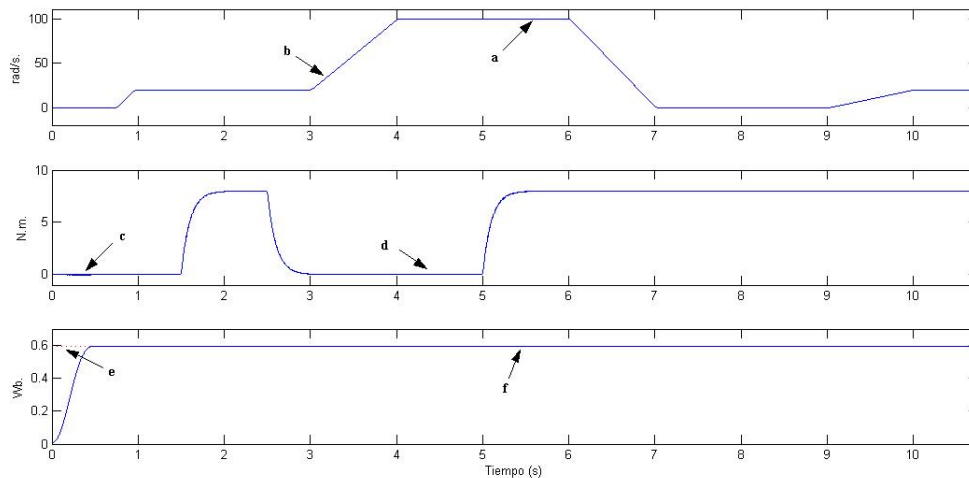


Figura 5.5. Seguimiento de trayectoria, esquema *HOSMC-SOSMO*, caso nominal : a) Ω_m , b) $\hat{\Omega}$, c) T_l , d) \hat{T}_l , e) ϕ^* , f) $\hat{\phi}_{rd}$.

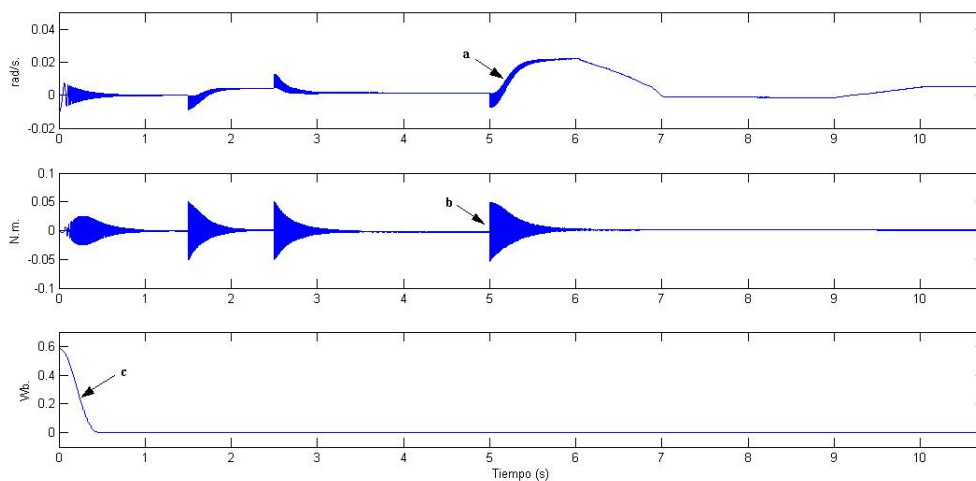


Figura 5.6. Error de seguimiento, esquema *HOSMC-SOSMO*, caso nominal: a) $\epsilon_{s\Omega} = \Omega_m - \hat{\Omega}$, b) $\epsilon_{sT_l} = T_l - \hat{T}_l$, c) $\epsilon_{s\phi} = \phi^* - \hat{\phi}_{rd}$.

Como podemos observar, la velocidad estimada $\hat{\Omega}$ (Figuras 5.3b y 5.5b) converge a la velocidad medida Ω_m (Figuras 5.3a y 5.5a) en las condiciones de observabilidad e inobservabilidad (en el intervalo de tiempo $t = 7$ a $t = 9$ s) del MI. De igual forma se aprecia que el flujo

estimado $\hat{\phi}_{rd}$ (Figuras 5.3f y 5.5f) converge al flujo de referencia ϕ^* (Figuras 5.3e y 5.5e). También se observa que el par de carga estimado \hat{T}_l (Figuras 5.3d y 5.5d) converge al par de carga de referencia T_l (Figuras 5.3c y 5.5c) en las zonas observables e inobservables del MI, excepto durante la aceleración del motor y la etapa de velocidad alta (Figuras 5.4b y 5.6b en el intervalo de tiempo $t = 3$ a $t = 6$ s). El rechazo a perturbaciones (par de carga) es satisfactorio tanto en baja como en alta velocidad, sin embargo, se visualizan errores de seguimiento en los momentos de transición del par de carga, esto es, en los momentos en que es aplicado (Figuras 5.4a,b y 5.6a,b en $t = 1.5$ y $t = 5$ s) y removido (Figuras 5.4a,b y 5.6a,b en $t = 2.5$ s). Por último tenemos que el error de seguimiento de flujo es casi nulo (Figuras 5.4c y 5.6c), con excepción del intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 0.5$ s, debido a las condiciones iniciales del observador diferentes de cero, lo cual implica un buen seguimiento de flujo.

5.1.2. Caso 2: Variación en la resistencia del estator R_s (+50%)

Con la finalidad de probar la robustez del esquema *Observador-Control* con respecto a la resistencia del estator, se efectuó una variación del +50% sobre su valor nominal. Las Figuras 5.7 y 5.9 muestran los resultados obtenidos en las simulaciones cuando se utiliza el controlador por modos deslizantes de alto orden (*High Order Sliding Mode Controller, HOSMC*) en conjunto con un observador por modos deslizantes de primer y segundo orden (*First Order Sliding Mode Observer, FOSMO* y *Second Order Sliding Mode Observer, SOSMO*) respectivamente. Las Figuras 5.8 y 5.10 muestran los errores de seguimiento de trayectoria para ambos casos ($\epsilon_{p\Omega,\phi}$ para el error de seguimiento al utilizar *FOSMO* y $\epsilon_{s\Omega,\phi}$ cuando se utiliza el *SOSMO*), así como el error en la estimación de par de carga (ϵ_{p,sT_l}).

