

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en (3.6 a).

$$[M^e] = \frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1^1 \\ \dot{T}_2^1 \\ \dot{T}_3^1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

Ensamble de elementos.(Balance de la variable primaria)

$$\dot{T}_1^1 = \dot{T}_1$$

$$\dot{T}_2^1 = \dot{T}_2$$

$$\dot{T}_3^1 = \dot{T}_1^2 = \dot{T}_3$$

$$\dot{T}_2^2 = \dot{T}_4$$

$$\dot{T}_3^2 = \dot{T}_5$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bullet \\ T_1 \\ \bullet \\ T_2 \\ \bullet \\ T_3 \\ \bullet \\ T_4 \\ \bullet \\ T_5 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia (α) de aproximación (3.7)

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{4h_e}{30} + \frac{7}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
\frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
-\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{8h_e}{30} + \frac{14}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{\alpha \Delta \tau}{30} \\
0 & 0 & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} \\
0 & 0 & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e}
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}_{s+1}$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
\frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
-\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{8h_e}{30} - \frac{14}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} \\
0 & 0 & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} \\
0 & 0 & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e}
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}_s + \Delta \tau \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^e)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^e)_s$$

Condiciones frontera.

$$(T_1)_s = 0 \quad \bar{Q}_2 = 0, \quad \bar{Q}_3 = 0, \quad \bar{Q}_4 = 0, \quad \bar{Q}_5 = 0$$

Condiciones iniciales.

$$(T_2)_0 = 1, \quad (T_3)_0 = 1, \quad (T_4)_0 = 1, \quad (T_5)_0 = 1$$

Sustituimos las condiciones frontera y las condiciones iniciales en el sistema de ecuaciones algebraicas para ($h_e = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.05$).

$$\begin{bmatrix} 0.533 & -0.1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.366 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.533 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.166 & 0 & 0 \\ 0.166 & -0.1 & 0.166 & -0.033 \\ 0 & 0.166 & 0 & 0.166 \\ 0 & -0.033 & 0.166 & -0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}_s$$

TABLA 3.1c

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para dos elementos cuadráticos.

Tiempo $\Delta\tau$	T_2	T_3	T_4	T_5	Solución Exacta T_5
0	1	1	1	1	1
0.05	0.4903	0.9488	0.9891	0.9941	0.9969
0.1	0.4256	0.6889	0.9151	0.9547	0.9493
0.15	0.3361	0.6445	0.7998	0.8825	0.8642
0.20	0.3025	0.5395	0.7212	0.7626	0.7723
0.25	0.2607	0.4914	0.6287	0.6925	0.6854
0.30	0.2330	0.4241	0.5618	0.5998	0.6068
0.35	0.2039	0.3810	0.4923	0.5385	0.5367
0.40	0.1813	0.3324	0.4377	0.4701	0.4745
0.45	0.1594	0.2964	0.3849	0.4192	0.4194
0.50	0.1414	0.2601	0.3413	0.3678	0.3708

Ejemplo 3.2 Una barra delgada a una temperatura inicial de (θ_1) , aislada por todos lados, menos por uno de sus extremos, por el que intercambia calor con el medio ambiente. La barra tiene una longitud (L) , determine la distribución de temperaturas.

Datos:

$$\theta_1 = \text{Temperatura inicial} = 100^\circ F$$

$$\theta_\infty = \text{Temperatura del medio ambiente} = 1600^\circ F$$

$$\beta = \text{Coeficiente de transferencia de calor por convección} = 5 \frac{\text{Btu}}{\text{hr-ft}^2\text{-}^\circ F}$$

$$k = \text{Coeficiente de transferencia de calor por conducción} = 0.54 \frac{\text{Btu}}{\text{hr-ft-}^\circ F}$$

$$C_p = \text{Calor específico} = 0.2 \frac{\text{Btu}}{\text{Lb}_m\text{-}^\circ F}$$

$$\rho = \text{Densidad} = 144 \frac{\text{Lb}_m}{\text{ft}^3}$$

$$L = \text{Longitud de la barra} = 1 \text{ ft}$$

$$\xi = \text{Difusividad térmica} = \frac{k}{\rho C}$$

$$t = \text{Tiempo}$$

Ecuación diferencial del problema

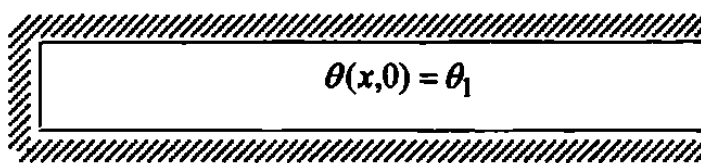
$$\xi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 < x < L$$

Condiciones de frontera

$$\theta(x, 0) = \theta_1 \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0 \quad t > 0$$

$$-k \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = \beta(\theta - \theta_\infty) \quad t > 0$$



$$\frac{\partial \theta(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$-k \frac{\partial \theta(L,t)}{\partial x} = \beta(\theta - \theta_0)$$

Normalizando

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$X = \frac{x}{L}$$

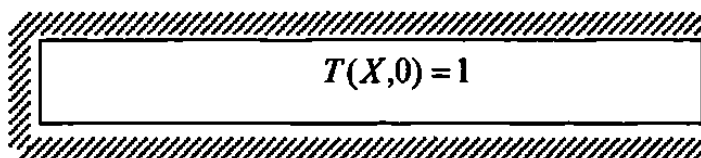
La ecuación diferencial y las condiciones de frontera del problema se transforma en.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad 0 < X < 1$$

$$T(X,0) = 1 \quad 0 < X < 1$$

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial X} = 0 \quad \tau > 0$$

$$-k \frac{\partial T(L,\tau)}{\partial X} = \beta T(1,\tau) \quad \tau > 0$$



$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial X} = 0$$

$$-k \frac{\partial T(L,\tau)}{\partial X} = \beta T$$

El problema que se tiene es un caso especial de la ecuación (3.2 a) con $a = 1, b = 0, c_0 = 0, c_2 = 0, f = 0$. El modelo de elemento finito para (3.15) es dado por (3.6 a):

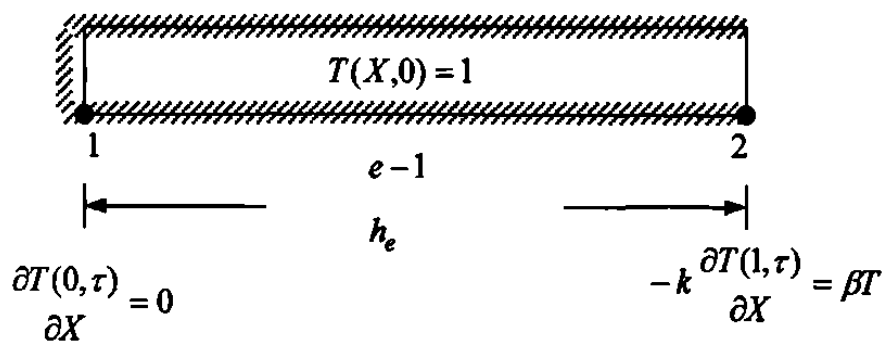
$$[M^1] \left\{ \dot{T} \right\} + [K] \{T\} = \{F\} \quad (3.6 a)$$

donde

$$M_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$

I) Para el caso de un elemento lineal (Ejemplo 3.2)



$$\psi_1^e(\bar{X}) = 1 - \frac{\bar{X}}{h_e} \quad \psi_2^e(X) = \frac{X}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{X}} = -\frac{1}{h_e} \quad \frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{1}{h_e}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculará (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en la ecuación (3.6 a)

$$h_e \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix}$$

Usando la familia (α) de aproximación (3.7)

$$\left([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e] \right) \{T^e\}_{s+1} = \left([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e] \right) \{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{h_e}{3} + \frac{\alpha\Delta\tau}{h_e} & \frac{h_e}{6} - \frac{\alpha\Delta\tau}{h_e} \\ \frac{h_e}{6} - \frac{\alpha\Delta\tau}{h_e} & \frac{h_e}{3} + \frac{\alpha\Delta\tau}{h_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} \frac{h_e}{3} - \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{h_e} & \frac{h_e}{6} + \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{h_e} \\ \frac{h_e}{6} + \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{h_e} & \frac{h_e}{3} - \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{h_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

donde

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^1)_s$$

Condiciones frontera.

$$Q_1 = \alpha(Q_1^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_1^1)_s$$

$$Q_1 = \alpha \left\{ \left(-a \frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_{X_A} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ \left(-a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_A} \right\}_s = 0$$

$$\bar{Q}_2 = \alpha(Q_2^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_2^1)_s$$

$$Q_2 = \alpha \left\{ - \left(-a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ - \left(-a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_s$$

$$\bar{Q}_2 = \alpha(-\beta T_2)_{s+1} + (1-\alpha)(-\beta T_2)_s$$

Condiciones iniciales.

$$(T_1)_0 = 1, \quad (T_2)_0 = 1 \quad \text{en} \quad \tau = 0$$

Sustituimos las condiciones frontera y las condiciones iniciales en el sistema de ecuaciones algebraicas.

$$\begin{bmatrix} \frac{h_e}{3} + \frac{\alpha \Delta \tau}{h_e} & \frac{h_e}{6} - \frac{\alpha \Delta \tau}{h_e} \\ \frac{h_e}{6} - \frac{\alpha \Delta \tau}{h_e} & \frac{h_e}{3} + \frac{\alpha \Delta \tau}{h_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} \frac{h_e}{3} - \frac{(1-\alpha)\Delta \tau}{h_e} & \frac{h_e}{6} + \frac{(1-\alpha)\Delta \tau}{h_e} \\ \frac{h_e}{6} + \frac{(1-\alpha)\Delta \tau}{h_e} & \frac{h_e}{3} - \frac{(1-\alpha)\Delta \tau}{h_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s + \Delta \tau \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{Q}_2 \end{Bmatrix}$$

a) Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta \tau = 0.01875$

$$\Delta \tau \bar{Q}_2 = -0.0468(T_2)_{s+1} - 0.0468(T_2)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.3427 & 0.1572 \\ 0.1572 & 0.3895 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.3239 & 0.1760 \\ 0.1760 & 0.2771 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s$$

TABLA 3.2a

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento lineal

Tiempo $\Delta \tau$	T_1	T_2	Solución exacta T_1	Solución exacta T_2
0	1	1	1	1
0.01875	1.1353	0.7051	1.0210	0.3500
0.03750	1.1900	0.5343	1.0082	0.2798
0.05625	1.2000	0.4300	1.0034	0.2379
0.07500	1.1865	0.3719	0.9950	0.2102
0.09375	1.1598	0.3326	0.9810	0.1904
0.11250	1.1266	0.3060	0.9616	0.1753
0.13125	1.0905	0.2867	0.9384	0.1633
0.15000	1.0533	0.2716	0.9127	0.1534
0.16875	1.0160	0.2590	0.8853	0.1450
0.18750	0.9797	0.2481	0.8572	0.1377

b) Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.0375$

$$\Delta\tau\bar{Q}_2 = -0.09375(T_2)_{s+1} - 0.09375(T_2)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.3520 & 0.1479 \\ 0.1479 & 0.4457 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.3145 & 0.1854 \\ 0.1854 & 0.2208 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s$$

Tabla 3.2aa

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento lineal

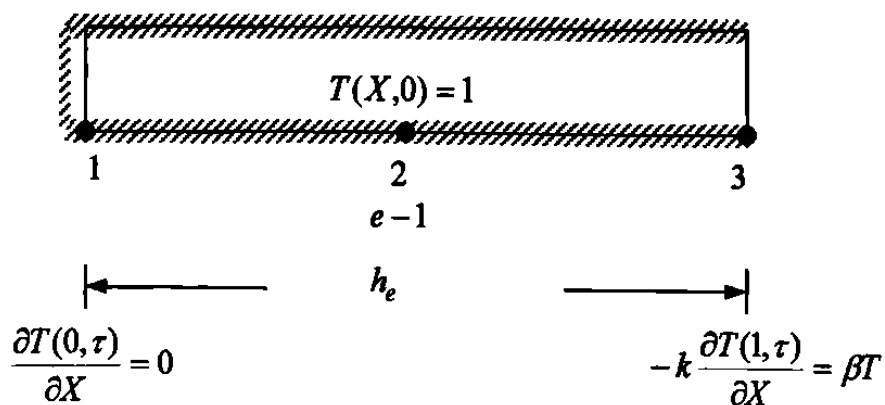
Tiempo $\Delta\tau$	T_1	T_2	Solución Exacta T_1	Solución Exacta T_2
0	1	1	1	1
0.03750	1.2053	0.5114	1.0082	0.2798
0.07500	1.1959	0.3579	0.9950	0.2102
0.11250	1.1312	0.2994	0.9616	0.1753
0.15000	1.055	0.2686	0.9127	0.1534
0.18750	0.9809	0.2466	0.8572	0.1377
0.22500	0.9105	0.2281	0.8005	0.1255
0.26250	0.8448	0.2114	0.7452	0.1152
0.30000	0.7838	0.1961	0.6904	0.1049
0.33750	0.7271	0.1819	0.6356	0.0946
0.3750	0.6745	0.1687	0.5808	0.0843

II) Para el caso de un elemento cuadrático (Ejemplo 3.2)

$$[M^1] \left\{ \dot{T} \right\} + [K] \{T\} = \{Q\} \quad (3.6 a)$$

$$M_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$



$$\psi_1^e(X) = \left(1 - \frac{X}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2X}{h_e}\right) \quad \frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_2^e(\bar{X}) = \frac{4\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right) \quad \frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_3^e(\bar{X}) = -\frac{\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right) \quad \frac{d\psi_3^e}{dX} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en (3.6 a).

$$[M^e] = \frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad [K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia α de aproximación (3.7)

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix} 4h_e + 7\alpha\Delta\tau & 2h_e - 8\alpha\Delta\tau & -h_e + \frac{1}{3} \alpha\Delta\tau \\ 30 + 3h_e & 30 - 3h_e & 30 + 3h_e \\ 2h_e - 8\alpha\Delta\tau & 16h_e + 16\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e - 8}{30} \alpha\Delta\tau \\ 30 + 3h_e & 30 - 3h_e & 30 + 3h_e \\ -h_e + \frac{1}{3} \alpha\Delta\tau & \frac{2h_e - 8}{30} \alpha\Delta\tau & \frac{4h_e + 7}{30} \alpha\Delta\tau \\ 30 + 3h_e & 30 - 3h_e & 30 + 3h_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} 4h_e - 7(1-\alpha)\Delta\tau & 2h_e + 8(1-\alpha)\Delta\tau & -h_e - \frac{1}{3} (1-\alpha)\Delta\tau \\ 30 - 3h_e & 30 + 3h_e & 30 - 3h_e \\ 2h_e + \frac{8}{30} (1-\alpha)\Delta\tau & \frac{16h_e - 16}{30} (1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e + 8}{30} (1-\alpha)\Delta\tau \\ 30 - 3h_e & 30 + 3h_e & 30 - 3h_e \\ -h_e - \frac{1}{3} (1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e + 8}{30} (1-\alpha)\Delta\tau & \frac{4h_e - 7}{30} (1-\alpha)\Delta\tau \\ 30 - 3h_e & 30 + 3h_e & 30 - 3h_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

donde

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^1)_s$$

Condiciones de frontera.

$$Q_1 = \alpha(Q_1^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_1^1)_s$$

$$Q_1 = \alpha \left\{ \left(-a \frac{\partial T_1}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ \left(-a \frac{\partial T_1}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_s = 0$$

$$\bar{Q}_2 = 0$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha(Q_3^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_3^1)_s$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha \left\{ \left(-a \frac{\partial T_3}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ \left(-a \frac{\partial T_3}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_s$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha \{ -\beta T_3 \}_{s+1} + (1-\alpha) \{ -\beta T_3 \}_s$$

Condiciones iniciales.

$$(T_1)_0 = 1, \quad (T_2)_0 = 1, \quad (T_3)_0 = 1 \quad \text{en} \quad \tau = 0$$

Sustituir las condiciones frontera y las condiciones iniciales en el sistema de ecuaciones algebraicas.

$$\begin{bmatrix} \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e} \alpha \Delta \tau \\ \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau \\ -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e} \alpha \Delta \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} 4h_e - 7 & 2h_e + 8 & -h_e - 1 \\ 30 - 3h_e & 30 + 3h_e & 30 - 3h_e \\ 2h_e + \frac{8}{30} & 16h_e - \frac{16}{30} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \\ -h_e - \frac{1}{30} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} \end{bmatrix} (1-\alpha)\Delta\tau \begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{Q}_3 \end{Bmatrix}$$

a) Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.01875$

$$\Delta\tau\bar{Q}_2 = -0.0468(T_2)_{s+1} - 0.0468(T_2)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.1552 & 0.0416 & -0.0302 \\ 0.0416 & 0.5833 & 0.0416 \\ -0.0302 & 0.0416 & 0.2020 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.1114 & 0.0916 & -0.0364 \\ 0.0916 & 0.4833 & 0.0916 \\ -0.0364 & 0.0916 & -0.0646 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s$$

TABLA 3.2b

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento cuadrático

Tiempo $\Delta\tau$	T_1	T_2	T_3	Solución exacta T_1	Solución exacta T_2	Solución exacta T_3
0	1	1	1	1	1	1
0.01875	0.8932	1.0425	0.5117	1.0210	1.0040	0.3500
0.03750	0.9524	0.9869	0.4143	1.0082	0.9702	0.2798
0.05625	0.9886	0.9359	0.3633	1.0034	0.9636	0.2379
0.07500	1.0012	0.8930	0.3280	0.9950	0.8761	0.2102
0.09375	0.9980	0.8559	0.3021	0.9810	0.8326	0.5812
0.11250	0.9850	0.8230	0.2824	0.9616	0.7932	0.1753
0.13125	0.9658	0.7930	0.2669	0.9384	0.7575	0.1636
0.15000	0.9429	0.7653	0.2541	0.9127	0.7248	0.1534
0.16875	0.9180	0.7392	0.2431	0.8853	0.6947	0.1450
0.18750	0.8920	0.7146	0.2335	0.8572	0.6666	0.1377

b) Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.0375$

$$\Delta\tau\bar{Q}_2 = -0.0937(T_2)_{s+1} - 0.0937(T_2)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.17708 & 0.01666 & -0.0270 \\ 0.01666 & 0.63330 & 0.01666 \\ -0.02708 & 0.01666 & 0.27070 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.08958 & 0.11666 & -0.0395 \\ 0.11666 & 0.43333 & 0.11666 \\ -0.03958 & 0.11666 & -0.0041 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s$$

TABLA 3.2bb

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento cuadrático

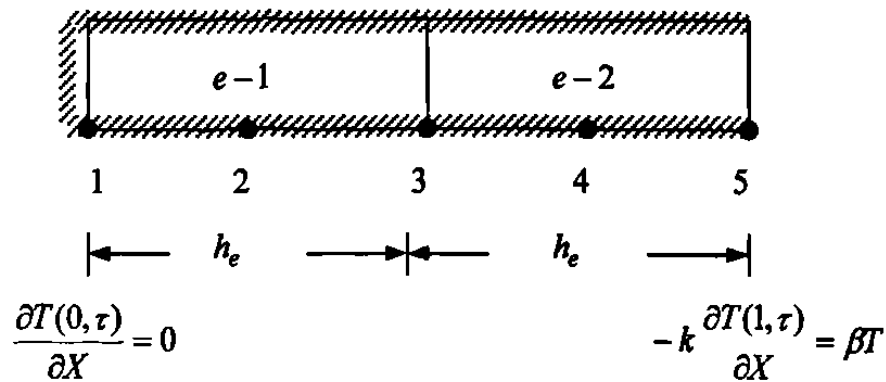
Tiempo $\Delta\tau$	T_1	T_2	T_3	Solución exacta T_1	Solución exacta T_2	Solución exacta T_3
0	1	1	1	1	1	1
0.0375	0.8903	1.0212	0.2955	1.0082	0.9702	0.2798
0.07500	1.0280	0.8807	0.3539	0.9950	0.8761	0.2102
0.11250	0.9853	0.8240	0.2714	0.9616	0.7932	0.1753
0.15000	0.9477	0.7635	0.2545	0.9127	0.7248	0.1534
0.18750	0.8938	0.7141	0.2319	0.8572	0.6666	0.1377
0.22500	0.8410	0.6680	0.2164	0.8005	0.6155	0.1255
0.26250	0.7892	0.6257	0.2019	0.7452	0.5694	0.1152
0.30000	0.7401	0.5861	0.1890	0.6904	0.5233	0.1049
0.33750	0.6937	0.5492	0.1770	0.6356	0.4772	0.0946
0.3750	0.6501	0.5146	0.1658	0.5808	0.4311	0.0843

III) Para dos elementos cuadráticos (Ejemplo 3.2)

$$[M^1] \left\{ \dot{T} \right\} + [K] \{T\} = \{Q\} \quad (3.6 a)$$

$$M_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$



$$\psi_1^e(\bar{X}) = \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_2^e(\bar{X}) = \frac{4\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_3^e(\bar{X}) = -\frac{\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_3^e}{dX} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en la ecuación (3.6 a).

$$[M^e] = \frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad [K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

Ensamble de elementos (Balance de la variable primaria)

$$\dot{T}_1^1 = \dot{T}_1 \quad \dot{T}_2^1 = \dot{T}_2$$

$$\dot{T}_3^1 = \dot{T}_1^2 = \dot{T}_3 \quad \dot{T}_2^2 = \dot{T}_4$$

$$\dot{T}_3^2 = \dot{T}_5$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \dot{T}_4 \\ \dot{T}_5 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia α de aproximación (3.7).

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
 \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
 -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{8h_e}{30} + \frac{14}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} \\
 0 & 0 & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} \\
 0 & 0 & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5
 \end{bmatrix}_{s+1}
 =$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
 \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
 -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{8h_e}{30} - \frac{14}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} \\
 0 & 0 & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} \\
 0 & 0 & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5
 \end{bmatrix}_s
 + \Delta\tau
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5
 \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^e)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^e)_s$$

Condiciones frontera.

$$\bar{Q}_1 = 0, \quad \bar{Q}_2 = 0, \quad \bar{Q}_3 = 0, \quad \bar{Q}_4 = 0$$

$$Q_5 = \alpha \left\{ - \left(-a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_A} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ - \left(a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_A} \right\}_s$$

$$\bar{Q}_5 = \alpha \{ -\beta T_5 \}_{s+1} + (1-\alpha) \{ -\beta T_5 \}_s$$

Condiciones iniciales.

$$(T_1)_0 = 1, \quad (T_2)_0 = 1, \quad (T_3)_0 = 1, \quad (T_4)_0 = 1, \quad (T_5)_0 = 1$$

a) Para $h_e = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.01875$

$$\Delta\bar{Q}_5 = -0.0468(T_5)_{s+1} - 0.0468(T_5)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.1552 & 0.0416 & -0.0302 & 0 & 0 \\ 0.0416 & 0.5833 & 0.0416 & 0 & 0 \\ -0.0320 & 0.0416 & 0.3104 & 0.0416 & -0.0302 \\ 0 & 0 & 0.0416 & 0.5833 & 0.0416 \\ 0 & 0 & -0.0320 & 0.0416 & 0.2020 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.1114 & 0.0916 & -0.0364 & 0 & 0 \\ 0.0916 & 0.4833 & 0.0916 & 0 & 0 \\ -0.0364 & 0.0916 & 0.2229 & 0.0916 & -0.0364 \\ 0 & 0 & 0.0916 & 0.4833 & 0.0916 \\ 0 & 0 & -0.0364 & 0.0916 & 0.0646 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{Q}_5 \end{Bmatrix}$$

TABLA 3.2c

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para dos elementos cuadráticos.

