

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS MEDIANTE EL CONCEPTO
DE ESTABILIDAD RELATIVA

POR

ING. MARIO ALBERTO LÓPEZ VEGA

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN
CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

AGOSTO DEL 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS MEDIANTE EL CONCEPTO
DE ESTABILIDAD RELATIVA

POR
ING. MARIO ALBERTO LÓPEZ VEGA

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN
CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

AGOSTO DEL 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS MEDIANTE EL CONCEPTO DE ESTABILIDAD RELATIVA**” realizada por el alumno **Ing. Mario Alberto López Vega**, matrícula 1505407 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis

Asesor
Dr. Cesar Elizondo González

Coasesor:
Dr. Cornelio Posadas Castillo

Coasesor:
Dr. Gerardo Romero Galván

Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado
Cd. Universitaria, a Agosto del 2010

Este trabajo lo dedico ...

RESUMEN

Publicación No. _____

Mario Alberto López Vega, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2010

Profesor Asesor: Dr. César Elizondo González

La estabilidad robusta y el desempeño de los sistemas de control con incertidumbre paramétrica, ha sido tema de interés en el área de control automático. Un buen procedimiento para resolver el problema de estabilidad robusta paramétrica es mapear éste a un problema de positividad robusta de una función multivariable polinómica.

En el presente trabajo, se determinan las cotas del parámetro del controlador, que estabilizan un sistema LTI con incertidumbre paramétrica, de tal manera que la parte real de las raíces del polinomio característico del sistema retroalimentado se encuentren en una región predeterminada. Se propone un algoritmo basado en *descomposición de signo*, herramienta matemática capaz de determinar la positividad robusta en condiciones necesarias y suficientes de funciones multivariables polinómicas. Éste algoritmo utiliza un reciente teorema de estabilidad y un teorema de estabilidad relativa, se define una tolerancia y se parte de un valor nominal de ganancia del controlador que satisface la estabilidad robusta relativa. El algoritmo genera intervalos de ganancia del controlador para encontrar las cotas máxima y mínima estimadas.

En el presente proyecto se incluyen tres ejemplos de aplicación, en donde la incertidumbre en los parámetros del sistema en lazo cerrado es analizada considerando distintos valores de tolerancia y obteniendo las cotas mínima y máxima estimadas del parámetro del controlador que estabiliza el sistema para cada ejemplo. El primero de ellos se refiere a un servomecanismo posicional, seguido de un intercambiador de calor y finalmente un miembro artificial.

Índice general

Resumen	iv
Índice general	v
Índice de tablas	viii
Índice de figuras	ix
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	1
1.2 Objetivo de la Tesis	3
1.3 Alcances	3
1.4 Estructura de la tesis	4
2 Preliminares Matemáticos	5
2.1 Un reciente criterio de estabilidad (C. Elizondo 2001)	5
2.2 Estabilidad Relativa	7
2.3 Breve descripción de descomposición de signo	7
2.3.1 Definición de la Operación	8

2.3.2	Representación (f_n, f_p)	9
2.3.3	Propiedades en la Representación (f_n, f_p)	10
2.3.4	Representación (α, β)	14
2.3.5	Propiedades en la Representación (α, β)	15
2.3.6	Partes Lineal, No-lineal e Independiente	16
2.3.7	Propiedades Básicas de las Partes Lineal y No-lineal	18
2.3.8	Límites de la Función	20
2.4	Teorema de Determinación de Signo mediante Partición de Cajas.	21
3	Resultados Principales	23
3.1	Motivación al estudio del caso	23
3.2	Introducción al Diseño de Controladores Robustos	24
3.3	Algoritmo	28
3.3.1	Diagrama de flujo	31
4	Aplicaciones	34
4.1	Servomecanismo Posicional	34
4.1.1	Planteamiento del problema	34
4.1.2	Solución del problema	35
4.2	Intercambiador de Calor	40
4.2.1	Planteamiento del problema	40
4.2.2	Solución del problema	43

4.3	Miembro Artificial	47
4.3.1	Planteamiento del problema	47
4.3.2	Solución del problema	50
5	Conclusiones y trabajo futuro	55
5.1	Conclusiones	55
5.2	Trabajo Futuro y recomendaciones	56
	Bibliografía	57

Índice de tablas

4.1	Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(s-a)$ de un servomecanismo posicional.	38
4.2	Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(-s-b)$ de un servomecanismo posicional.	39
4.3	Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(s-a)$ de un intercambiador de calor.	46
4.4	Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(-s-b)$ de un intercambiador de calor.	46
4.5	Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(s-a)$ de un miembro artificial.	53
4.6	Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(-s-b)$ de un miembro artificial.	53

Índice de figuras

2.1	Plano (f_p, f_n)	10
2.2	Rectángulo que contiene a la función en el plano (f_p, f_n)	13
2.3	Rectángulo en el plano (α, β)	15
2.4	Cajas Γ	18
2.5	Teorema del polígono	20
3.1	Región que muestra los valores de k que estabilizan el sistema en una región Γ para todo vector paramétrico $q \in Q$	26
3.2	No existe un punto k que estabilice el sistema para toda $q \in Q$	26
3.3	Relación entre K_{me}, K_{Me} con K_{min}, K_{max}	28
3.4	Cotas mínima y máxima estimadas que estabilizan al sistema en una región del plano s	29
3.5	Diagrama de Flujo del Algoritmo	32
4.1	Región de estabilidad preestablecida	36
4.2	Esquema de control de temperatura en un intercambiador de calor.	41

4.3	Diagrama de bloques del circuito de control de temperatura para el intercambiador de calor.	41
4.4	Región de estabilidad preestablecida	44
4.5	Modelo simplificado del sistema.	48
4.6	Sistema completo.	49

Capítulo 1

Introducción

1.1 Planteamiento del problema

La construcción del modelo matemático de un sistema real es en la mayoría de los casos complicado, ya que es imposible obtener una identificación exacta de los parámetros físicos del modelo [20]. Otro problema es la incertidumbre paramétrica, ésta se refiere a la falta de conocimiento del valor de los parámetros del modelo, solamente se conocen sus cotas inferiores y sus cotas superiores.

El problema de estabilidad robusta con incertidumbre paramétrica no es un problema nuevo, existen varios enfoques que buscan mejorar el diseño de controladores robustos [3, 4, 6]. En el enfoque polinomial, la estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo se determina a partir del polinomio característico $p(s, q)$, con coeficientes $c_i(q)$. De acuerdo al tipo de estructura de los parámetros del coeficiente $c_i(q)$, los polinomios característicos se clasifican en: intervalo, afín, multilineal y polinómico. La mayoría de la literatura se concentra en el análisis de estabilidad para polinomios intervalo, esto debido a que el análisis de robustez para el caso de polinomios con coeficientes intervalo y con coeficientes afín es relativamente fácil comparado

con el caso multilineal y polinómico [1]. Algunos trabajos que muestran lo mencionado anteriormente son el criterio de Routh-Hurwitz [26], teorema de Kharitonov [24] con extensiones a múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) [7] y "Edge Theorem" [5].

Otro método en espacio de estados se desarrolló como alternativa a las pruebas de estabilidad de Routh-Hurwitz o Nyquist [2, 10, 29]. En [29], el enfoque trata directamente con las raíces del polinomio característico, la correlación entre las incertidumbres paramétricas y la ubicación de los polos se usa para dar una representación gráfica de la estabilidad del sistema en el espacio de parámetros. Desafortunadamente al encontrarnos con sistemas de mayor orden e incertidumbres en un mayor número de parámetros, los coeficientes de la ecuación característica que describe el sistema son de tipo polinómico, enfrentándonos nuevamente a un problema más complejo.

El diseño de sistemas de control robusto es una de las áreas más importantes en aplicaciones de control industrial [18], por lo que ha sido tema de trabajo de diferentes investigadores [3, 4, 6], sin embargo pocas son las herramientas que se han desarrollado para el caso en el que los coeficientes del polinomio característico son funciones multivariantes polinómicas. En [9] se presenta un algoritmo que calcula márgenes de estabilidad para sistemas LTI con incertidumbre polinómica en los coeficientes de su polinomio característico, pero en la metodología de análisis utiliza una hiperesfera y no es lo más adecuado para la determinación de cotas. Además el algoritmo no es muy sistemático ya que utiliza pasos heurísticos y no aclara el procedimiento con el que se obtienen los resultados. Existen varias contribuciones importantes que abordan la problemática sobre diseño de controladores enfocándose principalmente en el tema de estabilidad robusta paramétrica en [11, 12, 28, 33].

El principal problema en control robusto paramétrico es encontrar el máximo y mínimo valor de los parámetros del controlador admisibles en un sistema con incertidumbre paramétrica sin pérdida de estabilidad. El origen del problema de estabilidad robusta paramétrica se reduce a

resolver la positividad robusta de una función multivariable polinómica.

Existen varios trabajos sobre diseño de controladores robustos basados en la positividad de una función polinómica $f(q)$ donde $q \in Q$, en [30, 32, 33], se resuelve por el método de expansión en polinomios de Bernstein y en [8, 22, 23] por la herramienta descomposición de signo, esta herramienta se puede encontrar en [13, 14].

En [17] se muestra que cuando una función multivariable polinómica no es muy sencilla, descomposición de signo presenta ciertas ventajas sobre polinomios de Bernstein. Por otra parte, en este trabajo se utilizó un reciente criterio de estabilidad [15] que presenta ventajas sobre los criterios de Routh, Hurwitz y Liénard-Chipart.

1.2 Objetivo de la Tesis

- Determinar las cotas de los parámetros del controlador que estabiliza un sistema lineal invariante en el tiempo de tal manera que las raíces del sistema retroalimentado queden con su parte real acotada en valores predeterminados incluyendo el caso de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica desarrollando una metodología de diseño basada en descomposición de signo y un reciente criterio de estabilidad.
- Desarrollar una herramienta matemática y/o computacional que permita obtener de manera más fácil y rápida los resultados que lleven a la solución del problema.

1.3 Alcances

El alcance que se pretende en esta investigación es lograr desarrollar un nuevo algoritmo que utilice como base descomposición de signo y un reciente criterio de estabilidad para encontrar cotas estimadas del parámetro del controlador para un sistema con incertidumbre paramétrica

del tipo polinómica. Un segundo alcance es dejar las bases listas para extender dicho algoritmo a un mayor número de parámetros ya que la complejidad del problema aumenta notablemente.

1.4 Estructura de la tesis

La estructura de la presente tesis es como sigue:

Capítulo dos. *Preliminares matemáticos.* Se exponen algunos criterios de estabilidad que trasladan el problema de estabilidad robusta a uno de positividad robusta de una funciones multivariable polinómicas, también es descrita la herramienta descomposición de signo, que es un método para probar la positividad robusta de dichas funciones obtenidas al aplicar estos criterios.

Capítulo tres. *Resultados principales.* Se analiza la problemática sobre diseño de controladores robustos y aplicando los preliminares matemáticos descritos en el capítulo dos, se propone un algoritmo capaz de determinar las cotas del parámetro del controlador, que estabilizan un sistema LTI con incertidumbre paramétrica, de tal manera que la parte real de las raíces del polinomio característico del sistema retroalimentado se encuentren en una región predeterminada.

Capítulo cuatro. *Aplicaciones.* En este capítulo se aplica el algoritmo, para determinar las cotas del parámetro del controlador en casos reales como lo son: un servomecanismo posicional, un intercambiador de calor y un miembro artificial.

Capítulo cinco. *Conclusiones y trabajo futuro.* En este capítulo se analizan los resultados obtenidos durante la investigación y se presentan sugerencias para trabajos futuros.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticos

En este capítulo se presenta una breve descripción de tres temas: sobre un reciente teorema de estabilidad, estabilidad relativa y descomposición de signo. En la combinación de este conjunto de teoremas y herramientas matemáticas está basado el desarrollo del presente trabajo.

2.1 Un reciente criterio de estabilidad (C. Elizondo 2001)

Este reciente criterio [15] presenta una tabla que determina el número de raíces en el semiplano derecho del plano complejo de un polinomio real. Dicha tabla se fundamenta en el principio del argumento, índices de Cauchy, cadenas de Sturm y cadenas modificadas de Sturm. La tabla presenta algunas ventajas: no requiere de divisiones, las operaciones numéricas se reducen con respecto a otros criterios y los coeficientes son funciones multivariadas polinómicas cuya positividad robusta se obtiene en condiciones necesarias y suficientes utilizando descomposición de signo [13, 14]. Determinando entonces, la estabilidad robusta para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica.

Teorema 2.1.1. [15] Dado un polinomio $p(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots + C_{n-1}s^{n-1} + C_ns^n$ con coeficientes reales, el número de raíces a la derecha del plano de los complejos es igual al número de variaciones de signo en la columna σ en el siguiente arreglo.

σ_1	C_n	C_{n-2}	C_{n-4}	\cdots
σ_2	C_{n-1}	C_{n-3}	C_{n-5}	\cdots
σ_3	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	\cdots	
σ_4	$e_{4,1}$	$e_{(4,2)}$	\cdots	
\vdots	\vdots	\vdots		
$\sigma_{(n-1)}$	$e_{(n-1),1}$	$e_{(n-1),2}$		
σ_n	$e_{(n,1)}$			
σ_{n+1}	$e_{(n+1),1}$			

$$e_{i,j} = (e_{i-1,1}e_{i-2,j+1} - e_{i-2,1}e_{i-1,j+1}), \forall 3 \leq i \leq n+1$$

$$e_{i,j} = C_{n+1-i-2(j-1)} \forall i \leq 2$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \forall i \leq 2$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \prod_{j=1}^{(i+1-m)/2} \text{Sign}(e_{(m+2(j-1)),1}) \forall i \geq 3$$

$m = 3$ para i par, $m = 2$ para i non.

La metodología de cálculo del signo σ_i de un renglón es mucho más sencilla que la expresión matemática que lo determina: el signo σ_i de un renglón se determina multiplicando el signo de $e_{(i),1}$ por el signo del elemento inmediato superior a éste, es decir el de $e_{(i-1),1}$ y por los signos de los elementos superiores de la misma columna e "brincando" de dos en dos. Por ejemplo: $\sigma_7 = \text{sign}(e_{(7),1})\text{sign}(e_{(6),1})\text{sign}(e_{(4),1})\text{sign}(e_{(2),1})$.

En el caso de que un elemento $e_{i,1}$ sea cero, entonces se substituye el cero por un $\varepsilon > 0$ y se continúa el cálculo de la tabla. En caso de todos los elementos $e_{i,j}$ de un renglón sean de valor cero, entonces se substituye el renglón completo por la derivada del renglón superior.

Debe de notarse que cada uno de los elementos $e_{i,j}$ fueron elaborados sin utilizar la división empleada en el criterio de Routh, por lo tanto los elementos $e_{i,j}$ en el caso de incertidumbre

paramétrica son funciones multivariables polinómicas

2.2 Estabilidad Relativa

En la aplicación industrial de la teoría de control, normalmente es necesario que el sistema además de ser estable tenga un cierto desempeño, para esto es necesario que las raíces de su polinomio característico guarden cierta posición en el plano de los complejos. Con esta finalidad se muestra el siguiente teorema que determina si la parte real de la raíces se encuentra contenida en una región específica de los reales, acotando así la velocidad de respuesta del sistema.