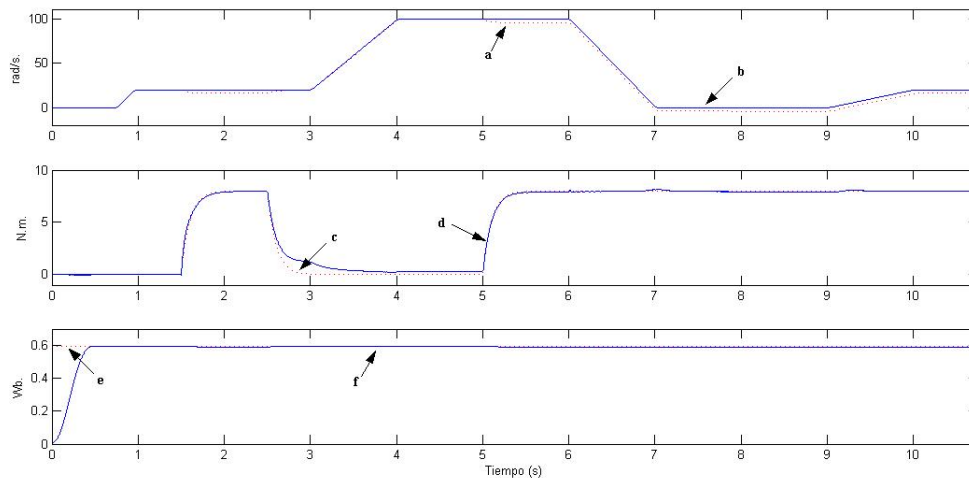


Figura 5.7. Seguimiento de trayectoria, esquema *HOSMC-FOSMO*, variación del +50% en R_s :
 a) Ω_m , b) $\hat{\Omega}$, c) T_l , d) \hat{T}_l , e) ϕ^* , f) $\hat{\phi}_{rd}$.

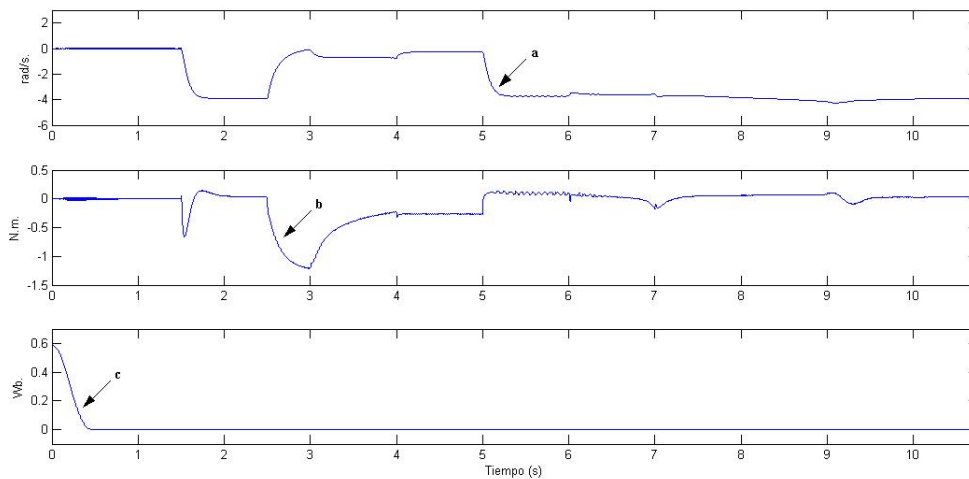


Figura 5.8. Error de seguimiento, esquema *HOSMC-FOSMO*, variación del +50% en R_s : a)
 $\epsilon_{p\Omega} = \Omega_m - \hat{\Omega}$, b) $\epsilon_{pT_l} = T_l - \hat{T}_l$, c) $\epsilon_{p\phi} = \phi^* - \hat{\phi}_{rd}$.

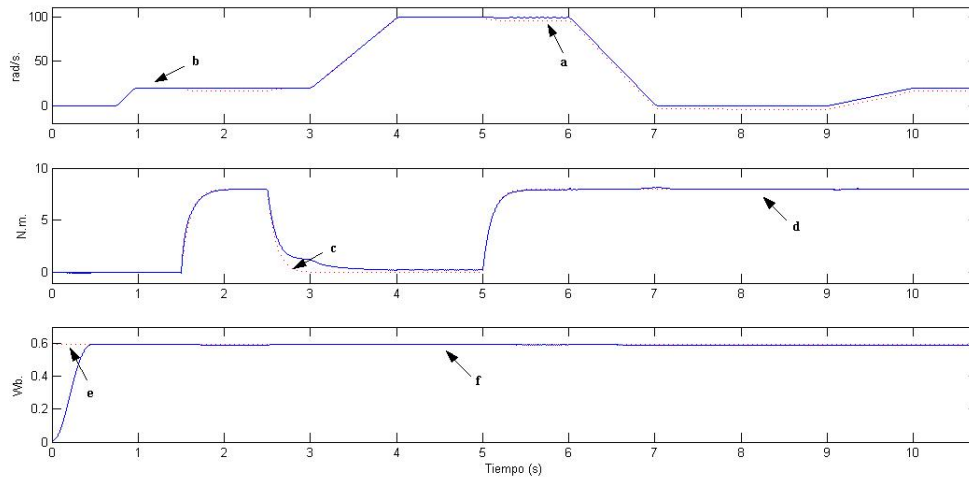


Figura 5.9. Seguimiento de trayectoria, esquema *HOSMC-SOSMO*, variación del +50% en R_s : a) Ω_m , b) $\hat{\Omega}$, c) T_l , d) \hat{T}_l , e) ϕ^* , f) $\hat{\phi}_{rd}$.

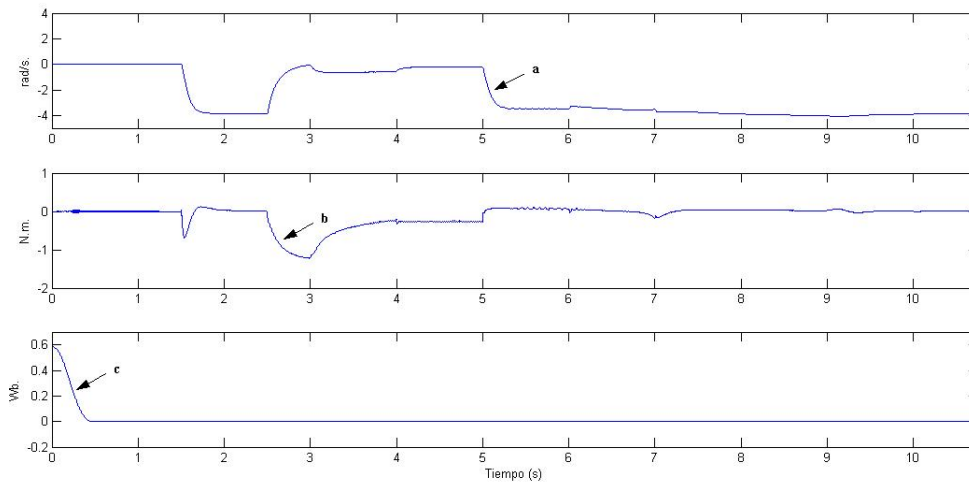


Figura 5.10. Error de seguimiento, esquema *HOSMC-SOSMO*, variación del +50% en R_s : a) $\epsilon_{s\Omega} = \Omega_m - \hat{\Omega}$, b) $\epsilon_{sT_l} = T_l - \hat{T}_l$, c) $\epsilon_{s\phi} = \phi^* - \hat{\phi}_{rd}$.