Tiempo $\Delta\tau$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Solución exacta T_1	Solución exacta T_2	Solución exacta T_3	Solución exacta T_4	Solución exacta T_5
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.01875	0.9880	1.0047	0.9464	1.0381	0.5205	1.0210	0.9936	1.0040	0.9174	0.3500
0.03750	1.0031	0.9950	0.9763	0.9917	0.4082	1.0082	1.0000	0.9702	0.7853	0.2798
0.05625	1.0056	0.9926	0.9950	0.9426	0.3587	1.0034	0.9916	0.9236	0.6960	0.2379
0.07500	1.0024	0.9937	1.0011	0.8989	0.3272	0.9950	0.9734	0.8761	0.6310	0.2102
0.09375	0.9985	0.9955	0.9992	0.8604	0.3038	0.9810	0.9501	0.8326	0.5812	0.1904
0.1125	0.9955	0.9968	0.9926	0.8264	0.2852	0.9616	0.9238	0.7932	0.5414	0.1753
0.13125	0.9938	0.9971	0.9830	0.7960	0.2699	0.9384	0.8959	0.7575	0.5086	0.1633
0.15000	0.9929	0.9965	0.9717	0.7687	0.2569	0.9127	0.8672	0.7248	0.4808	0.1534
0.16875	0.9926	0.9958	0.9593	0.7439	0.2456	0.8853	0.8383	0.6947	0.4567	0.1450
0.1875	0.9925	0.9926	0.9464	0.7213	0.2357	0.8572	0.8095	0.6666	0.4353	0.1377

b) Para $h_e = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.0375$

$$\Delta\tau\bar{Q}_5 = -0.09375(T_5)_{s+1} - 0.09375(T_5)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.1541 & -0.0666 & -0.0041 & 0 & 0 \\ -0.0666 & 0.4666 & -0.0666 & 0 & 0 \\ -0.0041 & -0.0666 & 0.3083 & -0.0666 & -0.0041 \\ 0 & 0 & -0.0666 & 0.4666 & -0.0666 \\ 0 & 0 & -0.0041 & -0.0666 & 0.2478 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.0208 & 0.1333 & -0.02916 & 0 & 0 \\ 0.1333 & 0.0666 & 0.1333 & 0 & 0 \\ -0.02916 & 0.1333 & -0.04166 & 0.1333 & -0.0291 \\ 0 & 0 & 0.1333 & 0.0666 & 0.1333 \\ 0 & 0 & -0.02916 & 0.1333 & -0.1145 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{Q}_5 \end{Bmatrix}$$

TABLA 3.2cc

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para dos elementos cuadráticos

Tiempo						Solución exacta	Solución exacta	Solución exacta	Solución exacta	Solución exacta
$\Delta\tau$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.0375	0.9958	0.9935	0.9615	0.8815	0.2113	1.0082	1.0000	0.9702	0.7853	0.2798
0.0750	0.9900	0.9765	0.9397	0.6603	0.4566	0.9950	0.9734	0.8761	0.6310	0.2102
0.1125	0.9618	0.9423	0.8014	0.6388	0.2187	0.9616	0.9238	0.7932	0.5414	0.1753
0.1500	0.9368	0.8884	0.7879	0.5388	0.3063	0.9127	0.8672	0.7248	0.4808	0.1534
0.1875	0.8726	0.8434	0.7002	0.5190	0.2068	0.8572	0.8095	0.6666	0.4353	0.1377
0.2250	0.8369	0.7857	0.6768	0.4636	0.2372	0.8005	0.7535	0.6155	0.3984	0.1255
0.2625	0.7763	0.7433	0.6163	0.4423	0.1894	0.7452	0.7002	0.5694	0.3668	0.1152
0.3000	0.7367	0.6930	0.5879	0.4053	0.1967	0.6904	0.6469	0.5233	0.3352	0.1049
0.3375	0.6852	0.6526	0.5426	0.3837	0.1702	0.6356	0.5936	0.4772	0.3036	0.0946
0.3750	0.6463	0.6094	0.5133	0.3557	0.1681	0.5808	0.5403	0.4311	0.2720	0.0843

CAPITULO 4

PROBLEMAS EN DOS DIMENSIONES MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

4.1 Introducción

El análisis del elemento finito de problemas en dos dimensiones involucra los mismos pasos básicos que se describieron para problemas en una dimensión en el capítulo (2).

El análisis es algo complicado porque los problemas en dos dimensiones son descritos por ecuaciones diferenciales parciales sobre regiones de geometrias complejas.

La frontera (Γ) de un dominio en dos dimensiones (Ω) es, en general, una curva.

Las mallas del elemento finito consisten de elementos en dos dimensiones, tales como triángulos, rectángulos y o cuadriláteros.

La posibilidad para representar dominios con geometrias irregulares por una colección de elementos finitos hace del método una herramienta practica para la solución de problemas de valores en la frontera, valor inicial, y eigenvalor en varios campos de la ingeniería.

4.2 Problemas con valores en la frontera

4.2.1 Ecuación modelo

Considere el problema de encontrar la solución (u) de la ecuación diferencial parcial de segundo orden.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00}u - f = 0 \quad (4.1)$$

4.2.2 Discretización del elemento finito

La representación de una región dada por un conjunto de elementos (discretización o generación de malla) es un paso importante en el análisis del elemento finito. La elección del tipo de elemento, número de elementos, y la densidad de elementos dependen del dominio de la geometría.

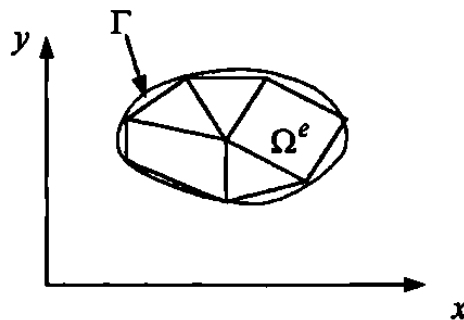


Figura 4.1

Discretización de un dominio por elementos triangulares y cuadriláteros.

4.2.3 Forma débil

Para desarrollar la forma débil, se considera un elemento típico arbitrario. Considere que (Ω^e) es dicho elemento, triangular o cuadrilátero.

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} w u - w f \right] dx dy$$

$$- \int_{\Gamma^e} w \left[n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] ds \quad (4.2 a)$$

$$q_n = \left[n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (4.2 b)$$

Por definición, (q_n) es positivo hacia fuera de la superficie cuando nos movemos en contra de las manecillas del reloj a lo largo de la frontera (Γ^e) . La variable secundaria (q_n) es de interés físico en muchos de los problemas. Por ejemplo, en el caso de transferencia de calor en un medio anisotrópico, (a_{ij}) son la conductividad del medio, y (q_n) es el flujo de calor normal a la frontera del elemento.

La forma débil (también llamado problema variacional) en (4.2 a) forma la base del modelo del elemento finito.

4.2.4 Modelo del elemento finito

La forma débil (4.2) requiere que la aproximación que se escoja para (u) debe ser al menos lineal en ambas (x, y) de tal manera que ningún término en la ecuación (4.2) sea cero.

$$u(x, y) \approx U^e(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x, y) \quad (4.3)$$

Sustituimos la aproximación del elemento finito (4.3) por (u) en la forma débil (4.2), y (ψ_i) por (w).

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e = f_i^e + Q_i^e \quad (4.4 \text{ a})$$

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy$$

$$f_i^e = \int_{\Omega^e} f \psi_i^e dx dy, \quad Q_i^e = \int_{\Gamma^e} q_n \psi_i^e ds \quad (4.4 \text{ b})$$

En notación matricial

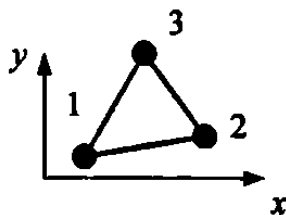
$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (4.4 \text{ c})$$

4.2.5 Funciones de interpolación

La aproximación del elemento finito $U^e(x, y)$ de $u(x, y)$ sobre un elemento (Ω^e) debe satisfacer las siguientes condiciones para que la solución aproximada converja:

1. U^e debe ser diferenciable, como es requerido en la forma débil del problema.
2. El polinomio usado para representar U^e debe ser completo.
3. Todos los términos en el polinomio deben ser linealmente independientes.

a) Elemento lineal triangular

**Figura 4.2a**

Elemento finito en dos dimensiones elemento con tres nodos

$$U^e(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \quad (4.5)$$

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\beta_i = y_j - y_k \quad (4.6)$$

$$\gamma_i = -(x_j - x_k)$$

donde $i \neq j \neq k$; y i, j y k permutan en orden natural

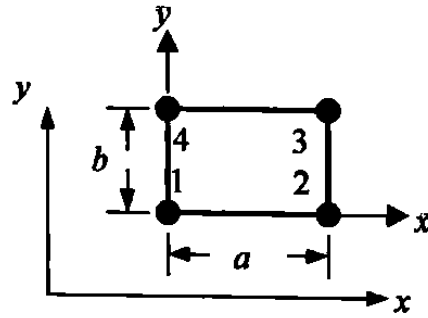
$$U^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \psi_i^e(x, y) \quad (4.7)$$

$$\psi_i^e = \frac{1}{2A_e} (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.8)$$

 A_e es el área del triángulo.

$$A_e = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

b) Elemento lineal rectangular

**Figura 4.2b**

Elemento finito en dos dimensiones elemento con cuatro nodos

$$U^e(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \quad (4.9)$$

$$U^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 u_i^e \psi_i^e \quad (4.10)$$

$$\psi_1^e = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \psi_2^e = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$\psi_3^e = \frac{x}{a} \frac{y}{b}, \quad \psi_4^e = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \quad (4.10 a)$$

4.2.6 Evaluación de los elementos de la matriz, y vectores

La evaluación exacta de los elementos de las matrices $[K^e]$ y $\{f^e\}$ en (4.4 b) son difícil en general. Cuando (a_{ij}) , (a_{00}) , y (f) son constantes, es posible evaluar las integrales exactamente con elementos triangulares y rectangulares. La integral en la frontera $\{Q^e\}$ de (4.4 b) puede ser evaluada siempre que (q_n) sea conocida

$$[K^e] = a_{00}[S^{00}] + a_{11}[S^{11}] + a_{12}[S^{12}] + a_{21}[S^{12}]^T + a_{22}[S^{22}] \quad (4.11)$$

$$S_{ij}^{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} \psi_{i,\alpha} \psi_{j,\beta} dx dy \quad (4.12)$$

con $\psi_{i,\alpha} \equiv \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$; $\psi_{i,0} = \psi_i$. Todas las matrices en (4.11) y

funciones de interpolación (4.12) deben ser definidas sobre un elemento.

ELEMENTOS DE MATRICES PARA UN ELEMENTO TRIANGULAR LINEAL

$$I_{00} = A \quad (\text{área del triángulo})$$

$$I_{10} = A\bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i, \quad I_{01} = A\bar{y}, \quad \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

$$I_{11} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9\bar{x}\bar{y} \right), \quad I_{20} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9\bar{x}^2 \right), \quad I_{02} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9\bar{y}^2 \right) \quad (4.13)$$

$$S_{ij}^{11} = \frac{1}{4A} \beta_i \beta_j, \quad S_{ij}^{12} = \frac{1}{4A} \beta_i \gamma_j, \quad S_{ij}^{22} = \frac{1}{4A} \gamma_i \gamma_j$$

$$S_{ij}^{00} = \frac{1}{4A} \left\{ \alpha_i \alpha_j + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \bar{x} + (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \bar{y} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{A} [I_{20}\beta_i\beta_j + I_{11}(\gamma_i\beta_j + \gamma_j\beta_i) + I_{02}\gamma_i\gamma_j] \} \quad (4.14)$$

$$f_i^e = \frac{1}{3} f_e A_e \quad (4.15)$$

Por ejemplo, cuando (a_{12}) , (a_{21}) , y (a_{00}) son cero, y (a_{11}) , (a_{22}) son constantes se tiene.

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4A_e} (a_{11}^e \beta_i^e \beta_j^e + a_{22}^e \gamma_i^e \gamma_j^e) \quad (4.16)$$

ELEMENTOS DE MATRICES PARA UN ELEMENTO RECTANGULAR LINEAL.

$$[S^{11}] = \frac{b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad [S^{12}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[S^{22}] = \frac{a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [S^{00}] = \frac{ab}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\{f\} = \frac{1}{4} fab \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}^T$$

EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES DE FRONTERA

Aquí se analizará la evaluación de las integrales del tipo

$$Q_i^e = \int_{\Gamma^e} q_n^e \psi_i^e(s) ds \quad (4.18)$$

donde (q_n^e) es una función conocida de la distancia (s) a lo largo de la frontera (Γ^e) .

No necesariamente se calculan dichas integrales cuando una porción de (Γ^e) no coincide con la frontera (Γ) del dominio total (Ω) . La evaluación de (Q_i^e) involucra el uso de funciones de interpolación (1-D) y variaciones conocidas de (q_n^e) en la frontera:

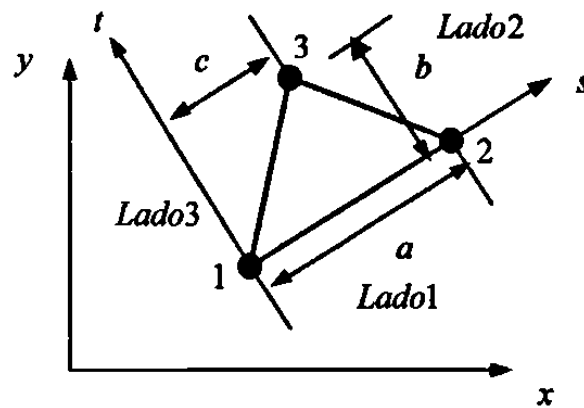


Figura 4.3

Elemento triangular lineal en coordenadas globales (x, y) y en coordenadas locales (s, t) .

$$Q_i^e = \int_{-2}^{-1} \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_{-3}^{-2} \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_{-1}^{-3} \psi_i(s) q_n(s) ds$$

$$Q_i^e \equiv Q_{i1}^e + Q_{i2}^e + Q_{i3}^e \quad (4.19)$$

por ejemplo

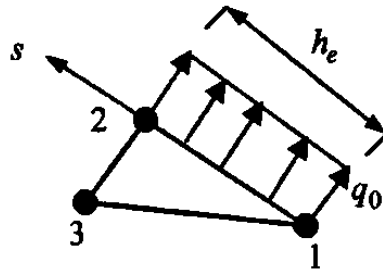
$$Q_1^e = \int_{\Gamma^e} q_n \psi_1(s) ds = \int_{-2}^{-1} (q_n)_{1-2} \psi_1 ds + 0 + \int_{-1}^{-3} (q_n)_{3-1} \psi_1 ds$$

La contribución del lado (2-3) es cero, porque (ψ_1) es cero en el lado (2-3) de un elemento triangular.

Para un elemento rectangular, (Q_1^e) tiene contribuciones de los lados (1-2) y (4-1), porque (ψ_1) es cero en los lados (2-3) y (3-4).

Ejemplos. Considere la evaluación de la integral de frontera (Q_i^e)

Caso I. $q(s) = q_0 = \text{constante}$; elemento lineal:



$$Q_i^e = \int_{-2}^2 \psi_i(s) ds \quad (i=1,2,3)$$

donde

$$\psi_1 = 1 - \frac{s}{h_e}, \quad \psi_2 = \frac{s}{h_e}, \quad \psi_3 = 0$$

$$Q_1^e = q_0 \int_0^{h_e} \left(1 - \frac{s}{h_e}\right) ds = \frac{1}{2} q_0 h_e$$

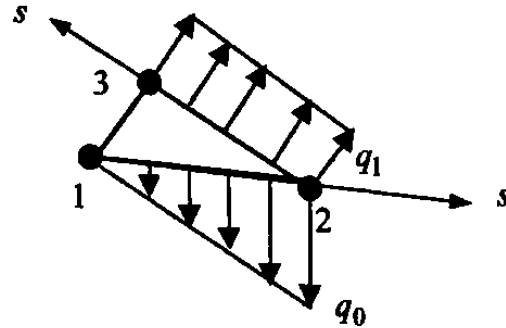
$$Q_1^e = Q_{11}^e$$

$$Q_2^e = q_0 \int_0^{h_e} \left(\frac{s}{h_e}\right) ds = \frac{1}{2} q_0 h_e$$

$$Q_2^e = Q_{21}^e$$

$$Q_3^e = 0$$

Caso II $q(s) = q_0 \frac{s}{h_e}$ como lo muestra la figura; elemento lineal:



$$Q_i^e = \int_{-2}^2 \psi_i(s) ds + \int_{2-3} \psi_i(s) q_n(s) ds \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$Q_i^e = \frac{q_0}{h_{12}} \int_0^{h_{12}} \psi_i s ds + q_1 \int_0^{h_{23}} \psi_i ds$$

donde

$$\psi_1 = 1 - \frac{s}{h_e}, \quad \psi_2 = \frac{s}{h_e}, \quad \psi_3 = 0$$

$$Q_1^e = \frac{q_0}{h_{12}} \int_0^{h_{12}} \left(1 - \frac{s}{h_{12}}\right) s ds = \frac{1}{6} q_0 h_{12}$$

$$Q_1^e = Q_{11}^e$$

$$Q_2^e = \frac{q_0}{h_{12}} \int_0^{h_{12}} \left(\frac{s}{h_e}\right) s ds + q_1 \int_0^{h_{23}} \left(1 - \frac{s}{h_{23}}\right) ds = \frac{1}{3} q_0 h_{12} + \frac{1}{2} q_1 h_{23}$$

$$Q_2^e = Q_{21}^e + Q_{22}^e$$

$$Q_3^e = q_1 \int_0^{h_{23}} \frac{s}{h_{23}} ds = \frac{1}{2} q_1 h_{23}$$

$$Q_3^e = Q_{32}^e$$

4.2.7 Ensamble de las ecuaciones del elemento

El ensamble de las ecuaciones de los elementos esta basada en los mismos dos principios que fueron usados en los problemas en una dimensión:

1. Continuidad de las variables primarias
2. Balance de las variables secundarias

Se ilustrara el procedimiento considerando una malla con dos elementos uno triangular y el otro cuadrilátero.

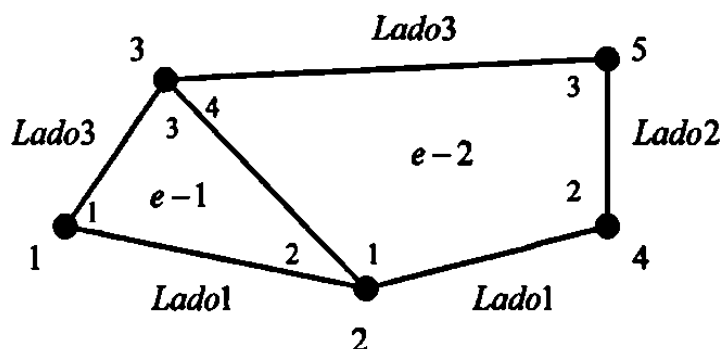


Figura 4.4

Ensamble de los coeficientes de las matrices del elemento finito:
ensamble de dos elementos.

Las ecuaciones de los dos elementos son escritas primero. Para el problema modelo a la mano, este tiene solo un grado de libertad por nodo.

Para el elemento triangular, las ecuaciones del elemento son de la forma.

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 = f_1^1 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

(4.20 a)

Para el elemento rectangular, las ecuaciones del elemento son dadas.

$$\begin{aligned}
K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 &= f_1^2 + Q_1^2 \\
K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 &= f_2^2 + Q_2^2 \\
K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 &= f_3^2 + Q_3^2 \\
K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 &= f_4^2 + Q_4^2
\end{aligned} \tag{4.20 b}$$

Continuidad de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1$$

$$u_2^1 = u_1^2 = U_2$$

$$u_3^1 = u_4^2 = U_3$$

$$u_2^2 = U_4$$

$$u_3^2 = U_5$$

Las ecuaciones ensambladas

$$\begin{bmatrix}
K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\
K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & (K_{23}^1 + K_{14}^2) & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\
K_{31}^1 & (K_{32}^1 + K_{41}^2) & (K_{33}^1 + K_{44}^2) & K_{42}^2 & K_{43}^2 \\
0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\
0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
U_1 \\
U_2 \\
U_3 \\
U_4 \\
U_5
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
f_1^1 \\
f_2^1 + f_1^2 \\
f_3^1 + f_4^2 \\
f_2^2 \\
f_3^2
\end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix}
Q_1^1 \\
Q_2^1 + Q_1^2 \\
Q_3^1 + Q_4^2 \\
Q_2^2 \\
Q_3^2
\end{Bmatrix}$$

se sustituyen las condiciones frontera y después se soluciona el sistema de ecuaciones para las variables primarias (U_i) y las variables secundarias (Q_i^e).

Ejemplo 4.1. Escriba la aproximación por elemento finito y la solución de la ecuación de Poisson, para la geometría que se muestra en la figura 4.5.

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f_0 \quad \text{en } \Omega$$

Las condiciones frontera del problema son.

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma$$

D). SOLUCIN POR ELEMENTOS TRIANGULARES LINEALES

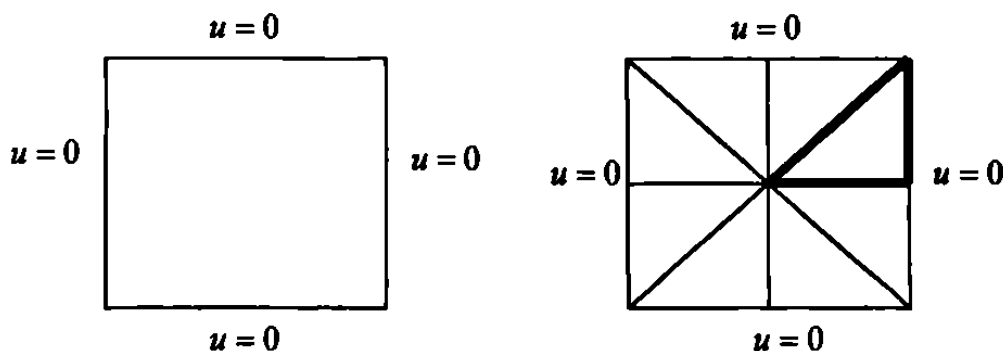


Figura 4.5

Dominio rectangular para la aplicación de la ecuación de poisson

Un problema posee simetría de la solución a traves de una línea solo cuando hay simetría de.

