

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es la solución de algunas ecuaciones diferenciales utilizando métodos numéricos. Para determinar que método numerico utilizar tomando en cuenta la geometria del problema, las condiciones iniciales y las condiciones de frontera, los criterios que se deben de tomar para la exactitud de la solucion de la ecuacion diferencial.

Los métodos numéricos a utilizar son el método del elemento finito y el método de diferencias finitas.

Virtualmente cualquier fenómeno en la naturaleza puede ser descrito con la ayuda de leyes físicas, en términos de ecuaciones algebraicas, o de ecuaciones diferenciales.

La mayoría de los ingenieros y científicos estudian los fenómenos físicos de dos maneras.

- a) Formulación del proceso físico.
- b) Análisis numérico del modelo matemático.

La formulación matemática de un proceso físico requiere conocimientos relacionados a las leyes físicas y a menudo, herramientas matemáticas.

Desarrollar el modelo matemático de un proceso es logrado a través de las suposiciones de como trabaja el proceso. En una solución numérica, usamos un método numérico y una computadora para evaluar el modelo matemático y estimar las características del proceso.

Mientras que la obtención de la ecuación que gobierna la mayoría de los procesos no es complicada, su solución por el método exacto de análisis es muy difícil. En tales casos, métodos de análisis aproximados proporcionan alternativas más fáciles para encontrar las soluciones. Entre estos, el método de diferencias finitas y los métodos variacionales como el método de Rayleigh-Ritz y Galerkin son los más frecuentemente usados en la literatura.

En la aproximación por diferencias finitas de una ecuación diferencial, las derivadas son remplazadas por funciones en expansión de serie de Taylor.

En la aproximación por método variacional, la ecuación diferencial es puesta en su forma equivalente (Integral Pesada) y entonces la solución aproximada sobre el dominio se supone ser una combinación lineal $\left(\sum_j c_j \phi_j\right)$ de funciones de aproximación (ϕ_j) y coeficientes indeterminados, (c_j) . Los coeficientes (c_j) son determinados tal que la integral declarada equivalente a la ecuación diferencial es satisfecha.

El método del elemento finito supera la desventaja de los métodos variacionales tradicionales porque proporciona un procedimiento sistemático para la derivación de las funciones de aproximación sobre una subregion del dominio. El método cuenta con tres características que la hacen superior sobre los demás métodos.

Primero. Un dominio con una geometría compleja es representado como una colección de subdominios de geometría simple, llamados elementos finitos.

Segundo. Sobré cada elemento finito las funciones de aproximación son derivadas usando la idea básica de que cualquier función continua puede ser representada por una combinación lineal de polinomios algebraicos.

Tercero. Las relaciones algebraicas entre los coeficientes indeterminados (valores nodales) son obtenidas satisfaciendo la ecuación gobernante, a menudo en forma de integral pesada sobre cada elemento.

Las funciones de aproximación son derivadas usando conceptos de teoría de interpolación, y son por lo tanto llamadas funciones de interpolación.

CAPITULO 1

METODO DE ELEMENTO FINITO

1.1) PASOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS DE ELEMENTO FINITO

1) Discretización (representación) del dominio dado en una colección de elementos finitos. (Este paso puede ser pospuesto hasta que la formulación de la ecuación del elemento finito este completa).

- a) Construir la malla de los elementos finitos preseleccionados.
- b) Numerar los nodos y elementos.
- c) Generar las propiedades de la geometría (e.g., coordenadas y área de sección Transversal) necesarios para el problema.

2) Derivación de las ecuaciones del elemento para todos los elementos típicos en la malla.

a) Construir la formulación variacional de la ecuación diferencial sobre un típico elemento.

b) Suponer que una variable dependiente (u) de la forma ($u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$) y sustituirla

en el paso (2 a) para obtener la ecuación del elemento de la forma

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\}$$

c) Seleccione la función de interpolación para el elemento (ψ_i) y calcule los elementos de la matriz.

3) Ensamble las ecuaciones de cada uno de los elementos para obtener las ecuaciones del problema completo.

a) Identificar las condiciones de continuidad entre los elementos también las variables primarias (relaciones entre los grados de libertad locales, grados de libertad globales y conectividad de los elementos) para relacionar los nodos del elemento a los nodos globales.

b) Identificar las condiciones de equilibrio entre las variables secundarias (relaciones entre las fuentes locales o componentes de fuerzas y las componentes de fuentes globalmente especificadas).

c) Ensamble las ecuaciones de los elementos usando los pasos (3 a) y (3 b).

4) Imposición de las condiciones frontera del problema.

a) Identificar los grados de libertad de la variable primaria globalmente.

b) Identificar los grados de libertad de la variable secundaria globalmente.

5) Solución de las ecuaciones ensambladas.

6) Postprocesamiento de los resultados.

a) Calcule el gradiente de la solución o otras cantidades deseadas de los grados de libertad de la variable primaria calculada en el paso (5).

b) Represente los resultados en forma tabular o en forma gráfica.

1.2) PROBLEMA MODELO CON VALORES EN LA FRONTERA

Considere el problema de encontrar la función $u(x)$ que satisface la ecuación diferencial.

$$-\frac{d}{dx}\left(a \frac{du}{dx}\right) + cu - q = 0 \quad \Omega = (0, L) \quad (1.1)$$

y las condiciones frontera:

$$u(0) = u_0, \quad \left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=L} = Q_0 \quad (1.2)$$

donde $a = a(x)$, $c = c(x)$, $q = q(x)$, u_0 y Q_0 son los datos del problema.

La ecuación (1.2) puede representar una descripción analítica de algunos procesos físicos. Por ejemplo transferencia de calor por conducción y convección en una pared plana o aleta (transferencia de calor 1-D), flujo a través de canales y tubos, deflexión transversal de cables, deformación axial de barras y otros procesos físicos descritos por la tabla (1.1).

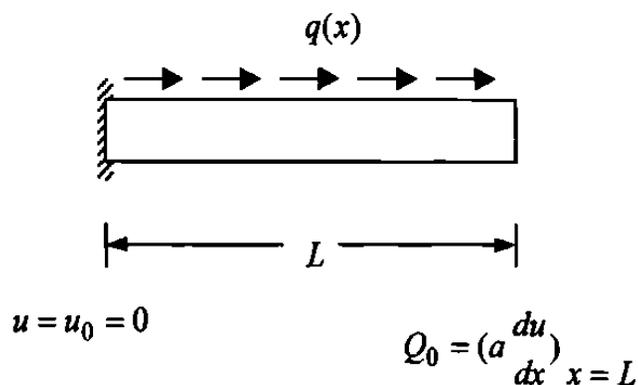
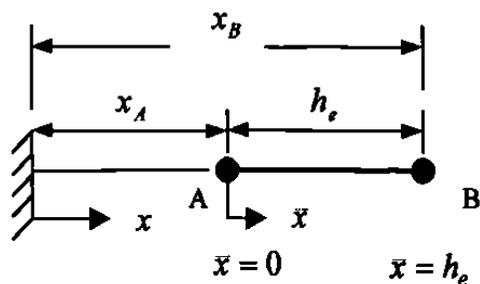


Figura 1.1 Elemento finito dominio en una dimensión

PASO 1: DISCRETIZACION

Representación del dominio dado en una colección de elementos finitos preseleccionados.



$$\bar{x} = x - x_A$$

x = Coordenadas globales del elemento

\bar{x} = Coordenadas locales del elemento

$$Q_1^e \equiv -\left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=x_A} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} u(x_A) = u_1^e \quad u(x_B) = u_2^e \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ 1 \quad \quad \quad e \quad \quad \quad 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad Q_2^e \equiv \left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=x_B}$$

u = Variable primaria del elemento

Q = Variable secundaria del elemento

PASO 2: DERIVACION DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

La derivación de las ecuaciones del elemento finito, son ecuaciones algebraicas que relacionan la variable primaria con la variable secundaria en los nodos del elemento, involucra tres pasos.

- a) Construir la forma débil.
- b) Suponer la forma de la solución aproximada sobre el elemento finito.
- c) Derivar las ecuaciones del elemento finito para sustituir la solución aproximada en la forma débil.

a) Construcción de la forma débil

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[- \frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + cu - q \right] dx \quad (1.3 a)$$

$$0 = - \int_{x_A}^{x_B} w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] dx + \int_{x_A}^{x_B} w [cu - q] dx \quad (1.3 b)$$

Integrando por partes la primera integral de la ecuación (1.3 b).

$$\int_{x_A}^{x_B} w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] dx = wa \frac{du}{dx} \Big|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx$$

Sustituimos el resultado de la integral en la ecuación (1.3 b) para obtener la forma débil de la ecuación diferencial (1.1).

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + cuw - wq \right] dx - \left[w \left(a \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_A}^{x_B} \quad (1.4)$$

Nota:

Los coeficientes de la función de peso (w) son llamadas variables secundarias, y sus especificaciones constituyen condiciones de frontera natural ($a \frac{du}{dx} = Q$).

La variable dependiente en las condiciones de frontera son llamadas variables primarias, sus especificaciones constituyen las condiciones de frontera esencial (u).

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + c u w - w q \right] dx - \left[w \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_B} - w \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_A} \right] \quad (1.5)$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + c u w - w q \right] dx - w(x_B) Q_B - w(x_A) Q_A \quad (1.6)$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada.

- 1) La solución aproximada debe ser continua sobre el elemento, y diferenciable, como es requerido por la forma débil.
- 2) Debe ser un polinomio completo, que incluya los términos desde el menor orden hasta el de mayor orden.
- 3) Debe ser una función de interpolación de la variable primaria en los nodos del elemento finito.

I) Aproximación Lineal

$$U^e = a + bx \quad (1.7)$$

donde a y b son constantes.

$$\begin{aligned} U^e(x_A) &= u_1^e \\ U^e(x_B) &= u_2^e \end{aligned} \quad (1.8)$$

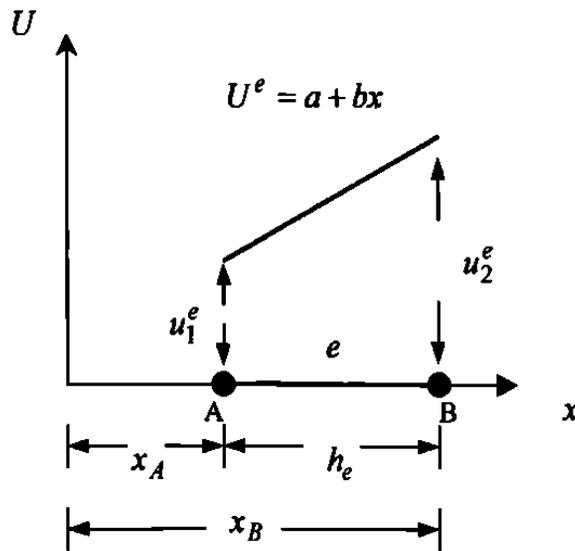


Figura 1.2 Elemento lineal una dimensión

Expresando la ecuación (1.8) en términos de (u_1^e) y (u_2^e)

$$\begin{aligned} u_1^e &= a + bx_A \\ u_2^e &= a + bx_B \end{aligned} \quad (1.9 a)$$

o en forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (1.9 b)$$

invirtiendo la matriz (1.9 b), obtenemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{h_e} (u_1^e x_B - u_2^e x_A) \\ b &= \frac{1}{h_e} (u_2^e - u_1^e) \end{aligned} \quad (1.9 c)$$

donde $h_e = x_A - x_B$. Sustituimos (1.9 c) en (1.7)

$$U^e = \begin{pmatrix} x_B - x \\ h_e \end{pmatrix} u_1^e + \begin{pmatrix} x - x_B \\ h_e \end{pmatrix} u_2^e \quad (1.9 d)$$

La ecuación (1.9 d) es una forma estándar del elemento finito. Los valores nodales son multiplicados por funciones lineales de (x) , que son llamadas funciones de forma o funciones de interpolación. Estas funciones son denotadas por (ψ_i) con un subíndice que indica el nodo donde es especificada la función de forma. Las funciones de forma en (1.9 d) son denotadas por (ψ_1^e, ψ_2^e) .

$$\psi_1^e = \left(\frac{x_B - x}{h_e} \right) \quad \text{y} \quad \psi_2^e = \left(\frac{x - x_A}{h_e} \right) \quad (1.10 \text{ a})$$

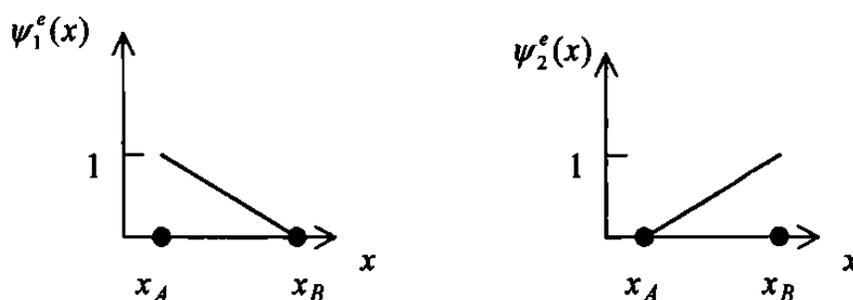


Figura 1.3 Funciones de forma lineales

La aproximación lineal expresadas en coordenadas locales

$$\bar{x} = x - x_A$$

$$U^e = \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) u_1^e + \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) u_2^e \quad (1.10 \text{ b})$$

donde las funciones de forma serán:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)$$

$$\psi_2^e(\bar{x}) = \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \quad (1.10 \text{ c})$$

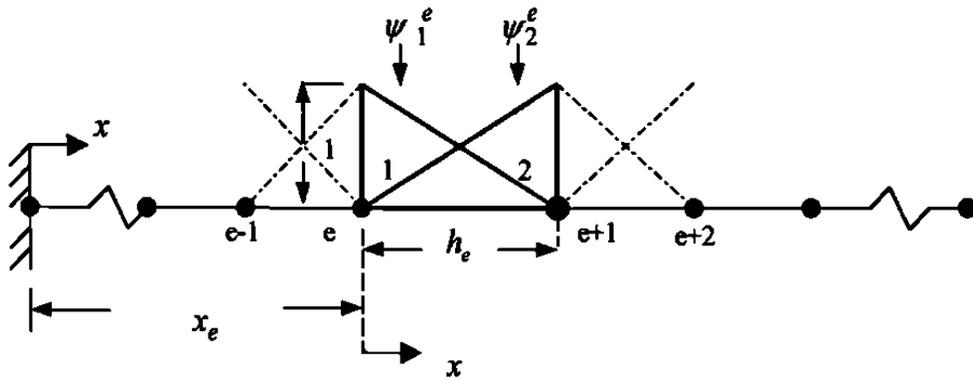


Figura 1.4 Funciones de interpolación lineales en coordenadas locales

Sustituyendo las funciones de interpolación en la ecuación (1.7) obtenemos la forma que tendrá la aproximación lineal.

$$U^e = \psi_1^e(x)u_1^e + \psi_2^e(x)u_2^e$$

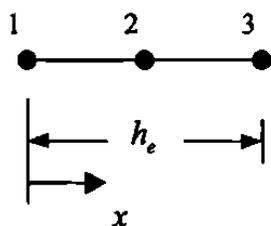
$$U^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(x)u_j^e \quad (1.10 \text{ d})$$

II) Aproximación Cuadrática.

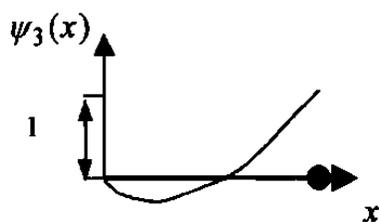
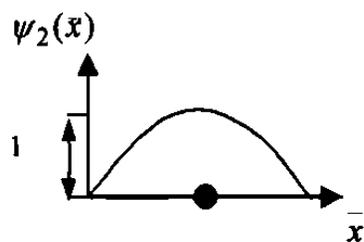
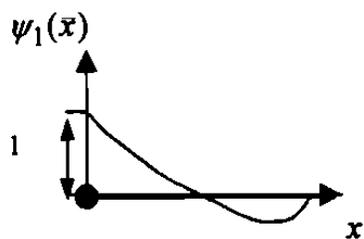
$$U^e = a + bx + cx^2 \quad (1.11)$$

Donde a , b y c son constantes.

$$\begin{aligned} U^e(x_1^e) &= u_1^e \\ U^e(x_2^e) &= u_2^e \\ U^e(x_3^e) &= u_3^e \end{aligned} \quad (1.12)$$



(a)



(b)

Figura 1.5 Elemento cuadrático asociado con funciones de interpolación (a),(b).

Expresando la ecuación (1.11) en términos de $(u_1^e), (u_2^e)$ y (u_3^e)

$$\begin{aligned} u_1^e &= a + bx_1^e + c(x_1^e)^2 \\ u_2^e &= a + bx_2^e + c(x_2^e)^2 \\ u_3^e &= a + bx_3^e + c(x_3^e)^2 \end{aligned} \quad (1.13 \text{ a})$$

o en forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 \\ 1 & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.13 \text{ b})$$

solucionando el sistema de ecuaciones para a, b, c .

$$a = \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e u_i^e \quad \text{donde} \quad \alpha_i^e = x_j^e(x_k^e) - x_k^e(x_j^e)^2 \quad \text{y} \quad D^e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e \quad (1.14 \text{ a})$$

$$b = \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \beta_i^e u_i^e \quad \text{donde} \quad \beta_i^e = (x_j^e)^2 - (x_k^e)^2 \quad (1.14 \text{ b})$$

$$c = \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \gamma_i^e u_i^e \quad \text{donde} \quad \gamma_i^e = -(x_j^e - x_k^e) \quad (1.14 \text{ c})$$

La ecuación (1.11) toma la forma

$$\begin{aligned} U^e(x) &= \psi_1^e(x)u_1^e + \psi_2^e(x)u_2^e + \psi_3^e(x)u_3^e \\ U^e(x) &= \sum_{j=1}^3 \psi_j^e(x)u_j^e \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde las ψ_j^e son las funciones de interpolación de lagrange cuadraticas.

$$\psi_i^e(x) = \frac{1}{D^e} (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e x^2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.16)$$

Los subíndices usados en las ecuaciones (1.14) permutan en orden natural.

$$\begin{aligned} \text{si } i=1 & \text{ entonces } j=2 \text{ y } k=3 \\ \text{si } i=2 & \text{ entonces } j=3 \text{ y } k=1 \\ \text{si } i=3 & \text{ entonces } j=1 \text{ y } k=2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Las funciones de interpolación cuadráticas pueden ser expresadas en términos de coordenadas locales (x), con el origen fijo en el nodo (1). Las coordenadas globales (x) están relacionadas con las coordenadas locales (\bar{x}) por la relación ($x = x_1^e + \bar{x}$) donde ($x_1^e = x_A$) que es la coordenada global del primer nodo del elemento (Ω^e).

Para un elemento cuadrático con el nodo interior, nodo (2), localizado en ($x = \alpha h_e$), ($x_2^e = x_1^e + \alpha h_e$), para ($\alpha = \frac{1}{2}$), cuando el nodo (2) esta localizado a la mitad del elemento, las funciones de interpolación serán.

$$\begin{aligned} \psi_1^e(x) &= \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right) \\ \psi_2^e(x) &= 4 \frac{x}{h_e} \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \\ \psi_3^e(x) &= -\frac{x}{h_e} \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Propiedades de las funciones de interpolación:

$$(1) \quad \psi_i^e(x_j^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.19 \text{ a})$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \psi_j^e(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j^e}{dx} = 0 \quad (1.19 \text{ b})$$

C) Derivar las ecuaciones del elemento finito para sustituir la solución aproximada en la forma débil.