Analizando las Figuras 5.7 - 5.10 se observó lo siguiente:

- Seguimiento de trayectoria: la velocidad estimada $\hat{\Omega}$ (Figuras 5.7b y 5.9b) converge a la

velocidad medida Ω_m (Figuras 5.7a y 5.9a) pero se presenta un error en estado estacionario una vez que se aplica por segunda vez el par de carga (Figuras 5.8a y 5.10a desde $t = 5$ s).

- Seguimiento de flujo: al igual que en el caso nominal (Figuras 5.3e,f y 5.5e,f) se cuenta con un buen seguimiento de trayectoria de flujo (Figuras 5.7e,f y 5.9e,f) .
- Rechazo de perturbaciones: Se cuenta con un buen rechazo del par de carga (perturbación) en alta y baja velocidad (Figuras 5.8c y 5.10c) .
- Estimación del par de carga: el par de carga estimado \hat{T}_l (Figuras 5.7d y 5.9d) converge al par de carga de referencia T_l (Figuras 5.7c y 5.9c) en las zonas observables e inobservables del MI, excepto durante la aceleración del motor y la etapa de velocidad alta (Figuras 5.4b y 5.6b en el intervalo de tiempo $t = 3$ a $t = 6$ s)

La siguiente tabla muestra un resumen del desempeño de los esquemas *Observador por modos deslizantes de primer orden (FOSMO)*- *Control por modos deslizantes de alto orden (HOSMC)* y *Observador por modos deslizantes de segundo orden (SOSMO)*- *Control por modos deslizantes de alto orden (HOSMC)*:

	<i>FOSMO & HOSMC</i>	<i>SOSMO & HOSMC</i>
Zona Observable	Estable	Estable
Zona Inobservable	Estable	Estable
Parámetros nominales	Converge	Converge
Variación del +50% en R_s	Robusto	Robusto

Tabla 5.5. Desempeño de esquemas *Observador-Control*.

5.2. Simulación de la suspensión activa

En esta sección se presentan las simulaciones del controlador por modos deslizantes de primer orden que fue aplicado al modelo matemático de la suspensión activa (4.2.16).

Se utilizó un perfil de superficie de rodado de forma rugosa (Figura 5.11) y se asumió que el vector de estados está disponible para su medición.

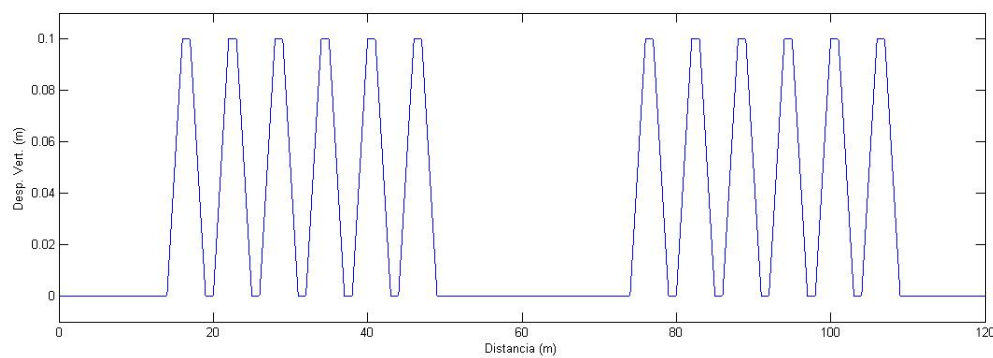


Figura 5.11. Superficie rugosa.

Los valores de los parámetros de la suspensión activa se muestran a continuación [3]:

M_s	440 kg
M_u	35 kg
C_{al}	100 Ns/m
C_{an}	7000 Ns/m
C_{as}	300 Ns/m
K_{al}	1650 N/m
K_{an}	15000 N/m
K_t	90000 N/m

Tabla 5.6. Parámetros de la suspensión activa.

La siguiente tabla muestra los parámetros utilizados por el control por modos deslizantes de primer orden.

Parámetro	<i>FOSMC</i>
a	0.5
λ	0.7
k_s	0.5

Tabla 5.7. Valores de los parámetros del control modos deslizantes de primer orden.

Se tomaron las siguientes condiciones iniciales $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$ y $x_4(0) = 0$. El tiempo de muestreo que se utilizó es $T_m = 1 \text{ ms}$.

La Figura 5.12 muestra la forma en que está compuesto el sistema *Control-Suspensión Activa*.

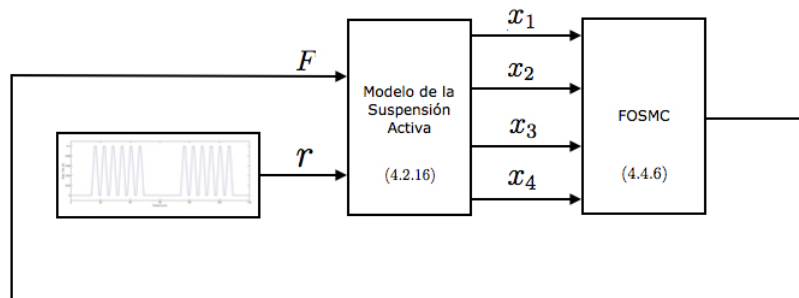


Figura 5.12. Sistema *Control-Suspensión Activa*.

5.2.1. Sistema en lazo abierto

La Figura 5.13 muestra los resultados obtenidos cuando el sistema (4.2.16) está en lazo abierto (sin ley de control). Como se puede apreciar, el estado x_1 es afectado en gran manera por r .