Teorema 2.2.1. [16] *Sea $p(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + s^n$ el polinomio característico con coeficientes reales positivos correspondiente un sistema LTI, sean a y b dos números reales positivos. Entonces las raíces de $p(s)$ están localizadas, en el plano de los complejos, a la izquierda de $-a$ y a la derecha de $-b$ si y solo si los polinomios $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ son asintóticamente estables.*

2.3 Breve descripción de descomposición de signo

En el área de control robusto paramétrico se manejan propiedades como: estabilidad robusta, controlabilidad robusta y observabilidad robusta. El cumplimiento de cualquiera de estas propiedades en un sistema LTI con incertidumbre paramétrica puede ser mapeado a un problema de positividad robusta de una función multivariable polinómica dependiente en un vector de parámetros $q = [q_1 q_2 \dots q_\ell]^T$, de cada parámetro se conocen solamente las cotas inferior y superior $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$ y el conjunto de todos los vectores q forman una caja de incertidumbre paramétrica $Q = \{q = [q_1 q_2 \dots q_\ell]^T | q_i \in [q_i^-, q_i^+] \forall i, i = 1, 2, \dots, \ell\}$. Para resolver el problema de positividad robusta de funciones multivariable polinómicas dependientes de un vector con incertidumbre paramétrica q , fue desarrollado en [13] la siguiente herramienta matemática.

Descomposición de signo [13], [14] es una herramienta matemática que mediante el análisis

de puntos extremos es capaz de determinar en condiciones necesarias y suficientes la positividad robusta de una función multivariable polinómica.

Nota 2.3.1. *Todas las demostraciones de lemas, teoremas y corolarios sobre descomposición de signo se encuentran en [13]*

2.3.1 Definición de la Operación

Al analizar una función es común la necesidad de descomponer ésta en sus partes que la constituyen de acuerdo al caso, por ejemplo si se está haciendo un análisis de un polinomio $p(s)$, puede ser útil descomponerlo en sus partes par e impar; si se está haciendo el análisis de un polinomio en el dominio de la frecuencia $p(j\omega)$, normalmente es útil descomponerlo en sus partes real e imaginaria, pero si se está haciendo el análisis de la positividad de una función, podemos pensar en descomponerla en sus partes positiva y negativa.

La determinación de la positividad de una función real polinómica multivariable es un problema difícil de resolver, desde un punto de vista computacional la positividad de un determinante es un problema NP Hard [21, 27], normalmente se le ve a la función real como un todo completo y posiblemente eso aumenta la dificultad del problema, en vez de ver la función descompuesta en sus posibles partes que la constituyen. En este caso se propuso en [13, 14] descomponer una función multivariable $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ en sus partes positiva y negativa $f_p(\cdot)$, $f_n(\cdot)$, para poder definir esta descomposición, es necesario primeramente recordar el concepto de *cono convexo positivo* $P = \{x \in \mathbb{R}^\ell | x_i \geq 0\}$ [19], así como las siguientes definiciones:

Definición 2.3.1. [19] *Sea P un cono convexo positivo en un espacio vectorial \mathbb{R}^ℓ , para $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ se dice que $x \geq y$ ($x > y$) con respecto a P si $x - y \in P$ ($x - y \in P^\circ$, el interior de P).*

Definición 2.3.2. [19] *Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ es una función no-decreciente en Q si $x \geq y$ implica $f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in Q$.*

Las funciones no-decrecientes presentan algunas propiedades interesantes respecto a las operaciones de suma y multiplicación como se muestran mas adelante.

Definición 2.3.3. [13, 14] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ tiene descomposición de signo en Q si existen dos funciones acotadas no-decrecientes $f_n(\cdot) \geq 0$, $f_p(\cdot) \geq 0$, tales que $f(q) = f_p(q) - f_n(q)$ para toda $q \in Q$. Dichas funciones se llamarán: la parte positiva de la función $f_p(\cdot)$ y la parte negativa de la función $f_n(\cdot)$.

$$\begin{aligned} f(q) &= f_p(q) - f_n(q) \quad \forall q \in Q \\ f_p(\cdot) &\triangleq \text{Parte Positiva de } f(\cdot) \\ f_n(\cdot) &\triangleq \text{Parte Negativa de } f(\cdot) \end{aligned}$$

Nota 2.3.2. Los nombres “parte positiva” y “parte negativa”, son sólo por facilidad de expresión, las dos son positivas o por lo menos no-negativas, pero una aparece sumando y la otra restando.

Debe notarse que si una función está definida en $Q' \subset \mathbb{R}^\ell$ que no está contenida en un cono convexo positivo, entonces se puede hacer una transformación de coordenadas para que la función quede definida en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ como se muestra en el siguiente hecho.

Hecho 2.3.1. [13, 14] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en $\hat{Q} \subset \mathbb{R}^\ell$ que no está contenida en un cono convexo positivo, entonces siempre se puede hacer una transformación de coordenadas $\hat{q}_i = \hat{q}_i^- + (q_i - q_i^-)(\hat{q}_i^+ - \hat{q}_i^-)/(q_i^+ - q_i^-)$ tal que $q_i^+ > q_i^- \geq 0$ para que la función quede definida en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$.

En caso de transformarla a $q_i^- = 0$ y $q_i^+ = 1$, que resulta muy cómodo, entonces $\hat{q}_i = \hat{q}_i^- + (\hat{q}_i^+ - \hat{q}_i^-)q_i$

2.3.2 Representación (f_n, f_p)

Cuando una función continua $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ se descompone en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ en sus partes positiva y negativa $f_p(\cdot)$ y $f_n(\cdot)$, realmente se está haciendo una transformación de \mathbb{R}^ℓ a \mathbb{R}^2 , la representación gráfica de la función en un plano (f_n, f_p) es de utilidad para entender más fácilmente las propiedades que poseen las partes positiva y negativa de la función, para lo cual se establece la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1. [13, 14] Toda función continua $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ con descomposición de signo en el conjunto convexo $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$, se puede expresar como una transformación de \mathbb{R}^ℓ a \mathbb{R}^2 mediante sus partes positiva y negativa $f_p(\cdot)$ y $f_n(\cdot)$ con representación gráfica en el plano (f_n, f_p) .

$$\mathbb{R}^\ell \xrightarrow{(f_n(\cdot), f_p(\cdot))} \mathbb{R}^2$$

Cuando una función con descomposición de signo en Q es igual a cero para todo q elemento de Q , implica que $f_p(q) = f_n(q) \forall q \in Q$ y su representación gráfica en el plano (f_n, f_p) es una línea recta a 45° que contiene al origen, a la cual nos referiremos como *la recta a 45°* , los puntos arriba de ella corresponden a la representación gráfica de funciones con valor positivo y obviamente los de abajo a negativo.

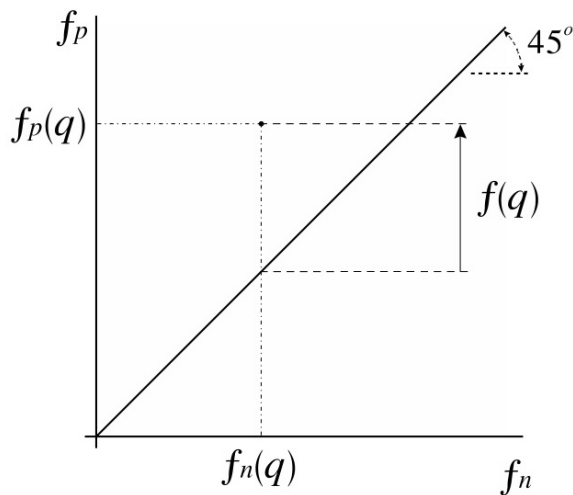


Figura 2.1: Plano (f_p, f_n)

2.3.3 Propiedades en la Representación (f_n, f_p)

Las funciones que poseen descomposición de signo presentan la propiedad de conservar la descomposición de signo en las operaciones de suma, resta y multiplicación como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. [13, 14] Sean $f, g : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con descomposición de signo en Q ; entonces: $f(q) + g(q)$, $f(q) - g(q)$ y $f(q)g(q)$ son funciones que tienen descomposición de signo en Q :

$$\begin{aligned}
f(q) + g(q) &= (f(q) + g(q))_p - (f(q) + g(q))_n \\
(f(q) + g(q))_n &= (f_n(q) + g_n(q)), \quad (f(q) + g(q))_p = (f_p(q) + g_p(q)) \\
f(q) - g(q) &= (f(q) - g(q))_p - (f(q) - g(q))_n \\
(f(q) - g(q))_n &= (f_n(q) + g_p(q)), \quad (f(q) - g(q))_p = (f_p(q) + g_n(q))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(q)g(q) &= (f(q)g(q))_p - (f(q)g(q))_n \\
(f(q)g(q))_n &= (f_p(q)g_n(q) + f_n(q)g_p(q)), \quad (f(q)g(q))_p = (f_p(q)g_p(q) + f_n(q)g_n(q))
\end{aligned}$$

La forma como se obtiene la resta de cualquier par de funciones en el teorema 2.3.1 asegura que las expresiones de la parte positiva y negativa sean funciones no negativas y no-decrecientes, pero existe el caso particular donde se pueden obtener expresiones más simples.

Otras propiedades de las funciones que tienen descomposición de signo, son las referentes a las cotas de la función, para lo cual es necesario definir algunos conceptos antes de analizar dichas propiedades.

Definición 2.3.4. [13, 14] Se le llamará *vértice mínimo y máximo Euclidiano* v^{\min} , v^{\max} a los vectores elementos de $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ con mínima y máxima norma Euclidiana respectivamente.

$$\|v^{\min}\|_2 = \min_{q \in Q} \|q\|_2, \quad \|v^{\max}\|_2 = \max_{q \in Q} \|q\|_2$$

Lema 2.3.1. [13, 14] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua no-decreciente y sea $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min} , v^{\max} , entonces:

$$\min_{q \in Q} f(q) = f(v^{\min}), \quad \max_{q \in Q} f(q) = f(v^{\max})$$

La aplicación del lema anterior 2.3.1 a las partes positiva y negativa de una función permite obtener una propiedad del acotamiento de cada una de estas partes como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. [13, 14] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función con descomposición de signo en Q , sea $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min} , v^{\max} , entonces las partes positiva y negativa de la función están acotadas como se muestra:

$$f_p(v^{\min}) \leq f_p(q) \leq f_p(v^{\max}) \quad \forall q \in Q, \quad f_n(v^{\min}) \leq f_n(q) \leq f_n(v^{\max}) \quad \forall q \in Q$$

El hecho de que las partes positiva y negativa de una función estén limitadas por sus valores mínimo y máximo da lugar a poder obtener cotas de la función analizando solo sus partes positiva y negativa en los vértices mínimo y máximo Euclidianos como aparece en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3. [13, 14] (Teorema del Rectángulo) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min} , v^{\max} , entonces: **a)** $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$ y $f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min})$ respectivamente, **b)** la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in Q$ en el plano (f_n, f_p) está contenida en el rectángulo con vértices $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\min}))$, $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\max}))$, $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$ y $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$, **c)** si el vértice inferior derecho $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$ está arriba de la recta de 45° entonces la función $f(q) > 0 \quad \forall q \in Q$, **d)** si el vértice superior izquierdo $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$ está abajo de la recta de 45° entonces la función $f(q) < 0 \quad \forall q \in Q$.

La positividad de la cota inferior del teorema anterior 2.3.3, es una condición suficiente de positividad de la función. Cuando la cota $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$ es negativa no implica que existan vectores q en Q para los cuales la función sea negativa. Esto es debido a que la función no llena todo el rectángulo al ser evaluada en todos los vectores de Q , la función solamente cubre la zona que está dibujada en oscuro dentro del rectángulo. Así que cuando la cota es negativa es necesario hacer una división de la caja $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ y definirla como $Q = [q_1^-, q_1^+] \times [q_2^-, q_2^+] \times \cdots \times [q_\ell^-, q_\ell^+]$, podemos dividir el intervalo de cada variable $[q_i^-, q_i^+]$ en k partes, generando k nuevos intervalos: $[q_i^-, q_i^1], [q_i^1, q_i^2], \cdots, [q_i^j, q_i^{j+1}], \cdots, [q_i^{k-1}, q_i^+]$, podemos llamarle $[\gamma_i^-, \gamma_i^+]$ a uno de los k nuevos intervalos de una de los ℓ parámetros, dando lugar así a la generación de k^ℓ nuevas cajas Γ , siendo una de ellas: $\Gamma^i = [\gamma_1^-, \gamma_1^+] \times [\gamma_2^-, \gamma_2^+] \times \cdots \times [\gamma_\ell^-, \gamma_\ell^+]$. Con lo anterior la caja original queda expresada como $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y tomando $\mu^{\min}, \mu^{\max} \in \Gamma^i$ como los vértices mínimo y máximo Euclidianos de Γ^i se puede establecer el siguiente teorema.

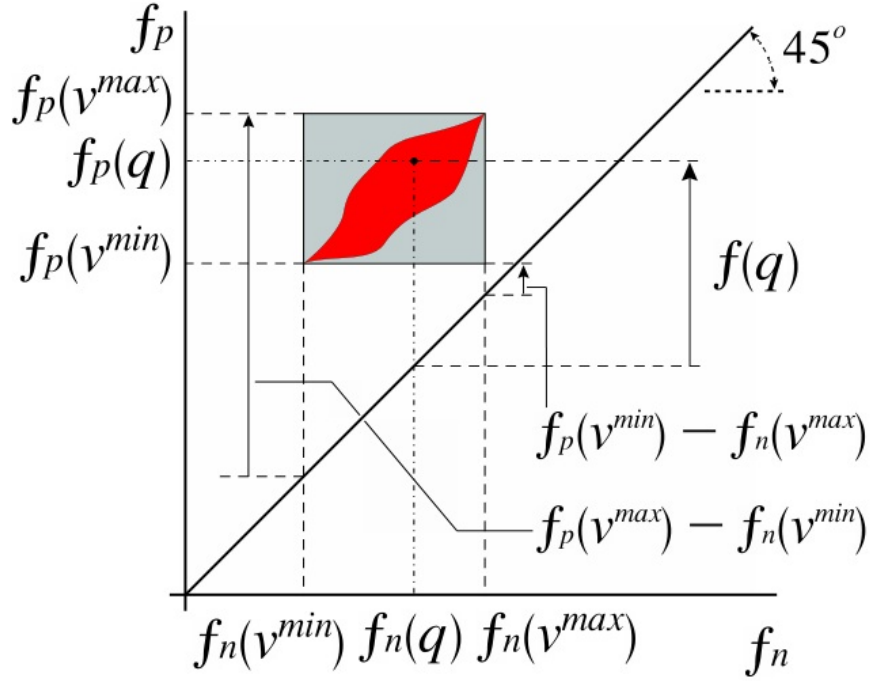


Figura 2.2: Rectángulo que contiene a la función en el plano (f_p, f_n)

Lema 2.3.2. [13, 14]. Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min} , v^{\max} . Entonces la función $f(q)$ es positiva (negativa) en Q si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y Cota $\inf \geq c > 0$ para cada caja Γ^i (Cota $\sup \leq c < 0$ para cada caja Γ^i).

