

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**COMPARACION DE LA SOLUCION DE ECUACIONES  
DIFERENCIALES USANDO DIFERENCIAS FINITAS  
Y ELEMENTO FINITO**

**TESIS**

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
DE LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD  
EN TERMICA Y FLUIDOS**

**QUE PRESENTA EL:  
M.C. RAUL ACOSTA LANDIN**

**CD. UNIVERSITARIA**

**NOVIEMBRE DE 1999**

COMPARACION DE LA SOLUCION DE ECUACIONES

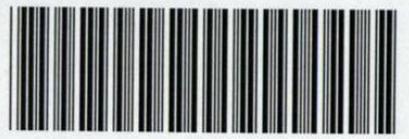
TM  
QA371  
.A3  
1999  
c.1

DIFERENCIALES USANDO DIFERENCIAS FINITAS

Y ELEMENTO FINITO

R. A. L.

1999

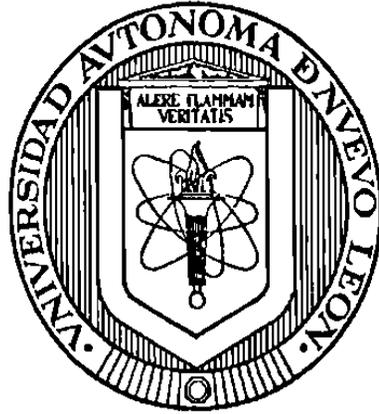


1080092552





**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO  
DIFERENCIAS FINITAS Y ELEMENTO FINITO**

**TESIS**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
MECÁNICA CON ESPECIALIDAD EN TÉRMICA Y FLUIDOS**

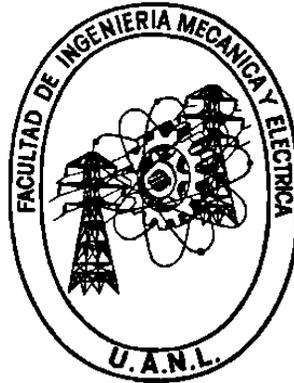
**QUE PRESENTA EL**

**M.C. RAÚL ACOSTA LANDÍN**

**CD. UNIVERSITARIA**

**NOVIEMBRE DE 1999**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO  
DIFERENCIAS FINITAS Y ELEMENTO FINITO**

**TESIS**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
MECÁNICA CON ESPECIALIDAD EN TÉRMICA Y FLUIDOS**

**QUE PRESENTA EL**

**M.C. RAÚL ACOSTA LANDÍN**

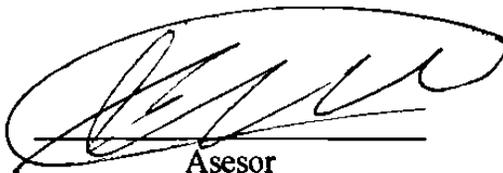
**CD. UNIVERSITARIA**

**NOVIEMBRE DE 1999**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO

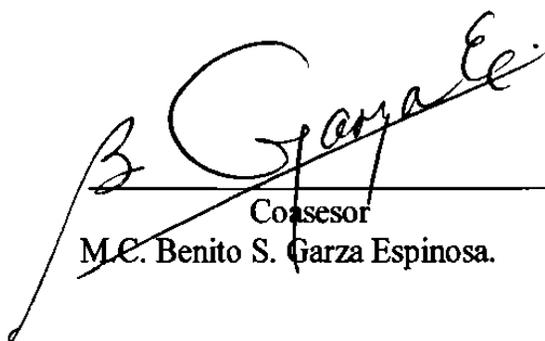
Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO DIFERENCIAS FINITAS Y ELEMENTO FINITO," realizada por MC. Raúl Acosta Landín, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Térmica y fluidos.

El comité de Tesis



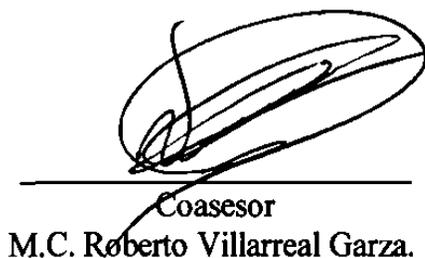
Asesor

M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza.