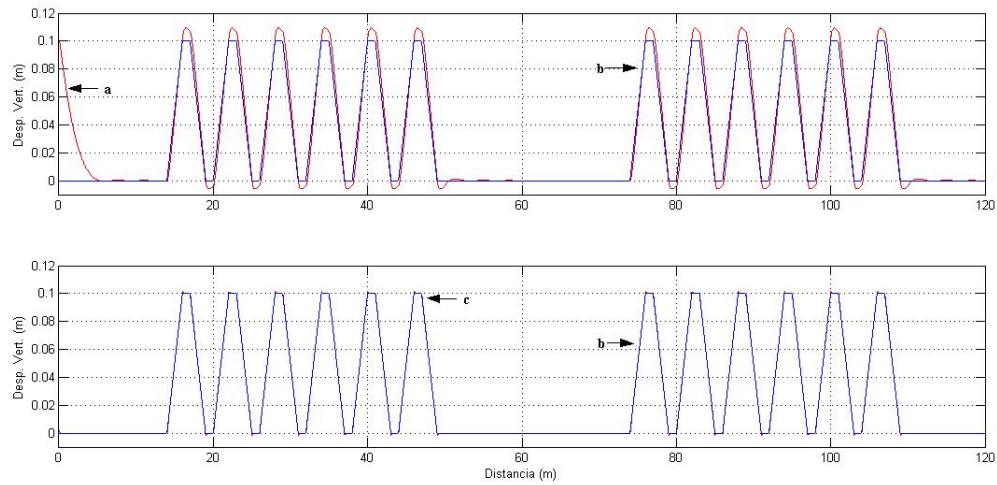


Figura 5.13. Sistema de suspensión activa en lazo abierto: a) x_1 , b) r c) x_2 .

5.2.2. Sistema bajo el control por modos deslizantes de primer orden

Las Figuras 5.14 , 5.15 y 5.16 muestran los resultados obtenidos al aplicar el control por modos deslizantes de primer orden al sistema (4.2.16).

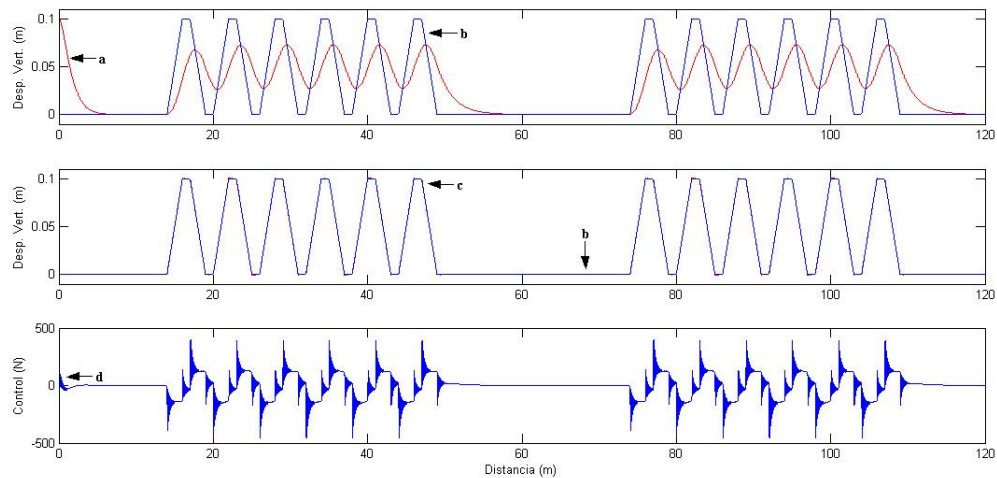


Figura 5.14. Control por modos deslizantes de primer orden: a) x_1 , b) r , c) x_2 , d) F .

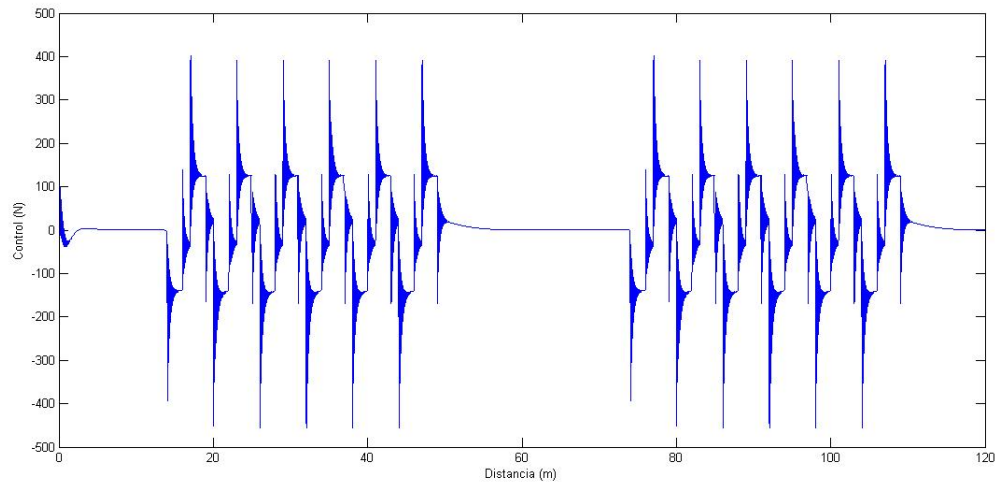


Figura 5.15. F del control por modos deslizantes de primer orden.

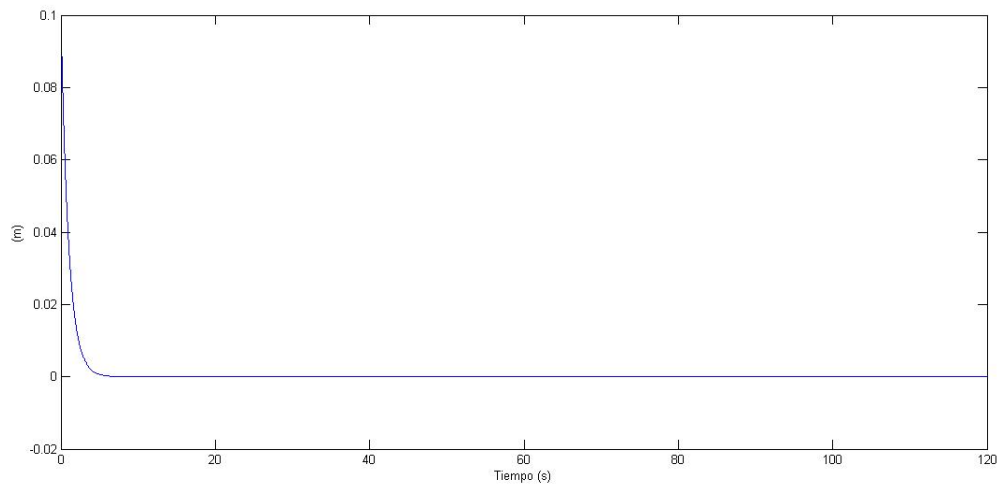


Figura 5.16. Superficie deslizante de primer orden.