La sustitución de (1.10 d) o (1.15) en (1.6) deberá dar las ecuaciones algebraicas necesarias para los valores nodales (u_i^e) y (Q_i^e) del elemento (Ω^e). Para formular el modelo del elemento finito basado en la forma débil (1.6), no es necesario decidir a priori el grado de aproximación de (U^e). El modelo puede ser desarrollado para un grado arbitrario de función de interpolación:

$$u \approx U^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \quad (1.20)$$

Donde ψ_j^e son las funciones de interpolación de Lagrange de grado ($n-1$). Cuando ($n > 2$), la forma débil en (1.6) debe ser modificada para incluir una variable secundaria no cero.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wq \right] dx - \sum_{i=1}^n w(x_i^e) Q_i \quad (1.21)$$

donde (x_i^e) es la coordenada global del nodo (i) del elemento (Ω^e). Si los nodos (1) y (n) son los puntos finales del elemento entonces (Q_1^e) y (Q_n^e) representan los puntos fuentes desconocidos, y todas las otras (Q_i^e) son siempre conocidas.

Siguiendo el procedimiento de Rayleigh-Ritz sustituimos (1.20) por (u) y

(ψ_1^e), (ψ_2^e)...(ψ_n^e) por (w) en la forma débil (1.21) para obtener las (n) ecuaciones algebraicas.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_1^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c \psi_1^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_1^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_1^e(x_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_2^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c \psi_2^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_2^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_2^e(x_j^e) Q_j^e$$

:
:
:

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_n^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c \psi_n^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_n^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_n^e(x_j^e) Q_j^e \quad (1.21 \text{ a})$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como

$$0 = \sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.21 \text{ b})$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = B(\psi_i^e, \psi_j^e) \quad (1.21 \text{ c})$$

$$f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} q \psi_i^e dx = l(\psi_i^e)$$

note que la propiedad (1) de las funciones de interpolación (1.19 a) es usada para escribir.

$$\sum_{j=1}^n \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e \quad (1.22)$$

Las ecuaciones (1.21 a) pueden ser expresadas en términos de los coeficientes (K_{ij}^e, f_i^e, Q_i^e) como:

$$\begin{aligned} K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e + \dots + K_{1n}^e u_n^e &= f_1^e + Q_1^e \\ K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e + \dots + K_{2n}^e u_n^e &= f_2^e + Q_2^e \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ K_{n1}^e u_1^e + K_{n2}^e u_2^e + \dots + K_{nn}^e u_n^e &= f_n^e + Q_n^e \end{aligned} \quad (1.23 \text{ a})$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas (1.21 a) pueden ser escrita como.

$$[K^e]\{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (1.23 \text{ b})$$

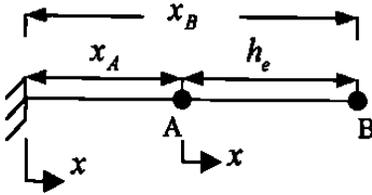
La matriz $[K^e]$ es llamada matriz de coeficientes, en aplicaciones de mecánica estructural. El vector columna $\{f^e\}$ es el vector fuente, o vector fuerza en problemas de mecánica estructural. Note que (1.23) contiene $(2n)$ incógnitas: $(u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e)$ y $(Q_1^e, Q_2^e, \dots, Q_n^e)$, llamadas variables primarias y secundarias del elemento grados de libertad nodal; por lo tanto, no pueden ser resueltas sin tener adicionalmente (n) condiciones. Algunas de estas provienen de las condiciones frontera y el resto por balance de las variables secundarias (Q_i^e) en los nodos comunes a varios elementos. Este balance puede ser implementado poniendo los elementos juntos (ensamblando las ecuaciones de los elementos). Ensamblando y imponiendo las condiciones frontera, debemos de obtener exactamente el mismo numero de ecuaciones algebraicas que el numero de variables primarias y secundarias desconocidas.

La matriz de coeficientes $[K^e]$ es simétrica, y el vector fuente $\{f^e\}$ puede ser evaluado para un elemento dado y datos $(a, c, \text{ y } q)$. Para un elemento con valores constantes de $(a, c, \text{ y } q)$ los coeficientes de $[K_{ij}^e]$ y $\{f^e\}$ pueden ser evaluados para un elemento típico.

Ejemplo: Determinar la matriz $[K^e]$ y el vector $\{f^e\}$ de la ecuación (1.23 b).

a) Elemento Lineal.

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ y el vector fuente $\{f^e\}$ se calculan de la siguiente manera.



$$K_{ij}^e = \int_b^{h_e} \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$\psi_1^e(x) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{x}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{1}{h_e}, \quad \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} = \frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^e = \int_b^{h_e} \left[a_e \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(-\frac{1}{h_e} \right) + c_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] dx$$

$$K_{11}^e = \frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{3} c_e h_e$$

$$K_{12}^e = \int_b^{h_e} \left[a_e \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + c_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] dx$$

$$K_{12}^e = -\frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{6} c_e h_e = K_{21}^e$$

$$K_{22}^e = \int_b^{h_e} \left[a_e \left(\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + c_e \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] dx = \frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{3} c_e h_e$$

Similarmente:

$$f_i^e = \int_0^{h_e} q_e \psi_i^e d\bar{x}$$

$$f_1^e = \int_0^{h_e} q_e \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) dx = \frac{1}{2} q_e h_e$$

$$f_2^e = \int_0^{h_e} q_e \frac{x}{h_e} dx = \frac{1}{2} q_e h_e$$

para (q_e) constante el vector fuente total $(q_e h_e)$ se distribuye igualmente en los dos nodos.

Los coeficientes de la matriz y el vector columna son:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.24 \text{ a})$$

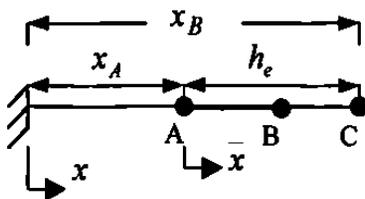
$$\{f^e\} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{Bmatrix}$$

$$\{f^e\} = \frac{q_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.24 \text{ b})$$

Ejemplo: Determinar la matriz $[K^e]$ y el vector $\{f^e\}$ de la ecuación (1.23 b)

b) Elemento Cuadrático.

Para una malla con elementos cuadráticos en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ y el vector fuente $\{f^e\}$ se calculan de la siguiente manera.



$$K_{ij}^e = \int_0^{h_e} \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) d\bar{x}$$

$$f_i^e = \int_0^{h_e} q_e \psi_i^e d\bar{x}$$

Las funciones de interpolación de Lagrange para un elemento cuadrático $\psi_i^e(x)$ para $(i = 1, 2, 3)$ son:

$$\psi_1^e(x) = \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right)$$

$$\psi_2^e(x) = \frac{4x}{h_e} \left(1 - \frac{x}{h_e}\right)$$

$$\psi_3^e(x) = -\frac{\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e}\right)$$

Las derivadas de las funciones de interpolación.

$$\frac{d\psi_1^e}{dx} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2}$$

$$\frac{d\psi_2^e}{dx} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{x}}{h_e^2}$$

$$\frac{d\psi_3^e}{dx} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2}$$

Los coeficientes de la matriz de rigidez.

$$K_{11}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_1^e \psi_1^e) d\bar{x} = \frac{7}{3} \frac{a_e}{h_e} + \frac{2}{15} c_e h_e$$

$$K_{12}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_1^e \psi_2^e) d\bar{x} = -\frac{8}{3} \left(\frac{a_e}{h_e}\right) + \frac{1}{15} c_e h_e$$

$$K_{13}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_1^e \psi_3^e) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{a_e}{h_e}\right) - \frac{1}{30} c_e h_e$$

$$K_{22}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_2^e \psi_2^e) d\bar{x} = \frac{16}{3} \left(\frac{a_e}{h_e}\right) + \frac{32}{60} c_e h_e$$

$$K_{23}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_2^e \psi_3^e) d\bar{x} = -\frac{8}{3} \left(\frac{a_e}{h_e}\right) + \frac{1}{15} c_e h_e$$

$$K_{33}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_3^e \psi_3^e) dx = \frac{7}{3} \left(\frac{a_e}{h_e}\right) + \frac{2}{15} c_e h_e$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{a_e}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (1.25 \text{ a})$$

$$f_i^e = \int_0^{h_e} q_e \psi_i^e dx$$

$$f_1^e = \int_0^{h_e} \psi_1^e q_e dx = \frac{1}{6} q_e h_e$$

$$f_2^e = \int_0^{h_e} \psi_2^e q_e dx = \frac{2}{3} q_e h_e$$

$$f_3^e = \int_0^{h_e} \psi_3^e q_e dx = \frac{1}{6} q_e h_e$$

$$\{f^e\} = \frac{q_e h_e}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.25 \text{ b})$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

En el manejo de las ecuaciones del elemento, aislamos un elemento típico (e) de la malla y formulamos el problema variacional (forma débil de la ecuación diferencial) y se desarrolla el modelo del elemento finito, para resolver el problema completo debe regresar el elemento a su posición original e imponer las condiciones frontera.

En el ensamble de los elementos se deben de imponer las siguientes dos condiciones.

1) Continuidad de la variable primaria en los elementos a conectar

$$U_n^e = U_1^{e+1} \quad (1.26 \text{ a})$$

2) Balance de la variable secundaria en los nodos a conectar

$$Q_n^e = Q_1^{e+1} = \begin{cases} 0 & \text{si no se aplican fuentes externas} \\ Q_0 & \text{si una fuente externa es aplicada} \end{cases} \quad (1.26 \text{ b})$$

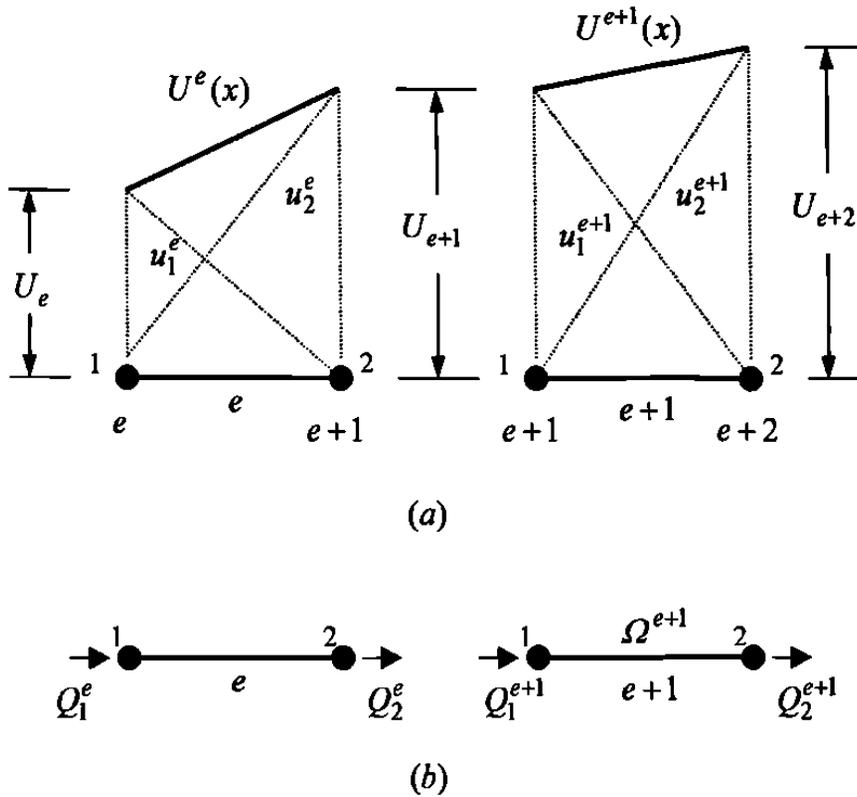


Figura 1.6 Ensamble de dos elementos lineales:

Continuidad de la variable primaria (a), Balance de la variable secundaria (b).

La continuidad de la variable primaria ($u_2^e = u_1^{e+1}$) y el balance de la variable secundaria ($Q_2^e + Q_1^{e+1}$) para una malla con elementos lineales como se muestra en la (fig. 1.6) Se realiza de la siguiente manera:

La continuidad entre los elementos de la variable primaria es impuesta para renombrar las dos variables (u_n^e) y (u_1^{e+1}) en ($x = x_N$) como uno y el mismo, normalmente el valor de (u) en el nodo global (N):

$$u_n^e = u_1^{e+1} \equiv U_N \quad (1.27)$$

Donde $N = (n-1)e + 1$ es el número del nodo global que corresponde al nodo (n) del elemento (Ω^e) y el nodo (1) del elemento (Ω^{e+1}). Por ejemplo para una malla con dos elementos lineales (fig. 1.6).

$$\begin{aligned} u_1^1 &= U_1 \\ u_2^1 &= u_1^2 = U_2 \\ u_2^2 &= u_1^3 = U_3 \end{aligned} \tag{1.28}$$

El balance de las variables secundarias puede ser interpretado como la continuidad de $(a \frac{du}{dx})$ no de $(a \frac{dU^e}{dx})$ en el punto común al elemento (Ω^e) y (Ω^{e+1}) cuando no hay cambios en $(a \frac{du}{dx})$ impuestos externamente. Por ejemplo para una malla con dos elementos lineales (fig. 1.6).

$$\left(a \frac{du}{dx} \right)_n^e = \left(a \frac{du}{dx} \right)_1^{e+1} \tag{1.29 a}$$

La ecuación anterior también se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \left(a \frac{du}{dx} \right)^e + \left(-a \frac{du}{dx} \right)^{e+1} &= 0 \\ Q_2^e + Q_1^{e+1} &= 0 \end{aligned} \tag{1.29 b}$$

El signo menos en el segundo término de la ecuación anterior es de acuerdo a los cosenos directores.

Para una malla con dos elementos lineales:

Elemento (1)

$$K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 = f_1^2 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 U_1 + K_{22}^1 U_2 = f_2^1 + Q_2^1$$

(1.30 a)

Elemento (2)

$$K_{11}^2 U_2 + K_{12}^2 U_3 = f_1^2 + Q_1^2$$

$$K_{21}^2 U_2 + K_{22}^2 U_3 = f_2^2 + Q_2^2$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas ecuaciones ensambladas. Estas contienen la suma de los coeficientes y términos fuente en los nodos comunes a los dos elementos.

Las ecuaciones (1.30 a) pueden expresarse en forma de matriz.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix} \quad (1.30 b)$$

PASO 4: IMPOSICION DE LAS CONDICIONES FRONTERA

Imponer las condiciones frontera, ambas esencial y natural, en las ecuaciones ensambladas. Un problema particular difiere de otros en la especificación de los datos y en las condiciones de frontera.

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Resolver las ecuaciones para los valores nodales desconocidos.

PASO 6: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

La solución de las ecuaciones del elemento finito da el valor nodal de la variable primaria que se desconoce. (Desplazamiento, velocidad, o temperatura).

Postprocesamiento de los resultados incluye uno o más de lo siguiente.

- 1) Calculo de cualquier variable secundaria (el gradiente de la solución)
- 2) Interpretación de los resultados para comprobar que la solución tenga sentido (un entendimiento de los procesos físicos y experiencias son las guías cuando otras soluciones no son disponibles para comparar).
- 3) Tabular y o presentación gráfica de los resultados.

CAPITULO 2

PROBLEMAS EN ESTADO ESTABLE UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

Ejemplo 2.1a. Considere una aleta rectangular como lo muestra la figura.

Determine la distribución de temperaturas y el flujo de calor usando:

I) Dos elementos lineales

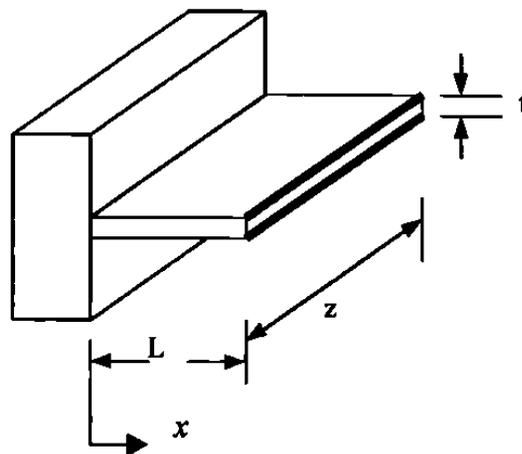


Figura 2.1 Aleta rectangular

Datos:

$$T_0 = \text{Temperatura en la base de la aleta} = 250^\circ C$$

$$T_\infty = \text{Temperatura del medio ambiente} = 75^\circ C$$

$$t = \text{Espesor de la aleta} = 0.254 \times 10^{-2} m$$

$$k = \text{Conductividad térmica del material de la aleta} = 207.6 \frac{w}{m \cdot ^\circ c}$$

$$\beta = \text{Coeficiente de película} = 283.9 \frac{w}{m^2 \cdot ^\circ c}$$

p = Perímetro de la aleta

A = Area de sección transversal

$$m^2 = \frac{\beta p}{kA} = 1076.79$$

$$L = \text{Longitud de la aleta} = 1.524 \times 10^{-2} m$$

h = Espacio entre nodos

$$h = \frac{L}{2} = 0.00762 m$$

Ecuación diferencial de una aleta rectangular.

$$-\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\beta P}{kA} (T - T_\infty) = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

Las condiciones frontera de la ecuación diferencial.

$$T(0) = T_0 \quad (kA \frac{dT}{dx}) \Big|_{x=L} = 0$$

Haciendo un cambio de variable:

$$\theta = T - T_\infty \quad \theta_0 = T_0 - T_\infty$$

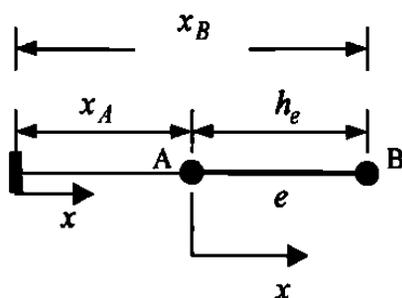
$$m^2 = \frac{\beta P}{kA}$$

La ecuación diferencial y las condiciones de frontera toman la forma

$$-\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[-\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta \right] dx$$

Resolviendo la integral e integrando por partes

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - w \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - w(x_B) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_B} - w(x_A) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_A}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - \sum_{j=1}^2 w(x_j^e) Q_j^e \quad (a)$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

I) Aproximación Lineal.

$$\theta^e = \sum_{j=1}^2 \theta_j^e \psi_j^e(x) \quad (b)$$

Donde (θ_j^e) son los parámetros a ser determinados, $\psi_j^e(x)$ son las funciones de aproximación.