- a) La geometría.
- b) Las propiedades del material.
- c) La variación de la fuente.
- d) Las condiciones de frontera a traves de la línea.

El análisis del problema (4.1) solo se hará en el triángulo de la figura (4.5)

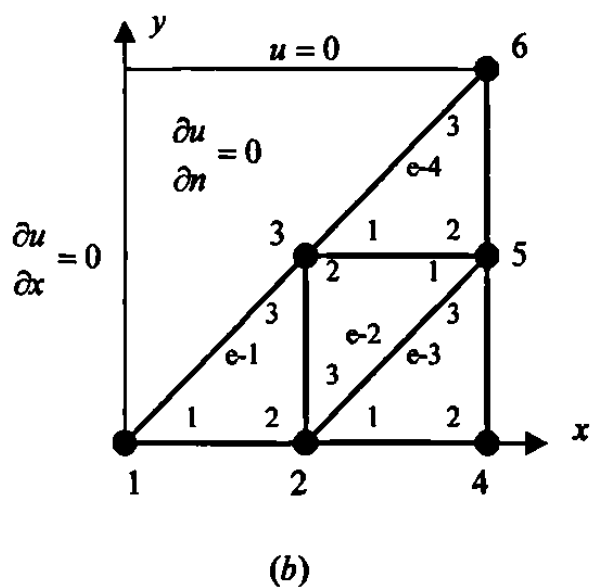
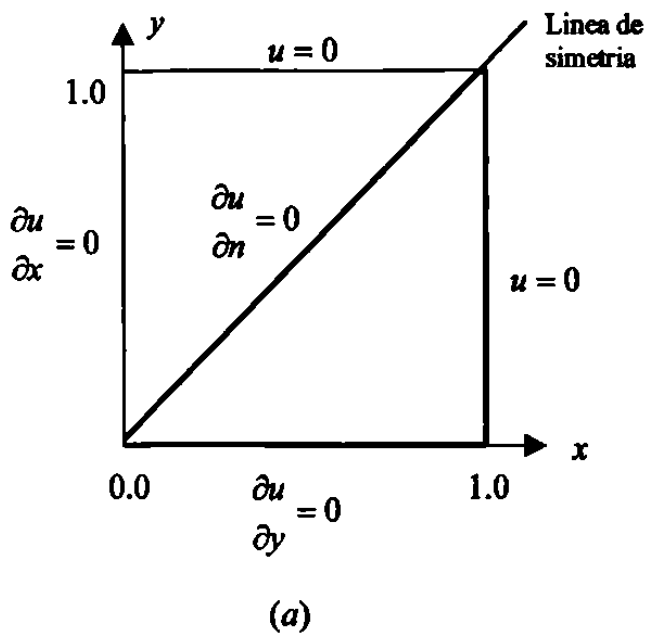


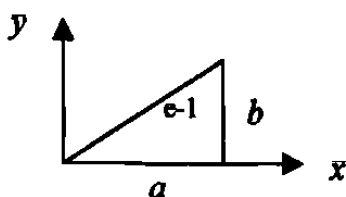
Figura 4.6

Subdominio rectangular para la aplicación de la ecuación de poisson

(a) Geometría y dominio computacional,

(b) Malla de elementos finitos lineales triangulares.

Considere el elemento uno, con su sistema de coordenadas locales (x, y) , suponemos que la longitud y la altura, son a y b , respectivamente.



Las coordenadas de los nodos del elemento son.

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (0,0), \quad (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (a,0), \quad (\bar{x}_3, \bar{y}_3) = (a,b)$$

Los parámetros α_i , β_i , y γ_i son dados por la ecuación (4.6).

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\beta_i = y_i - y_k \tag{4.6}$$

$$\gamma_i = -(x_j - x_k)$$

$$\alpha_1 = ab, \quad \beta_1 = -b, \quad \gamma_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = b, \quad \gamma_2 = -a$$

$$\alpha_3 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \gamma_3 = a$$

Los coeficientes (K_{ij}^e) y (f_i^e) son dados por las ecuaciones (4.15) y (4.16)

$$f_i^e = \frac{1}{3} f_e A_e \tag{4.15}$$

$$\{f^1\} = \frac{f_0 ab}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4A_e} (a_{11}^e \beta_i^e \beta_j^e + a_{22}^e \gamma_i^e \gamma_j^e) \quad (4.16)$$

$$[K^1] = \frac{1}{2ab} \begin{bmatrix} b^2 & -b^2 & 0 \\ -b^2 & a^2 + b^2 & -a^2 \\ 0 & -a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

Para la malla mostrada en la figura 4.6 (b), tenemos.

$$[K^1] = [K^2] = [K^3] = [K^4], \quad \{f^1\} = \{f^2\} = \{f^3\} = \{f^4\}$$

Si $(a = b = \frac{1}{2})$, los coeficientes de las matrices toman la forma.

$$[K^e] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{f^e\} = \frac{f_0}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Para los elementos triangulares, las ecuaciones para cada uno son de la forma.

Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 = f_1^1 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 = f_1^2 + Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 = f_2^2 + Q_2^2$$

$$K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 = f_3^2 + Q_3^2$$

Elemento(3)

$$K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3 + K_{13}^3 u_3^3 = f_1^3 + Q_1^3$$

$$K_{21}^3 u_1^3 + K_{22}^3 u_2^3 + K_{23}^3 u_3^3 = f_2^3 + Q_2^3$$

$$K_{31}^3 u_1^3 + K_{32}^3 u_2^3 + K_{33}^3 u_3^3 = f_3^3 + Q_3^3$$

Elemento(4)

$$K_{11}^4 u_1^4 + K_{12}^4 u_2^4 + K_{13}^4 u_3^4 = f_1^4 + Q_1^4$$

$$K_{21}^4 u_1^4 + K_{22}^4 u_2^4 + K_{23}^4 u_3^4 = f_2^4 + Q_2^4$$

$$K_{31}^4 u_1^4 + K_{32}^4 u_2^4 + K_{33}^4 u_3^4 = f_3^4 + Q_3^4$$

Continuidad de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1$$

$$u_2^1 = u_3^2 = u_1^3 = U_2$$

$$u_1^4 = u_3^1 = u_2^2 = U_3$$

$$u_2^3 = U_4$$

$$u_2^4 = u_1^2 = u_3^3 = U_5$$

$$u_3^4 = U_6$$

Ensamble del sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{33}^2 + K_{11}^3) & (K_{23}^1 + K_{32}^2) & K_{12}^3 & (K_{31}^2 + K_{13}^3) & 0 \\ K_{31}^1 & (K_{32}^1 + K_{23}^2) & (K_{33}^1 + K_{22}^2 + K_{11}^4) & 0 & (K_{21}^2 + K_{12}^4) & K_{13}^4 \\ 0 & K_{21}^3 & 0 & K_{22}^3 & K_{23}^3 & 0 \\ 0 & (K_{13}^2 + K_{31}^3) & (K_{12}^2 + K_{21}^4) & K_{32}^3 & (K_{11}^2 + K_{33}^3 + K_{22}^4) & K_{23}^4 \\ 0 & 0 & K_{31}^4 & 0 & K_{32}^4 & K_{33}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_3^2 + f_1^3 \\ f_3^1 + f_2^2 + f_4^1 \\ f_3^2 \\ f_1^2 + f_3^3 + f_2^4 \\ f_3^4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_3^1 + Q_2^2 + Q_1^4 \\ Q_2^3 \\ Q_1^2 + Q_3^3 + Q_2^4 \\ Q_3^4 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \frac{f_0}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_3^1 + Q_2^2 + Q_1^4 \\ Q_2^3 \\ Q_1^2 + Q_3^3 + Q_2^4 \\ Q_3^4 \end{Bmatrix}$$

La suma de las variables secundarias en los nodos globales (2),(3), y (5) son

$$Q_2^1 + Q_3^2 + Q_1^3 = \hat{Q}_2$$

$$Q_3^1 + Q_2^2 + Q_1^4 = \hat{Q}_3$$

$$Q_1^2 + Q_3^3 + Q_2^4 = \hat{Q}_5$$

en los nodos (1),(4), y (6), tenemos ($Q_1^1 \equiv \hat{Q}_1$), ($Q_2^3 \equiv \hat{Q}_4$), y ($Q_3^4 = \hat{Q}_6$).

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = f_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_3 \\ \hat{Q}_4 \\ \hat{Q}_5 \\ \hat{Q}_6 \end{bmatrix}$$

Las condiciones de frontera especificadas en los grados de libertad de la variable primaria son.

$$U_4 = U_5 = U_6 = 0$$

Los grados de libertad especificados en la variable secundaria son (todos por simetría).

$$\hat{Q}_1 = 0, \quad \hat{Q}_2 = 0, \quad \hat{Q}_3 = 0$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{Q}_4 \\ \hat{Q}_5 \\ \hat{Q}_6 \end{bmatrix}$$

Usando los valores numéricos de los coeficientes (K_{ij}^e) y (f_i^e) con ($f_0=1$), escribimos las ecuaciones condensadas para (U_1), (U_2), y (U_3) como:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 2 & -1.0 \\ 0 & -1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$U_1 = 0.31250 \quad U_2 = 0.22917 \quad U_3 = 0.17708$$

TABLA 4.1a

Comparación de resultados elemento finito solución por series

Coordenadas (x,y)	Solución Aproximada U	Solución Por series U
(0,0)	0.31250	0.2947
(0.5,0)	0.22917	0.2284
(0.5,0.5)	0.17708	0.1801

Las variables secundarias desconocidas (\hat{Q}_4), (\hat{Q}_5), y (\hat{Q}_6) pueden ser calculadas ya sea por las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{Bmatrix} \hat{Q}_4 \\ \hat{Q}_5 \\ \hat{Q}_6 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\hat{Q}_4 = -0.19717 \quad \hat{Q}_5 = -0.30208 \quad \hat{Q}_6 = -0.04166$$

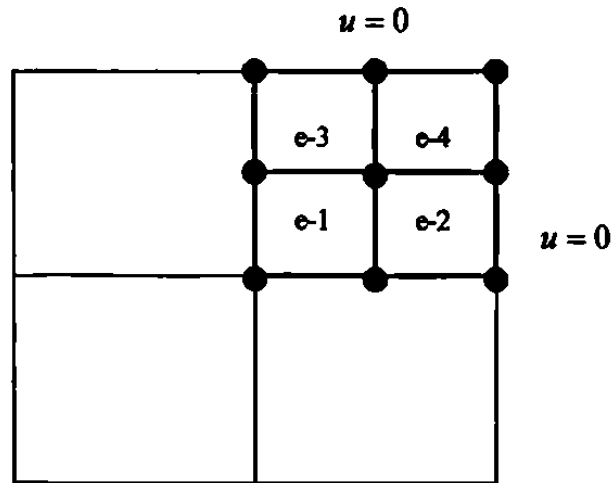
o por la definición (4.19)

$$Q_i^e = \int_{-2}^{-1} \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_{-1}^0 \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_{0}^1 \psi_i(s) q_n(s) ds$$

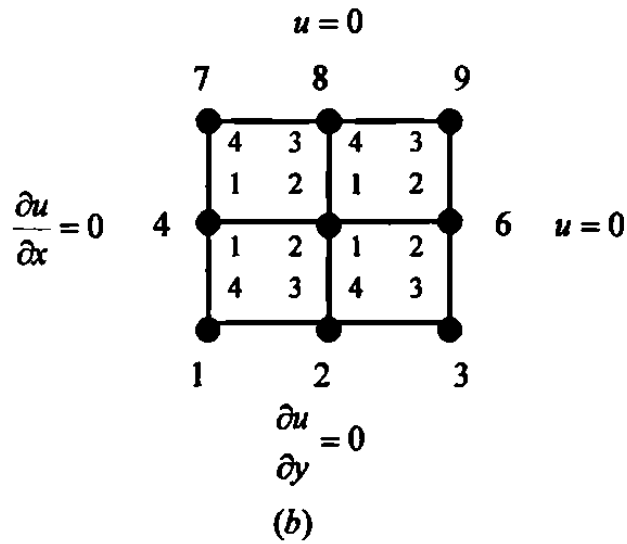
$$Q_i^e = Q_{i1}^e + Q_{i2}^e + Q_{i3}^e \quad (4.19)$$

II) SOLUCION POR ELEMENTOS RECTANGULARES LINEALES

Note que no podemos explotar la simetría a lo largo de la diagonal $x = y$ cuando usamos una malla rectangular.



(a)



(b)

Figura 4.7

Discretización del dominio para elementos lineales rectangulares (a), (b).

Como todos los elementos en la malla son idénticos, podemos calcular las matrices del elemento solo para uno, para el elemento(1).

$$\begin{aligned}\psi_1 &= (1-2\bar{x})(1-2\bar{y}), & \psi_2 &= 2\bar{x}(1-2\bar{y}) \\ \psi_3 &= 4\bar{x}\bar{y}, & \psi_4 &= (1-2\bar{x})2\bar{y}\end{aligned}\quad (4.10 \text{ a})$$

$$K_{ij}^e = \int_b^{0.5} \int_b^{0.5} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.4 \text{ b})$$

$$f_i^e = \int_b^{0.5} \int_b^{0.5} f_0 \psi_i dx dy \quad (4.4 \text{ b})$$

Evaluando estas integrales, obtenemos (ver (4.11): $[K^e] = a_{11}[S^{11}] + a_{22}[S^{22}]$)

$$[S^{11}] = \frac{b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$[S^{22}] = \frac{a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = a_{22} = 1$$

$$a = b = \frac{1}{2}$$

$$f_0 = 1$$

$$[K^e] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{f^e\} = \frac{1}{4} f_0 ab \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T$$

$$\{f^e\} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{F^e\} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{Bmatrix}$$

donde

$$Q_i^e = \int_{x_1}^{x_2} [q_n^e \psi_i(x, y)]_{y=0} dx + \int_{y_2}^{y_3} [q_n^e \psi_i(x, y)]_{x=a} dy \\ + \int_{x_3}^{x_4} [q_n^e \psi_i(x, y)]_{y=b} dx + \int_{y_4}^{y_1} [q_n^e \psi_i(x, y)]_{x=0} dy$$

La matriz de coeficientes de las ecuaciones condensadas para las variables primarias desconocidas puede ser directamente ensamblada.

Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 + K_{14}^1 u_4^1 = f_1^1 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 + K_{24}^1 u_4^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 + K_{34}^1 u_4^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

$$K_{41}^1 u_1^1 + K_{42}^1 u_2^1 + K_{43}^1 u_3^1 + K_{44}^1 u_4^1 = f_4^1 + Q_4^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 = f_1^2 + Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 = f_2^2 + Q_2^2$$

$$K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 = f_3^2 + Q_3^2$$

$$K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 = f_4^2 + Q_4^2$$

Elemento(3)

$$K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3 + K_{13}^3 u_3^3 + K_{14}^3 u_4^3 = f_1^3 + Q_1^3$$

$$K_{21}^3 u_1^3 + K_{22}^3 u_2^3 + K_{23}^3 u_3^3 + K_{24}^3 u_4^3 = f_2^3 + Q_2^3$$

$$K_{31}^3 u_1^3 + K_{32}^3 u_2^3 + K_{33}^3 u_3^3 + K_{34}^3 u_4^3 = f_3^3 + Q_3^3$$

$$K_{41}^3 u_1^3 + K_{42}^3 u_2^3 + K_{43}^3 u_3^3 + K_{44}^3 u_4^3 = f_4^3 + Q_4^3$$

Elemento(4)

$$K_{11}^4 u_1^4 + K_{12}^4 u_2^4 + K_{13}^4 u_3^4 + K_{14}^4 u_4^4 = f_1^4 + Q_1^4$$

$$K_{21}^4 u_1^4 + K_{22}^4 u_2^4 + K_{23}^4 u_3^4 + K_{24}^4 u_4^4 = f_2^4 + Q_2^4$$

$$K_{31}^4 u_1^4 + K_{32}^4 u_2^4 + K_{33}^4 u_3^4 + K_{34}^4 u_4^4 = f_3^4 + Q_3^4$$

$$K_{41}^4 u_1^4 + K_{42}^4 u_2^4 + K_{43}^4 u_3^4 + K_{44}^4 u_4^4 = f_4^4 + Q_4^4$$

Donde (K_{ij}) y (F_i) son los coeficientes globales.

$$K_{22}^1 + K_{11}^2 = K_{22}$$

$$K_{44}^1 + K_{11}^3 = K_{44}$$

$$K_{33}^1 + K_{44}^2 + K_{22}^3 + K_{11}^4 = K_{55}$$

$$K_{33}^2 + K_{22}^4 = K_{66}$$

$$K_{33}^3 + K_{44}^4 = K_{88}$$

$$K_{23}^1 + K_{14}^2 = K_{25}$$

$$K_{43}^1 + K_{12}^3 = K_{45}$$

$$K_{43}^2 + K_{12}^4 = K_{56}$$

$$K_{23}^3 + K_{14}^4 = K_{58}$$

Continuidad de la variable primaria

$$U_1 = u_1^1$$

$$U_2 = u_2^1 = u_1^2$$

$$U_3 = u_2^2$$

$$U_4 = u_4^1 = u_1^3$$

$$U_5 = u_3^1 = u_4^2 = u_2^3 = u_1^4 = u_4^2$$

$$U_6 = u_3^2 = u_2^4$$

$$U_7 = u_4^3 = u_1^3$$

$$U_8 = u_3^3 = u_4^4$$

$$U_9 = u_3^4$$

Ensamble del sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^1 & K_{24}^1 & (K_{23}^1 + K_{14}^2) & K_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 & K_{24}^2 & K_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & (K_{44}^1 + K_{11}^3) & (K_{43}^1 + K_{12}^3) & K_{13}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{31}^1 & (K_{32}^1 + K_{41}^2) & K_{42}^2 & (K_{34}^1 + K_{21}^3) & (K_{33}^1 + K_{44}^4 + K_{22}^3 + K_{11}^4) & (K_{43}^2 + K_{12}^4) & 0 & (K_{23}^3 + K_{14}^4) & K_{13}^4 & 0 \\
 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & 0 & (K_{34}^2 + K_{21}^4) & (K_{33}^2 + K_{22}^4) & 0 & K_{24}^4 & K_{23}^4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_{41}^3 & K_{42}^3 & 0 & K_{44}^3 & K_{43}^3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_{31}^3 & (K_{32}^3 + K_{41}^4) & K_{42}^4 & K_{34}^3 & (K_{33}^3 + K_{44}^4) & K_{43}^4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^4 & K_{32}^4 & 0 & K_{34}^4 & K_{33}^4 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8 \\
 U_9
 \end{bmatrix}
 =$$

$$\begin{bmatrix}
 f_1^1 \\
 f_2^1 + f_1^2 \\
 f_2^2 \\
 f_4^1 + f_1^3 \\
 f_3^1 + f_4^2 + f_2^3 + f_1^4 \\
 f_3^2 + f_2^4 \\
 f_4^3 \\
 f_3^3 + f_4^4 \\
 f_3^4
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 Q_1^1 \\
 Q_2^1 + Q_1^2 \\
 Q_2^2 \\
 Q_4^1 + Q_1^3 \\
 Q_3^1 + Q_4^2 + Q_2^3 + Q_1^4 \\
 Q_3^2 + Q_2^4 \\
 Q_4^3 \\
 Q_3^3 + Q_4^4 \\
 Q_3^4
 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 8 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 16 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & 8 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_4 \\ \bar{Q}_5 \\ \bar{Q}_6 \\ \bar{Q}_7 \\ \bar{Q}_8 \\ \bar{Q}_9 \end{Bmatrix}$$

Condiciones de frontera.

$$U_3 = 0, \quad U_6 = 0, \quad U_7 = 0, \quad U_8 = 0, \quad U_9 = 0$$

$$\bar{Q}_1 = 0, \quad \bar{Q}_2 = 0, \quad \bar{Q}_4 = 0, \quad \bar{Q}_5 = 0$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$U_1 = 0.31071$$

$$U_2 = 0.24107$$

$$U_4 = 0.24107$$

$$U_5 = 0.19286$$

TABLA 4.1b

Comparación de resultados elemento finito solución por series

Coordenadas (x, y)	Solución Aproximada U	Solución Por series U
(0,0)	0.31071	0.2947
(0.5,0)	0.24107	0.2284
(0,0.05)	0.24107	0.2293
(0.5,0.5)	0.19286	0.1801

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_6 \\ \bar{Q}_9 \end{Bmatrix}$$

La solución de las variables secundarias es.

$$\bar{Q}_3 = -0.16687 \quad \bar{Q}_6 = -0.26964 \quad \bar{Q}_9 = -0.12679$$

TABLA 4.1c

Comparación elemento finito solución por series

Coordenadas (x,y)	Para 4 elementos Triangulares U	Para 4 elementos Rectangulares U	Solución Por series U
(0,0)	0.31250	0.31071	0.2947
(0.5,0)	0.22917	0.24107	0.2284
(0,0.5)	0.23022*	0.24107	0.2293
(0.5,0.5)	0.17708	0.19286	0.1801*

* Valores interpolados

CAPITULO 5

EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El método de diferencias finitas obtiene un sistema de ecuaciones finito de una ecuación diferencial ordinaria o parcial discretizando el dominio; los valores de la solución aproximada son encontrados solo para un conjunto finito de puntos.

La diferenciación numérica, o aproximación por diferencias, se utiliza para evaluar las derivadas de una función por medio de sus valores dados en los puntos de una retícula.

Aproximación por diferencias centrales para la primera segunda y tercera derivada.

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (5.1)$$

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad (5.2)$$

$$f'''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} \quad (5.3)$$

Ejemplo 2.1 Considere una aleta rectangular como lo muestra la figura 2.1.

Determine la distribución de temperaturas.

