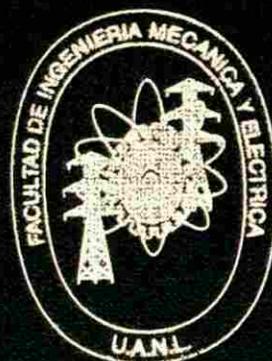


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**COMPARACION DE LA SOLUCION DE ECUACIONES
DIFERENCIALES USANDO DIFERENCIAS FINITAS
Y ELEMENTO FINITO**

TESIS

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD
EN TERMICA Y FLUIDOS**

**QUE PRESENTA EL:
M.C. RAUL ACOSTA LANDIN**

CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DE 1999

COMPARACION DE LA SOLUCION DE ECUACIONES

DIFERENCIALES USANDO DIFERENCIALES FINITAS

Y ELEMENTO FINITO

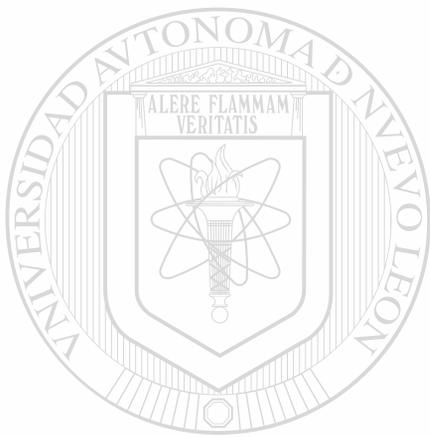
R. A. L.

TM
QA371
.A3
1999
c.1

1999



1080092552



UANL

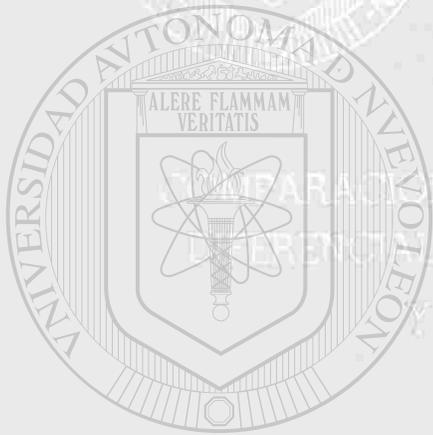
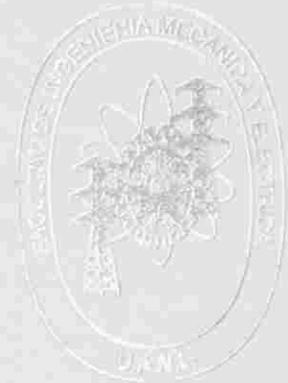
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST GRADO



COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES
DIFERENCIALES USANDO DIFERENCIAS FINITAS
Y ELEMENTO FINITO

UANL
TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN AL CENTRO DE MUESTRO DE CHICLAS
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

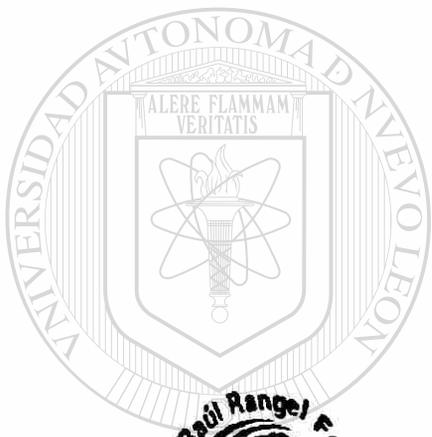
EN TÉRMICA Y FLUIDOS

QUE PRESENTA EL:

M.C. RAUL ACOSTA LANDIN

C.O. MANTEFRAÑA

NOVIEMBRE DEL 2009



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

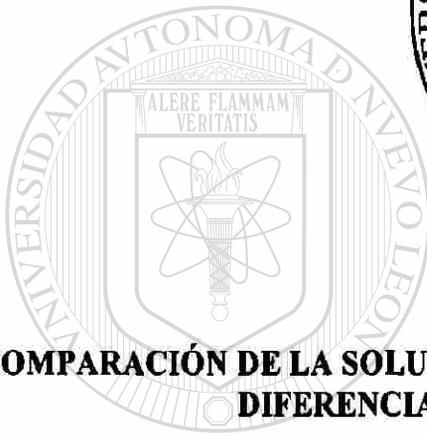
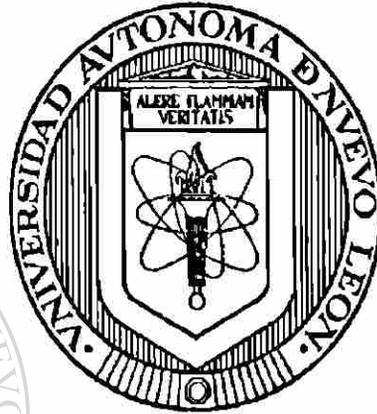
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



**COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO
DIFERENCIAS FINITAS Y ELEMENTO FINITO**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

TESIS

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MECÁNICA CON ESPECIALIDAD EN TÉRMICA Y FLUIDOS**

QUE PRESENTA EL

M.C. RAÚL ACOSTA LANDÍN

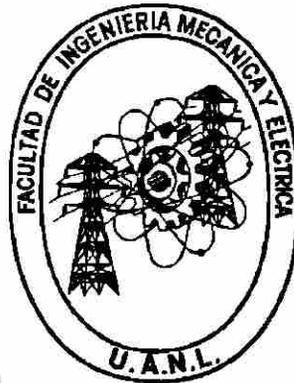
CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DE 1999

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



**COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO
DIFERENCIAS FINITAS Y ELEMENTO FINITO**

TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ®
MECÁNICA CON ESPECIALIDAD EN TÉRMICA Y FLUIDOS

QUE PRESENTA EL

M.C. RAÚL ACOSTA LANDÍN

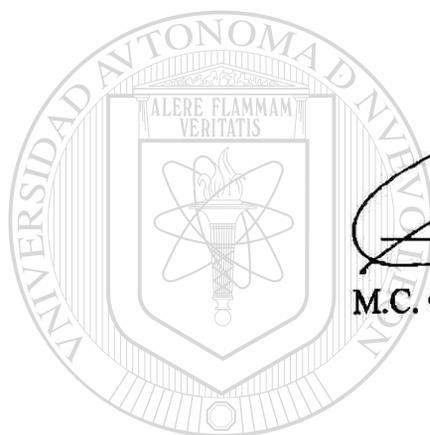
CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DE 1999

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**

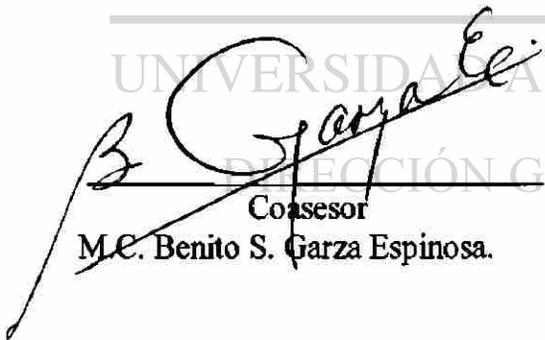
Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO DIFERENCIAS FINITAS Y ELEMENTO FINITO," realizada por MC. Raúl Acosta Landín, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Térmica y fluidos.

El comité de Tesis



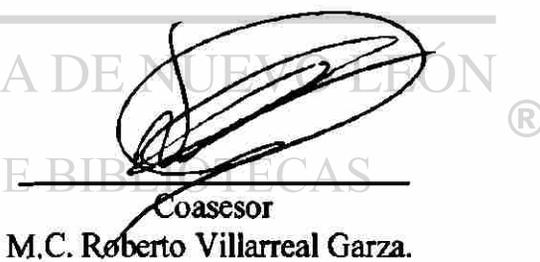
Asesor

M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza.



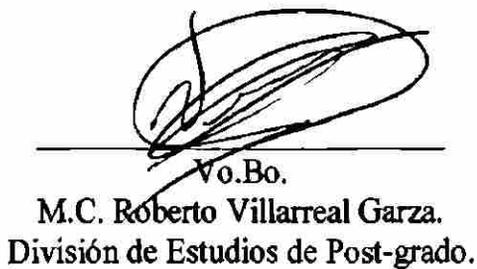
Coasesor

M.C. Benito S. Garza Espinosa.



Coasesor

M.C. Roberto Villarreal Garza.



Vo.Bo.

M.C. Roberto Villarreal Garza.
División de Estudios de Post-grado.

San Nicolás de los Garza, N.L. a 5 de Noviembre de 1999.

DEDICATORIAS

A mi padre: Sr. José Acosta Nuñez a quien ya nuestro señor llamo a su reino, a mi madre, Sra. Inés Landín Cortes, por la ternura, entendimiento y apoyo que me brindaron.

A mi esposa: Lic. Martina Bache García por su amor, su comprensión y sus palabras de aliento que siempre me animaron a terminar la tesis.

A mis hijos: Erika Nastenka, Raúl Enrique por el tiempo que no les pude dedicar mientras estuve elaborando la tesis.

A mis hermanos: Juan José Acosta, Esmeralda Acosta, Alfredo Acosta con cariño y respeto.

A todos mis familiares y amigos, con agradecimiento y admiración

A quienes fueron mis maestros en todos los niveles de mi educación escolar y en los estudios de Maestría especialmente: M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza, por todo el apoyo que me brindo.

AGRADECIMIENTOS

Al M.C. Guadalupe E. Cedillo Garza por su ayuda incondicional y asesoría tan valiosa que de él recibí para la elaboración de mi tesis.

Al Ing. Jose H. Ramírez guerra por su ayuda incondicional para llevar a cabo mi meta.

A mis amigos de la facultad: M.C. Juan Antonio Franco Quintanilla, M.C. Joel González Marroquin, M.C. Benito Sergio Garza Espinosa, M.C José Eloy Vargas Rocha, M.C. Homero Estrada Cortinas.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN[®]
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROLOGO

La importancia de los métodos numéricos ha aumentado en la enseñanza de la ingeniería y la ciencia, lo cual refleja el uso actual y sin precedentes de las computadoras. Al aprender los métodos numéricos, nos volvemos aptos para:

- 1) Entender esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos.
- 2) Deducir esquemas numéricos básicos
- 3) Escribir programas y resolverlos en una computadora.
- 4) Usar correctamente el software existente para dichos métodos.

El aprendizaje de los métodos numéricos no solo aumenta nuestra habilidad para el uso de computadoras, también amplía la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

En esta tesis se analizarán básicamente dos técnicas numéricas, el método de elemento finito y el método de diferencias finitas.

Entre los objetivos de la tesis están los siguientes puntos:

- 1) Dependiendo del tipo de problema: en estado estable, en estado transitorio en dos dimensiones, que método numérico proporciona una mejor aproximación a la solución analítica.
- 2) Que criterios se deben de tomar para mejorar la aproximación a la solución analítica.

SINTESIS

La tesis se escribió considerando un orden lógico, para que cualquier persona que incurriera en el estudio de los métodos del elemento finito y las diferencias finitas, no tenga problemas en el entendimiento y comprensión de los diferentes aspectos que se tratan en esta. Así teniendo los conocimientos obtenidos al consultar esta tesis podrán ahondar en el estudio de los métodos antes mencionados.

Los resultados que se obtuvieron al solucionar cada uno de los ejemplos son presentados en cada uno de los capítulos de la tesis.

En seguida se da una breve descripción del contenido de cada uno de los capítulos.

CAPITULO 1.- En este capítulo se describen los pasos básicos para la solución de problemas utilizando el método de elemento finito.

CAPITULO 2.- En este capítulo se resuelven algunos ejemplos en estado estable en una dimensión utilizando el método de elemento finito.

CAPITULO 3.- En este capítulo se resuelven algunos ejemplos en estado transitorio en una dimensión utilizando el método de elemento finito.

CAPITULO 4.- En este capítulo se resuelven algunos ejemplos en estado estable en dos dimensiones.

CAPITULO 5.- En este capítulo se resuelven todos los ejemplos de los capítulos anteriores utilizando el método de diferencias finitas.

CAPITULO 6.- En este capítulo se comparan los resultados obtenidos al utilizar los métodos de elemento finito y diferencias finitas.

CAPITULO 7.- En este capítulo se especifica el método a utilizar diferencias finitas o elemento finito dependiendo del tipo de problema.

INDICE

Prologo i

Síntesis ii

Introducción 1

Capítulo 1 METODO DEL ELEMENTO FINITO 3

1.1 Pasos básicos del análisis de elemento finito 3

1.2 Problema modelo con valores en la frontera 5

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Capítulo 2 PROBLEMAS EN ESTADO ESTABLE METODO DE ELEMENTO

FINITO 29

Ejemplo 2.1.a 29

1. Para dos elementos lineales 29

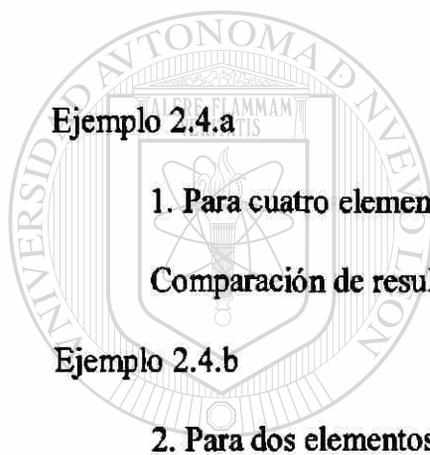
Comparación de resultados elemento finito solución analítica 36

Ejemplo 2.1.b 37

2. Para un elemento cuadrático 37

Comparación de resultados elemento finito solución analítica 42

Ejemplo 2.2.a	43
1. Para dos elementos lineales	44
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	50
Ejemplo 2.2.b	51
2. Para un elemento cuadrático	51
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	58
Ejemplo 2.3	59
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	69
Ejemplo 2.4.a	71
1. Para cuatro elementos lineales	71
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	78
Ejemplo 2.4.b	79
2. Para dos elementos cuadráticos	79
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	86
ECUACIÓN DE CUARTO ORDEN EN UNA DIMENSIÓN	87
Ejemplo modelo	87
Ejemplo 2.5	95
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	100
Ejemplo 2.6	101
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	107
Ejemplo 2.7	108
Comparación de resultados elemento finito solución analítica	113



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

Capítulo 3 PROBLEMAS EN ESTADO TRANSITORIO METODO DE

ELEMENTO FINITO 114

3.1 Introducción 114

3.2 Modelos del elemento finito 116

3.3 Aproximaciones en el tiempo 118

Ejemplo 3.1 122

1. Para un elemento lineal 124

Comparación de resultados elemento finito solución analítica 127

2. Para un elemento cuadrático 128

Comparación de resultados elemento finito solución analítica 131

3. Para dos elementos cuadráticos 132

Comparación de resultados elemento finito solución analítica 136

Ejemplo 3.2 137

1. Para un elemento lineal 139

Comparación de resultados elemento finito solución analítica 141

2. Para un elemento cuadrático 143

Comparación de resultados elemento finito solución analítica 146

3. Para dos elementos cuadráticos 148

Comparación de resultados elemento finito solución analítica 152

Capítulo 4 PROBLEMAS EN DOS DIMENSIONES METODO DE ELEMENTO

FINITO 154

4.2	Problemas con valores en la frontera	155
4.2.1	Ecuación modelo	155
4.2.2	Discretización del elemento finito	155
4.2.3	Forma débil	156
4.2.4	Modelo del elemento finito	156
4.2.5	Funciones de interpolación	157
4.2.6	Evaluación de los elementos de la matriz y vector	160
4.2.7	Ensamble de las ecuaciones del elemento	165
Ejemplo 4.1		167
1.	Para tres elementos triangulares	167
	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	174
2.	Para cuatro elementos rectangulares	175
	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	181
	Comparación triángulos rectángulos elemento finito solución analítica	182

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Capítulo 5 EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS 183

Ejemplo 2.1		184
	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	187
Ejemplo 2.2		188
	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	190
Ejemplo 2.3		191
	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	195
Ejemplo 2.4		196

Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	199
Ejemplo 2.5.a	200
1. Reticula $i=1$	201
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	202
Ejemplo 2.5.b	203
2. Reticula $i=1,2,3$	204
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	205
Ejemplo 2.5.c	206
3. Reticula $i=1,2,3,4,5,6,7$	206
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	208
Ejemplo 2.6.a	209
1. Para aristas suaves	212
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	213
2. Para variación uniforme	214
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	215
Ejemplo 2.6.b	216
3. Para variación uniforme	216
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	220
Ejemplo 3.1	221
1. Reticula $i=1$	223
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	224
2. Reticula $i=1,2$	225
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	226
3. Reticula $i=1,2,3,4$	227

Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	228
Ejemplo 3.2	229
1. Retícula $i=0,1$	232
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	233
2. Retícula $i=0,1,2$	234
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	235
3. Retícula $i=0,1,2,3,4$	236
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	237
Ejemplo 4.1	238
Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	242

Capítulo 6 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LOS METODOS
ELEMENTO FINITO Y DIFERENCIAS FINITAS CON LA SOLUCIÓN
ANALÍTICA

243

Capítulo 7 CONCLUSIONES

252

Bibliografías

254

Lista de tablas

257

Lista de gráficas

259

Autobiografía

261

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es la solución de algunas ecuaciones diferenciales utilizando métodos numéricos. Para determinar que método numerico utilizar tomando en cuenta la geometria del problema, las condiciones iniciales y las condiciones de frontera, los criterios que se deben de tomar para la exactitud de la solucion de la ecuacion diferencial.

Los métodos numéricos a utilizar son el método del elemento finito y el método de diferencias finitas.

Virtualmente cualquier fenómeno en la naturaleza puede ser descrito con la ayuda de leyes físicas, en términos de ecuaciones algebraicas, o de ecuaciones diferenciales.

La mayoría de los ingenieros y científicos estudian los fenómenos físicos de dos maneras.

- a) Formulación del proceso físico.
- b) Análisis numérico del modelo matemático.

La formulación matemática de un proceso físico requiere conocimientos relacionados a las leyes físicas y a menudo, herramientas matemáticas.

Desarrollar el modelo matemático de un proceso es logrado a través de las suposiciones de como trabaja el proceso. En una solución numérica, usamos un método numérico y una computadora para evaluar el modelo matemático y estimar las características del proceso.

Mientras que la obtención de la ecuación que gobierna la mayoría de los procesos no es complicada, su solución por el método exacto de análisis es muy difícil. En tales casos, métodos de análisis aproximados proporcionan alternativas más fáciles para encontrar las soluciones. Entre estos, el método de diferencias finitas y los métodos variacionales como el método de Rayleigh-Ritz y Galerkin son los más frecuentemente usados en la literatura.

En la aproximación por diferencias finitas de una ecuación diferencial, las derivadas son remplazadas por funciones en expansión de serie de Taylor.

En la aproximación por método variacional, la ecuación diferencial es puesta en su forma equivalente (Integral Pesada) y entonces la solución aproximada sobre el dominio se supone ser una combinación lineal $\left(\sum_j c_j \phi_j\right)$ de funciones de aproximación

(ϕ_j) y coeficientes indeterminados, (c_j) . Los coeficientes (c_j) son determinados tal que la integral declarada equivalente a la ecuación diferencial es satisfecha.

El método del elemento finito supera la desventaja de los métodos variacionales tradicionales porque proporciona un procedimiento sistemático para la derivación de las funciones de aproximación sobre una subregion del dominio. El método cuenta con tres características que la hacen superior sobre los demás métodos.

Primero. Un dominio con una geometría compleja es representado como una colección de subdominios de geometría simple, llamados elementos finitos.

Segundo. Sobré cada elemento finito las funciones de aproximación son derivadas usando la idea básica de que cualquier función continua puede ser representada por una combinación lineal de polinomios algebraicos.

Tercero. Las relaciones algebraicas entre los coeficientes indeterminados (valores nodales) son obtenidas satisfaciendo la ecuación gobernante, a menudo en forma de integral pesada sobre cada elemento.

Las funciones de aproximación son derivadas usando conceptos de teoría de interpolación, y son por lo tanto llamadas funciones de interpolación.

CAPITULO 1

METODO DE ELEMENTO FINITO

1.1) PASOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS DE ELEMENTO FINITO

1) Discretización (representación) del dominio dado en una colección de elementos finitos. (Este paso puede ser pospuesto hasta que la formulación de la ecuación del elemento finito este completa).

a) Construir la malla de los elementos finitos preseleccionados.

b) Numerar los nodos y elementos.

c) Generar las propiedades de la geometría (e.g., coordenadas y área de sección Transversal) necesarios para el problema.

2) Derivación de las ecuaciones del elemento para todos los elementos típicos en la malla.

a) Construir la formulación variacional de la ecuación diferencial sobre un típico elemento.

b) Suponer que una variable dependiente (u) de la forma ($u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$) y sustituirla

en el paso (2 a) para obtener la ecuación del elemento de la forma

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\}$$

c) Seleccione la función de interpolación para el elemento (ψ_i) y calcule los elementos de la matriz.

3) Ensamble las ecuaciones de cada uno de los elementos para obtener las ecuaciones del problema completo.

a) Identificar las condiciones de continuidad entre los elementos también las variables primarias (relaciones entre los grados de libertad locales, grados de libertad globales y conectividad de los elementos) para relacionar los nodos del elemento a los nodos globales.

b) Identificar las condiciones de equilibrio entre las variables secundarias (relaciones entre las fuentes locales o componentes de fuerzas y las componentes de fuentes globalmente especificadas).

c) Ensamble las ecuaciones de los elementos usando los pasos (3 a) y (3 b).

4) Imposición de las condiciones frontera del problema.

a) Identificar los grados de libertad de la variable primaria globalmente.

b) Identificar los grados de libertad de la variable secundaria globalmente.

5) Solución de las ecuaciones ensambladas.

6) Postprocesamiento de los resultados.

a) Calcule el gradiente de la solución o otras cantidades deseadas de los grados de libertad de la variable primaria calculada en el paso (5).

b) Represente los resultados en forma tabular o en forma gráfica.

1.2) PROBLEMA MODELO CON VALORES EN LA FRONTERA

Considere el problema de encontrar la función $u(x)$ que satisface la ecuación diferencial.

$$-\frac{d}{dx}\left(a \frac{du}{dx}\right) + cu - q = 0 \quad \Omega = (0, L) \quad (1.1)$$

y las condiciones frontera:

$$u(0) = u_0, \quad \left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=L} = Q_0 \quad (1.2)$$

donde $a = a(x)$, $c = c(x)$, $q = q(x)$, u_0 y Q_0 son los datos del problema.

La ecuación (1.2) puede representar una descripción analítica de algunos procesos físicos. Por ejemplo transferencia de calor por conducción y convección en una pared plana o aleta (transferencia de calor 1-D), flujo a través de canales y tubos, deflexión transversal de cables, deformación axial de barras y otros procesos físicos descritos por la tabla (1.1).

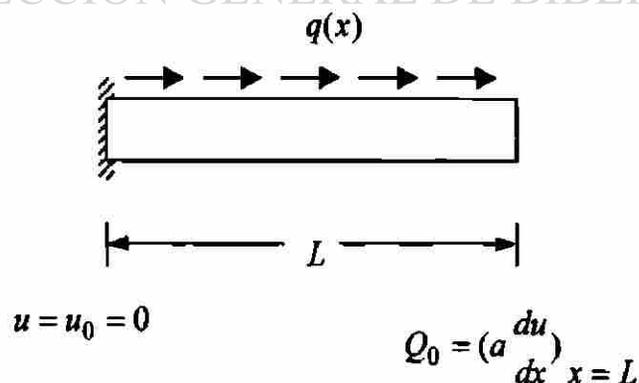
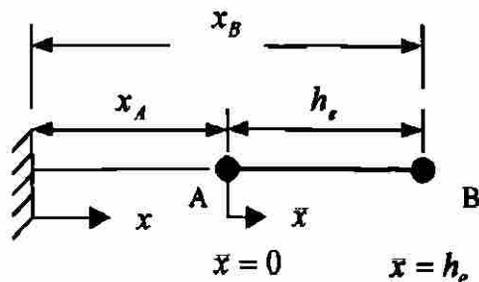


Figura 1.1 Elemento finito dominio en una dimensión

PASO 1: DISCRETIZACION

Representación del dominio dado en una colección de elementos finitos preseleccionados.



$$\bar{x} = x - x_A$$

x = Coordenadas globales del elemento

\bar{x} = Coordenadas locales del elemento

$$u(x_A) = u_1^e \quad u(x_B) = u_2^e$$

$$Q_1^e \equiv -\left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=x_A} \rightarrow \quad \bullet \quad \xrightarrow{e} \quad \bullet \quad \rightarrow \quad Q_2^e \equiv \left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=x_B} \quad \text{®}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

u = Variable primaria del elemento

Q = Variable secundaria del elemento

PASO 2: DERIVACION DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

La derivación de las ecuaciones del elemento finito, son ecuaciones algebraicas que relacionan la variable primaria con la variable secundaria en los nodos del elemento, involucra tres pasos.

- Construir la forma débil.
- Suponer la forma de la solución aproximada sobre el elemento finito.
- Derivar las ecuaciones del elemento finito para sustituir la solución aproximada en la forma débil.

a) Construcción de la forma débil

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[- \frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + cu - q \right] dx \quad (1.3 a)$$

$$0 = - \int_{x_A}^{x_B} w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] dx + \int_{x_A}^{x_B} w [cu - q] dx \quad (1.3 b)$$

Integrando por partes la primera integral de la ecuación (1.3 b).

$$\int_{x_A}^{x_B} w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] dx = wa \frac{du}{dx} \Big|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx$$

Sustituimos el resultado de la integral en la ecuación (1.3 b) para obtener la forma débil de la ecuación diferencial (1.1).

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + cuw - wq \right] dx - \left[w \left(a \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_A}^{x_B} \quad (1.4)$$

Nota:

Los coeficientes de la función de peso (w) son llamadas variables secundarias, y sus especificaciones constituyen condiciones de frontera natural ($a \frac{du}{dx} = Q$).

La variable dependiente en las condiciones de frontera son llamadas variables primarias, sus especificaciones constituyen las condiciones de frontera esencial (u).

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + cuw - wq \right] dx - \left[w \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_B} - w \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_A} \right] \quad (1.5)$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + cuw - wq \right] dx - w(x_B)Q_B - w(x_A)Q_A \quad (1.6)$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada.

1) La solución aproximada debe ser continua sobre el elemento, y diferenciable, como es requerido por la forma débil.

2) Debe ser un polinomio completo, que incluya los términos desde el menor orden hasta el de mayor orden.

3) Debe ser una función de interpolación de la variable primaria en los nodos del elemento finito.