Sustituyendo (b) por (θ) y (w) por (ψ_i^e) en (a)

$$0 = \sum_{j=1}^2 K_{ij}^e \theta_j^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2)$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m^2 \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = B(\psi_i^e, \psi_j^e)$$

$$\sum_{j=1}^2 \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escrita como:

$$[K^e] \{\theta^e\} = \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \int_b^{h_e} \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m^2 \psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{1}{h_e}, \quad \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} = \frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^e = \int_b^{h_e} \left[\left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(-\frac{1}{h_e} \right) + m^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x} = \frac{1}{h_e} + \frac{1}{3} m^2 h_e$$

$$K_{12}^e = \int_b^{h_e} \left[\left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + m^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x} = -\frac{1}{h_e} + \frac{1}{6} m^2 h_e$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e$$

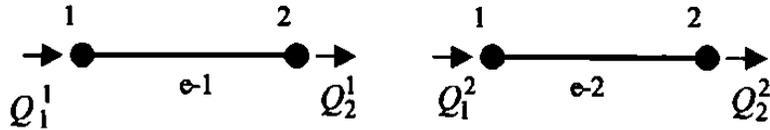
$$K_{22}^e = \int_b^{h_e} \left[\left(\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + m^2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x} = \frac{1}{h_e} + \frac{1}{3} m^2 h_e$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{m^2 h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para dos elementos lineales.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 \theta_1^1 + K_{12}^1 \theta_2^1 = -Q_1^1$$

$$K_{21}^1 \theta_1^1 + K_{22}^1 \theta_2^1 = Q_2^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 \theta_1^2 + K_{12}^2 \theta_2^2 = -Q_1^2$$

$$K_{21}^2 \theta_1^2 + K_{22}^2 \theta_2^2 = Q_2^2$$

Balance de la variable primaria.

$$\theta_1^1 = \theta_1$$

$$\theta_2^1 = \theta_1^2 = \theta_2$$

$$\theta_2^2 = \theta_3$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas ecuaciones ensambladas. Estas contienen la suma de los coeficientes y términos fuente en los nodos comunes a los dos elementos.

Las ecuaciones pueden expresarse en forma de matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ (Q_2^1) + (-Q_1^2) \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

En el balance de la variable secundaria en los nodos a conectar ecuación (1.21 b) se obtiene como resultado:

$$(Q_2^1) + (-Q_1^2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICION DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$\theta_1 = T_0 - T_\infty$$

$$Q_2^2 = \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 133.96 & -129.86 & 0 \\ -129.86 & 267.96 & -129.86 \\ 0 & -129.86 & 133.96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCION DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para $(\theta_2), (\theta_3)$ y (Q_1^1)

$$\theta_2 = 0.913\theta_1$$

$$\theta_3 = 0.886\theta_1$$

$$T_2 - T_\infty = 0.913(T_0 - T_\infty)$$

$$T_3 - T_\infty = 0.886(T_0 - T_\infty)$$

$$T_2 = 234.77^\circ C$$

$$T_3 = 230.5^\circ C$$

TABLA 2.1a

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia $x \text{ m}$	Temperatura Dos elementos lineales $T^\circ C$	Temperatura Solución exacta $T^\circ C$
0	250	250
0.00762	234.77	234.95
0.01524	230.05	230.05

PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

 $Q_1^1 =$ Flujo de calor en la base de la aleta.

$$Q_1^1 = - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 2694.6 \frac{^\circ C}{m}$$

$$Q_1^1 = -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 1420.87 \frac{watts}{m}$$

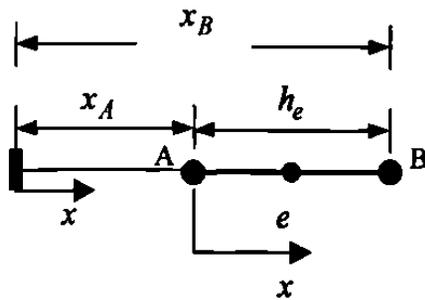
Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

Flujo de calor Dos elementos lineales $Q \frac{watts}{m}$	Flujo de calor Solución exacta $Q \frac{watts}{m}$
1420.87	1399.3

Ejemplo 2.1b. Considere una aleta rectangular como lo muestra la (fig. 2.1).
Determine la distribución de temperaturas y el flujo de calor usando:

II) Un elemento cuadrático

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[-\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta \right] dx$$

Resolviendo la integral e integrando por partes

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - w \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - w(x_B) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_B} - w(x_A) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_A}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - \sum_{j=1}^n w(x_j^e) Q_j^e \quad (a)$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Cuadrática.

$$\theta^e = \sum_{j=1}^3 \theta_j^e \psi_j^e(x) \quad (b)$$

Donde (θ_j^e) son los parámetros a ser determinados, $(\psi_j^e(x))$ son las funciones de aproximación.

Sustituyendo (b) por (θ) y (w) por (ψ_i^e) en (a)

$$0 = \sum_{j=1}^3 K_{ij}^e \theta_j^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, 3)$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m^2 \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = B(\psi_i^e, \psi_j^e)$$

$$\sum_{j=1}^3 \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escrita como:

$$[K^e] \{\theta^e\} = \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos cuadráticos en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega} \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m^2 \psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$\psi_1^e(x) = \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e}\right)$$

$$\psi_2^e(x) = \frac{4\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)$$

$$\psi_3^e(x) = \frac{-\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{(h_e)^2}$$

$$\frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{x}}{(h_e)^2}$$

$$\frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} = -\frac{1}{h_e} - \frac{4\bar{x}}{(h_e)^2}$$

$$K_{11}^e = \int_b^h \left[\left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4x}{(h_e)^2} \right)^2 + m^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e}\right)^2 \right] dx$$

$$K_{11}^e = \frac{7}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{2}{15} \right)$$

$$K_{12}^e = \int_b^h \left[\left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4x}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8x}{(h_e)^2} \right) + m^2 \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right) \frac{4x}{h_e} \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \right] d\bar{x}$$

$$K_{12}^e = -\frac{8}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{1}{15} \right)$$

$$K_{13}^e = \int_b^h \left[\left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4x}{(h_e)^2} \right) \left(-\frac{1}{h_e} - \frac{4x}{(h_e)^2} \right) + m^2 \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right) \left(\frac{-x}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right) \right] dx$$

$$K_{13}^e = \frac{1}{3h_e} - m^2 h_e \left(\frac{1}{30} \right)$$

$$K_{21}^e = K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = \int_b^t \left[\left(\frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{x}}{(h_e)^2} \right)^2 + m^2 \left(\frac{4x}{h_e} \right)^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] d\bar{x}$$

$$K_{22}^e = \frac{16}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{32}{60} \right)$$

$$K_{23}^e = \int_b^t \left[\left(\frac{4}{h_e} - \frac{8x}{(h_e)^2} \right) \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{(h_e)^2} \right) + m^2 \left(\frac{4x}{h_e} \right) \left(1 - \frac{x}{h_e} \right) \left(-\frac{x}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2x}{h_e} \right) \right] dx$$

$$K_{23}^e = -\frac{8}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{1}{15} \right)$$

$$K_{31}^e = K_{13}^e$$

$$K_{32}^e = K_{23}^e$$

$$K_{33}^e = \int_b^t \left[\left(-\frac{1}{h_e} - \frac{4\bar{x}}{(h_e)^2} \right)^2 + m^2 \left(-\frac{x}{h_e} \right)^2 \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] dx$$

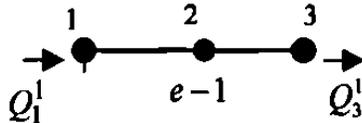
$$K_{33}^e = \frac{7}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{2}{15} \right)$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \frac{m^2 h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Como nada mas es un elemento cuadrático no se tiene conectividad.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 \theta_1^1 + K_{12}^1 \theta_2^1 + K_{13}^1 \theta_3^1 = -Q_1^1$$

$$K_{21}^1 \theta_1^1 + K_{22}^1 \theta_2^1 + K_{23}^1 \theta_3^1 = 0$$

$$K_{31}^1 \theta_1^1 + K_{32}^1 \theta_2^1 + K_{33}^1 \theta_3^1 = Q_3^1$$

Balance de la variable primaria

$$\theta_1^1 = \theta_1$$

$$\theta_2^1 = \theta_1^2 = \theta_2$$

$$\theta_2^2 = \theta_3$$

Las ecuaciones pueden expresarse en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICION DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$\theta_1 = T_0 - T_\infty \qquad Q_3^1 = \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones para $(\theta_2), (\theta_3)$ y (Q_1^1)

$$\theta_2 = .914\theta_1 \quad \theta_3 = 0.8869\theta_1$$

$$T_2 = 234.95^\circ C \quad T_3 = 230.2^\circ C$$

TABLA 2.1b

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia $x \text{ m}$	Temperatura Un elemento cuadrático $T^\circ C$	Temperatura Solución exacta $T^\circ C$
0	250	250
0.00762	234.95	234.95
0.01524	230.2	230.05

PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

Q_1^1 = Flujo de calor en la base de la aleta.

$$Q_1^1 = -\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 2670.9 \frac{^\circ C}{m}$$

$$Q_1^1 = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 1408.5 \frac{watts}{m}$$

Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

Flujo de calor Un elemento cuadrático $Q \frac{watts}{m}$	Flujo de calor Solución exacta $Q \frac{watts}{m}$
1408.5	1399.3

Ejemplo 2.2 a. Considere conducción de calor en estado estable en un alambre de sección transversal circular con una fuente de calor eléctrica. Supón que el radio del alambre es (R_o), este tiene una conductividad eléctrica, este transporta una corriente eléctrica de densidad (I) $amp\ cm^{-2}$. Durante la transmisión de una corriente eléctrica, algo de energía eléctrica es convertida en energía térmica. La rapidez de producción de calor por unidad de volumen es dada por ($q = \frac{I^2}{k_e}$). Suponga que la temperatura alcanzada en el alambre es suficientemente pequeña que la dependencia de la conductividad eléctrica o térmica en la temperatura puede ser despreciada.

Determine la distribución de temperaturas en el alambre.

Datos

$$T_3 = \text{Temperatura en la superficie del conductor} = 60^\circ c$$

$$R_o = \text{Radio del conductor} = 2cm$$

$$i = \text{Corriente por el conductor} = 300amp$$

$$R = \text{Resistencia del conductor} = 0.0104\Omega$$

$$L = \text{Longitud del conductor} = 10cm$$

$$R = \rho \frac{L}{A} \qquad k = \frac{1}{\rho} \qquad I = \frac{i}{\pi(R_o)^2} \qquad q = \frac{I^2}{k}$$

$$\rho = 0.013\Omega - cm \qquad I = 23.87amp - cm^{-2}$$

$$k = 76.5\Omega^{-1} - cm^{-1} \qquad q = 7.448watts - cm^{-3}$$

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

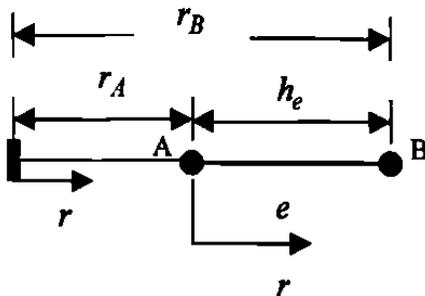
$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) = q \qquad 0 \leq r \leq R_o$$

Las condiciones de frontera.

$$\left(kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r=0} = 0 \quad T(R_o) = T_o$$

I) Para dos elementos lineales

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) - q \right] r dr d\theta dz$$

$$0 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r_A}^{r_B} w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) - q \right] r dr d\theta dz$$

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \left[-wkr \frac{d^2T}{dr^2} - wk \frac{dT}{dr} - wqr \right] dr$$

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_{r_A}^{r_B} wqr dr - \left(2w\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_A^B wqrdr - \left[w(r_B) \left(2\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_B} - w(r_A) \left(2\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A} \right]$$

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_A^B wqrdr - \sum_{j=1}^n w(r_j^e) Q_j^e \quad (a)$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Lineal.

$$T^e = \sum_{j=1}^2 T_j^e \psi_j^e(r) \quad (b)$$

Donde (T_j^e) son los parámetros a ser determinados, $(\psi_j^e(x))$ son las funciones de aproximación. Sustituyendo la ecuación (b) por (T) y (w) por (ψ_i^e) en la forma débil ecuación (a).

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_1^e}{dr} \left(\sum_{j=1}^2 T_j^e \frac{d\psi_j^e}{dr} \right) dr - 2\pi \int_A^B \psi_1^e q r dr - \sum_{j=1}^2 \psi_1^e(r_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como

$$0 = \sum_{j=1}^2 K_{ij}^e T_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2)$$

donde:

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

$$f_i^e = 2\pi q \int_A^B \psi_i^e r dr$$

$$Q_i^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(r_j^e) Q_j^e$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escritas como.

$$[K^e] \{T^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficiente $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_A^B k r \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

$$r = r_A + r$$

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_0^{h_e} k(r_A + r) \frac{d\psi_i}{d\bar{r}} \frac{d\psi_j}{d\bar{r}} d\bar{r}$$

$$\psi_1^e = 1 - \frac{\bar{r}}{h_e}$$

$$\psi_2^e = \frac{\bar{r}}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{r}} = -\frac{1}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_2^e}{d\bar{r}} = \frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{d\bar{r}} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{r}} d\bar{r} = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{1}{h_e}\right) \left(-\frac{1}{h_e}\right) d\bar{r}$$

$$K_{11}^e = \frac{2\pi k}{h_e} \left(r_A + \frac{h_e}{2} \right)$$

$$K_{12}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{dr} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{r}} d\bar{r} = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + \bar{r}) \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) d\bar{r}$$

$$K_{12}^e = -\frac{2\pi k}{h_e} \left(r_A + \frac{h_e}{2} \right)$$

$$K_{21}^e = K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_2^e}{d\bar{r}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{r}} d\bar{r} = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + \bar{r}) \left(\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) d\bar{r}$$

$$K_{22}^e = \frac{2\pi k}{h_e} \left(r_A + \frac{h_e}{2} \right)$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{2\pi k}{h_e} \left(r_A + \frac{h_e}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_i^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \psi_i^e (r_A + r) dr$$

$$f_1^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \left(1 - \frac{r}{h_e} \right) (r_A + \bar{r}) d\bar{r} = \frac{2\pi q h_e}{6} (3r_A + h_e)$$

$$f_2^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \left(\frac{\bar{r}}{h_e} \right) (r_A + r) d\bar{r} = \frac{2\pi q h_e}{6} (3r_A + 2h_e)$$

$$f_i^e = \frac{2\pi q h_e}{6} \begin{Bmatrix} 3r_A + h_e \\ 3r_A + 2h_e \end{Bmatrix}$$

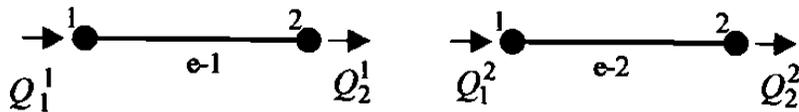
Si $r_A = r_1 = 0$

$$[K^e] = \pi k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{f^e\} = \frac{\pi q (h_e)^2}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con dos elementos lineales



Elemento (1)

$$K_{11}^1 T_1^1 + K_{12}^1 T_2^1 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 T_1^1 + K_{22}^1 T_2^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

Elemento (2)

$$K_{11}^2 T_1^2 + K_{12}^2 T_2^2 = f_1^2 - Q_1^2$$

$$K_{21}^2 T_1^2 + K_{22}^2 T_2^2 = f_2^2 + Q_2^2$$

Balance de la variable primaria

$$T_1^1 = T_1$$

$$T_2^1 = T_1^2 = T_2$$

$$T_2^2 = T_3 = T_0$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas ecuaciones ensambladas. Estas contienen la suma de los coeficientes y términos fuente en los nodos comunes a los dos elementos.

Las ecuaciones pueden expresarse en forma de matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ (Q_2^1) + (-Q_1^2) \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

En el balance de la variable secundaria en los nodos a conectar ecuación (1.21 b) se obtiene como resultado:

$$(Q_2^1) + (-Q_1^2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$T(R_o) = T_0 \quad Q_1^1 = 2\pi kr \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi k & -\pi k & 0 \\ -\pi k & 2\pi k & -\pi k \\ 0 & -\pi k & \pi k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \frac{\pi q (R_o)^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para (T_1) , (T_2) y (Q_2^2)

$$T_1 = 60.162^\circ C$$

$$T_2 = 60.129^\circ C$$

TABLA 2.2a

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Radio r cm	Temperatura Dos elementos lineales $T^\circ C$	Temperatura Solución exacta $T^\circ C$
0	60.162	60.09
1	60.129	60.07
2	60	60

PASO 6: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

$$-Q_2^2 = 2\pi R_o k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{R_o} = 46.56 \frac{watts}{cm}$$

Q = Flujo de calor disipado por el conductor en la superficie

$$-Q = (2\pi R_o L) k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{R_o} = 465.6 \text{ wttts}$$

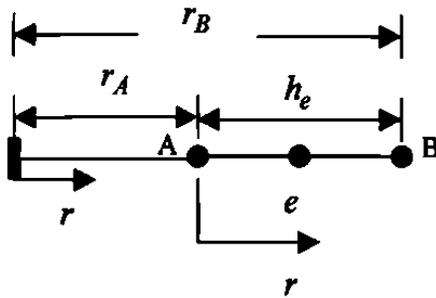
Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

Flujo de calor Dos elementos lineales Q wttts	Flujo de calor Solución exacta Q wttts
465.6	935.9

Ejemplo 2.2 b. Determine la distribución de temperaturas en el alambre ejemplo (2.2 a).
Usando un elemento cuadrático.

II) Elemento Cuadrático

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) - q \right] r dr d\theta dz$$

$$0 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r_A}^{r_B} w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) - q \right] r dr d\theta dz$$

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \left[-wkr \frac{d^2 T}{dr^2} - wk \frac{dT}{dr} - wqr \right] dr$$

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_{r_A}^{r_B} wqr dr - \left(2w\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_A^B wqr dr - \left[w(r_B) \left(2\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_B} - w(r_A) \left(2\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A} \right]$$

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_A^B wqr dr - \sum_{j=1}^n w(r_j^e) Q_j^e \quad (a)$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Cuadrática.

$$T^e = \sum_{j=1}^3 T_j^e \psi_j^e(r) \quad (b)$$

Donde (T_j^e) son los parámetros a ser determinados, $(\psi_j^e(\bar{x}))$ son las funciones de aproximación. Sustituyendo la ecuación (b) por (T) y (w) por (ψ_j^e) en la forma débil ecuación (a).