La Figura 5.14a muestra que se reduce el efecto de r en x_1 . En la Figura 5.14b se observa que la dinámica de x_2 es estable, lo cual justifica el buscar que $y = x_1 - \bar{x}_2 \rightarrow 0$. El control F se muestra en la Figura 5.14d, el cual representa el esfuerzo que tendría que proporcionar el actuador de la suspensión activa. En la Figura 5.15 se muestra a detalle el control F , en

donde se observa que al inicio presenta grandes oscilaciones, debido a las condiciones iniciales ($x_1(0) = 0.1$). Por último, en la Figura 5.16 se presenta la superficie deslizante de primer orden S , la cual tiende a cero.

En este capítulo se mostraron los resultados de simulación al implementar el esquema de *Control-Observador* al modelo matemático del motor de inducción utilizando un control por modos deslizantes de alto orden y observadores por modos deslizantes de primer y segundo orden; los resultados obtenidos han sido satisfactorios, además de que los esquemas son robustos con respecto a la resistencia del estator. De igual forma se mostraron los resultados satisfactorios en las simulaciones al aplicar un controlador por modos deslizantes de primer orden al modelo matemático de la suspensión activa, asumiendo que se dispone de la medición de los estados.

Capítulo 6

Conclusiones

Al realizar una comparación entre los resultados obtenidos y los objetivos planteados se puede concluir lo siguiente:

- Se examinó el modelo matemático del motor de inducción utilizando la representación en variables de estado en el sistema de coordenadas dq , debido a que se tomó en cuenta la estrategia de control de campo orientado, la cual implica que el módulo del flujo en el eje de directa es $\|\phi_{rd}\| = \sqrt{\phi_{rd}^2 + \phi_{rq}^2}$ y el flujo en el eje de cuadratura es nulo ($\phi_{rq} = 0$). Se estudió el movimiento vertical de un vehículo, en donde se utilizó el modelo matemático de 1/4 del vehículo, el cual es utilizado para estudiar las capacidades de la suspensión activa.
- Se analizó la propiedad de observabilidad del motor de inducción cuando se cuenta con medición de corrientes del estator y velocidad angular, donde se concluye que éste es observable para cualquier velocidad. Cuando no se cuenta con medición de velocidad se concluye que el motor de inducción no es observable en los casos particulares en que, utilizando las mediciones de corriente así como sus derivadas de segundo orden, asumiendo una velocidad angular constante ($\dot{\Omega} = 0$) se presentan los flujos del rotor constantes y la frecuencia del estator nula; asumiendo una frecuencia en el estator nula ($\omega_s = 0$) se tienen

el par electromagnético y los flujos del rotor nulos; asumiendo que los flujos del rotor son constantes y que la frecuencia del estator es nula ($\dot{\phi}_{rd} = \dot{\phi}_{rq} = \omega_s = 0$) se presenta una velocidad constante y los flujos del rotor son nulos. Se verificó que en el caso particular en que los flujos del rotor son constantes, la frecuencia del estator es nula y la velocidad angular es constante ($\dot{\phi}_{rd} = \dot{\phi}_{rq} = \omega_s = 0$ y $\dot{\Omega} = 0$) no se puede establecer la observabilidad del motor de inducción, aún y cuando se utilizaron las derivadas de orden superior de las mediciones.

- Se propuso un estimador de par de carga así como observadores de flujos del rotor y velocidad angular del motor de inducción de primer y segundo orden, utilizados para estimar las variables no medibles del motor.
- Se estudió y aplicó un control por modos deslizantes de alto orden en conjunto con el estimador de par de carga y los observadores de modos deslizantes de primer y segundo orden al modelo matemático del motor de inducción, formándose así los esquemas *Observador por modos deslizantes de primer y segundo orden-Control por modos deslizantes de alto orden*. Se realizó un análisis de estabilidad del esquema *Observador-Control*, en donde se concluye que los errores de seguimiento en lazo cerrado convergen asintóticamente a cero, por lo tanto el esquema propuesto es estable.
- Se aplicó un control por modos deslizantes de primer orden al modelo matemático de 1/4 del vehículo, en donde se comprobó su estabilidad mediante una función de Lyapunov.
- Se obtuvieron resultados en simulaciones mediante MATLAB *Simulink*[®] de los esquemas *Observador por modos deslizantes de primer y segundo orden-Control por modos deslizantes de alto orden* aplicados al motor de inducción, en donde se validaron dichos esquemas mediante el banco de pruebas *Control sin sensor mecánico*. Se realizaron pruebas con los parámetros nominales del motor resultando satisfactorias. Así mismo se comprobó la robustez de los esquemas con respecto a la resistencia del estator.

- De igual forma se obtuvieron resultados en simulaciones mediante MATLAB *Simulink*[®] al aplicar un control por modos deslizantes de primer orden al modelo matemático de 1/4 del vehículo, en donde se logra disminuir el efecto del perfil de superficie r sobre el estado x_1 que representa la diferencia entre la posición de la masa suspendida y su posición de equilibrio, mejorando con esto el confort en la marcha del vehículo, así mismo el desempeño de manejo es satisfactorio, ya que el estado x_2 , el cual representa la diferencia entre la posición de la masa no suspendida y su posición de equilibrio sigue fielmente al perfil de superficie r .

Trabajo a futuro

Con la finalidad de dar continuidad al presente trabajo de tesis se recomiendan los siguientes trabajos de investigación:

- Realizar la validación experimental de los esquemas *Observador por modos deslizantes de primer y segundo orden-Control por modos deslizantes de alto orden* aplicados al modelo matemático del motor de inducción.
- Estudiar los efectos al incluir el convertidor de potencia (inversor) en el esquema *Observador-Control*.
- Mejorar el controlador aplicado al modelo de la suspensión activa incluyendo la dinámica del actuador.
- Estudiar el modelo completo del vehículo con la finalidad de analizar los estados acoplados de los cuatro modelos de 1/4 del vehículo y manejar las compensaciones entre el confort en la marcha y la seguridad.
- Comparar los resultados obtenidos utilizando otras técnicas de control.

Apéndice A

Corrientes y voltajes del estator

El propósito de este anexo es mostrar las corrientes y voltajes del estator obtenidos del esquema Observador-Control para el motor de inducción sin sensores mecánicos utilizando el banco de pruebas Control sin sensor mecánico mediante MATLAB Simulink® cuando se trabaja con los parámetros nominales y cuando se introduce una variación del +50% en la resistencia del estator.

A.1. Caso 1: Parámetros nominales del motor de inducción

Las Figuras A.1 y A.3 muestran los voltajes del estator obtenidos mediante simulaciones cuando se utiliza el controlador por modos deslizantes de alto orden (*High Order Sliding Mode Controller, HOSMC*) en conjunto con un observador por modos deslizantes de primer y segundo orden (*First Order Sliding Mode Observer, FOSMO* y *Second Order Sliding Mode Observer, SOSMO*) respectivamente, para el caso en que se conocen los valores exactos de los parámetros. De igual forma, las Figuras A.2 y A.4 muestran las corrientes del estator.