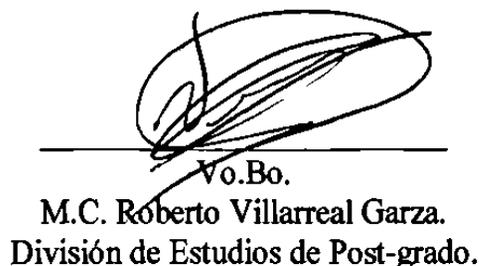
Coasesor

M.C. Benito S. Garza Espinosa.



Coasesor

M.C. Roberto Villarreal Garza.



Vo.Bo.

M.C. Roberto Villarreal Garza.  
División de Estudios de Post-grado.

San Nicolás de los Garza, N.L. a 5 de Noviembre de 1999.

# DEDICATORIAS

A mi padre: Sr. José Acosta Nuñez a quien ya nuestro señor llamo a su reino, a mi madre, Sra. Inés Landín Cortes, por la ternura, entendimiento y apoyo que me brindaron.

A mi esposa: Lic. Martina Bache García por su amor, su comprensión y sus palabras de aliento que siempre me animaron a terminar la tesis.

A mis hijos: Erika Nastenka, Raúl Enrique por el tiempo que no les pude dedicar mientras estuve elaborando la tesis.

A mis hermanos: Juan José Acosta, Esmeralda Acosta, Alfredo Acosta con cariño y respeto.

A todos mis familiares y amigos, con agradecimiento y admiración

A quienes fueron mis maestros en todos los niveles de mi educación escolar y en los estudios de Maestría especialmente: M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza, por todo el apoyo que me brindo.

# AGRADECIMIENTOS

Al M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza por su ayuda incondicional y asesoría tan valiosa que de él recibí para la elaboración de mi tesis.

Al Ing. Jose H. Ramírez guerra por su ayuda incondicional para llevar a cabo mi meta.

A mis amigos de la facultad: M.C. Juan Antonio Franco Quintanilla, M.C. Joel González Marroquin, M.C. Benito Sergio Garza Espinosa, M.C José Eloy Vargas Rocha, M.C. Homero Estrada Cortinas.

# PROLOGO

La importancia de los métodos numéricos ha aumentado en la enseñanza de la ingeniería y la ciencia, lo cual refleja el uso actual y sin precedentes de las computadoras. Al aprender los métodos numéricos, nos volvemos aptos para:

- 1) Entender esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos.
- 2) Deducir esquemas numéricos básicos
- 3) Escribir programas y resolverlos en una computadora.
- 4) Usar correctamente el software existente para dichos métodos.

El aprendizaje de los métodos numéricos no solo aumenta nuestra habilidad para el uso de computadoras, también amplía la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

En esta tesis se analizarán básicamente dos técnicas numéricas, el método de elemento finito y el método de diferencias finitas.

Entre los objetivos de la tesis están los siguientes puntos:

- 1) Dependiendo del tipo de problema: en estado estable, en estado transitorio en dos dimensiones, que método numérico proporciona una mejor aproximación a la solución analítica.
- 2) Que criterios se deben de tomar para mejorar la aproximación a la solución analítica.

# SINTESIS

La tesis se escribió considerando un orden lógico, para que cualquier persona que incurriera en el estudio de los métodos del elemento finito y las diferencias finitas, no tenga problemas en el entendimiento y comprensión de los diferentes aspectos que se tratan en esta. Así teniendo los conocimientos obtenidos al consultar esta tesis podrán ahondar en el estudio de los métodos antes mencionados.

Los resultados que se obtuvieron al solucionar cada uno de los ejemplos son presentados en cada uno de los capítulos de la tesis.

En seguida se da una breve descripción del contenido de cada uno de los capítulos.

**CAPITULO 1.-** En este capítulo se describen los pasos básicos para la solución de problemas utilizando el método de elemento finito.

**CAPITULO 2.-** En este capítulo se resuelven algunos ejemplos en estado estable en una dimensión utilizando el método de elemento finito.

**CAPITULO 3.-** En este capítulo se resuelven algunos ejemplos en estado transitorio en una dimensión utilizando el método de elemento finito.

**CAPITULO 4.-** En este capítulo se resuelven algunos ejemplos en estado estable en dos dimensiones.

**CAPITULO 5.-** En este capítulo se resuelven todos los ejemplos de los capítulos anteriores utilizando el método de diferencias finitas.

**CAPITULO 6.-** En este capítulo se comparan los resultados obtenidos al utilizar los métodos de elemento finito y diferencias finitas.

**CAPITULO 7.-** En este capítulo se especifica el método a utilizar diferencias finitas o elemento finito dependiendo del tipo de problema.