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_1^e}{dr} \left(\sum_{j=1}^3 T_j^e \frac{d\psi_j^e}{dr} \right) dr - 2\pi \int_A^B \psi_1^e q r dr - \sum_{j=1}^3 \psi_1^e(r_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como

$$0 = \sum_{j=1}^3 K_{ij}^e T_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, 3)$$

donde:

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

$$f_i^e = 2\pi q \int_A^B \psi_i^e r dr$$

$$Q_i^e = \sum_{j=1}^n \psi_j^e(r_j^e) Q_j^e$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escritas como.

$$[K^e] \{T^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficiente $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

$$r = r_A + \bar{r}$$

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_0^{h_e} k(r_A + r) \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

$$\psi_1^e = \left(1 - \frac{\bar{r}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{r}}{h_e}\right)$$

$$\psi_2^e = \frac{4\bar{r}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{r}}{h_e}\right)$$

$$\psi_3^e = \frac{-r}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{r}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_1^e}{dr} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2}$$

$$\frac{d\psi_2^e}{dr} = \frac{4}{h_e} - \frac{8r}{(h_e)^2}$$

$$\frac{d\psi_3^e}{dr} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2}$$

$$K_{11}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{dr} \frac{d\psi_1^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right)^2 dr$$

$$K_{11}^e = 2\pi k \left[\frac{13r_A}{h_e} + \frac{1}{2} \right]$$

$$K_{12}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{dr} \frac{d\psi_2^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8r}{(h_e)^2} \right) dr$$

$$K_{12}^e = 2\pi k \left[-\frac{8r_A}{h_e} - \frac{2}{3} \right]$$

$$K_{13}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{dr} \frac{d\psi_3^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right) \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right) dr$$

$$K_{13}^e = 2\pi k \left[\frac{r_A}{3h_e} + \frac{1}{6} \right]$$

$$K_{21}^e = K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_2^e}{dr} \frac{d\psi_2^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8r}{(h_e)^2} \right)^2 dr$$

$$K_{22}^e = 2\pi k \left[\frac{16r_A}{h_e} + \frac{8}{3} \right]$$

$$K_{23}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_2^e}{dr} \frac{d\psi_3^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8r}{(h_e)^2} \right) \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right) dr$$

$$K_{23}^e = 2\pi k \left[\frac{-8r_A}{3h_e} - 2 \right]$$

$$K_{31}^e = K_{13}^e$$

$$K_{32}^e = K_{23}^e$$

$$K_{33}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_3^e}{dr} \frac{d\psi_3^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right)^2 dr$$

$$K_{33}^e = 2\pi k \left[\frac{7r_A}{3h_e} + \frac{11}{6} \right]$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}$$

Para $(r_A = 0)$ la matriz de coeficientes se representa de la siguiente manera

$$[K^e] = \frac{2\pi k}{6} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -12 & 11 \end{bmatrix}$$

$$f_i^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \psi_i^e(r_A + \bar{r}) d\bar{r}$$

$$f_1^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \left(1 - \frac{\bar{r}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{r}}{h_e}\right) (r_A + \bar{r}) d\bar{r} = 2\pi q \left(\frac{19h_e r_A}{6} + 0\right)$$

$$f_2^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \frac{4r}{h_e} \left(1 - \frac{r}{h_e}\right) (r_A + r) d\bar{r} = 2\pi q \left(\frac{2h_e r_A}{3} + \frac{(h_e)^2}{3}\right)$$

$$f_3^e = 2\pi q \int_0^{h_e} -\frac{r}{h_e} \left(1 - \frac{2r}{h_e}\right) (r_A + r) dr = 2\pi q \left(\frac{h_e r_A}{6} + \frac{(h_e)^2}{6}\right)$$

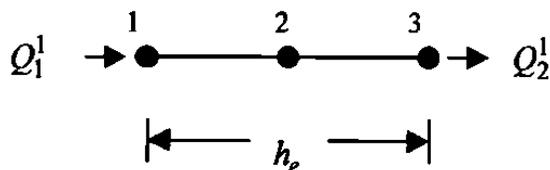
$$\{f^e\} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{Bmatrix}$$

Para $(r_A = 0)$ y $(h_e = R_o)$

$$\{f^e\} = \frac{2\pi q (R_o)^2}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMEMENTOS

Como solamente es un elemento cuadrático no se tiene conectividad.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 T_1^1 + K_{12}^1 T_2^1 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 T_1^1 + K_{22}^1 T_2^1 = f_2^1 + 0$$

$$K_{31}^1 T_1^1 + K_{32}^1 T_2^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

Continuidad de la variable primaria

$$T_1^1 = T_1$$

$$T_2^1 = T_2$$

$$T_3^1 = T_3$$

Las ecuaciones pueden expresarse en forma de matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$T(R_o) = T_0 \qquad Q_1^1 = 2\pi kr \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para (T_1) , (T_2) y (Q_3^1)

$$T_1 = 60.09^\circ C$$

$$T_2 = 60.07^\circ C$$

TABLA 2.2b

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Radio $r \text{ cm}$	Temperatura Un elemento cuadrático $T^\circ C$	Temperatura Solución exacta $T^\circ C$
0	60.09	60.09
1	60.07	60.07
2	60	60

PASO 6: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

$$-Q_3^1 = 2\pi R_0 k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{R_0} = 91.28 \frac{\text{watts}}{\text{cm}}$$

 Q = Flujo de calor disipado por el conductor en la superficie

$$-Q = (2\pi R_0 L) k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{R_0} = 912.8 \text{ wats}$$

Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

Flujo de calor Un elemento cuadrático $Q \text{ wats}$	Flujo de calor Solución exacta $Q \text{ wats}$
912.8	935.9

Ejemplo 2.3 Determine la distribución de temperatura en la aleta que muestra la figura 2.3. Suponga que la temperatura en la base de la aleta es ($T_o = 250^\circ F$) la conductividad térmica ($k = 120 \text{ Btu hr}^{-1} \text{ ft}^{-1} \text{ }^\circ F^{-1}$), y el coeficiente de película ($\beta = 15 \text{ Btu hr}^{-1} \text{ ft}^{-2} \text{ }^\circ F^{-1}$), la temperatura del medio ambiente es ($T_\infty = 75^\circ F$).

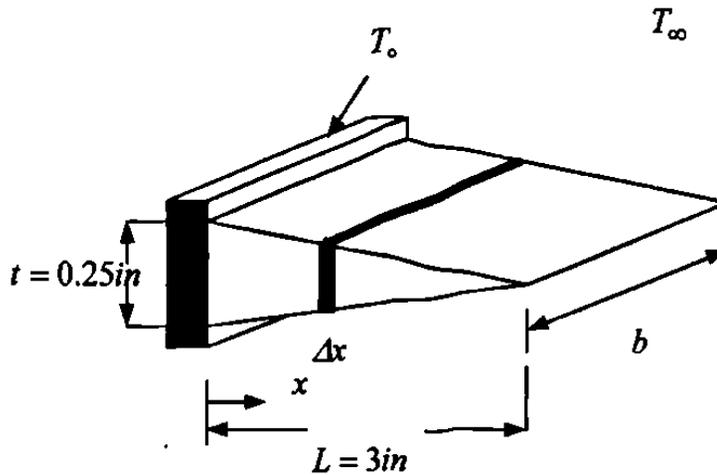


Figura 2.3a Aleta triangular

Análisis de un diferencial de volumen.

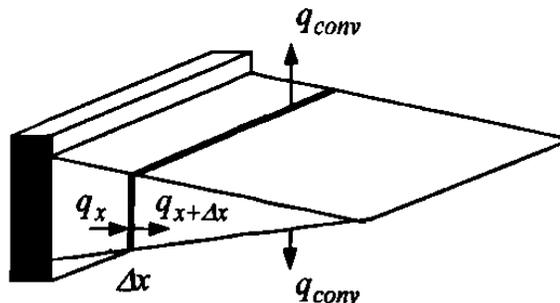


Figura 2.3b Balance de energía

Balance de energías para obtener la ecuación diferencial de la aleta.

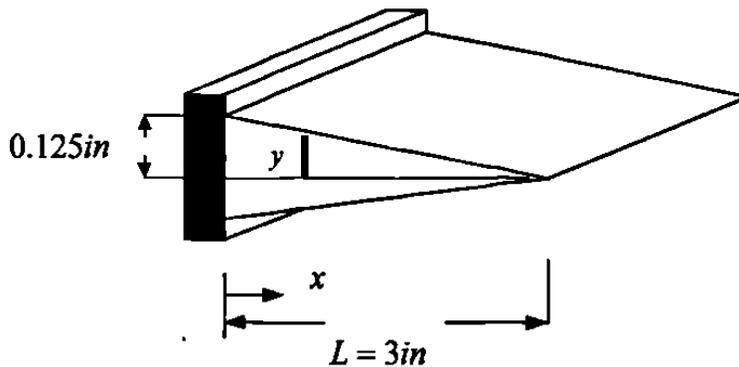
$$0 = q_x - q_{x+\Delta x} - q_{conv}$$

$$0 = -kA_{cond} \left. \frac{dT}{dx} \right|_x + kA_{cond} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\Delta x} - \beta A_{conv} (T - T_\infty)$$

$$0 = -kA(x) \left. \frac{dT}{dx} \right|_x + kA(x) \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\Delta x} - \beta 2b \Delta x (T - T_\infty)$$

$$0 = k \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{dT}{dx} \right) - 2\beta b (T - T_\infty)$$

La variación de la sección transversal de la aleta al variar (x) es,



$$\frac{0.125}{3} = \frac{y}{3-x}$$

$$y = \left(\frac{3-x}{3} \right) (0.125)$$

$$A(x) = 2yb = \frac{2}{3} (3-x)(0.125)b$$

$$0 = k \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} (3-x)(0.125b) \frac{dT}{dx} \right) - 2\beta b (T - T_\infty)$$

$$(3-x) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} - \frac{24\beta}{k} T + \frac{24\beta}{k} T_\infty = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

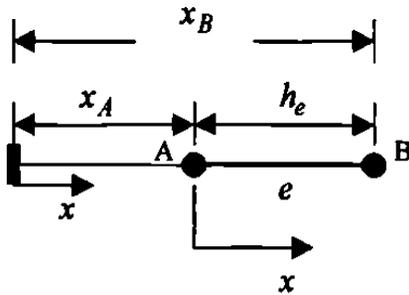
$$m = \frac{24\beta}{k}$$

$$(3-x) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} - mT + mT_\infty = 0$$

Condiciones frontera de la ecuación diferencial.

$$T(0) = T_0 \quad \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[(3-x) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} - mT + mT_\infty \right] dx$$

Integrando por partes el termino de segundo orden.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[-(3-x) \frac{dw}{dx} \frac{dT}{dx} - mwT + mwT_\infty \right] dx + w(3-x) \frac{dT}{dx} \Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[-(3-x) \frac{dw}{dx} \frac{dT}{dx} - mwT + mwT_\infty \right] dx + \left\{ w \left[(3-x) \frac{dT}{dx} \right] \Big|_{x_B} - w \left[(3-x) \frac{dT}{dx} \right] \Big|_{x_A} \right\}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[-(3-x) \frac{dw}{dx} \frac{dT}{dx} - mwT + mwT_\infty \right] dx + \sum_{j=1}^n w(x_j^e) Q_j^e \quad (a)$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Lineal

$$T^e = \sum_{j=1}^2 T_j^e \psi_j^e(x) \quad (b)$$

Donde (T_j^e) son los parámetros a ser determinados, $(\psi_j^e(x))$ son las funciones de aproximación. Sustituyendo la ecuación (b) por (T) y (w) por (ψ_i^e) en la forma débil Ecuación (a).

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[(3-x) \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} + m\psi_1^e - mT_\infty \psi_1^e \right] dx - \sum_{j=1}^n w(x_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[(3-x) \frac{d\psi_1^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n T_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + m\psi_1^e \left(\sum_{j=1}^n T_j^e \psi_j^e \right) - mT_\infty \psi_1^e \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_1^e(x_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como

$$0 = \sum_{j=1}^2 K_{ij}^e T_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i=1,2)$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left((3-x) \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m\psi_i^e \psi_j^e \right) dx = B(\psi_i^e, \psi_j^e)$$

$$f_i^e = mT_\infty \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^e dx$$

La propiedad (1) de las funciones de interpolación (1.19) es usada para escribir

$$\sum_{j=1}^n \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escrita como.

$$[K^e] \{T^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left((3-x) \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m\psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$x = x_A^e + \bar{x}$$

$$K_{ij}^e = \int_0^{h_e} \left((3 - x_A^e - x) \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m\psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{1}{h_e}, \quad \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} = \frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - \bar{x}) \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} + m\psi_1^e \psi_1^e \right] d\bar{x}$$

$$K_{11}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - \bar{x}) \left(-\frac{1}{h_e} \right)^2 + m \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] d\bar{x}$$

$$K_{11}^e = \frac{1}{h_e} \left((3 - x_A^e) - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$K_{12}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - \bar{x}) \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} + m\psi_1^e \psi_2^e \right] d\bar{x}$$

$$K_{12}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - \bar{x}) \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + m \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x}$$

$$K_{12}^e = -\frac{1}{h_e} \left((3 - x_A^e) - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{6}$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e \quad \text{por simetria}$$

$$K_{22}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - x) \frac{d\psi_2^e}{dx} \frac{d\psi_2^e}{dx} + m\psi_1^e\psi_2^e \right] dx$$

$$K_{22}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - x) \left(\frac{1}{h_e} \right)^2 + m \left(\frac{x}{h_e} \right)^2 \right] dx$$

$$K_{22}^e = \frac{1}{h_e} \left(3 - x_A^e - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

Para elemento (1) $x_A = 0$

$$K_{11}^1 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$K_{12}^1 = -\frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{6}$$

$$K_{12}^1 = K_{21}^1$$

$$K_{22}^1 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

Para elemento (2) $x_A = h_e$

$$K_{11}^2 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{3h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$K_{12}^2 = -\frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{3h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{6}$$

$$K_{12}^2 = K_{21}^2$$

$$K_{22}^2 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{3h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

Para elemento (3) $x_A = 2h_e$

$$K_{11}^3 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{5h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$K_{12}^3 = -\frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{5h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{6}$$

$$K_{12}^3 = K_{21}^3$$

$$K_{22}^3 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{5h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$[K^1] = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{h_e}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mh_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{3h_e}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mh_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{5h_e}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mh_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

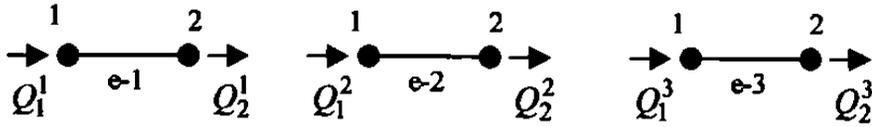
$$f_i^e = mT_\infty \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^e dx$$

$$f_1^e = mT_\infty \int_0^{h_e} \psi_1^e dx = mT_\infty \int_0^{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) d\bar{x} = \frac{mT_\infty h_e}{2}$$

$$f_2^e = mT_\infty \int_0^{h_e} \psi_2^e dx = mT_\infty \int_0^{h_e} \left(\frac{x}{h_e} \right) d\bar{x} = \frac{mT_\infty h_e}{2}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con tres elementos lineales.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 T_1^1 + K_{12}^1 T_2^1 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 T_1^1 + K_{22}^1 T_2^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 T_1^2 + K_{12}^2 T_2^2 = f_1^2 - Q_1^2$$

$$K_{21}^2 T_1^2 + K_{22}^2 T_2^2 = f_2^2 + Q_2^2$$

Elemento(3)

$$K_{11}^3 T_1^3 + K_{12}^3 T_2^3 = f_1^3 - Q_1^3$$

$$K_{21}^3 T_1^3 + K_{22}^3 T_2^3 = f_2^3 + Q_2^3$$

Continuidad de la variable primaria

$$T_1^1 = T_0$$

$$T_2^1 = T_1^2 = T_1$$

$$T_2^2 = T_1^3 = T_2$$

$$T_2^3 = T_3$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas ecuaciones ensambladas. Estas contienen la suma de los coeficientes y términos fuente en los nodos comunes a los dos elementos.

Las ecuaciones pueden expresarse en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^1 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ Q_2^1 - Q_1^2 \\ Q_2^2 - Q_1^3 \\ Q_2^3 \end{Bmatrix}$$

En el balance de la variable secundaria en los nodos a conectar ecuación (1.21 b) se obtiene como resultado:

$$(Q_2^1) + (-Q_1^2) = 0$$

$$(Q_2^2) + (-Q_1^3) = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^1 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ Q_2^3 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$T_0 = 250^\circ\text{C} \qquad Q_2^3 = (3-x) \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_B} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^1 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

$$m = \frac{24\beta}{k} = 0.249 \text{ in}^{-1}$$

h_e = Longitud del elemento finito

$$h_e = \frac{L}{3} = 1 \text{ in}$$

$$\begin{bmatrix} 2.583 & -2.458 & 0 & 0 \\ -2.458 & 4.166 & -1.458 & 0 \\ 0 & -1.458 & 2.166 & -0.458 \\ 0 & 0 & -0.458 & 0.583 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 250 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.33 \\ 18.67 \\ 18.67 \\ 9.33 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones para $(T_1), (T_2), (T_3)$ y (Q_1^1) .

$$T_1 = 218.85^\circ F \quad T_2 = 191.07^\circ F \quad T_3 = 166.18^\circ F$$

TABLA 2.3

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia desde la base $x \text{ in}$	Temperatura Tres elementos lineales $T \text{ } ^\circ F$	Temperatura Solución exacta $T \text{ } ^\circ F$
0	250	250
1	218.85	218.75
2	191.07	191.12
3	166.18	166.72

PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

$$-Q_1^1 = (3-x) \frac{dT}{dx} \Big|_{x_A} = 94.49 \frac{^{\circ}F}{in}$$

Q = Flujo de calor en la base de la aleta

$$-Q = k(bt) \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = (120 \frac{BTU}{hr-ft-^{\circ}F})(0.25 in)(32.83 \frac{^{\circ}F}{in})$$

$$-Q = 984.9 \frac{BTU}{hr-ft}$$

Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

Flujo de calor Tres elementos lineales $Q \frac{BTU}{hr-ft}$	Flujo de calor Solución exacta $Q \frac{BTU}{hr-ft}$
984.9	985

Ejemplo 2.4 a. Considere flujo estable laminar de dos fluidos inmiscibles e incompresibles en una región de dos placas paralelas estacionarias bajo la influencia de un gradiente de presión.

Las velocidades en el fluido son ajustadas tal que la parte media inferior de la región esta llena con el fluido (μ_1) (fluido mas denso y más viscoso) y la parte media superior esta llena con el fluido (μ_2) (fluido menos denso y menos viscoso), como lo muestra la figura.2.4. Queremos determinar la distribución de velocidades en cada región usando el método de elemento finito.

Las ecuaciones gobernantes para cada fluido son

$$-\mu_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2} = f_0, \quad -\mu_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2} = f_0$$

donde $f_0 = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right)$ es el gradiente de presión. Las condiciones frontera son

$$u_1(-b) = 0, \quad u_2(b) = 0, \quad u_1(0) = u_2(0)$$

Solucionar el problema usando.

I) Cuatro elementos lineales

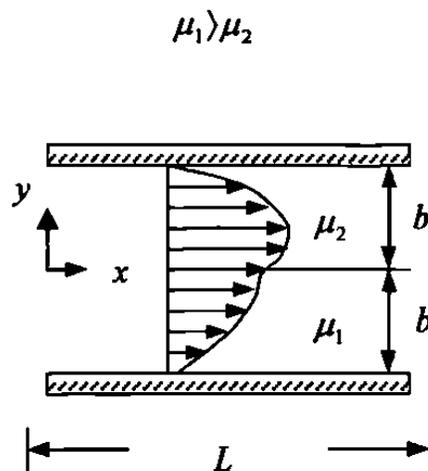
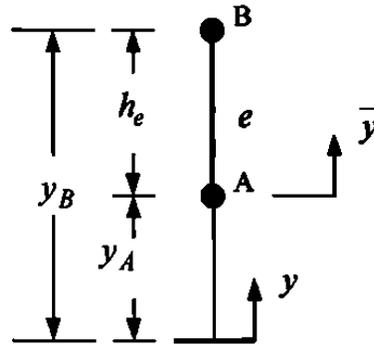


Figura 2.4 Fluidos en una tubería

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

Para el fluido más viscoso.