I) Aproximación Lineal

$$U^e = a + bx \quad (1.7)$$

donde a y b son constantes.

$$\begin{aligned} U^e(x_A) &= u_1^e \\ U^e(x_B) &= u_2^e \end{aligned} \quad (1.8)$$

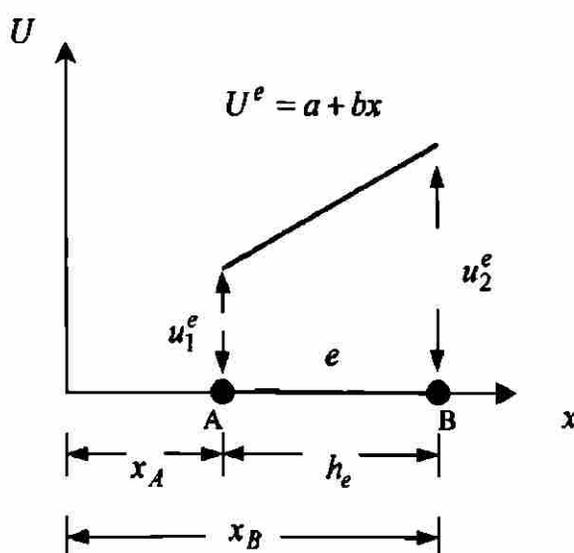


Figura 1.2 Elemento lineal una dimensión

Expresando la ecuación (1.8) en términos de (u_1^e) y (u_2^e)

$$u_1^e = a + bx_A$$

$$u_2^e = a + bx_B$$

(1.9 a)

o en forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (1.9 b)$$

invirtiendo la matriz (1.9 b), obtenemos

$$a = \frac{1}{h_e} (u_1^e x_B - u_2^e x_A)$$

$$b = \frac{1}{h_e} (u_2^e - u_1^e)$$

(1.9 c)

donde $h_e = x_B - x_A$. Sustituimos (1.9 c) en (1.7)

$$U^e = \begin{pmatrix} x_B - x \\ h_e \end{pmatrix} u_1^e + \begin{pmatrix} x - x_B \\ h_e \end{pmatrix} u_2^e \quad (1.9 d)$$

La ecuación (1.9 d) es una forma estándar del elemento finito. Los valores nodales son multiplicados por funciones lineales de (x) , que son llamadas funciones de forma o funciones de interpolación. Estas funciones son denotadas por (ψ_i) con un subíndice que indica el nodo donde es especificada la función de forma. Las funciones de forma en (1.9 d) son denotadas por (ψ_1^e, ψ_2^e) .

$$\psi_1^e = \begin{pmatrix} x_B - x \\ h_e \end{pmatrix} \text{ y } \psi_2^e = \begin{pmatrix} x - x_A \\ h_e \end{pmatrix} \quad (1.10 \text{ a})$$

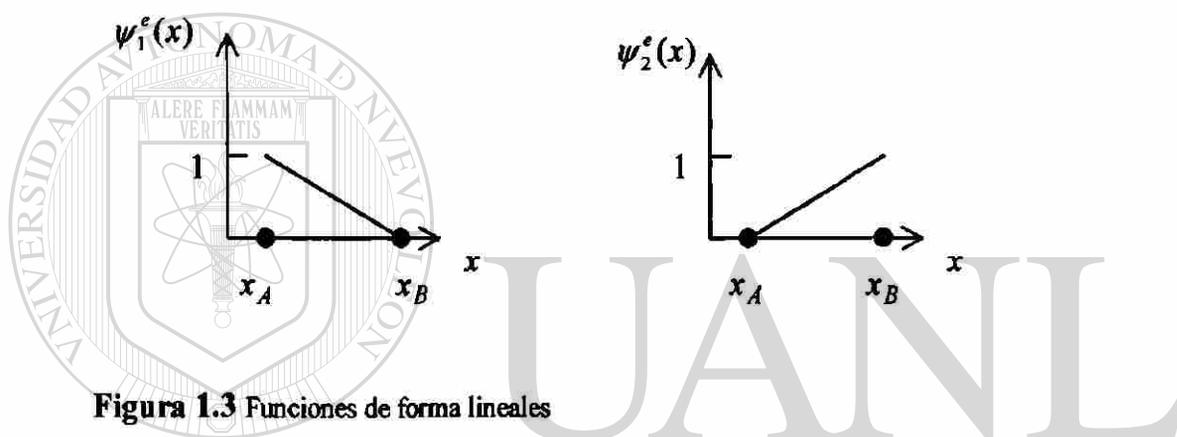


Figura 1.3 Funciones de forma lineales

La aproximación lineal expresadas en coordenadas locales

$$\bar{x} = x - x_A$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$U^e = \begin{pmatrix} 1 - \bar{x} \\ h_e \end{pmatrix} u_1^e + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ h_e \end{pmatrix} u_2^e \quad (1.10 \text{ b})$$

donde las funciones de forma serán:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 - \bar{x} \\ h_e \end{pmatrix}$$

$$\psi_2^e(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ h_e \end{pmatrix} \quad (1.10 \text{ c})$$

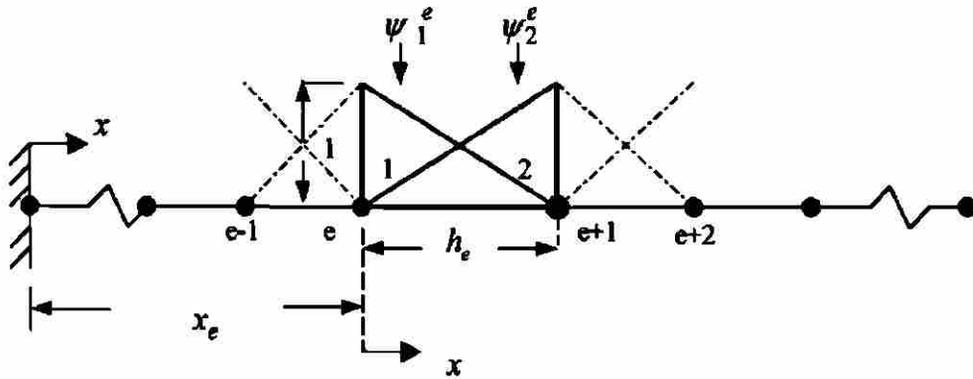


Figura 1.4 Funciones de interpolación lineales en coordenadas locales

Sustituyendo las funciones de interpolación en la ecuación (1.7) obtenemos la forma que tendrá la aproximación lineal.

$$U^e = \psi_1^e(x)u_1^e + \psi_2^e(x)u_2^e$$

$$U^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(x)u_j^e \quad (1.10 d)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

II) Aproximación Cuadrática.

$$U^e = a + bx + cx^2 \quad (1.11)$$

Donde a , b y c son constantes.

$$\begin{aligned} U^e(x_1^e) &= u_1^e \\ U^e(x_2^e) &= u_2^e \\ U^e(x_3^e) &= u_3^e \end{aligned} \quad (1.12)$$

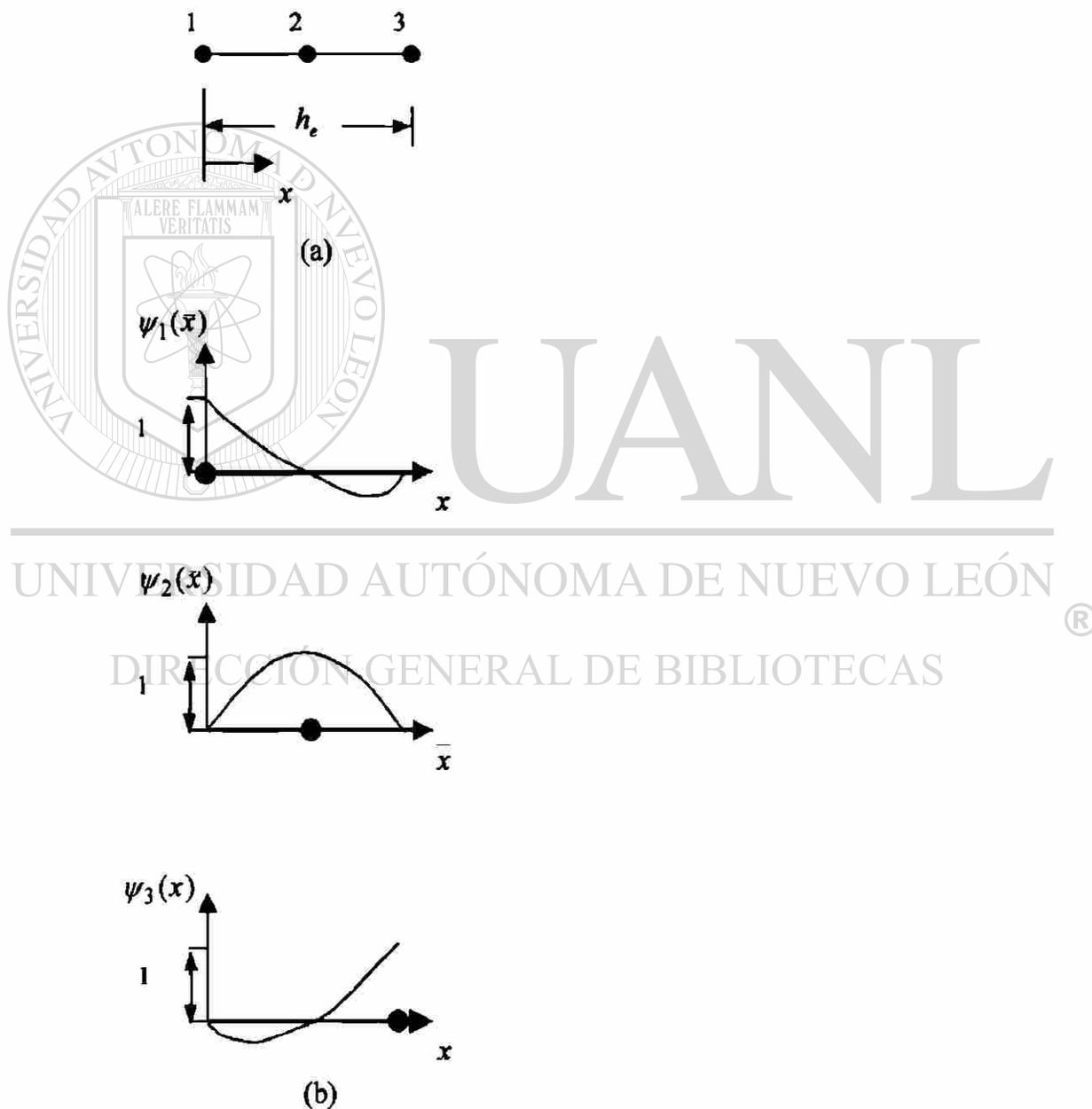


Figura 1.5 Elemento cuadrático asociado con funciones de interpolación (a),(b).

Expresando la ecuación (1.11) en términos de $(u_1^e), (u_2^e)$ y (u_3^e)

$$\begin{aligned} u_1^e &= a + bx_1^e + c(x_1^e)^2 \\ u_2^e &= a + bx_2^e + c(x_2^e)^2 \\ u_3^e &= a + bx_3^e + c(x_3^e)^2 \end{aligned} \quad (1.13 \text{ a})$$

o en forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 \\ 1 & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.13 \text{ b})$$

solucionando el sistema de ecuaciones para a, b, c .

$$a = \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e u_i^e \quad \text{donde} \quad \alpha_i^e = x_j^e(x_k^e) - x_k^e(x_j^e)^2 \quad \text{y} \quad D^e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e \quad (1.14 \text{ a})$$

$$b = \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \beta_i^e u_i^e \quad \text{donde} \quad \beta_i^e = (x_j^e)^2 - (x_k^e)^2 \quad (1.14 \text{ b})$$

$$c = \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \gamma_i^e u_i^e \quad \text{donde} \quad \gamma_i^e = -(x_j^e - x_k^e) \quad (1.14 \text{ c})$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

La ecuación (1.11) toma la forma

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$U^e(x) = \psi_1^e(x)u_1^e + \psi_2^e(x)u_2^e + \psi_3^e(x)u_3^e$$

$$U^e(x) = \sum_{j=1}^3 \psi_j^e(x)u_j^e \quad (1.15)$$

donde las ψ_j^e son las funciones de interpolación de lagrange cuadraticas.

$$\psi_i^e(x) = \frac{1}{D^e} (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e x^2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.16)$$

Los subíndices usados en las ecuaciones (1.14) permutan en orden natural,

$$\begin{aligned} \text{si } i=1 \text{ entonces } j=2 \text{ y } k=3 \\ \text{si } i=2 \text{ entonces } j=3 \text{ y } k=1 \\ \text{si } i=3 \text{ entonces } j=1 \text{ y } k=2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Las funciones de interpolación cuadráticas pueden ser expresadas en términos de coordenadas locales (x), con el origen fijo en el nodo (1). Las coordenadas globales (x) están relacionadas con las coordenadas locales (\bar{x}) por la relación ($x = x_1^e + \bar{x}$) donde ($x_1^e = x_A$) que es la coordenada global del primer nodo del elemento (Ω^e).

Para un elemento cuadrático con el nodo interior, nodo (2), localizado en ($x = \alpha h_e$), ($x_2^e = x_1^e + \alpha h_e$), para ($\alpha = \frac{1}{2}$), cuando el nodo (2) esta localizado a la mitad del elemento, las funciones de interpolación serán.

$$\psi_1^e(x) = \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right)$$

$$\psi_2^e(x) = 4 \frac{x}{h_e} \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \quad (1.18)$$

$$\psi_3^e(x) = -\frac{x}{h_e} \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right)$$

Propiedades de las funciones de interpolación:

$$(1) \quad \psi_i^e(x_j^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.19 \text{ a})$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \psi_j^e(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j^e}{dx} = 0 \quad (1.19 \text{ b})$$

C) Derivar las ecuaciones del elemento finito para sustituir la solución aproximada en la forma débil.

La sustitución de (1.10 d) o (1.15) en (1.6) deberá dar las ecuaciones algebraicas necesarias para los valores nodales (u_i^e) y (Q_i^e) del elemento (Ω^e). Para formular el modelo del elemento finito basado en la forma débil (1.6), no es necesario decidir a priori el grado de aproximación de (U^e). El modelo puede ser desarrollado para un grado arbitrario de función de interpolación:

$$u \approx U^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \quad (1.20)$$

Donde ψ_j^e son las funciones de interpolación de Lagrange de grado ($n-1$). Cuando ($n > 2$), la forma débil en (1.6) debe ser modificada para incluir una variable secundaria no cero.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wq \right] dx - \sum_{i=1}^n w(x_i^e) Q_A \quad (1.21)$$

donde (x_i^e) es la coordenada global del nodo (i) del elemento (Ω^e). Si los nodos (1) y (n) son los puntos finales del elemento entonces (Q_1^e) y (Q_n^e) representan los puntos fuentes desconocidos, y todas las otras (Q_i^e) son siempre conocidas.

Siguiendo el procedimiento de Rayleigh-Ritz sustituimos (1.20) por (u) y

(ψ_1^e), (ψ_2^e)...(ψ_n^e) por (w) en la forma débil (1.21) para obtener las (n) ecuaciones algebraicas.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_1^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_1^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_1^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_1^e(x_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_2^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_2^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_2^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_2^e(x_j^e) Q_j^e$$

:
:
:

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_n^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c \psi_n^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_n^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_n^e(x_j^e) Q_j^e \quad (1.21 a)$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como

$$0 = \sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.21 b)$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = B(\psi_i^e, \psi_j^e) \quad (1.21 c)$$

$$f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} q \psi_i^e dx = l(\psi_i^e)$$

note que la propiedad (1) de las funciones de interpolación (1.19 a) es usada para escribir.

$$\sum_{j=1}^n \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e \quad (1.22)$$

Las ecuaciones (1.21 a) pueden ser expresadas en términos de los coeficientes

(K_{ij}^e, f_i^e, Q_i^e) como:

$$\begin{aligned} K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e + \dots + K_{1n}^e u_n^e &= f_1^e + Q_1^e \\ K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e + \dots + K_{2n}^e u_n^e &= f_2^e + Q_2^e \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ K_{n1}^e u_1^e + K_{n2}^e u_2^e + \dots + K_{nn}^e u_n^e &= f_n^e + Q_n^e \end{aligned} \quad (1.23 a)$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas (1.21 a) pueden ser escrita como.

$$[K^e]\{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (1.23 \text{ b})$$

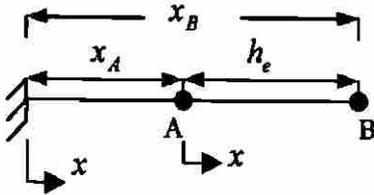
La matriz $[K^e]$ es llamada matriz de coeficientes, en aplicaciones de mecánica estructural. El vector columna $\{f^e\}$ es el vector fuente, o vector fuerza en problemas de mecánica estructural. Note que (1.23) contiene $(2n)$ incógnitas: $(u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e)$ y $(Q_1^e, Q_2^e, \dots, Q_n^e)$, llamadas variables primarias y secundarias del elemento grados de libertad nodal; por lo tanto, no pueden ser resueltas sin tener adicionalmente (n) condiciones. Algunas de estas provienen de las condiciones frontera y el resto por balance de las variables secundarias (Q_i^e) en los nodos comunes a varios elementos. Este balance puede ser implementado poniendo los elementos juntos (ensamblando las ecuaciones de los elementos). Ensamblando y imponiendo las condiciones frontera, debemos de obtener exactamente el mismo numero de ecuaciones algebraicas que el numero de variables primarias y secundarias desconocidas.

La matriz de coeficientes $[K^e]$ es simétrica, y el vector fuente $\{f^e\}$ puede ser evaluado para un elemento dado y datos $(a, c, \text{ y } q)$. Para un elemento con valores constantes de $(a, c, \text{ y } q)$ los coeficientes de $[K_{ij}^e]$ y $\{f^e\}$ pueden ser evaluados para un elemento típico.

Ejemplo: Determinar la matriz $[K^e]$ y el vector $\{f^e\}$ de la ecuación (1.23 b).

a) Elemento Lineal.

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ y el vector fuente $\{f^e\}$ se calculan de la siguiente manera.



$$K_{ij}^e = \int_b^{h_e} \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$\psi_1^e(x) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e},$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{1}{h_e},$$

$$\psi_2^e(x) = \frac{\bar{x}}{h_e},$$

$$\frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} = \frac{1}{h_e}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$K_{11}^e = \int_b^{h_e} \left[a_e \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(-\frac{1}{h_e} \right) + c_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] dx$$

$$K_{11}^e = \frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{3} c_e h_e$$

$$K_{12}^e = \int_b^{h_e} \left[a_e \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + c_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] dx$$

$$K_{12}^e = -\frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{6} c_e h_e = K_{21}^e$$

$$K_{22}^e = \int_b^{h_e} \left[a_e \left(\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + c_e \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] dx = \frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{3} c_e h_e$$

Similarmente:

$$f_i^e = \int_0^{h_e} q_e \psi_i^e d\bar{x}$$

$$f_1^e = \int_0^{h_e} q_e \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) dx = \frac{1}{2} q_e h_e$$

$$f_2^e = \int_0^{h_e} q_e \frac{x}{h_e} dx = \frac{1}{2} q_e h_e$$

para (q_e) constante el vector fuente total $(q_e h_e)$ se distribuye igualmente en los dos nodos.

Los coeficientes de la matriz y el vector columna son:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.24 a)$$

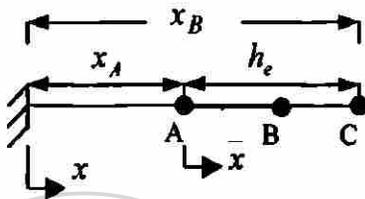
$$\{f^e\} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{Bmatrix}$$

$$\{f^e\} = \frac{q_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.24 b)$$

Ejemplo: Determinar la matriz $[K^e]$ y el vector $\{f^e\}$ de la ecuación (1.23 b)

b) Elemento Cuadrático.

Para una malla con elementos cuadráticos en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ y el vector fuente $\{f^e\}$ se calculan de la siguiente manera.



$$K_{ij}^e = \int_0^{h_e} \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) d\bar{x}$$

$$f_i^e = \int_0^{h_e} q_e \psi_i^e d\bar{x}$$

Las funciones de interpolación de Lagrange para un elemento cuadrático $\psi_i^e(x)$ para $(i=1,2,3)$ son:

$$\psi_1^e(x) = \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right)$$

$$\psi_2^e(x) = \frac{4x}{h_e} \left(1 - \frac{x}{h_e}\right)$$

$$\psi_3^e(x) = -\frac{\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e}\right)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Las derivadas de las funciones de interpolación.

$$\frac{d\psi_1^e}{dx} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2}$$

$$\frac{d\psi_2^e}{dx} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{x}}{h_e^2}$$

$$\frac{d\psi_3^e}{dx} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2}$$

Los coeficientes de la matriz de rigidez.

$$K_{11}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_1^e \psi_1^e) d\bar{x} = \frac{7}{3} \frac{a_e}{h_e} + \frac{2}{15} c_e h_e$$

$$K_{12}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_1^e \psi_2^e) d\bar{x} = -\frac{8}{3} \left(\frac{a_e}{h_e} \right) + \frac{1}{15} c_e h_e$$

$$K_{13}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_1^e \psi_3^e) d\bar{x} = \frac{1}{3} \left(\frac{a_e}{h_e} \right) - \frac{1}{30} c_e h_e$$

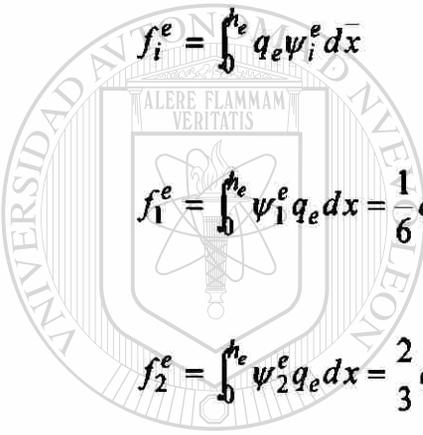
$$K_{22}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_2^e \psi_2^e) d\bar{x} = \frac{16}{3} \left(\frac{a_e}{h_e} \right) + \frac{32}{60} c_e h_e$$

$$K_{23}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_2^e \psi_3^e) d\bar{x} = -\frac{8}{3} \left(\frac{a_e}{h_e} \right) + \frac{1}{15} c_e h_e$$

$$K_{33}^e = \int_0^{h_e} (a_e \frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_3^e \psi_3^e) d\bar{x} = \frac{7}{3} \left(\frac{a_e}{h_e} \right) + \frac{2}{15} c_e h_e$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{a_e}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (1.25 \text{ a})$$



$$f_i^e = \int_0^{h_e} q_e \psi_i^e dx$$

$$f_1^e = \int_0^{h_e} \psi_1^e q_e dx = \frac{1}{6} q_e h_e$$

$$f_2^e = \int_0^{h_e} \psi_2^e q_e dx = \frac{2}{3} q_e h_e$$

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$f_3^e = \int_0^{h_e} \psi_3^e q_e dx = \frac{1}{6} q_e h_e$$

$$\{f^e\} = \frac{q_e h_e}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

(1.25 b)

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

En el manejo de las ecuaciones del elemento, aislamos un elemento típico (e) de la malla y formulamos el problema variacional (forma débil de la ecuación diferencial) y se desarrolla el modelo del elemento finito, para resolver el problema completo debe regresar el elemento a su posición original e imponer las condiciones frontera.

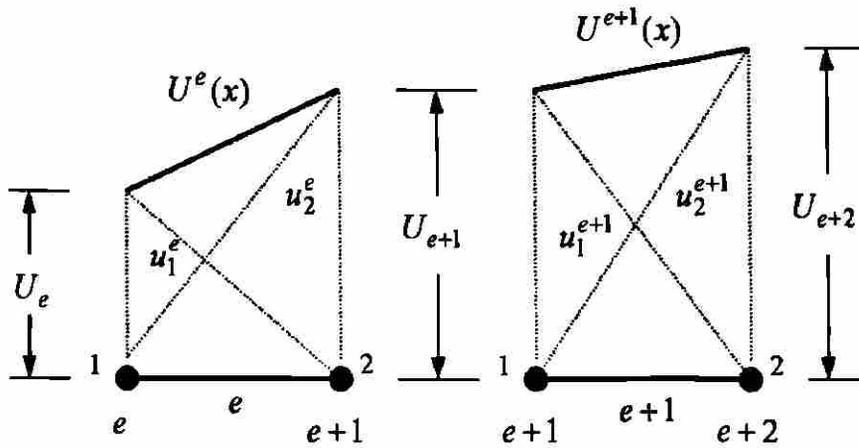
En el ensamble de los elementos se deben de imponer las siguientes dos condiciones.

- 1) Continuidad de la variable primaria en los elementos a conectar

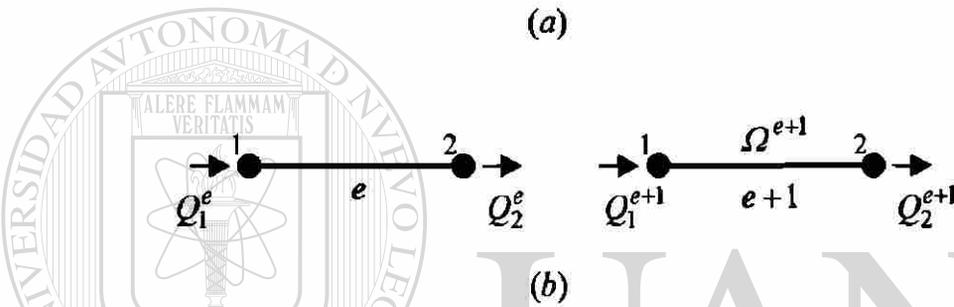
$$U_n^e = U_1^{e+1} \quad (1.26 a)$$

- 2) Balance de la variable secundaria en los nodos a conectar

$$Q_n^e = Q_1^{e+1} = \begin{cases} 0 & \text{si no se aplican fuentes externas} \\ Q_0 & \text{si una fuente externa es aplicada} \end{cases} \quad (1.26 b)$$



(a)



(b)

Figura 1.6 Ensamble de dos elementos lineales:

Continuidad de la variable primaria (a), Balance de la variable secundaria (b).

La continuidad de la variable primaria ($u_2^e = u_1^{e+1}$) y el balance de la variable secundaria ($Q_2^e + Q_1^{e+1}$) para una malla con elementos lineales como se muestra en la (fig. 1.6) Se realiza de la siguiente manera:

La continuidad entre los elementos de la variable primaria es impuesta para renombrar las dos variables (u_n^e) y (u_1^{e+1}) en ($x = x_N$) como uno y el mismo, normalmente el valor de (u) en el nodo global (N):

$$u_n^e = u_1^{e+1} \equiv U_N \quad (1.27)$$

Donde $N = (n-1)e + 1$ es el número del nodo global que corresponde al nodo (n) del elemento (Ω^e) y el nodo (1) del elemento (Ω^{e+1}). Por ejemplo para una malla con dos elementos lineales (fig. 1.6).

$$\begin{aligned} u_1^1 &= U_1 \\ u_2^1 &= u_1^2 = U_2 \\ u_2^2 &= u_1^3 = U_3 \end{aligned} \quad (1.28)$$

El balance de las variables secundarias puede ser interpretado como la continuidad de

$(a \frac{du}{dx})$ no de $(a \frac{dU^e}{dx})$ en el punto común al elemento (Ω^e) y (Ω^{e+1}) cuando no hay cambios en $(a \frac{du}{dx})$ impuestos externamente. Por ejemplo para una malla con dos elementos lineales (fig. 1.6).

$$\left(a \frac{du}{dx} \right)_n^e = \left(a \frac{du}{dx} \right)_1^{e+1} \quad (1.29 a)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

La ecuación anterior también se puede escribir como:

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\left(a \frac{du}{dx} \right)^e + \left(-a \frac{du}{dx} \right)^{e+1} = 0$$

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = 0 \quad (1.29 b)$$

El signo menos en el segundo termino de la ecuación anterior es de acuerdo a los cosenos directores.

Para una malla con dos elementos lineales:

Elemento (1)

$$K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 = f_1^2 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 U_1 + K_{22}^1 U_2 = f_2^1 + Q_2^1$$

(1.30 a)

Elemento (2)

$$K_{11}^2 U_2 + K_{12}^2 U_3 = f_1^2 + Q_1^2$$

$$K_{21}^2 U_2 + K_{22}^2 U_3 = f_2^2 + Q_2^2$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas ecuaciones ensambladas. Estas contienen la suma de los coeficientes y términos fuente en los nodos comunes a los dos elementos.

Las ecuaciones (1.30 a) pueden expresarse en forma de matriz.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix} \quad (1.30 b)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PASO 4: IMPOSICION DE LAS CONDICIONES FRONTERA

Imponer las condiciones frontera, ambas esencial y natural, en las ecuaciones ensambladas. Un problema particular difiere de otros en la especificación de los datos y en las condiciones de frontera.

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Resolver las ecuaciones para los valores nodales desconocidos.

PASO 6: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

La solución de las ecuaciones del elemento finito da el valor nodal de la variable primaria que se desconoce. (Desplazamiento, velocidad, o temperatura).

Postprocesamiento de los resultados incluye uno o más de lo siguiente.

- 1) Cálculo de cualquier variable secundaria (el gradiente de la solución)
- 2) Interpretación de los resultados para comprobar que la solución tenga sentido (un entendimiento de los procesos físicos y experiencias son las guías cuando otras soluciones no son disponibles para comparar).
- 3) Tabular y o presentación gráfica de los resultados.

CAPITULO 2

PROBLEMAS EN ESTADO ESTABLE UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

Ejemplo 2.1a. Considere una aleta rectangular como lo muestra la figura.

Determine la distribución de temperaturas y el flujo de calor usando:

I) Dos elementos lineales

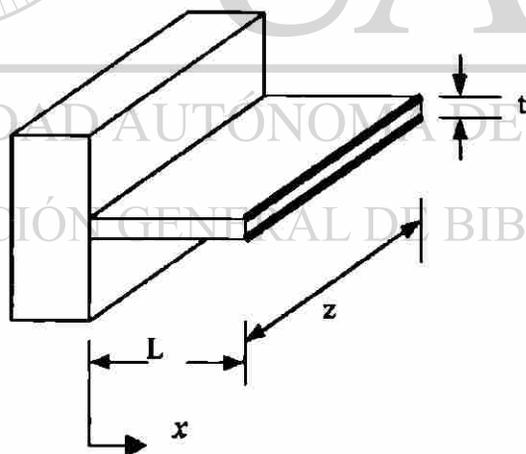


Figura 2.1 Aleta rectangular

Datos:

$$T_0 = \text{Temperatura en la base de la aleta} = 250^\circ\text{C}$$

$$T_\infty = \text{Temperatura del medio ambiente} = 75^\circ\text{C}$$

$$t = \text{Espesor de la aleta} = 0.254 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$k = \text{Conductividad térmica del material de la aleta} = 207.6 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$\beta = \text{Coeficiente de película} = 283.9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

p = Perímetro de la aleta

A = Área de sección transversal

$$m^2 = \frac{\beta p}{kA} = 1076.79$$

$$L = \text{Longitud de la aleta} = 1.524 \times 10^{-2} \text{ m}$$

h = Espacio entre nodos

$$h = \frac{L}{2} = 0.00762 \text{ m}$$

Ecuación diferencial de una aleta rectangular.

$$-\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\beta p}{kA} (T - T_\infty) = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

Las condiciones frontera de la ecuación diferencial.

$$T(0) = T_0 \quad (kA \frac{dT}{dx}) \Big|_{x=L} = 0$$

Haciendo un cambio de variable:

$$\theta = T - T_\infty \quad \theta_0 = T_0 - T_\infty$$

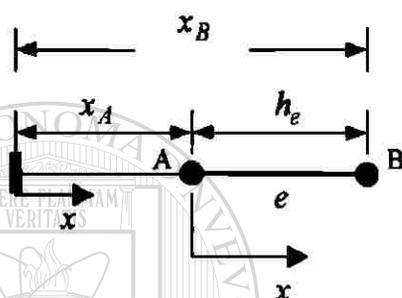
$$m^2 = \frac{\beta p}{kA}$$

La ecuación diferencial y las condiciones de frontera toman la forma

$$-\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[-\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta \right] dx$$

Resolviendo la integral e integrando por partes

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - w \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - w(x_B) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_B} - w(x_A) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_A}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - \sum_{j=1}^2 w(x_j^e) Q_j^e \quad (a)$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

I) Aproximación Lineal.

$$\theta^e = \sum_{j=1}^2 \theta_j^e \psi_j^e(x) \quad (b)$$

Donde (θ_j^e) son los parámetros a ser determinados, $\psi_j^e(x)$ son las funciones de aproximación.