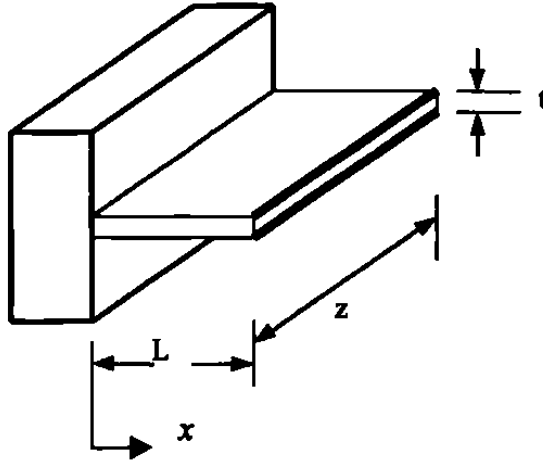


Figura 2.1 Aleta rectangular

Datos

T_0 = Temperatura en la base de la aleta = $250^{\circ}C$

T_{∞} = Temperatura del medio ambiente = $75^{\circ}C$

t = Espesor de la aleta = $0.254 \times 10^{-2} m$

k = Conductividad térmica del material de la aleta = $207.6 \frac{W}{m \cdot ^{\circ}C}$

β = Coeficiente de película = $283.9 \frac{W}{m^2 \cdot ^{\circ}C}$

p = Perímetro de la aleta

A = Area de sección transversal

$$m^2 = \frac{\beta p}{kA} = 1076.79$$

L = Longitud de la aleta = $1.524 \times 10^{-2} m$

h = Espacio entre los puntos de la retícula

$$h = \frac{L}{2} = 0.00762 m$$

Ecuación diferencial de una aleta rectangular.

$$-\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\beta p}{kA}(T - T_\infty) = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

Las condiciones frontera de la ecuación diferencial

$$T(0) = T_0 \quad (kA \frac{dT}{dx})_{x=L} = 0$$

haciendo un cambio de variable:

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\theta_0 = T_0 - T_\infty$$

$$m^2 = \frac{\beta p}{kA}$$

La ecuación diferencial y las condiciones de frontera toman la forma siguiente.

$$-\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

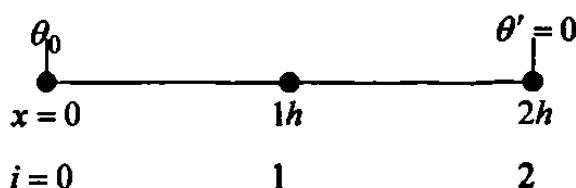
Condiciones frontera.

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

Aplicamos la aproximación por diferencias centrales (5.2) al primer término de la ecuación diferencial, con lo que obtenemos la ecuación en diferencias.

$$\frac{-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}}{h^2} + m^2\theta_i = 0$$

$$-\theta_{i-1} + (2 + m^2h^2)\theta_i - \theta_{i+1} = 0 \quad i = 1, \text{ hasta } N-1$$



Para ($i=1$)

$$-\theta_0 + (2 + m^2h^2)\theta_1 - \theta_2 = 0 \quad (1)$$

Para ($i=2$) Condición de frontera derecha.

Utilizamos la aproximación por diferencias hacia delante con base en un intervalo de longitud ($\frac{h}{2}$) de la ecuación de la aleta en ($x=L$).

$$-\left[\frac{\theta'(L) - \theta'(L - \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \right] + m^2\theta(L) = 0 \quad (A)$$

Por diferencias centrales

$$\theta'(L) = 0 \quad (B)$$

$$\theta'(L - \frac{h}{2}) = \frac{\theta(L) - \theta(L - h)}{h} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{h} \quad (C)$$

sustituimos (B) y (C) en (A).

$$-2\theta_1 + (2 + m^2 h^2)\theta_2 = 0 \quad (2)$$

Solucionando el sistema de ecuaciones .

$$\begin{bmatrix} (2 + m^2 h^2) & -1 \\ -2 & (2 + m^2 h^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_1 = 160.205 \quad \theta_2 = 155.374$$

$$\theta_1 = T_1 - T_\infty \quad \theta_2 = T_2 - T_\infty$$

$$T_1 = 235.2^\circ C \quad T_2 = 230.37^\circ C$$

TABLA 5.1

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $x \text{ m}$	Temperatura Solución aproximada $T^\circ C$	Temperatura Solución exacta $T^\circ C$
0	250	250
0.00762	235.20	234.95
0.01524	230.37	230.05

Ejemplo 2.2 Considere conducción de calor en estado estable en un alambre de sección transversal circular con una fuente de calor eléctrica. Supón que el radio del alambre es (R_o), este tiene una conductividad eléctrica, este transporta una corriente eléctrica de densidad (I) $amp\ cm^{-2}$. Durante la transmisión de una corriente eléctrica, algo de energía eléctrica es convertida en energía térmica. La rapidez de producción de calor por unidad de volumen es dada por ($q = \frac{I^2}{k_e}$). Suponga que la temperatura alcanzada en el alambre es suficientemente pequeña que la dependencia de la conductividad eléctrica o térmica en la temperatura puede ser despreciada.

Determine la distribución de temperaturas en el alambre.

Datos

T_3 = Temperatura en la superficie del conductor = $60^\circ c$

R_o = Radio del conductor = $2cm$

i = Corriente por el conductor = $300amp$

R = Resistencia del conductor = 0.0104Ω

L = Longitud del conductor = $10cm$

$$R = \rho \frac{L}{A} \qquad k = \frac{1}{\rho} \qquad I = \frac{i}{\pi(R_o)^2} \qquad q = \frac{I^2}{k}$$

$$\rho = .013\Omega - cm \qquad I = 23.87amp - cm^{-2}$$

$$k = 76.5\Omega^{-1} - cm^{-1} \qquad q = 7.448wtts - cm^{-3}$$

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) = q \quad 0 \leq r \leq R_o$$

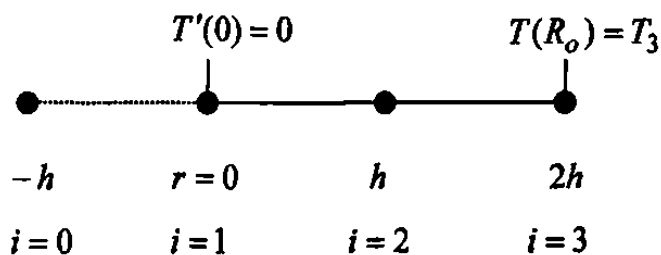
$$\left(kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r=0} = 0 \quad T(R_o) = T_o$$

Reescribimos la ecuación diferencial en la forma.

$$-k \frac{d^2T}{dr^2} - \frac{k}{r} \frac{dT}{dr} = q$$

Aplicamos la aproximación por diferencias centrales al primero y segundo termino del lado izquierdo de la ecuación diferencial.

$$-k \left[\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} \right] - \frac{k}{r_i} \left[\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} \right] = q \quad i = 1, 2$$



Para ($i = 1$)

$$-\frac{k}{h^2}(T_2 - 2T_1 + T_0) - \frac{k}{2hr_1}(T_2 - T_0) = q$$

La condición de la frontera izquierda, es equivalente a una condición simétrica en la frontera llamada *condición adiabática en la frontera* en el caso de la transferencia de calor ($T_0 = T_2$).

$$\left(\frac{2k}{h^2}\right)T_1 - \left(\frac{2k}{h^2}\right)T_2 = q$$

Para ($i = 2$)

$$-\frac{k}{h^2}(T_3 - T_2 + T_1) - \frac{k}{2hr_2}(T_3 - T_1) = q$$

$$-\left(\frac{k}{h^2} - \frac{k}{2hr_2}\right)T_1 + \left(\frac{2k}{h^2}\right)T_2 - \left(\frac{k}{h^2} + \frac{k}{2hr_2}\right)T_3 = q$$

El conjunto de ecuaciones se escribe en forma conjunta como.

$$\begin{bmatrix} \frac{2k}{h^2} & -\frac{2k}{h^2} \\ -\left(\frac{k}{h^2} - \frac{k}{2hr_2}\right) & \frac{2k}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ q + \left(\frac{k}{h^2} + \frac{k}{2hr_2}\right)T_3 \end{Bmatrix}$$

$$T_1 = 60.1721^\circ C$$

$$T_2 = 60.1234^\circ C$$

TABLA 5.2

Comparación diferencias finitas solución exacta

Radio r cm	Temperatura Solución aproximada $T^\circ C$	Temperatura Solución exacta $T^\circ C$
0	60.1721	60.09
1	60.1234	60.07
2	60	60

Ejemplo 2.3 Encuentre la distribución de temperatura en la aleta que muestra la fig.2.3.

Suponga que la temperatura en la base de la aleta es ($T_0 = 250^\circ F$) la conductividad térmica es ($k = 120 \text{ Btu} - \text{hr}^{-1} - \text{ft}^{-1} - ^\circ F^{-1}$), y el coeficiente de película ($\beta = 15 \text{ Btu} - \text{hr}^{-1} - \text{ft}^{-2} - ^\circ F^{-1}$). La temperatura del medio ambiente es ($T_\infty = 75^\circ F$).

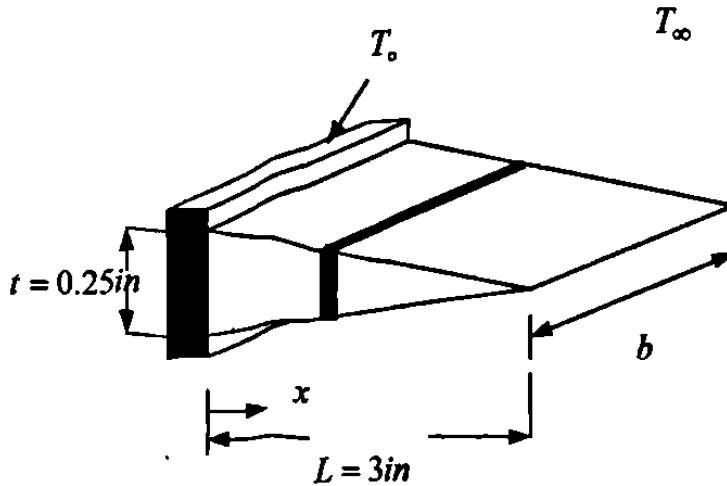


Figura 2.3 Aleta triangular

$$m = \frac{24\beta}{k} = 0.249 \text{ in}^{-1}$$

h = Espacio entre los puntos de la retícula

$$h = \frac{L}{3} = 1 \text{ in}$$

La ecuación diferencial y las condiciones frontera para esta aleta triangular son.

$$(3-x) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} - mT + mT_\infty = 0$$

$$T(0) = T_0 \qquad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

Haciendo un cambio de variable la ecuación diferencial y las condiciones de frontera toman la forma.

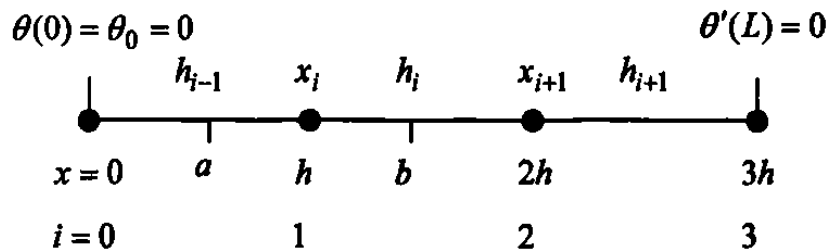
$$\theta = T - T_{\infty}$$

$$(3-x)\theta'' - \theta' - m\theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \theta'(L) = 0$$

La ecuación diferencial también puede tomar esta forma.

$$[(3-x)\theta']' - m\theta = 0$$



El método de integración es una forma natural para obtener ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes por partes. En este método, integramos la ecuación desde (a) hasta (b) .

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx - \int_a^b m\theta dx = 0 \quad (\text{A})$$

Para el primer término de la ecuación (A).

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = ((3-x)\theta') \Big|_a^b$$

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = (3-x)\theta' \Big|_b - (3-x)\theta' \Big|_a$$

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = (3-x)\theta' \Big|_{i+\frac{1}{2}} - (3-x)\theta' \Big|_{i-\frac{1}{2}} \quad (\text{B})$$

Aproximamos las derivadas mediante diferencias hacia atrás.

$$(3-x)\theta' \Big|_{i+\frac{1}{2}} = (3-x_i) \left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h_i} \right) \quad (\text{C})$$

$$(3-x)\theta' \Big|_{i-\frac{1}{2}} = (3-x_{i-1}) \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad (\text{D})$$

Sustituimos (C) y (D) en (B).

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = \left[\frac{(3-x_{i-1})}{h_{i-1}} \right] \theta_{i-1} - \left[\frac{(3-x_i)}{h_i} + \frac{(3-x_{i-1})}{h_{i-1}} \right] \theta_i + \left[\frac{(3-x_i)}{h_i} \right] \theta_{i+1} \quad (\text{E})$$

Para el segundo termino de la ecuación (A).

$$\int_a^b m\theta dx = \frac{1}{2} m(h_{i-1} + h_i)\theta_i \quad (\text{F})$$

Sustituimos las ecuaciones (E) y (F) en (A)

$$\left[\frac{(3-x_{i-1})}{h_{i-1}} \right] \theta_{i-1} - \left[\frac{(3-x_i)}{h_i} + \frac{(3-x_{i-1})}{h_{i-1}} \right] \theta_i + \left[\frac{(3-x_i)}{h_i} \right] \theta_{i+1} - \frac{1}{2} m(h_{i-1} + h_i)\theta_i = 0$$

la ecuación anterior se aplica para $i = 1, 2, \dots, N-1$

Para ($i = 1$)

$$\left[\frac{(3-x_0)}{h_0} \right] \theta_0 - \left[\frac{(3-x_1)}{h_1} + \frac{(3-x_0)}{h_0} \right] \theta_1 + \left[\frac{(3-x_1)}{h_1} \right] \theta_2 - \frac{1}{2} m(h_0 + h_1) \theta_1 = 0$$

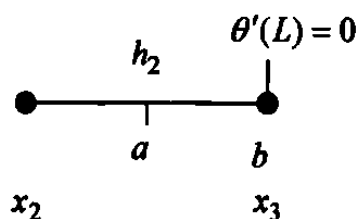
$$\left[\frac{(3-x_0)}{h_0} \right] \theta_0 - \left[\frac{(3-x_1)}{h_1} + \frac{(3-x_0)}{h_0} + \frac{1}{2} m(h_0 + h_1) \right] \theta_1 + \left[\frac{(3-x_1)}{h_1} \right] \theta_2 = 0 \quad (1)$$

Para ($i = 2$)

$$\left[\frac{(3-x_1)}{h_1} \right] \theta_1 - \left[\frac{(3-x_2)}{h_2} + \frac{(3-x_1)}{h_1} \right] \theta_2 + \left[\frac{(3-x_2)}{h_2} \right] \theta_3 - \frac{1}{2} m(h_1 + h_2) \theta_2 = 0$$

$$\left[\frac{(3-x_1)}{h_1} \right] \theta_1 - \left[\frac{(3-x_2)}{h_2} + \frac{(3-x_1)}{h_1} + \frac{1}{2} m(h_1 + h_2) \right] \theta_2 + \left[\frac{(3-x_2)}{h_2} \right] \theta_3 = 0 \quad (2)$$

Para el caso del punto frontera derecho



$$a = x_3 - \frac{h_2}{2}$$

$$b = x_3$$

Para el primer termino de la ecuación (A)

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = ((3-x)\theta') \Big|_a^b$$

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = (3-x)\theta' \Big|_3 - (3-x)\theta' \Big|_{3-\frac{1}{2}}$$

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = 0 - (3-x_2) \frac{(\theta_3 - \theta_2)}{h_2} \quad (G)$$

Para el segundo termino de la ecuación (A).

$$\int_a^b m\theta dx = \frac{1}{2} mh_3\theta_3 \quad (H)$$

Sustituimos (G) y (H) en (A).

$$-(3-x_2) \frac{(\theta_3 - \theta_2)}{h_2} - \frac{1}{2} mh_2\theta_3 = 0$$

$$\left[\frac{(3-x_2)}{h_2} \right] \theta_2 - \left[\frac{(3-x_2)}{h_2} + \frac{1}{2} mh_2 \right] \theta_3 = 0 \quad (3)$$

En resumen, las ecuaciones en diferencias (1),(2) y (3) en notación matricial son:

$$\begin{bmatrix} -\left[\frac{(3-x_1)}{h_1} + \frac{(3-x_0)}{h_0} + \frac{m(h_0+h_1)}{2} \right] & \frac{(3-x_1)}{h_1} & 0 \\ \frac{(3-x_1)}{h_1} & -\left[\frac{(3-x_2)}{h_2} + \frac{(3-x_1)}{h_1} + \frac{m(h_1+h_2)}{2} \right] & \frac{(3-x_2)}{h_2} \\ 0 & \frac{(3-x_2)}{h_2} & -\left[\frac{(3-x_2)}{h_2} + \frac{m(h_2)}{2} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$D = -\left(\frac{3-x_0}{h_0} \right) \theta_0$$

$$\begin{bmatrix} -5.25 & 2 & 0 \\ 2 & -3.25 & 1 \\ 0 & 1 & -1.125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -525 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones:

$$\theta_1 = 147.64$$

$$\theta_2 = 125$$

$$\theta_3 = 111.16$$

$$T_1 = 222.64^\circ F$$

$$T_2 = 200^\circ F$$

$$T_3 = 186^\circ F$$

TABLA 5.3 Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia desde la base x in	Solución aproximada $T^\circ F$	Solución exacta $T^\circ F$
0	250	250
1	222.64	218.75
2	200	191.12
3	186	166.72

Ejemplo 2.4 Considere flujo estable laminar de dos fluidos inmiscibles e incompresibles en una región de dos placas paralelas estacionarias bajo la influencia de un gradiente de presión.

Las velocidades en el fluido son ajustadas tal que la parte media inferior de la región esta llena con el fluido μ_1 (fluido mas denso y más viscoso) y la parte media superior esta llena con el fluido μ_2 (fluido menos denso y menos viscoso), como lo muestra la figura.

Queremos determinar la distribución de velocidades en cada región usando el método de diferencias finitas.

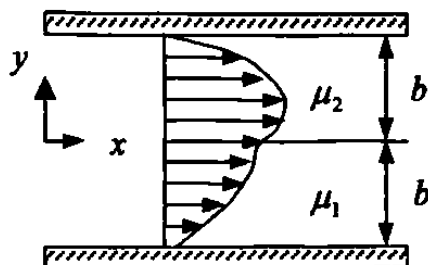


Figura 2.4 Flujo en una tubería

Las ecuaciones gobernantes para cada fluido son:

$$-\mu_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2} = f_0, \quad -\mu_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2} = f_0$$

Las condiciones frontera son:

$$u_1(-b) = 0, \quad u_1(0) = u_2(0), \quad u_2(b) = 0$$

donde $f_0 = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right)$ es el gradiente de presión.

Datos

$$h = \text{Espacio entre los puntos de la retícula} = 0.25m$$

$$b = 2h$$

$$L = 5000m$$

$$P_0 = 200kPa$$

$$P_L = 190kPa$$

$$\mu_1 = 0.01Pa - s$$

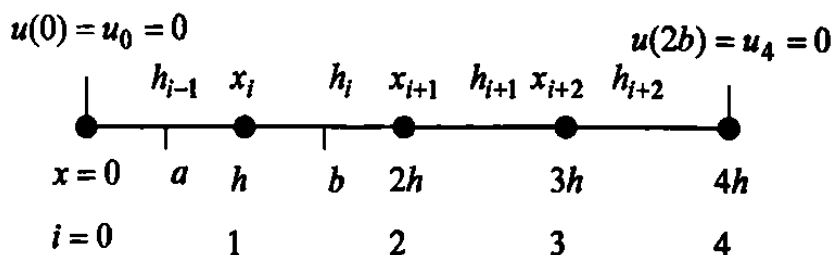
$$\mu_2 = 0.00035Pa - s$$

Ecuación diferencial del problema.

$$-\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = f_0$$

La ecuación diferencial también puede tomar esta forma.

$$-(\mu u')' = f_0$$



El método de integración es una forma natural para obtener ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes por partes. En este método, integramos la ecuación desde (a) hasta (b) .

$$-\int_a^b ((\mu u)') dx = \int_a^b f_0 dx \quad (\text{A})$$

Para el primer termino de la ecuación (A).

$$\begin{aligned} -\int_a^b (\mu u') dx &= -(\mu u') \Big|_a^b \\ -\int_a^b (\mu u') dx &= -(\mu u') \Big|_{i+\frac{1}{2}} + (\mu u') \Big|_{i-\frac{1}{2}} \\ -\int_a^b (\mu u') dx &= -\left[\mu_i \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} \right) \right] + \left[\mu_{i-1} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] \\ -\int_a^b (\mu u') dx &= -\left[\frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} \right] u_{i-1} + \left[\frac{\mu_i}{h_i} + \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} \right] u_i - \left[\frac{\mu_i}{h_i} \right] u_{i+1} \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Para el segundo termino de la ecuación (A).

$$\int_a^b f_0 dx = \frac{f_0}{2} (h_{i-1} + h_i) \quad (C)$$

Sustituimos las ecuaciones (B) y (C) en (A).

$$-\left[\begin{array}{c} \mu_{i-1} \\ h_{i-1} \end{array} \right] u_{i-1} + \left[\begin{array}{c} \mu_i + \mu_{i-1} \\ h_i + h_{i-1} \end{array} \right] u_i - \left[\begin{array}{c} \mu_i \\ h_i \end{array} \right] u_{i+1} = \frac{f_0}{2} (h_{i-1} + h_i)$$

La ecuación anterior se aplica para $i = 1, 2, \dots, N-1$

Para ($i = 1$)

$$-\left[\begin{array}{c} \mu_0 \\ h_0 \end{array} \right] u_0 + \left[\begin{array}{c} \mu_1 + \mu_0 \\ h_1 + h_0 \end{array} \right] u_1 - \left[\begin{array}{c} \mu_1 \\ h_1 \end{array} \right] u_2 = \frac{f_0}{2} (h_0 + h_1) \quad (1)$$

Para ($i = 2$)

$$-\left[\begin{array}{c} \mu_1 \\ h_1 \end{array} \right] u_1 + \left[\begin{array}{c} \mu_2 + \mu_1 \\ h_2 + h_1 \end{array} \right] u_2 - \left[\begin{array}{c} \mu_2 \\ h_2 \end{array} \right] u_3 = \frac{f_0}{2} (h_1 + h_2) \quad (2)$$

Para ($i = 3$)

$$-\left[\begin{array}{c} \mu_2 \\ h_2 \end{array} \right] u_2 + \left[\begin{array}{c} \mu_3 + \mu_2 \\ h_3 + h_2 \end{array} \right] u_3 - \left[\begin{array}{c} \mu_3 \\ h_3 \end{array} \right] u_4 = \frac{f_0}{2} (h_2 + h_3) \quad (3)$$

En resumen, las ecuaciones en diferencias (1),(2) y (3) en notación matricial son:

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{2\mu_1}{h} & -\frac{\mu_1}{h} & 0 \\ -\frac{\mu_1}{h} & \frac{\mu_1 + \mu_2}{h} & -\frac{\mu_2}{h} \\ 0 & -\frac{\mu_2}{h} & \frac{2\mu_2}{h} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2hf_0 \\ 2hf_0 \\ 2hf_0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.08 & -0.04 & 0 \\ -0.04 & 0.0414 & -0.0014 \\ 0 & -0.0014 & 0.0028 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones:

$$u_1 = 30.4 \frac{m}{s} \quad u_2 = 48.3 \frac{m}{s} \quad u_3 = 202.72 \frac{m}{s}$$

TABLA 5.4

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $y \text{ m}$	Velocidad Solución aproximada $u \frac{m}{s}$	Velocidad Solución exacta $u \frac{m}{s}$
0	0	0
0.25	30.40	30.40
0.50	48.30	48.28
0.75	202.72	202.67
1.0	0	0

Ejemplo 2.5a. Para el problema de la viga mostrada en la figura 2.5a determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados)

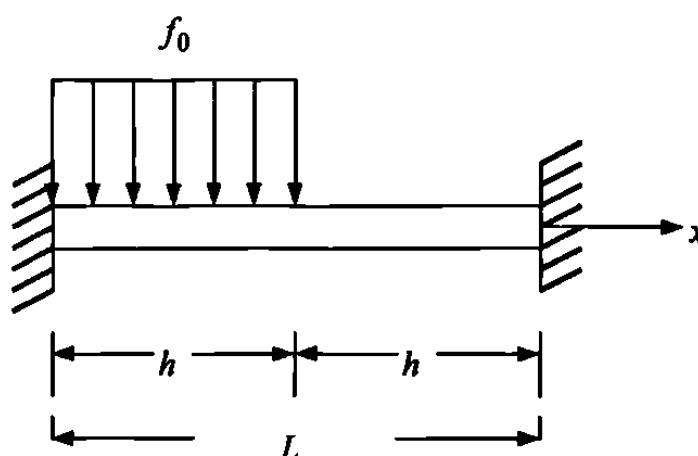


Figura 2.5a Flexión de una viga empotrada en los extremos

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f_0$$

$$b = EI = \text{cte.}$$

Datos:

$$L = 10m$$

$$f_0 = 400 \frac{N}{m}$$

$$E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$$

$$I = 20 \times 10^{-6} m^4$$

$$h = \text{Espacio entre los puntos de la retícula} = 5m$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = f_0$$

Las condiciones frontera para este problema son:

Para la frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y'(0) = y'_0 = 0$$

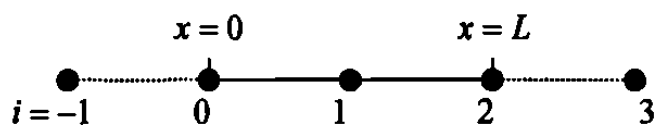
Para la frontera derecha.

$$y(L) = y_2 = 0$$

$$y'(L) = y'_2 = 0$$

La derivada (y'''') de la ecuación diferencial del problema se evalúa numéricamente mediante la aproximación por diferencias centrales.

$$\frac{EI}{h^4} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] = f(x_i) \quad i = 1, N-1$$



Para ($i = 1$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1)$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y_0 = 0$$

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$\frac{EI}{h^4} [7y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1) \quad (1)$$

Condición de frontera derecha.

$$y_2 = 0$$

$$y'_2 = \frac{y_3 - y_1}{2h} = 0$$

$$y_3 - y_1 = 0 \quad (2)$$

Solucionando el sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 7\left(\frac{EI}{h^4}\right) & \left(\frac{EI}{h^4}\right) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7(6400) & (6400) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -400 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = -0.0078m \quad y_3 = -0.0078m$$

TABLA 5.5a

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia x m	Deflexión Solución aproximada y m	Deflexión Solución exacta y m
5	-0.0078	-0.00128

Ejemplo 2.5b. Para el problema de la viga mostrada en la fig.2.5b, determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados)

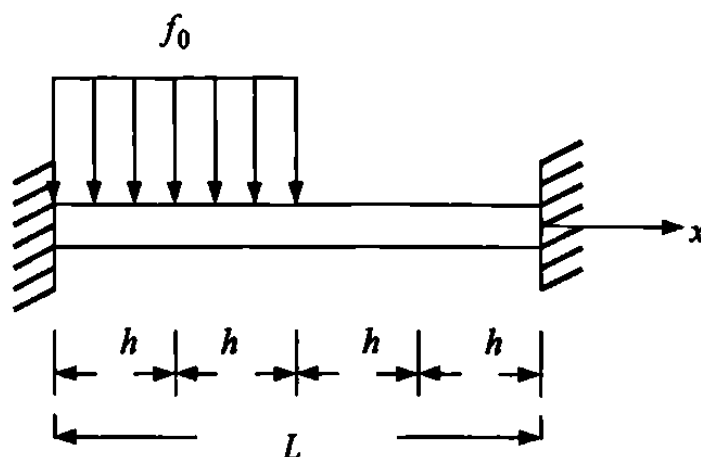


Figura 2.5b Flexión de una viga empotrada en los extremos

$h =$ Espacio entre los puntos de la retícula $= 2.5m$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = f_0$$

Las condiciones frontera para este problema son:

Para la frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y'(0) = y'_0 = 0$$

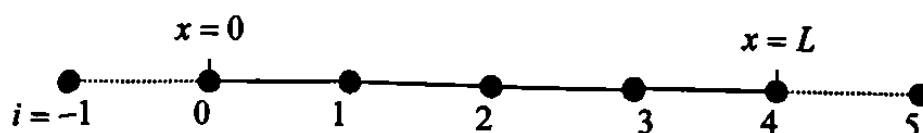
Para la frontera derecha.

$$y(L) = y_4 = 0$$

$$y'(L) = y'_4 = 0$$

La derivada (y''') de la ecuación diferencial del problema se evalúa numéricamente mediante la aproximación por diferencias centrales.

$$\frac{EI}{h^4} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] = f(x_i) \quad i = 1, N-1$$



Para ($i = 1$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1)$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y_0 = 0$$

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$\frac{EI}{h^4} [7y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1) \quad (1)$$

Para ($i = 2$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4] = f(x_2) \quad (2)$$

Para ($i = 3$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5] = f(x_3) \quad (3)$$

Condición de frontera derecha.

$$y_4(L) = y_4 = 0$$

$$y_4'(L) = y_4' = \frac{y_5 - y_3}{2h} = 0$$

$$y_5 - y_3 = 0 \quad (4)$$

Solucionando el sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 7 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 \\ -4 \frac{EI}{h^4} & 6 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & 0 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_0 \\ -f_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = -0.0020m$$

$$y_2 = -0.0029m$$

$$y_3 = -0.0014m$$

$$y_5 = -0.0014m$$

TABLA 5.5b

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $x \text{ m}$	Deflexión Solución aproximada $y \text{ m}$	Deflexión Solución exacta $y \text{ m}$
2.5	-0.0020	-0.00089
5.0	-0.0029	-0.00128
7.5	-0.0014	-0.00054

Ejemplo 2.5c. Para el problema de la viga mostrada en la fig.2.5c., determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados)

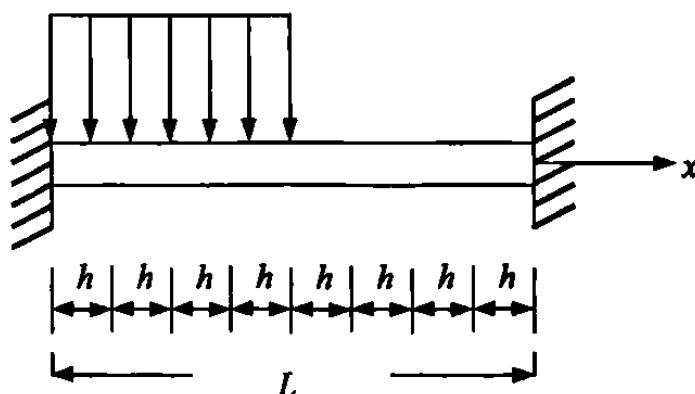


Figura 2.5c Flexión de una viga empotrada en los extremos

Ecuación diferencial del problema

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = f_0$$

Las condiciones frontera son:

Para la frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0 \quad y'(0) = y'_0 = 0$$

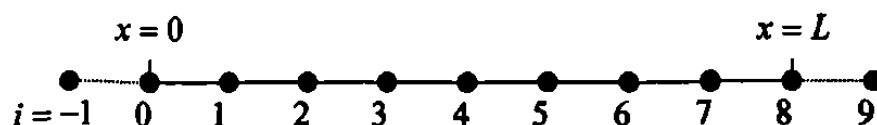
Para la frontera derecha.

$$y(L) = y_8 = 0 \quad y'(L) = y'_8 = 0$$

La derivada (y'') de la ecuación diferencial del problema se evalúa numéricamente mediante la aproximación por diferencias centrales.

$$\frac{EI}{h^4} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] = f(x_i) \quad i = 1, N-1$$

h = Espacio entre los puntos de la retícula = 1.25m



Para ($i = 1$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1)$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y_0 = 0$$

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$\frac{EI}{h^4} [7y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1) \quad (1)$$

Para ($i = 2$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4] = f(x_2) \quad (2)$$

Para ($i = 3$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5] = f(x_3) \quad (3)$$

Para ($i = 4$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6] = f(x_4) \quad (4)$$

Para ($i = 5$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7] = 0 \quad (5)$$

Para ($i = 6$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8] = 0 \quad (6)$$

Para ($i = 7$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9] = 0 \quad (7)$$

Condición de frontera derecha.

$$y_8(L) = y_8 = 0$$

$$y_8'(L) = y_8' = \frac{y_9 - y_7}{2h} = 0$$

$$y_9 - y_7 = 0$$

(8)

Solució del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 7 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 \frac{EI}{h^4} & 6 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & 6 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & 6 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_0 \\ -f_0 \\ -f_0 \\ -f_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = -0.0005m \quad y_3 = -0.0018m \quad y_5 = -0.0014m \quad y_7 = -0.0003m$$

$$y_2 = -0.0012m \quad y_4 = -0.0018m \quad y_6 = -0.0008m \quad y_9 = -0.0003m$$

TABLA 5.5c Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $x \text{ m}$	Deflexión Solución aproximada $y \text{ m}$	Deflexión Solución exacta $y \text{ m}$
1.25	-0.0005	-0.000324
2.50	-0.0012	-0.00089
3.75	-0.0018	-0.00388
5.00	-0.0018	-0.00128
6.25	-0.0014	-0.000986
7.50	-0.0008	-0.000542
8.75	-0.0003	-0.000138

Ejemplo 2.6a. Para el problema de la viga mostrada en la fig.2.6a, determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados).

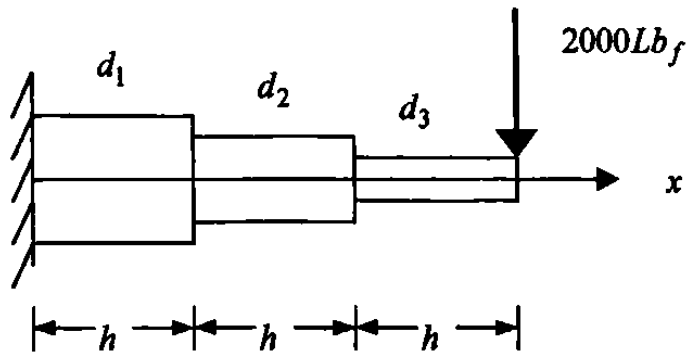


Figura 2.6a Viga de sección variable empotrada en un extremo

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right] = 0$$

Condición de frontera izquierda.

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

Condición de frontera derecha.

$$y''(L) = \frac{M}{EI} = 0$$

$$y'''(L) = \frac{V}{EI}$$

Datos:

$$h = \text{Espacio entre los puntos de la retícula} = 20 \text{ in}$$

$$E = 30 \times 10^6 \frac{Lb_f}{in^2}$$

$$d_1 = 4in \quad d_2 = 3in \quad d_3 = 2in$$

Derivando la ecuación diferencial del problema.

$$EI_i y_i'''' + 2EI_i' y_i''' + EI_i'' y_i'' = 0 \quad (1)$$

Las derivadas y'''' , y''' y y'' se evalúan numéricamente mediante las aproximaciones por diferencias centrales.

$$y'''' = (y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) / h^4$$

$$y''' = (-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}) / 2h^3$$

$$y'' = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / h^2$$

Los términos I_i' e I_i'' se calculan mediante la aproximación por diferencias finitas como sigue: para $i = 1, 2, \dots, N-1$

$$I_i' = \frac{I_{i+1} - I_{i-1}}{2h}$$

$$I_i'' = \frac{I_{i+1} - 2I_i + I_{i-1}}{h^2}$$

La aproximación por diferencias hacia atrás; para N

$$I_N' = \frac{3I_N - 4I_{N-1} + I_{N-2}}{2h}$$

$$I_N'' = \frac{2I_N - 5I_{N-1} + 4I_{N-2} - I_{N-3}}{h^2}$$

Sustituir las ecuaciones anteriores en la ecuación (1) para obtener las ecuaciones en diferencias.

$$a_i y_{i-2} + b_i y_{i-1} + c y_i + d_i y_{i+1} + e_i y_{i+2} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

donde

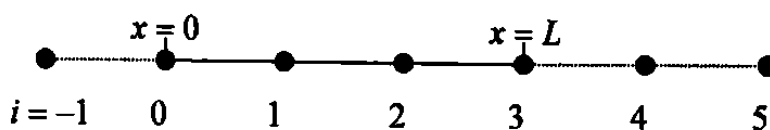
$$a_i = EI_i/h^4 - EI'_i/h^3$$

$$b_i = -4EI_i/h^4 + 2EI'_i/h^3 + EI''_i/h^2$$

$$c_i = 6EI_i/h^4 - 2EI''_i/h^2$$

$$d_i = -4EI_i/h^4 - 2EI'_i/h^3 + EI''_i/h^2$$

$$e_i = EI_i/h^4 + EI'_i/h^3$$



Para ($i = 1$)

$$a_1 y_{-1} + b_1 y_0 + c_1 y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = 0$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y'(0) = y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$(a_1 + c_1)y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = 0 \quad (1)$$

Para ($i = 2$)

$$a_2 y_0 + b_2 y_1 + c_2 y_2 + d_2 y_3 + e_2 y_4 = 0$$

$$b_2 y_1 + c_2 y_2 + d_2 y_3 + e_2 y_4 = 0 \quad (2)$$

Para ($i = 3$)

$$a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3 + d_3 y_4 + e_3 y_5 = 0 \quad (3)$$

Condición de frontera derecha.

$$y''(L) = \frac{M}{EI} = \frac{y_2 - 2y_3 + y_4}{h^4} = 0$$

$$y_2 - 2y_3 + y_4 = 0 \quad (4)$$

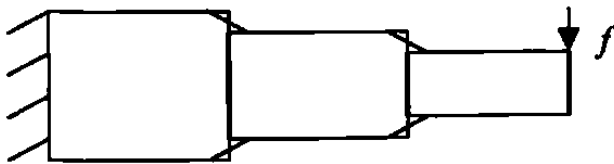
$$y'''(L) = \frac{V}{EI_3} = \frac{-y_1 + 2y_2 - 2y_4 + y_5}{2h^3}$$

$$\frac{EI_3}{2h^3} [-y_1 + 2y_2 - 2y_4 + y_5] = V \quad (5)$$

Solución del sistema de ecuaciones para los siguientes valores.

I) Para los siguientes radios:

$h =$ Espacio entre los puntos de la retícula = 20 in



$$r_0 = 2 \text{ in} \quad r_1 = 1.75 \text{ in} \quad r_2 = 1.25 \text{ in} \quad r_3 = 1 \text{ in}$$

$$I_0 = 12.566 \text{ in}^4$$

$$I_1 = 7.366 \text{ in}^4 \quad I_1' = -0.266 \text{ in}^3 \quad I_1'' = -0.00062 \text{ in}^2$$

$$I_2 = 1.917 \text{ in}^4 \quad I_2' = -0.1645 \text{ in}^3 \quad I_2'' = 0.01079 \text{ in}^2$$

$$I_3 = 0.785 \text{ in}^4 \quad I'_3 = 0.0513 \text{ in}^3 \quad I''_3 = 0.0222 \text{ in}^2$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 30078 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & b_2 &= -29637 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & a_3 &= 816 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \\ c_1 &= 132960 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & c_2 &= 28032 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & b_3 &= 318 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \\ d_1 &= -72618 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & d_2 &= -9897 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & c_3 &= 810 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \\ e_1 &= 14118 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & e_2 &= 816 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & d_3 &= -5838 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \\ & & & & e_3 &= 3894 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} (a_1 + c_1) & d_1 & e_1 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ EI_3 & (-1 & 2 & 0 & -2 & 1) \\ 2h^3 & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

$$y_1 = -0.3774 \text{ in} \quad y_2 = -1.6235 \text{ in} \quad y_3 = -3.3993 \text{ in}$$

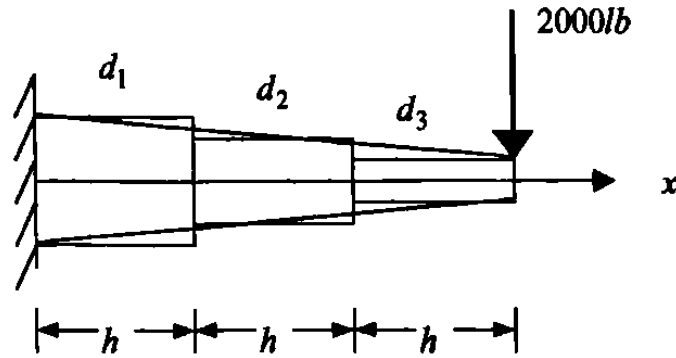
$$y_4 = -6.3625 \text{ in} \quad y_5 = -8.4966 \text{ in}$$

TABLA 5.6a Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $x \text{ in}$	Deflexión Solución aproximada $y \text{ in}$	Deflexión Solución exacta $y \text{ in}$
20	-0.3774	-0.0700
40	-1.6235	-0.2260
60	-3.3993	-0.4524

II) Para los siguientes radios:

$h =$ Espacio entre los puntos de la retícula = 20 in



$$r_0 = 2 \text{ in} \quad r_1 = 1.668 \text{ in} \quad r_2 = 1.336 \text{ in} \quad r_3 = 1 \text{ in}$$

$$I_0 = 12.566 \text{ in}^4$$

$$I_1 = 6.079 \text{ in}^4 \quad I_1' = -0.2516 \text{ in}^3 \quad I_1'' = 0.00727 \text{ in}^2$$

$$I_2 = 2.502 \text{ in}^4 \quad I_2' = -0.1323 \text{ in}^3 \quad I_2'' = 0.00465 \text{ in}^2$$

$$I_3 = 0.785 \text{ in}^4 \quad I_3' = -0.0393 \text{ in}^3 \quad I_3'' = 0.00202 \text{ in}^2$$

$$a_1 = 25785 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \quad b_2 = -36615 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \quad a_3 = 3534 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$c_1 = 105060 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \quad c_2 = 42318 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \quad b_3 = -11172 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$d_1 = -55671 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \quad d_2 = -20739 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \quad c_3 = 12918 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$e_1 = 10689 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \quad e_2 = 3549 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \quad d_3 = -6456 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$e_3 = 1176 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$\begin{bmatrix} (a_1 + c_1) & d_1 & e_1 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ EI_3 & (-1 & 2 & 0 & -2 & 1) \\ 2h^3 & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = -0.1976 \text{ in} \quad y_2 = -0.7980 \text{ in} \quad y_3 = -1.7377 \text{ in}$$

$$y_4 = -2.6773 \text{ in} \quad y_5 = -2.5976 \text{ in}$$

TABLA 5.6b

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $x \text{ in}$	Deflexión Solución aproximada $y \text{ in}$	Deflexión Solución exacta $y \text{ in}$
20	-0.1976	-0.0700
40	-0.7980	-0.2260
60	-1.7377	-0.4524

Ejemplo 2.6b Para el problema de la viga mostrada en la fig.2.6b, determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados).

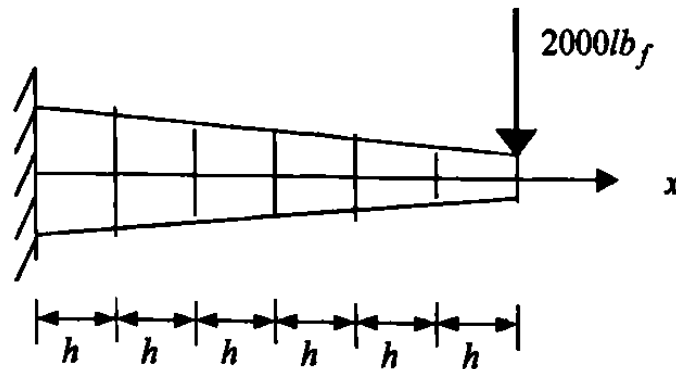


Figura 2.6b Viga de sección variable empotrada en un extremo

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right] = 0$$

Condición de frontera izquierda.