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} w \left[-\mu_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2} - f_0 \right] dy$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{dw}{dy} \frac{du_1}{dy} - wf_0 \right] dy - \mu_1 w \frac{du_1}{dy} \Big|_{y_A}^{y_B}$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{dw}{dy} \frac{du_1}{dy} - wf_0 \right] dy - \left[w(y_B) \left(\mu_1 \frac{du_1}{dy} \right) \Big|_{y_B} - w(y_A) \left(\mu_1 \frac{du_1}{dy} \right) \Big|_{y_A} \right]$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{dw}{dy} \frac{du_1}{dy} - wf_0 \right] dy - \sum_{j=1}^n w(y_j^e) Q_j^e$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Lineal.

$$u_1 \Big|_e = \sum_{j=1}^2 u_j^e \psi_j^e(y)$$

Sustituir la solución aproximada en la forma débil.

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_1^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^2 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_1^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^2 \psi_1^e(y_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_2^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^2 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_2^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^2 \psi_2^e(y_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como:

$$0 = \sum_{j=1}^2 K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i=1,2)$$

donde

$$K_{ij}^e = \mu_1 \int_{y_A}^{y_B} \frac{d\psi_i^e}{dy} \frac{d\psi_j^e}{dy} dy$$

$$f_i^e = f_0 \int_{y_A}^{y_B} \psi_i^e dy$$

$$Q_i^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(y_i^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse en términos de los coeficientes (K_{ij}^e, f_i^e, Q_i^e) .

$$K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e = f_1^e + Q_1^e$$

$$K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e = f_2^e + Q_2^e$$

En notación matricial.

$$[K^e] \left\{ u_1 \right\}^e = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ y el vector $\{f^e\}$ se calculan de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_i^e}{dy} \frac{d\psi_j^e}{dy} d\bar{y}$$

$$K_{11}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{y}} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{y}} d\bar{y} = \frac{\mu_1}{h_e}$$

$$K_{12}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{dy} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{y}} d\bar{y} = -\frac{\mu_1}{h_e}$$

$$K_{21}^e = K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{y}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{y}} d\bar{y} = \frac{\mu_1}{h_e}$$

$$[K^e] = \frac{\mu_1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_i^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_i^e dy$$

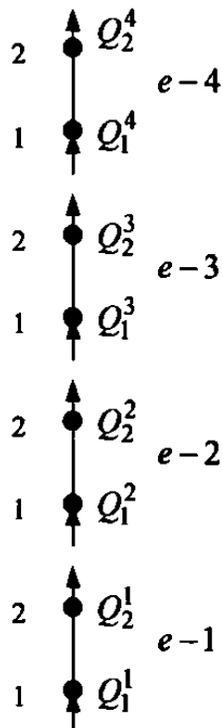
$$f_1^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_1^e d\bar{y} = \frac{f_0 h_e}{2}$$

$$f_2^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_2^e dy = \frac{f_0 h_e}{2}$$

$$\{f^e\} = \frac{f_0 h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para cuatro elementos lineales.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1 \Big|_1 + K_{12}^1 u_1 \Big|_2 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1 \Big|_1 + K_{22}^1 u_1 \Big|_2 = f_2^1 + Q_2^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1 \Big|_1 + K_{12}^2 u_1 \Big|_2 = f_1^2 - Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1 \Big|_1 + K_{22}^2 u_1 \Big|_2 = f_2^2 + Q_2^2$$

Elemento(3)

$$K_{11}^3 u_2 \Big|_1 + K_{12}^3 u_2 \Big|_2 = f_1^3 - Q_1^3$$

$$K_{21}^3 u_2 \Big|_1 + K_{22}^3 u_2 \Big|_2 = f_2^3 + Q_2^3$$

Elemento(4)

$$K_{11}^4 u_2 \Big|_1 + K_{12}^4 u_2 \Big|_2 = f_1^4 - Q_1^4$$

$$K_{21}^4 u_2 \Big|_1 + K_{22}^4 u_2 \Big|_2 = f_2^4 + Q_2^4$$

$$u_1 \Big|_1 = U_1$$

$$u_1 \Big|_2 = u_1 \Big|_1 = U_2$$

$$u_2 \Big|_2 = u_2 \Big|_1 = U_3$$

$$u_2 \Big|_2 = u_2 \Big|_1 = U_4$$

$$u_2 \Big|_2 = U_5$$

Las ecuaciones pueden expresarse en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & (K_{22}^3 + K_{11}^4) & K_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^4 & K_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_2^3 + Q_1^4 \\ Q_2^4 \end{bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$U_1(-b) = 0$$

$$U_2(b) = 0$$

$$U_1(0) = U_2(0)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & (K_{22}^3 + K_{11}^4) & K_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^4 & K_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_2^4 \end{bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Datos:

$$b = 0.5 \text{ m} \quad h_e = 0.25 \text{ m}$$

$$P_0 = 200 \text{ kPa} \quad P_L = 190 \text{ kPa} \quad L = 5000 \text{ m}$$

$$f_0 = \frac{P_0 - P_L}{L} = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$\mu_1 = 0.01 \text{ Pa-s} \quad s.g_1 = 0.86 \text{ (petroleo crudo a } T = 10^\circ \text{c)}$$

$$\mu_2 = 0.00035 \text{ Pa-s} \quad s.g_2 = 0.68 \text{ (gasolina a } T = 10^\circ \text{c)}$$

$$\begin{bmatrix} 0.04 & -0.04 & 0 & 0 & 0 \\ -0.04 & 0.08 & -0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.04 & 0.0414 & -0.0014 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0014 & 0.0028 & -0.0014 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0014 & 0.0014 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0.25 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_2^4 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones para $(U_2), (U_3), (U_4), (Q_1^1)$ y (Q_2^4)

$$U_2 = 30.48 \frac{m}{seg} \quad U_3 = 48.30 \frac{m}{seg} \quad U_4 = 202.72 \frac{m}{seg}$$

TABLA 2.4a

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia y m	Velocidad	Velocidad
	Cuatro elementos lineales $U \frac{m}{seg}$	Solución exacta $U \frac{m}{seg}$
-0.50	0.0	0.0
-0.25	30.48	30.40
0.00	48.30	48.28
0.25	202.72	202.67
0.50	0.0	0.0

PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

$$Q_1^1 = 1.469 \frac{N}{m^2} \quad Q_2^4 = -0.533 \frac{N}{m^2}$$

Ejemplo 2.4 b. Determine la distribución de velocidades en cada region ejemplo (2.4 a), usando dos elementos cuadráticos

II) Para dos elementos cuadráticos

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito

Aproximación Cuadrática

$$u_1^e = \sum_{j=1}^3 u_j^e \psi_j^e(y)$$

Sustituir la solución aproximada en la forma débil.

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_1^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^3 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_1^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^3 \psi_1^e(y_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_2^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^3 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_2^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^3 \psi_2^e(y_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_3^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^3 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_3^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^3 \psi_3^e(y_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como:

$$0 = \sum_{j=1}^3 K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, 3)$$

donde

$$K_{ij}^e = \mu_1 \int_{y_A}^{y_B} \frac{d\psi_i^e}{dy} \frac{d\psi_j^e}{dy} dy$$

$$f_i^e = f_0 \int_{y_A}^{y_B} \psi_i^e dy$$

$$Q_i^e = \sum_{j=1}^3 \psi_j^e(y_i^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse en términos de los coeficientes $(K_{ij}^e), (f_i^e), (Q_i^e)$.

$$K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e + K_{13}^e u_3^e = f_1^e + Q_1^e$$

$$K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e + K_{23}^e u_3^e = f_2^e + Q_2^e$$

$$K_{31}^e u_1^e + K_{32}^e u_2^e + K_{33}^e u_3^e = f_3^e + Q_3^e$$

En notación matricial.

$$[K^e] \left\{ u_1^e \right\} = \{ f^e \} + \{ Q^e \}$$

Para una malla con elementos cuadráticos, la matriz de coeficientes $[K^e]$ y el vector $\{ f^e \}$ se calculan de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \mu_1 \int_b^{h_e} \frac{d\psi_i^e}{dy} \frac{d\psi_j^e}{dy} dy$$

$$K_{11}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{dy} \frac{d\psi_1^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{-3}{h_e} + \frac{4y}{(h_e)^2} \right)^2 dy$$

$$K_{11}^e = \frac{7}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$K_{12}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{dy} \frac{d\psi_2^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{-3}{h_e} + \frac{4y}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8y}{(h_e)^2} \right) dy$$

$$K_{12}^e = -\frac{8}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$K_{13}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{dy} \frac{d\psi_3^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{-3}{h_e} + \frac{4y}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4y}{(h_e)^2} - \frac{1}{h_e} \right) dy$$

$$K_{13}^e = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$K_{21}^e = K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_2^e}{dy} \frac{d\psi_2^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8y}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8y}{(h_e)^2} \right) dy$$

$$K_{22}^e = \frac{16}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$K_{23}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_2^e}{dy} \frac{d\psi_3^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8y}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4y}{(h_e)^2} - \frac{1}{h_e} \right) dy$$

$$K_{23}^e = -\frac{8}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$K_{33}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_3^e}{dy} \frac{d\psi_3^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{4y}{(h_e)^2} - \frac{1}{h_e} \right)^2 dy$$

$$K_{33}^e = \frac{7}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$[K^e] = \frac{\mu_1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$f_i^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_i^e d\bar{y}$$

$$f_1^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_1^e dy = f_0 \int_0^{h_e} \left(1 - \frac{\bar{y}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2\bar{y}}{h_e} \right) dy$$

$$f_1^e = \frac{f_0 h_e}{6}$$

$$f_2^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_2^e dy = f_0 \int_0^{h_e} \left(\frac{4\bar{y}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{h_e} \right) d\bar{y}$$

$$f_2^e = \frac{2f_0 h_e}{3}$$

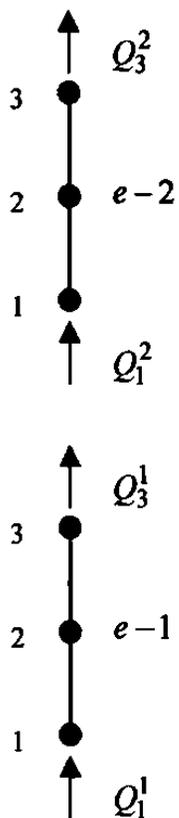
$$f_3^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_3^e d\bar{y} = f_0 \int_0^{h_e} \left(-\frac{\bar{y}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2\bar{y}}{h_e} \right) d\bar{y}$$

$$f_3^e = \frac{f_0 h_e}{6}$$

$$\{f^e\} = \frac{f_0 h_e}{3} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con dos elementos cuadráticos.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1 \Big|_1 + K_{12}^1 u_1 \Big|_2 + K_{13}^1 u_1 \Big|_3 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1 \Big|_1 + K_{22}^1 u_1 \Big|_2 + K_{23}^1 u_1 \Big|_3 = f_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1 \Big|_1 + K_{32}^1 u_1 \Big|_2 + K_{33}^1 u_1 \Big|_3 = f_3^1 + Q_3^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1 \Big|_1^2 + K_{12}^2 u_1 \Big|_2^2 + K_{13}^2 u_1 \Big|_3^2 = f_1^2 - Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1 \Big|_1^2 + K_{22}^2 u_1 \Big|_2^2 + K_{23}^2 u_1 \Big|_3^2 = f_2^2$$

$$K_{31}^2 u_1 \Big|_1^2 + K_{32}^2 u_1 \Big|_2^2 + K_{33}^2 u_1 \Big|_3^2 = f_3^2 + Q_3^2$$

Continuidad de la variable primaria

$$u_1 \Big|_1^1 = U_1$$

$$u_1 \Big|_2^1 = U_2$$

$$u_1 \Big|_3^1 = u_2 \Big|_1^2 = U_3$$

$$u_2 \Big|_2^2 = U_4$$

$$u_2 \Big|_3^2 = U_5$$

Las ecuaciones pueden expresarse en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$U_1(-b) = 0$$

$$U_2(b) = 0$$

$$U_1(0) = U_2(0)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Datos: Son los mismos que los del ejemplo 2.4 a

$$h_e = b = 0.5 \text{ m}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0466 & -0.0533 & 0.0066 & 0 & 0 \\ -0.0533 & 0.1066 & -0.0533 & 0 & 0 \\ 0.0066 & -0.0533 & 0.0482 & -0.0018 & 0.0002 \\ 0 & 0 & -0.0018 & 0.0037 & -0.0018 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0018 & 0.0016 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0.333 \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0.5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones para $(U_2), (U_3), (U_4), (Q_1^1)$ y (Q_2^3)

$$U_2 = 30.19 \frac{m}{seg} \quad U_3 = 47.88 \frac{m}{seg} \quad U_4 = 203.29 \frac{m}{seg}$$

TABLA 2.4b

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia y m	Velocidad Dos elementos cuadráticos	Velocidad Solución exacta
	$U \frac{m}{seg}$	$U \frac{m}{seg}$
-0.50	0.0	0.0
-0.25	30.19	30.40
0.00	47.88	48.28
0.25	203.29	202.67
0.50	0.0	0.0

PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

$$Q_1^1 = 1.45 \frac{N}{m^2}$$

$$Q_2^3 = -0.522 \frac{N}{m^2}$$

ECUACIÓN DE CUARTO ORDEN EN UNA DIMENSIÓN

FLEXIÓN DE VIGAS

Se analizará la formulación del elemento finito en una dimensión de la ecuación diferencial de cuarto orden usando la teoría de Euler-Bernoulli.

En la teoría de Euler-Bernoulli, la flexión transversal (w) de la viga es gobernada por una ecuación diferencial de cuarto orden.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x) \quad \Omega = (0, L)$$

Donde $b = b(x)$ y $f = f(x)$ son funciones dadas de (x) (datos), y (w) es la variable dependiente. La función ($b = EI$) es el producto del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I) de la viga, (f) es la carga transversal.

PROBLEMA MODELO

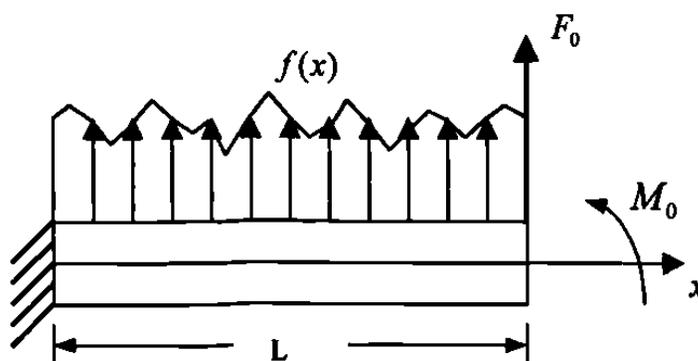


Figura 2.5 Flexión de viga

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x) \quad M = b \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad \frac{dV}{dx} = f$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO

El dominio de la estructura (longitud de la viga) es dividido en un conjunto de elementos, cada elemento tiene al menos dos nodos.

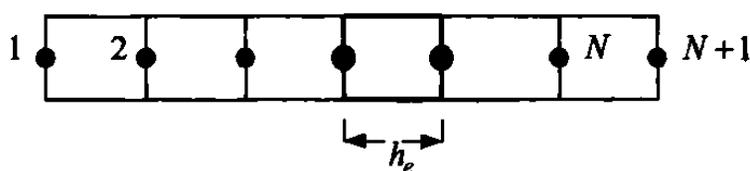


Figura 2.6a

Discretización de una viga

PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

En este paso se aísla un elemento típico $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$

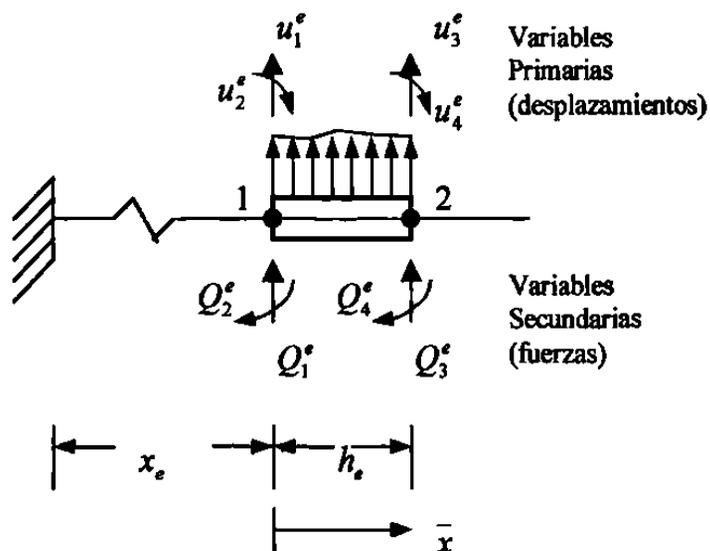


Figura 2.6b

Desplazamientos generalizados y fuerzas generalizadas

a) Construcción de la forma débil

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x) \quad (2.1)$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} v \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f \right] dx$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[- \frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - vf \right] dx - \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_e}^{x_{e+1}}$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - vf \right] dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{dv}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_e}^{x_{e+1}} \quad (2.2)$$

donde $v(x)$ es la función de peso que es dos veces diferenciable con respecto a (x) .

Introduciremos la siguiente notación:

$$Q_1^e = \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_e} \quad Q_2^e = \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_e} \quad (2.3)$$

$$Q_3^e = - \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_{e+1}} \quad Q_4^e = - \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_{e+1}}$$

Donde (Q_1^e) y (Q_3^e) representan las fuerzas de corte, (Q_2^e) y (Q_4^e) representan los momentos flexionantes (fig.2.6b). Las cantidades (Q_i^e) contienen momentos flexionantes, que pueden también ser vistos como “fuerzas flexionantes,” el conjunto $\{Q_1^e, Q_2^e, Q_3^e, Q_4^e\}$ es a menudo referido como las *fuerzas generalizadas*.

Los correspondientes desplazamientos y rotaciones son llamados *desplazamientos generalizados*.