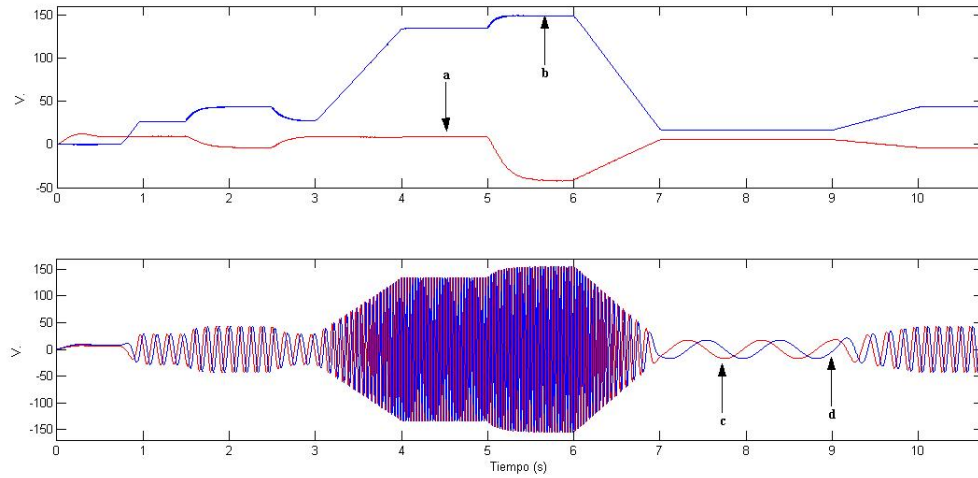


Figura A.1. Voltajes del estator, esquema *HOSMC-FOSMO*, caso nominal : a) u_{sd} , b) u_{sq} , c) $u_{s\alpha}$, d) $u_{s\beta}$.

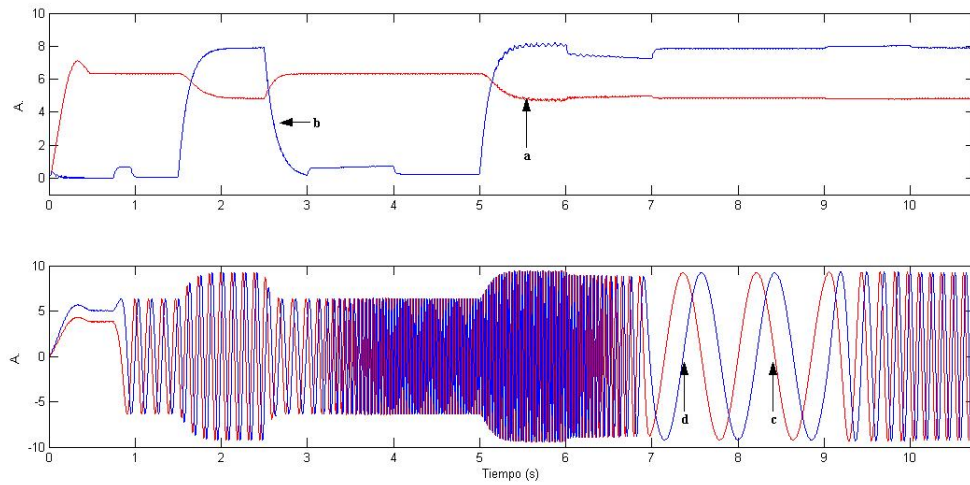


Figura A.2. Corrientes del estator, esquema *HOSMC-FOSMO*, caso nominal : a) i_{sd} , b) i_{sq} , c) $i_{s\alpha}$, d) $i_{s\beta}$.

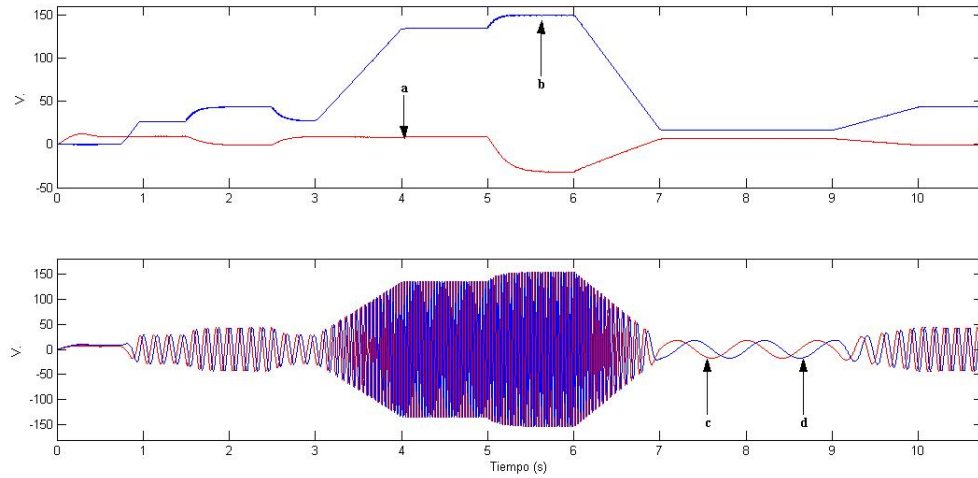


Figura A.3. Voltajes del estator, esquema *HOSMC-SOSMO*, caso nominal : a) u_{sd} , b) u_{sq} , c) $u_{s\alpha}$, d) $u_{s\beta}$.

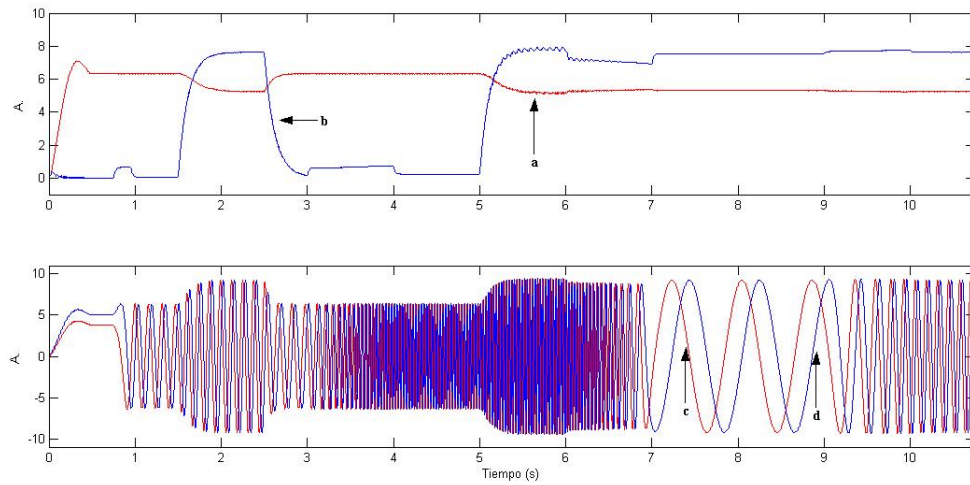


Figura A.4. Corrientes del estator, esquema *HOSMC-SOSMO*, caso nominal : a) i_{sd} , b) i_{sq} , c) $i_{s\alpha}$, d) $i_{s\beta}$.