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

Condición de frontera derecha.

$$y''(L) = \frac{M}{EI} = 0$$

$$y'''(L) = \frac{V}{EI}$$

Datos:

$$E = 30 \times 10^6 \frac{Lb_f}{in^2}$$

$$d_0 = 4 \text{ in}$$

$$d_1 = 3.668 \text{ in}$$

$$d_2 = 3.336 \text{ in}$$

$$d_3 = 3 \text{ in}$$

$$d_4 = 2.672 \text{ in}$$

$$d_5 = 2.34 \text{ in}$$

$$d_6 = 1 \text{ in}$$

Derivando la ecuación diferencial del problema.

$$EI_i y_i'''' + 2EI_i' y_i''' + EI_i'' y_i'' = 0 \quad (1)$$

$$a_i y_{i-2} + b_i y_{i-1} + c_i y_i + d_i y_{i+1} + e_i y_{i+2} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

donde

$$a_i = EI_i / h^4 - EI_i' / h^3$$

$$b_i = -4EI_i / h^4 + 2EI_i' / h^3 + EI_i'' / h^2$$

$$c_i = 6EI_i / h^4 - 2EI_i'' / h^2$$

$$d_i = -4EI_i / h^4 - 2EI_i' / h^3 + EI_i'' / h^2$$

$$e_i = EI_i / h^4 + EI_i' / h^3$$

$h =$ Espacio entre los puntos de la retícula $= 10 \text{ in}$



Para ($i=1$)

$$a_1 y_{-1} + b_1 y_0 + c_1 y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = 0$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y'(0) = y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$(a_1 + c_1)y_1 + d_1y_2 + e_1y_3 = 0 \quad (1)$$

Para ($i = 2$)

$$a_2y_0 + b_2y_1 + c_2y_2 + d_2y_3 + e_1y_4 = 0$$

$$b_2y_1 + c_2y_2 + d_2y_3 + e_1y_4 = 0 \quad (2)$$

Para ($i = 3$)

$$a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 + d_3y_4 + e_3y_5 = 0 \quad (3)$$

Para ($i = 4$)

$$a_4y_2 + b_4y_3 + c_4y_4 + d_4y_5 + e_4y_6 = 0 \quad (4)$$

Para ($i = 5$)

$$a_5y_3 + b_5y_4 + c_5y_5 + d_5y_6 + e_5y_7 = 0 \quad (5)$$

Para ($i = 6$)

$$a_6y_4 + b_6y_5 + c_6y_6 + d_6y_7 + e_6y_8 = 0 \quad (6)$$

Condición de frontera derecha.

$$y''(L) = \frac{M}{EI} = \frac{y_5 - 2y_6 + y_7}{h^4} = 0$$

$$y_5 - 2y_6 + y_7 = 0 \quad (7)$$

$$y'''(L) = \frac{V}{EI_3} = \frac{-y_4 + 2y_5 - 2y_7 + y_8}{2h^3}$$

$$\frac{EI_3}{2h^3}[-y_4 + 2y_5 - 2y_7 + y_8] = V \quad (8)$$

Solución del sistema de ecuaciones:

$$r_0 = 2 \text{ in} \quad r_1 = 1.834 \text{ in} \quad r_2 = 1.668 \text{ in} \quad r_3 = 1.502 \text{ in}$$

$$r_4 = 1.336 \text{ in} \quad r_5 = 1.17 \text{ in} \quad r_6 = 1 \text{ in}$$

$$I_0 = 12.566 \text{ in}^4$$

$$I_1 = 8.885 \text{ in}^4 \quad I'_1 = -0.3243 \text{ in}^3 \quad I''_1 = 0.00875 \text{ in}^2$$

$$I_2 = 6.079 \text{ in}^4 \quad I'_2 = -0.2444 \text{ in}^3 \quad I''_2 = 0.00724 \text{ in}^2$$

$$I_3 = 3.997 \text{ in}^4 \quad I'_3 = -0.1788 \text{ in}^3 \quad I''_3 = 0.00587 \text{ in}^2$$

$$I_4 = 2.502 \text{ in}^4 \quad I'_4 = -0.1263 \text{ in}^3 \quad I''_4 = 0.00464 \text{ in}^2$$

$$I_5 = 1.471 \text{ in}^4 \quad I'_5 = -0.0858 \text{ in}^3 \quad I''_5 = 0.00345 \text{ in}^2$$

$$I_6 = 0.785 \text{ in}^4 \quad I'_6 = -0.05135 \text{ in}^3 \quad I''_6 = 0.00226 \text{ in}^2$$

$$a_1 = 36384 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \quad b_2 = -85440 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \quad a_3 = 17355 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$c_1 = -123453 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \quad c_2 = 105078 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \quad b_3 = -56931 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$d_1 = -84537 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \quad d_2 = -56112 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \quad c_3 = 68424 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$e_1 = 16926 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \quad e_2 = 10905 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \quad d_3 = -35475 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$e_3 = 6627 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$\begin{array}{lll}
 a_4 = 11295 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & a_5 = 6987 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & a_6 = 3895 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \\
 b_4 = -36210 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & b_5 = -21765 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & b_6 = -11823 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \\
 c_4 = -42252 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & c_5 = 24408 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & c_6 = -12774 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \\
 d_4 = -21054 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & d_5 = -11469 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & d_6 = -5661 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \\
 e_4 = 3717 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & e_5 = 1839 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & e_6 = 815 \text{ Lb}_f/\text{in}^2
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
 (a_1 + b_1) & d_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{EI}{2h^2}(-1 & 2 & 0 & -2 & 1)
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4 \\
 y_5 \\
 y_6 \\
 y_7 \\
 y_8
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 2000
 \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = -0.0092 \text{ in} \quad y_2 = -0.0402 \text{ in} \quad y_3 = -0.0969 \text{ in}$$

$$y_4 = -0.1836 \text{ in} \quad y_5 = -0.3031 \text{ in} \quad y_6 = -0.4521 \text{ in}$$

$$y_7 = -0.6010 \text{ in} \quad y_8 = -0.6096 \text{ in}$$

TABLA 5.6c Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $x \text{ in}$	Deflexión Solución aproximada $y \text{ in}$	Deflexión Solución exacta $y \text{ in}$
10	-0.0092	-0.0080*
20	-0.0402	-0.0700
30	-0.0969	-0.1480*
40	-0.1836	-0.2260
50	-0.3031	-0.3392*
60	-0.4521	-0.4524

* Valores interpolados.

Ejemplo 3.1 Una barra delgada a una temperatura inicial de (θ_1) , aislada, menos por uno de sus extremos, que se somete a la temperatura de (θ_0) , que es la temperatura ambiente. La barra tiene una longitud (L) , determine la distribución de temperaturas.

Ecuación diferencial del problema

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 < x < L$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

θ = Temperatura

α = Difusividad térmica

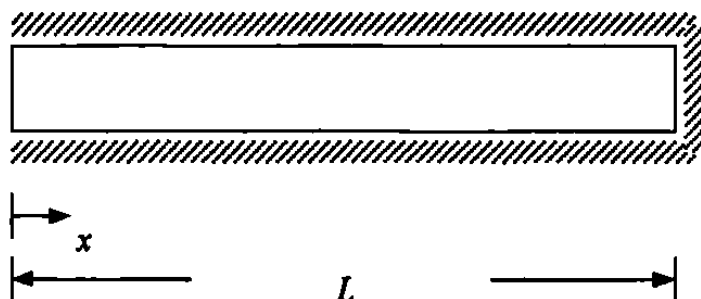
t = Tiempo

Condiciones de frontera

$$\theta(x, 0) = \theta_1 \quad 0 < x < L$$

$$\theta(0, t) = \theta_0 \quad t > 0$$

$$\frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = 0 \quad t > 0$$



$$\theta(0, t) = \theta_0$$

$$\frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = 0$$

Normalizando

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad \tau = \frac{\alpha t}{L^2} \quad X = \frac{x}{L}$$

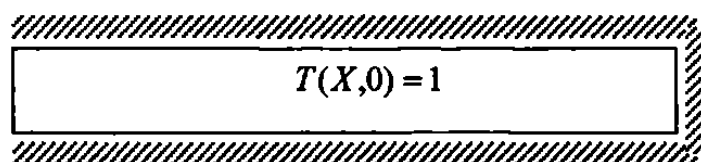
La ecuación diferencial y las condiciones de frontera del problema se transforma en

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad 0 < X < 1$$

$$T(X, 0) = 1 \quad 0 < X < 1$$

$$T(0, \tau) = 0 \quad \tau > 0$$

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial X} = 0 \quad \tau > 0$$



$$T(0, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial X} = 0$$

Solución de la ecuación diferencial parcial parabólica.

Método implícito.

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}$$

Se utiliza Euler hacia atrás con respecto al dominio del tiempo y el término de la segunda derivada de la ecuación mediante la aproximación por diferencias centrales.

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta \tau} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta X^2}$$

$$\gamma = \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2}$$

$$T_i^n = -\gamma T_{i-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_i^{(n+1)} - \gamma T_{i+1}^{(n+1)} \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

1) Malla con dos nodos

$$\Delta X = 1$$

$$T(0, \tau) = T_0 = 0 \quad T'(1, \tau) = T_1' = 0$$



Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T_1' = \frac{T_2 - T_0}{2\Delta X} = 0$$

$$T_0^{(n+1)} = T_2^{(n+1)}$$

$$T_1^n = -2\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)}$$

$$\left\{ (2\gamma + 1) T_1^{(n+1)} \right\} = \left\{ T_1^n + 2\gamma T_0^{(n+1)} \right\} \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} = \frac{0.05}{(1)^2} = 0.05$$

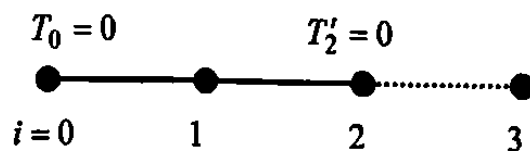
Solución de la ecuación (1)

TABLA 5.7a Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo τ	T_0	T_1	Solución Exacta T_1
0	0	0	1	1
1	0.05	0	0.909	0.9969
2	0.10	0	0.826	0.9493
3	0.15	0	0.751	0.8642
4	0.20	0	0.682	0.7723
5	0.25	0	0.620	0.6854
6	0.30	0	0.564	0.6068
7	0.35	0	0.512	0.5367
8	0.40	0	0.465	0.4745
9	0.45	0	0.422	0.4119
10	0.50	0	0.383	0.3708

2) Malla con tres nodos

$$\Delta X = 0.5$$



Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)} \quad (2)$$

Para ($i = 2$)

$$T_2^n = -\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} - \gamma T_3^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T_2' = \frac{T_3 - T_1}{2\Delta X} = 0$$

$$T_3^{(n+1)} = T_1^{(n+1)}$$

$$T_2^n = -2\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} \quad (3)$$

Solución de las ecuaciones (2) y (3)

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} = \frac{0.05}{(0.5)^2} = 0.2$$

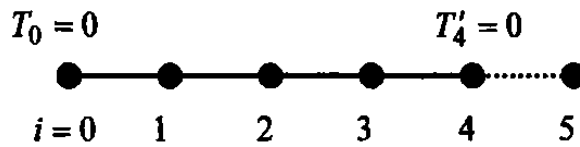
$$\begin{bmatrix} (2\gamma + 1) & -\gamma \\ -2\gamma & (2\lambda + 1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \end{Bmatrix}$$

TABLA 5.7b Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo		T_0	T_1	T_2	Solución
	τ					Exacta
						T_2
0	0		0	1	1	1
1	0.05		0	0.8510	0.9574	0.9969
2	0.10		0	0.7355	0.8940	0.9493
3	0.15		0	0.6428	0.8222	0.8642
4	0.20		0	0.5666	0.7490	0.7723
5	0.25		0	0.5016	0.6783	0.6854
6	0.30		0	0.4456	0.6118	0.6068
7	0.35		0	0.3969	0.5504	0.5367
8	0.40		0	0.3541	0.4943	0.4745
9	0.45		0	0.3162	0.4434	0.4119
10	0.50		0	0.2826	0.3974	0.3708

3) Malla con cinco nodos

$$\Delta X = 0.25$$

Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)} \quad (4)$$

Para ($i = 2$)

$$T_2^n = -\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} - \gamma T_3^{(n+1)} \quad (5)$$

Para ($i = 3$)

$$T_3^n = -\gamma T_2^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_3^{(n+1)} - \gamma T_4^{(n+1)} \quad (6)$$

Para ($i = 4$)

$$T_4^n = -\gamma T_3^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_4^{(n+1)} - \gamma T_5^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T_4' = \frac{T_5 - T_3}{2\Delta X} = 0$$

$$T_5^{(n+1)} = T_3^{(n+1)}$$

$$T_4^n = -2\gamma T_3^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_4^{(n+1)} \quad (7)$$

Solución de las ecuaciones (4), (5), (6) y (7)

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} = \frac{0.05}{(0.25)^2} = 0.8$$

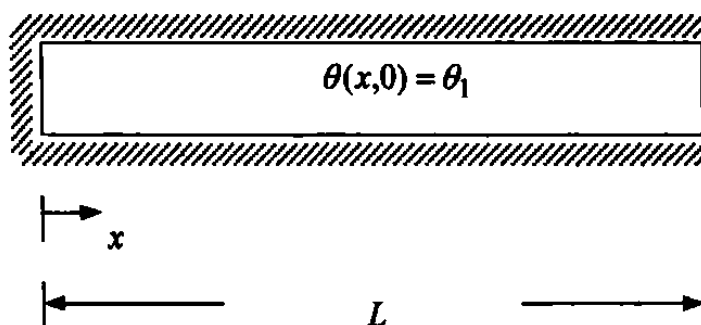
$$\begin{bmatrix} (2\gamma+1) & -\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma & (2\gamma+1) & -\gamma & 0 \\ 0 & -\gamma & (2\gamma+1) & -\gamma \\ 0 & 0 & -2\gamma & (2\gamma+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \\ T_3^{(n+1)} \\ T_4^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ T_3^n \\ T_4^n \end{bmatrix}$$

TABLA 5.7c

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo τ	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	Solución Exacta T_4
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0.05	0	0.6554	0.8799	0.9544	0.9720	0.9969
2	0.10	0	0.4858	0.7596	0.8830	0.9172	0.9493
3	0.15	0	0.3897	0.6591	0.8031	0.8470	0.8642
4	0.20	0	0.3274	0.5769	0.7236	0.7711	0.7723
5	0.25	0	0.2823	0.5084	0.6489	0.6959	0.6854
6	0.30	0	0.2471	0.4501	0.5803	0.6247	0.6068
7	0.35	0	0.2180	0.3997	0.5182	0.5592	0.5367
8	0.40	0	0.1932	0.3554	0.4624	0.4996	0.4745
9	0.45	0	0.1717	0.3164	0.4124	0.4460	0.4194
10	0.50	0	0.1528	0.2819	0.3678	0.3979	0.3708

Ejemplo 3.2 Una barra delgada a una temperatura inicial de (θ_1), aislada, menos por uno de sus extremos, por el que intercambia calor con el medio ambiente. La barra tiene una longitud (L), determine la distribución de temperaturas.



Datos:

$$\theta_1 = \text{Temperatura inicial} = 100^\circ F$$

$$\theta_\infty = \text{Temperatura del medio ambiente} = 1600^\circ F$$

$$\beta = \text{Coeficiente de transferencia de calor por convección} = \frac{5 \text{ Btu}}{\text{hr} - \text{ft}^2 - ^\circ F}$$

$$k = \text{Coeficiente de transferencia de calor por conducción} = \frac{0.54 \text{ Btu}}{\text{hr} - \text{ft} - ^\circ F}$$

$$C_p = \text{Calor específico} = \frac{0.2 \text{ Btu}}{\text{Lb}_m - ^\circ F}$$

$$\rho = \text{Densidad} = \frac{144 \text{ Lb}_m}{\text{ft}^3}$$

$$L = \text{Longitud de la barra} = 1 \text{ ft}$$

$$\alpha = \text{Difusividad térmica} = \frac{k}{\rho C}$$

$$t = \text{Tiempo}$$

Ecuación diferencial del problema

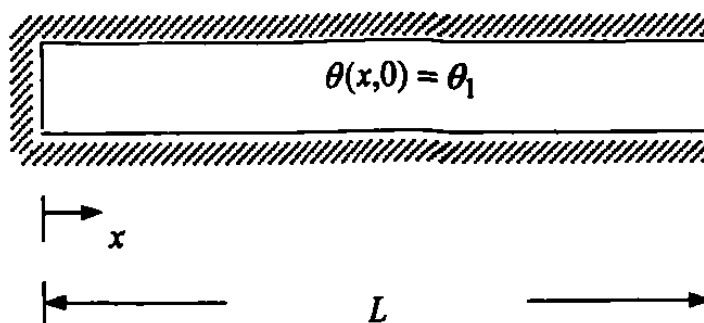
$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 < x < L$$

Condiciones de frontera

$$\theta(x, 0) = \theta_1 \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0 \quad t > 0$$

$$-k \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = \beta(\theta - \theta_0) \quad t > 0$$



$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0$$

$$-k \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = \beta(\theta - \theta_0)$$

Normalizando

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$X = \frac{x}{L}$$

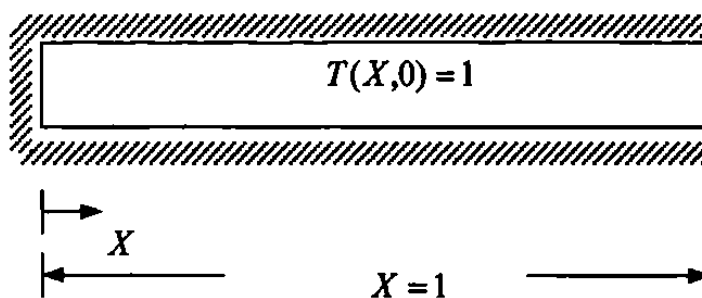
La ecuación diferencial y las condiciones de frontera del problema se transforma en.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad 0 < X < 1$$

$$T(X, 0) = 1 \quad 0 < X < 1$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad \tau > 0$$

$$-k \frac{\partial T(L, \tau)}{\partial X} = \beta T \quad \tau > 0$$



$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial X} = 0$$

$$-k \frac{\partial T(L, \tau)}{\partial X} = \beta T$$

Solución de la ecuación diferencial parcial parabólica.

Método implícito.

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}$$

Se utiliza Euler hacia atrás con respecto al dominio del tiempo y el término de la segunda derivada de la ecuación mediante la aproximación por diferencias centrales.

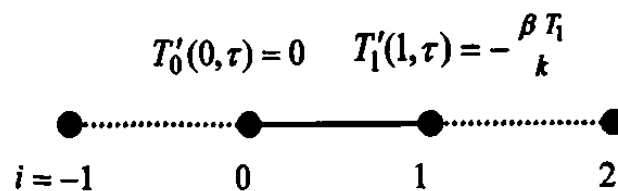
$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta\tau} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta X^2}$$

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2}$$

$$T_i^n = -\gamma T_{i-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_i^{(n+1)} - \gamma T_{i+1}^{(n+1)} \quad i = 0, 1, \dots, N$$

1) Malla con dos nodos

$$\Delta X = 1$$



Para ($i = 0$)

$$T_0^n = -\gamma T_{-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - \gamma T_1^{(n+1)}$$

Condición de frontera izquierda

$$T'_0 = \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta X} = 0$$

$$T_1^{(n+1)} = T_{-1}^{(n+1)}$$

$$T_0^n = (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - 2\gamma T_1^{(n+1)} \quad (1)$$

Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha.

$$T_1' = \frac{T_2 - T_0}{2\Delta X} = -\frac{\beta}{k} T_1$$

$$T_2^{(n+1)} = \frac{-2\Delta X\beta}{k} T_1^{(n+1)} + T_0^{(n+1)}$$

$$T_1^n = -2\gamma T_0^{(n+1)} + \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X\beta}{k} \right) \right] T_1^{(n+1)} \quad (2)$$

Solución de las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{bmatrix} (2\gamma + 1) & -2\gamma \\ -2\gamma & \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X\beta}{k} \right) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0^{(n+1)} \\ T_1^{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \end{Bmatrix}$$

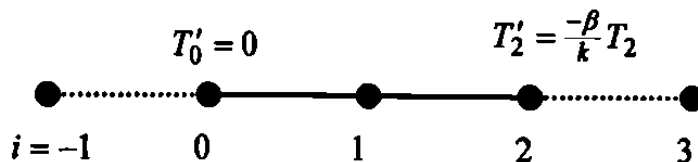
$$\gamma = \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2} = \frac{0.01875}{(1)^2} = 0.01875$$

TABLA 5.8a Comparación de los resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo τ	T_0	T_1	Solución	Solución
				Exacta T_0	Exacta T_1
0	0	1	1	1	1
1	0.01875	0.9909	0.7490	1.0210	0.3500
2	0.03750	0.9747	0.5673	1.0082	0.2798
3	0.05620	0.9552	0.4355	1.0034	0.2379
4	0.07500	0.9329	0.3397	0.9950	0.2102
5	0.09375	0.9089	0.2699	0.9810	0.1904
6	0.11250	0.8839	0.2188	0.9616	0.1753
7	0.13125	0.8585	0.1812	0.9384	0.1633
8	0.15000	0.8330	0.1534	0.9127	0.1534
9	0.16875	0.8076	0.1326	0.8853	0.1450
10	0.18750	0.7826	0.1169	0.8572	0.1377

2) Malla con tres nodos

$$\Delta X = 0.5$$



Para ($i = 0$)

$$T_0^n = -\gamma T_{-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - \gamma T_1^{(n+1)}$$

Condición de frontera izquierda.

$$T'_0 = \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta X} = 0$$

$$T_1^{(n+1)} = T_{-1}^{(n+1)}$$

$$T_0^n = (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - 2\gamma T_1^{(n+1)} \quad (3)$$

Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)} \quad (4)$$

Para ($i = 2$)

$$T_2^n = -\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} - \gamma T_3^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T'_2 = \frac{T_3 - T_1}{2\Delta X} = -\frac{\beta}{k} T_2$$

$$T_3^{(n+1)} = \frac{-2\Delta X\beta}{k} T_2^{(n+1)} + T_1^{(n+1)}$$

$$T_2^n = -2\gamma T_1^{(n+1)} + \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X \beta}{k} \right) \right] T_2^{(n+1)} \quad (5)$$

Solución de las ecuaciones (3), (4) y (5)

$$\begin{bmatrix} (2\gamma + 1) & -2\gamma & 0 \\ -\gamma & (2\gamma + 1) & -\gamma \\ 0 & -2\gamma & \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X \beta}{k} \right) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0^{(n+1)} \\ T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ T_2^n \end{Bmatrix}$$

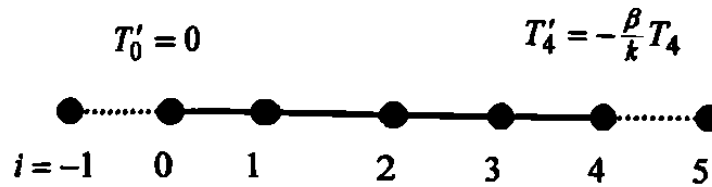
$$\gamma = \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2} = \frac{0.05}{(0.5)^2} = 0.2$$

TABLA 5.8b Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo τ	T_0	T_1	T_2	Solución Exacta T_0	Solución Exacta T_1	Solución Exacta T_2
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0.01875	0.9967	0.9751	0.6216	1.0210	1.0040	0.3500
2	0.03750	0.9892	0.9393	0.4135	1.0082	0.9702	0.2798
3	0.05625	0.9775	0.8999	0.2974	1.0034	0.9636	0.2379
4	0.07500	0.9622	0.8603	0.2312	0.9950	0.8761	0.2102
5	0.09375	0.9439	0.8221	0.1922	0.9810	0.8326	0.5812
6	0.11250	0.9233	0.7860	0.1681	0.9616	0.7932	0.1753
7	0.13125	0.9009	0.7521	0.1523	0.9384	0.7575	0.1636
8	0.15000	0.8773	0.7204	0.1411	0.9127	0.7248	0.1534
9	0.16875	0.8529	0.6907	0.1327	0.8853	0.6947	0.1450
10	0.1875	0.8280	0.6628	0.1258	0.8572	0.6667	0.1377

3) Malla con cinco nodos

$$\Delta X = 0.25$$



Para ($i = 0$)

$$T_0^n = -\gamma T_{-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - \gamma T_1^{(n+1)}$$

Condición de frontera izquierda

$$T'_0 = \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta X} = 0$$

$$T_1^{(n+1)} = T_{-1}^{(n+1)}$$

$$T_0^n = (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - 2\gamma T_1^{(n+1)} \quad (6)$$

Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)} \quad (7)$$

Para ($i = 2$)

$$T_2^n = -\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} - \gamma T_3^{(n+1)} \quad (8)$$

Para ($i = 3$)

$$T_3^n = -\gamma T_2^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_3^{(n+1)} - \gamma T_4^{(n+1)} \quad (9)$$

Para ($i = 4$)

$$T_4^n = -\gamma T_3^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_4^{(n+1)} - \gamma T_5^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T_4' = \frac{T_5 - T_3}{2\Delta X} = -\frac{\beta}{k} T_4$$

$$T_5^{(n+1)} = -\frac{2\Delta X\beta}{k} T_4^{(n+1)} + T_3^{(n+1)}$$

$$T_4^n = -2\gamma T_3^{(n+1)} + \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X\beta}{k} \right) \right] T_4^{(n+1)} \quad (10)$$

Solución de las ecuaciones (6), (7), (8), (9) y (10)

$$\begin{bmatrix} (2\gamma + 1) & -2\gamma & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & (2\gamma + 1) & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & (2\gamma + 1) & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & (2\gamma + 1) & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma & \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X\beta}{k} \right) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0^{(n+1)} \\ T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \\ T_3^{(n+1)} \\ T_4^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ T_2^n \\ T_3^n \\ T_4^n \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} = \frac{0.01875}{(0.25)^2} = 0.3$$

TABLA 5.8c Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Tiempo τ	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_0^x	T_1^x	T_2^x	T_3^x	T_4^x
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.01875	0.9986	0.9963	0.9817	0.9059	0.5166	1.0210	0.9936	1.0040	0.9174	0.3500
0.03750	0.9944	0.9873	0.9500	0.8071	0.3350	1.0082	1.0000	0.9702	0.7853	0.2798
0.05625	0.9863	0.9729	0.91190	0.7237	0.2574	1.0034	0.9916	0.9236	0.6960	0.2379
0.07500	0.9743	0.9543	0.8720	0.6567	0.2180	0.9950	0.9734	0.8761	0.6310	0.2102
0.09375	0.9586	0.9323	0.8328	0.6030	0.1940	0.9810	0.9501	0.8326	0.5812	0.1904
0.11250	0.9396	0.9081	0.7956	0.5593	0.1772	0.9616	0.9238	0.7932	0.5414	0.1753
0.13125	0.9181	0.8823	0.7608	0.5230	0.1643	0.9384	0.8959	0.7575	0.5086	0.1633
0.15000	0.8947	0.8558	0.7282	0.4923	0.1538	0.9127	0.8672	0.7248	0.4808	0.1534
0.16875	0.8700	0.8288	0.6979	0.4657	0.1450	0.8853	0.8383	0.6947	0.4567	0.1450
0.18750	0.8445	0.8019	0.6695	0.4423	0.1374	0.8572	0.8095	0.6667	0.4353	0.1377

T^x Solución exacta

Ejemplo 4.1 Escriba la aproximación por diferencias y la solución de la ecuación de Poisson, para la geometría que se muestra en la figura 5.1.