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - v f \right) dx - v(x_e) Q_1^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_{e+1}} Q_4^e$$

$$0 = B(v, w) - I(v) \quad (2.4)$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

$$w^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e \Phi_j^e \quad (2.5)$$

Las funciones de interpolación (Φ_i^e) (interpolación cubica de hermite) pueden ser expresadas en términos de las coordenadas locales (x):

$$\Phi_1^e = 1 - 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3 \quad \Phi_2^e = -\bar{x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2$$

$$\Phi_3^e = 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3 \quad \Phi_4^e = -\bar{x} \left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right]$$
(2.7)

La primera, segunda y tercera derivada de (Φ_i^e) con respecto a (x) son.

$$\frac{d\Phi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{6}{h_e} \frac{\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)$$

$$\frac{d\Phi_2^e}{d\bar{x}} = -\left[1 + 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - 4 \frac{\bar{x}}{h_e} \right]$$

$$\frac{d\Phi_3^e}{d\bar{x}} = -\frac{d\Phi_1^e}{d\bar{x}}$$

$$\frac{d\Phi_4^e}{d\bar{x}} = -\frac{\bar{x}}{h_e} \left(3 \frac{\bar{x}}{h_e} - 2 \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \Phi_1^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{6}{h_e} \left(1 - 2 \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \\
\frac{d^2 \Phi_2^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{2}{h_e} \left(3 \frac{\bar{x}}{h_e} - 1 \right) \\
\frac{d^2 \Phi_3^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{d^2 \Phi_1^e}{d\bar{x}^2} \\
\frac{d^2 \Phi_4^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{2}{h_e} \left(3 \frac{\bar{x}}{h_e} - 1 \right) \\
\frac{d^3 \Phi_1^e}{d\bar{x}^3} &= \frac{12}{(h_e)^3} \\
\frac{d^3 \Phi_2^e}{d\bar{x}^3} &= -\frac{6}{(h_e)^2} \\
\frac{d^3 \Phi_3^e}{d\bar{x}^3} &= -\frac{12}{(h_e)^3} \\
\frac{d^3 \Phi_4^e}{d\bar{x}^3} &= -\frac{6}{(h_e)^2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

MODELO DEL ELEMENTO FINITO. El modelo del elemento finito de la viga Euler-Bernoulli es obtenida sustituyendo las funciones de interpolación por w y las Φ_j por las funciones de peso v en la forma débil.

$$0 = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \right) u_j^e - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx - Q_i^e \tag{2.9 a}$$

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e = 0 \tag{2.9 b}$$

donde

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \quad (2.10)$$

$$F_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx + Q_i^e$$

Note que los coeficientes (K_{ij}^e) son simétricos ($K_{ij}^e = K_{ji}^e$). En notación matricial, pueden escribirse como.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ f_4^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Para el caso en el que ($b = EI$) y (f) son constantes sobre un elemento, los elementos de la matriz de rigidez $[K^e]$ y el vector fuerza $\{F^e\}$ tienen las siguientes formas específicas (ver figura 2.5).

$$[K^e] = \frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\{F^e\} = \frac{fh}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con dos elementos

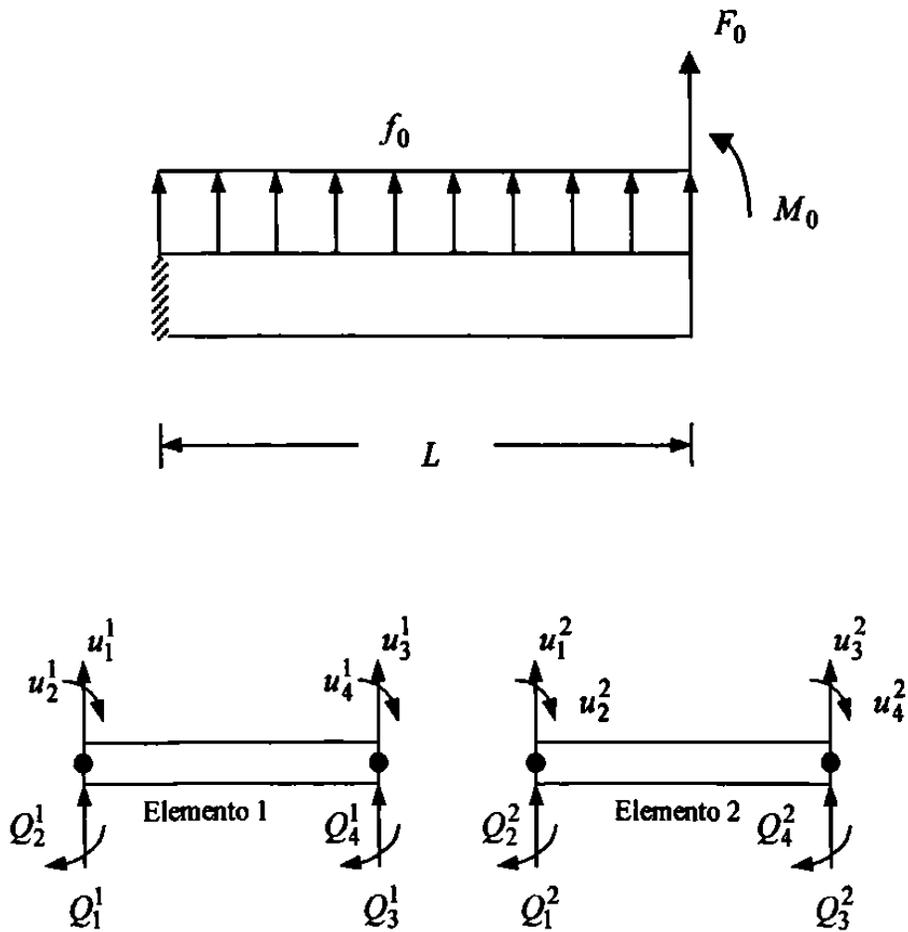


Figura 2.7 Ensamble de dos elementos

Balance de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1$$

$$u_2^1 = U_2$$

$$u_3^1 = u_1^2 = U_3$$

$$u_4^1 = u_2^2 = U_4$$

$$u_3^2 = U_5$$

$$u_4^2 = U_6$$

(2.13)

Ejemplo 2.5. Para el problema de la viga mostrada en la (figura. 2.8) determine

- Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados)
- Las variables secundarias desconocidas (fuerzas generalizadas)

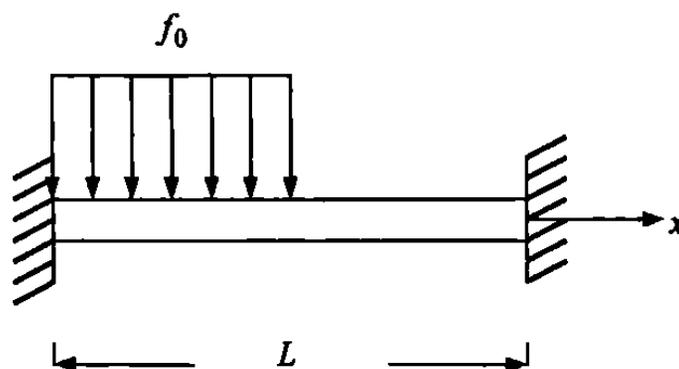


Figura 2.8 Viga empotrada en los extremos

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f_0$$

$$b = EI = \text{cte.}$$

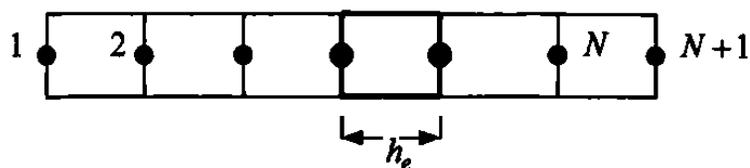
$$f_0 = \text{cte.}$$

Datos:

$$L = 10 \text{ m}$$

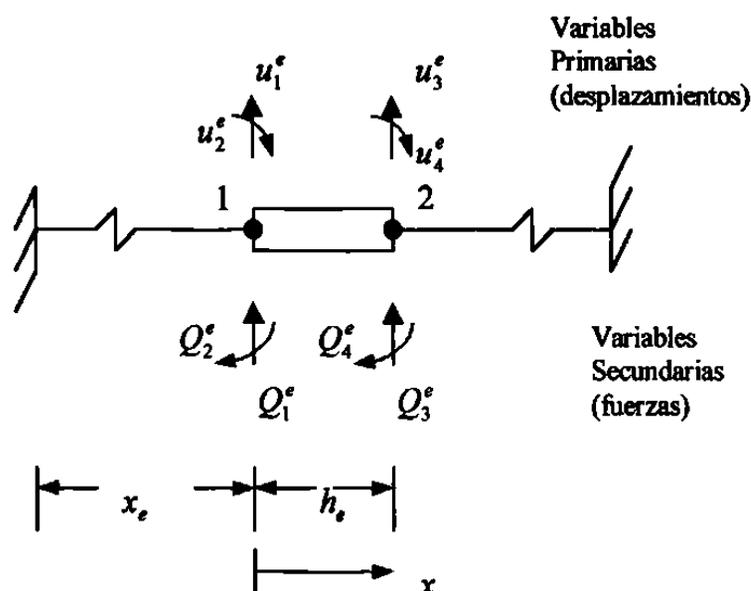
$$E = 200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad I = 20 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad f_0 = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

En este paso se aísla un elemento típico $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$



a) Construcción de la forma débil

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - v f \right) dx - v(x_e) Q_1^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_{e+1}} Q_4^e$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito

$$w^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e \Phi_j$$

MODELO DEL ELEMENTO FINITO. El modelo del elemento finito de la viga Euler-Bernoulli es obtenida sustituyendo las funciones de interpolación por (w) y las (Φ_j) por las funciones de peso (v) en la forma débil.

$$0 = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \right) u_j^e - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx - Q_i^e$$

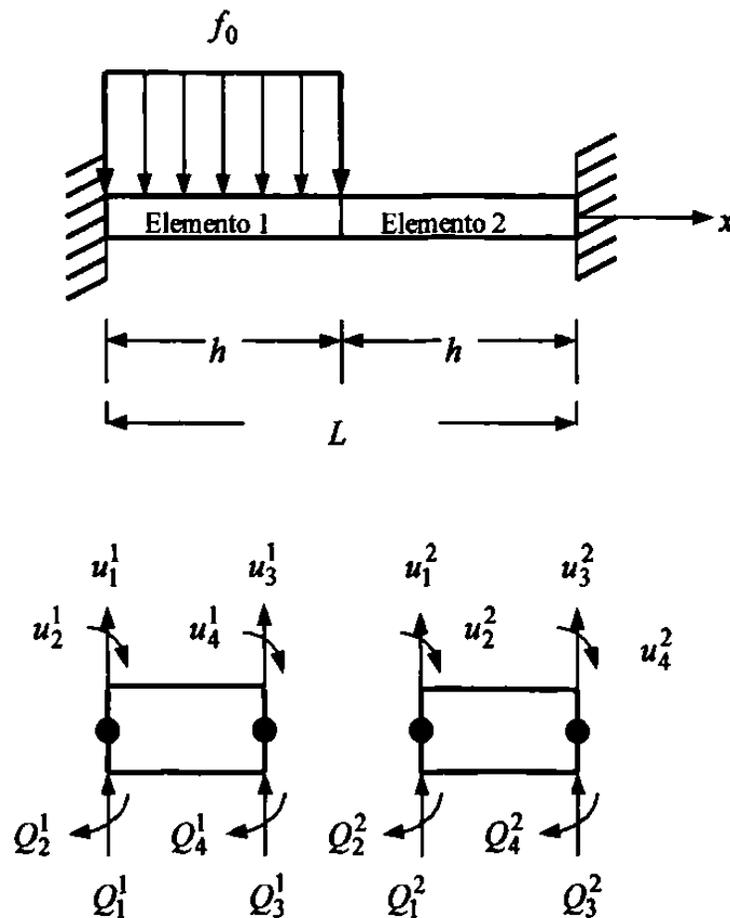
$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e = 0$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \quad F_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx + Q_i^e$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

1) Malla con dos elementos $h = 5 \text{ m}$



Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 + K_{14}^1 u_4^1 = f_1^1 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 + K_{24}^1 u_4^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 + K_{34}^1 u_4^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

$$K_{41}^1 u_1^1 + K_{42}^1 u_2^1 + K_{43}^1 u_3^1 + K_{44}^1 u_4^1 = f_4^1 + Q_4^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 = Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 = Q_2^2$$

$$K_{31}^2 u^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 = Q_3^2$$

$$K_{41}^2 u^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 = Q_4^2$$

Continuidad de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1 \qquad u_4^1 = u_2^2 = U_4$$

$$u_2^1 = U_2 \qquad u_3^2 = U_5$$

$$u_3^1 = u_1^2 = U_3 \qquad u_4^2 = U_6$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & (K_{34}^1 + K_{12}^2) & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & (K_{43}^1 + K_{21}^2) & (K_{44}^1 + K_{22}^2) & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \quad \{F^e\} = \frac{-f_0 h}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}$$

$$2EI \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\ h^3 & -3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h & h^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = -f_0h \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad U_5 = 0 \quad U_6 = 0$$

$$Q_3^1 + Q_1^2 = 0 \quad Q_4^1 + Q_2^2 = 0$$

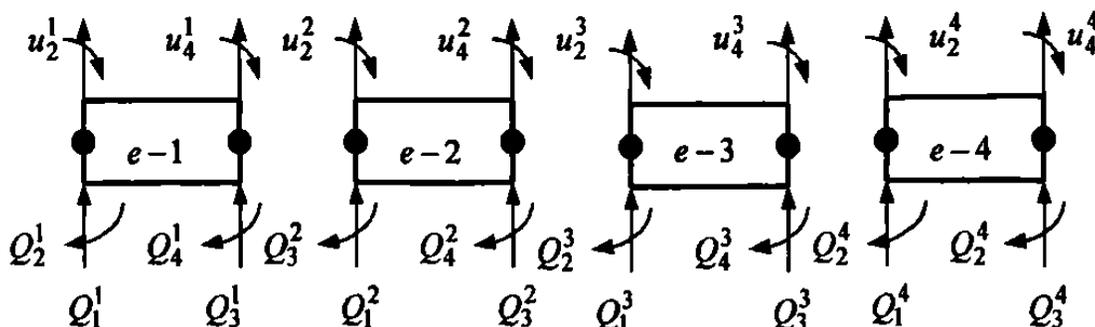
$$2EI \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\ h^3 & -3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h & h^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -f_0h \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para $(Q_1^1, Q_2^1, U_3, U_4, Q_3^2, Q_4^2)$

TABLA 2.5a Comparación de resultados elemento finito solución exacta.

	Solución aproximada Para dos elementos.	Solución exacta.
U_3 m	-0.0013	-0.00129
U_4 rad	-0.0001302	-0.0001300
Q_1^1 N	1624	1625.31
Q_3^2 N	374.4	374.69
Q_2^1 N-m	2289.33	2293.22
Q_4^2 N-m	1456	1040.12

2) Malla con cuatro elementos $h = 2.5 \text{ m}$ 

Balace de la variable primaria

$$\begin{array}{llll}
 u_1^1 = U_1 = 0 & u_3^1 = u_1^2 = U_3 & u_4^2 = u_2^3 = U_6 & u_3^4 = 0 \\
 u_2^1 = U_2 = 0 & u_4^1 = u_2^2 = U_4 & u_3^3 = u_1^4 = U_7 & u_4^4 = 0 \\
 & u_2^2 = u_3^3 = U_5 & u_4^3 = u_2^4 = U_8 &
 \end{array}$$

En la siguiente matriz solo se calcularan las variables primarias

$$\begin{bmatrix}
 K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 & 0 \\
 K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 & 0 \\
 K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{11}^3 & K_{34}^2 + K_{12}^3 & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\
 K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 + K_{21}^3 & K_{44}^2 + K_{22}^3 & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\
 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 + K_{11}^4 & K_{34}^3 + K_{12}^4 \\
 0 & 0 & K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{43}^3 + K_{21}^4 & K_{44}^3 + K_{22}^4
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}$$

$$a = f_3^1 + f_1^2 \quad b = f_4^1 + f_2^2 \quad c = f_3^2 \quad d = f_4^2$$

TABLA 2.5b Comparación de resultados elemento finito solución exacta

	Solución aproximada	Solución exacta
$U_3 \text{ m}$	-0.0009	-0.00089
$U_4 \text{ rad}$	-0.0004	-0.00035
$U_5 \text{ m}$	-0.0013	-0.00128
$U_6 \text{ rad}$	-0.0001	-0.00013
$U_7 \text{ m}$	-0.0006	-0.00054
$U_8 \text{ rad}$	0.0004	0.000424

Ejemplo 2.6. Para el problema de la viga mostrada en la (figura. 2.9) determine.

- Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados).
- Las variables secundarias desconocidas (fuerzas generalizadas).

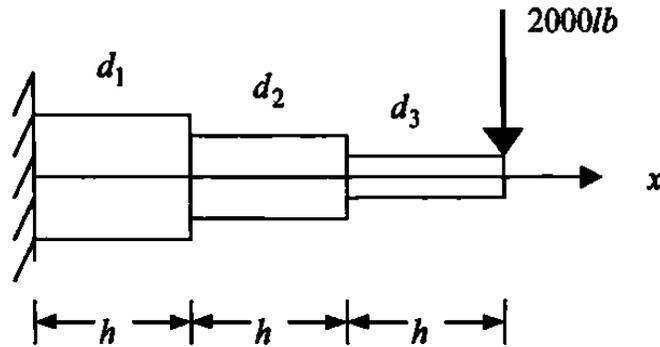


Figura 2.9 Viga empotrada de sección variable

La ecuación diferencial que gobierna el problema es

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = 0$$

$$b = EI = \text{cte.}$$

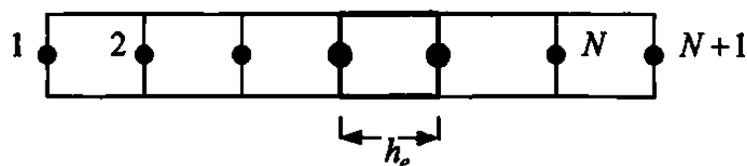
Datos

$$h = 20 \text{ in} \quad E = 30 \times 10^6 \frac{\text{Lbf}}{\text{in}^2}$$

$$d_1 = 4 \text{ in} \quad d_2 = 3 \text{ in} \quad d_3 = 2 \text{ in}$$

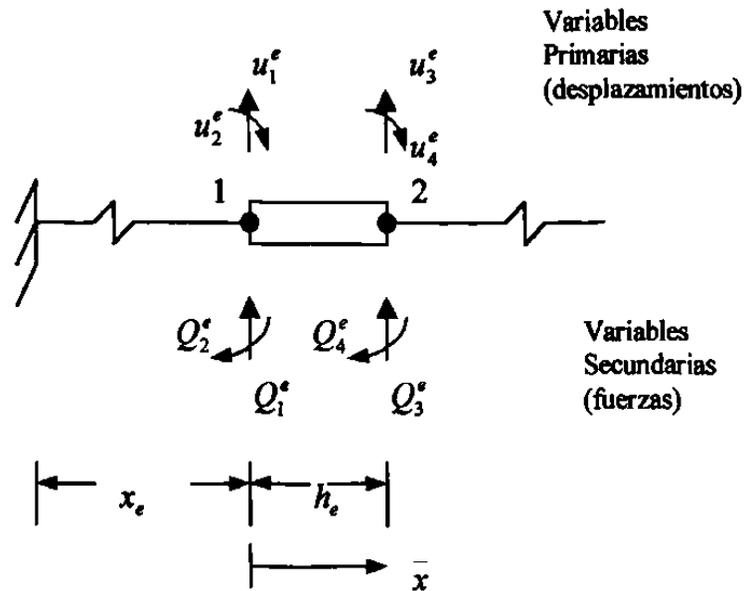
$$I_1 = 12.566 \text{ in}^4 \quad I_2 = 3.976 \text{ in}^4 \quad I_3 = 0.785 \text{ in}^4$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

En este paso se aísla un elemento típico $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$



a) Construcción de la forma débil

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = 0$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx - v(x_e) Q_1^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_{e+1}} Q_4^e$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito

$$w^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e \Phi_j^e$$

MODELO DEL ELEMENTO FINITO. El modelo del elemento finito de la viga Euler-Bernoulli es obtenida sustituyendo las funciones de interpolación por (w) y las (Φ_j) por las funciones de peso (v) en la forma débil

$$0 = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \right) u_j^e - Q_i^e$$