Sustituyendo (b) por (θ) y (w) por (ψ_i^e) en (a)

$$0 = \sum_{j=1}^2 K_{ij}^e \theta_j^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2)$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m^2 \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = B(\psi_i^e, \psi_j^e)$$

$$\sum_{j=1}^2 \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escrita como:

$$[K^e] \{\theta^e\} = \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \int_b^{h_e} \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m^2 \psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{1}{h_e}, \quad \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} = \frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^e = \int_b^{h_e} \left[\left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(-\frac{1}{h_e} \right) + m^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x} = \frac{1}{h_e} + \frac{1}{3} m^2 h_e$$

$$K_{12}^e = \int_b^{h_e} \left[\left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + m^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x} = -\frac{1}{h_e} + \frac{1}{6} m^2 h_e$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e$$

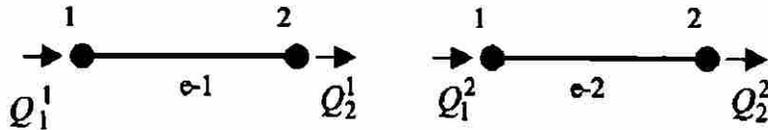
$$K_{22}^e = \int_b^{h_e} \left[\left(\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + m^2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x} = \frac{1}{h_e} + \frac{1}{3} m^2 h_e$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{m^2 h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para dos elementos lineales.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 \theta_1^1 + K_{12}^1 \theta_2^1 = -Q_1^1$$

$$K_{21}^1 \theta_1^1 + K_{22}^1 \theta_2^1 = Q_2^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 \theta_1^2 + K_{12}^2 \theta_2^2 = -Q_1^2$$

$$K_{21}^2 \theta_1^2 + K_{22}^2 \theta_2^2 = Q_2^2$$

Balance de la variable primaria.

$$\theta_1^1 = \theta_1$$

$$\theta_2^1 = \theta_1^2 = \theta_2$$

$$\theta_2^2 = \theta_3$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas ecuaciones ensambladas. Estas contienen la suma de los coeficientes y términos fuente en los nodos comunes a los dos elementos.

Las ecuaciones pueden expresarse en forma de matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ (Q_2^1) + (-Q_1^2) \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

En el balance de la variable secundaria en los nodos a conectar ecuación (1.21 b) se obtiene como resultado:

$$(Q_2^1) + (-Q_1^2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICION DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$\theta_1 = T_0 - T_\infty$$

$$Q_2^2 = \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 133.96 & -129.86 & 0 \\ -129.86 & 267.96 & -129.86 \\ 0 & -129.86 & 133.96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCION DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para $(\theta_2), (\theta_3)$ y (Q_1^1)

$$\theta_2 = 0.913\theta_1$$

$$\theta_3 = 0.886\theta_1$$

$$T_2 - T_\infty = 0.913(T_0 - T_\infty)$$

$$T_3 - T_\infty = 0.886(T_0 - T_\infty)$$

$$T_2 = 234.77^\circ C$$

$$T_3 = 230.5^\circ C$$

TABLA 2.1a

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia $x \text{ m}$	Temperatura Dos elementos lineales $T^\circ C$	Temperatura Solución exacta $T^\circ C$
0	250	250
0.00762	234.77	234.95
0.01524	230.05	230.05

PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

 $Q_1^1 =$ Flujo de calor en la base de la aleta.

$$Q_1^1 = - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 2694.6 \frac{^\circ C}{m}$$

$$Q_1^1 = -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 1420.87 \frac{watts}{m}$$

Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

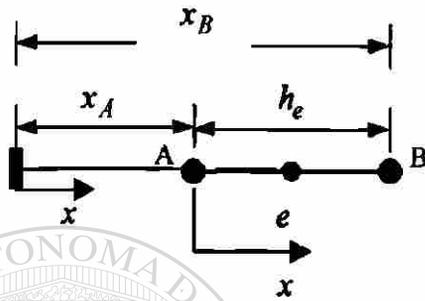
Flujo de calor Dos elementos lineales $Q \frac{watts}{m}$	Flujo de calor Solución exacta $Q \frac{watts}{m}$
1420.87	1399.3

Ejemplo 2.1b. Considere una aleta rectangular como lo muestra la (fig. 2.1).

Determine la distribución de temperaturas y el flujo de calor usando:

II) Un elemento cuadrático

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[-\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta \right] dx$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Resolviendo la integral e integrando por partes

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - w \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - w(x_B) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_B} - w(x_A) \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_A}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw}{dx} \frac{d\theta}{dx} + m^2 w \theta \right] dx - \sum_{j=1}^n w(x_j^e) Q_j^e \quad (a)$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Cuadrática.

$$\theta^e = \sum_{j=1}^3 \theta_j^e \psi_j^e(x) \quad (b)$$

Donde (θ_j^e) son los parámetros a ser determinados, $(\psi_j^e(x))$ son las funciones de aproximación.

Sustituyendo (b) por (θ) y (w) por (ψ_i^e) en (a)

$$0 = \sum_{j=1}^3 K_{ij}^e \theta_j^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, 3)$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m^2 \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = B(\psi_i^e, \psi_j^e)$$

$$\sum_{j=1}^3 \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escrita como:

$$[K^e] \{\theta^e\} = \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos cuadráticos en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \int_a^b \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m^2 \psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$\psi_1^e(x) = \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e}\right)$$

$$\psi_2^e(x) = \frac{4\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)$$

$$\psi_3^e(x) = \frac{-\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{(h_e)^2}$$

$$\frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{x}}{(h_e)^2}$$

$$\frac{d\psi_3^e}{d\bar{x}} = \frac{1}{h_e} - \frac{4\bar{x}}{(h_e)^2}$$

$$K_{11}^e = \int_b^h \left[\left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4x}{(h_e)^2} \right)^2 + m^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e}\right)^2 \right] dx$$

$$K_{11}^e = \frac{7}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{2}{15} \right)$$

$$K_{12}^e = \int_b^h \left[\left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4x}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8x}{(h_e)^2} \right) + m^2 \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right) \frac{4x}{h_e} \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \right] d\bar{x}$$

$$K_{12}^e = -\frac{8}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{1}{15} \right)$$

$$K_{13}^e = \int_b^h \left[\left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4x}{(h_e)^2} \right) \left(-\frac{1}{h_e} - \frac{4x}{(h_e)^2} \right) + m^2 \left(1 - \frac{x}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right) \left(\frac{-x}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2x}{h_e}\right) \right] dx$$

$$K_{13}^e = \frac{1}{3h_e} - m^2 h_e \left(\frac{1}{30} \right)$$

$$K_{21}^e = K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = \int_0^h \left[\left(\frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{x}}{(h_e)^2} \right)^2 + m^2 \left(\frac{4x}{h_e} \right)^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] d\bar{x}$$

$$K_{22}^e = \frac{16}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{32}{60} \right)$$

$$K_{23}^e = \int_0^h \left[\left(\frac{4}{h_e} - \frac{8x}{(h_e)^2} \right) \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{(h_e)^2} \right) + m^2 \left(\frac{4x}{h_e} \right) \left(1 - \frac{x}{h_e} \right) \left(-\frac{x}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2x}{h_e} \right) \right] dx$$

$$K_{23}^e = -\frac{8}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{1}{15} \right)$$

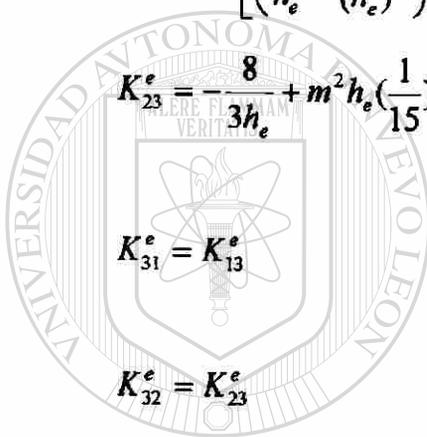
$$K_{31}^e = K_{13}^e$$

$$K_{32}^e = K_{23}^e$$

$$K_{33}^e = \int_0^h \left[\left(-\frac{1}{h_e} - \frac{4x}{(h_e)^2} \right)^2 + m^2 \left(-\frac{x}{h_e} \right)^2 \left(1 - \frac{2x}{h_e} \right)^2 \right] dx$$

$$K_{33}^e = \frac{7}{3h_e} + m^2 h_e \left(\frac{2}{15} \right)$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}$$



UANL

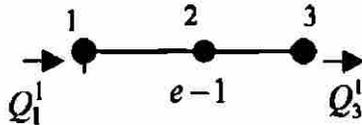
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

$$[K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \frac{m^2 h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Como nada mas es un elemento cuadrático no se tiene conectividad.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 \theta_1^1 + K_{12}^1 \theta_2^1 + K_{13}^1 \theta_3^1 = -Q_1^1$$

$$K_{21}^1 \theta_1^1 + K_{22}^1 \theta_2^1 + K_{23}^1 \theta_3^1 = 0$$

$$K_{31}^1 \theta_1^1 + K_{32}^1 \theta_2^1 + K_{33}^1 \theta_3^1 = Q_3^1$$

Balace de la variable primaria

$$\theta_1^1 = \theta_1$$

$$\theta_2^1 = \theta_2 = \theta_2$$

$$\theta_3^1 = \theta_3$$

Las ecuaciones pueden expresarse en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICION DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$\theta_1 = T_0 - T_\infty$$

$$Q_3^1 = \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones para $(\theta_2), (\theta_3)$ y (Q_1^1)

$$\theta_2 = .914\theta_1 \quad \theta_3 = 0.8869\theta_1$$

$$T_2 = 234.95^\circ C \quad T_3 = 230.2^\circ C$$

TABLA 2.1b

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia $x \text{ m}$	Temperatura Un elemento cuadrático $T^\circ C$	Temperatura Solución exacta $T^\circ C$
0	250	250
0.00762	234.95	234.95
0.01524	230.2	230.05

PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

Q_1^1 = Flujo de calor en la base de la aleta.

$$Q_1^1 = -\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 2670.9 \frac{^\circ C}{m}$$

$$Q_1^1 = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 1408.5 \frac{watts}{m}$$

Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

Flujo de calor Un elemento cuadrático $Q \frac{watts}{m}$	Flujo de calor Solución exacta $Q \frac{watts}{m}$
1408.5	1399.3

Ejemplo 2.2 a. Considere conducción de calor en estado estable en un alambre de sección transversal circular con una fuente de calor eléctrica. Supón que el radio del alambre es (R_o), este tiene una conductividad eléctrica, este transporta una corriente eléctrica de densidad (I) $amp\ cm^{-2}$. Durante la transmisión de una corriente eléctrica, algo de energía eléctrica es convertida en energía térmica. La rapidez de producción de calor por unidad de volumen es dada por ($q = \frac{I^2}{k_e}$). Suponga que la temperatura alcanzada en el alambre es suficientemente pequeña que la dependencia de la conductividad eléctrica o térmica en la temperatura puede ser despreciada.

Determine la distribución de temperaturas en el alambre.

Datos

T_3 = Temperatura en la superficie del conductor = $60^\circ c$

R_o = Radio del conductor = $2cm$

i = Corriente por el conductor = $300amp$

R = Resistencia del conductor = 0.0104Ω

L = Longitud del conductor = $10cm$

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad k = \frac{1}{\rho} \quad I = \frac{i}{\pi(R_o)^2} \quad q = \frac{I^2}{k}$$

$$\rho = 0.013\Omega - cm$$

$$I = 23.87amp - cm^{-2}$$

$$k = 76.5\Omega^{-1} - cm^{-1}$$

$$q = 7.448watts - cm^{-3}$$

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

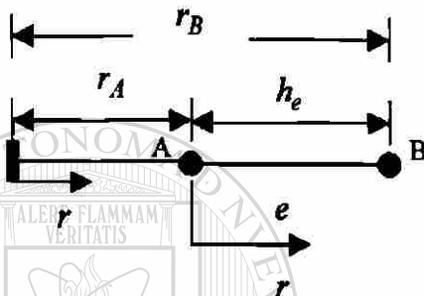
$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) = q \quad 0 \leq r \leq R_o$$

Las condiciones de frontera.

$$\left(kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r=0} = 0 \quad T(R_o) = T_o$$

I) Para dos elementos lineales

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int_V w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) - q \right] r dr d\theta dz$$

$$0 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r_A}^{r_B} w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) - q \right] r dr d\theta dz$$

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \left[-wkr \frac{d^2T}{dr^2} - wk \frac{dT}{dr} - wqr \right] dr$$

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_{r_A}^{r_B} wqr dr - \left(2w\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_A^B wqrdr - \left[w(r_B) \left(2\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_B} - w(r_A) \left(2\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A} \right]$$

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_A^B wqrdr - \sum_{j=1}^n w(r_j^e) Q_j^e \quad (a)$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Lineal.

$$T^e = \sum_{j=1}^2 T_j^e \psi_j^e(r) \quad (b)$$

Donde (T_j^e) son los parámetros a ser determinados, $(\psi_j^e(x))$ son las funciones de aproximación. Sustituyendo la ecuación (b) por (T) y (w) por (ψ_i^e) en la forma débil ecuación (a).

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_i^e}{dr} \left(\sum_{j=1}^2 T_j^e \frac{d\psi_j^e}{dr} \right) dr - 2\pi \int_A^B \psi_i^e q r dr - \sum_{j=1}^2 \psi_i^e(r_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como

$$0 = \sum_{j=1}^2 K_{ij}^e T_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2)$$

donde:

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

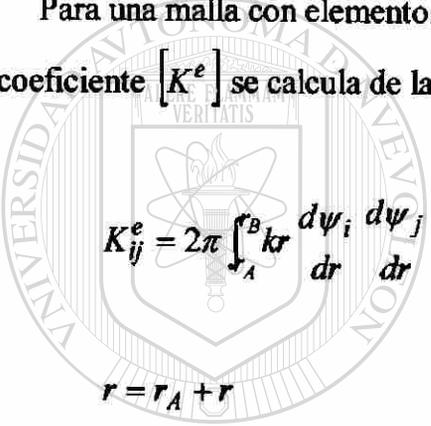
$$f_i^e = 2\pi q \int_A^B \psi_i^e r dr$$

$$Q_i^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(r_j^e) Q_j^e$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escritas como.

$$[K^e] \{T^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficiente $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.



$$K_{ij}^e = 2\pi \int_A^B k r \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

$r = r_A + \bar{r}$

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\psi_1^e = 1 - \frac{\bar{r}}{h_e}$$

$$\psi_2^e = \frac{\bar{r}}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{r}} = -\frac{1}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_2^e}{d\bar{r}} = \frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{dr} \frac{d\psi_1^e}{dr} d\bar{r} = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{1}{h_e}\right) \left(-\frac{1}{h_e}\right) d\bar{r}$$

$$K_{11}^e = \frac{2\pi k}{h_e} \left(r_A + \frac{h_e}{2} \right)$$

$$K_{12}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{dr} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{r}} d\bar{r} = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + \bar{r}) \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) d\bar{r}$$

$$K_{12}^e = -\frac{2\pi k}{h_e} \left(r_A + \frac{h_e}{2} \right)$$

$$K_{21}^e = K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_2^e}{d\bar{r}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{r}} d\bar{r} = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + \bar{r}) \left(\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) d\bar{r}$$

$$K_{22}^e = \frac{2\pi k}{h_e} \left(r_A + \frac{h_e}{2} \right)$$

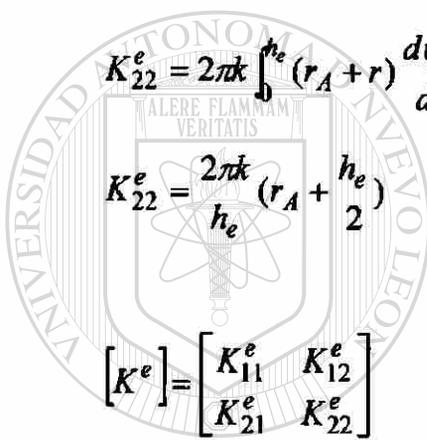
$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{2\pi k}{h_e} \left(r_A + \frac{h_e}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_i^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \psi_i^e (r_A + r) dr$$

$$f_1^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \left(1 - \frac{r}{h_e} \right) (r_A + \bar{r}) d\bar{r} = \frac{2\pi q h_e}{6} (3r_A + h_e)$$

$$f_2^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \left(\frac{\bar{r}}{h_e} \right) (r_A + r) d\bar{r} = \frac{2\pi q h_e}{6} (3r_A + 2h_e)$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



$$f_i^e = \frac{2\pi q h_e}{6} \begin{Bmatrix} 3r_A + h_e \\ 3r_A + 2h_e \end{Bmatrix}$$

Si $r_A = r_1 = 0$

$$[K^e] = \pi k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{f^e\} = \frac{\pi q (h_e)^2}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con dos elementos lineales



Elemento (1)

$$K_{11}^1 T_1^1 + K_{12}^1 T_2^1 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 T_1^1 + K_{22}^1 T_2^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

Elemento (2)

$$K_{11}^2 T_1^2 + K_{12}^2 T_2^2 = f_1^2 - Q_1^2$$

$$K_{21}^2 T_1^2 + K_{22}^2 T_2^2 = f_2^2 + Q_2^2$$

Balance de la variable primaria

$$T_1^1 = T_1$$

$$T_2^1 = T_1^2 = T_2$$

$$T_2^2 = T_3 = T_0$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas ecuaciones ensambladas. Estas contienen la suma de los coeficientes y términos fuente en los nodos comunes a los dos elementos.

Las ecuaciones pueden expresarse en forma de matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ (Q_2^1) + (-Q_1^2) \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

En el balance de la variable secundaria en los nodos a conectar ecuación (1.21 b) se obtiene como resultado:

$$(Q_2^1) + (-Q_1^2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$T(R_o) = T_0 \quad Q_1^1 = 2\pi kr \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{11}^2 + K_{22}^1) & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi k & -\pi k & 0 \\ -\pi k & 2\pi k & -\pi k \\ 0 & -\pi k & \pi k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \frac{\pi q (R_o)^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para (T_1) , (T_2) y (Q_2^2)

$$T_1 = 60.162^\circ C$$

$$T_2 = 60.129^\circ C$$

TABLA 2.2a

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Radio r cm	Temperatura Dos elementos lineales $T^\circ C$	Temperatura Solución exacta $T^\circ C$
0	60.162	60.09
1	60.129	60.07
2	60	60

PASO 6: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

$$-Q_2^2 = 2\pi R_o k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{R_o} = 46.56 \frac{wts}{cm}$$

Q = Flujo de calor disipado por el conductor en la superficie

$$-Q = (2\pi R_o L) k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{R_o} = 465.6 \text{ wts}$$

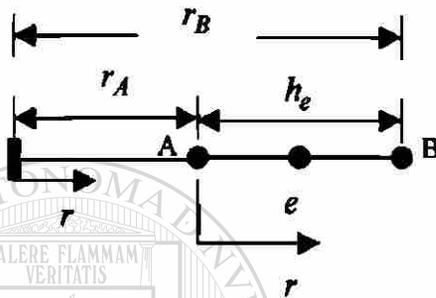
Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

Flujo de calor Dos elementos lineales Q wts	Flujo de calor Solución exacta Q wts
465.6	935.9

Ejemplo 2.2 b. Determine la distribución de temperaturas en el alambre ejemplo (2.2 a).
Usando un elemento cuadrático.

II) Elemento Cuadrático

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) - q \right] r dr d\theta dz$$

$$0 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r_A}^{r_B} w \left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) - q \right] r dr d\theta dz$$

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \left[-wkr \frac{d^2 T}{dr^2} - wk \frac{dT}{dr} - wqr \right] dr$$

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_{r_A}^{r_B} wqr dr - \left(2w\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_A^B wqrdr - \left[w(r_B) \left(2\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_B} - w(r_A) \left(2\pi kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A} \right]$$

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} dr - 2\pi \int_A^B wqrdr - \sum_{j=1}^n w(r_j^e) Q_j^e \quad (\text{a})$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Cuadrática.

$$T^e = \sum_{j=1}^3 T_j^e \psi_j^e(r) \quad (\text{b})$$

Donde (T_j^e) son los parámetros a ser determinados, $(\psi_j^e(\bar{x}))$ son las funciones de aproximación. Sustituyendo la ecuación (b) por (T) y (w) por (ψ_i^e) en la forma débil ecuación (a).

$$0 = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_i^e}{dr} \left(\sum_{j=1}^3 T_j^e \frac{d\psi_j^e}{dr} \right) dr - 2\pi \int_A^B \psi_i^e q r dr - \sum_{j=1}^3 \psi_i^e(r_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como

$$0 = \sum_{j=1}^3 K_{ij}^e T_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, 3)$$

donde:

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

$$f_i^e = 2\pi q \int_A^B \psi_i^e r dr$$

$$Q_i^e = \sum_{j=1}^n \psi_j^e(r_j^e) Q_j^e$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escritas como.

$$[K^e] \{T^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficiente $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_A^B kr \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

$$r = r_A + \bar{r}$$

$$K_{ij}^e = 2\pi \int_0^1 k(r_A + r) \frac{d\psi_i}{dr} \frac{d\psi_j}{dr} dr$$

$$\psi_1^e = \left(1 - \frac{\bar{r}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{r}}{h_e}\right)$$

$$\psi_2^e = \frac{4\bar{r}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{r}}{h_e}\right)$$

$$\psi_3^e = \frac{-r}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{r}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_1^e}{dr} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2}$$

$$\frac{d\psi_2^e}{dr} = \frac{4}{h_e} - \frac{8r}{(h_e)^2}$$

$$\frac{d\psi_3^e}{dr} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2}$$

$$K_{11}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{dr} \frac{d\psi_1^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right)^2 dr$$

$$K_{11}^e = 2\pi k \left[\frac{13r_A}{h_e} + \frac{1}{2} \right]$$

$$K_{12}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{dr} \frac{d\psi_2^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8r}{(h_e)^2} \right) dr$$

$$K_{12}^e = 2\pi k \left[-\frac{8r_A}{h_e} - \frac{2}{3} \right]$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$K_{13}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_1^e}{dr} \frac{d\psi_3^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right) \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right) dr$$

$$K_{13}^e = 2\pi k \left[\frac{r_A}{3h_e} + \frac{1}{6} \right]$$

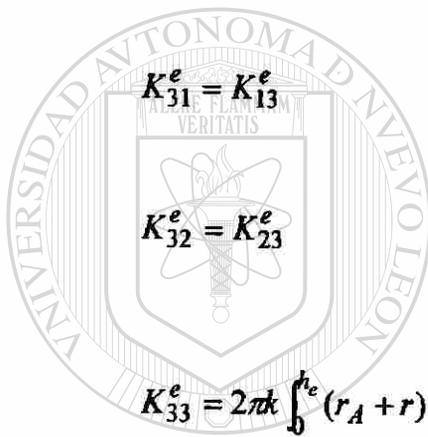
$$K_{21}^e = K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_2^e}{dr} \frac{d\psi_2^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8r}{(h_e)^2} \right)^2 dr$$

$$K_{22}^e = 2\pi k \left[\frac{16r_A}{h_e} + \frac{8}{3} \right]$$

$$K_{23}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_2^e}{dr} \frac{d\psi_3^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8r}{(h_e)^2} \right) \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right) dr$$

$$K_{23}^e = 2\pi k \left[\frac{-8r_A}{3h_e} - 2 \right]$$



$$K_{31}^e = K_{13}^e$$

$$K_{32}^e = K_{23}^e$$

$$K_{33}^e = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \frac{d\psi_3^e}{dr} \frac{d\psi_3^e}{dr} dr = 2\pi k \int_0^{h_e} (r_A + r) \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{4r}{(h_e)^2} \right)^2 dr$$

$$K_{33}^e = 2\pi k \left[\frac{7r_A}{3h_e} + \frac{11}{6} \right]$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}$$

Para $(r_A = 0)$ la matriz de coeficientes se representa de la siguiente manera

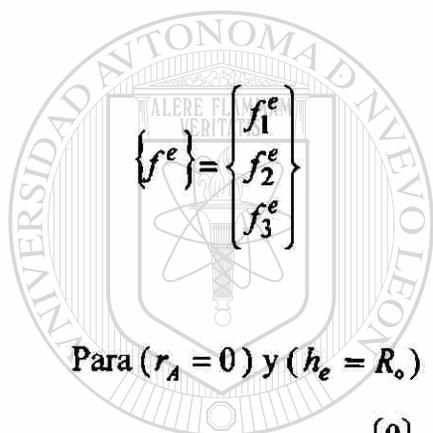
$$[K^e] = \frac{2\pi k}{6} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -12 & 11 \end{bmatrix}$$

$$f_i^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \psi_i^e(r_A + \bar{r}) d\bar{r}$$

$$f_1^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \left(1 - \frac{\bar{r}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{r}}{h_e}\right) (r_A + \bar{r}) d\bar{r} = 2\pi q \left(\frac{19h_e r_A}{6} + 0\right)$$

$$f_2^e = 2\pi q \int_0^{h_e} \frac{4r}{h_e} \left(1 - \frac{r}{h_e}\right) (r_A + r) d\bar{r} = 2\pi q \left(\frac{2h_e r_A}{3} + \frac{(h_e)^2}{3}\right)$$

$$f_3^e = 2\pi q \int_0^{h_e} -\frac{r}{h_e} \left(1 - \frac{2r}{h_e}\right) (r_A + r) d\bar{r} = 2\pi q \left(\frac{h_e r_A}{6} + \frac{(h_e)^2}{6}\right)$$



Para $(r_A = 0)$ y $(h_e = R_o)$

$$\{f^e\} = \frac{2\pi q (R_o)^2}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

UANL

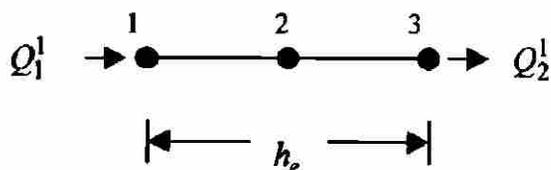
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Como solamente es un elemento cuadrático no se tiene conectividad.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 T_1^1 + K_{12}^1 T_2^1 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 T_1^1 + K_{22}^1 T_2^1 = f_2^1 + 0$$

$$K_{31}^1 T_1^1 + K_{32}^1 T_2^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

Continuidad de la variable primaria

$$T_1^1 = T_1$$

$$T_2^1 = T_2$$

$$T_3^1 = T_3$$

Las ecuaciones pueden expresarse en forma de matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

$$T(R_o) = T_0 \quad Q_1^1 = 2\pi kr \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para (T_1) , (T_2) y (Q_3^1)

$$T_1 = 60.09^\circ C$$

$$T_2 = 60.07^\circ C$$

TABLA 2.2b

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Radio	Temperatura Un elemento cuadrático	Temperatura Solución exacta
r cm	$T^\circ C$	$T^\circ C$
0	60.09	60.09
1	60.07	60.07
2	60	60

PASO 6: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

$$-Q_3^1 = 2\pi R_0 k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{R_0} = 91.28 \frac{watts}{cm}$$

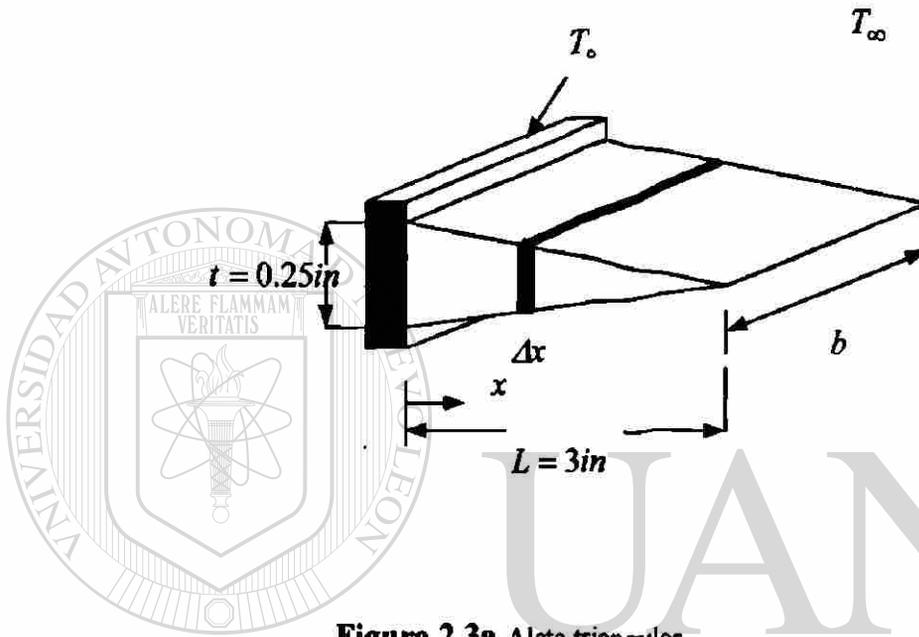
 Q = Flujo de calor disipado por el conductor en la superficie

$$-Q = (2\pi R_0 L) k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{R_0} = 912.8 \text{ wats}$$

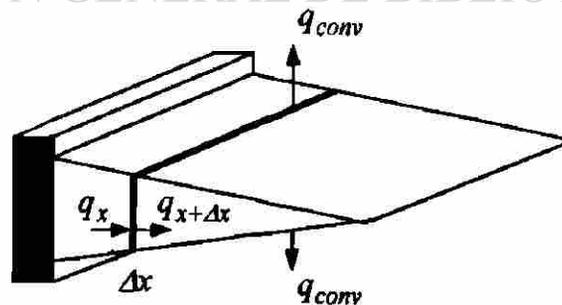
Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

Flujo de calor Un elemento cuadrático	Flujo de calor Solución exacta
Q wats	Q wats
912.8	935.9

Ejemplo 2.3 Determine la distribución de temperatura en la aleta que muestra la figura 2.3. Suponga que la temperatura en la base de la aleta es ($T_o = 250^\circ F$) la conductividad térmica ($k = 120 \text{ Btu hr}^{-1} \text{ ft}^{-1} \text{ }^\circ F^{-1}$), y el coeficiente de película ($\beta = 15 \text{ Btu hr}^{-1} \text{ ft}^{-2} \text{ }^\circ F^{-1}$), la temperatura del medio ambiente es ($T_\infty = 75^\circ F$).