# INDICE

Prologo	i
Síntesis	ii
Introducción	1
<b>Capítulo 1 METODO DEL ELEMENTO FINITO</b>	<b>3</b>
1.1 Pasos básicos del análisis de elemento finito	3
1.2 Problema modelo con valores en la frontera	5
<b>Capítulo 2 PROBLEMAS EN ESTADO ESTABLE METODO DE ELEMENTO FINITO</b>	<b>29</b>
Ejemplo 2.1.a	29
1. Para dos elementos lineales	29
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	36
Ejemplo 2.1.b	37
2. Para un elemento cuadrático	37
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	42

Ejemplo 2.2.a	43
1. Para dos elementos lineales	44
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	50
Ejemplo 2.2.b	51
2. Para un elemento cuadrático	51
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	58
Ejemplo 2.3	59
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	69
Ejemplo 2.4.a	71
1. Para cuatro elementos lineales	71
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	78
Ejemplo 2.4.b	79
2. Para dos elementos cuadráticos	79
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	86
ECUACIÓN DE CUARTO ORDEN EN UNA DIMENSIÓN	87
Ejemplo modelo	87
Ejemplo 2.5	95
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	100
Ejemplo 2.6	101
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	107
Ejemplo 2.7	108
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	113

### **Capítulo 3 PROBLEMAS EN ESTADO TRANSITORIO METODO DE**

<b>ELEMENTO FINITO</b>	<b>114</b>
3.1 Introducción	114
3.2 Modelos del elemento finito	116
3.3 Aproximaciones en el tiempo	118
<b>Ejemplo 3.1</b>	<b>122</b>
1. Para un elemento lineal	124
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	127
2. Para un elemento cuadrático	128
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	131
3. Para dos elementos cuadráticos	132
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	136
<b>Ejemplo 3.2</b>	<b>137</b>
1. Para un elemento lineal	139
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	141
2. Para un elemento cuadrático	143
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	146
3. Para dos elementos cuadráticos	148
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	152

### **Capítulo 4 PROBLEMAS EN DOS DIMENSIONES METODO DE ELEMENTO**

<b>FINITO</b>	<b>154</b>
---------------	------------

4.2	Problemas con valores en la frontera	155
4.2.1	Ecuación modelo	155
4.2.2	Discretización del elemento finito	155
4.2.3	Forma débil	156
4.2.4	Modelo del elemento finito	156
4.2.5	Funciones de interpolación	157
4.2.6	Evaluación de los elementos de la matriz y vector	160
4.2.7	Ensamble de las ecuaciones del elemento	165
Ejemplo 4.1		167
1.	Para tres elementos triangulares	167
	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	174
2.	Para cuatro elementos rectangulares	175
	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	181
	Comparación triángulos rectángulos elemento finito solución analítica	182
<b>Capítulo 5</b>	<b>EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS</b>	<b>183</b>
Ejemplo 2.1		184
	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	187
Ejemplo 2.2		188
	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	190
Ejemplo 2.3		191
	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	195
Ejemplo 2.4		196

Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	199
Ejemplo 2.5.a	200
1. Reticula $i=1$	201
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	202
Ejemplo 2.5.b	203
2. Reticula $i=1,2,3$	204
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	205
Ejemplo 2.5.c	206
3. Reticula $i=1,2,3,4,5,6,7$	206
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	208
Ejemplo 2.6.a	209
1. Para aristas suaves	212
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	213
2. Para variación uniforme	214
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	215
Ejemplo 2.6.b	216
3. Para variación uniforme	216
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	220
Ejemplo 3.1	221
1. Reticula $i=1$	223
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	224
2. Reticula $i=1,2$	225
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	226
3. Reticula $i=1,2,3,4$	227

Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	228
Ejemplo 3.2	229
1. Retícula $i=0,1$	232
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	233
2. Retícula $i=0,1,2$	234
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	235
3. Retícula $i=0,1,2,3,4$	236
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	237
Ejemplo 4.1	238
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	242
<b>Capítulo 6</b> COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LOS METODOS ELEMENTO FINITO Y DIFERENCIAS FINITAS CON LA SOLUCIÓN ANALÍTICA	243
<b>Capítulo 7</b> CONCLUSIONES	252
<b>Bibliografías</b>	254
<b>Lista de tablas</b>	257
<b>Lista de gráficas</b>	259
<b>Autobiografía</b>	261