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e = 0$$

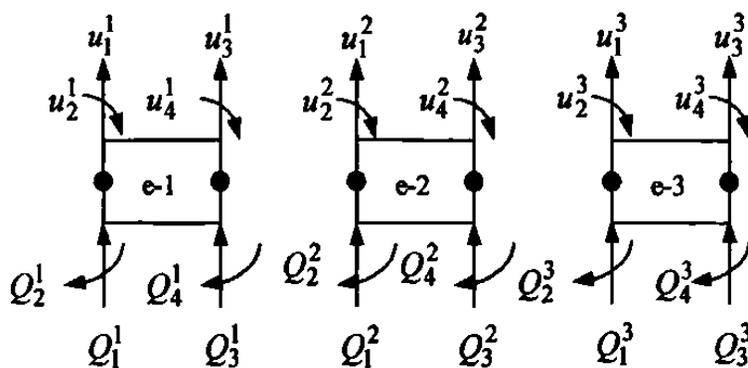
donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx$$

$$F_i^e = Q_i^e$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con cuatro elementos.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 + K_{14}^1 u_4^1 = Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 + K_{24}^1 u_4^1 = Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 + K_{34}^1 u_4^1 = Q_3^1$$

$$K_{41}^1 u_1^1 + K_{42}^1 u_2^1 + K_{43}^1 u_3^1 + K_{44}^1 u_4^1 = Q_4^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 = Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 = Q_2^2$$

$$K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 = Q_3^2$$

$$K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 = Q_4^2$$

Elemento(3)

$$K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3 + K_{13}^3 u_3^3 + K_{14}^3 u_4^3 = Q_1^3$$

$$K_{21}^3 u_1^3 + K_{22}^3 u_2^3 + K_{23}^3 u_3^3 + K_{24}^3 u_4^3 = Q_2^3$$

$$K_{31}^3 u_1^3 + K_{32}^3 u_2^3 + K_{33}^3 u_3^3 + K_{34}^3 u_4^3 = Q_3^3$$

$$K_{41}^3 u_1^3 + K_{42}^3 u_2^3 + K_{43}^3 u_3^3 + K_{44}^3 u_4^3 = Q_4^3$$

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & (K_{34}^1 + K_{12}^2) & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 & 0 \\
 K_{41}^1 & K_{42}^1 & (K_{43}^1 + K_{21}^2) & (K_{44}^1 + K_{22}^2) & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & (K_{33}^2 + K_{11}^3) & (K_{34}^2 + K_{12}^3) & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\
 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & (K_{43}^2 + K_{21}^3) & (K_{44}^2 + K_{22}^3) & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 & K_{34}^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{43}^3 & K_{44}^3
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8
 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix}
 Q_1^1 \\
 Q_2^1 \\
 Q_3^1 + Q_1^2 \\
 Q_4^1 + Q_2^2 \\
 Q_3^2 + Q_1^3 \\
 Q_4^2 + Q_2^3 \\
 -2000 \\
 Q_4^3
 \end{Bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{2(EI)}{h^3} \begin{bmatrix}
 6 & -3h & -6 & -3h \\
 -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\
 -6 & 3h & 6 & 3h \\
 -3h & h^2 & 3h & 2h^2
 \end{bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$\begin{array}{ll}
 u_1^1 = U_1 = 0 & Q_1^1 \\
 u_2^1 = U_2 = 0 & Q_2^1 \\
 u_3^1 = u_1^2 = U_3 & Q_3^1 + Q_1^2 = 0 \\
 u_4^1 = u_2^2 = U_4 & Q_4^1 + Q_2^2 = 0 \\
 u_3^2 = u_1^3 = U_5 & Q_3^2 + Q_1^3 = 0 \\
 u_4^2 = u_2^3 = U_6 & Q_4^2 + Q_2^3 = 0 \\
 u_3^3 = U_7 & Q_3^3 = -2000 \\
 u_4^3 = U_8 & Q_4^3 = 0
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & (K_{34}^1 + K_{12}^2) & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 & 0 \\
 K_{41}^1 & K_{42}^1 & (K_{43}^1 + K_{21}^2) & (K_{44}^1 + K_{22}^2) & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & (K_{33}^2 + K_{11}^3) & (K_{34}^2 + K_{12}^3) & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\
 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & (K_{43}^2 + K_{21}^3) & (K_{44}^2 + K_{22}^3) & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 & K_{34}^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{43}^3 & K_{44}^3
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8
 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
 Q_1^1 \\
 Q_2^1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -2000 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para $(Q_1^1, Q_1^2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8)$

$$[K^1] = \frac{2EI_1}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \frac{2EI_2}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \frac{2EI_3}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

TABLA 2.6

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

	Solución aproximada Tres elementos	Solución exacta
U_3 in	-0.0566	-0.070
U_4 rad	0.0053	0.0085
U_5 in	-0.27448	-0.226
U_6 rad	0.0153	0.0180
U_7 in	-0.8082	-0.4524
U_8 rad	0.0323	0.0349
Q_1^1 Lb _f	2035.6	2000
Q_1^2 Lb _f - in	-120256.6	-120000

Ejemplo 2.7. Para el problema de la viga mostrada en la (fig. 2.10) determine.

- Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados).
- Las variables secundarias desconocidas (fuerzas generalizadas).

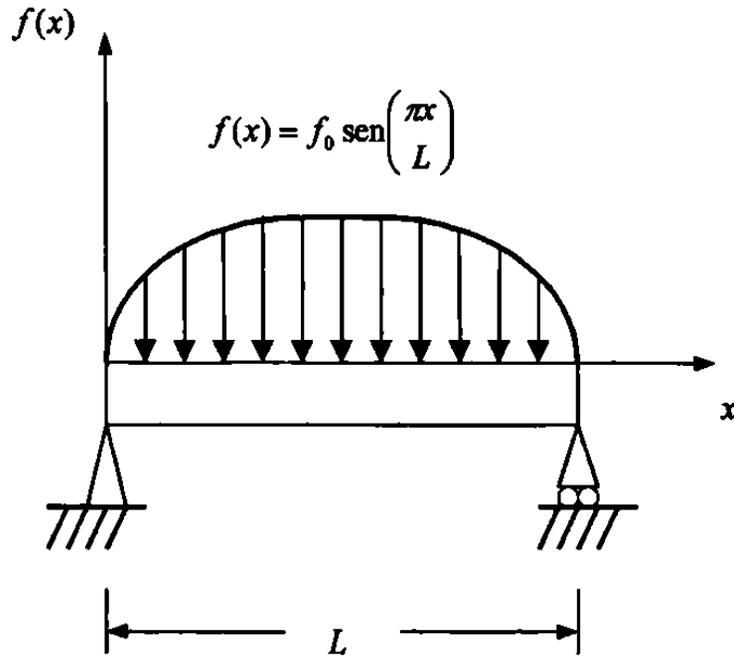


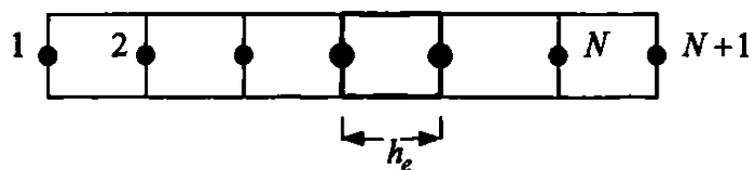
Figura 2.10 Viga simplemente apoyada con carga senoidal

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x)$$

$$b = EI = \text{cte.}$$

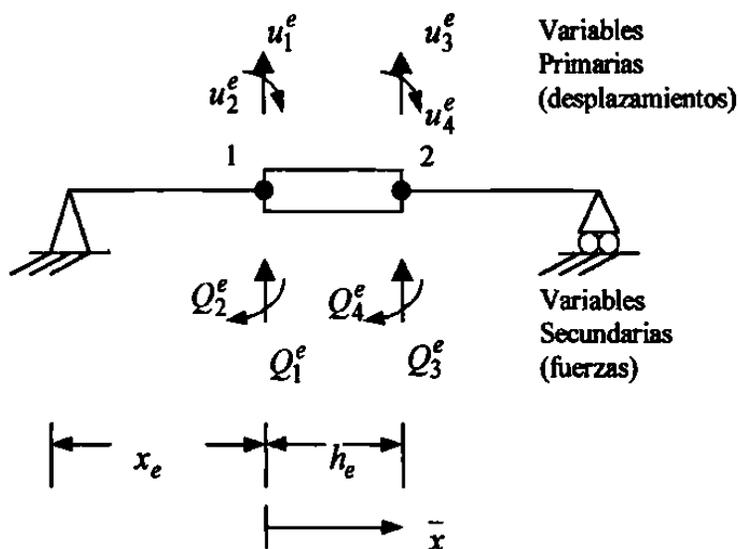
$$f(x) = f_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right)$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

En este paso se aísla un elemento típico $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$



a) Construcción de la forma débil.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} v \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f \right] dx$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - v f \right) dx - v(x_e) Q_1^e - \left(- \frac{dv}{dx} \right)_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(- \frac{dv}{dx} \right)_{x_{e+1}} Q_4^e$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

$$w^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e \Phi_j^e$$

MODELO DEL ELEMENTO FINITO. El modelo del elemento finito de la viga Euler-Bernoulli es obtenida sustituyendo las funciones de interpolación por w y las Φ_j por las funciones de peso v en la forma débil.

$$0 = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \right) u_j^e - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx - Q_i^e$$

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e = 0$$

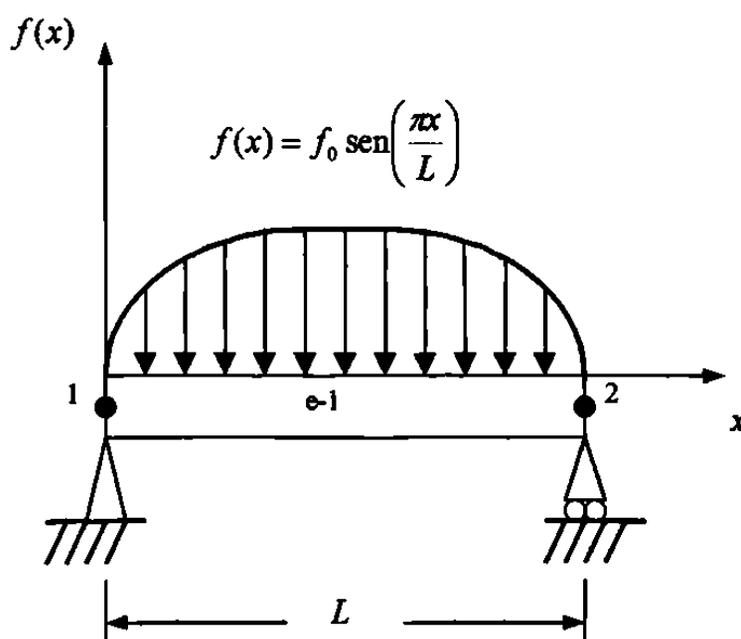
donde

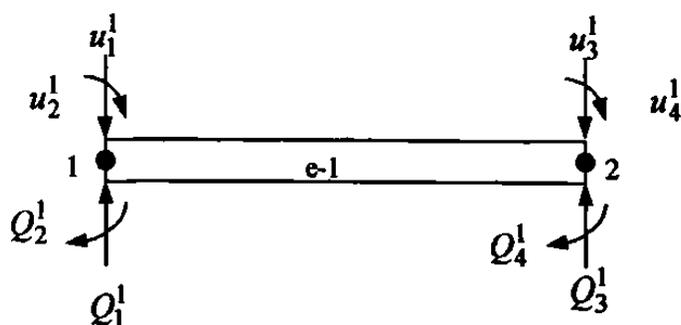
$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx$$

$$F_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx + Q_i^e$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con un elemento.





Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 + K_{14}^1 u_4^1 = f_1^1 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 + K_{24}^1 u_4^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 + K_{34}^1 u_4^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

$$K_{41}^1 u_1^1 + K_{42}^1 u_2^1 + K_{43}^1 u_3^1 + K_{44}^1 u_4^1 = f_4^1 + Q_4^1$$

Continuidad de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1$$

$$u_2^1 = U_2$$

$$u_3^1 = u_1^2 = U_3$$

$$u_4^1 = u_2^2 = U_4$$

$$u_3^2 = U_5$$

$$u_2^4 = U_6$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \\ Q_4^1 \end{Bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

$$f_i^e = - \int_0^{h_e} f(\bar{x}) \Phi_i^e d\bar{x}$$

$$h_e = h = L$$

$$f_1^1 = - \int_0^{h_e} f_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \left[1 - \frac{3(x)^2}{(h_e)^2} + \frac{2(x)^3}{(h_e)^3} \right] dx$$

$$f_2^1 = - \int_0^{h_e} f_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi \bar{x}}{L} \right) \left[-x + \frac{2(x)^2}{h_e} - \frac{(x)^3}{(h_e)^2} \right] dx$$

$$f_3^1 = - \int_0^{h_e} f_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \left[\frac{3(x)^2}{(h_e)^2} - \frac{2(x)^3}{(h_e)^3} \right] dx$$

$$f_4^1 = - \int_0^{h_e} f_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \left[-\frac{(x)^3}{(h_e)^2} + \frac{(x)^2}{h_e} \right] dx$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 & Q_2^1 &= 0 \\ U_3 &= 0 & Q_4^1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ 0 \\ Q_3^1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para (U_2, U_4, Q_1^1, Q_3^1)

Datos:

$$\begin{aligned} f_0 &= 30000 \frac{N}{m} & E &= 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2} & I &= 3 \times 10^{-6} m^4 \\ b &= EI & L &= 10m \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 7200 & -36000 & -7200 & -36000 \\ -36000 & 240000 & 36000 & 120000 \\ -7200 & 36000 & 7200 & 36000 \\ -36000 & 120000 & 36000 & 240000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -95496.33 \\ 193531.6 \\ -95489.6 \\ -193498 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ 0 \\ Q_3^1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

TABLA 2.7

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

	Solución aproximada	
	Un elemento	Solución exacta
$U_2 \text{ rad}$	1.61	1.58
$U_4 \text{ rad}$	-1.61	-1.58
$Q_1^1 \text{ N}$	95496.3	95492.6
$Q_3^1 \text{ N}$	95496.3	95492.6

CAPITULO 3

PROBLEMAS EN ESTADO TRANSITORIO UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

3.1 Introducción

En este capítulo se desarrollaran los modelos de problemas del elemento finito en una dimensión en estado transitorio y esquemas para describir las aproximaciones en el tiempo para convertir ecuaciones diferenciales ordinarias en ecuaciones algebraicas.

Consideraremos modelos de elementos finitos que incluyen segundo orden (en el espacio) parabólico (primera derivada en el tiempo) y hiperbólico (segunda derivada en el tiempo) y de cuarto orden ecuación hiperbólica en conexión con la flexión de la viga.

Las ecuaciones de segundo orden parabólicas aparecen en transferencia de calor y en mecánica de fluidos.

La formulación del elemento finito en problemas dependiendo del tiempo se compone de dos pasos.

1. *Aproximación Espacial*. Donde la solución u de la ecuación bajo consideración es aproximada por la expresión de la forma.

$$u(x, t) \approx U^e(x, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \psi_j^e(x) \quad (3.1)$$

El modelo espacial del elemento finito de la ecuación se desarrolla usando problemas en estado estable, mientras que se transportan todos los términos dependientes del tiempo en la formulación. Cuando la solución es separable en funciones solo de tiempo y solo de espacio, $u(x,t) = T(t)X(x)$, la aproximación (3.1) se justifica, cuando la solución no sea separable, (3.1) puede representar una buena aproximación de la solución, proporcionando incrementos de tiempo muy pequeños.

2. *Aproximación en el tiempo.* Cuando el sistema de ecuaciones diferenciales es aproximado en el tiempo, a menudo usando familias de diferencias finitas para las derivadas del tiempo. Este paso permite la conversión del sistema de ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas entre (u_j^e) a tiempo $t_{s+1} = (s+1)\Delta t$, donde (Δt) es el incremento del tiempo y (s) es un entero.

Todos los esquemas de aproximación en el tiempo para encontrar (u_j) en el tiempo (t_{s+1}) usando los valores conocidos de (u_j) de tiempos anteriores:

Así, al final de los dos pasos, uno tiene una solución espacial continua en intervalos de tiempo discretos.

$$U^e(x, t_s) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t_s) \psi_j^e(x) \quad (s = 0, 1, \dots)$$

Ecuación diferencial modelo:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + c_0 u + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (3.2 a)$$

Las condiciones de frontera son de la forma

$$u(x,t) \quad \text{o} \quad -a \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad \text{o} \quad b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad x = 0, L \quad (3.2 \text{ b})$$

y las condiciones iniciales.

$$c_2 u(x,0) \quad \text{y} \quad c_2 \dot{u}(x,0) + c_1 u(x,0) \quad (3.2 \text{ c})$$

3.2 Modelos del elemento finito

La formulación involucra la variación espacial de la variable dependiente, en el que se siguen los mismos pasos que se describieron en el capítulo (2).

Construcción de la forma débil de la ecuación (3.2 a)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_A}^{x_B} w \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + c_0 u + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f \right] dx \\ 0 &= \int_{x_A}^{x_B} \left[-a \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_0 w u + c_1 w \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - w f \right] dx \\ &\quad - \hat{Q}_1 w(x_A) - \hat{Q}_3 w(x_B) - \hat{Q}_2 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x_A} - \hat{Q}_4 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x_B} \end{aligned} \quad (3.3 \text{ a})$$

donde

$$\hat{Q}_1 = \left[-a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_{x_A}, \quad \hat{Q}_2 = \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x_A}$$

$$\hat{Q}_3 = \left[-a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right]_{x_B}, \quad \hat{Q}_4 = \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_B} \quad (3.3 \text{ b})$$

sustituimos $w = \psi_i(x)$ y (3.1) en (3.3 a), para obtener

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j}{dx} \right) + b \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{d^2\psi_j}{dx^2} \right) \right. \\ & + c_0 \psi_i \left(\sum_{j=1}^n u_j \psi_j \right) + c_1 \psi_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{du_j}{dt} \psi_j \right) + c_2 \psi_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{d^2 u_j}{dt^2} \psi_j \right) - \psi_i f \left. \right] dx \\ & - \hat{Q}_1 \psi_i(x_A) - \hat{Q}_3 \psi_i(x_B) - \hat{Q}_2 \left(-\frac{d\psi_i}{dx} \right)_{x_A} - \hat{Q}_4 \left(-\frac{d\psi_i}{dx} \right)_{x_B} \\ 0 = & \sum_{j=1}^n \left[(K_{ij}^1 + K_{ij}^2 + M_{ij}^0) u_j + M_{ij}^1 \frac{du_j}{dt} + M_{ij}^2 \frac{d^2 u_j}{dt^2} \right] - F_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

En forma matricial, tenemos

$$[K]\{u\} + [M^1]\{\dot{u}\} + [M^2]\{\ddot{u}\} = \{F\} \quad (3.5 \text{ a})$$

donde

$$[K] = [K^1] + [K^2] + [M^0] \quad (3.5 \text{ b})$$

$$M_{ij}^0 = \int_{x_A}^{x_B} c_0 \psi_i \psi_j dx$$

$$M_{ij}^1 = \int_{x_A}^{x_B} c_1 \psi_i \psi_j dx, \quad M_{ij}^2 = \int_{x_A}^{x_B} c_2 \psi_i \psi_j dx$$

$$K_{ij}^1 = \int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx, \quad K_{ij}^2 = \int_{x_A}^{x_B} b \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad (3.5 \text{ c})$$

$$F_i = \int_{x_A}^{x_B} \psi_i f dx + \hat{Q}_i$$

3.3 Aproximaciones en el tiempo

Como casos especiales de la ecuación (3.5 b) ecuación parabólica si ($[M^2] = [0]$) y ecuación hiperbólica si ($[M^1] = [0]$). La aproximación en el tiempo de (3.5 b) para estos dos casos deberá ser considerada separadamente: en el Caso (1), $c_2 = 0$; en el Caso (2), $c_1 = 0$.