Análisis de un diferencial de volumen.



Balance de energías para obtener la ecuación diferencial de la aleta.

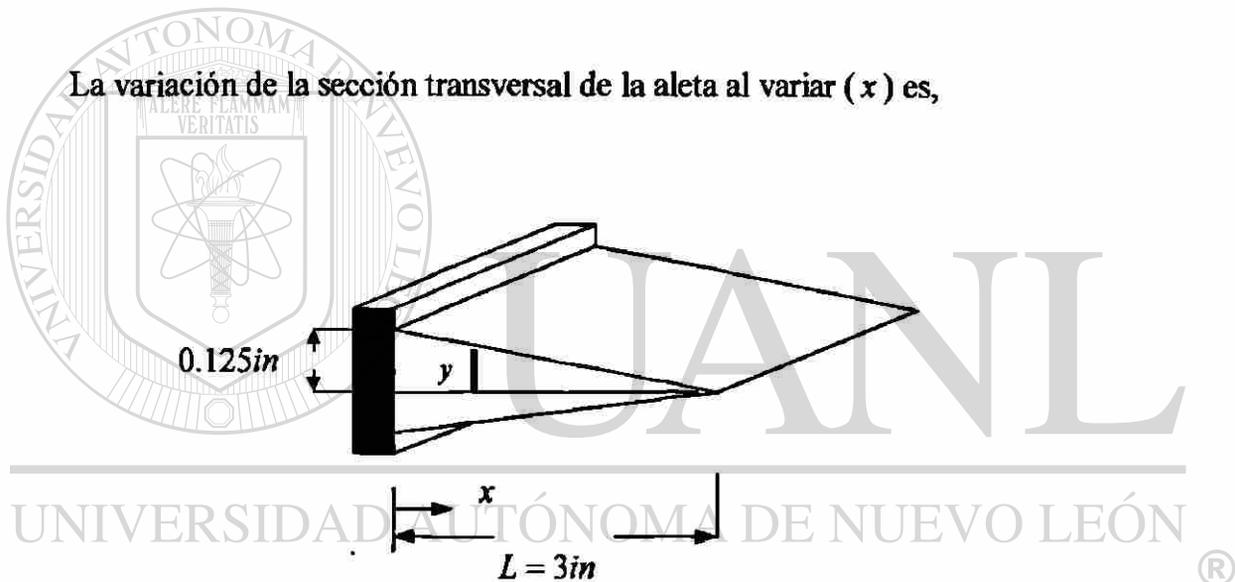
$$0 = q_x - q_{x+\Delta x} - q_{conv}$$

$$0 = -kA_{cond} \left. \frac{dT}{dx} \right|_x + kA_{cond} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\Delta x} - \beta A_{conv} (T - T_\infty)$$

$$0 = -kA(x) \left. \frac{dT}{dx} \right|_x + kA(x) \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\Delta x} - \beta 2b \Delta x (T - T_\infty)$$

$$0 = k \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{dT}{dx} \right) - 2\beta b (T - T_\infty)$$

La variación de la sección transversal de la aleta al variar (x) es,



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\frac{0.125}{3} = \frac{y}{3-x}$$

$$y = \left(\frac{3-x}{3} \right) (0.125)$$

$$A(x) = 2yb = \frac{2}{3} (3-x)(0.125)b$$

$$0 = k \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} (3-x)(0.125b) \frac{dT}{dx} \right) - 2\beta b (T - T_\infty)$$

$$(3-x) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} - \frac{24\beta}{k} T + \frac{24\beta}{k} T_\infty = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

$$m = \frac{24\beta}{k}$$

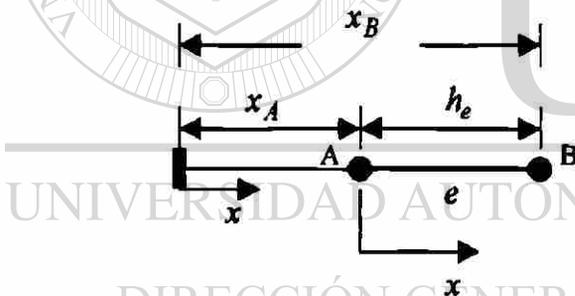
$$(3-x) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} - mT + mT_\infty = 0$$

Condiciones frontera de la ecuación diferencial.

$$T(0) = T_0$$

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[(3-x) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} - mT + mT_\infty \right] dx$$

Integrando por partes el término de segundo orden.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[-(3-x) \frac{dw}{dx} \frac{dT}{dx} - mwT + mwT_\infty \right] dx + w(3-x) \frac{dT}{dx} \Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[-(3-x) \frac{dw}{dx} \frac{dT}{dx} - mwT + mwT_\infty \right] dx + \left\{ w \left[(3-x) \frac{dT}{dx} \right]_{x_B} - w \left[(3-x) \frac{dT}{dx} \right]_{x_A} \right\}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[-(3-x) \frac{dw}{dx} \frac{dT}{dx} - mwT + mwT_\infty \right] dx + \sum_{j=1}^n w(x_j^e) Q_j^e \quad (a)$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Lineal

$$T^e = \sum_{j=1}^2 T_j^e \psi_j^e(x)$$

(b)

Donde (T_j^e) son los parámetros a ser determinados, $(\psi_j^e(x))$ son las funciones de aproximación. Sustituyendo la ecuación (b) por (T) y (w) por (ψ_j^e) en la forma débil Ecuación (a).

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[(3-x) \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{dT}{dx} + mwT - mwT_\infty \right] dx - \sum_{j=1}^n w(x_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[(3-x) \frac{d\psi_1^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n T_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + m\psi_1^e \left(\sum_{j=1}^n T_j^e \psi_j^e \right) - mT_\infty \psi_1^e \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_1^e(x_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como

$$0 = \sum_{j=1}^2 K_{ij}^e T_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i=1,2)$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left((3-x) \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m\psi_i^e \psi_j^e \right) dx = B(\psi_i^e, \psi_j^e)$$

$$f_i^e = mT_\infty \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^e dx$$

La propiedad (1) de las funciones de interpolación (1.19) es usada para escribir

$$\sum_{j=1}^n \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e$$

En notación matricial, las ecuaciones lineales algebraicas anteriores pueden ser escrita como.

$$[K^e] \{T^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales en coordenadas locales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ se calcula de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left((3-x) \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m\psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$x = x_A^e + \bar{x}$$

$$K_{ij}^e = \int_0^{h_e} \left((3 - x_A^e - x) \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + m\psi_i^e \psi_j^e \right) dx$$

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{1}{h_e}, \quad \frac{d\psi_2^e}{d\bar{x}} = \frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - \bar{x}) \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{x}} + m\psi_1^e \psi_1^e \right] dx$$

$$K_{11}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - x) \left(-\frac{1}{h_e} \right)^2 + m \left(1 - \frac{x}{h_e} \right)^2 \right] dx$$

$$K_{11}^e = \frac{1}{h_e} \left((3 - x_A^e) - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$K_{12}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - x) \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{d\psi_2^e}{dx} + m\psi_1^e \psi_2^e \right] dx$$

$$K_{12}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - x) \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(\frac{1}{h_e} \right) + m \left(1 - \frac{x}{h_e} \right) \left(\frac{x}{h_e} \right) \right] dx$$

$$K_{12}^e = -\frac{1}{h_e} \left((3 - x_A^e) - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{6}$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e \quad \text{por simetría}$$

$$K_{22}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - x) \frac{d\psi_2^e}{dx} \frac{d\psi_2^e}{dx} + m\psi_1^e \psi_2^e \right] dx$$

$$K_{22}^e = \int_0^{h_e} \left[(3 - x_A^e - x) \left(\frac{1}{h_e} \right)^2 + m \left(\frac{x}{h_e} \right)^2 \right] d\bar{x}$$

$$K_{22}^e = \frac{1}{h_e} \left(3 - x_A^e - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

Para elemento (1) $x_A = 0$

$$K_{11}^1 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$K_{12}^1 = -\frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{6}$$

$$K_{12}^1 = K_{21}^1$$

$$K_{22}^1 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

Para elemento (2) $x_A = h_e$

$$K_{11}^2 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{3h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$K_{12}^2 = -\frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{3h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{6}$$

$$K_{12}^2 = K_{21}^2$$

$$K_{22}^2 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{3h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

Para elemento (3) $x_A = 2h_e$

$$K_{11}^3 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{5h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$K_{12}^3 = -\frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{5h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{6}$$

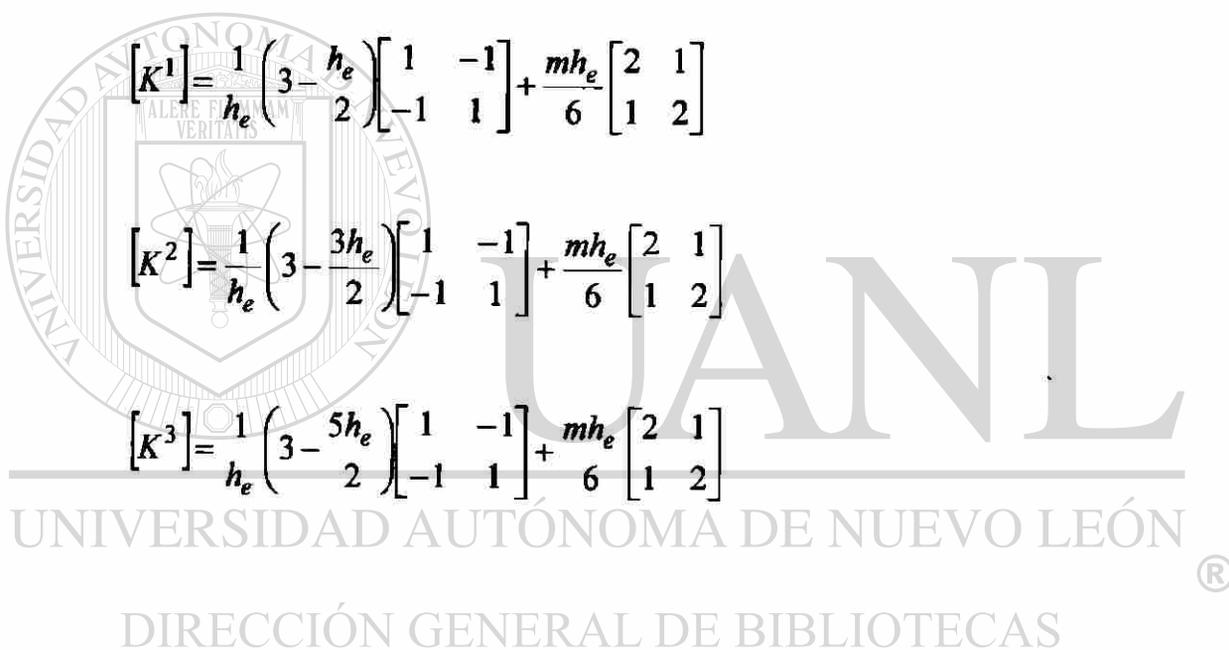
$$K_{12}^3 = K_{21}^3$$

$$K_{22}^3 = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{5h_e}{2} \right) + \frac{mh_e}{3}$$

$$[K^1] = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{h_e}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mh_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{3h_e}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mh_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \frac{1}{h_e} \left(3 - \frac{5h_e}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mh_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



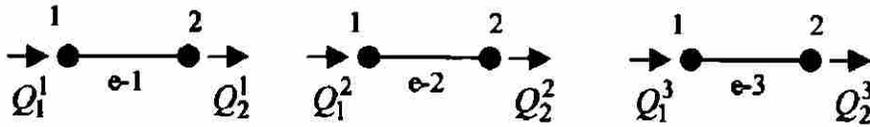
$$f_i^e = mT_\infty \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^e dx$$

$$f_1^e = mT_\infty \int_0^{h_e} \psi_1^e dx = mT_\infty \int_0^{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) d\bar{x} = \frac{mT_\infty h_e}{2}$$

$$f_2^e = mT_\infty \int_0^{h_e} \psi_2^e dx = mT_\infty \int_0^{h_e} \left(\frac{x}{h_e} \right) d\bar{x} = \frac{mT_\infty h_e}{2}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con tres elementos lineales.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 T_1^1 + K_{12}^1 T_2^1 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 T_1^1 + K_{22}^1 T_2^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 T_1^2 + K_{12}^2 T_2^2 = f_1^2 - Q_1^2$$

$$K_{21}^2 T_1^2 + K_{22}^2 T_2^2 = f_2^2 + Q_2^2$$

Elemento(3)

$$K_{11}^3 T_1^3 + K_{12}^3 T_2^3 = f_1^3 - Q_1^3$$

$$K_{21}^3 T_1^3 + K_{22}^3 T_2^3 = f_2^3 + Q_2^3$$

Continuidad de la variable primaria

$$T_1^1 = T_0$$

$$T_2^1 = T_1^2 = T_1$$

$$T_2^2 = T_1^3 = T_2$$

$$T_2^3 = T_3$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas ecuaciones ensambladas. Estas contienen la suma de los coeficientes y términos fuente en los nodos comunes a los dos elementos.

Las ecuaciones pueden expresarse en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^1 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_1^1 \\ Q_2^1 - Q_1^2 \\ Q_2^2 - Q_1^3 \\ Q_2^3 \end{bmatrix}$$

En el balance de la variable secundaria en los nodos a conectar ecuación (1.21 b) se obtiene como resultado:

$$(Q_2^1) + (-Q_1^2) = 0$$

$$(Q_2^2) + (-Q_1^3) = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^1 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ Q_2^3 \end{bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$T_0 = 250^\circ \text{C}$$

$$Q_2^3 = (3-x) \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_B} = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^1 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

$$m = \frac{24\beta}{k} = 0.249 \text{ in}^{-1}$$

h_e = Longitud del elemento finito

$$h_e = \frac{L}{3} = 1 \text{ in}$$

$$\begin{bmatrix} 2.583 & -2.458 & 0 & 0 \\ -2.458 & 4.166 & -1.458 & 0 \\ 0 & -1.458 & 2.166 & -0.458 \\ 0 & 0 & -0.458 & 0.583 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 250 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.33 \\ 18.67 \\ 18.67 \\ 9.33 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones para $(T_1), (T_2), (T_3)$ y (Q_1^1) .

$$T_1 = 218.85^\circ F \quad T_2 = 191.07^\circ F \quad T_3 = 166.18^\circ F$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
TABLA 2.3

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia desde la base $x \text{ in}$	Temperatura Tres elementos lineales $T \text{ } ^\circ F$	Temperatura Solución exacta $T \text{ } ^\circ F$
0	250	250
1	218.85	218.75
2	191.07	191.12
3	166.18	166.72

PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

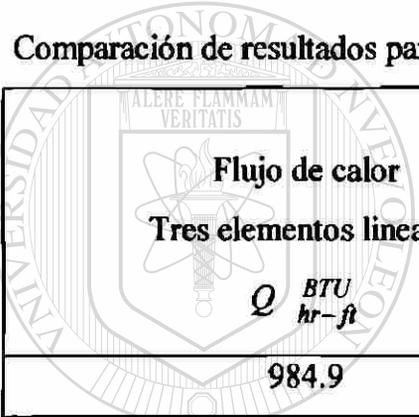
$$-Q_1^1 = (3-x) \frac{dT}{dx} \Big|_{x_A} = 94.49 \frac{^\circ F}{in}$$

Q = Flujo de calor en la base de la aleta

$$-Q = k(bt) \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = (120 \frac{BTU}{hr-ft-^\circ F})(0.25 in)(32.83 \frac{^\circ F}{in})$$

$$-Q = 984.9 \frac{BTU}{hr-ft}$$

Comparación de resultados para la variable secundaria elemento finito solución exacta

 <p>Flujo de calor Tres elementos lineales</p> <p>$Q \frac{BTU}{hr-ft}$</p>	<p>Flujo de calor Solución exacta</p> <p>$Q \frac{BTU}{hr-ft}$</p>
984.9	985

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Ejemplo 2.4 a. Considere flujo estable laminar de dos fluidos inmiscibles e incompresibles en una región de dos placas paralelas estacionarias bajo la influencia de un gradiente de presión.

Las velocidades en el fluido son ajustadas tal que la parte media inferior de la región esta llena con el fluido (μ_1) (fluido mas denso y más viscoso) y la parte media superior esta llena con el fluido (μ_2) (fluido menos denso y menos viscoso), como lo muestra la figura.2.4. Queremos determinar la distribución de velocidades en cada región usando el método de elemento finito.

Las ecuaciones gobernantes para cada fluido son

$$-\mu_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2} = f_0,$$

$$-\mu_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2} = f_0$$

donde $f_0 = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right)$ es el gradiente de presión. Las condiciones frontera son

$$u_1(-b) = 0, \quad u_2(b) = 0, \quad u_1(0) = u_2(0)$$

Solucionar el problema usando.

I) Cuatro elementos lineales

$$\mu_1 > \mu_2$$

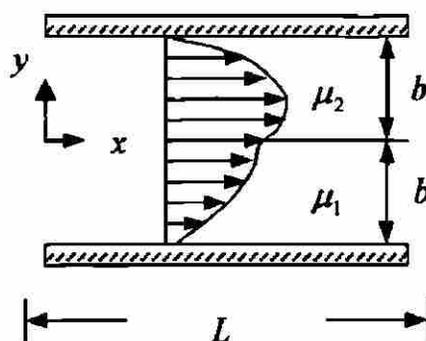
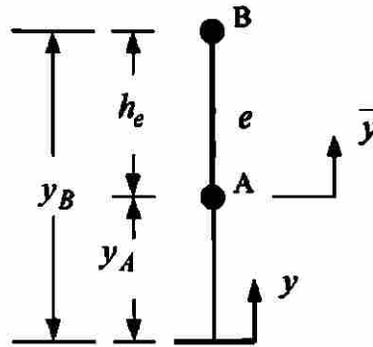


Figura 2.4 Fluidos en una tubería

PASO 1: DISCRETIZACIÓN



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

Construcción de la forma débil.

Para el fluido más viscoso.

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} w \left[-\mu_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2} - f_0 \right] dy$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{dw}{dy} \frac{du_1}{dy} - wf_0 \right] dy - \mu_1 w \frac{du_1}{dy} \Big|_{y_A}^{y_B}$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{dw}{dy} \frac{du_1}{dy} - wf_0 \right] dy - \left[w(y_B) \left(\mu_1 \frac{du_1}{dy} \right) \Big|_{y_B} - w(y_A) \left(\mu_1 \frac{du_1}{dy} \right) \Big|_{y_A} \right]$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{dw}{dy} \frac{du_1}{dy} - wf_0 \right] dy - \sum_{j=1}^n w(y_j^e) Q_j^e$$

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

Aproximación Lineal.

$$u_1 \Big|_e = \sum_{j=1}^2 u_j^e \psi_j^e(y)$$

Sustituir la solución aproximada en la forma débil.

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_1^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^2 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_1^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^2 \psi_1^e(y_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_2^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^2 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_2^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^2 \psi_2^e(y_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como:

$$0 = \sum_{j=1}^2 K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i=1,2)$$

donde

$$K_{ij}^e = \mu_1 \int_{y_A}^{y_B} \frac{d\psi_i^e}{dy} \frac{d\psi_j^e}{dy} dy$$

$$f_i^e = f_0 \int_{y_A}^{y_B} \psi_i^e dy$$

$$Q_i^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(y_i^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse en términos de los

coeficientes (K_{ij}^e, f_i^e, Q_i^e) .

$$K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e = f_1^e + Q_1^e$$

$$K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e = f_2^e + Q_2^e$$

En notación matricial.

$$[K^e] \begin{Bmatrix} u_1 \\ e \end{Bmatrix} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos lineales, la matriz de coeficientes $[K^e]$ y el vector $\{f^e\}$ se calculan de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_i^e}{dy} \frac{d\psi_j^e}{dy} d\bar{y}$$

$$K_{11}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{y}} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{y}} d\bar{y} = \frac{\mu_1}{h_e}$$

$$K_{12}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{d\bar{y}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{y}} d\bar{y} = -\frac{\mu_1}{h_e}$$

$$K_{21}^e = K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{y}} \frac{d\psi_2^e}{d\bar{y}} d\bar{y} = \frac{\mu_1}{h_e}$$

$$[K^e] = \frac{\mu_1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_i^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_i^e dy$$

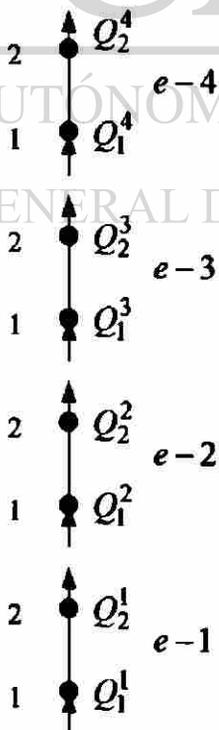
$$f_1^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_1^e d\bar{y} = \frac{f_0 h_e}{2}$$

$$f_2^e = f_0 \int_0^{h_e} \psi_2^e dy = \frac{f_0 h_e}{2}$$

$$\{f^e\} = \frac{f_0 h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para cuatro elementos lineales.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1 \Big|_1 + K_{12}^1 u_1 \Big|_2 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1 \Big|_1 + K_{22}^1 u_1 \Big|_2 = f_2^1 + Q_2^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1 \Big|_1 + K_{12}^2 u_1 \Big|_2 = f_1^2 - Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1 \Big|_1 + K_{22}^2 u_1 \Big|_2 = f_2^2 + Q_2^2$$

Elemento(3)

$$K_{11}^3 u_2 \Big|_1 + K_{12}^3 u_2 \Big|_2 = f_1^3 - Q_1^3$$

$$K_{21}^3 u_2 \Big|_1 + K_{22}^3 u_2 \Big|_2 = f_2^3 + Q_2^3$$

Elemento(4)

$$K_{11}^4 u_2 \Big|_1 + K_{12}^4 u_2 \Big|_2 = f_1^4 - Q_1^4$$

$$K_{21}^4 u_2 \Big|_1 + K_{22}^4 u_2 \Big|_2 = f_2^4 + Q_2^4$$

$$u_1 \Big|_1 = U_1$$

$$u_1 \Big|_2 = u_1 \Big|_1 = U_2$$

$$u_2 \Big|_2 = u_2 \Big|_1 = U_3$$

$$u_2 \Big|_2 = u_2 \Big|_1 = U_4$$

$$u_2 \Big|_2 = U_5$$

Las ecuaciones pueden expresarse en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & (K_{22}^3 + K_{11}^4) & K_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^4 & K_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_2^3 + Q_1^4 \\ Q_2^4 \end{bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$U_1(-b) = 0$$

$$U_2(b) = 0$$

$$U_1(0) = U_2(0)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & (K_{22}^2 + K_{11}^3) & K_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & (K_{22}^3 + K_{11}^4) & K_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^4 & K_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_2^4 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Datos:

$$b = 0.5 \text{ m}$$

$$h_e = 0.25 \text{ m}$$

$$P_0 = 200 \text{ kPa}$$

$$P_L = 190 \text{ kPa}$$

$$L = 5000 \text{ m}$$

$$f_0 = \frac{P_0 - P_L}{L} = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$\mu_1 = 0.01 \text{ Pa-s}$$

$$s.g_1 = 0.86 \text{ (petroleo crudo a } T = 10^\circ \text{C)}$$

$$\mu_2 = 0.00035 \text{ Pa-s}$$

$$s.g_2 = 0.68 \text{ (gasolina a } T = 10^\circ \text{C)}$$

$$\begin{bmatrix} 0.04 & -0.04 & 0 & 0 & 0 \\ -0.04 & 0.08 & -0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.04 & 0.0414 & -0.0014 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0014 & 0.0028 & -0.0014 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0014 & 0.0014 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0.25 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_2^4 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones para $(U_2), (U_3), (U_4), (Q_1^1)$ y (Q_2^4)

$$U_2 = 30.48 \frac{m}{seg} \quad U_3 = 48.30 \frac{m}{seg} \quad U_4 = 202.72 \frac{m}{seg}$$

TABLA 2.4a

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia y m	Velocidad	Velocidad
	Cuatro elementos lineales $U \frac{m}{seg}$	Solución exacta $U \frac{m}{seg}$
-0.50	0.0	0.0
-0.25	30.48	30.40
0.00	48.30	48.28
0.25	202.72	202.67
0.50	0.0	0.0

PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

$$Q_1^1 = 1.469 \frac{N}{m^2}$$

$$Q_2^4 = -0.533 \frac{N}{m^2}$$

Ejemplo 2.4 b. Determine la distribución de velocidades en cada region ejemplo (2.4 a), usando dos elementos cuadráticos

II) Para dos elementos cuadráticos

Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito

Aproximación Cuadrática

$$u_1^e = \sum_{j=1}^3 u_j^e \psi_j^e(y)$$

Sustituir la solución aproximada en la forma débil.