El determinar la positividad o negatividad de una función en todo su dominio, no es un problema fácil, de tal forma que no es raro que de las cotas obtenidas de la caja original no se pueda determinar el signo de la función en todo su dominio, necesitando así hacer uso de la división de cada variable q_i en k partes, que puede tomarse como $k = 2$ y dividir en dos partes iguales. De esta manera se generan 2^ℓ nuevas cajas Γ , si en cada una de las nuevas cajas no existe algún valor de $f(\mu^{\min})$ o $f(\mu^{\max})$ que demuestre la pérdida de condición de signo que se está determinando, entonces a la caja Γ^i que no cumpla la condición de positividad $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) > 0$ o de negatividad $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) < 0$, si es lo que se está analizando, se le vuelve a aplicar el proceso de dividir cada variable q_i en dos partes iguales y verificar la condición de signo que se desea determinar en cada una de las 2^ℓ nuevas cajas de Γ^i .

Para una función con descomposición de signo en Q , se puede determinar el signo en todo su dominio aplicando el lema anterior 4.5, inicialmente con $k = 2$, dividiendo cada variable en dos partes iguales, generando 2^ℓ cajas Γ . Mediante aplicaciones sucesivas del proceso de división en dos partes iguales a cada variable q_i sólo en la caja que así lo requiera se genera el conjunto de cajas Γ , “cerrándose” los puntos de análisis sólo donde se necesita y hasta donde se necesita, ya que la división de variables se aplica sólo en las nuevas cajas que lo requieran.

2.3.4 Representación (α, β)

La facilidad para resolver un problema depende de las coordenadas en que se este analizando, existe por lo menos un sistema de coordenadas además de (f_n, f_p) , que llamaremos (α, β) y están giradas 45° con respecto a las (f_n, f_p) , por esa razón el rectángulo que contiene a la función aparece como se observa en la figura 3.5. Estas coordenadas presentan ventajas tanto en algunas operaciones matemáticas como en la interpretación gráfica.

Definición 2.3.5. [13, 14] Sean $f_n(q)$ y $f_p(q)$ las componentes de una función $f(q)$ con descomposición de signo en Q . Sea T la transformación lineal descrita tal que existe T^{-1} , entonces se le llamará una representación de la función $f(q)$ en coordenadas (α, β) a la transformación lineal $(\alpha(q), \beta(q)) = T(f_n(q), f_p(q))$ y la transformación lineal inversa de una representación $(\alpha(q), \beta(q))$ será una representación $(f_n(q), f_p(q))$ de la función.

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & T^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \alpha(q) \\ \beta(q) \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} f_n(q) \\ f_p(q) \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} f_n(q) \\ f_p(q) \end{bmatrix} &= T^{-1} \begin{bmatrix} \alpha(q) \\ \beta(q) \end{bmatrix} \\
 \alpha(q) &= f_p(q) + f_n(q), & f_p(q) &= \frac{1}{2}(\alpha(q) + \beta(q)) \\
 \beta(q) &= f_p(q) - f_n(q), & f_n(q) &= \frac{1}{2}(\alpha(q) - \beta(q))
 \end{aligned}$$

Debe notarse que como $\alpha(q)$ es una suma de funciones no-decrecientes y no negativas entonces $\alpha(q)$ es no-decreciente; $\beta(q) = f(q)$, y $\alpha(q) \geq \beta(q)$ para toda función $f(q)$ y para todo vector $q \in Q$.

2.3.5 Propiedades en la Representación (α, β)

Las operaciones de suma, resta y el producto de funciones que tienen descomposición de signo, se puede efectuar en la representación (α, β) y el producto se efectúa con mayor facilidad que en (f_p, f_n) , para obtener estas propiedades son necesarios los siguientes lemas y corolario:

Lema 2.3.3. [13, 14] Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con descomposición de signo en Q , entonces la suma, resta y multiplicación de las funciones $f_1(q), f_2(q)$ queda expresada en la representación (α, β) por:

$$\begin{array}{ll} \text{Suma } f_1(q) + f_2(q) & \alpha(q) = \alpha_1(q) + \alpha_2(q), \quad \beta(q) = \beta_1(q) + \beta_2(q) \\ \text{Resta } f_1(q) - f_2(q) & \alpha(q) = \alpha_1(q) + \alpha_2(q), \quad \beta(q) = \beta_1(q) - \beta_2(q) \\ \text{Producto } f_1(q)f_2(q) & \alpha(q) = \alpha_1(q)\alpha_2(q), \quad \beta(q) = \beta_1(q)\beta_2(q) \end{array}$$

Las transformaciones de la definición 2.3.5 permiten trasladar los resultados del teorema del rectángulo 2.3.3 de $(f_n(q), f_p(q))$ a $(\alpha(q), \beta(q))$ como se expresa en el corolario siguiente, de acuerdo a la figura 2.3.

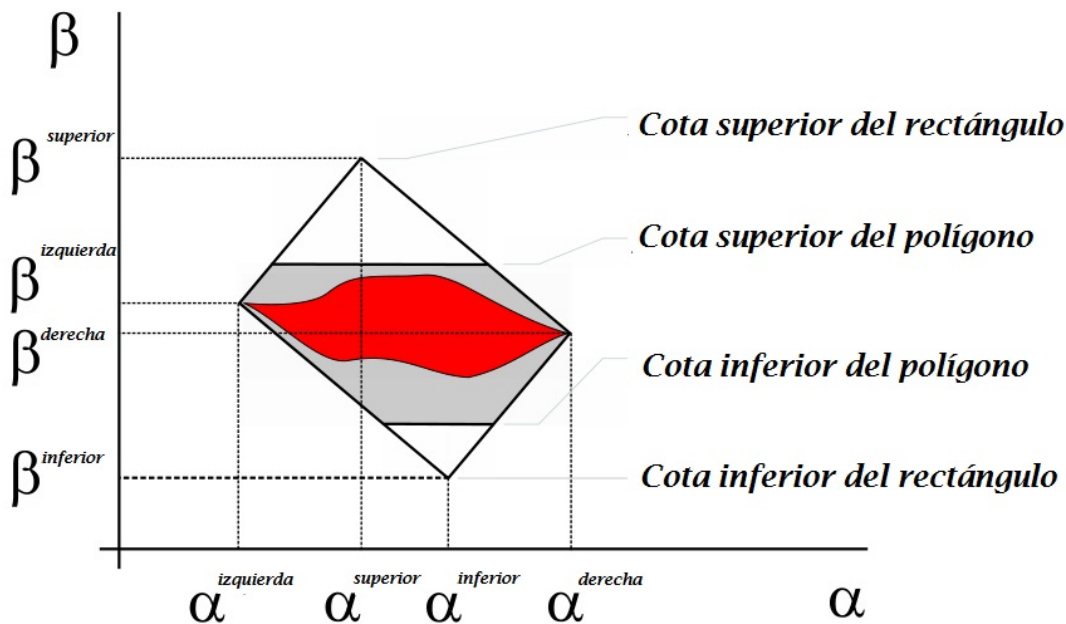


Figura 2.3: Rectángulo en el plano (α, β)

Corolario 2.3.1. [13, 14] (Corolario del Rectángulo) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo

Euclidianos v^{\min} , v^{\max} , entonces: **a)** $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por $\frac{1}{2}(\alpha(v^{\min}) + \beta(v^{\min}) - \alpha(v^{\max}) + \beta(v^{\max}))$ y $\frac{1}{2}(\alpha(v^{\max}) + \beta(v^{\max}) - \alpha(v^{\min}) + \beta(v^{\min}))$ respectivamente, **b)** la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in Q$ en el plano (α, β) está contenida en el rectángulo con vértices: $\alpha^{izq} = \alpha(v^{\min})$, $\beta^{izq} = \beta(v^{\min})$; $\alpha^{der} = \alpha(v^{\max})$, $\beta^{der} = \beta(v^{\max})$; $\alpha^{\inf} = \frac{1}{2}(\alpha(v^{\min}) + \alpha(v^{\max})) - \frac{1}{2}(\beta(v^{\max}) - \beta(v^{\min}))$, $\beta^{\inf} = \frac{1}{2}(\beta(v^{\min}) + \beta(v^{\max})) - \frac{1}{2}(\alpha(v^{\max}) - \alpha(v^{\min}))$; $\alpha^{\sup} = \frac{1}{2}(\alpha(v^{\min}) + \alpha(v^{\max})) + \frac{1}{2}(\beta(v^{\max}) - \beta(v^{\min}))$, $\beta^{\sup} = \frac{1}{2}(\beta(v^{\min}) + \beta(v^{\max})) + \frac{1}{2}(\alpha(v^{\max}) - \alpha(v^{\min}))$; **c)** si el vértice inferior $(\alpha^{\inf}, \beta^{\inf})$ está arriba del eje α en el plano (α, β) entonces la función $f(q) > 0 \forall q \in Q$, **d)** si el vértice superior $(\alpha^{\sup}, \beta^{\sup})$ está abajo del eje α en el plano (α, β) entonces la función $f(q) < 0 \forall q \in Q$.

2.3.6 Partes Lineal, No-lineal e Independiente

Al analizar la positividad de una función $f(q)$ con descomposición de signo en Q con $q_j \in [q_j^-, q_j^+]$ para todo $q \in Q$, es muy común la necesidad de hacer dicho análisis en un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_j \Gamma^j$. En cada una de las cajas Γ^j con vértices mínimo y máximo Euclidianos μ^{\min} , μ^{\max} , cada componente de q se puede expresar como $q_i = \mu_i^{\min} + \delta_i$ donde $\delta_i \in [0, \delta_i^{\max}] \mid \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}$, entonces se puede considerar la existencia de una caja Δ con vértices mínimo y máximo Euclidianos: $\mathbf{0}$ y δ^{\max} donde este último es $\delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$ y $\Delta = \{\delta = [\delta_1 \delta_2 \dots \delta_i]^T \mid \delta_i \in [0, \delta_i^{\max}], \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}\} \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$; de esta manera se puede expresar $q = \mu^{\min} + \delta \forall \delta \in \Delta, \forall q \in \Gamma$.

Es muy conocido que una función puede tener una parte lineal y otra no-lineal, entonces la función $f(q)|_{q \in \Gamma} = f(\mu^{\min} + \delta)$ debe contener estas partes que deben ser función de δ ya que μ^{\min} es una constante en la caja Γ^j .

Una manera fácil de encontrar la parte lineal y otra no-lineal es considerando que ellas no contienen términos independientes de δ , y por lo tanto son nulas al evaluarlas en $\delta = \mathbf{0}$, de tal forma que si se evalúa la función en $\delta = \mathbf{0}$ se obtiene $f(\mu^{\min} + \mathbf{0}) = f(\mu^{\min})$, siendo también esta última una parte de la función $f(q)$ que es la parte independiente de δ . Esto concuerda con la serie de Taylor de $f(q)$ donde $q = \mu^{\min} + \delta$:

$$f(q) = f(\mu^{\min}) + \sum_{i=1}^{\ell} \left. \frac{\partial f(q)}{\partial q_i} \right|_{\mu_i} \delta_i + \Phi(\delta)$$

Se puede ver que la función está compuesta de tres partes: un término independiente de δ que es $f(\mu^{\min})$, otra parte lineal que es el gradiente de la función $f(q)$ evaluado en μ^{\min} y multiplicado por el vector δ y la función $\Phi(\delta)$ que representa los términos de orden superior en δ . La parte no-lineal $\Phi(\delta)$ puede ser difícil de obtener y se puede despejar restando de $f(q)|_{q \in \Gamma} = f(\mu^{\min} + \delta)$ la parte $f(\mu^{\min})$ y la parte lineal, dando lugar así a la siguiente proposición.

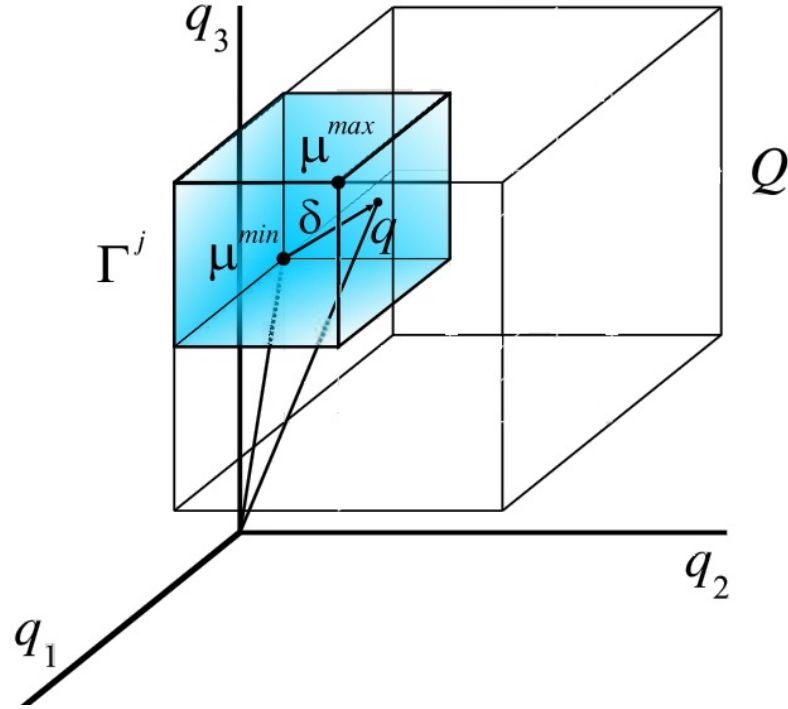
Proposición 2.3.2. [13, 14] Sea $f : \mathbb{R}^{\ell} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^{\ell}$, sea Γ una caja contenida en Q con un conjunto de vértices $\{\mu^i\}$ con vértices mínimo y máximo Euclidianos μ^{\min} , μ^{\max} , sea $\Delta = \{\delta \mid \delta_i \in [0, \delta_i^{\max}], \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}\} \subset Q \subset P \subset \mathbb{R}^{\ell}$ con un conjunto de vértices $\{\delta^i\}$ con vértices mínimo y máximo Euclidianos $\mathbf{0}$ y $\delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$, y sea $q \in \Gamma$ tal que $q = \mu^{\min} + \delta$ donde $\delta \in \Delta$, entonces la función $f(q)$ se puede expresar mediante sus partes lineal, no-lineal e independiente en su mínima expresión, para toda $q \in \Gamma$.

$$f(q) = f^{\min} + f_L(\delta) + f_N(\delta) \mid \delta \in \Delta \quad \forall q \in \Gamma$$

$$f^{\min} \equiv \text{Parte Independiente} = f(\mu^{\min})$$

$$f_L(\delta) \equiv \text{Parte Lineal} = \nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta \quad \forall \delta \in \Delta$$

$$f_N(\delta) \equiv \text{Parte No-lineal} = f(\mu^{\min} + \delta) - f^{\min} - f_L(\delta) \quad \forall \delta \in \Delta$$

Figura 2.4: Cajas Γ

La expresión de la parte no lineal se puede lograr desarrollando $f(\mu^{\min} + \delta)$, obteniendo así una expresión algebraica de $f_N(\delta)$, si esto resulta muy complicado para alguna función en particular entonces la aplicación es sólo numérica obteniendo así sólo el valor de la parte no-lineal en el punto deseado. Como un ejemplo mucho muy simple de esta descomposición, podemos tomar la función $f(q) = 3 + 2q_1 - 4q_2 + q_1^2$, entonces $f^{\min} = 3 + 2\mu_1^{\min} - 4\mu_2^{\min} + \mu_1^{\min 2}$, $f_L(\delta) = 2\delta_1 - 4\delta_2 + 2\mu_1^{\min}\delta_1$ y $f_N(\delta) = \delta_1^2$.