A.2. Caso 2: Variación en la resistencia del estator R_s (+50%)

Las Figuras A.5 y A.7 muestran los voltajes del estator obtenidos mediante simulaciones cuando se utiliza el controlador por modos deslizantes de alto orden (*High Order Sliding Mode Controller, HOSMC*) en conjunto con un observador por modos deslizantes de primer y segundo orden (*First Order Sliding Mode Observer, FOSMO* y *Second Order Sliding Mode Observer, SOSMO*) respectivamente, cuando se efectúa una variación en la resistencia del estator R_s del +50% sobre su valor nominal. De igual forma, las Figuras A.6 y A.8 muestran las corrientes del estator.

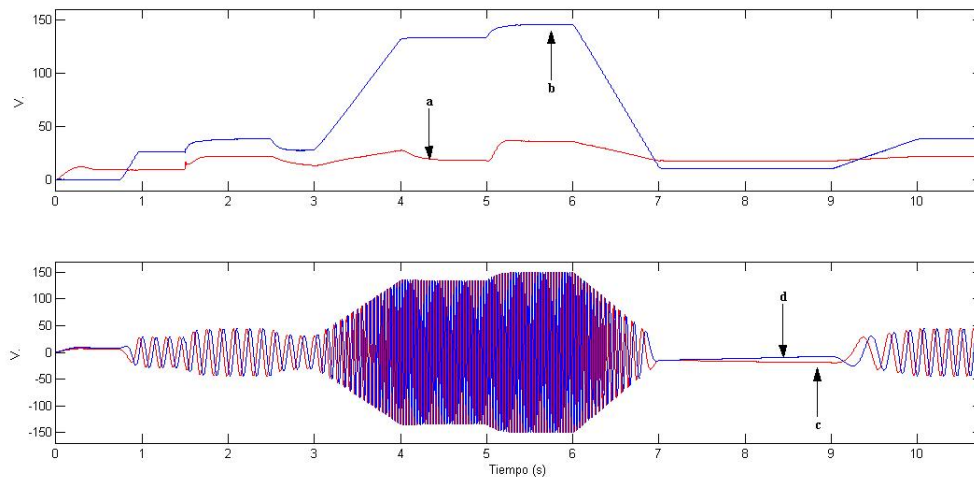


Figura A.5. Voltajes del estator, esquema *HOSMC-FOSMO*, variación del +50% en R_s : a) u_{sd} , b) u_{sq} , c) $u_{s\alpha}$, d) $u_{s\beta}$.

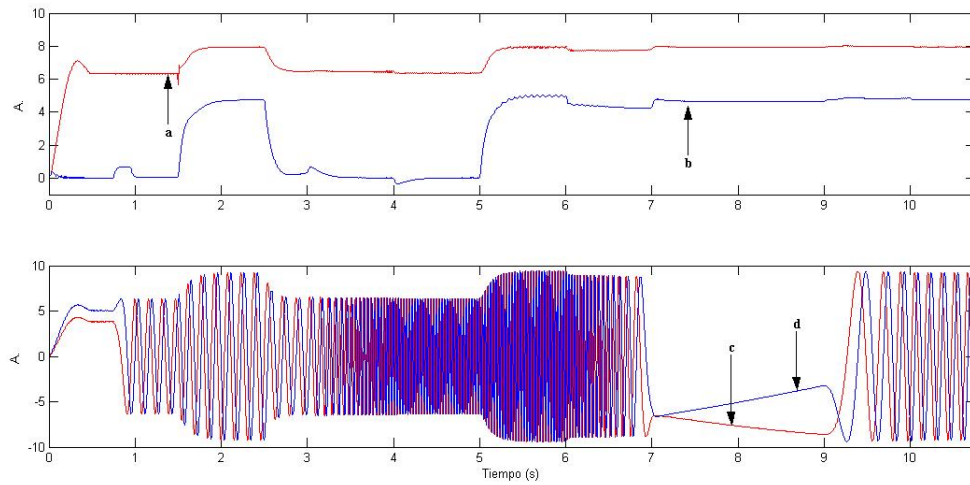


Figura A.6. Corrientes del estator, esquema *HOSMC-FOSMO*, variación del +50% en R_s : a) i_{sd} , b) i_{sq} , c) $i_{s\alpha}$, d) $i_{s\beta}$.

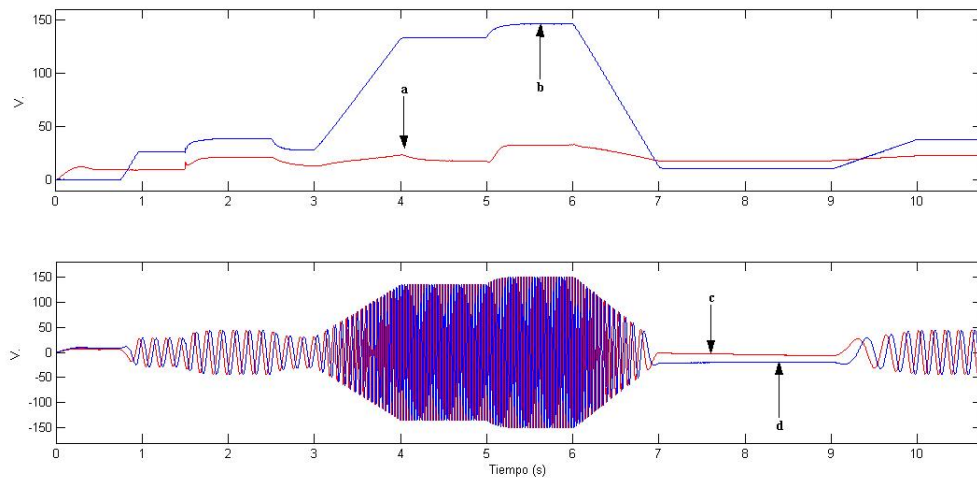


Figura A.7. Voltajes del estator, esquema *HOSMC-SOSMO*, variación del +50% en R_s : a) u_{sd} , b) u_{sq} , c) $u_{s\alpha}$, d) $u_{s\beta}$.