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_1^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^3 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_1^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^3 \psi_1^e(y_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_2^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^3 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_2^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^3 \psi_2^e(y_j^e) Q_j^e$$

$$0 = \int_{y_A}^{y_B} \left[\mu_1 \frac{d\psi_3^e}{dy} \left(\sum_{j=1}^3 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dy} \right) - \psi_3^e f_0 \right] dy - \sum_{j=1}^3 \psi_3^e(y_j^e) Q_j^e$$

Las ecuaciones algebraicas pueden escribirse como:

$$0 = \sum_{j=1}^3 K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, 3)$$

donde

$$K_{ij}^e = \mu_1 \int_{y_A}^{y_B} \frac{d\psi_i^e}{dy} \frac{d\psi_j^e}{dy} dy$$

$$f_i^e = f_0 \int_{y_A}^{y_B} \psi_i^e dy$$

$$Q_i^e = \sum_{j=1}^3 \psi_j^e(y_i) Q_j^e$$

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse en términos de los coeficientes $(K_{ij}^e), (f_i^e), (Q_i^e)$.

$$K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e + K_{13}^e u_3^e = f_1^e + Q_1^e$$

$$K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e + K_{23}^e u_3^e = f_2^e + Q_2^e$$

$$K_{31}^e u_1^e + K_{32}^e u_2^e + K_{33}^e u_3^e = f_3^e + Q_3^e$$

En notación matricial.

$$[K^e] \{u_1^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Para una malla con elementos cuadráticos, la matriz de coeficientes $[K^e]$ y el vector $\{f^e\}$ se calculan de la siguiente manera.

$$K_{ij}^e = \mu_1 \int_b^b \frac{d\psi_i^e}{dy} \frac{d\psi_j^e}{dy} dy$$

$$K_{11}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{dy} \frac{d\psi_1^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{-3}{h_e} + \frac{4y}{(h_e)^2} \right)^2 dy$$

$$K_{11}^e = \frac{7}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$K_{12}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{dy} \frac{d\psi_2^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{-3}{h_e} + \frac{4y}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8y}{(h_e)^2} \right) dy$$

$$K_{12}^e = -\frac{8}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$K_{13}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_1^e}{dy} \frac{d\psi_3^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{-3}{h_e} + \frac{4y}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4y}{(h_e)^2} - \frac{1}{h_e} \right) dy$$

$$K_{13}^e = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

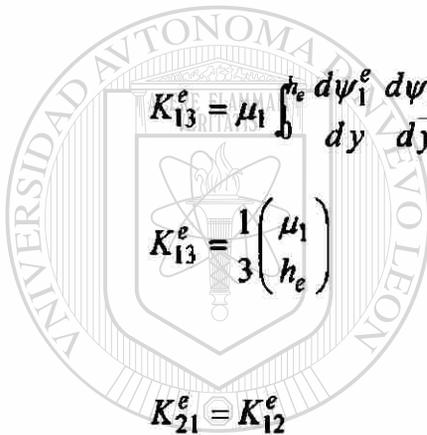
$$K_{21}^e \equiv K_{12}^e$$

$$K_{22}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_2^e}{dy} \frac{d\psi_2^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8y}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8y}{(h_e)^2} \right) dy$$

$$K_{22}^e = \frac{16}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$K_{23}^e = \mu_1 \int_0^{h_e} \frac{d\psi_2^e}{dy} \frac{d\psi_3^e}{dy} dy = \mu_1 \int_0^{h_e} \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8y}{(h_e)^2} \right) \left(\frac{4y}{(h_e)^2} - \frac{1}{h_e} \right) dy$$

$$K_{23}^e = -\frac{8}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

$$K_{33}^e = \mu_1 \int_b^{h_e} \frac{d\psi_3^e}{dy} \frac{d\psi_3^e}{dy} dy = \mu_1 \int_b^{h_e} \left(\frac{4y}{(h_e)^2} - \frac{1}{h_e} \right)^2 dy$$

$$K_{33}^e = \frac{7}{3} \left(\frac{\mu_1}{h_e} \right)$$

$$[K^e] = \frac{\mu_1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$f_i^e = f_0 \int_b^{h_e} \psi_i^e dy$$

$$f_1^e = f_0 \int_b^{h_e} \psi_1^e dy = f_0 \int_b^{h_e} \left(1 - \frac{y}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2y}{h_e} \right) dy$$

$$f_1^e = \frac{f_0 h_e}{6}$$

$$f_2^e = f_0 \int_b^{h_e} \psi_2^e dy = f_0 \int_b^{h_e} \left(\frac{4y}{h_e} \right) \left(1 - \frac{y}{h_e} \right) dy$$

$$f_2^e = \frac{2f_0 h_e}{3}$$

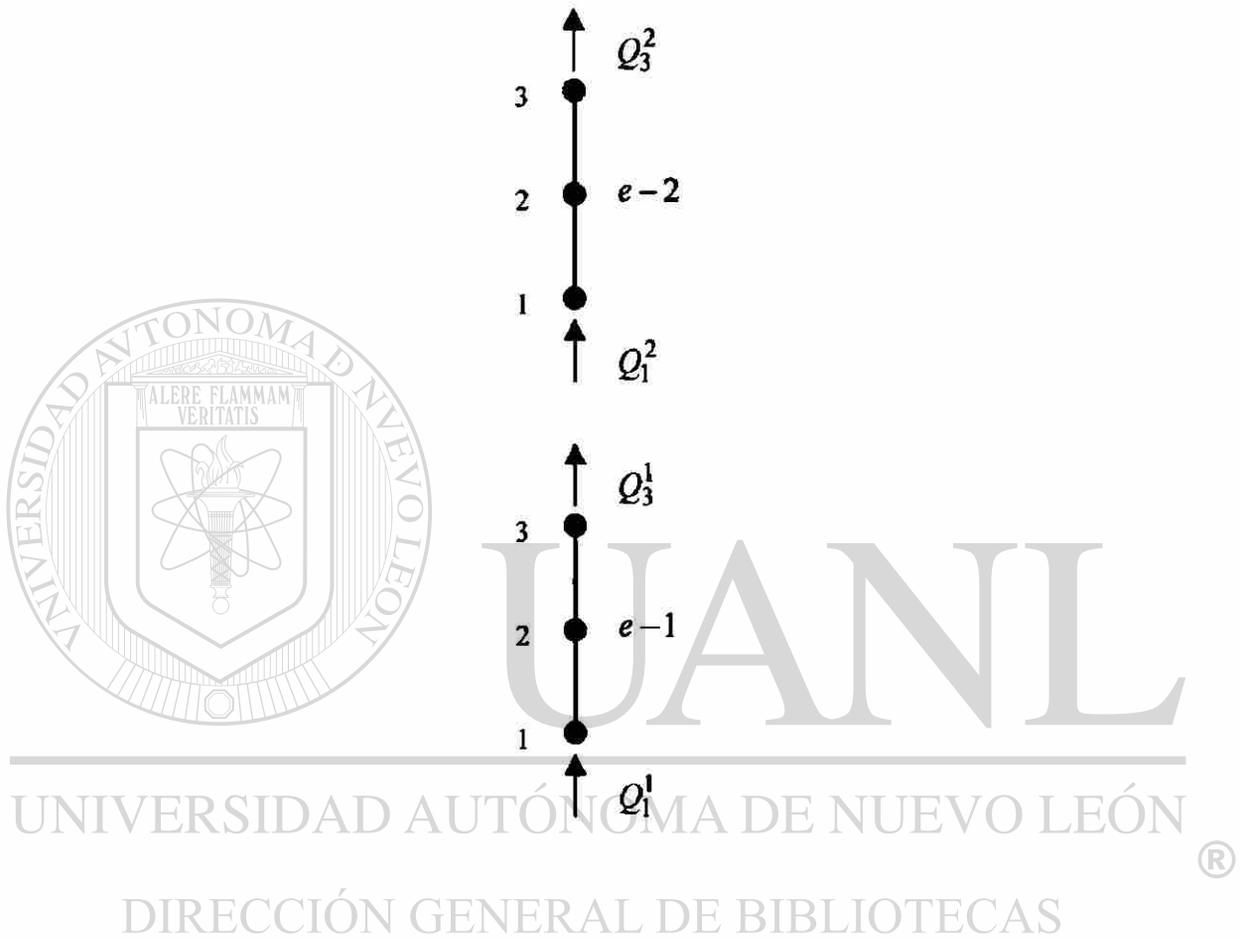
$$f_3^e = f_0 \int_b^{h_e} \psi_3^e dy = f_0 \int_b^{h_e} \left(-\frac{y}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2y}{h_e} \right) dy$$

$$f_3^e = \frac{f_0 h_e}{6}$$

$$\{f^e\} = \frac{f_0 h_e}{3} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con dos elementos cuadráticos.



Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_1^2 + K_{13}^1 u_1^3 = f_1^1 - Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_1^2 + K_{23}^1 u_1^3 = f_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_1^2 + K_{33}^1 u_1^3 = f_3^1 + Q_3^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_1^2 + K_{13}^2 u_1^2 = f_1^2 - Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_1^2 + K_{23}^2 u_1^2 = f_2^2$$

$$K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_1^2 + K_{33}^2 u_1^2 = f_3^2 + Q_3^2$$

Continuidad de la variable primaria

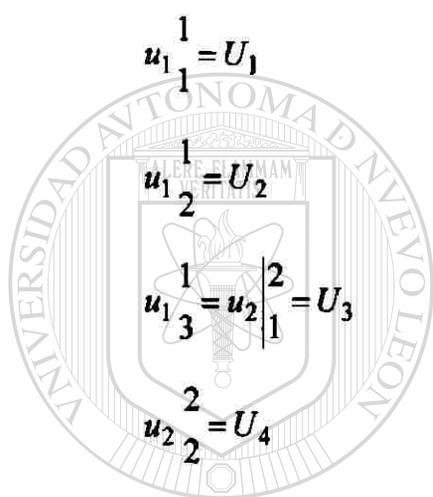
$$u_1^1 = U_1$$

$$u_1^2 = U_2$$

$$u_1^3 = u_2^2 = U_3$$

$$u_2^2 = U_4$$

$$u_2^3 = U_5$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Las ecuaciones pueden expresarse en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$U_1(-b) = 0$$

$$U_2(b) = 0$$

$$U_1(0) = U_2(0)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Datos: Son los mismos que los del ejemplo 2.4 a

$$h_e = b = 0.5 \text{ m}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0466 & -0.0533 & 0.0066 & 0 & 0 \\ -0.0533 & 0.1066 & -0.0533 & 0 & 0 \\ 0.0066 & -0.0533 & 0.0482 & -0.0018 & 0.0002 \\ 0 & 0 & -0.0018 & 0.0037 & -0.0018 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0018 & 0.0016 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0.333 \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0.5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones para $(U_2), (U_3), (U_4), (Q_1^1)$ y (Q_2^3)

$$U_2 = 30.19 \frac{m}{seg}$$

$$U_3 = 47.88 \frac{m}{seg}$$

$$U_4 = 203.29 \frac{m}{seg}$$

TABLA 2.4b

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

Distancia y m	Velocidad Dos elementos cuadráticos	Velocidad Solución exacta
	$U \frac{m}{seg}$	$U \frac{m}{seg}$
-0.50	0.0	0.0
-0.25	30.19	30.40
0.00	47.88	48.28
0.25	203.29	202.67
0.50	0.0	0.0

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
PASO 5: POSTPROCESAMIENTO DE LAS SOLUCIONES
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$Q_1^1 = 1.45 \frac{N}{m^2}$$

$$Q_2^3 = -0.522 \frac{N}{m^2}$$

ECUACIÓN DE CUARTO ORDEN EN UNA DIMENSIÓN

FLEXIÓN DE VIGAS

Se analizará la formulación del elemento finito en una dimensión de la ecuación diferencial de cuarto orden usando la teoría de Euler-Bernoulli.

En la teoría de Euler-Bernoulli, la flexión transversal (w) de la viga es gobernada por una ecuación diferencial de cuarto orden.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x) \quad \Omega = (0, L)$$

Donde $b = b(x)$ y $f = f(x)$ son funciones dadas de (x) (datos), y (w) es la variable dependiente. La función ($b = EI$) es el producto del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I) de la viga, (f) es la carga transversal.

PROBLEMA MODELO

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

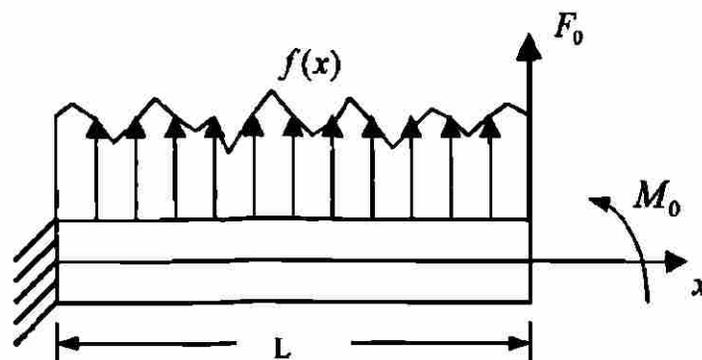


Figura 2.5 Flexión de viga

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x) \quad M = b \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad \frac{dV}{dx} = f$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO

El dominio de la estructura (longitud de la viga) es dividido en un conjunto de elementos, cada elemento tiene al menos dos nodos.

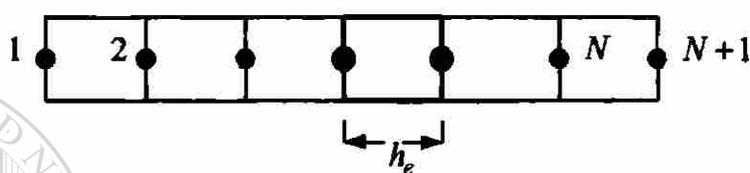


Figura 2.6a

Discretización de una viga

PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

En este paso se aísla un elemento típico $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$

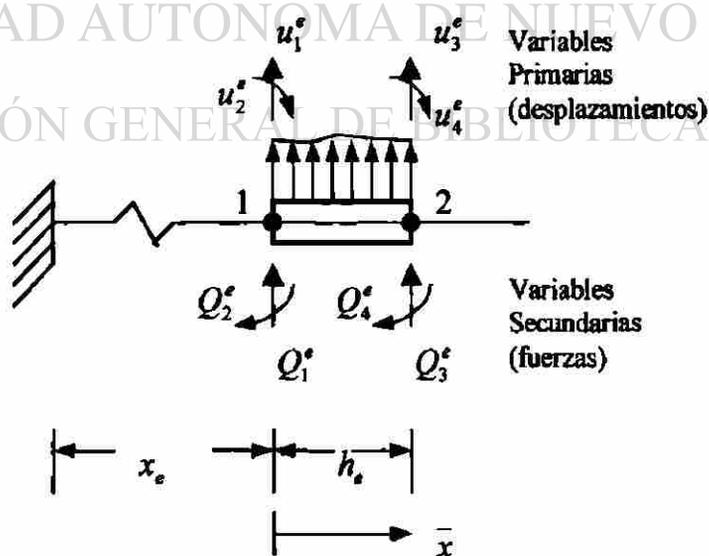


Figura 2.6b

Desplazamientos generalizados y fuerzas generalizadas

a) Construcción de la forma débil

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x) \quad (2.1)$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} v \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f \right] dx$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[- \frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - vf \right] dx - \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_e}^{x_{e+1}}$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - vf \right] dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{dv}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_e}^{x_{e+1}} \quad (2.2)$$

donde $v(x)$ es la función de peso que es dos veces diferenciable con respecto a (x) .

Introduciremos la siguiente notación:

$$Q_1^e = \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_e} \quad Q_2^e = \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_e}$$

$$Q_3^e = - \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_{e+1}} \quad Q_4^e = - \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_{e+1}} \quad (2.3)$$

Donde (Q_1^e) y (Q_3^e) representan las fuerzas de corte, (Q_2^e) y (Q_4^e) representan los momentos flexionantes (fig.2.6b). Las cantidades (Q_i^e) contienen momentos flexionantes, que pueden también ser vistos como “fuerzas flexionantes,” el conjunto $\{Q_1^e, Q_2^e, Q_3^e, Q_4^e\}$ es a menudo referido como las *fuerzas generalizadas*.

Los correspondientes desplazamientos y rotaciones son llamados *desplazamientos generalizados*.

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - v f \right) dx - v(x_e) Q_1^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_{e+1}} Q_4^e$$

$$0 = B(v, w) - I(v) \quad (2.4)$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

$$w^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e \Phi_j^e \quad (2.5)$$

Las funciones de interpolación (Φ_j^e) (interpolación cubica de hermite) pueden ser expresadas en términos de las coordenadas locales (x):

$$\Phi_1^e = 1 - 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3 \quad \Phi_2^e = -\bar{x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2$$

$$\Phi_3^e = 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3 \quad \Phi_4^e = -\bar{x} \left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right]$$
(2.7)

La primera, segunda y tercera derivada de (Φ_j^e) con respecto a (x) son.

$$\frac{d\Phi_1^e}{d\bar{x}} = -\frac{6}{h_e} \frac{\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)$$

$$\frac{d\Phi_2^e}{d\bar{x}} = -\left[1 + 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - 4 \frac{\bar{x}}{h_e} \right]$$

$$\frac{d\Phi_3^e}{d\bar{x}} = -\frac{d\Phi_1^e}{d\bar{x}}$$

$$\frac{d\Phi_4^e}{d\bar{x}} = -\frac{\bar{x}}{h_e} \left(3 \frac{\bar{x}}{h_e} - 2 \right)$$

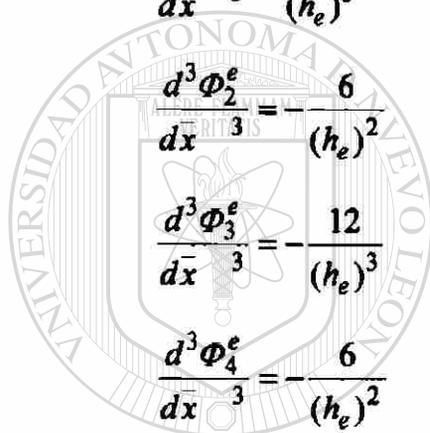
$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \Phi_1^e}{dx^2} &= -\frac{6}{h_e} \left(1 - 2 \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \\
 \frac{d^2 \Phi_2^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{2}{h_e} \left(3 \frac{\bar{x}}{h_e} - 1 \right) \\
 \frac{d^2 \Phi_3^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{d^2 \Phi_1^e}{d\bar{x}^2} \\
 \frac{d^2 \Phi_4^e}{dx^2} &= -\frac{2}{h_e} \left(3 \frac{\bar{x}}{h_e} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\frac{d^3 \Phi_1^e}{d\bar{x}^3} = \frac{12}{(h_e)^3}$$

$$\frac{d^3 \Phi_2^e}{d\bar{x}^3} = \frac{6}{(h_e)^2}$$

$$\frac{d^3 \Phi_3^e}{d\bar{x}^3} = \frac{12}{(h_e)^3}$$

$$\frac{d^3 \Phi_4^e}{d\bar{x}^3} = \frac{6}{(h_e)^2}$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

MODELO DEL ELEMENTO FINITO. El modelo del elemento finito de la viga Euler-Bernoulli es obtenida sustituyendo las funciones de interpolación por w y las Φ_j por las funciones de peso v en la forma débil.

$$0 = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \right) u_j^e - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx - Q_i^e \tag{2.9 a}$$

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e = 0 \tag{2.9 b}$$

donde

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \quad (2.10)$$

$$F_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx + Q_i^e$$

Note que los coeficientes (K_{ij}^e) son simétricos ($K_{ij}^e = K_{ji}^e$). En notación matricial, pueden escribirse como.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ f_4^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Para el caso en el que ($b = EI$) y (f) son constantes sobre un elemento, los elementos de la matriz de rigidez $[K^e]$ y el vector fuerza $\{F^e\}$ tienen las siguientes formas específicas (ver figura 2.5).

$$[K^e] = \frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\{F^e\} = \frac{fh}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con dos elementos

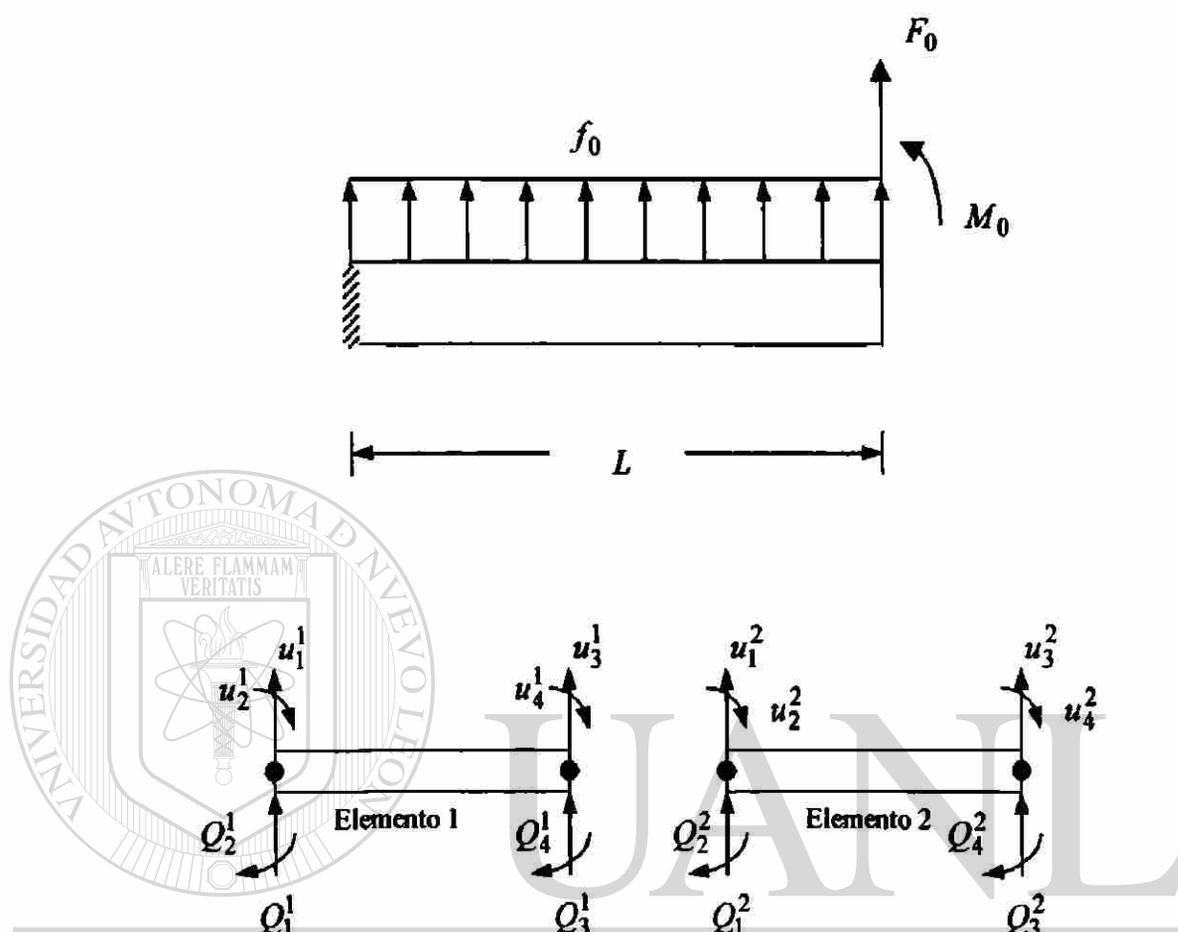


Figura 2.7 Ensamble de dos elementos

Balance de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1$$

$$u_2^1 = U_2$$

$$u_3^1 = u_1^2 = U_3$$

$$u_4^1 = u_2^2 = U_4$$

$$u_3^2 = U_5$$

$$u_2^2 = U_6$$

(2.13)

$$2EI \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 6+6 & 3h-3h & -6 & -3h \\ h^3 & -3h & h^2 & 3h-3h & 2h^2+2h^2 & 3h \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} =$$

$$= fh \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6+6 \\ h-h \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1+Q_1^2 \\ Q_4^1+Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 0$$

(2.15)

$$Q_3^1 + Q_1^2 = 0$$

$$Q_4^1 + Q_2^2 = 0$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$2EI \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\ h^3 & -3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \frac{fh}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ F_0 \\ -M_0 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Solución del sistema de ecuaciones para $(Q_1^1, Q_2^1, U_3, U_5, U_6)$.

Ejemplo 2.5. Para el problema de la viga mostrada en la (figura. 2.8) determine

- Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados)
- Las variables secundarias desconocidas (fuerzas generalizadas)

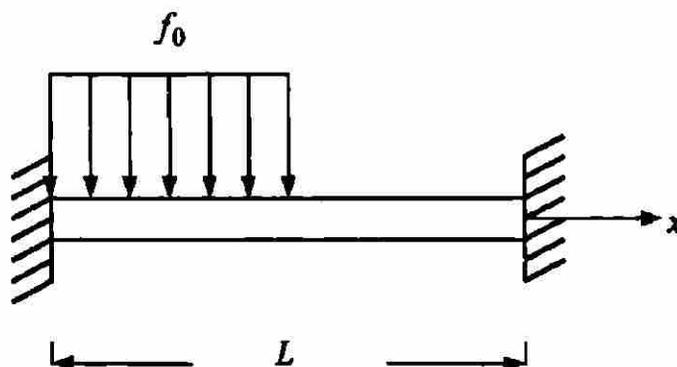


Figura 2.8 Viga empotrada en los extremos

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f_0$$

$$b = EI = \text{cte.}$$

$$f_0 = \text{cte.}$$

Datos:

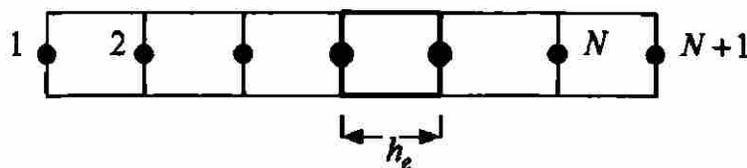
$$L = 10 \text{ m}$$

$$E = 200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$I = 20 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

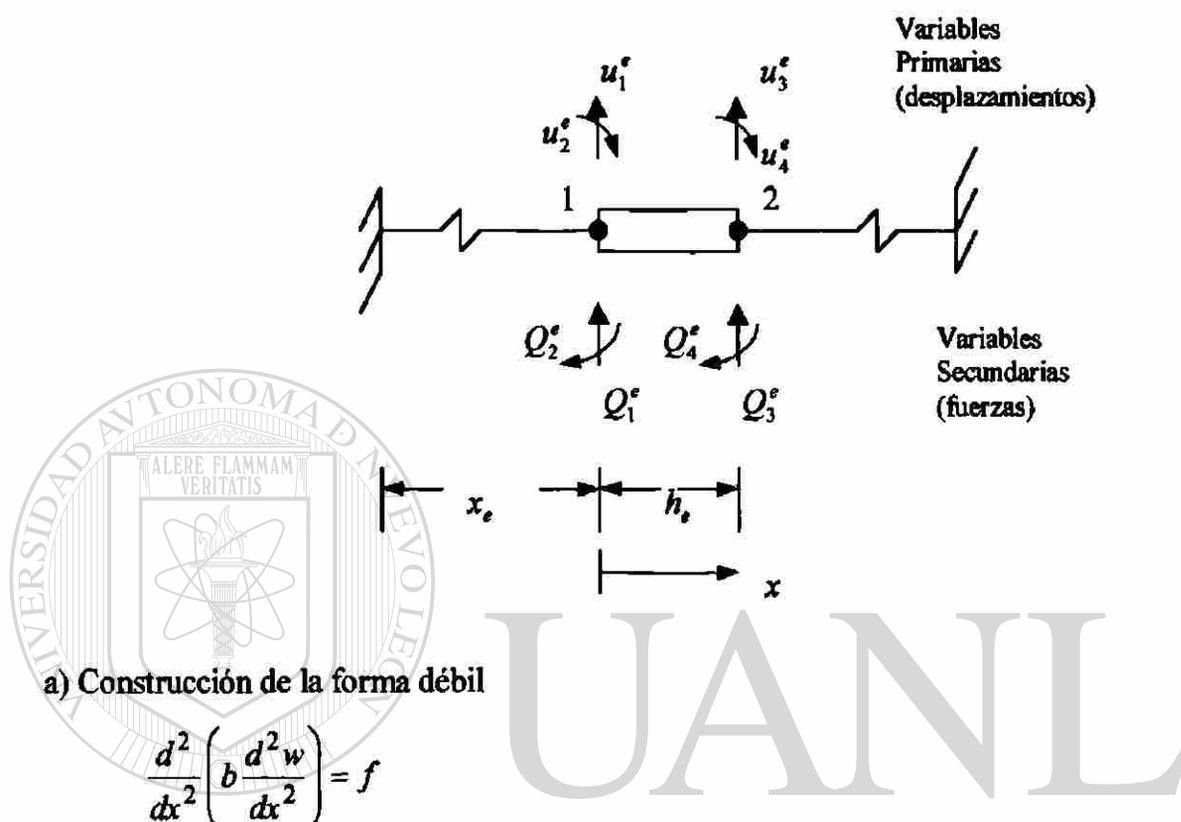
$$f_0 = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

En este paso se aísla un elemento típico $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$



$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - v f \right) dx - v(x_e) Q_1^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_{e+1}} Q_4^e$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito

$$w^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e \Phi_j$$

MODELO DEL ELEMENTO FINITO. El modelo del elemento finito de la viga Euler-Bernoulli es obtenida sustituyendo las funciones de interpolación por (w) y las (Φ_j) por las funciones de peso (v) en la forma débil.

$$0 = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \right) u_j^e - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx - Q_i^e$$

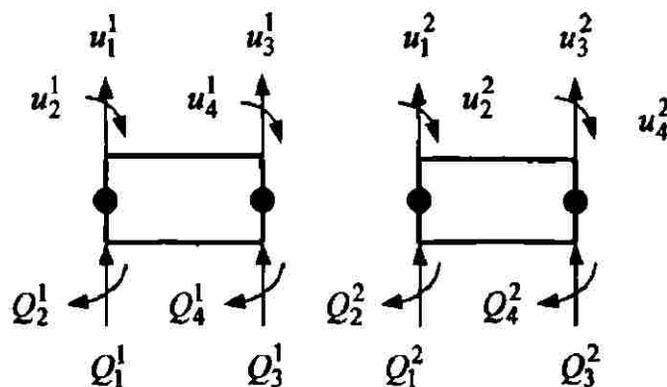
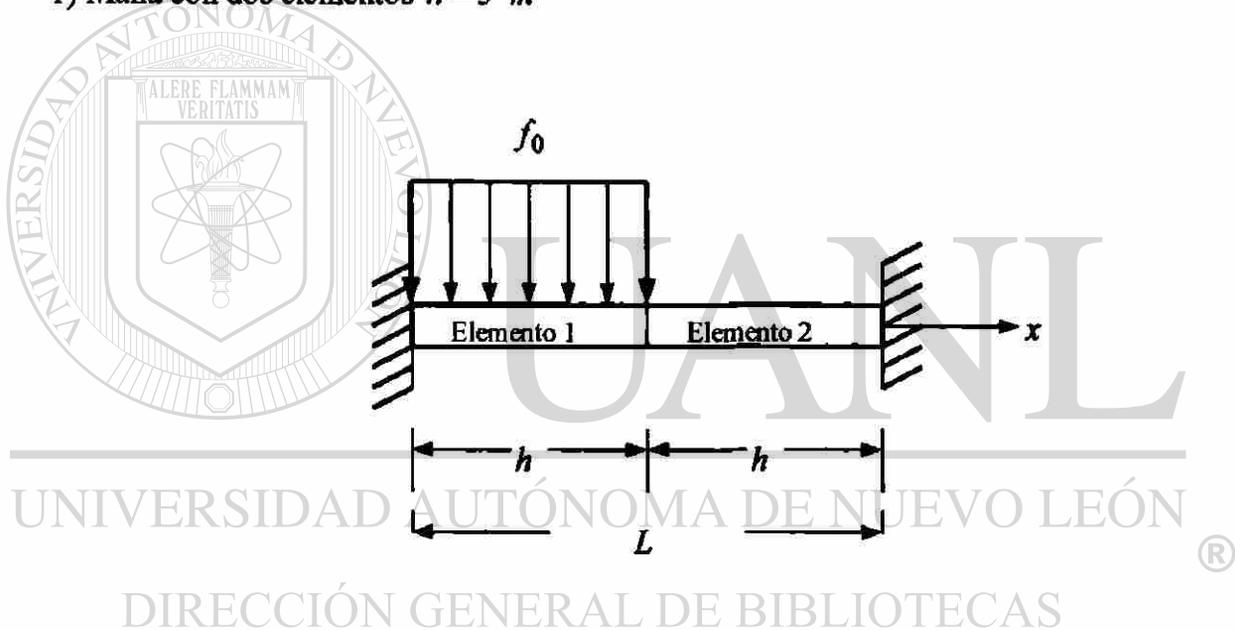
$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e = 0$$

donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \quad F_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx + Q_i^e$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

1) Malla con dos elementos $h = 5 \text{ m}$



Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 + K_{14}^1 u_4^1 = f_1^1 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 + K_{24}^1 u_4^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 + K_{34}^1 u_4^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

$$K_{41}^1 u_1^1 + K_{42}^1 u_2^1 + K_{43}^1 u_3^1 + K_{44}^1 u_4^1 = f_4^1 + Q_4^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 = Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 = Q_2^2$$

$$K_{31}^2 u^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 = Q_3^2$$

$$K_{41}^2 u^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 = Q_4^2$$

Continuidad de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1$$

$$u_4^1 = u_2^2 = U_4$$

$$u_2^1 = U_2$$

$$u_3^2 = U_5$$

$$u_3^1 = u_1^2 = U_3$$

$$u_4^2 = U_6$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & (K_{34}^1 + K_{12}^2) & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & (K_{43}^1 + K_{21}^2) & (K_{44}^1 + K_{22}^2) & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \quad \{F^e\} = \frac{-f_0 h}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}$$

$$2EI \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\ h^3 & -3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = -f_0h \begin{bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad U_5 = 0 \quad U_6 = 0$$

$$Q_3^1 + Q_1^2 = 0 \quad Q_4^1 + Q_2^2 = 0$$

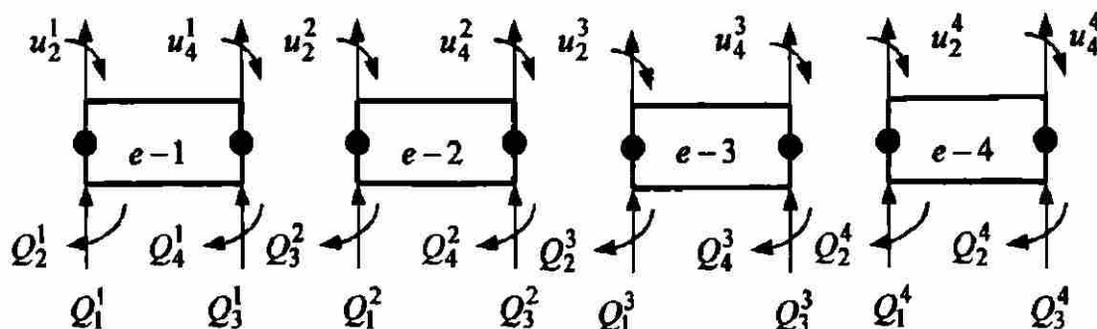
$$2EI \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\ h^3 & -3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -f_0h \begin{bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para $(Q_1^1, Q_2^1, U_3, U_4, Q_3^2, Q_4^2)$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
 TABLA 2.5a Comparación de resultados elemento finito solución exacta. ®

	Solución aproximada	
	Para dos elementos.	Solución exacta.
U_3 m	-0.0013	-0.00129
U_4 rad	-0.0001302	-0.0001300
Q_1^1 N	1624	1625.31
Q_3^2 N	374.4	374.69
Q_2^1 N-m	2289.33	2293.22
Q_4^2 N-m	1456	1040.12

2) Malla con cuatro elementos $h = 2.5 \text{ m}$ 

Balance de la variable primaria

$$\begin{array}{llll}
 u_1^1 = U_1 = 0 & u_3^1 = u_1^2 = U_3 & u_4^2 = u_2^3 = U_6 & u_3^4 = 0 \\
 u_2^1 = U_2 = 0 & u_4^1 = u_2^2 = U_4 & u_3^3 = u_1^4 = U_7 & u_4^4 = 0 \\
 & u_3^2 = u_1^3 = U_5 & u_4^3 = u_2^4 = U_8 &
 \end{array}$$

En la siguiente matriz solo se calcularan las variables primarias

$$\begin{bmatrix}
 K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 & 0 \\
 K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 & 0 \\
 K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{11}^3 & K_{34}^2 + K_{12}^3 & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\
 K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 + K_{21}^3 & K_{44}^2 + K_{22}^3 & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\
 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 + K_{11}^4 & K_{34}^3 + K_{12}^4 \\
 0 & 0 & K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{43}^3 + K_{21}^4 & K_{44}^3 + K_{22}^4
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}$$

$$a = f_3^1 + f_1^2 \quad b = f_4^1 + f_2^2 \quad c = f_3^2 \quad d = f_4^2$$

TABLA 2.5b Comparación de resultados elemento finito solución exacta

	Solución aproximada	Solución exacta
$U_3 \text{ m}$	-0.0009	-0.00089
$U_4 \text{ rad}$	-0.0004	-0.00035
$U_5 \text{ m}$	-0.0013	-0.00128
$U_6 \text{ rad}$	-0.0001	-0.00013
$U_7 \text{ m}$	-0.0006	-0.00054
$U_8 \text{ rad}$	0.0004	0.000424

Ejemplo 2.6. Para el problema de la viga mostrada en la (figura. 2.9) determine.

- Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados).
- Las variables secundarias desconocidas (fuerzas generalizadas).

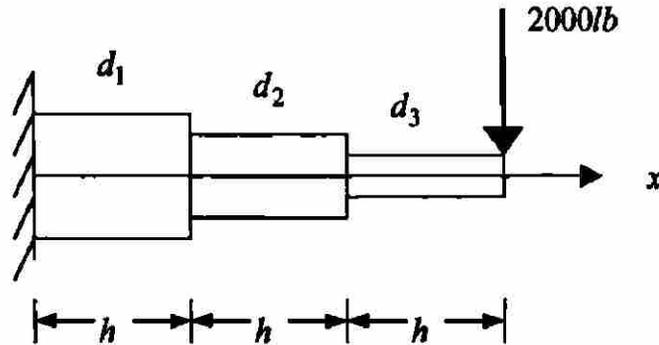


Figura 2.9 Viga empotrada de sección variable

La ecuación diferencial que gobierna el problema es

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = 0$$

$$b = EI = \text{cte.}$$

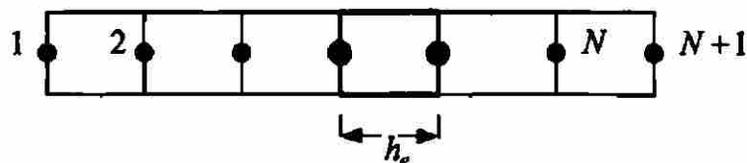
Datos

$$h = 20 \text{ in} \quad E = 30 \times 10^6 \frac{\text{Lbf}}{\text{in}^2}$$

$$d_1 = 4 \text{ in} \quad d_2 = 3 \text{ in} \quad d_3 = 2 \text{ in}$$

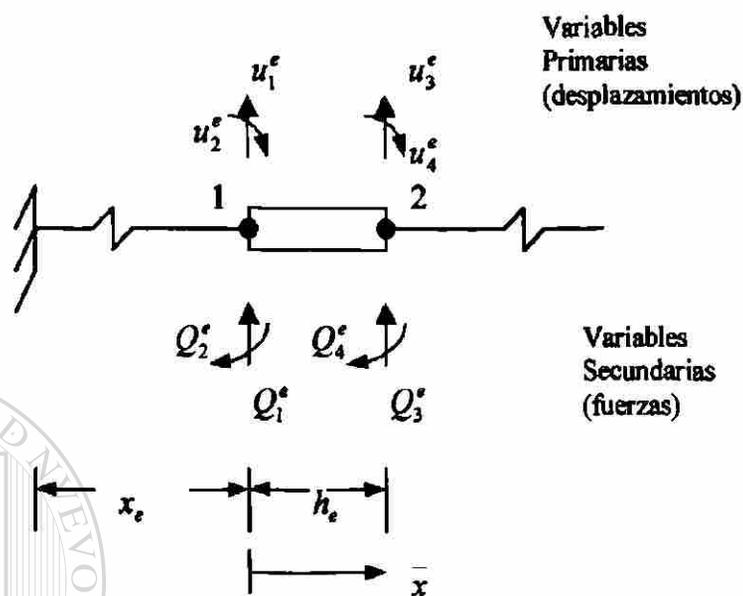
$$I_1 = 12.566 \text{ in}^4 \quad I_2 = 3.976 \text{ in}^4 \quad I_3 = 0.785 \text{ in}^4$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

En este paso se aísla un elemento típico $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$



a) Construcción de la forma débil

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = 0$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx - v(x_e) Q_1^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_{e+1}} Q_4^e$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito

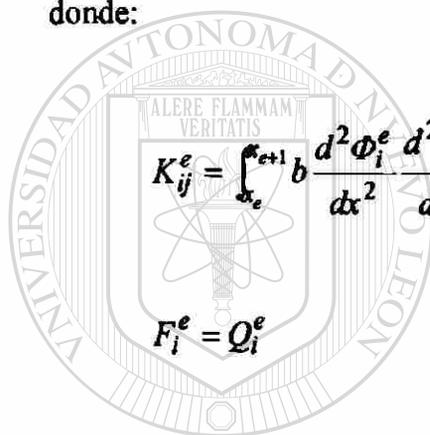
$$w^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e \Phi_j^e$$

MODELO DEL ELEMENTO FINITO. El modelo del elemento finito de la viga Euler-Bernoulli es obtenida sustituyendo las funciones de interpolación por (w) y las (Φ_j) por las funciones de peso (v) en la forma débil

$$0 = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \right) u_j^e - Q_i^e$$

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e = 0$$

donde:



$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx$$

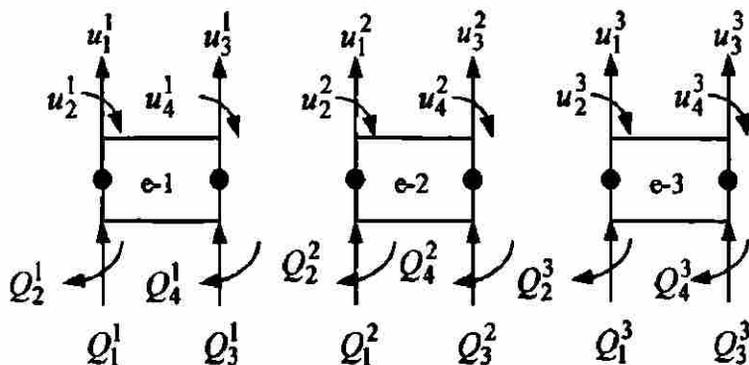
$$F_i^e = Q_i^e$$

UANL

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con cuatro elementos.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 + K_{14}^1 u_4^1 = Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 + K_{24}^1 u_4^1 = Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 + K_{34}^1 u_4^1 = Q_3^1$$

$$K_{41}^1 u_1^1 + K_{42}^1 u_2^1 + K_{43}^1 u_3^1 + K_{44}^1 u_4^1 = Q_4^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 = Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 = Q_2^2$$

$$K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 = Q_3^2$$

$$K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 = Q_4^2$$

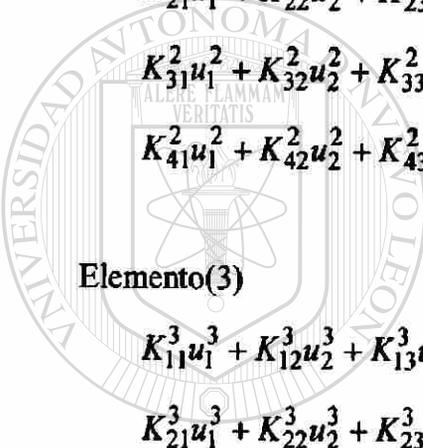
Elemento(3)

$$K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3 + K_{13}^3 u_3^3 + K_{14}^3 u_4^3 = Q_1^3$$

$$K_{21}^3 u_1^3 + K_{22}^3 u_2^3 + K_{23}^3 u_3^3 + K_{24}^3 u_4^3 = Q_2^3$$

$$K_{31}^3 u_1^3 + K_{32}^3 u_2^3 + K_{33}^3 u_3^3 + K_{34}^3 u_4^3 = Q_3^3$$

$$K_{41}^3 u_1^3 + K_{42}^3 u_2^3 + K_{43}^3 u_3^3 + K_{44}^3 u_4^3 = Q_4^3$$



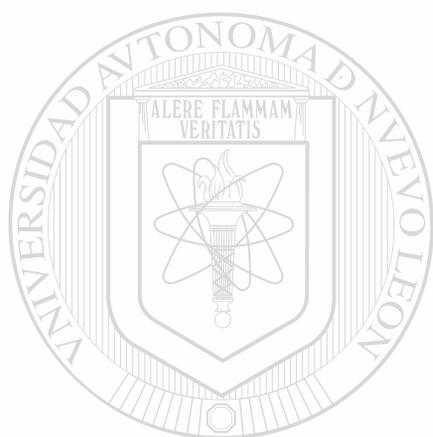
UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & (K_{34}^1 + K_{12}^2) & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 & 0 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & (K_{43}^1 + K_{21}^2) & (K_{44}^1 + K_{22}^2) & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & (K_{33}^2 + K_{11}^3) & (K_{34}^2 + K_{12}^3) & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & (K_{43}^2 + K_{21}^3) & (K_{44}^2 + K_{22}^3) & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix}$$



$$= \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 + Q_1^3 \\ Q_4^2 + Q_2^3 \\ -2000 \\ Q_4^3 \end{Bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$[K^e] = \frac{2(EI)}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$u_1^1 = U_1 = 0$$

$$Q_1^1$$

$$u_2^1 = U_2 = 0$$

$$Q_2^1$$

$$u_3^1 = u_1^2 = U_3$$

$$Q_3^1 + Q_1^2 = 0$$

$$u_4^1 = u_2^2 = U_4$$

$$Q_4^1 + Q_2^2 = 0$$

$$u_3^2 = u_1^3 = U_5$$

$$Q_3^2 + Q_1^3 = 0$$

$$u_4^2 = u_2^3 = U_6$$

$$Q_4^2 + Q_2^3 = 0$$

$$u_3^3 = U_7$$

$$Q_3^3 = -2000$$

$$u_4^3 = U_8$$

$$Q_4^3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & (K_{33}^1 + K_{11}^2) & (K_{34}^1 + K_{12}^2) & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 & 0 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & (K_{43}^1 + K_{21}^2) & (K_{44}^1 + K_{22}^2) & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & (K_{33}^2 + K_{11}^3) & (K_{34}^2 + K_{12}^3) & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & (K_{43}^2 + K_{21}^3) & (K_{44}^2 + K_{22}^3) & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para $(Q_1^1, Q_1^2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8)$

$$[K^1] = \frac{2EI_1}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \frac{2EI_2}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \frac{2EI_3}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

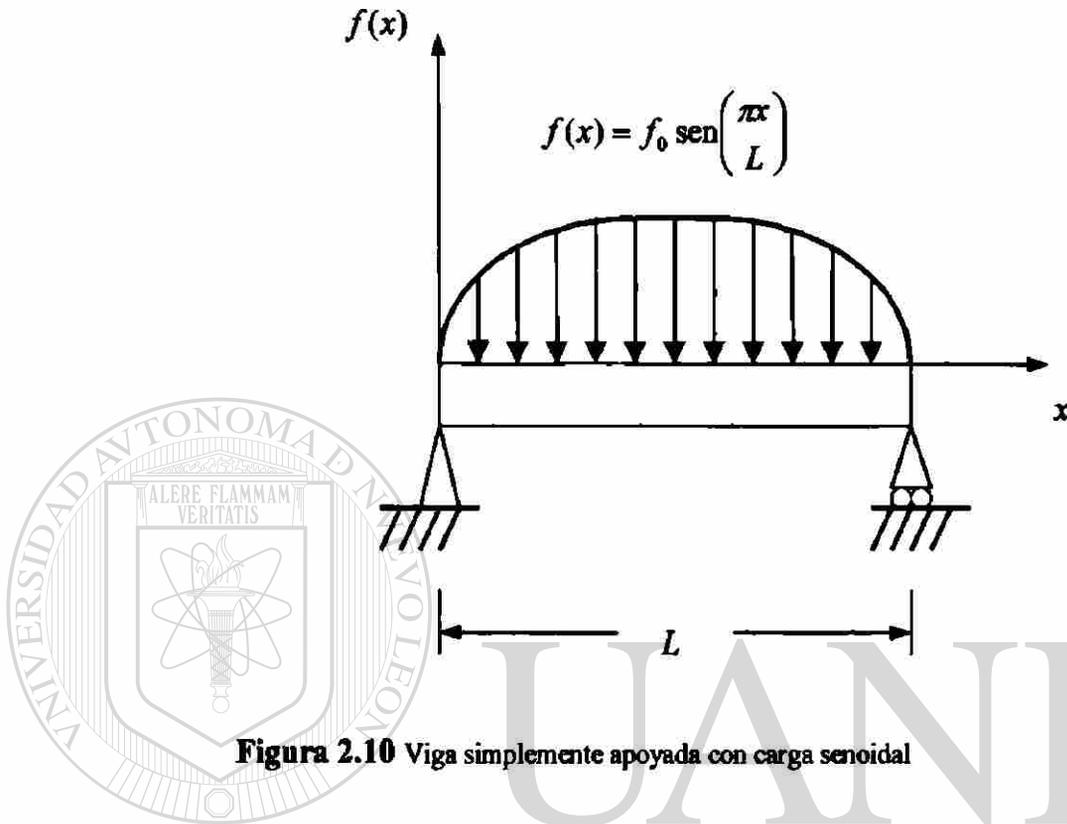
TABLA 2.6

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

	Solución aproximada	
	Tres elementos	Solución exacta
U_3 in	-0.0566	-0.070
U_4 rad	0.0053	0.0085
U_5 in	-0.27448	-0.226
U_6 rad	0.0153	0.0180
U_7 in	-0.8082	-0.4524
U_8 rad	0.0323	0.0349
Q_1^1 Lb _f	2035.6	2000
Q_1^2 Lb _f - in	-120256.6	-120000

Ejemplo 2.7. Para el problema de la viga mostrada en la (fig. 2.10) determine.

- Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados).
- Las variables secundarias desconocidas (fuerzas generalizadas).

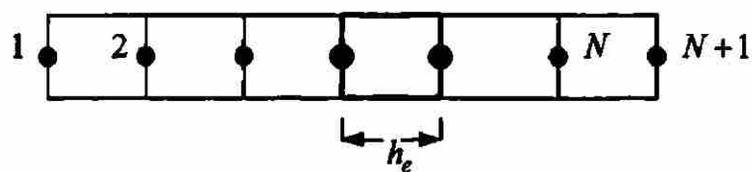


$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x)$$

$$b = EI = \text{cte.}$$

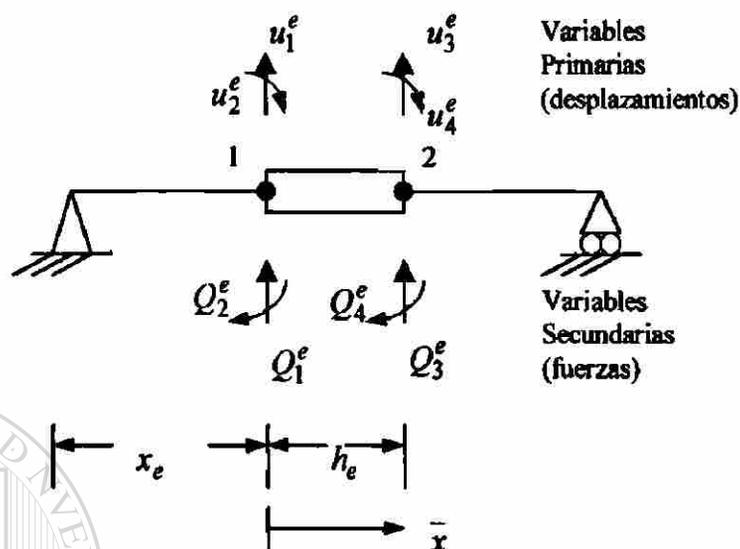
$$f(x) = f_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

PASO 1: DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO



PASO 2: DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

En este paso se aísla un elemento típico $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$



a) Construcción de la forma débil.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} v \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f \right] dx$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - v f \right) dx - v(x_e) Q_1^e - \left(- \frac{dv}{dx} \right)_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(- \frac{dv}{dx} \right)_{x_{e+1}} Q_4^e$$

b) Suponer la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito.

$$w^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e \Phi_j^e$$

MODELO DEL ELEMENTO FINITO. El modelo del elemento finito de la viga Euler-Bernoulli es obtenida sustituyendo las funciones de interpolación por w y las Φ_j por las funciones de peso v en la forma débil.

$$0 = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx \right) u_j^e - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx - Q_i^e$$

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e = 0$$

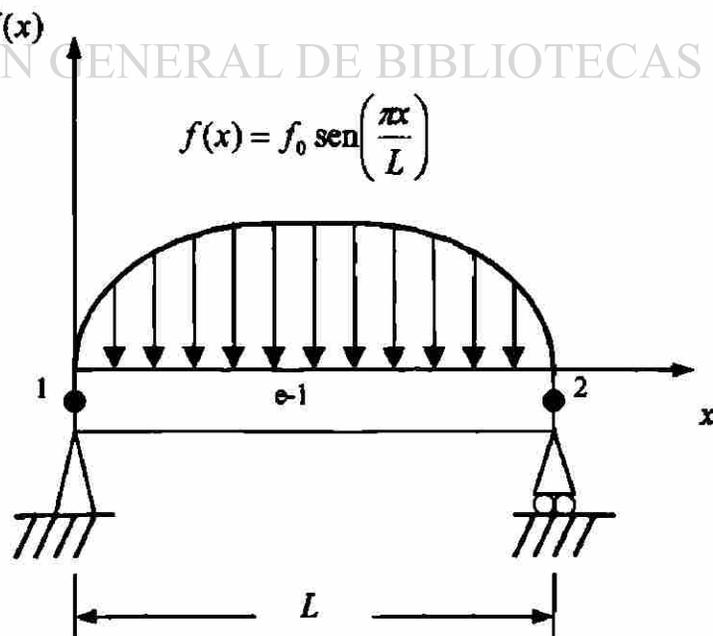
donde

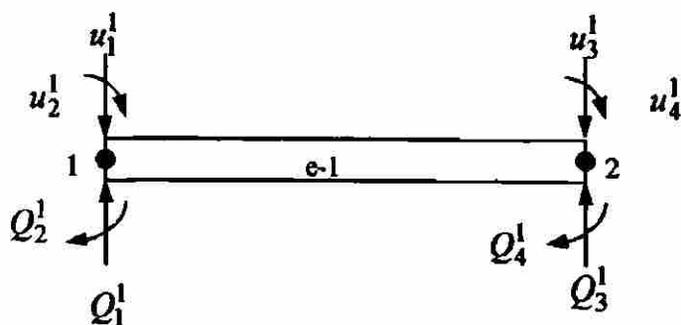
$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \Phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j^e}{dx^2} dx$$

$$F_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \Phi_i^e f dx + Q_i^e$$

PASO 3: CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

Para una malla con un elemento.





Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 + K_{14}^1 u_4^1 = f_1^1 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 + K_{24}^1 u_4^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 + K_{34}^1 u_4^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

$$K_{41}^1 u_1^1 + K_{42}^1 u_2^1 + K_{43}^1 u_3^1 + K_{44}^1 u_4^1 = f_4^1 + Q_4^1$$

Continuidad de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1$$

$$u_2^1 = U_2$$

$$u_3^1 = u_1^2 = U_3$$

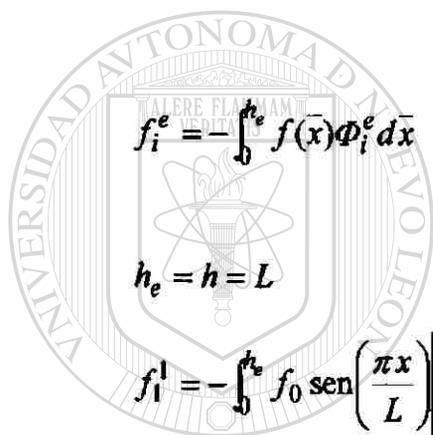
$$u_4^1 = u_2^2 = U_4$$

$$u_3^2 = U_5$$

$$u_2^4 = U_6$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \\ Q_4^1 \end{Bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$



$$f_i^e = - \int_0^{h_e} f(x) \Phi_i^e dx$$

$$h_e = h = L$$

$$f_1^1 = - \int_0^{h_e} f_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \left[1 - \frac{3(x)^2}{(h_e)^2} + \frac{2(x)^3}{(h_e)^3} \right] dx$$

$$f_2^1 = - \int_0^{h_e} f_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \left[-x + \frac{2(x)^2}{h_e} - \frac{(x)^3}{(h_e)^2} \right] dx$$

$$f_3^1 = - \int_0^{h_e} f_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \left[\frac{3(x)^2}{(h_e)^2} - \frac{2(x)^3}{(h_e)^3} \right] dx$$

$$f_4^1 = - \int_0^{h_e} f_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \left[-\frac{(x)^3}{(h_e)^2} + \frac{(x)^2}{h_e} \right] dx$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

PASO 4: IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES FRONTERA

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 & Q_2^1 &= 0 \\ U_3 &= 0 & Q_4^1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ 0 \\ Q_3^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PASO 5: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Solución del sistema de ecuaciones para (U_2, U_4, Q_1^1, Q_3^1)

Datos:

$$f_0 = 30000 \frac{N}{m} \quad E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2} \quad I = 3 \times 10^{-6} m^4$$

$$b = EI \quad L = 10m$$

$$\begin{bmatrix} 7200 & -36000 & -7200 & -36000 \\ -36000 & 240000 & 36000 & 120000 \\ -7200 & 36000 & 7200 & 36000 \\ -36000 & 120000 & 36000 & 240000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -95496.33 \\ 193531.6 \\ -95489.6 \\ -193498 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ 0 \\ Q_3^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Comparación de resultados elemento finito solución exacta

	Solución aproximada	
	Un elemento	Solución exacta
$U_2 \text{ rad}$	1.61	1.58
$U_4 \text{ rad}$	-1.61	-1.58
$Q_1^1 \text{ N}$	95496.3	95492.6
$Q_3^1 \text{ N}$	95496.3	95492.6

CAPITULO 3

PROBLEMAS EN ESTADO TRANSITORIO UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

3.1 Introducción

En este capítulo se desarrollaran los modelos de problemas del elemento finito en una dimensión en estado transitorio y esquemas para describir las aproximaciones en el tiempo para convertir ecuaciones diferenciales ordinarias en ecuaciones algebraicas.

Consideraremos modelos de elementos finitos que incluyen segundo orden (en el espacio) parabólico (primera derivada en el tiempo) y hiperbólico (segunda derivada en el tiempo) y de cuarto orden ecuación hiperbólica en conexión con la flexión de la viga.

Las ecuaciones de segundo orden parabólicas aparecen en transferencia de calor y en mecánica de fluidos.

La formulación del elemento finito en problemas dependiendo del tiempo se compone de dos pasos.

1. *Aproximación Espacial*. Donde la solución u de la ecuación bajo consideración es aproximada por la expresión de la forma.

$$u(x,t) \approx U^e(x,t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \psi_j^e(x) \quad (3.1)$$

El modelo espacial del elemento finito de la ecuación se desarrolla usando problemas en estado estable, mientras que se transportan todos los términos dependientes del tiempo en la formulación. Cuando la solución es separable en funciones solo de tiempo y solo de espacio, $u(x,t) = T(t)X(x)$, la aproximación (3.1) se justifica, cuando la solución no sea separable, (3.1) puede representar una buena aproximación de la solución, proporcionando incrementos de tiempo muy pequeños.

2. *Aproximación en el tiempo.* Cuando el sistema de ecuaciones diferenciales es aproximado en el tiempo, a menudo usando familias de diferencias finitas para las derivadas del tiempo. Este paso permite la conversión del sistema de ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas entre (u_j^e) a tiempo $t_{s+1} = (s+1)\Delta t$, donde (Δt) es el incremento del tiempo y (s) es un entero.

Todos los esquemas de aproximación en el tiempo para encontrar (u_j) en el tiempo (t_{s+1}) usando los valores conocidos de (u_j) de tiempos anteriores:

Así, al final de los dos pasos, uno tiene una solución espacial continua en intervalos de tiempo discretos.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$U^e(x, t_s) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t_s) \psi_j^e(x) \quad (s = 0, 1, \dots)$$

Ecuación diferencial modelo:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + c_0 u + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (3.2 a)$$

Las condiciones de frontera son de la forma

$$u(x,t) \quad \text{o} \quad -a \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad \text{o} \quad b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad x = 0, L \quad (3.2 \text{ b})$$

y las condiciones iniciales.

$$c_2 u(x,0) \quad \text{y} \quad c_2 u(x,0) + c_1 u(x,0) \quad (3.2 \text{ c})$$

3.2 Modelos del elemento finito

La formulación involucra la variación espacial de la variable dependiente, en el que se siguen los mismos pasos que se describieron en el capítulo (2).