2.3.7 Propiedades Básicas de las Partes Lineal y No-lineal

De acuerdo a la proposición 2.3.2, las partes: negativa, positiva, alfa y beta de una función se pueden descomponer en sus partes lineal, no-lineal e independiente, así también las partes lineal, no-lineal e independiente de una función, se pueden descomponer en sus partes negativa, positiva, alfa y beta.

Al hacer un análisis de positividad de una función que es resultado de la operación matemática de otras funciones, entonces se presenta la necesidad de obtener las partes lineal, no-lineal e independiente de la suma, resta o producto de funciones, que se pueden obtener mediante el siguiente hecho.

Hecho 2.3.2. [13] Sean $f_1(q)$ y $f_2(q)$ dos funciones con descomposición de signo en Q , sea $\Gamma \subseteq Q$ una caja para el cual $f_1(q) = f_1^{\min} + f_{1L}(\delta) + f_{1N}(\delta)$ y $f_2(q) = f_2^{\min} + f_{2L}(\delta) + f_{2N}(\delta)$ $\forall q \in \Gamma$, entonces la representación alfa, beta de la suma $f_1(q) + f_2(q)$, resta $f_1(q) - f_2(q)$ y producto $f_1(q)f_2(q)$ $\forall q \in \Gamma$ de las funciones está dado por $\alpha = \alpha^{\min} + \alpha_L(\delta) + \alpha_N(\delta)$, $\beta = \beta^{\min} + \beta_L(\delta) + \beta_N(\delta)$ de acuerdo a lo siguiente:

Suma

$$\begin{aligned}\alpha^{\min} &= \alpha_1^{\min} + \alpha_2^{\min}, & \beta^{\min} &= \beta_1^{\min} + \beta_2^{\min} \\ \alpha_L(\delta) &= \alpha_{1L}(\delta) + \alpha_{2L}(\delta), & \beta_L(\delta) &= \beta_{1L}(\delta) + \beta_{2L}(\delta) \\ \alpha_N(\delta) &= \alpha_{1N}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta), & \beta_N(\delta) &= \beta_{1N}(\delta) + \beta_{2N}(\delta)\end{aligned}$$

Resta

$$\begin{aligned}\alpha^{\min} &= \alpha_1^{\min} + \alpha_2^{\min}, & \beta^{\min} &= \beta_1^{\min} - \beta_2^{\min} \\ \alpha_L(\delta) &= \alpha_{1L}(\delta) + \alpha_{2L}(\delta), & \beta_L(\delta) &= \beta_{1L}(\delta) - \beta_{2L}(\delta) \\ \alpha_N(\delta) &= \alpha_{1N}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta), & \beta_N(\delta) &= \beta_{1N}(\delta) - \beta_{2N}(\delta)\end{aligned}$$

Producto

$$\begin{aligned}\alpha^{\min} &= \alpha_1^{\min} \alpha_2^{\min} \\ \alpha_L(\delta) &= \alpha_1^{\min} \alpha_{2L}(\delta) + \alpha_2^{\min} \alpha_{1L}(\delta) \\ \alpha_N(\delta) &= \alpha_1^{\min} \alpha_{2N}(\delta) + \alpha_{1L}(\delta)(\alpha_{2L}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta)) + \alpha_{1N}(\delta)(\alpha_2^{\min} + \alpha_{2L}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta))\end{aligned}$$

$$\beta^{\min} = \beta_1^{\min} \beta_2^{\min}$$

$$\begin{aligned}\beta_L(\delta) &= \beta_1^{\min} \beta_{2L}(\delta) + \beta_2^{\min} \beta_{1L}(\delta) \\ \beta_N(\delta) &= \beta_1^{\min} \beta_{2N}(\delta) + \beta_{1L}(\delta)(\beta_{2L}(\delta) + \beta_{2N}(\delta)) + \beta_{1N}(\delta)(\beta_2^{\min} + \beta_{2L}(\delta) + \beta_{2N}(\delta))\end{aligned}$$

2.3.8 Límites de la Función

En la proposición 2.3.2, la función se expresa como $f(q) = f^{\min} + f_L(\delta) + f_N(\delta)$ para toda $q \in \Gamma$ y para toda $\delta \in \Delta$, donde f^{\min} es el valor constante de la función evaluada en el vértice mínimo de Γ , $f_L(\delta)$ es la parte lineal de la función $f(q)$ que tiene su máximo y mínimo en los puntos extremos de Δ y $f_N(\delta)$ es la parte no-lineal de la función, dado que $\Delta \subset Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$, se le puede aplicar descomposición de signo obteniendo sus cotas de valor máximo y mínimo, dando lugar así al siguiente resultado.

Teorema 2.3.4. [13, 14] (Teorema del Polígono) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función con descomposición de signo en Q , sean: q, δ, Γ y Δ de acuerdo a la proposición 2.3.2. Entonces, **a)** la función $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por: $Cota \text{ inf} = f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$ y $Cota \text{ sup} = f^{\min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max}) \forall q \in Q$, **b)** las cotas del inciso “a” están contenidas en el intervalo que definen las cotas del teorema del rectángulo 2.3.3 $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \leq Cota \text{ inf} \leq Cota \text{ sup} \leq f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$, **c)** la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in \Gamma$ en el plano (f_n, f_p) , está dentro del polígono que se define intersectando el rectángulo del teorema 2.3.3 con el espacio entre las rectas a 45° separadas del origen por la cota mínima $f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$, y la cota máxima $f^{\min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max})$.

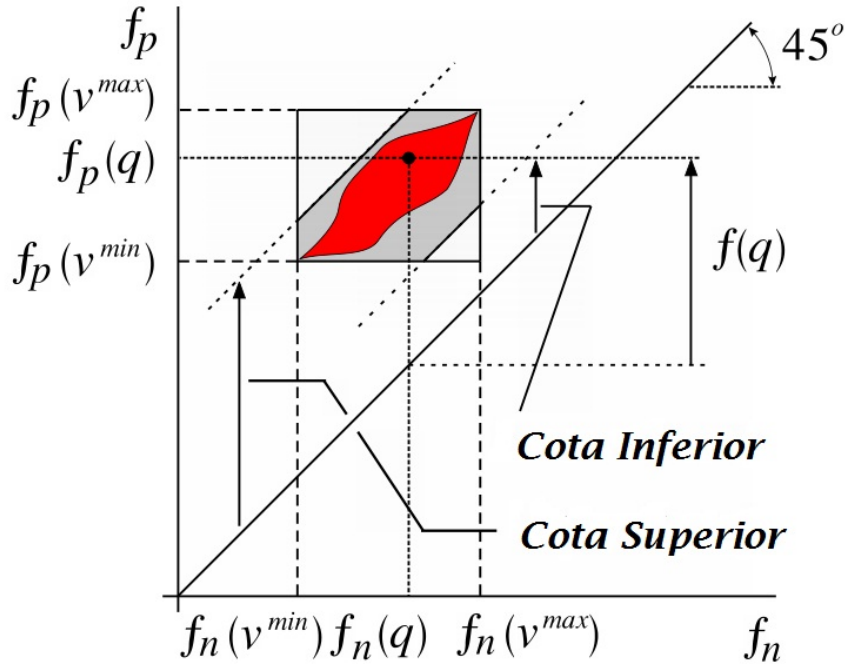


Figura 2.5: Teorema del polígono

La serie de Taylor de $f(q)$ donde $q = \mu^{\min} + \delta$, que fundamenta a la proposición 2.3.2 es la suma de: una parte independiente de δ que es $f(\mu^{\min})$, la parte lineal $\nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta$ y la función $\Phi(\delta)$ que contiene los términos de orden superior en δ . Es fácil ver que si δ tiende a cero, entonces $\Phi(\delta)$ tiende a cero, y la parte lineal $\nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta$ es mucho mayor que $\Phi(\delta)$. Por otra parte, cuando se aplica la división de variables en k partes iguales, cada componente del vector δ se obtiene mediante $\delta_i \in [0, \frac{q_i^+ - q_i^-}{k}]$, de tal manera que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_i = 0$, implicando, así que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(q) = f^{\min} + f_L(\delta)$. Descomponiendo $f(q)$, f^{\min} y $f_L(\delta)$ en sus partes negativa y positiva, y reagrupando cada una con su semejante se concluye: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(q) = f_n^{\min} + f_{Ln}(\delta)$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f_p(q) = f_p^{\min} + f_{Lp}(\delta) \forall q \in \Gamma, \forall \Gamma \subset Q$ quedando demostrado el siguiente hecho.

Hecho 2.3.3. [13] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función con descomposición de signo en Q . Sean: q, δ, Γ de acuerdo a la proposición 2.3.2, donde Γ es generado por división de cada variable en k partes iguales. Entonces: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(q) = f^{\min} + f_L(\delta)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(q) = f_n^{\min} + f_{Ln}(\delta)$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f_p(q) = f_p^{\min} + f_{Lp}(\delta)$, $\forall q \in \Gamma, \forall \Gamma \subset Q$.

El resultado del lema 4.5 es mejorado si se emplean las cotas inferior y superior del teorema del polígono 2.3.4 como se muestra en la siguiente sección.

2.4 Teorema de Determinación de Signo mediante Partición de Cajas.

Teorema 2.4.1. [13, 14] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min}, v^{\max} . Entonces la función $f(q)$ es positiva (negativa) en Q si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y Cota inf $\geq c > 0$ para cada caja Γ^i (Cota sup $\leq c < 0$ para cada caja Γ^i).

La tendencia de la función $f(q)$ a una función lineal al aumentar k como se muestra en el hecho 2.3.3, explica por qué el teorema de determinación de signo mediante partición de Cajas 2.4.1, tiene ventaja sobre el lema 4.5 en la determinación de signo de una función; ya que las cotas del teorema 2.4.1 están más cercanas del mínimo y máximo de la función, permitiendo así obtener un resultado con un número menor de cajas Γ que el necesario en el lema 4.5.

Dada la conveniencia de trabajar en la representación en (α, β) , entonces es de utilidad expresar las cotas mínima y máxima del teorema del polígono 2.3.4 y del teorema de determinación de signo mediante partición de cajas 2.4.1 en esta representación como se muestra en el siguiente hecho.

Hecho 2.4.1. [13, 14] *La representación en (α, β) de las cotas mínima y máxima del teorema del polígono 2.3.4 están dadas por:*

$$\alpha_{cota \min} = \alpha^{\min} + \alpha_{L \min} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) - \beta_N(\delta^{\max}))$$

$$\beta_{cota \min} = \beta^{\min} + \beta_{L \min} - \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) - \beta_N(\delta^{\max}))$$

$$\alpha_{cota \max} = \alpha^{\min} + \alpha_{L \max} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) + \beta_N(\delta^{\max}))$$

$$\beta_{cota \max} = \beta^{\min} + \beta_{L \max} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) + \beta_N(\delta^{\max}))$$

Capítulo 3

Resultados Principales

3.1 Motivación al estudio del caso

Muchos de los problemas en el área de control robusto son generados debido a la incertidumbre de los parámetros. Una de las principales preocupaciones es el desempeño de sistemas reales, cuando los sistemas de control son basados en modelos en los que no se ha tomado en cuenta la incertidumbre que presentan los parámetros físicos de dicho sistema, el comportamiento del sistema real puede ser completamente diferente del comportamiento previsto por el modelo matemático sin incertidumbre.

Para ilustrar la idea anterior, imaginemos la dinámica del sistema de un vehículo que ha sido diseñado con un determinado valor de masa $m = 1300kg$. El principal problema es que m puede cambiar dependiendo del número de pasajeros o si el vehículo tiene carga. Supongamos que este parámetro puede cambiar $\pm 20\%$, entonces la masa real se encuentra entre $1040kg$ y $1560kg$. y la pregunta inmediata es si el desempeño del sistema será satisfactorio sabiendo que el diseño se realizó para una masa de $m = 1300kg$.

La incertidumbre la podemos encontrar en la teoría de control debido a factores como dinámicas no-modeladas, retardos y no linealidades. Y en general se considera más de un

parámetro incierto.

Cuando un sistema tiene algún tipo de incertidumbre, se convierte en una *familia* de sistemas. El control robusto paramétrico es el área de la teoría de control que para el caso de síntesis, determina el controlador que garantice el desempeño adecuado de todos los elementos de la familia en algún aspecto particular. Volviendo al ejemplo de la dinámica del vehículo mencionado, cada valor de m que se encuentre entre $1040kg.$ y $1560kg.$ define un sistema diferente, por lo tanto ahora tenemos una familia de sistemas en vez de un sistema fijo.

Para explicar el tipo de problema que se resuelve con esta tesis es necesario mencionar que las incertidumbres que surgen en aplicaciones reales y típicas, la mayoría de las veces son más complejas en su estructura, esto es porque la expresión de los coeficientes $c_i(q)$ del polinomio característico son de tipo multilineal y polinómico. Al hacer el análisis de estabilidad con este tipo de coeficientes se encuentran pocas soluciones. Para el caso afín y multilineal, algunas de ellas son con el método "overbounding" que aunque es fácil de usar solo se obtienen resultados excesivamente conservadores; es decir, solo se obtienen condiciones suficientes de robustez.

Al concentrarnos en problemas de robustez para sistemas LTI, no se descartan soluciones que tengan que ver con control no-lineal o incertidumbres que contengan no-linealidades dentro del modelo. Es decir que aunque el modelo matemático de la planta incluya un sistema "nominal" el cual es lineal e invariante en el tiempo no se descarta la posibilidad de que las incertidumbres entren de manera no-lineal dentro de la planta.

3.2 Introducción al Diseño de Controladores Robustos

En muchas aplicaciones el desempeño de sistemas reales es de vital importancia; algunos casos requieren que el sistema actúe de manera lenta mientras que algunos otros requieren lo contrario, que el sistema actúe en forma rápida. Por ejemplo, el sistema usado para obtener una tomografía

es el llamado tomógrafo, un equipo clínico que obtiene la imagen de una sección de la exposición. Este proceso, por razones clínicas requiere de un desplazamiento lento del sistema para que las estructuras en el plano focal aparezcan nítidas, mientras que las estructuras de los otros planos aparecen borrosas. Un avión es un ejemplo de sistema en el que se requiere que se actúe en forma rápida; ya que la velocidad así como algunas maniobras requieren de una mayor velocidad de respuesta. De aquí la importancia del desempeño de los sistemas reales en términos de la posición de los eigenvalores. Un sistema (o su polinomio característico) es llamado estable en "Gamma", si todos los eigenvalores se encuentran en una región específica Γ del plano complejo.