Ecuación diferencial del problema.(EDP elíptica)

$$-\nabla^2 T(x, y) = f_0$$

$$-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = f_0$$

Geometría del problema y condiciones de frontera.

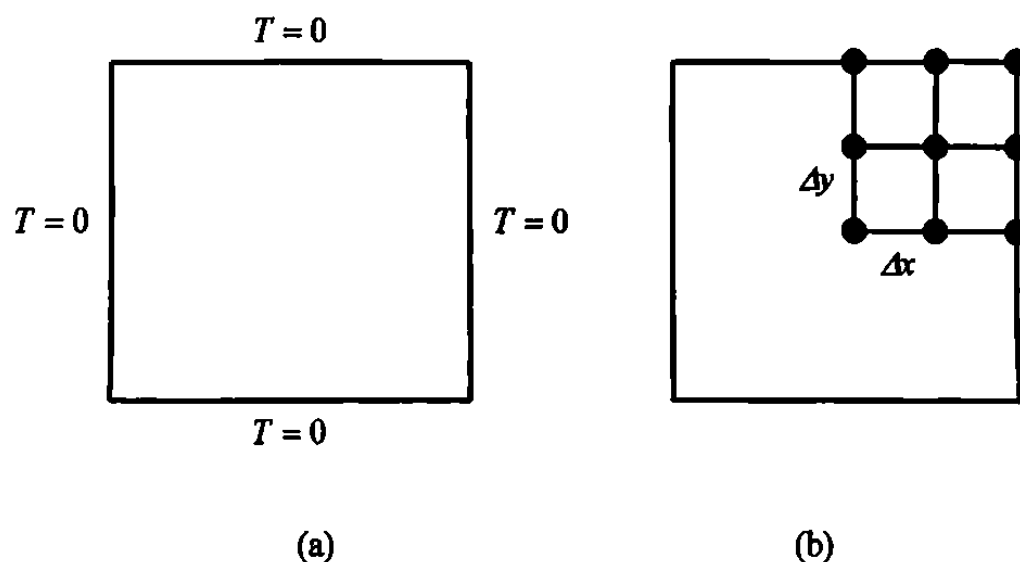


Figura 5.1 Dominio del problema (a), y retícula de análisis (b)

Condiciones de frontera de la raticula de análisis.

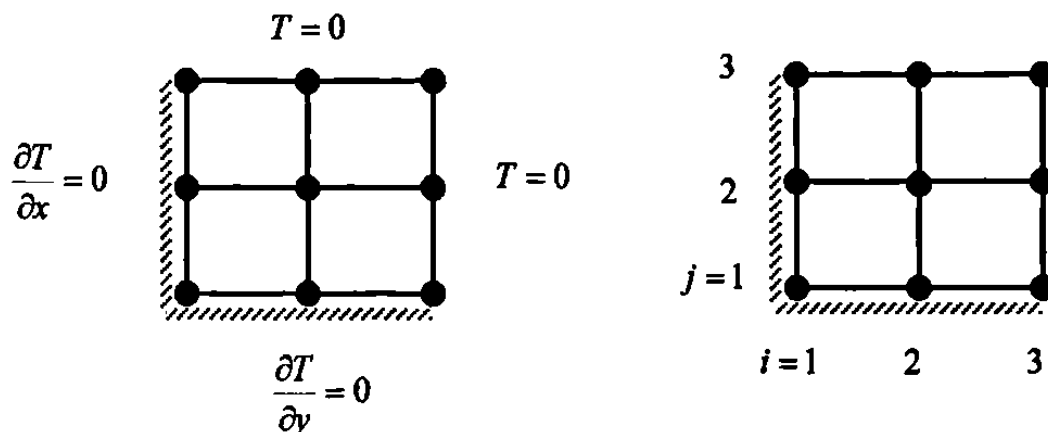
Frontera izquierda $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ (Tipo Neuman)

Frontera derecha $T = 0$ (Tipo Dirichlet)

Frontera inferior $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

Frontera superior $T = 0$

Condiciones de frontera de la retícula de análisis



$$-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = f_0 \quad (1)$$

La ecuación en diferencias para un punto (i, j) de la retícula situado dentro de la frontera. Si aplicamos la aproximación por diferencias centrales, aproximamos el primer termino de la ecuación (1) por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (2)$$

De manera análoga, la aproximación por diferencias del segundo termino es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (3)$$

Sustituimos (2) y (3) en (1)

$$\frac{-T_{i-1,j} + 2T_{i,j} - T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-T_{i,j-1} + 2T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f_{0,i,j} \quad (4)$$

La ecuación (4) se aplica a todos los puntos de la retícula excepto los de la frontera.

La frontera inferior, ecuación en diferencias para un punto.

$$(1 < i < i_{max} \text{ y } j = 1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,1+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,1}}{\Delta y} \quad (a)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,1+\frac{1}{2}} = \frac{T_{i,2} - T_{i,1}}{\Delta y} \quad (b)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,1} = 0 \quad (\text{Condición de frontera inferior}) \quad (c)$$

Sustituimos (b) y (c) en (a)

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{2T_{i,2} - 2T_{i,1}}{\Delta y^2} \quad (5)$$

Sustituimos (5) y (2) en (1)

$$\frac{-T_{i-1,j} + 2T_{i,j} - T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-2T_{i,2} + T_{i,1}}{\Delta y^2} = f_{0,i} \quad (6)$$

La ecuación (6) se aplica para cualquier punto en la frontera inferior.

La frontera izquierda, ecuación en diferencias para un punto.

$$(1 < j < j_{max} \text{ y } i = 1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{1,j} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{1+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{1,j}}{\Delta x} \quad (d)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{1+\frac{1}{2},j} = \frac{T_{2,j} - T_{1,j}}{\Delta x} \quad (e)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{1,j} = 0 \quad (\text{Condición de frontera izquierda}) \quad (f)$$

Sustituimos (e) y (f) en (d)

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{2T_{2,j} - 2T_{1,j}}{\Delta x^2} \quad (7)$$

Sustituimos (7) y (3) en (1)

$$\frac{2T_{1,j} - 2T_{2,j}}{\Delta x^2} + \frac{-T_{1,j-1} + 2T_{1,j} - T_{1,j+1}}{\Delta x^2} = f_{0,j} \quad (8)$$

La ecuación (8) se aplica para cualquier punto en la frontera izquierda.

Ecuación en diferencias para el punto de la esquina ($i = j = 1$).

Sustituimos (5) y (7) en (1)

$$\frac{2T_{1,1} - 2T_{2,1}}{\Delta x^2} + \frac{2T_{1,1} - 2T_{1,2}}{\Delta y^2} = f_{0,1} \quad (9)$$

Aplicamos las ecuaciones (4), (6), (8) y (9) para la solución de la red de del problema. ($\Delta x = \Delta y$)

Para ($i = j = 1$)

$$4T_{1,1} - 2T_{2,1} - 2T_{1,2} = \Delta x^2 f_0 \quad (10)$$

Para ($i = 2, j = 1$)

$$-T_{1,1} + 4T_{2,1} - 2T_{2,2} = \Delta x^2 f_0 \quad (11)$$

Para ($i = 1, j = 2$)

$$-T_{1,1} + 4T_{1,2} - 2T_{2,2} = \Delta x^2 f_0 \quad (12)$$

Para $(i = 2, j = 2)$

$$-T_{2,1} - T_{1,2} + T_{2,2} = \Delta x^2 f_0 \quad (13)$$

Solución de las ecuaciones (10), (11), (12), y (13)

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x^2 f_0 \\ \Delta x^2 f_0 \\ \Delta x^2 f_0 \\ \Delta x^2 f_0 \end{bmatrix}$$

Para $(f_0 = 1)$ y $(\Delta x = \Delta y = 0.5)$

TABLA 5.9

Comparación de resultados diferencias finitas solución por series

Coordenadas (i, j)	Solución aproximada T	Solución por series T
(1,1)	0.2812	0.2947
(2,1)	0.2187	0.2284
(1,2)	0.2188	0.2293
(2,2)	0.1719	0.1801*

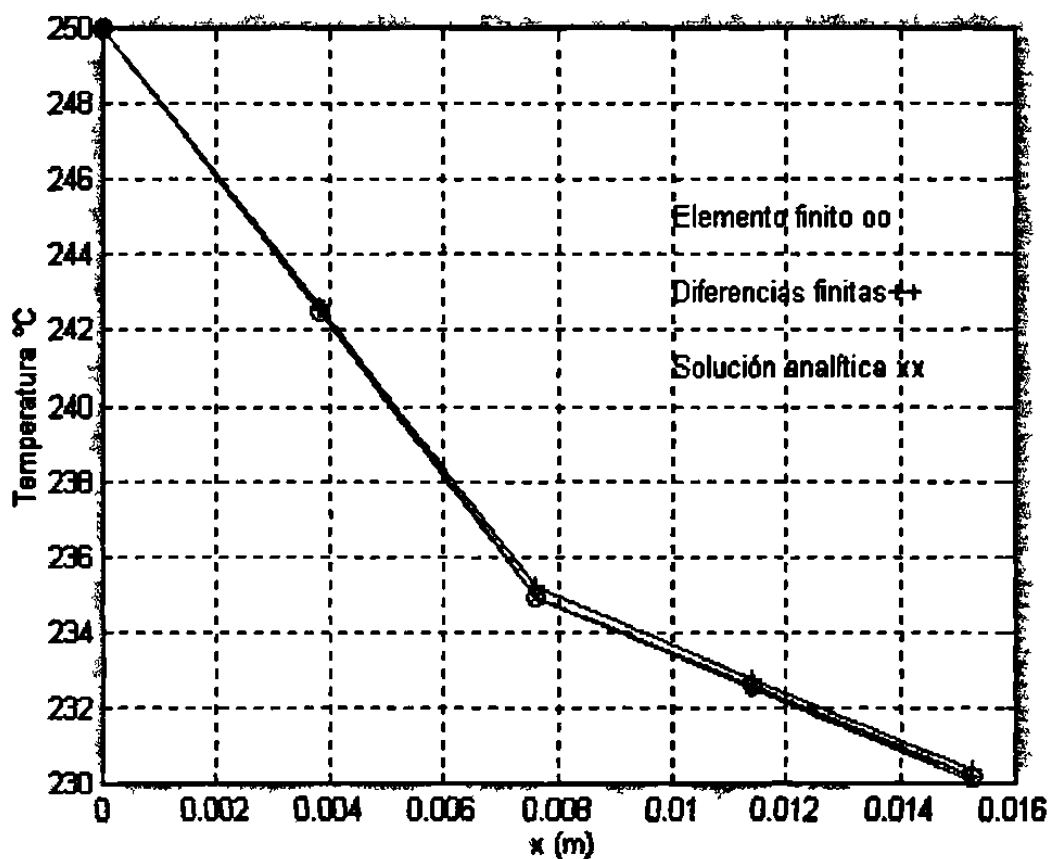
Valor interpolado *

CAPITULO 6

COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

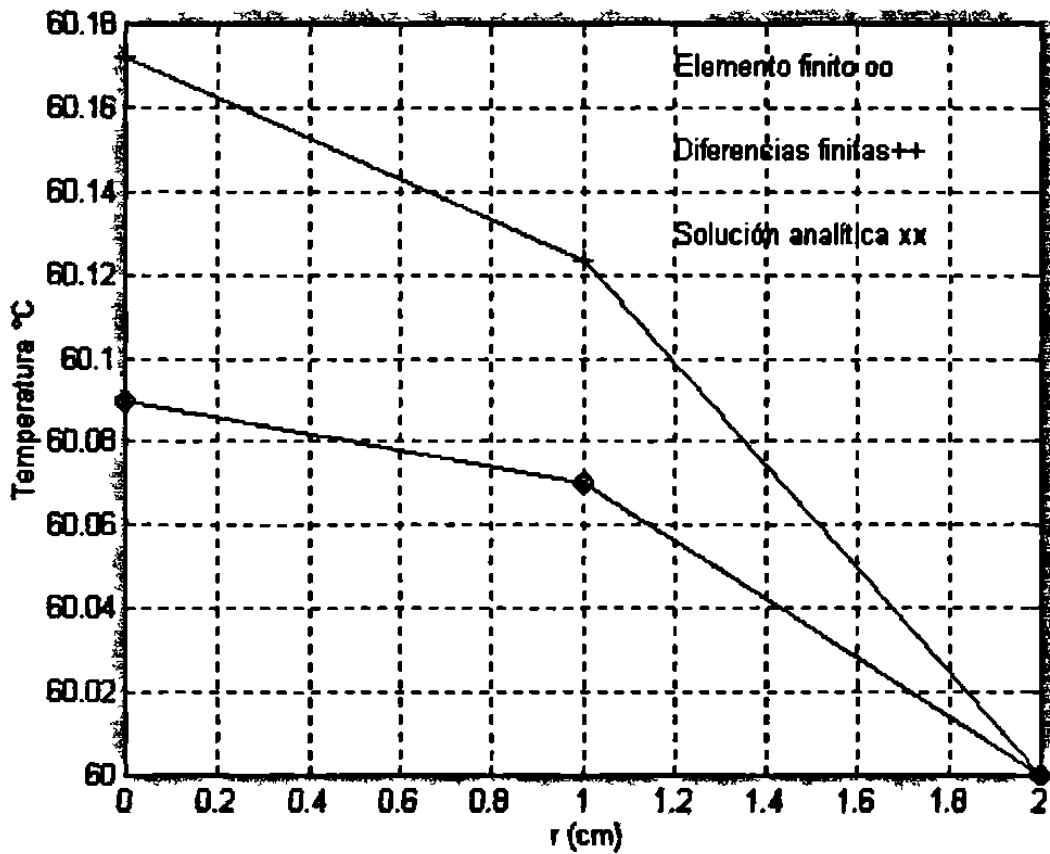
GRAFICA 6.1

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en una aleta rectangular (Ejemplo 2.1)



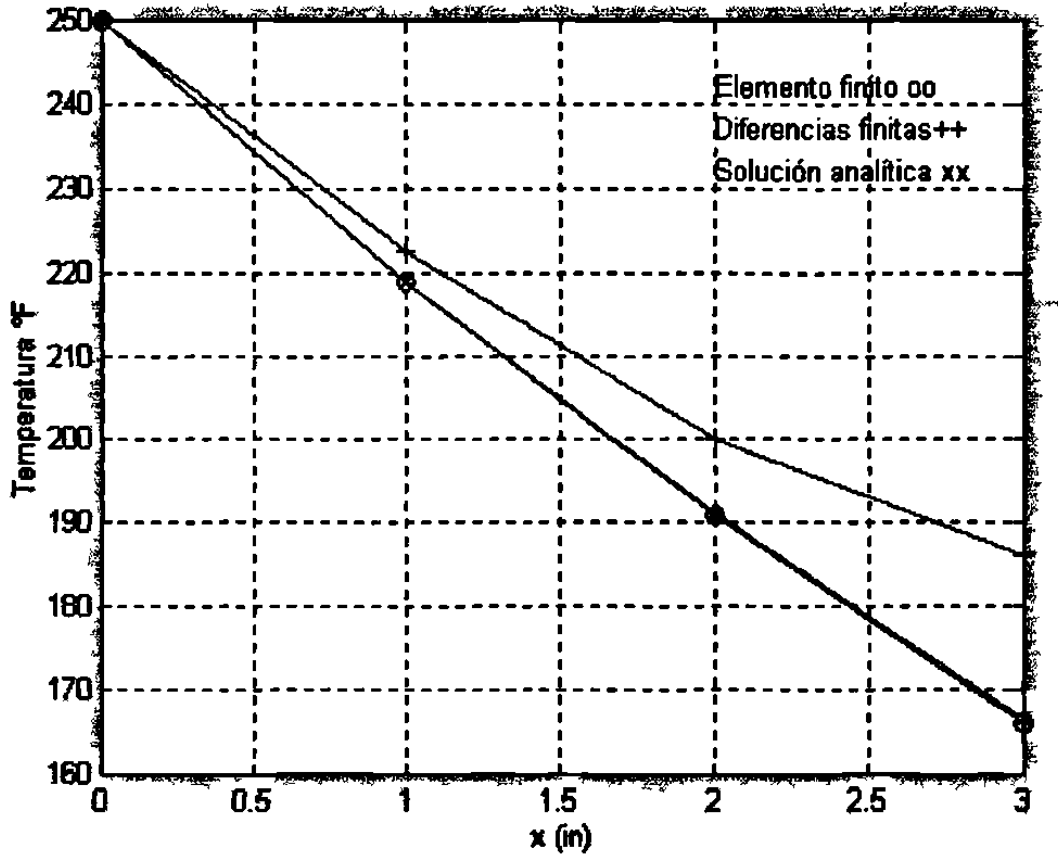
GRAFICA 6.2

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en un conductor eléctrico (Ejemplo 2.2)



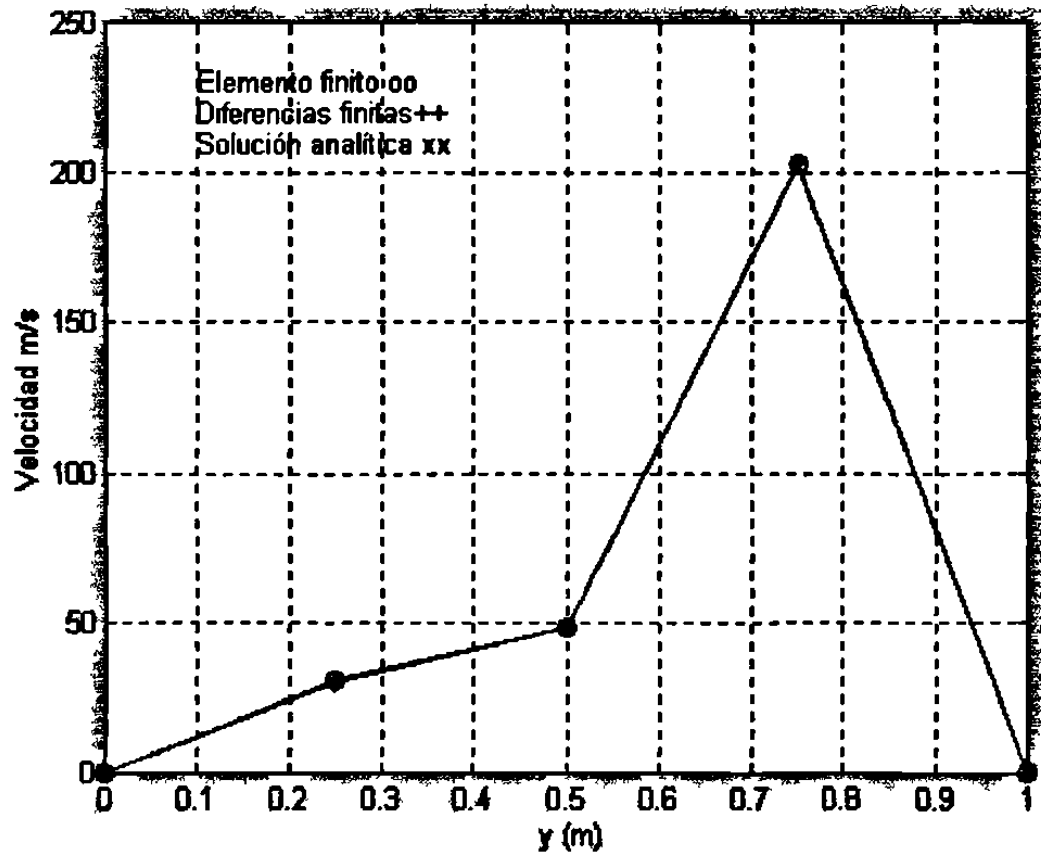
GRAFICA 6.3

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en una aleta triangular (Ejemplo 2.3)