Construcción de la forma débil de la ecuación (3.2 a)

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + c_0 u + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f \right] dx$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[-a \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_0 w u + c_1 w \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - w f \right] dx$$

$$- \hat{Q}_1 w(x_A) - \hat{Q}_3 w(x_B) - \hat{Q}_2 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x_A} - \hat{Q}_4 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x_B} \quad (3.3 \text{ a})$$

donde

$$\hat{Q}_1 = \left[-a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_{x_A}, \quad \hat{Q}_2 = \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x_A}$$

$$Q_3 = \left[-a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right]_{x_B}, \quad Q_4 = \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_B} \quad (3.3 \text{ b})$$

sustituimos $w = \psi_j(x)$ y (3.1) en (3.3 a), para obtener

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j}{dx} \right) + b \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{d^2\psi_j}{dx^2} \right) + c_0 \psi_i \left(\sum_{j=1}^n u_j \psi_j \right) + c_1 \psi_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{du_j}{dt} \psi_j \right) + c_2 \psi_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{d^2 u_j}{dt^2} \psi_j \right) - \psi_i f \right] dx$$

$$- Q_1 \psi_i(x_A) - Q_3 \psi_i(x_B) - Q_2 \left(-\frac{d\psi_i}{dx} \right)_{x_A} - Q_4 \left(-\frac{d\psi_i}{dx} \right)_{x_B}$$

$$0 = \sum_{j=1}^n \left[(K_{ij}^1 + K_{ij}^2 + M_{ij}^0) u_j + M_{ij}^1 \frac{du_j}{dt} + M_{ij}^2 \frac{d^2 u_j}{dt^2} \right] - F_i \quad (3.4)$$

En forma matricial, tenemos

$$[K] \{u\} + [M^1] \{\dot{u}\} + [M^2] \{\ddot{u}\} = \{F\} \quad (3.5 \text{ a})$$

donde

$$[K] = [K^1] + [K^2] + [M^0] \quad (3.5 \text{ b})$$

$$M_{ij}^0 = \int_{x_A}^{x_B} c_0 \psi_i \psi_j dx$$

$$M_{ij}^1 = \int_{x_A}^{x_B} c_1 \psi_i \psi_j dx,$$

$$M_{ij}^2 = \int_{x_A}^{x_B} c_2 \psi_i \psi_j dx$$

$$K_{ij}^1 = \int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx, \quad K_{ij}^2 = \int_{x_A}^{x_B} b \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad (3.5 \text{ c})$$

$$F_i = \int_{x_A}^{x_B} \psi_i f dx + Q_i$$

3.3 Aproximaciones en el tiempo

Como casos especiales de la ecuación (3.5 b) ecuación parabólica sí ($[M^2] = [0]$) y ecuación hiperbólica sí ($[M^1] = [0]$). La aproximación en el tiempo de (3.5 b) para estos dos casos deberá ser considerada separadamente: en el Caso (1), $c_2 = 0$; en el Caso (2), $c_1 = 0$.

Caso (1): Ecuación Parabólica.

$$[M^1]\{u\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (3.6 a)$$

Sujeta a las condiciones iniciales donde $\{u\}_0$

$$\{u\}_0 = \{u_0\} \quad (3.6 b)$$

donde $\{u\}_0$ es el valor de la cantidad u en el tiempo $t = 0$, mientras $\{u_0\}$ denota la columna de valores u_{j0} .

El método comúnmente usado de resolver (3.4 a) es la familia de aproximación α , $\alpha = 0$, (Diferencias hacia adelante, Euler); orden de exactitud; $O(\Delta t)$, cond.est.

$\alpha = \frac{1}{2}$, (Crank-Nicolson), orden de exactitud; $O((\Delta t)^2)$, estable.

$\alpha = \frac{2}{3}$, (Metodo Galerkin), orden de exactitud; $O((\Delta t)^2)$, estable.

$\alpha = 1$, (Diferencias hacia atrás), orden de exactitud = $O(\Delta t)$, estable.

El sistema de ecuaciones (3.5 a) se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas

$$[\hat{K}]_{s+1}\{u\}_{s+1} = [\hat{K}]_s\{u\}_s + \{F\}_{s,s+1} \quad (3.7 a)$$

donde

$$\begin{aligned} [K]_{s+1} &= [M^1] + \alpha \Delta t_{s+1} [K]_{s+1} \\ [K]_s &= [M^1] - (1 - \alpha) \Delta t_{s+1} [K]_s \\ \{F\}_{s,s+1} &= \Delta t_{s+1} [\alpha \{F\}_{s+1} + (1 - \alpha) \{F\}_s] \end{aligned} \quad (3.7 \text{ b})$$

Estabilidad y Exactitud.

Exactitud de un esquema numérico es una medida de la cercanía entre la solución aproximada y la solución exacta, mientras que estabilidad de la solución es una medida de la relación de la solución aproximada con el tiempo.

Un esquema numérico puede ser *condicionalmente estable* si es estable solo cuando ciertas restricciones en los incrementos de tiempo son satisfechas. Para todos los esquemas numéricos en el que ($\alpha < \frac{1}{2}$), la familia de aproximación es estable solo si los incrementos de tiempo satisfacen la siguiente condición de estabilidad.

$$\Delta t < \Delta t_{cr} \equiv \frac{2}{(1 - 2\alpha)\lambda} \quad (3.8)$$

Donde (λ) es el mayor eigenvalor de la ecuación de elemento finito (3.6). Note que la misma malla que se uso para el análisis transitorio debe ser usada para calcular los eigenvalores.

Caso (2): Ecuaciones Hiperbólicas

$$[M^2] \{u\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad (3.9)$$

Hay varios métodos para integrar ecuaciones de segundo orden. Algunos de estos son, la familia Newmark de esquemas de integradores de tiempo es muy usada en dinámica estructural. Otros métodos, como el de Wilson y el de Houbolt, pueden ser

usados para desarrollar las ecuaciones algebraicas de la ecuación diferencial de segundo orden (3.9).

En el método de Newmark (γ) y (β) son parámetros que determinan la estabilidad y exactitud del esquema.

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\beta = \frac{1}{2}, \text{ Método de aceleración promedio constante (estable)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\beta = \frac{1}{3}, \text{ Método de aceleración lineal (condicionalmente estable)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\beta = 0, \text{ Método de diferencias central (condicionalmente estable)}$$

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \gamma = 2\beta = \frac{8}{5}, \text{ Método de Galerkin (estable)} \quad (3.10)$$

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \gamma = 2\beta = 2, \text{ Método de diferencias hacia atrás (estable)}$$

Para todos los esquemas en los que ($\gamma < \alpha$) y ($\alpha \geq \frac{1}{2}$), los requerimientos de estabilidad

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \left[\frac{1}{2} \omega_{max}^2 (\alpha - \gamma) \right]^{-1/2} \quad (3.11)$$

donde ω_{max} es la máxima frecuencia natural del sistema (3.9).

El sistema de ecuaciones (3.9) se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas usando el método de Newmark:

$$[K]_{s+1} \{u\}_{s+1} = \{F\}_{s,s+1} \quad (3.12 a)$$

donde

$$\begin{aligned} [K]_{s+1} &= [K]_{s+1} + a_3 [M]_{s+1} \\ \{F\}_{s,s+1} &= \{F\}_{s+1} + [M]_{s+1} (a_3 \{u\}_s + a_4 \{\dot{u}\}_s + a_5 \{\ddot{u}\}_s) \end{aligned} \quad (3.12 b)$$

$$a_3 = \frac{2}{\gamma(\Delta t)^2}, \quad a_4 = \frac{2}{\gamma\Delta t}, \quad a_5 = \frac{1}{\gamma} - 1$$

Note que los cálculos de $[K]$ y $\{F\}$ requieren las condiciones iniciales $\{u\}_0, \{u\}_0, y \{u\}_0$. En la practica, no se conoce $\{u\}_0$. Como una aproximación, se puede calcular de (3.9) (se puede suponer que las fuerzas aplicadas son cero en $t = 0$):

$$\{u\}_0 = [M^2]^{-1} (\{F\}_0 - [K]\{u\}_0) \quad (3.13)$$

Al final de cada incremento de tiempo, el nuevo vector velocidad $\{u\}_{s+1}$ y el vector aceleración $\{a\}_{s+1}$ son calculados usando las ecuaciones

$$\begin{aligned} \{u\}_{s+1} &= a_1 (\{u\}_{s+1} - \{u\}_s) - a_4 \{u\}_s - a_5 \{u\}_s \\ \{u\}_{s+1} &= \{a\}_s + a_2 \{u\}_s + a_1 \{u\}_{s+1} \\ a_1 &= \alpha\Delta t, \quad a_2 = (1 - \alpha)\Delta t \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ejemplo 3.1 Una barra delgada a una temperatura inicial de (θ_1) , aislada por todos lados, menos por uno de sus extremos, que se somete a la temperatura de (θ_0) , que es la temperatura ambiente. La barra tiene una longitud (L) , determine la distribución de temperaturas.

Ecuación diferencial del problema

$$\xi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 < x < L$$

$$\xi = \frac{k}{\rho c}$$

θ = Temperatura

ξ = Difusividad térmica

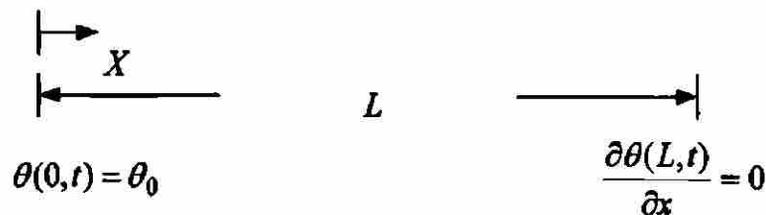
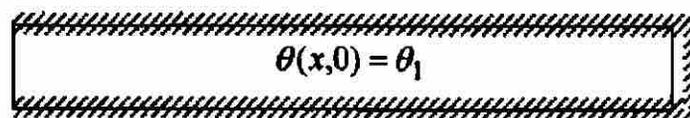
t = Tiempo

Condiciones de frontera

$$\theta(x, 0) = \theta_1 \quad 0 < x < L$$

$$\theta(0, t) = \theta_0 \quad t > 0$$

$$\frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = 0 \quad t > 0$$



Normalizando

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad \tau = \frac{\xi t}{L^2} \quad X = \frac{x}{L}$$

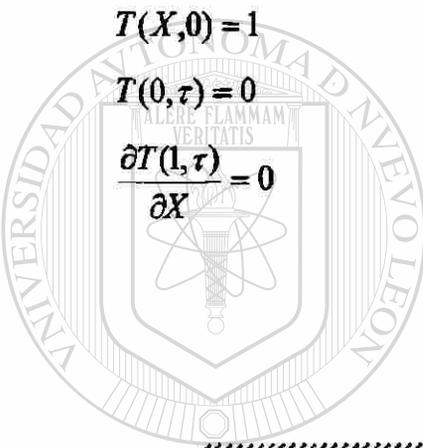
La ecuación diferencial y las condiciones de frontera del problema se transforma en

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad 0 < X < 1 \quad (3.15)$$

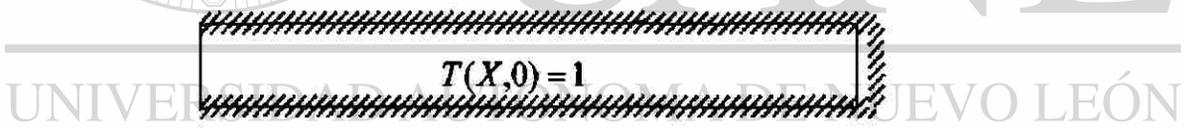
$$T(X, 0) = 1 \quad 0 < X < 1$$

$$T(0, \tau) = 0 \quad \tau > 0$$

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial X} = 0 \quad \tau > 0$$



UANL



$$T(0, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial X} = 0$$

El problema que se tiene es un caso especial de la ecuación (3.2 a) con $a = 1$,
 $b = 0$, $c_0 = 0$, $c_2 = 0$, y $f = 0$.

El modelo de elemento finito para (3.15) es dado por (3.6 a):

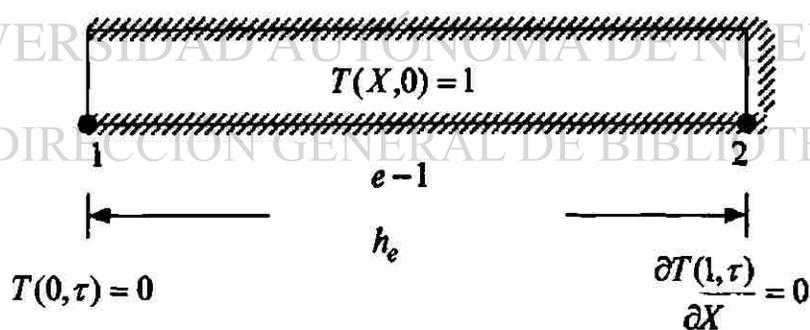
$$[M^e] \left\{ \dot{T} \right\} + [K] \{T\} = \{F\} \quad (3.6 a)$$

donde

$$M_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$

I) Para el caso de un elemento lineal



$$\psi_1^e(\bar{X}) = 1 - \frac{X}{h_e}$$

$$\psi_2^e(X) = \frac{X}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{1}{h_e}$$

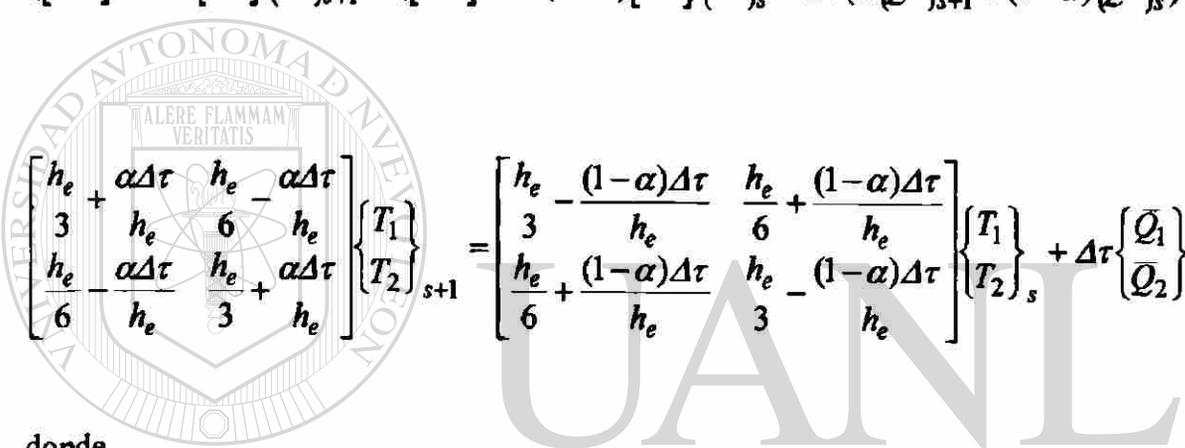
$$\frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{1}{h_e}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en la ecuación (3.6 a).

$$h_e \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia (α) de aproximación (3.7)

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$



$$\begin{bmatrix} h_e + \alpha\Delta\tau & h_e - \alpha\Delta\tau \\ 3 & h_e & 6 & h_e \\ h_e & \alpha\Delta\tau & h_e & \alpha\Delta\tau \\ 6 & h_e & 3 & h_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} h_e - (1-\alpha)\Delta\tau & h_e + (1-\alpha)\Delta\tau \\ 3 & h_e & 6 & h_e \\ h_e + (1-\alpha)\Delta\tau & h_e - (1-\alpha)\Delta\tau \\ 6 & h_e & 3 & h_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

donde

$$Q_i = \alpha(Q_i^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^1)_s$$

Condiciones de frontera

$$(T_1)_s = 0 \quad \text{por que} \quad T(0, \tau) = 0$$

$$(Q_2^1)_s = 0 \quad \text{por que} \quad \frac{\partial T(1, \tau)}{\partial X} = 0 \quad Q_3 = \left(a \frac{\partial T}{\partial X} \right) \Big|_{X_B} = 0$$

Condiciones iniciales

$$(T_1)_0 = 1, \quad (T_2)_0 = 1 \quad \text{en} \quad \tau = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_e + \frac{\alpha \Delta \tau}{3} & h_e - \frac{\alpha \Delta \tau}{6} \\ 3 & 6 \\ h_e - \frac{\alpha \Delta \tau}{6} & h_e + \frac{\alpha \Delta \tau}{3} \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} h_e - (1-\alpha)\Delta\tau & h_e + (1-\alpha)\Delta\tau \\ 3 & 6 \\ h_e + (1-\alpha)\Delta\tau & h_e - (1-\alpha)\Delta\tau \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{3} h_e + \alpha \frac{\Delta\tau}{h_e} \right) (T_2)_{s+1} = \left[\frac{1}{3} h_e - (1-\alpha) \frac{\Delta\tau}{h_e} \right] (T_2)_s \quad (\text{A})$$

para los incrementos de tiempo crítico $\Delta\tau_{cr}$ se obtiene primero el λ_{max} asociado con:

$$-\lambda [M]\{T\} + [K]\{T\} = 0$$

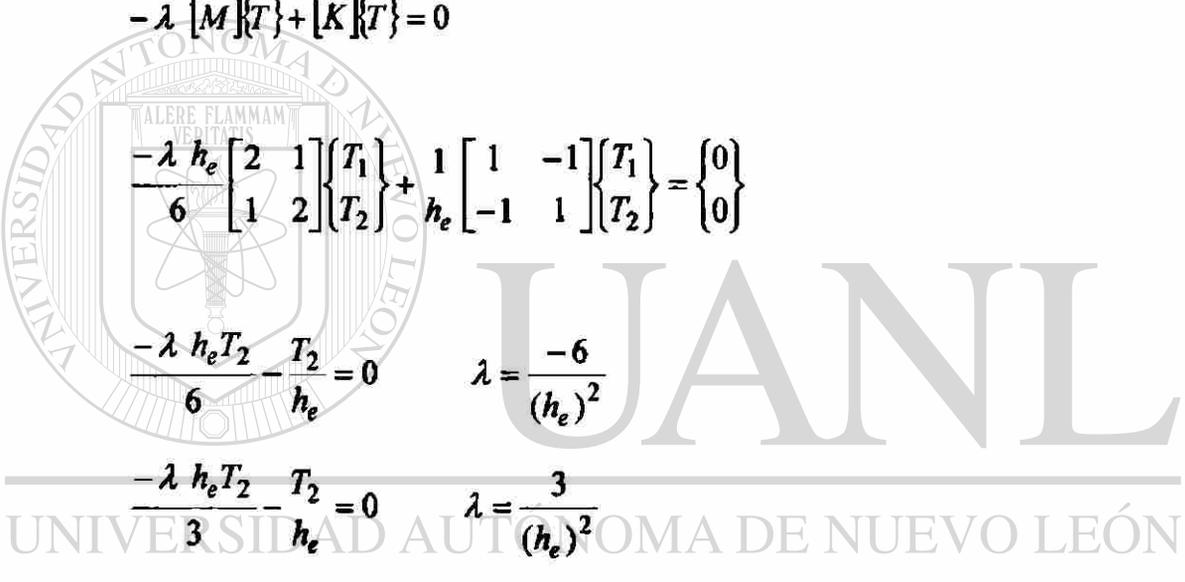
$$\frac{-\lambda h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} + h_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{-\lambda h_e T_2}{6} - \frac{T_2}{h_e} = 0$$

$$\lambda = \frac{-6}{(h_e)^2}$$

$$\frac{-\lambda h_e T_2}{3} - \frac{T_2}{h_e} = 0$$

$$\lambda = \frac{3}{(h_e)^2}$$



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

para $h_e = 1$, $\alpha = 0$

$$\lambda_{max} = 3$$

$$\Delta\tau_{cr} = \frac{2}{(1-2\alpha)\lambda_{max}} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto ($\Delta\tau_{cr} = 0.6667$) para que la solución de la ecuación de diferencias hacia adelante (A) sea estable, los incrementos de tiempo deben de ser menores que ($\Delta\tau_{cr} = 0.6667$), de otra manera la solución será inestable.

Solución de la ecuación (A) para $h_e = 1$

$$\left(\frac{1}{3}h_e + \alpha \frac{\Delta\tau}{h_e}\right)(T_2)_{s+1} = \left[\frac{1}{3}h_e - (1-\alpha) \frac{\Delta\tau}{h_e}\right](T_2)_s \quad (A)$$

TABLA 3.1a

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento lineal.

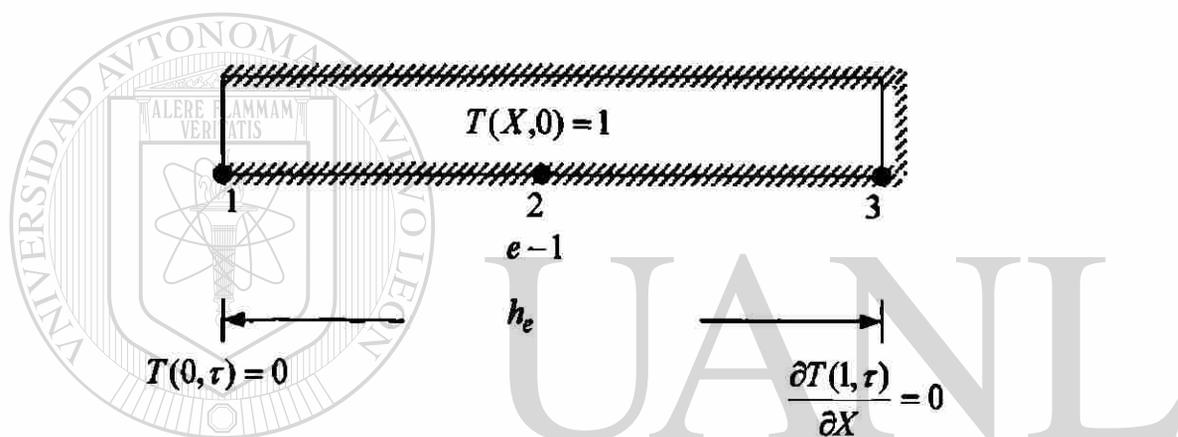
Tiempo	T_2	T_2	T_2	T_2
$\Delta\tau$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.5$	Solución exacta
0	1	1	1	1
0.05	0.85	0.8696	0.8605	0.9969
0.10	0.7225	0.7561	0.7404	0.9493
0.15	0.6141	0.6575	0.6371	0.8642
0.20	0.5220	0.5718	0.5482	0.7723
0.25	0.4437	0.4972	0.4717	0.6854
0.30	0.3771	0.4323	0.4059	0.6068
0.35	0.3206	0.3759	0.3492	0.5367
0.40	0.2724	0.3269	0.3004	0.4745
0.45	0.2315	0.2843	0.2584	0.4119
0.50	0.1967	0.2472	0.2223	0.3708

II) Para el caso de un elemento cuadrático (Ejemplo 3.1)

$$[M^1] \left\{ \dot{T} \right\} + [K] \{T\} = \{Q\} \quad (3.6 a)$$

$$M_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$\psi_1^e(\bar{X}) = \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right) \quad \frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_2^e(\bar{X}) = \frac{4\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right) \quad \frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_3^e(\bar{X}) = -\frac{\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right) \quad \frac{d\psi_3^e}{dX} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en la ecuación (3.6 a).

$$[M^e] = \frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad [K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia α de aproximación (3.7)

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e}\alpha\Delta\tau & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e}\alpha\Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e}\alpha\Delta\tau \\ -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e}\alpha\Delta\tau & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e}\alpha\Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau \\ -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{3h_e}(1-\alpha)\Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

donde

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^1)_s$$

Condiciones frontera.

$$(U_1)_s = 0 \quad \text{por que} \quad u(0, \tau) = 0$$

$$\bar{Q}_2 = 0$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha(Q_3^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_3^1)_s$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha \left\{ \left(\frac{\partial T_3}{\partial X} \right)_{x_B} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ \left(\frac{\partial T_3}{\partial X} \right)_{x_B} \right\}_s = 0$$

Condiciones iniciales.

$$(T_2)_0 = 1, \quad (T_3)_0 = 1 \quad \text{en} \quad \tau = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e} \alpha \Delta \tau \\ \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau \\ -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e} \alpha \Delta \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{3h_e} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e} (1-\alpha) \Delta \tau & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{3h_e} (1-\alpha) \Delta \tau \\ \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{3h_e} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e} (1-\alpha) \Delta \tau \\ -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{3h_e} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{3h_e} (1-\alpha) \Delta \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s + \Delta \tau \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Simplificando el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{3h_e} \alpha \Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta\tau & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e} \alpha \Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{3h_e} (1-\alpha) \Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e} (1-\alpha) \Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{3h_e} (1-\alpha) \Delta\tau & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{3h_e} (1-\alpha) \Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s$$

Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.05$

$$\begin{bmatrix} 0.6666 & 0 \\ 0 & 0.1916 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1333 \\ 0.1333 & 0.7499 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s$$

TABLA 3.1b

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento cuadrático.

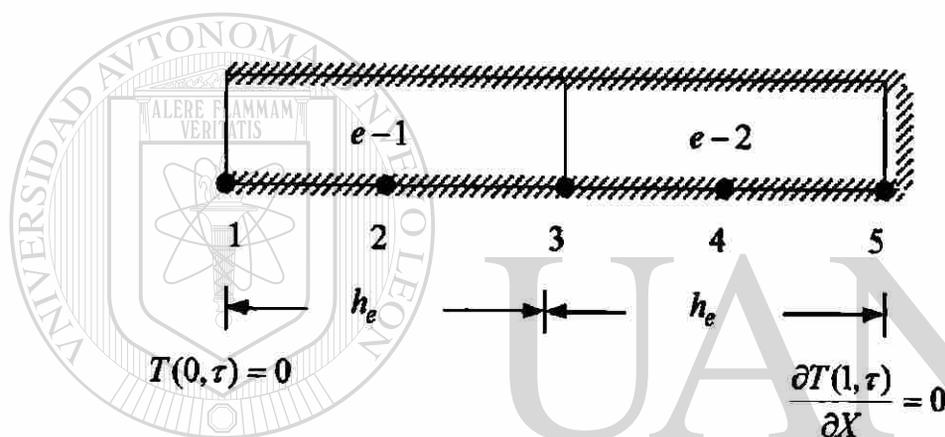
Tiempo	T_2	T_3	T_3
$\Delta\tau$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.5$	Solución exacta
0	1	1	1
0.05	0.8000	1.087	0.9969
0.10	0.6972	0.9819	0.9493
0.15	0.6146	0.8692	0.8642
0.20	0.5425	0.7676	0.7723
0.25	0.4789	0.6777	0.6854
0.30	0.4228	0.5983	0.6068
0.35	0.3732	0.5282	0.5367
0.40	0.3295	0.4663	0.4745
0.45	0.2909	0.4116	0.4119
0.50	0.2568	0.3634	0.3708

III) Para el caso de dos elemento cuadrático (Ejemplo 3.1).

$$[M^{le}] \{\dot{T}\} + [K^e] \{T\} = \{Q^e\} \quad (3.6 a)$$

$$M_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \psi_i \psi_j dx$$

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$\psi_1^e(\bar{X}) = \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right) \quad \frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

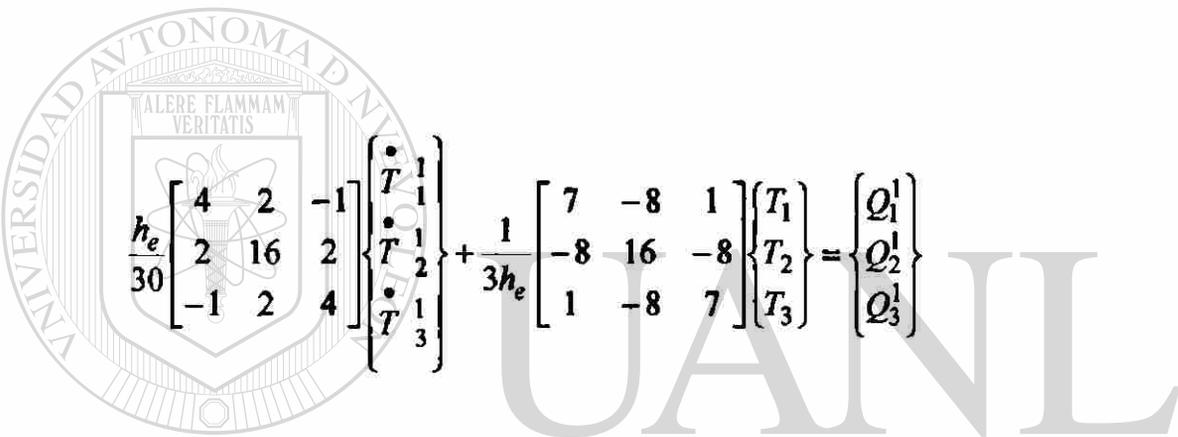
$$\psi_2^e(\bar{X}) = \frac{4\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right) \quad \frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_3^e(\bar{X}) = -\frac{\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right) \quad \frac{d\psi_3^e}{dX} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en (3.6 a).

$$[M^e] = \frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$



$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

Ensamble de elementos. (Balance de la variable primaria)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

$$\dot{T}_1^1 = \dot{T}_1$$

$$\dot{T}_2^1 = \dot{T}_2$$

$$\dot{T}_3^1 = \dot{T}_1^2 = \dot{T}_3$$

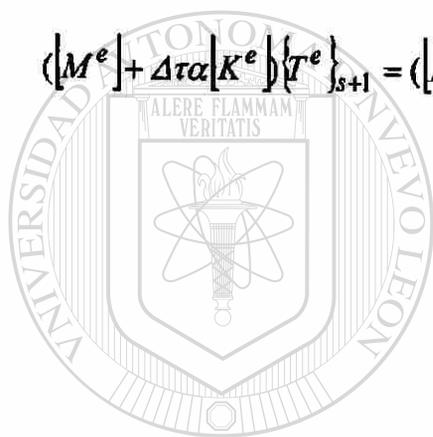
$$\dot{T}_2^2 = \dot{T}_4$$

$$\dot{T}_3^2 = \dot{T}_5$$

$$h_e \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \dot{T}_4 \\ \dot{T}_5 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia (α) de aproximación (3.7)

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



$$\begin{bmatrix}
 \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau & -h_e + \frac{1}{30} \alpha \Delta \tau & 0 & 0 \\
 \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau & 0 & 0 \\
 -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{8h_e}{30} + \frac{14}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau & 0 \\
 0 & 0 & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau \\
 0 & 0 & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \alpha \Delta \tau & \frac{7}{30} \alpha \Delta \tau
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5
 \end{bmatrix}_{s+1}
 =$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & 0 & 0 \\
 \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & 0 & 0 \\
 -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{8h_e}{30} - \frac{14}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & 0 \\
 0 & 0 & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau \\
 0 & 0 & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} (1-\alpha) \Delta \tau & \frac{7}{30} (1-\alpha) \Delta \tau
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5
 \end{bmatrix}_s
 + \Delta \tau
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5
 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^e)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^e)_s$$

Condiciones frontera.

$$(T_1)_s = 0 \quad \bar{Q}_2 = 0, \quad \bar{Q}_3 = 0, \quad \bar{Q}_4 = 0, \quad \bar{Q}_5 = 0$$

Condiciones iniciales.

$$(T_2)_0 = 1, \quad (T_3)_0 = 1, \quad (T_4)_0 = 1, \quad (T_5)_0 = 1$$

Sustituimos las condiciones frontera y las condiciones iniciales en el sistema de ecuaciones algebraicas para ($h_e = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.05$).

$$\begin{bmatrix} 0.533 & -0.1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.366 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.533 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.166 & 0 & 0 \\ 0.166 & -0.1 & 0.166 & -0.033 \\ 0 & 0.166 & 0 & 0.166 \\ 0 & -0.033 & 0.166 & -0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}_s$$

TABLA 3.1c

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para dos elementos cuadráticos.