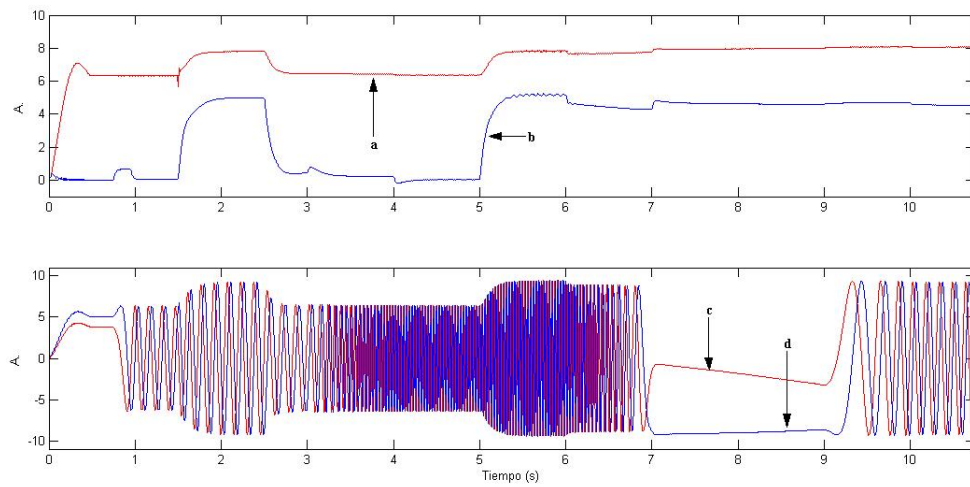


Figura A.8. Corrientes del estator, esquema *HOSMC-SOSMO*, variación del +50% en R_s : a) i_{sd} , b) i_{sq} , c) $i_{s\alpha}$, d) $i_{s\beta}$.

Bibliografía

- [1] Ehsani M., Gao Y. *Handbook of Automotive Power Electronics and Motor Drives*, edited by Ali Emadi, Taylor and Francis Group, London, 2005.
- [2] Jiang-Tao Cao, Hong-Hai Liu, Ping Li, Ping Li and David J. Brown. *State of the Art in Vehicle Active Suspensions Adaptive Control Systems Based on Intelligent Methodologies*. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems Vol.9, No. 3, September 2008, pp.392-405.
- [3] Zin A. *Sur la commande robuste de suspensions automobiles en vue du contrôle global de châssis*, Thèse. INPG Grenoble, 2005.
- [4] Ghanes M. *Observation et Commande de la Machine Asynchrone sans Capteur Mécanique*, thèse de doctorat, IRCCyN (Ecole Centrale de Nantes), November, 2005.
- [5] Conte G., Moog C.H, Perdon A.M. *Nonlinear Control System - An Algebraic Setting*, Springer-Verlang, London, 1999.
- [6] Bartolini G., Ferrara A., Usai E. *Chattering avoidance by second-order sliding mode control*, IEEE Transactions on Automatic Control 1998, 43(2):241-246.
- [7] Emelyanov S.V., Korovin S.K., Levant A. *High-order sliding modes in control systems*, Differential Equations 1993, 29(11):1627-1647.
- [8] Levant A. *Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control*, International Journal on Control 1993; 58(6):1247-1263.
- [9] Rao S., Buss M., Utkin V.I. *Simultaneous State and Parameter Estimation in Induction Motors Using First- and Second-Order Sliding Modes*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.56, No.9, pp 3369-3376, September 2009.
- [10] Fridman L., Levant A. *Sliding mode of higher order as a natural phenomenon in control theory*, In Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques, Garofalo F, Gliemo L (eds). Lecture Notes in Control and Information Sciences, v10 217. Springer:Berlin, 1996; 107-133.

- [11] Levant A. *Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence*, IEEE Transactions on Automatic Control 2001; 49(9):1447-1451.
- [12] Laghrouche S., Plestan F., Glumineau A. *A higher order sliding mode controller for a class of MIMO nonlinear systems: application to PM synchronous motor control*, American Control Conference ACC 2004, Boston, MA 2004.
- [13] Laghrouche S., Plestan F., Glumineau A. *A higher order sliding mode controller based on optimal linear quadratic control and integral sliding mode*, IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2004, Stuttgart, Germany, 2004.
- [14] Laghrouche S., Plestan F., Glumineau A. *Practical higher order sliding mode control: optimal control based approach and application to electromechanical systems*, In Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control, Edwards C., Fossas Colet E., Fridman L. (eds). Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 334. Springer: Berlin, 2006.
- [15] Levant A. *Robust exact differentiation via sliding mode technique*, Automatica 1998; 34(3):379-384.
- [16] Laghrouche S., Smaoui M., Plestan F., Brun X. *Higher order sliding mode control based on optimal approach of an electropneumatic actuator*, International Journal of Control 2006; 79(2): 119-131.
- [17] Laghrouche S., Plestan F., Glumineau A. *Higher order sliding mode control based on integral sliding mode*, Automatica 2007; 43(3): 531-537.
- [18] Traoré D., Plestan F., Glumineau A., de León J. *Sensorless induction motor: high order sliding mode controller and adaptive interconnected observer*, IEEE Transactions on Industrial Electronics - Special Issue on "Sliding Mode Control in Industrial Applications", Vol.55, No.11, pp 3818-3827, November 2008.
- [19] Levant A. *Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control*, International Journal of Control, vol.76, no.9/10, pp. 924-941, 2003.
- [20] Filippov A. F. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1988.
- [21] Plestan F., Glumineau A., Laghrouche S. *A new algorithm for high order sliding mode control*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 18, No. 4-5, pp. 441-453, 2008.
- [22] Blaschke F. *The principle of field orientation applied to the new transvector closed-loop control system for rotating field machine*, Siemens Rev., vol.93, pp. 217-220, 1972.
- [23] Montanari M., Tilli A. *Sensorless control of induction motors based on high-gain speed estimation and on-line stator resistance adaptation*, in Proc. IEEE IECON, Paris, France, 2006, pp. 1263-1268.

- [24] Yagiz N., Hcioglo Y. *Backstepping control of a vehicle with active suspension*, Control Engineering Practice, 2008, vol. 6, No. 12, pp 1457-1467.
- [25] Kiencke U., Nielsen L. *Automotive control systems: for engine, driveline and vehicle*. Berlin: Springer, 2000, ISBN 3540231390.
- [26] Gulez K., Guclu R. *CBA-neural network control of a non-linear full vehicle model*, Simulation Modelling Practice and Theory, 2008, vol. 16, No. 9, pp 1163-1176.
- [27] Koshkouei A.J., Burnham K.J. *Sliding Mode Controllers for Active Suspensions*, Proceedings of the 17th World Congress IFAC, July 6-11 2008, pp. 3416-3421
- [28] Glumineau A. *Curse de commande des systemès non linéaires*, Nantes: ECN, 2008.