La pregunta básica sobre análisis de robustez es: ¿La familia de polinomios $P(s, Q)$ es estable (o Γ - estable) ? Las pruebas de estabilidad clásicas se enfocan principalmente en un polinomio específico $p(s, q^1)$ es decir $q = q^1$. Uno puede pensar en repetir la prueba muchas veces para un vector de puntos $q^i \in Q$. Pero de esta forma nunca se estará realmente seguro que no existe un punto inestable dentro de Q . El análisis de robustez es relativamente sencillo para coeficientes intervalo y para el caso afín. Es mucho más complicado para el caso multilinear y polinómico.

Como se menciono anteriormente para el caso de síntesis, es necesario determinar un valor del controlador k o un segmento de valores $k \in [k^-, k^+]$ que garantice el desempeño adecuado de todos los elementos de la familia en algún aspecto particular dentro de una región específica Γ . Conceptualmente, se busca el conjunto de todos los valores de k que estabilizan el sistema en Γ es decir:

$$K_{\Gamma} = \{k \mid P(s, Q, k) \text{ es robustamente } \Gamma - \text{estable}\}$$

La figura 3.1 ilustra el problema de robustez en cuanto al diseño para una situación en donde solo se tiene un parámetro incierto $q \in Q$ y ganancia k libre.

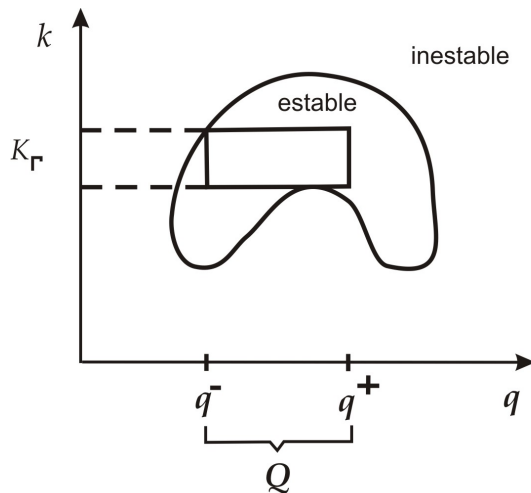


Figura 3.1: Región que muestra los valores de k que estabilizan el sistema en una región Γ para todo vector paramétrico $q \in Q$.

La región de estabilidad Γ en el plano (q, k) es no convexo. Por lo tanto no basta encontrar simultáneamente el valor de k que estabiliza el sistema en Γ para q^- y q^+ , en la figura 3.1, K_Γ puede verse gráficamente. Sin embargo, la figura 3.2 muestra una situación en la que no existe una k que estabilice el sistema en una región Γ , es decir K_Γ está vacía.

Nota 3.2.1. En 3.1 se observa que es posible ampliar el intervalo de q matemáticamente, sin embargo en muchos sistemas físicamente es imposible hacerlo.

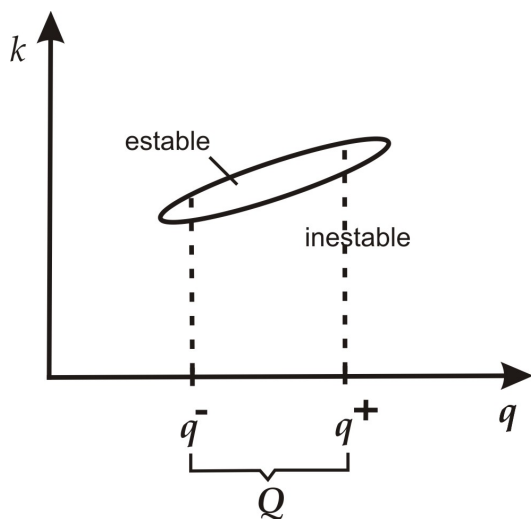


Figura 3.2: No existe un punto k que estabilice el sistema para toda $q \in Q$.

Es sencillo ilustrar el problema cuando solo se tiene un parámetro con incertidumbre, pero si el sistema a controlar tiene un mayor número de parámetros con incertidumbre, es difícil ver gráficamente el problema y mucho más encontrar las cotas de los parámetros que den una solución que satisfaga cierto desempeño.

Desde el punto de vista matemático, el problema de síntesis es bien planteado pero aún sin resolver; ya que no hay condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un controlador robustamente estable dentro de una región Γ . Además el problema adquiere un grado de complejidad aún mayor cuando aumenta el número de parámetros con incertidumbre.

Actualmente existen trabajos que enfrentan la problemática descrita, en [22] el polinomio característico que describe el comportamiento del sistema en lazo cerrado contiene coeficientes de forma polinomial (el caso más complejo), que dependen de parámetros inciertos de la planta. En [22] es utilizada la herramienta descomposición de signo, para desarrollar una prueba de estabilidad de 4-polinomios, utilizando así el Teorema de Kharitonov. En [22] es desarrollado un algoritmo para la síntesis de un controlador multivariable de orden fijo, que a pesar de ser un buen resultado el cual da pie a futuras investigaciones, da solo condiciones suficientes para la estabilidad de la familia de sistemas en lazo cerrado y no provee un valor de cotas de los parámetros del controlador que satisfagan cierto desempeño mostrando así resultados conservadores.

En la siguiente sección se muestra la principal aportación a el problema descrito anteriormente haciendo uso de la herramienta descomposición de signo y un reciente teorema de estabilidad, dando condiciones necesarias y suficientes para obtener cotas de la ganancia del controlador que den estabilidad robusta relativa, entendiéndose por estabilidad relativa a la ubicación de las raíces del polinomio característico en una región determinada.

3.3 Algoritmo

En esta sección se presenta la principal aportación de este trabajo, es un algoritmo que dada una tolerancia, es capaz de determinar las cotas inferior y superior de la ganancia del controlador que dará estabilidad relativa robusta al sistema, es decir que la parte real de las raíces del polinomio característico del lazo cerrado se encuentren ubicadas en una región determinada. Por el momento se obtiene este resultado tomando en cuenta solo un parámetro del controlador.

Obviamente el valor de la cota mínima estimada K_{me} y el límite inferior K_{min} , así como el valor de la cota máxima estimada K_{Me} y el límite superior K_{max} , están relacionados de la siguiente manera: $K_{min} \leq K_{me}$ y $K_{Me} \leq K_{max}$, como se puede ver en la figura 3.3.

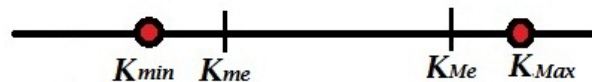


Figura 3.3: Relación entre K_{me} , K_{Me} con K_{min} , K_{max} .

El algoritmo garantiza que si la ganancia del controlador satisface $K_{me} \leq K \leq K_{Me}$ entonces la parte real de las raíces del polinomio característico del lazo cerrado de un sistema LTI con incertidumbre paramétrica estarán ubicadas en una región determinada preestablecida, como se observa en la figura 3.4.

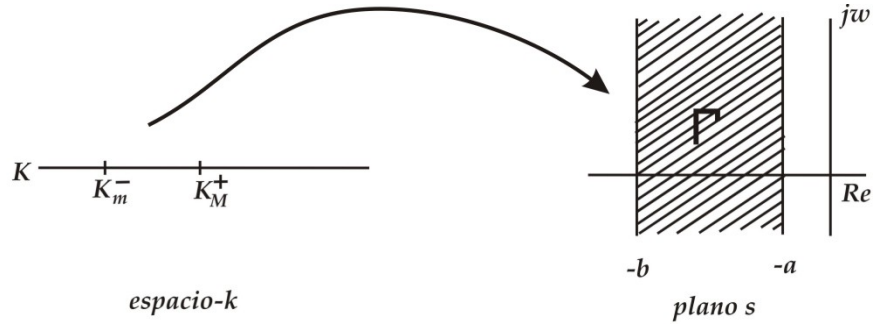


Figura 3.4: Cotas mínima y máxima estimadas que estabilizan al sistema en una región del plano s .

El algoritmo requiere de un valor inicial de ganancia K^* para el cual el sistema es robustamente estable $\forall q \in Q$, así también es requerido definir la tolerancia ε con la que el algoritmo detiene su proceso de búsqueda de los intervalos de ganancia con los que se alcanzarán las cotas mínima o máxima. El algoritmo se compone de dos partes:

- I. Se obtiene el intervalo $[K^*, K_{Me}]$.
- II. Se obtiene el intervalo $[K_{me}, K^*]$.

La parte I donde se obtiene la cota máxima estimada tiene dos etapas, la primera Ia es una búsqueda creciente de intervalo de ganancia y la parte Ib es una búsqueda decreciente de intervalo de ganancia. En la parte creciente Ia se emplea un valor $n > 1$ y el primer segmento de ganancia para analizar estabilidad relativa robusta es $[K^*, nK^*]$, en caso que este primer segmento satisfaga la estabilidad relativa robusta del sistema, la cota momentanea máxima K_i será $K_1 = nK^*$ ya que i es igual a uno por se la primera iteración. El siguiente segmento será $[nK^*, n^2K^*]$ y así sucesivamente hasta llegar a un segmento $[n^p K^*, n^{p+1} K^*]$ en donde no satisface estabilidad relativa robusta, debe de notarse que el valor de cota momentanea máxima en este punto es el último valor logrado que será $K_i = n^p K^*$. Entonces el siguiente segmento de ganancia a analizar es $[n^p K^*, \frac{n^p + n^{p+1}}{2} K^*]$ que realmente es la mitad inferior del segmento de donde fue obtenido, si éste satisface estabilidad relativa robusta entonces el siguiente segmento a analizar es la mitad superior del segmento $[n^p K^*, n^{p+1} K^*]$ de lo contrario el segmento inferior

es dividido de la misma manera en un segmento inferior y un segmento superior aplicandoles el mismo criterio. Este procedimiento se sigue aplicando en forma sucesiva hasta llegar a el punto donde el segmento de ganancia a analizar es menor que la tolerancia preestablecida, en este punto el algoritmo detiene la búsqueda de la cota máxima estimada tomando ésta el valor más alto de la cota momentanea máxima logrado.

El procedimiento anterior puede ser ejemplificado de la siguiente manera: Supongamos que la tolerancia estipulada es $\varepsilon = 0.25$. y el valor de $n = 2$, se tiene un valor inicial de ganancia $K^* = 2$ para el cual el sistema es robustamente estable en cierta región predeterminada. Se inicia la búsqueda de la cota máxima estimada K_{Me} en el intervalo $[2, 4]$ supongamos que se satisface estabilidad robusta, por lo que $K_i = K_1 = 4$ el siguiente intervalo a analizar es $[4, 8]$, supongamos que no satisface estabilidad; entonces el siguiente intervalo a analizar es de $[4, 6]$, suponiendo que satisface estabilidad robusta la $K_i = 6$ y ahora el siguiente intervalo a analizar es $[6, 8]$, supongamos que no satisface estabilidad; entonces ahora el siguiente intervalo a analizar es $[6, 7]$. Cuando el segmento a analizar es más pequeño que el ε dado, ya no tiene caso continuar con la búsqueda de la cota máxima estimada.

La parte II donde se obtiene la cota mínima estimada es una búsqueda decreciente de intervalo de ganancia, en la cual se emplea un valor de $n = 0.5$, el primer segmento de ganancia para analizar estabilidad relativa robusta es $[0, K^*]$, si se satisface estabilidad relativa robusta el algoritmo termina y $K_{me} = 0$, de lo contrario el siguiente segmento a analizar es $[n(0 + K^*), K^*]$, por simplicidad $n(0 + K^*)$ se anotará como nK^* , supongamos que si se satisface estabilidad relativa robusta entonces la cota momentanea mínima $K_i = K_2 = nK^*$ donde $i = 2$ ya que es la segunda iteración y el siguiente segmento a analizar es $[n^2K^*, nK^*]$, si se satisface estabilidad relativa robusta entonces la cota momentanea mínima $K_i = K_3 = n^2K^*$ donde $i = 3$ ya que es la tercera iteración y el siguiente segmento a analizar es $[n^3K^*, n^2K^*]$, supongamos que no se satisface estabilidad relativa robusta entonces el siguiente segmento a

analizar es $[\frac{n^3 + n^2}{2}K^*, n^2K^*]$ y así sucesivamente hasta llegar a un segmento a analizar menor a una tolerancia preestablecida, tomando como cota mínima estimada K_{me} la última cota momentanea mínima K_i .

Para ejemplificar lo explicado arriba es conveniente continuar con el ejemplo anterior: Se inicia la búsqueda de la cota mínima estimada K_{me} en el intervalo $[0, 2]$ supongamos que no se satisface estabilidad robusta, por lo que el siguiente segmento a analizar es $[1, 2]$, ahora supongamos que si se satisface estabilidad relativa robusta, entonces la cota momentanea mínima es $K_i = K_1 = 1$ y el nuevo intervalo a analizar es $[0.5, 1]$, suponiendo que no se satisface estabilidad relativa robusta, el nuevo intervalo a analizar es $[0.75, 1]$ y así sucesivamente hasta que el segmento a analizar sea más pequeño que el ε dado y la cota mínima estimada será igual a la última cota momentanea mínima calculada.

3.3.1 Diagrama de flujo

La descripción anterior es manejada de forma esquemática de acuerdo a la lógica del diagrama de flujo mostrado en la figura 3.5.