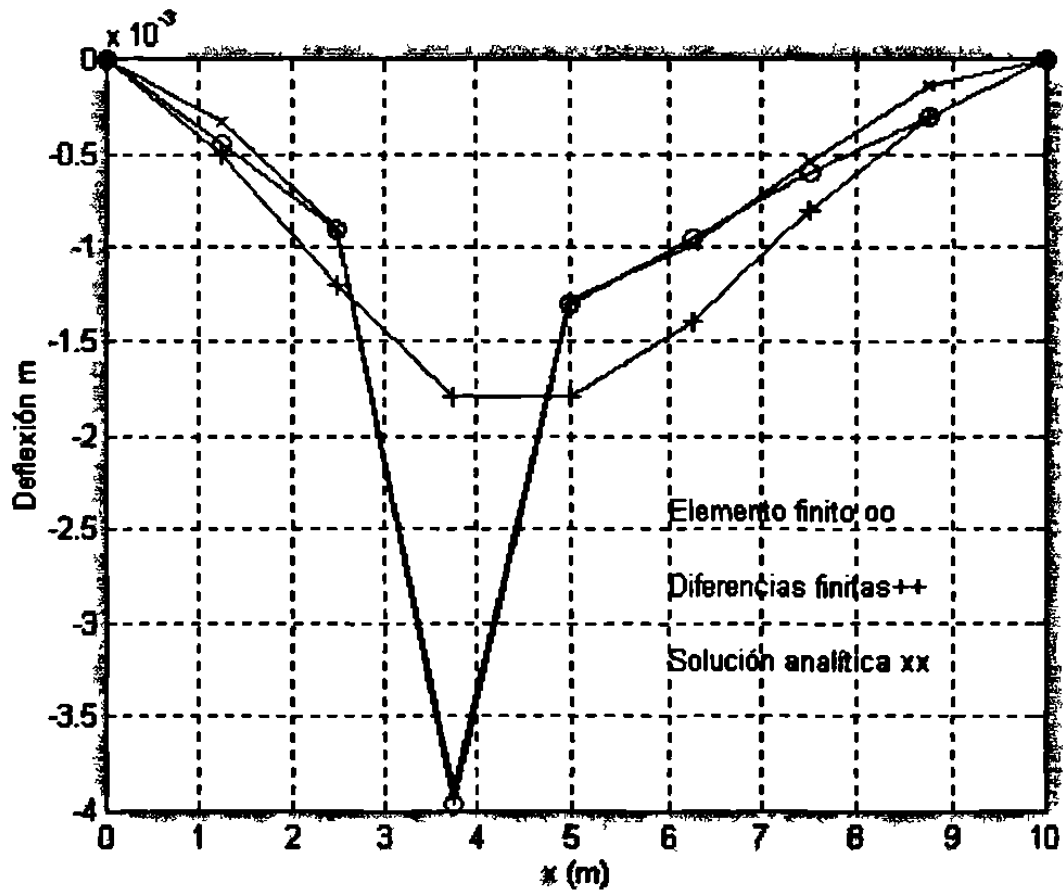
GRAFICA 6.4

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de velocidades en un fluido (Ejemplo 2.4)



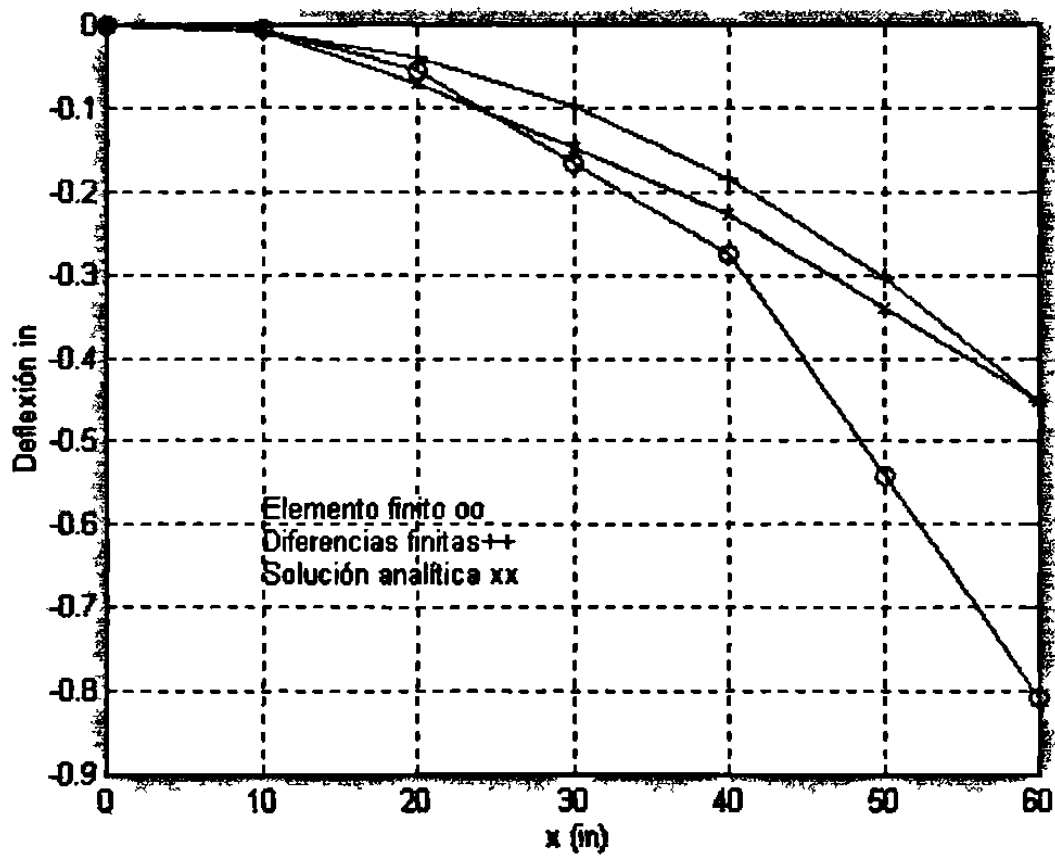
GRAFICA 6.5

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la flexión de una viga empotrada en los extremos (Ejemplo 2.5)



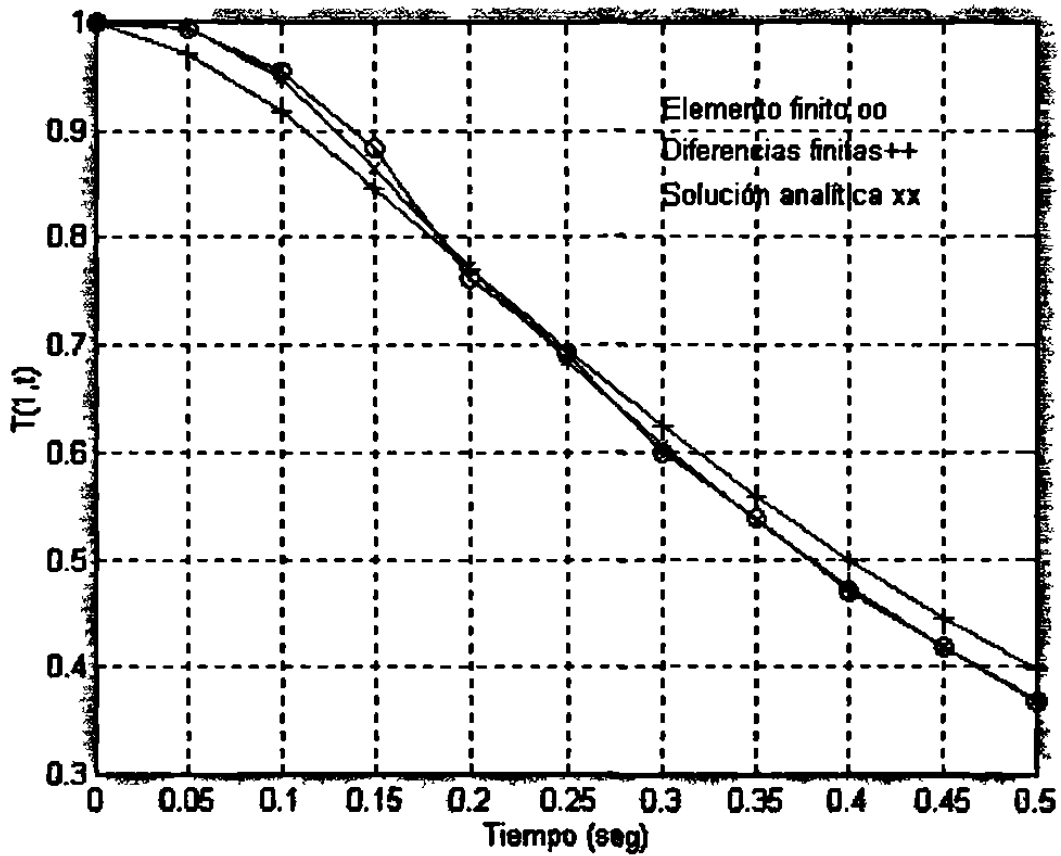
GRAFICA 6.6

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la flexión de una viga de sección variable empotrada en el extremo izquierdo y con una carga concentrada en el extremo derecho (Ejemplo 2.6)



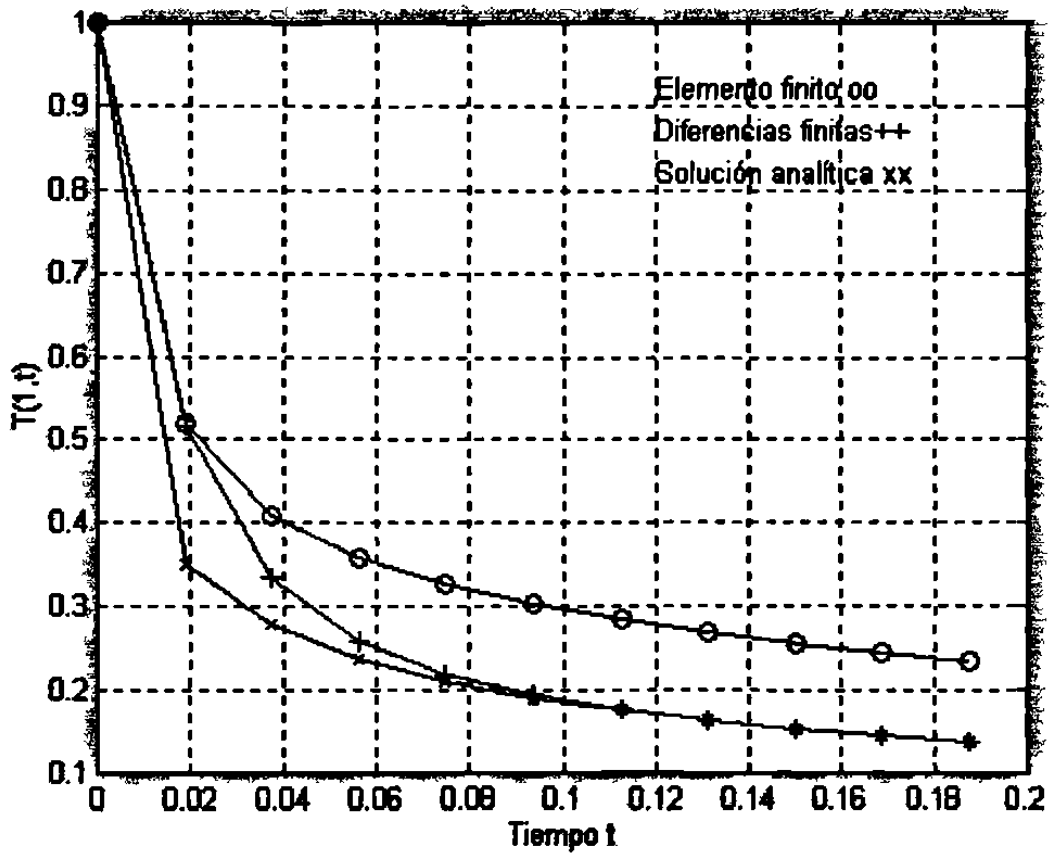
GRAFICA 6.7

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en estado transitorio en una barra aislada en un extremo. (Ejemplo 3.1)



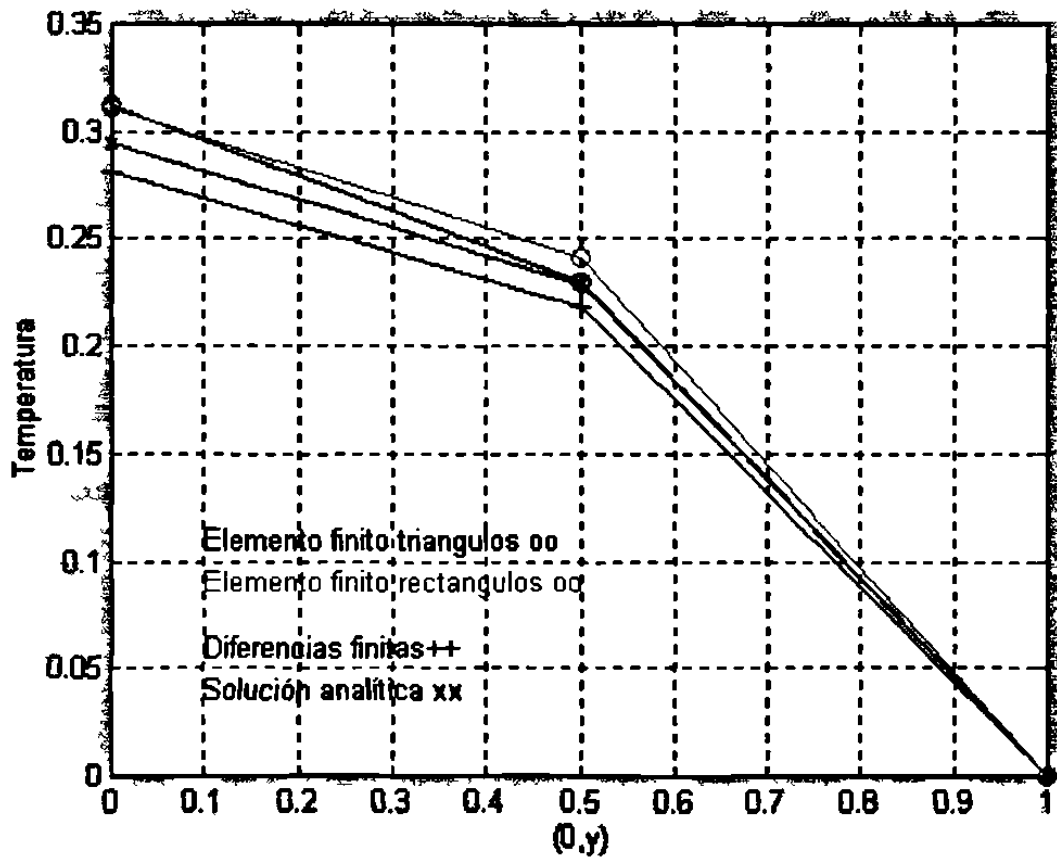
GRAFICA 6.8

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en estado transitorio en una barra aislada en el extremo izquierdo y que intercambia calor por el extremo derecho. (Ejemplo 3.2)



GRAFICA 6.9

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en estado estable dos dimensiones en una placa rectangular. (Ejemplo 4.1)



CAPITULO 7

CONCLUSIONES

Las conclusiones que se originaron de mi investigación se apoyan en las gráficas del capítulo anterior y son las siguientes: para el método del elemento finito, se obtiene los mismos resultados cuando se utilizan dos elementos lineales que cuando se utiliza un elemento cuadrático; sin embargo cuando se hace muy fina la malla de elementos finitos no se mejora la aproximación a la solución analítica solo se obtiene mas información de la maya.

Las aplicaciones mas fuertes del elemento finito son para geometrías complejas; es decir para todo lo que no sea cuadrado en problemas de estado estable. Lo interesante de este método es que proporciona además información de las variables secundarias del problema que pueden ser: el flujo de calor, las reacciones en vigas, los momentos etc.

Otro de los puntos importantes de mi investigación es el método de las diferencias finitas, en este punto quiero señalar las siguientes conclusiones: es muy importante que las distancias entre los puntos de la retícula sean muy pequeñas para que se tenga una mejor aproximación a la solución analítica, por otra parte quiero mencionar que no

recomiendo el método para problemas de vigas o de estructuras porque no se obtendrían las variables secundarias solo se obtendría la flexión si la geometría es sencilla; lo que me pareció muy interesante del método son: Las aplicaciones a problemas de valor inicial para problemas que tengan geometría sencillas; es decir cuadrados o rectángulos.

Bibliografías

ANALYSIS OF HEAT AND MASS TRANSFER

E.R.G. ECKERT

ROBERT M. DRAKE, JR.

Mc Graw Hill

HEAT TRANSFER

J.P HOLMAN

Mc Graw Hill

MECHANICS OF MATERIALS

FERDINAND P. BEER

E. RUSSEL JOHNSTON, JR.

Mc Graw Hill

METODOS NUMERICOS APLICADOS CON SOFTWARE

SHOICHIRO NAKAMURA

Prentice Hall

ANALISIS NUMERICO Y VISUALIZACION GRAFICA CON MATLAB**SHOICHIRO NAKAMURA**

Prentice Hall

NUMERICAL METHODS, SOFTWARE, AND ANALYSIS**JOHN R. RICE**

Mc Graw Hill

NUMERICAL HEAT TRANSFER**TIEN MO SHIH**

Hemisphere publishing corporation

**METHODS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS****DALE U. VON ROSENBERG**

American Elsevier publishing company

FINITE ELEMENT METHOD**J.N. REDDY**

Mc Graw Hill

**APPLIED FUNCTIONAL ANALYSIS AND VARIATIONAL
METHODS IN ENGINEERING**

J.N. REDDY

Mc Graw Hill

APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS

LARRY J. SEGERLIND

John Wiley & Sons

FINITE ELEMENT ANALYSIS FROM CONCEPTS TO APPLICATIONS

DAVID S. BURNETT

Addison Wesley

THE FINITE ELEMENT METHOD FOR ENGINEERS

KENNETH H. HUEBNER

John Wiley & Sons

THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING

S.S. RAO

Pergamon Press

LISTA DE TABLAS

TABLA 1.1	Ejemplos de ecuaciones de segundo orden en una dimensión	6
TABLA 2.1a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	36
TABLA 2.1b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	42
TABLA 2.2a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	50
TABLA 2.2b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	58
TABLA 2.3	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	69
TABLA 2.4a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	78
TABLA 2.4b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	86
TABLA 2.5a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	99
TABLA 2.5b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	100
TABLA 2.6	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	107
TABLA 2.7	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	113
TABLA 3.1a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	127
TABLA 3.1b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	131
TABLA 3.1c	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	136
TABLA 3.2a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	141
TABLA 3.1aa	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	142

TABLA 3.2b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	146
TABLA 3.2bb	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	147
TABLA 3.2c	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	152
TABLA 3.2cc	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	153
TABLA 4.1a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	174
TABLA 4.1b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	181
TABLA 4.1c	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	182
TABLA 5.1	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	187
TABLA 5.2	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	190
TABLA 5.3	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	195
TABLA 5.4	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	199
TABLA 5.5a	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	202
TABLA 5.5b	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	205
TABLA 5.5c	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	208
TABLA 5.6a	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	213
TABLA 5.6b	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	215
TABLA 5.6c	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	220
TABLA 5.7a	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	224
TABLA 5.7b	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	226
TABLA 5.7c	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	228
TABLA 5.8a	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	233
TABLA 5.8b	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	235
TABLA 5.8c	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	237
TABLA 5.9	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	242

Lista de gráficas

Figura 1.1	Elemento finito en una dimensión.	5
Figura 1.2	Elemento lineal en una dimensión.	10
Figura 1.3	Funciones de forma lineales.	11
Figura 1.4	Funciones de interpolación en coordenadas locales.	12
Figura 1.5	Elementos cuadráticos funciones de interpolación.	13
Figura 1.6	Ensamble de dos elementos lineales.	25
Figura 2.1	Aleta rectangular.	29
Figura 2.3	Aleta triangular.	59
Figura 2.4	Fluido en una tubería.	71
Figura 2.5	Flexión de viga apoyada en el extremo.	87
Figura 2.6	Desplazamientos generalizados y fuerzas generalizadas.	88
Figura 2.7	Ensamble de dos elementos.	93
Figura 2.8	Viga empotrada en los extremos.	95
Figura 2.9	Viga empotrada de sección variable.	101
Figura 2.10	Viga simplemente apoyada con carga senoidal.	108
Figura 4.1	Discretización de un dominio por elementos triangulares y cuadriláteros.	155
Figura 4.2a.	Elemento finito en dos dimensiones.	158
Figura 4.2b.	Elemento finito en dos dimensiones.	159

Figura 4.3.	Elemento triangular lineal.	162
Figura 4.4.	Ensamble de los coeficientes de las matrices del elemento finito.	158
Figura 4.5.	Dominio rectangular para la aplicación de la ecuación de poisson.	167
Figura 4.6.	Dominio rectangular para la aplicación de la ecuación de poisson.	168
Figura 4.7.	Discretización del dominio para elementos lineales rectangulares.	175
Figura 5.1.	Dominio del problema	238
Figura 6.1.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.1)	243
Figura 6.2.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.2)	244
Figura 6.3.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.3)	245
Figura 6.4.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.4)	246
Figura 6.5.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.5)	247
Figura 6.6.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.6)	248
Figura 6.7.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo3.1)	249
Figura 6.8.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo3.2)	250
Figura 6.9.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo4.1)	251

AUTOBIOGRAFIA

Mi nombre es Raúl Acosta Landín, nací en H. Matamoros Tamps. el 3 de octubre de 1958. Soy Ingeniero electromecánico, Egresado del Instituto Tecnológico de Matamoros Tamaulipas en el año de 1983.

En el año de 1984 al 1986 empecé y terminé los créditos de la maestría en ingeniería térmica en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Nuevo León.

En el año de 1987 empecé a trabajar en la misma como maestro asignado al departamento de Térmica y Fluidos, en las materias de Transferencia de Calor, Termodinámica, Mecánica de Fluidos, Refrigeración, Maquinas Hidráulicas en donde continuo a la fecha.

En el año de 1991 a 1994 paralelamente con mi trabajo de catedrático realice mis estudios de Maestría en Sistemas de información en la Facultad de Ciencias Químicas obteniendo mi grado de Maestro en Ciencias.

Actualmente soy jefe de la Academia de Termodinámica I y II.

Uno de mis objetivos concluye con esta investigación, para continuar con una de mis metas obtener el doctorado en Ingeniería.



DONATIVO