Caso (1): Ecuación Parabólica.

$$[M^1]\{u\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (3.6 a)$$

Sujeta a las condiciones iniciales donde $\{u\}_0$

$$\{u\}_0 = \{u_0\} \quad (3.6 b)$$

donde $\{u\}_0$ es el valor de la cantidad u en el tiempo $t = 0$, mientras $\{u_0\}$ denota la columna de valores u_{j0} .

El método comúnmente usado de resolver (3.4 a) es la *familia de aproximación* α ,

$\alpha = 0$, (Diferencias hacia adelante, Euler); orden de exactitud; $O(\Delta t)$, cond.est.

$\alpha = \frac{1}{2}$, (Crank-Nicolson), orden de exactitud; $O((\Delta t)^2)$, estable.

$\alpha = \frac{2}{3}$, (Metodo Galerkin), orden de exactitud; $O((\Delta t)^2)$, estable.

$\alpha = 1$, (Diferencias hacia atrás), orden de exactitud = $O(\Delta t)$, estable.

El sistema de ecuaciones (3.5 a) se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas

$$[\hat{K}]_{s+1}\{u\}_{s+1} = [\hat{K}]_s\{u\}_s + \{\hat{F}\}_{s,s+1} \quad (3.7 a)$$

donde

$$\begin{aligned}
 [K]_{s+1} &= [M^1] + \alpha \Delta t_{s+1} [K]_{s+1} \\
 [K]_s &= [M^1] - (1 - \alpha) \Delta t_{s+1} [K]_s \\
 \{F\}_{s,s+1} &= \Delta t_{s+1} [\alpha \{F\}_{s+1} + (1 - \alpha) \{F\}_s]
 \end{aligned} \tag{3.7 b}$$

Estabilidad y Exactitud.

Exactitud de un esquema numérico es una medida de la cercanía entre la solución aproximada y la solución exacta, mientras que estabilidad de la solución es una medida de la relación de la solución aproximada con el tiempo.

Un esquema numérico puede ser *condicionalmente estable* si es estable solo cuando ciertas restricciones en los incrementos de tiempo son satisfechas. Para todos los esquemas numéricos en el que ($\alpha < \frac{1}{2}$), la familia de aproximación es estable solo si los incrementos de tiempo satisfacen la siguiente condición de estabilidad.

$$\Delta t < \Delta t_{cr} \equiv \frac{2}{(1 - 2\alpha)\lambda} \tag{3.8}$$

Donde (λ) es el mayor eigenvalor de la ecuación de elemento finito (3.6). Note que la misma malla que se uso para el análisis transitorio debe ser usada para calcular los eigenvalores.

Caso (2): Ecuaciones Hiperbólicas

$$[M^2] \{u\} + [K] \{u\} = \{F\} \tag{3.9}$$

Hay varios métodos para integrar ecuaciones de segundo orden. Algunos de estos son, la familia Newmark de esquemas de integradores de tiempo es muy usada en dinámica estructural. Otros métodos, como el de Wilson y el de Houbolt, pueden ser

usados para desarrollar las ecuaciones algebraicas de la ecuación diferencial de segundo orden (3.9).

En el método de Newmark (γ) y (β) son parámetros que determinan la estabilidad y exactitud del esquema.

$$\begin{aligned}
 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\beta = \frac{1}{2}, & \text{ Método de aceleración promedio constante (estable)} \\
 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\beta = \frac{1}{3}, & \text{ Método de aceleración lineal (condicionalmente estable)} \\
 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\beta = 0, & \text{ Método de diferencias central (condicionalmente estable)} \\
 \alpha = \frac{3}{2}, \quad \gamma = 2\beta = \frac{8}{5}, & \text{ Método de Galerkin (estable)} \\
 \alpha = \frac{3}{2}, \quad \gamma = 2\beta = 2, & \text{ Método de diferencias hacia atrás (estable)}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para todos los esquemas en los que ($\gamma < \alpha$) y ($\alpha \geq \frac{1}{2}$), los requerimientos de estabilidad

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \left[\frac{1}{2} \omega_{max}^2 (\alpha - \gamma) \right]^{-1/2} \tag{3.11}$$

donde ω_{max} es la máxima frecuencia natural del sistema (3.9).

El sistema de ecuaciones (3.9) se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas usando el método de Newmark:

$$[K]_{s+1} \{u\}_{s+1} = \{F\}_{s+1} \tag{3.12 a}$$

donde

$$\begin{aligned}
 [K]_{s+1} &= [K]_{s+1} + a_3 [M]_{s+1} \\
 \{F\}_{s+1} &= \{F\}_{s+1} + [M]_{s+1} (a_3 \{u\}_s + a_4 \{\dot{u}\}_s + a_5 \{u\}_s)
 \end{aligned} \tag{3.12 b}$$

$$a_3 = \frac{2}{\gamma(\Delta t)^2}, \quad a_4 = \frac{2}{\gamma\Delta t}, \quad a_5 = \frac{1}{\gamma} - 1$$

Note que los cálculos de $[K]$ y $\{F\}$ requieren las condiciones iniciales $\{u\}_0, \{\dot{u}\}_0, y \{\ddot{u}\}_0$. En la practica, no se conoce $\{u\}_0$. Como una aproximación, se puede calcular de (3.9) (se puede suponer que las fuerzas aplicadas son cero en $t = 0$):

$$\{u\}_0 = [M^2]^{-1} (\{F\}_0 - [K]\{u\}_0) \quad (3.13)$$

Al final de cada incremento de tiempo, el nuevo vector velocidad $\{\dot{u}\}_{s+1}$ y el vector aceleración $\{\ddot{u}\}_{s+1}$ son calculados usando las ecuaciones

$$\begin{aligned} \{\ddot{u}\}_{s+1} &= a_1 (\{\ddot{u}\}_{s+1} - \{\ddot{u}\}_s) - a_4 \{\dot{u}\}_s - a_5 \{u\}_s \\ \{\dot{u}\}_{s+1} &= \{\dot{u}\}_s + a_2 \{\dot{u}\}_s + a_1 \{u\}_{s+1} \\ a_1 &= \alpha\Delta t, \quad a_2 = (1 - \alpha)\Delta t \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ejemplo 3.1 Una barra delgada a una temperatura inicial de (θ_1) , aislada por todos lados, menos por uno de sus extremos, que se somete a la temperatura de (θ_0) , que es la temperatura ambiente. La barra tiene una longitud (L) , determine la distribución de temperaturas.

Ecuación diferencial del problema

$$\xi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 < x < L$$

$$\xi = \frac{k}{\rho c}$$

θ = Temperatura

ξ = Difusividad térmica

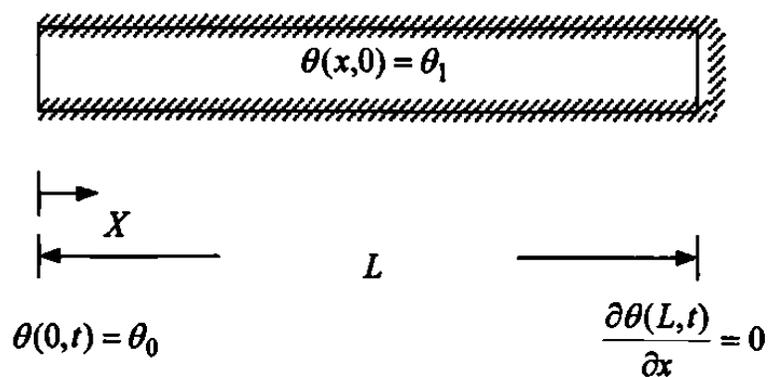
t = Tiempo

Condiciones de frontera

$$\theta(x, 0) = \theta_1 \quad 0 < x < L$$

$$\theta(0, t) = \theta_0 \quad t > 0$$

$$\frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = 0 \quad t > 0$$



Normalizando

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad \tau = \frac{\xi t}{L^2} \quad X = \frac{x}{L}$$

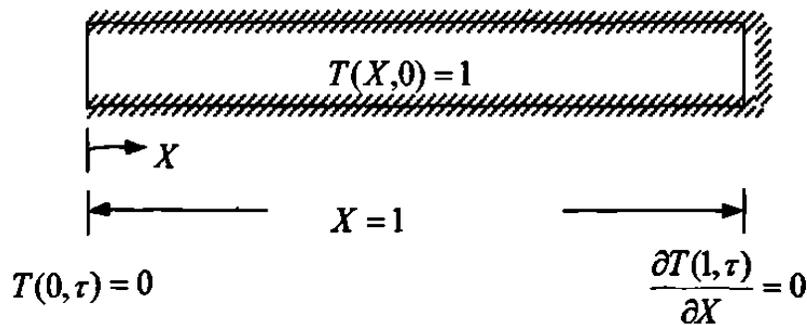
La ecuación diferencial y las condiciones de frontera del problema se transforma en

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad 0 < X < 1 \quad (3.15)$$

$$T(X, 0) = 1 \quad 0 < X < 1$$

$$T(0, \tau) = 0 \quad \tau > 0$$

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial X} = 0 \quad \tau > 0$$



El problema que se tiene es un caso especial de la ecuación (3.2 a) con $a = 1$, $b = 0$, $c_0 = 0$, $c_2 = 0$, y $f = 0$.

El modelo de elemento finito para (3.15) es dado por (3.6 a):

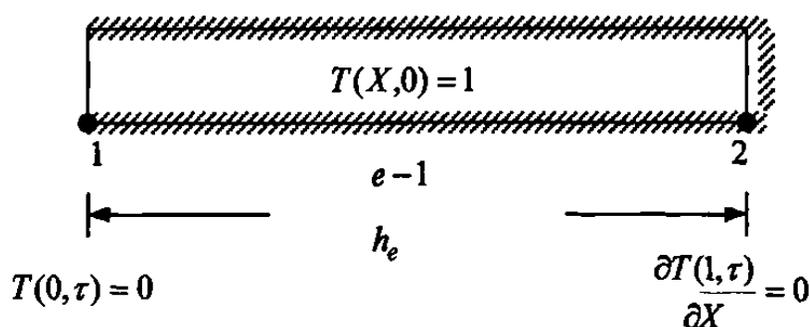
$$[M^e] \left\{ \dot{T} \right\} + [K] \{T\} = \{F\} \quad (3.6 a)$$

donde

$$M_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$

I) Para el caso de un elemento lineal



$$\psi_1^e(\bar{X}) = 1 - \frac{X}{h_e} \quad \psi_2^e(X) = \frac{\bar{X}}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{1}{h_e} \quad \frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{1}{h_e}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en la ecuación (3.6 a).

$$h_e \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia (α) de aproximación (3.7)

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix} h_e + \alpha\Delta\tau & h_e - \alpha\Delta\tau \\ 3 & h_e \\ h_e - \alpha\Delta\tau & h_e + \alpha\Delta\tau \\ 6 & h_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} h_e - (1-\alpha)\Delta\tau & h_e + (1-\alpha)\Delta\tau \\ 3 & h_e \\ h_e + (1-\alpha)\Delta\tau & h_e - (1-\alpha)\Delta\tau \\ 6 & h_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

donde

$$Q_i = \alpha(Q_i^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^1)_s$$

Condiciones de frontera

$$(T_1)_s = 0 \quad \text{por que} \quad T(0, \tau) = 0$$

$$(Q_2^1)_s = 0 \quad \text{por que} \quad \frac{\partial T(1, \tau)}{\partial X} = 0 \quad Q_3 = \left(a \frac{\partial T}{\partial X} \right) \Big|_{X_B} = 0$$

Condiciones iniciales

$$(T_1)_0 = 1, \quad (T_2)_0 = 1 \quad \text{en} \quad \tau = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_e + \frac{\alpha \Delta \tau}{3} & h_e - \frac{\alpha \Delta \tau}{6} \\ h_e - \frac{\alpha \Delta \tau}{6} & h_e + \frac{\alpha \Delta \tau}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} h_e - (1-\alpha)\Delta\tau & h_e + (1-\alpha)\Delta\tau \\ h_e + (1-\alpha)\Delta\tau & h_e - (1-\alpha)\Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{3} h_e + \alpha \frac{\Delta\tau}{h_e} \right) (T_2)_{s+1} = \left[\frac{1}{3} h_e - (1-\alpha) \frac{\Delta\tau}{h_e} \right] (T_2)_s \quad (\text{A})$$

para los incrementos de tiempo crítico $\Delta\tau_{cr}$ se obtiene primero el λ_{max} asociado con:

$$-\lambda [M]\{T\} + [K]\{T\} = 0$$

$$\frac{-\lambda h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{-\lambda h_e T_2}{6} - \frac{T_2}{h_e} = 0 \quad \lambda = \frac{-6}{(h_e)^2}$$

$$\frac{-\lambda h_e T_2}{3} - \frac{T_2}{h_e} = 0 \quad \lambda = \frac{3}{(h_e)^2}$$

para $h_e = 1$, $\alpha = 0$

$$\lambda_{max} = 3$$

$$\Delta\tau_{cr} = \frac{2}{(1-2\alpha)\lambda_{max}} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto ($\Delta\tau_{cr} = 0.6667$) para que la solución de la ecuación de diferencias hacia adelante (A) sea estable, los incrementos de tiempo deben de ser menores que ($\Delta\tau_{cr} = 0.6667$), de otra manera la solución será inestable.

Solución de la ecuación (A) para $h_e = 1$

$$\left(\frac{1}{3}h_e + \alpha \frac{\Delta\tau}{h_e}\right)(T_2)_{s+1} = \left[\frac{1}{3}h_e - (1-\alpha) \frac{\Delta\tau}{h_e}\right](T_2)_s \quad (A)$$

TABLA 3.1a

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento lineal.

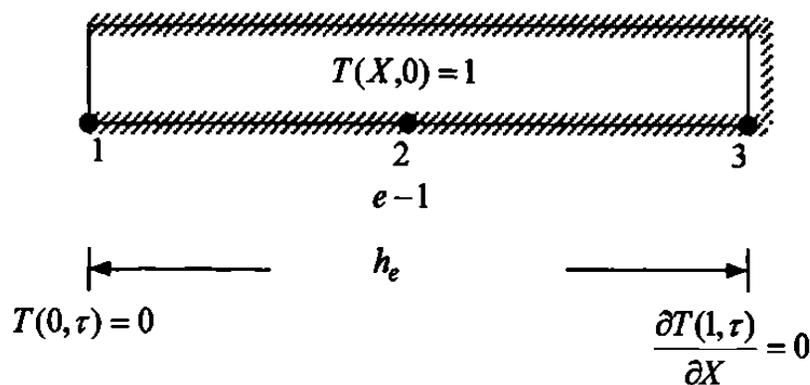
Tiempo	T_2	T_2	T_2	T_2
$\Delta\tau$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.5$	Solución exacta
0	1	1	1	1
0.05	0.85	0.8696	0.8605	0.9969
0.10	0.7225	0.7561	0.7404	0.9493
0.15	0.6141	0.6575	0.6371	0.8642
0.20	0.5220	0.5718	0.5482	0.7723
0.25	0.4437	0.4972	0.4717	0.6854
0.30	0.3771	0.4323	0.4059	0.6068
0.35	0.3206	0.3759	0.3492	0.5367
0.40	0.2724	0.3269	0.3004	0.4745
0.45	0.2315	0.2843	0.2584	0.4119
0.50	0.1967	0.2472	0.2223	0.3708

II) Para el caso de un elemento cuadrático (Ejemplo 3.1)

$$[M^1] \left\{ \dot{T} \right\} + [K] \{T\} = \{Q\} \quad (3.6 a)$$

$$M_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$



$$\psi_1^e(\bar{X}) = \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_2^e(\bar{X}) = \frac{4\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_3^e(\bar{X}) = -\frac{\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_3^e}{dX} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en la ecuación(3.6 a).

$$[M^e] = \frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad [K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia α de aproximación (3.7)

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e}\alpha\Delta\tau & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e}\alpha\Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e}\alpha\Delta\tau \\ -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e}\alpha\Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau \\ -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

donde

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^1)_s$$

Condiciones frontera.

$$(U_1)_s = 0 \quad \text{por que} \quad u(0, \tau) = 0$$

$$\bar{Q}_2 = 0$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha(Q_3^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_3^1)_s$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha \left\{ \left(\frac{\partial T_3}{\partial X} \right)_{x_B} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ \left(\frac{\partial T_3}{\partial X} \right)_{x_B} \right\}_s = 0$$

Condiciones iniciales.

$$(T_2)_0 = 1, \quad (T_3)_0 = 1 \quad \text{en} \quad \tau = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4h_e + \frac{7}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \alpha \Delta \tau \\ \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \tau & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau \\ -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \alpha \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{30} \alpha \Delta \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} (1-\alpha) \Delta \tau \\ \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau \\ -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} (1-\alpha) \Delta \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s + \Delta \tau \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Simplificando el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{3h_e} \alpha \Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta\tau & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e} \alpha \Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{3h_e} (1-\alpha) \Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e} (1-\alpha) \Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e} (1-\alpha) \Delta\tau & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{3h_e} (1-\alpha) \Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s$$

Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.05$

$$\begin{bmatrix} 0.6666 & 0 \\ 0 & 0.1916 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1333 \\ 0.1333 & 0.7499 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s$$

TABLA 3.1b

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento cuadrático.

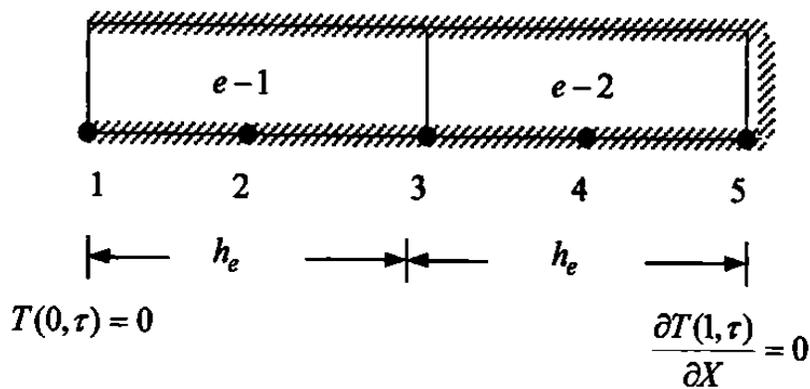
Tiempo	T_2	T_3	T_3
$\Delta\tau$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.5$	Solución exacta
0	1	1	1
0.05	0.8000	1.087	0.9969
0.10	0.6972	0.9819	0.9493
0.15	0.6146	0.8692	0.8642
0.20	0.5425	0.7676	0.7723
0.25	0.4789	0.6777	0.6854
0.30	0.4228	0.5983	0.6068
0.35	0.3732	0.5282	0.5367
0.40	0.3295	0.4663	0.4745
0.45	0.2909	0.4116	0.4119
0.50	0.2568	0.3634	0.3708

III) Para el caso de dos elemento cuadrático (Ejemplo 3.1).

$$[M^{le}] \left\{ \dot{T} \right\} + [K^e] \{T\} = \{Q^e\} \quad (3.6 a)$$

$$M_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \psi_i \psi_j dx$$

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$



$$\psi_1^e(\bar{X}) = \left(1 - \frac{X}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2X}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_2^e(\bar{X}) = \frac{4\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_3^e(X) = -\frac{\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_3^e}{dX} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$