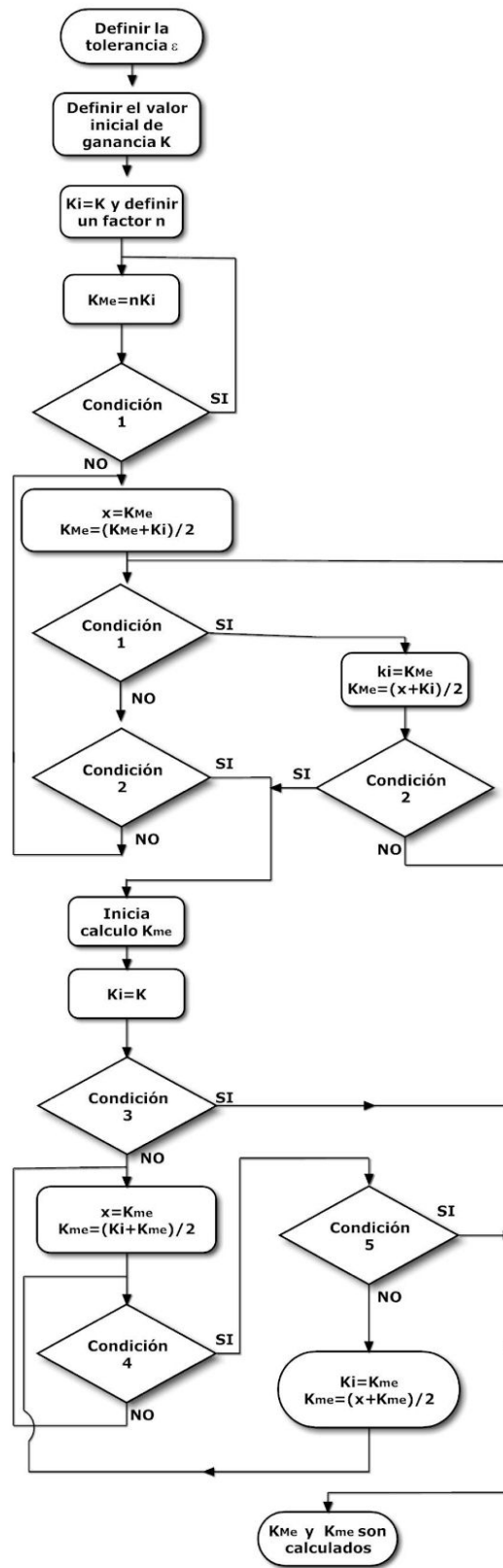


Figura 3.5: Diagrama de Flujo del Algoritmo

Donde:

- Condición 1. Se prueba si el sistema es robustamente estable.
- Condición 2. Magnitud del segmento a analizar $< \varepsilon$
- Condición 3. Se prueba si el sistema es robustamente estable para el segmento de $[0, K_*]$
- Condición 4. Se prueba si el sistema es robustamente estable para el nuevo segmento a analizar.
- Condición 5. Magnitud del segmento a analizar $< \varepsilon$

Capítulo 4

Aplicaciones

La intención de este capítulo es tomar algunos sistemas físicos, los cuales presenten incertidumbre paramétrica en su modelo matemático y encontrar las cotas del parámetro del controlador que satisfacen estabilidad relativa robusta aplicando los resultados obtenidos en esta tesis.

En la primera parte se presenta el caso de un servomecanismo posicional, enseguida se presenta el caso de un intercambiador de calor y finalmente se presenta un caso de un miembro artificial.

4.1 Servomecanismo Posicional

4.1.1 Planteamiento del problema

Para ilustrar la implementación del algoritmo propuesto que determina las cotas de los parámetros del controlador que satisfacen estabilidad relativa robusta, es presentado un ejemplo modificado de [25] (desafortunadamente este interesante ejemplo no aparece en ediciones más recientes). El ejemplo original trata de un servomecanismo posicional que incluye un amplificador con ganancia de 10 que recibe el error entre posición deseada y posición real y entrega el voltaje de campo del motor. En el ejemplo propuesto la ganancia del amplificador es la ganancia del

controlador del cual se encontrarán sus cotas inferior y superior, el resto de los parámetros son tomados ahora con una incertidumbre de $\pm 5\%$. La ganancia en lazo cerrado del sistema queda de la siguiente manera [25]:

$$G(s) = \frac{K_p K_1 K_m n}{T_f T_m s^3 + (T_f + T_m) s^2 + s + K_1 K_m K_p n}$$

Donde los parámetros del sistema son propuestos como sigue:

$K_m \in [1.1875, 1.3125] \text{ rad/volt} \cdot \text{seg}$, $K_1 \in [7.257465405, 8.021409131] \text{ volts/rad}$, $T_f \in [0.0475, 0.0525] \text{ seg}$, $T_m \in [0.19, 0.21] \text{ seg}$. además la relación de engranes está dada por $n = 0.1$.

En este ejemplo se trata de encontrar las cotas estimadas con una tolerancia de 0.01 de la ganancia del controlador K_p de tal manera que la parte real de las raíces del polinomio característico de lazo cerrado se encuentren dentro de una región determinada por el segmento $[-25, -1]$.

4.1.2 Solución del problema

En la nomenclatura de control robusto paramétrico se acostumbra identificar los parámetros físicos por \hat{q}_i así que: $\hat{q}_1 = K_m$, $\hat{q}_2 = K_1$, $\hat{q}_3 = T_f$, $\hat{q}_4 = T_m$ y $\hat{q}_5 = K_p$. De tal forma que el polinomio característico en lazo cerrado del caso a resolver queda de la siguiente manera:

$$p(s, \hat{q}) = C_3(\hat{q})s^3 + C_2(\hat{q})s^2 + C_1(\hat{q})s + C_0(\hat{q}), \text{ donde:}$$

$$C_3(\hat{q}) = \hat{q}_3 \hat{q}_4$$

$$C_2(\hat{q}) = \hat{q}_3 + \hat{q}_4$$

$$C_1(\hat{q}) = 1$$

$$C_0(\hat{q}) = 0.1 \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_5$$

Dado que el problema se resolverá mediante teorema de estabilidad relativa [16] mostrado

en secciones anteriores, en donde tiene que analizarse la estabilidad robusta de los polinomios $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ donde $a = 1$ y $b = 25$, esto significa que la parte real de las raíces se encuentre en el segmento $[-25, -1]$. Entonces la estabilidad robusta de cada polinomio $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ será analizado mediante el teorema 1 [15] aplicando descomposición de signo para probar la positividad robusta de los elementos $e_{i,1}$ ya que si cada uno de los elementos $e_{i,1}$ es robustamente positivo, entonces toda la columna σ será positiva y el sistema del polinomio analizado será robustamente estable.

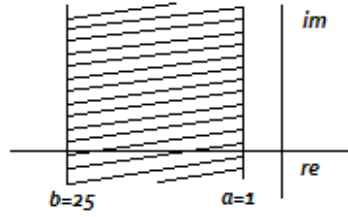


Figura 4.1: Región de estabilidad preestablecida

En la aplicación de descomposición de signo es necesario normalizar los parámetros \hat{q}_i de tal manera que toda q_i sea no negativa y es mucho más cómodo si se convierte en un nuevo parámetro $q_i \in [0, 1]$. Tomando en cuenta que

$$K_m \in [K_m^-, K_m^+] \text{rad/volt}\cdot\text{seg}, K_1 \in [K_1^-, K_1^+] \text{volts/rad}, T_f \in [T_f^-, T_f^+] \text{seg}, T_m \in [T_m^-, T_m^+] \text{seg}.$$

Donde el signo "menos" indica el límite inferior del parámetro físico y el signo "más" indica el límite superior del parámetro físico. Entonces la conversión se realiza de la siguiente manera:

$$\hat{q}_1 = K_m^- + q_1(K_m^+ - K_m^-), \hat{q}_2 = K_1^- + q_2(K_1^+ - K_1^-), \hat{q}_3 = T_f^- + q_3(T_f^+ - T_f^-), \hat{q}_4 = T_m^- + q_4(T_m^+ - T_m^-), \text{ obteniéndose así:}$$

$p(s - a, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$, donde:

$$C_3 = 0.00095q_3 + 0.00095q_4 + 0.0001q_3q_4 + 9.025 \times 10^{-3}$$

$$C_2 = 0.00215q_3 + 0.01715q_4 - 0.0003q_3q_4 + 0.21043$$

$$C_1 = 0.0003q_3q_4 - 0.03715q_4 - 0.00715q_3 + 0.55208$$

$$C_0 = 0.00405q_3 + 0.01905q_4 + 0.86182q_5 - 0.0001q_3q_4$$

$$+ 9.0718 \times 10^{-2}q_1q_5 + 9.0718 \times 10^{-2}q_2q_5$$

$$+ 9.5493 \times 10^{-3}q_1q_2q_5 - 0.77153$$

$p(-s - b, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$ donde:

$$C_3 = 0.00095q_3 + 0.00095q_4 + 0.0001q_3q_4 + 9.02510^{-3}$$

$$C_2 = 0.06625q_3 + 0.05125q_4 + 0.0075q_3q_4 + 0.43938$$

$$C_1 = 1.5313q_3 + 0.78125q_4 + 0.1875q_3q_4 + 6.0469$$

$$C_0 = 11.719q_3 + 2.3438q_4 - 0.86182q_5 + 1.5625q_3q_4$$

$$- 9.071810^{-2}q_1q_5 - 9.071810^{-2}q_2q_5$$

$$- 9.549310^{-3}q_1q_2q_5 + 17.578$$

Para aplicar el algoritmo propuesto, primeramente se encuentra un valor de q_5 que hace robustamente estables a los polinomios $p(s - a, q)$ y $p(-s - b, q)$, que en este caso $q_5 = 3$ satisface esta necesidad. Posteriormente se define la tolerancia explicada en la sección III, en este caso se tomará una tolerancia de 0.01 y $n = 2$ se obtienen los resultados mostrados en la tablas I y II.

p(s-a)			p(s-a)		
Cota máxima estimada q_5^+			Cota mínima estimada q_5^-		
No.	q_5	E.R.	No.	q_5	E.R.
1	3-6	✓	1	0-3	x
2	6-12	x	2	1.5-3	✓
3	6-9	✓	3	0.75-1.5	x
4	9-10.5	✓	4	1.125-1.5	✓
6	10.5-10.875	x	6	0.8438-0.9375	x
7	10.5-10.687	✓	7	0.8906-0.9375	x
8	10.68-10.78	x	8	0.9141-0.9375	✓
9	10.68-10.73	✓	9	0.9023-0.9141	✓
10	10.734-10.757	x	10	0.8965-0.9023	✓
11	10.734-10.746	✓	11	0.8936-0.8965	✓
12	10.746-10.752	✓			
13	10.752-10.754	x			

Tabla 4.1: Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(s-a)$ de un servomecanismo posicional.

Donde la columna *E.R.* significa Estabilidad Relativa, e indica si todos los coeficientes de la columna σ de la tabla son robustamente positivos en el rango de q_5 que se especifica. El símbolo "✓" indica que en ese intervalo de ganancia el sistema es robustamente estable y el símbolo "x" indica que para ese intervalo de ganancia no se satisface estabilidad relativa robusta.

Finalmente el rango de q_5 que estabiliza el sistema para $p(s-a)$ es: $0.8965 \leq q_5 \leq 10.7520$

p(-s-b)		
Cota máxima estimada del controlador q_5^+		
No.	q_5	E.R.
1	3-6	✓
2	6-12	✓
3	12-24	✓
4	24-48	x
5	24-36	x
6	24-30	x
7	24-27	x
8	24-25.5	x
9	24-24.75	x
10	24-24.375	x
11	24-24.1875	x
12	24-24.0938	x
13	24-24.0496	x
14	24-24.0234	x
15	24-24.0117	x
16	24-24.0059	x

p(-s-b)		
Cota mínima estimada del controlador q_5^-		
No.	q_5	E.R.
1	0-3	✓

Tabla 4.2: Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para p(-s-b) de un servomecanismo posicional.

Donde la columna *E.R.* significa Estabilidad Relativa, e indica si todos los coeficientes de la columna σ de la tabla son robustamente positivos en el rango de q_5 que se especifica. Y como se explico anteriormente, el símbolo "✓" indica que en ese intervalo de ganancia el sistema es robustamente estable y el símbolo "x" indica que para ese intervalo de ganancia no se satisface estabilidad relativa robusta.

Finalmente el rango de q_5 que estabiliza el sistema para $p(-s - b)$ es: $0 \leq q_5 \leq 24$

Las cotas del parámetro q_5 que hacen que el sistema en lazo cerrado sea robustamente estable manteniendo las raíces en el segmento $[-25, -1]$ están contenidas en $q_5 \in [0.8965, 10.7520]$

4.2 Intercambiador de Calor

4.2.1 Planteamiento del problema

El modelo del intercambiador de calor es tomado de [31] y el objetivo es mantener la temperatura de salida de fluido que se procesa, $T_o(t)$, en el valor que se desea o punto de control, $T_o^{fijo}(t)$, en presencia de variaciones en el flujo del fluido que se procesa, $F(t)$ y la temperatura de entrada, $T_i(t)$. La variable que se puede ajustar para controlar la temperatura de salida es el flujo de vapor, $F_s(t)$, ya que determina la cantidad de energía que se suministra al proceso del fluido. El proceso y plan de control por retroalimentación trabaja como sigue: la temperatura de salida o variable controlada se mide con un sensor y transmisor (TT42) que genera una señal de salida o variable manipulada, $m(t)$, con base en el error o diferencia entre la medición y el punto de control. La señal de salida del controlador se conecta entonces al actuador de la válvula de control de vapor, mediante un transductor de corriente a presión (I/P), esto se debe a que en el presente ejemplo el transmisor y el controlador generan señales de corriente eléctrica, pero el actuador de la válvula se debe operar mediante presión de aire. La función del actuador de la válvula es posicionar la válvula en proporción con la señal de salida del controlador ; entonces, el flujo de vapor es una función de posición de la válvula.

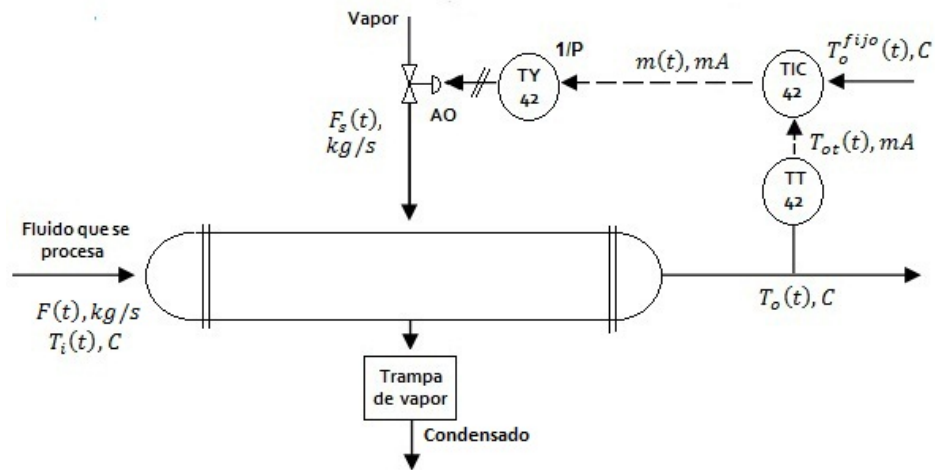


Figura 4.2: Esquema de control de temperatura en un intercambiador de calor.

El desempeño del circuito de control se puede analizar mejor si se dibuja el diagrama de bloques del circuito completo:

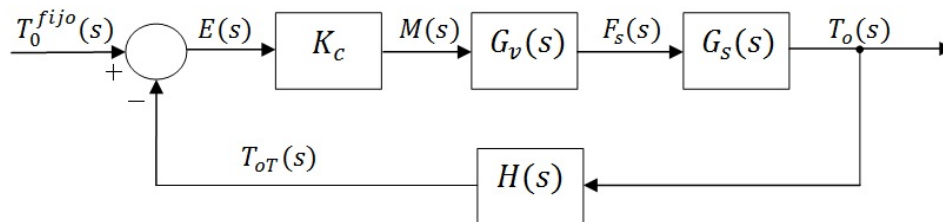


Figura 4.3: Diagrama de bloques del circuito de control de temperatura para el intercambiador de calor.

Donde las funciones de transferencia de los diferentes elementos del circuito de control de temperatura son como sigue:

Intercambiador

La respuesta del intercambiador de calor al flujo de vapor tiene una ganancia de $50^{\circ}C/(kg/s)$ y una constante de tiempo de $30s$:

$$G_s(s) = \frac{50}{30s + 1} C/(kg/s) = \frac{\hat{q}_1}{\hat{q}_2 s + 1}$$

Sensor-transmisor

El sensor transmisor tiene una escala calibrada de 50 a 150°C y una constante de tiempo de 10s.

$$\text{ganancia} = \frac{100\%}{(150 - 50)C} = 1.0\%/C$$

$$H(s) = \frac{1.0}{10s + 1} \%/C = \frac{\hat{q}_3}{\hat{q}_4 s + 1}$$

Nota: En este ejemplo utilizamos el "porcentaje de rango" (%) como unidades de señales de transmisor y el controlador. Cuando la señal de instrumentación es corriente, normalmente $i \in [4, 20] mA$ así que para señales electrónicas se toma $100\% = 16mA$.

Válvula de control

La válvula de control tiene una capacidad máxima de 1.6kgS de vapor, características lineales y constantes de tiempo en 3s.

$$\text{ganancia} = \frac{1.6(kg/s)}{100\%} = 0.016(kg/s)/\%$$

$$G_v(s) = \frac{0.016}{3s + 1} (kg/s)/\% = \frac{\hat{q}_5}{\hat{q}_6 s + 1}$$

Controlador

El controlador es proporcional y se encontrarán las cotas superior e inferior de la ganancia del controlador, el resto de los parámetros son tomados ahora con una incertidumbre de $\pm 5\%$.

La función transferencia en lazo cerrado del sistema queda de la siguiente manera:

$$G_{CL} = \frac{\widehat{q}_1 \widehat{q}_5 \widehat{q}_7 (\widehat{q}_4 s + 1)}{\widehat{q}_2 \widehat{q}_4 \widehat{q}_6 s^3 + (\widehat{q}_2 \widehat{q}_4 + \widehat{q}_2 \widehat{q}_6 + \widehat{q}_4 \widehat{q}_6) s^2 + (\widehat{q}_2 + \widehat{q}_4 + \widehat{q}_6) s + \widehat{q}_1 \widehat{q}_3 \widehat{q}_5 \widehat{q}_7}$$

Donde los parámetros del sistema son como sigue:

$$\widehat{q}_1 \in [47.5, 52.5], \widehat{q}_2 \in [28.5, 31.5], \widehat{q}_3 \in [0.95, 1.05], \widehat{q}_4 \in [9.5, 10.5], \widehat{q}_5 \in [0.0152, 0.0168] \text{ y } \widehat{q}_6 \in [2.85, 3.15].$$

Las cotas inferior y superior máximas de la ganancia del controlador sin tomar en cuenta la incertidumbre son $K_p = [0, 23.8]$.

En aplicaciones industriales, normalmente es necesario que el sistema tenga un cierto desempeño, para esto es necesario que las raíces de su polinomio característico guarden cierta posición en el plano de los complejos. Con la finalidad de mostrar lo anterior en este ejemplo se trata de encontrar las cotas estimadas de la ganancia del controlador K_p , de tal manera que la parte real de las raíces del polinomio característico en lazo cerrado se encuentren dentro de una región determinada por el segmento $[-1, 0]$. con una tolerancia de 0.02.

4.2.2 Solución del problema

El polinomio característico en lazo cerrado del caso a resolver queda de la siguiente forma:

$$p(s, \widehat{q}) = C_3(\widehat{q})s^3 + C_2(\widehat{q})s^2 + C_1(\widehat{q})s + C_0(\widehat{q}), \text{ donde:}$$

$$C_3(\widehat{q}) = \widehat{q}_2 \widehat{q}_4 \widehat{q}_6$$

$$C_2(\widehat{q}) = \widehat{q}_2 \widehat{q}_4 + \widehat{q}_2 \widehat{q}_6 + \widehat{q}_4 \widehat{q}_6$$

$$C_1(\widehat{q}) = \widehat{q}_2 + \widehat{q}_4 + \widehat{q}_6$$

$$C_0(\widehat{q}) = \widehat{q}_1 \widehat{q}_4 \widehat{q}_5 \widehat{q}_7 + 1$$

Haciendo uso nuevamente del teorema de estabilidad relativa [16], se quiere que la parte real

de las raíces se encuentre en el segmento $[-1, 0]$ por lo que es necesario analizar la estabilidad robusta de los polinomios $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ donde $a = 0$ y $b = 1$

La estabilidad robusta de cada polinomio $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ es analizada mediante el teorema 1 [15], aplicando descomposición de signo para probar la positividad robusta de los elementos $e_{i,1}$ ya que si cada uno de los elementos $e_{i,1}$ es robustamente positivo, entonces toda la columna σ será positiva y el sistema del polinomio analizado será robustamente estable.

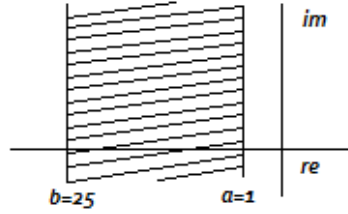


Figura 4.4: Región de estabilidad preestablecida

Hay que normalizar los parámetros \hat{q}_i en un nuevo parámetro $q_i \in [0, 1]$ de tal manera que toda q_i sea no negativa; ya que es necesario para aplicar descomposición de signo.

Sabemos que:

$$q_1 \in [q_1^-, q_1^+], q_2 \in [q_2^-, q_2^+], q_3 \in [q_3^-, q_3^+], q_4 \in [q_4^-, q_4^+], q_5 \in [q_5^-, q_5^+], q_6 \in [q_6^-, q_6^+].$$

Donde el signo "menos" indica el límite inferior del parámetro físico y el signo "más" indica el límite superior del parámetro físico. Entonces la conversión se realiza de la siguiente manera:

$$\hat{q}_1 = q_1^- + q_1(q_1^+ - q_1^-), \hat{q}_2 = q_2^- + q_2(q_2^+ - q_2^-), \hat{q}_3 = q_3^- + q_3(q_3^+ - q_3^-), \hat{q}_4 = q_4^- + q_4(q_4^+ - q_4^-), \\ \hat{q}_5 = q_5^- + q_5(q_5^+ - q_5^-), \hat{q}_6 = q_6^- + q_6(q_6^+ - q_6^-), \text{ obteniendo así:}$$

$p(s - a, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$, donde :

$$C_3 = 81.225q_2 + 81.225q_4 + 81.225q_6 + 8.55q_2q_4 + 8.55q_2q_6 + 8.55q_4q_6 + 0.9q_2q_4q_6 \\ + 771.64$$

$$C_2 = 37.05q_2 + 31.35q_4 + 11.4q_6 + 3.0q_2q_4 + 0.9q_2q_6 + 0.3q_4q_6 + 379.05$$

$$C_1 = 3.0q_2 + q_4 + 0.3q_6 + 40.85$$

$$C_0 = 0.6859q_7 + 0.0722q_7q_1 + 0.0722q_7q_3 + 0.0722q_7q_5 + 0.0076q_7q_1q_3 + 0.0076q_7q_1q_5 \\ + 0.0076q_7q_3q_5 + 0.0008Q_7q_1q_3q_5 + 1$$

$p(-s - b, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$, donde :

$$C_3 = 81.225q_2 + 81.225q_4 + 81.225q_6 + 8.55q_2q_4 + 8.55q_2q_6 + 8.55q_4q_6 + 0.9q_2q_4q_6 \\ + 771.64$$

$$C_2 = 206.63q_2 + 212.33q_4 + 232.28q_6 + 22.65q_2q_4 + 24.75q_2q_6 + 25.35q_4q_6 + 2.7q_2q_4q_6 \\ + 1935.9$$

$$C_1 = 172.58q_2 + 181.98q_4 + 221.18q_6 + 19.65q_2q_4 + 23.85q_2q_6 + 25.05q_4q_6 + 2.7q_2q_4q_6 \\ + 1597.7$$

$$C_0 = 47.175q_2 - 0.6859q_7 + 50.875q_4 + 70.825q_6 - 0.0722q_7q_1 - 0.0722q_7q_3 \\ - 0.0722q_7q_5 + 5.55q_2q_4 + 7.65q_2q_6 + 8.25q_4q_6 - 0.0076q_7q_1q_3 \\ - 0.0076q_7q_1q_5 - 0.0076q_7q_3q_5 + 0.9q_2q_4q_6 - 0.0008q_7q_1q_3q_5 + 429.59$$

Se inicia con un valor de $q_7 = 8$ que hace robustamente estables a los polinomios $p(s - a, q)$ y $p(-s - b, q)$, la tolerancia propuesta para este caso es de 0.02 y $n = 2$. Aplicando el algoritmo se obtienen los siguientes resultados mostrados en la tablas I y II.

p(s-a)		
Cota máxima estimada del controlador q_7^+		
No.	q7	E.R
1	8-16	✓
2	16-32	x
3	16-24	x
4	16-20	x
5	16-18	✓
6	18-19	✓
7	19-19.5	x
8	19-19.25	✓
9	19-19.125	x

p(s-a)		
Cota mínima estimada del controlador q_7^-		
No.	q7	E.R
1	0-8	✓

Tabla 4.3: Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para p(s-a) de un intercambiador de calor.

Donde la columna *E.R.* significa Estabilidad Relativa, e indica si todos los coeficientes de la columna σ de la tabla son robustamente positivos en el rango de q_7 que se especifica.

El símbolo "✓" indica que en ese intervalo de ganancia el sistema es robustamente estable.

El símbolo *x* indica que para ese intervalo de ganancia no se satisface estabilidad relativa robusta.

Finalmente el rango de q_7 que estabiliza el sistema para $p(s - a)$ es: $0 \leq q_7 \leq 19.25$

p(-s-b)		
Cota máxima estimada del controlador q_7^+		
No.	q7	E.R
1	8-16	✓
2	16-32	✓
3	32-64	✓
4	64-100	✓

p(-s-b)		
Cota mínima estimada del controlador q_7^-		
No.	q7	E.R
1	0-8	✓

Tabla 4.4: Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para p(-s-b) de un intercambiador de calor.

Se estableció un valor límite para la ganancia máxima del controlador que en este caso es

100; ya que no es necesario realizar un mayor número de iteraciones. Finalmente el rango de q_7 que estabiliza el sistema para $p(-s - b)$ es: $0 \leq q_7 \leq 100$

Las cotas del parámetro q_7 que hacen que el sistema en lazo cerrado sea robustamente estable manteniendo las raíces en el segmento $[-1, 0]$ están contenidas en $q_7 \in [0, 19.25]$.

4.3 Miembro Artificial

4.3.1 Planteamiento del problema

El desarrollo de la protética (miembros artificiales) ha progresado paralelamente a las guerras y calamidades naturales. En la actualidad las prótesis en las personas son vistas como algo normal y tangible. Las prótesis son aparatos inertes conectados a lo que restaba del miembro mutilado. Los aparatos para el brazo inferior exigieron que el usuario tuviera una articulación en el codo, y para el extremo inferior de la pierna, una articulación utilizable en la rodilla. El brazo "Boston" fue uno de los primeros de tales miembros artificiales, el cual comprendía un par motor y retroalimentación de velocidad. El cuerpo humano tiene un tiempo natural de retraso entre las decisiones del cerebro y la recepción de señales por los músculos, de manera que deben fijarse límites razonables en la capacidad de un miembro artificial automático. Si el aparato es muy firme y sensible podría funcionar demasiado rápido, como para que el cuerpo y el cerebro pudiesen ejercer control, convirtiendo al binomio humano-máquina en un robot biónico. Por otra parte, muy poca sensibilidad podría producir una estatua biónica. Entre estos dos extremos se encuentran los diseños satisfactorios.

Por simplicidad, el movimiento del brazo biónico se considera solo unidireccional. El cerebro vigila la posición deseada y la posición percibida, generando una señal de error para el sistema nervioso. Sensores especiales recogen los impulsos eléctricos musculares (señales mioeléctricas) y un amplificador produce un voltaje que excita a un motor de control de CD. El circuito motriz

comprende retroalimentación tacométrica, como se muestra. La salida del circuito motriz es la velocidad del miembro en una dirección que, cuando se integra, es la posición del miembro.

En la figura 4.5 se muestra un modelo simplificado de tal sistema. La acción del cerebro se aproxima por la función transferencia:

$$G_B(s) = 1 + \frac{0.1}{s}$$

lo cual implica consideraciones tanto del error de posición como de su integral. El sistema nervioso se modela por medio del sistema de primer orden que tiene la siguiente función de transferencia:

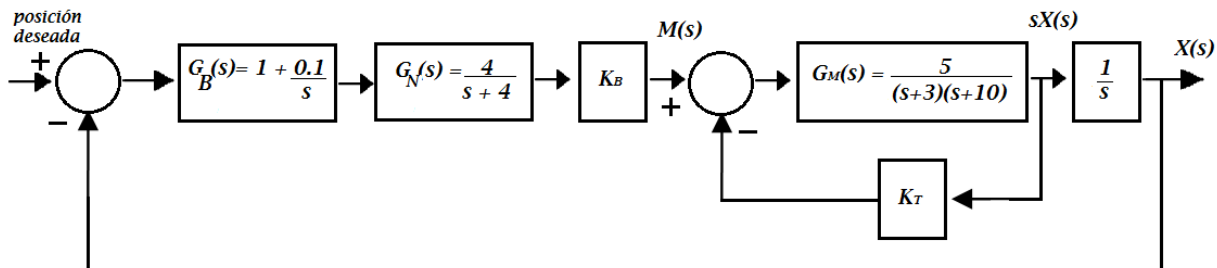


Figura 4.5: Modelo simplificado del sistema.

$$G_N(s) = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

donde $T = \frac{1}{4}$, la constante de tiempo, es aproximadamente el tiempo de retardo neuromuscular. La señal mioeléctrica se detecta y amplifica con una ganancia K_B para formar el voltaje amplificado $m(t)$. El amplificador de potencia, el motor de control y la carga mecánica tienen una función de transferencia de segundo orden, que relaciona el voltaje del motor de control $m(t)$ con la velocidad del brazo, cuyo modelo es:

$$G_M(s) = \frac{5}{s^2 + 13s + 30} = \frac{5}{(s + 3)(s + 10)}$$

Este bloque presenta constantes de tiempo de $\frac{1}{3}$ segundo, asociadas con la inercia mecánica, y de $\frac{1}{10}$ segundo atribuido principalmente al motor. El tacómetro, con función de transferencia K_T , proporciona retroalimentación para el motor y brazo, y la función de transferencia en lazo cerrado entre K_T y $G_M(s)$ está dada por:

$$G_T(s) = \frac{G_M(s)}{1 + K_T G_M(s)} = \frac{5}{s^2 + 13s + (30 + 5K_T)}$$

El sistema completo se ilustra en la figura 4.6

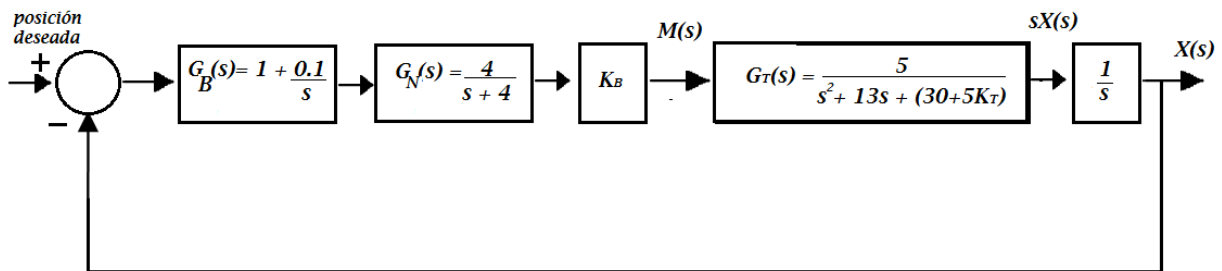


Figura 4.6: Sistema completo.

Obtenga las cotas estimadas de la ganancia K_B si se desea que las raíces del polinomio característico se encuentren en el intervalo $[-10,0]$, cuando la ganancia del tacómetro tiene una incertidumbre del $\pm 5\%$.

4.3.2 Solución del problema

En la nomenclatura de control robusto paramétrico se acostumbra identificar los parámetros con incertidumbre por \hat{q}_i así que:

$$G_B(s) = 1 + \frac{0.1}{s}$$

$$G_N(s) = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

$$G_M(s) = \frac{5}{(s + 3)(s + 10)}$$

$$K_T(s) = \hat{q}_1$$

$$K_B(s) = \hat{q}_2$$

La función de transferencia de todo el sistema en lazo cerrado queda de la siguiente forma:

$$T(s) = \frac{q_2(10s + 1)}{\frac{1}{2}s^5 + 8.5s^4 + (2.5q_1 + 41.0)s^3 + (10.0q_1 + 60.0)s^2 + 10.0q_2s + 1.0q_2}$$

De tal forma que el polinomio característico en lazo cerrado del caso a resolver queda de la siguiente manera:

$$p(s, \hat{q}) = C_5(\hat{q})s^5 + C_4(\hat{q})s^4 + C_3(\hat{q})s^3 + C_2(\hat{q})s^2 + C_1(\hat{q})s + C_0(\hat{q}), \text{ donde:}$$

$$C_5(\hat{q}) = 0.5$$

$$C_4(\hat{q}) = 8.5$$

$$C_3(\hat{q}) = (2.5\hat{q}_1 + 41.0)$$

$$C_2(\hat{q}) = (10.0\hat{q}_1 + 60.0)$$

$$C_1(\hat{q}) = 10.0\hat{q}_2$$

$$C_0(\hat{q}) = 1.0\hat{q}_2$$

Dado que el problema se resolverá mediante teorema de estabilidad relativa [16] mostrado en secciones anteriores, en donde tiene que analizarse la estabilidad robusta de los polinomios $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ donde $a = 0$ y $b = 10$, esto significa que la parte real de las raíces se

encuentre en el segmento $[-10, 0]$. Entonces la estabilidad robusta de cada polinomio $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ será analizado mediante el teorema 1 [15], aplicando descomposición de signo para probar la positividad robusta de los elementos $e_{i,1}(q)$ ya que si cada uno de los elementos $e_{i,1}(q)$ es robustamente positivo, entonces toda la columna σ será positiva y el sistema del polinomio característico analizado será robustamente estable.

En la aplicación de descomposición de signo es necesario normalizar los parámetros \hat{q}_i de tal manera que toda q_i sea no negativa y es mucho más cómodo si se convierte en un nuevo parámetro $q_i \in [0, 1]$. Tomando en cuenta que

$$K_t \in [K_t^-, K_t^+],$$

Donde el signo "menos" indica el límite inferior del parámetro físico y el signo "más" indica el límite superior del parámetro físico. Entonces la conversión se realiza de la siguiente manera:

$$\hat{q}_1 = K_t^- + q_1(K_t^+ - K_t^-), \text{ obteniéndose así:}$$

$$p(s - a, q) = C_5(q)s^5 + C_4(q)s^4 + C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q), \text{ donde :}$$

$$C_5(q) = 0.5$$

$$C_4(q) = 8.5$$

$$C_3(q) = 9.6188q_1 + 42.013$$

$$C_2(q) = 38.475q_1 + 64.05$$

$$C_1(q) = 10.0q_2$$

$$C_0(q) = q_2$$

$$p(-s - b, q) = C_5(q)s^5 + C_4(q)s^4 + C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q), \text{ donde :}$$

$$C_5(q) = 0.5$$

$$C_4(q) = -6.0$$

$$C_3(q) = 9.6188q_1 + 13.013$$

$$C_2(q) = 15.99 - 9.619q_1$$

$$C_1(q) = 10q_2 - 48.094q_1 - 33.56$$

$$C_0(q) = 9q_2 - 28.856q_1 - 30.037$$

Para aplicar el algoritmo propuesto, primeramente se encuentra un valor de q_2 que hace robustamente estables a los polinomios $p(s - a, q)$ y $p(-s - b, q)$, que en este caso $q_2 = 20$ satisface esta necesidad. Posteriormente se define la tolerancia explicada en la sección III, en este caso se tomará una tolerancia de 0.1 y $n = 2$ se obtienen los resultados mostrados en la tablas I y II.

Así pues la columna *E.R.* significa Estabilidad Relativa, y me indica si todos los coeficientes de la columna σ de la tabla son robustamente positivos en el rango de q_2 que se establece. El símbolo "✓" indica que para ese intervalo de ganancia el sistema es robustamente estable y el símbolo x indica que para este intervalo de ganancia la estabilidad relativa robusta no se satisface .

Finalmente el rango de q_2 que estabiliza el sistema para $p(s - a)$ es: $0 \leq q_2 \leq 49.6875$

p(s-a)			p(s-a)		
Cota máxima estimada q_2			Cota mínima estimada q_2		
No.	q_2	E.R.	No.	q_2	E.R.
1	20-40	✓	1	0-20	✓
2	40-80	x			
3	40-60	x			
4	40-50	x			
5	40-45	✓			
6	45-47.5	✓			
7	47.5-48.75	✓			
8	48.75-49.375	✓			
9	49.375-49.6875	✓			
10	49.6875-49.8437	x			
11	49.6875-49.76562	x			

Tabla 4.5: Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(s-a)$ de un miembro artificial.

p(-s-b)			p(-s-b)		
Cota máxima estimada q_2			Cota mínima estimada q_2		
No.	q_2	E.R.	No.	q_2	E.R.
1	20-40	✓	1	0-20	✓
2	40-80	✓			
3	80-160	✓			
4	160-320	x			
5	160-240	x			
6	160-200	x			
7	160-180	✓			
8	180-190	✓			
9	190-195	✓			
10	195-197.5	x			
11	195-196.5	✓			
12	196.5-196.875	✓			
13	196.875-197.1875	x			
14	196.875-197.0312	x			
15	196.875-196.9531	✓			

Tabla 4.6: Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(-s-b)$ de un miembro artificial.

Donde la columna *E.R.* significa Estabilidad Relativa, e indica si todos los coeficientes de la columna σ de la tabla son robustamente positivos en el rango de q_2 que se especifica. Como se mencionó anteriormente:

El símbolo " \checkmark " indica que en ese intervalo de ganancia el sistema es robustamente estable.

El símbolo x indica que para ese intervalo de ganancia no se satisface estabilidad relativa robusta.

Finalmente el rango de q_2 que estabiliza el sistema para $p(-s - b)$ es: $0 \leq q_2 \leq 196.9531$

Las cotas del parámetro q_2 que hacen que el sistema en lazo cerrado sea robustamente estable manteniendo las raíces en el segmento $[-10, 0]$ están contenidas en $q_2 \in [0, 49.6875]$

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1 Conclusiones

En este trabajo se presentó un algoritmo que calcula las cotas estimadas de la ganancia del controlador, para estabilizar un sistema LTI con incertidumbre paramétrica y que resultan efectivos para resolver problemas abiertos en el control robusto paramétrico, obteniéndose así un sistema robustamente estable, de tal manera que la parte real de las raíces se encuentre en un segmento preestablecido. La aplicación del algoritmo no está limitada al grado del polinomio, al tipo de incertidumbre, ni al número de parámetros físicos del sistema a analizar. En el procedimiento de cálculo es aplicado un reciente criterio de estabilidad que no utiliza la división a diferencia del de Routh, generándose así, funciones multivariable polinómicas cuya positividad robusta es analizada en condiciones necesarias y suficientes mediante descomposición de signo.

Es importante mencionar que a mayor número de parámetros con incertidumbre, mayor será el tiempo de cálculo; así también aumenta el tiempo de cálculo al aumentar la complejidad de la estructura de los coeficientes del polinomio característico. Para la implementación del algoritmo en las aplicaciones mostradas se utilizó una computadora con 4 núcleos de procesamiento y 4GB de memoria RAM, el tiempo de cálculo para el intercambiador de calor (aplicación con 6

parámetros inciertos) fue de 14hrs, el tiempo de cálculo para el miembro artificial (aplicación cuyo polinomio característico en lazo cerrado es de orden 5) fue de más de 3 días.

5.2 Trabajo Futuro y recomendaciones

Como trabajo a futuro a partir del análisis efectuado en este trabajo de Tesis se proponen los siguientes puntos:

- El desarrollo de una plataforma de trabajo en Matlab usando GUI (Grafical User Interface), que permita al usuario un cómodo acceso y facilidad de uso, adquiriendo así un sentido más práctico. Actualmente el algoritmo no exige dicha plataforma simplemente es un complemento que daría una mejor disposición del trabajo desarrollado en esta tesis.
- Se propone la extensión del algoritmo para un mayor número de parámetros del controlador; debido a que la problemática aumenta considerablemente
- Las computadoras modernas poseen una gran capacidad de cálculo que permiten crear y trabajar con programas que facilitan la interactividad y el nivel de comprensión en los procesos, sin embargo para obtener los resultados esperados, el algoritmo propuesto incrementa el número de operaciones cuando la tolerancia toma valores muy pequeños, obviamente esto se incrementa con un mayor número de parámetros con incertidumbre, a mayor complejidad en la estructura de sus coeficientes y mayor grado del polinomio característico en lazo cerrado por lo que se recomienda utilizar una computadora adecuada a la complejidad del caso.

Bibliografía

- [1] J. Ackermann. *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters* Springer-Verlag, London. 1993.
- [2] J. Ackerman. *Parameter Space Design of Robust Control Systems*, IEEE Trans. on Auto.Control. Vol. AC-25, No.5, 1980, pp.1058-1072.
- [3] J. Ackermann. *Robust Control: The Parameter Space Approach* Springer-Verlag, London, UK. 2002.
- [4] R.B. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan, New York, NY. 1994
- [5] A.C. Bartlet, C.V. Hollot and Huang Lin. Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1:61-71, 1988.
- [6] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L.H. Keel *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1995
- [7] S.P. Bhattacharyya. *Robust Stabilization Against Structured Perturbations*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [8] S.P. Bhattacharyya, A. Datta y L.H. Keel . *Linear Control Theory. Structure, Robustness and Optimization*. Taylor and Francis Group. Boca Raton, London, New York, 2009.
- [9] M. Bozorg, H.D. Sherali, E.J. Davison and A. Delavar-Khalafi. *Parameter Stability Margins for Polynomial Uncertainty Structures: A Polynomial Programming Approach* Dept. of Mechanical Eng., University of Yazd, Iran. 2005.
- [10] A. Cavallo, G. de María, and L. Verde. *Robust Flight Control Systems: A Parameter Space Design*, AIAA J. of Guid., Control, Vol. AC-33, No.11, Nov. 1988.
- [11] H. Chapellat, L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya *Robust stability manifolds for multilinear interval systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 34, 314-318. 1993.

- [12] T. E. Djaferis. *Robust Control Design: A Polynomial Approach*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA. 1995.
- [13] C. Elizondo. *Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal*. Programa Doctoral de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León, 1999.
- [14] C. Elizondo. *Necessary and Sufficient Conditions for Robust Positivity of Polynomic Functions Via Sign Decomposition*, Robust Control, Design IFAC ROCOND 2000, Prague Chezc Republic, April 2000.
- [15] C. Elizondo. *A new stability criterion on space coefficients*. Conferences on Decision and Control IEEE, Orlando Florida USA, 2001.
- [16] C. Elizondo. *Análisis de Cotas de Raíces de Polinomios Característicos y Nuevo Criterio de Estabilidad*. AMCA 2005.
- [17] R. Graciano y C.Elizondo . *Herramientas para el análisis de Estabilidad Robusta de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica*. AMCA, 2004.
- [18] M.J. Grimble, *Industrial Control Systems design*, John Wiley, Chichester, ISBN 0 471,49225 6. 2001.
- [19] D.G. Luenberg. *Optimization by vector Space Metthods*. Jhon Wiley & Sons, 1969.
- [20] J.P.How .*Robust Control Design with Real Parameter Uncertainty using Absolut Stability Theory*. Massachusetts Institute Technology, February, 1993.
- [21] A. Nemirovskii, "*Several NP-hard problems arising in robust stability analysis*," Math. Contr., Signals, Syst., vol. 6, no. 2, pp. 99-105, 1993.
- [22] L.H.Keel y S.P.Bhattacharyya. *Fixed Order Multivariable Controller Synthesis: A New Algorithm*. Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2008.
- [23] L.H.Keel and S.P. Bhattacharyya. *Fixed Order Multivariable Discrete-Time Control*. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference,Shangai, P.R. China, December 16-18,2009.
- [24] V.L. Kharitonov. *Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations*, *Diferencial Uravnen*, Vol.14, No.11, pp. 2086-2088, 1978.
- [25] K.Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall. 1980.
- [26] K.Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall. Tercera Edición 1998.
- [27] S. Poljak and J. Rohn, "Checking robust nonsingularity is NP-hard," Math. Contr., Signals, Syst., vol. 6, no. 1, pp. 1-9, 1993.

- [28] B. T.Polyak and J. Kogan. *Necessary and sufficient conditions for robust stability of linear systems with multiaffine uncertainty structure*. IEEE Transactions on Automatic Control, 40, 1255-1260. 1995
- [29] D.D. Siljak. *Parameter Space Methods for Robust Control Design: A Guided Tour*. IEEE Trans. on Auto.Control. Vol.AC-34, No. 7, July 1989, pp.674-688.
- [30] D.Siljak. *Robust D-Stability via Posivity.*, Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania,1998.
- [31] C.A.Smith y A.B.Corripio. *Cotrol Automático de Procesos. Teoría y Práctica*. Limusa. pp. 226-228, 352-354. 1991.
- [32] M.Vicino y M.Milanse. *Robust stability of linear state space models via Bernstein Polynomials.*, Control of Uncertain Systems,eds. D. Hinrichsen and B. Martensson, Birkhauser, Boston, 1997.
- [33] M.Zettler and J. Garloff. *Robustness analysis of polynomials with polynomial parameter dependency using Bernstein expansion*. IEEE Transactions on Automatic Control, 43, 425-431. (1998)