Tiempo					Solución Exacta
$\Delta\tau$	T_2	T_3	T_4	T_5	T_5
0	1	1	1	1	1
0.05	0.4903	0.9488	0.9891	0.9941	0.9969
0.1	0.4256	0.6889	0.9151	0.9547	0.9493
0.15	0.3361	0.6445	0.7998	0.8825	0.8642
0.20	0.3025	0.5395	0.7212	0.7626	0.7723
0.25	0.2607	0.4914	0.6287	0.6925	0.6854
0.30	0.2330	0.4241	0.5618	0.5998	0.6068
0.35	0.2039	0.3810	0.4923	0.5385	0.5367
0.40	0.1813	0.3324	0.4377	0.4701	0.4745
0.45	0.1594	0.2964	0.3849	0.4192	0.4194
0.50	0.1414	0.2601	0.3413	0.3678	0.3708

Ejemplo 3.2 Una barra delgada a una temperatura inicial de (θ_1) , aislada por todos lados, menos por uno de sus extremos, por el que intercambia calor con el medio ambiente. La barra tiene una longitud (L) , determine la distribución de temperaturas.

Datos:

$$\theta_1 = \text{Temperatura inicial} = 100^\circ F$$

$$\theta_\infty = \text{Temperatura del medio ambiente} = 1600^\circ F$$

$$\beta = \text{Coeficiente de transferencia de calor por convección} = 5 \frac{\text{Btu}}{\text{hr-ft}^2\text{-}^\circ F}$$

$$k = \text{Coeficiente de transferencia de calor por conducción} = 0.54 \frac{\text{Btu}}{\text{hr-ft-}^\circ F}$$

$$C_p = \text{Calor específico} = 0.2 \frac{\text{Btu}}{\text{Lb}_m\text{-}^\circ F}$$

$$\rho = \text{Densidad} = 144 \frac{\text{Lb}_m}{\text{ft}^3}$$

$$L = \text{Longitud de la barra} = 1 \text{ ft}$$

$$\xi = \text{Difusividad térmica} = \frac{k}{\rho C}$$

$$t = \text{Tiempo}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

Ecuación diferencial del problema

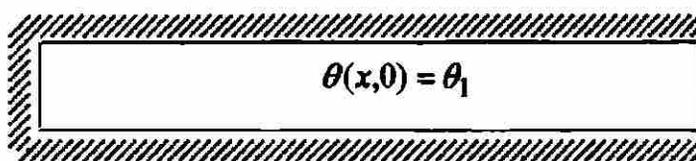
$$\xi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 < x < L$$

Condiciones de frontera

$$\theta(x, 0) = \theta_1 \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0 \quad t > 0$$

$$-k \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = \beta(\theta - \theta_\infty) \quad t > 0$$


 x
 L

$$\frac{\partial \theta(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$-k \frac{\partial \theta(L,t)}{\partial x} = \beta(\theta - \theta_0)$$

Normalizando

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$X = \frac{x}{L}$$

La ecuación diferencial y las condiciones de frontera del problema se transforma en.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$0 < X < 1$$

$$T(X,0) = 1$$

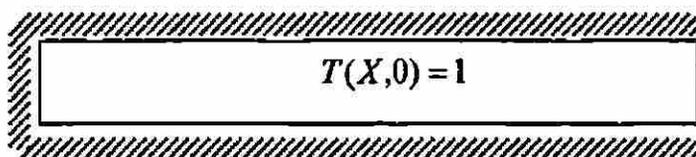
$$0 < X < 1$$

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial X} = 0$$

$$\tau > 0$$

$$-k \frac{\partial T(L,\tau)}{\partial X} = \beta T(1,\tau)$$

$$\tau > 0$$


 X
 $X = 1$

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial X} = 0$$

$$-k \frac{\partial T(L,\tau)}{\partial X} = \beta T$$

El problema que se tiene es un caso especial de la ecuación (3.2 a) con $a = 1, b = 0, c_0 = 0, c_2 = 0, f = 0$. El modelo de elemento finito para (3.15) es dado por (3.6 a):

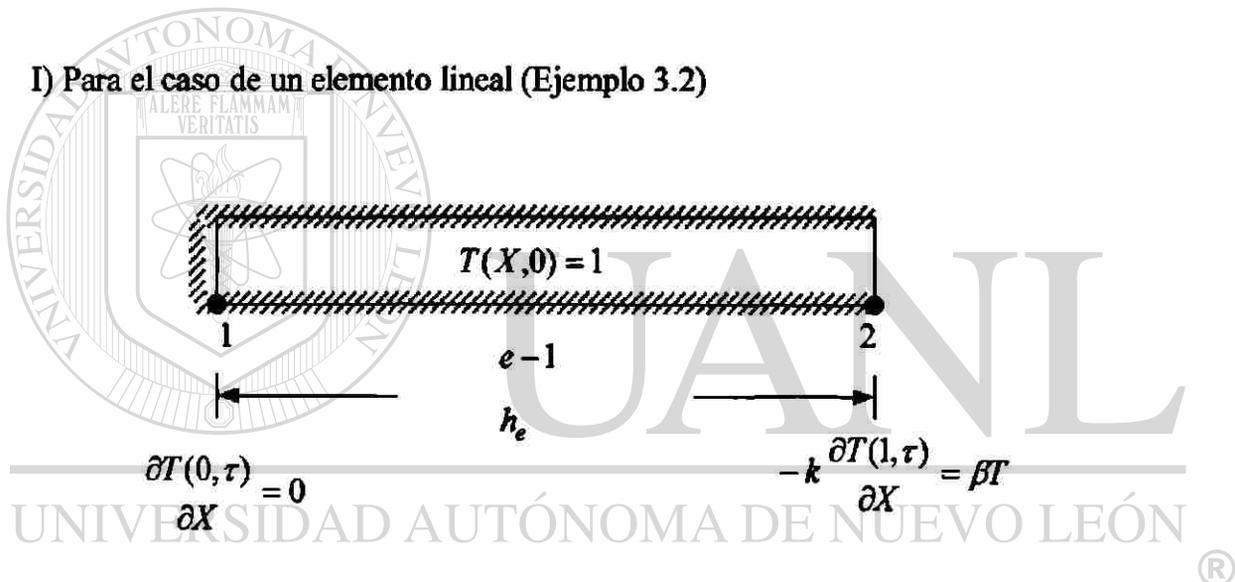
$$[M^1] \left\{ \overset{\circ}{T} \right\} + [K] \{T\} = \{F\} \quad (3.6 a)$$

donde

$$M_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$

I) Para el caso de un elemento lineal (Ejemplo 3.2)



$$\psi_1^e(X) = 1 - \frac{X}{h_e} \quad \psi_2^e(X) = \frac{X}{h_e}$$

$$\frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{1}{h_e} \quad \frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{1}{h_e}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calcular (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en la ecuación (3.6 a)

$$h_e \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \overset{\circ}{T} \right\} + \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{T\} = \left\{ \overset{\circ}{Q} \right\}$$

Usando la familia (α) de aproximación (3.7)

$$\left([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e] \right) \{T^e\}_{s+1} = \left([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e] \right) \{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix} h_e + \frac{\alpha\Delta\tau}{3} & h_e - \frac{\alpha\Delta\tau}{6} \\ h_e - \frac{\alpha\Delta\tau}{6} & h_e + \frac{\alpha\Delta\tau}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} h_e - \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{6} & h_e + \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3} \\ h_e + \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3} & h_e - \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

donde

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^1)_s$$

Condiciones frontera.

$$\bar{Q}_1 = \alpha(Q_1^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_1^1)_s$$

$$\bar{Q}_1 = \alpha \left\{ \left(-a \frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_{X_A} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ \left(-a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_A} \right\}_s = 0$$

$$\bar{Q}_2 = \alpha(Q_2^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_2^1)_s$$

$$\bar{Q}_2 = \alpha \left\{ \left(-a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ \left(-a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_s$$

$$\bar{Q}_2 = \alpha(-\beta T_2)_{s+1} + (1-\alpha)(-\beta T_2)_s$$

Condiciones iniciales.

$$(T_1)_0 = 1, \quad (T_2)_0 = 1 \quad \text{en} \quad \tau = 0$$

Sustituimos las condiciones frontera y las condiciones iniciales en el sistema de ecuaciones algebraicas.

$$\begin{bmatrix} \frac{h_e + \alpha\Delta\tau}{3} & \frac{h_e - \alpha\Delta\tau}{6} \\ \frac{h_e - \alpha\Delta\tau}{6} & \frac{h_e + \alpha\Delta\tau}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} \frac{h_e - (1-\alpha)\Delta\tau}{3} & \frac{h_e + (1-\alpha)\Delta\tau}{6} \\ \frac{h_e + (1-\alpha)\Delta\tau}{6} & \frac{h_e - (1-\alpha)\Delta\tau}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{Q}_2 \end{Bmatrix}$$

a) Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.01875$

$$\Delta\tau\bar{Q}_2 = -0.0468(T_2)_{s+1} - 0.0468(T_2)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.3427 & 0.1572 \\ 0.1572 & 0.3895 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.3239 & 0.1760 \\ 0.1760 & 0.2771 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s$$

TABLA 3.2a

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento lineal

Tiempo $\Delta\tau$	T_1	T_2	Solución exacta T_1	Solución exacta T_2
0	1	1	1	1
0.01875	1.1353	0.7051	1.0210	0.3500
0.03750	1.1900	0.5343	1.0082	0.2798
0.05625	1.2000	0.4300	1.0034	0.2379
0.07500	1.1865	0.3719	0.9950	0.2102
0.09375	1.1598	0.3326	0.9810	0.1904
0.11250	1.1266	0.3060	0.9616	0.1753
0.13125	1.0905	0.2867	0.9384	0.1633
0.15000	1.0533	0.2716	0.9127	0.1534
0.16875	1.0160	0.2590	0.8853	0.1450
0.18750	0.9797	0.2481	0.8572	0.1377

b) Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.0375$

$$\Delta\tau\bar{Q}_2 = -0.09375(T_2)_{s+1} - 0.09375(T_2)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.3520 & 0.1479 \\ 0.1479 & 0.4457 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.3145 & 0.1854 \\ 0.1854 & 0.2208 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_s$$

Tabla 3.2aa

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento lineal

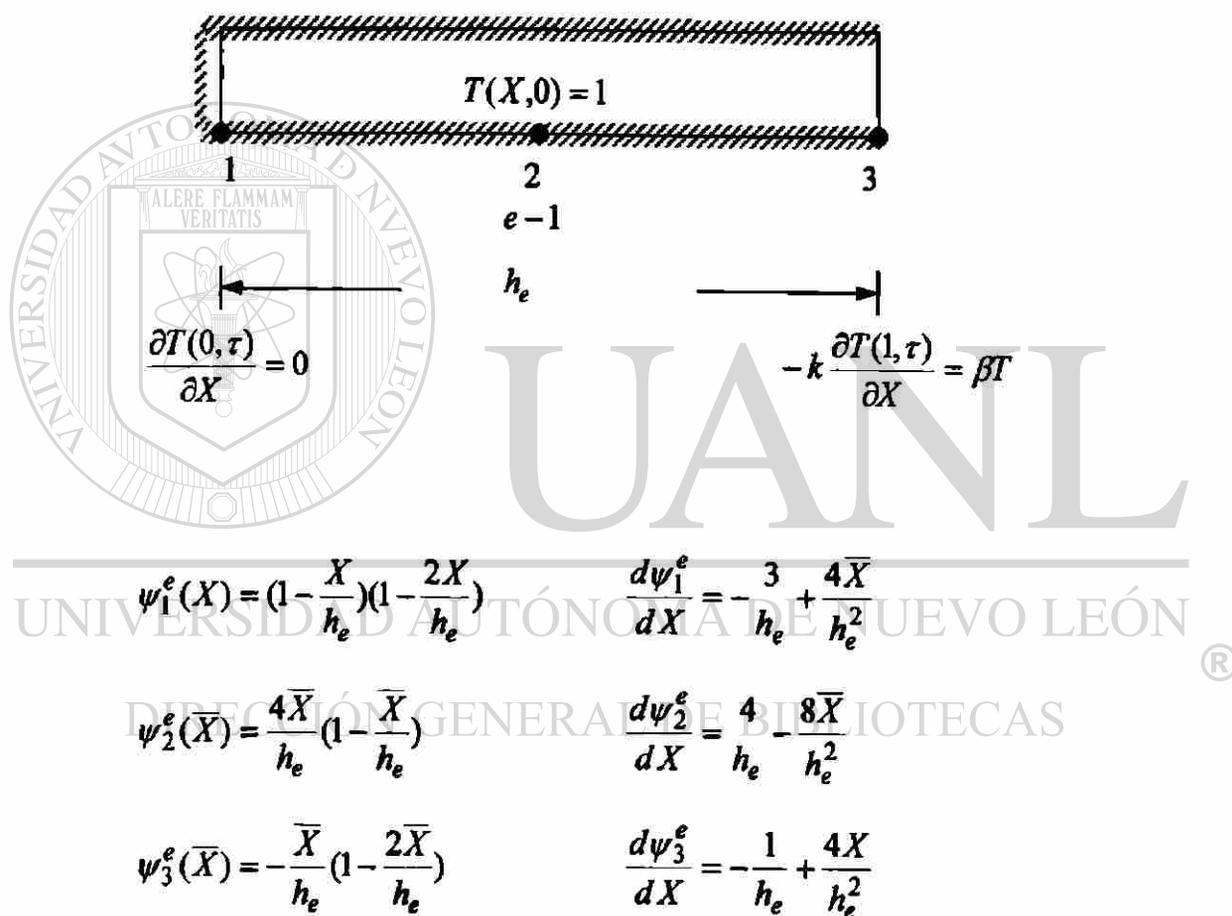
Tiempo $\Delta\tau$	T_1	T_2	Solución Exacta T_1	Solución Exacta T_2
0	1	1	1	1
0.03750	1.2053	0.5114	1.0082	0.2798
0.07500	1.1959	0.3579	0.9950	0.2102
0.11250	1.1312	0.2994	0.9616	0.1753
0.15000	1.055	0.2686	0.9127	0.1534
0.18750	0.9809	0.2466	0.8572	0.1377
0.22500	0.9105	0.2281	0.8005	0.1255
0.26250	0.8448	0.2114	0.7452	0.1152
0.30000	0.7838	0.1961	0.6904	0.1049
0.33750	0.7271	0.1819	0.6356	0.0946
0.3750	0.6745	0.1687	0.5808	0.0843

II) Para el caso de un elemento cuadrático (Ejemplo 3.2)

$$[M^1] \left\{ \dot{T} \right\} + [K] \{T\} = \{Q\} \quad (3.6 a)$$

$$M_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$



Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en (3.6 a).

$$[M^e] = \frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad [K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia α de aproximación (3.7)

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix} 4h_e + \frac{7}{30}\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30}\alpha\Delta\tau & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30}\alpha\Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30}\alpha\Delta\tau & 16h_e + \frac{16}{30}\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30}\alpha\Delta\tau \\ -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30}\alpha\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30}\alpha\Delta\tau & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{30}\alpha\Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} 4h_e - \frac{7}{30}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30}(1-\alpha)\Delta\tau & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30}(1-\alpha)\Delta\tau \\ \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30}(1-\alpha)\Delta\tau \\ -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30}(1-\alpha)\Delta\tau & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30}(1-\alpha)\Delta\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

donde

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^1)_s$$

Condiciones de frontera.

$$Q_1 = \alpha(Q_1^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_1^1)_s$$

$$Q_1 = \alpha \left\{ \left(-a \frac{\partial T_1}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ \left(-a \frac{\partial T_1}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_s = 0$$

$$\bar{Q}_2 = 0$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha(Q_3^1)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_3^1)_s$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha \left\{ \left(-a \frac{\partial T_3}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ \left(-a \frac{\partial T_3}{\partial X} \right)_{X_B} \right\}_s$$

$$\bar{Q}_3 = \alpha \{ -\beta T_3 \}_{s+1} + (1-\alpha) \{ -\beta T_3 \}_s$$

Condiciones iniciales.

$$(T_1)_0 = 1, (T_2)_0 = 1, (T_3)_0 = 1 \quad \text{en} \quad \tau = 0$$

Sustituir las condiciones frontera y las condiciones iniciales en el sistema de ecuaciones algebraicas.

$$\begin{bmatrix} \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e} \alpha \Delta \tau \\ \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau \\ -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{3h_e} \alpha \Delta \tau & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{3h_e} \alpha \Delta \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} 4h_e - 7 & 2h_e + 8 & -h_e - 1 \\ 30 & 30 & 30 \\ 3h_e & 3h_e & 3h_e \end{bmatrix} (1-\alpha)\Delta\tau \begin{bmatrix} 2h_e + 8 \\ 16h_e - 16 \\ 2h_e + 8 \end{bmatrix} (1-\alpha)\Delta\tau \begin{bmatrix} -h_e - 1 \\ 2h_e + 8 \\ 4h_e - 7 \end{bmatrix} (1-\alpha)\Delta\tau \begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{Q}_3 \end{Bmatrix}$$

a) Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.01875$

$$\Delta\tau \bar{Q}_2 = -0.0468(T_2)_{s+1} - 0.0468(T_2)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.1552 & 0.0416 & -0.0302 \\ 0.0416 & 0.5833 & 0.0416 \\ -0.0302 & 0.0416 & 0.2020 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.1114 & 0.0916 & -0.0364 \\ 0.0916 & 0.4833 & 0.0916 \\ -0.0364 & 0.0916 & -0.0646 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s$$

TABLA 3.2b

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento cuadrático

Tiempo				Solución exacta	Solución exacta	Solución exacta
$\Delta\tau$	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3
0	1	1	1	1	1	1
0.01875	0.8932	1.0425	0.5117	1.0210	1.0040	0.3500
0.03750	0.9524	0.9869	0.4143	1.0082	0.9702	0.2798
0.05625	0.9886	0.9359	0.3633	1.0034	0.9636	0.2379
0.07500	1.0012	0.8930	0.3280	0.9950	0.8761	0.2102
0.09375	0.9980	0.8559	0.3021	0.9810	0.8326	0.5812
0.11250	0.9850	0.8230	0.2824	0.9616	0.7932	0.1753
0.13125	0.9658	0.7930	0.2669	0.9384	0.7575	0.1636
0.15000	0.9429	0.7653	0.2541	0.9127	0.7248	0.1534
0.16875	0.9180	0.7392	0.2431	0.8853	0.6947	0.1450
0.18750	0.8920	0.7146	0.2335	0.8572	0.6666	0.1377

b) Para $h_e = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.0375$

$$\Delta\tau \bar{Q}_2 = -0.0937(T_2)_{s+1} - 0.0937(T_2)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.17708 & 0.01666 & -0.0270 \\ 0.01666 & 0.63330 & 0.01666 \\ -0.02708 & 0.01666 & 0.27070 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{bmatrix} 0.08958 & 0.11666 & -0.0395 \\ 0.11666 & 0.43333 & 0.11666 \\ -0.03958 & 0.11666 & -0.0041 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_s$$

TABLA 3.2bb

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para un elemento cuadrático

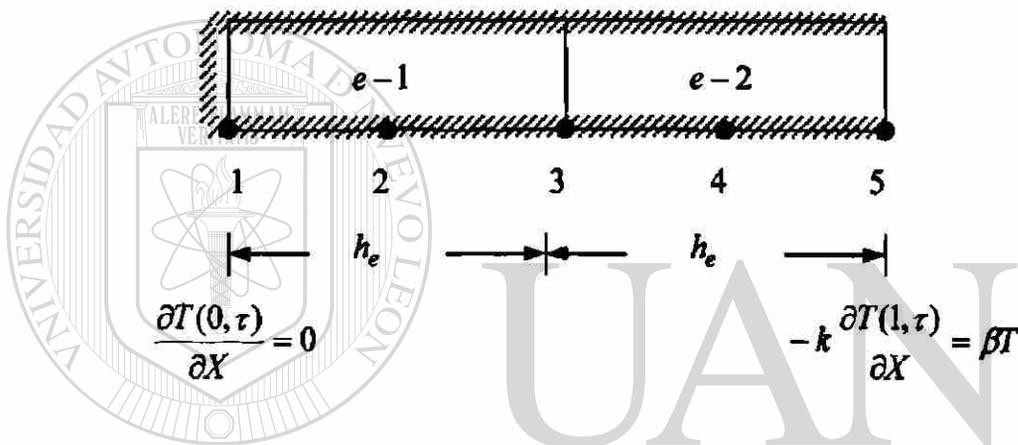
Tiempo $\Delta\tau$	T_1	T_2	T_3	Solución exacta T_1	Solución exacta T_2	Solución exacta T_3
0	1	1	1	1	1	1
0.0375	0.8903	1.0212	0.2955	1.0082	0.9702	0.2798
0.07500	1.0280	0.8807	0.3539	0.9950	0.8761	0.2102
0.11250	0.9853	0.8240	0.2714	0.9616	0.7932	0.1753
0.15000	0.9477	0.7635	0.2545	0.9127	0.7248	0.1534
0.18750	0.8938	0.7141	0.2319	0.8572	0.6666	0.1377
0.22500	0.8410	0.6680	0.2164	0.8005	0.6155	0.1255
0.26250	0.7892	0.6257	0.2019	0.7452	0.5694	0.1152
0.30000	0.7401	0.5861	0.1890	0.6904	0.5233	0.1049
0.33750	0.6937	0.5492	0.1770	0.6356	0.4772	0.0946
0.3750	0.6501	0.5146	0.1658	0.5808	0.4311	0.0843

III) Para dos elementos cuadráticos (Ejemplo 3.2)

$$[M^e] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{Q\} \quad (3.6 a)$$

$$M_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \psi_i \psi_j dX$$

$$K_{ij}^e = \int_{X_A}^{X_B} \frac{d\psi_i}{dX} \frac{d\psi_j}{dX} dX$$



$$\psi_1^e(\bar{X}) = \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right) \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_1^e}{dX} = -\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_2^e(\bar{X}) = \frac{4\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_2^e}{dX} = \frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{X}}{h_e^2}$$

$$\psi_3^e(\bar{X}) = -\frac{\bar{X}}{h_e} \left(1 - \frac{2\bar{X}}{h_e}\right)$$

$$\frac{d\psi_3^e}{dX} = -\frac{1}{h_e} + \frac{4\bar{X}}{h_e^2}$$

Con las funciones de interpolación y sus derivadas se calculan (M_{ij}^e) y (K_{ij}^e) después se sustituyen en la ecuación (3.6 a).

$$[M^e] = \frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad [K^e] = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \end{Bmatrix}$$

Ensamble de elementos (Balance de la variable primaria)

$$\dot{T}_1 = T_1$$

$$\dot{T}_2 = T_2$$

$$\dot{T}_3 = T_1 = T_3$$

$$\dot{T}_4 = T_2$$

$$\dot{T}_5 = T_3$$

$$\frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \dot{T}_4 \\ \dot{T}_5 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \\ Q_3^2 \end{Bmatrix}$$

Usando la familia α de aproximación (3.7).

$$([M^e] + \Delta\tau\alpha[K^e])\{T^e\}_{s+1} = ([M^e] - \Delta\tau(1-\alpha)[K^e])\{T^e\}_s + \Delta\tau(\alpha\{Q^e\}_{s+1} + (1-\alpha)\{Q^e\}_s)$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
 \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & 0 \\
 -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{8h_e}{30} + \frac{14}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} + \frac{16}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} \\
 0 & 0 & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} \\
 0 & 0 & -\frac{h_e}{30} + \frac{1}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} - \frac{8}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e} & \frac{4h_e}{30} + \frac{7}{30} \frac{\alpha \Delta \tau}{3h_e}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5
 \end{bmatrix}_{s+1}
 =$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
 \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & 0 & 0 \\
 -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{8h_e}{30} - \frac{14}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} \\
 0 & 0 & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{16h_e}{30} - \frac{16}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} \\
 0 & 0 & -\frac{h_e}{30} - \frac{1}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{2h_e}{30} + \frac{8}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e} & \frac{4h_e}{30} - \frac{7}{30} \frac{(1-\alpha)\Delta\tau}{3h_e}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5
 \end{bmatrix}_s
 + \Delta\tau
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5
 \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{Q}_i = \alpha(Q_i^e)_{s+1} + (1-\alpha)(Q_i^e)_s$$

Condiciones frontera.

$$\bar{Q}_1 = 0, \quad \bar{Q}_2 = 0, \quad \bar{Q}_3 = 0, \quad \bar{Q}_4 = 0$$

$$Q_5 = \alpha \left\{ - \left(-a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_A} \right\}_{s+1} + (1-\alpha) \left\{ - \left(a \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X_A} \right\}_s$$

$$\bar{Q}_5 = \alpha \{ -\beta T_5 \}_{s+1} + (1-\alpha) \{ -\beta T_5 \}_s$$

Condiciones iniciales.

$$(T_1)_0 = 1, \quad (T_2)_0 = 1, \quad (T_3)_0 = 1, \quad (T_4)_0 = 1, \quad (T_5)_0 = 1$$

a) Para $h_e = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.01875$

$$\Delta\bar{Q}_5 = -0.0468(T_5)_{s+1} - 0.0468(T_5)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.1552 & 0.0416 & -0.0302 & 0 & 0 \\ 0.0416 & 0.5833 & 0.0416 & 0 & 0 \\ -0.0320 & 0.0416 & 0.3104 & 0.0416 & -0.0302 \\ 0 & 0 & 0.0416 & 0.5833 & 0.0416 \\ 0 & 0 & -0.0320 & 0.0416 & 0.2020 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.1114 & 0.0916 & -0.0364 & 0 & 0 \\ 0.0916 & 0.4833 & 0.0916 & 0 & 0 \\ -0.0364 & 0.0916 & 0.2229 & 0.0916 & -0.0364 \\ 0 & 0 & 0.0916 & 0.4833 & 0.0916 \\ 0 & 0 & -0.0364 & 0.0916 & 0.0646 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{Q}_5 \end{Bmatrix}$$

TABLA 3.2c

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para dos elementos cuadráticos.

Tiempo $\Delta\tau$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Solución exacta T_1	Solución exacta T_2	Solución exacta T_3	Solución exacta T_4	Solución exacta T_5
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.01875	0.9880	1.0047	0.9464	1.0381	0.5205	1.0210	0.9936	1.0040	0.9174	0.3500
0.03750	1.0031	0.9950	0.9763	0.9917	0.4082	1.0082	1.0000	0.9702	0.7853	0.2798
0.05625	1.0056	0.9926	0.9950	0.9426	0.3587	1.0034	0.9916	0.9236	0.6960	0.2379
0.07500	1.0024	0.9937	1.0011	0.8989	0.3272	0.9950	0.9734	0.8761	0.6310	0.2102
0.09375	0.9985	0.9955	0.9992	0.8604	0.3038	0.9810	0.9501	0.8326	0.5812	0.1904
0.1125	0.9955	0.9968	0.9926	0.8264	0.2852	0.9616	0.9238	0.7932	0.5414	0.1753
0.13125	0.9938	0.9971	0.9830	0.7960	0.2699	0.9384	0.8959	0.7575	0.5086	0.1633
0.15000	0.9929	0.9965	0.9717	0.7687	0.2569	0.9127	0.8672	0.7248	0.4808	0.1534
0.16875	0.9926	0.9958	0.9593	0.7439	0.2456	0.8853	0.8383	0.6947	0.4567	0.1450
0.1875	0.9925	0.9926	0.9464	0.7213	0.2357	0.8572	0.8095	0.6666	0.4353	0.1377

b) Para $h_e = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\tau = 0.0375$

$$\Delta\tau\bar{Q}_5 = -0.09375(T_5)_{s+1} - 0.09375(T_5)_s$$

$$\begin{bmatrix} 0.1541 & -0.0666 & -0.0041 & 0 & 0 \\ -0.0666 & 0.4666 & -0.0666 & 0 & 0 \\ -0.0041 & -0.0666 & 0.3083 & -0.0666 & -0.0041 \\ 0 & 0 & -0.0666 & 0.4666 & -0.0666 \\ 0 & 0 & -0.0041 & -0.0666 & 0.2478 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix}_{s+1} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.0208 & 0.1333 & -0.02916 & 0 & 0 \\ 0.1333 & 0.0666 & 0.1333 & 0 & 0 \\ -0.02916 & 0.1333 & -0.04166 & 0.1333 & -0.0291 \\ 0 & 0 & 0.1333 & 0.0666 & 0.1333 \\ 0 & 0 & -0.02916 & 0.1333 & -0.1145 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix}_s + \Delta\tau \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{Q}_5 \end{Bmatrix}$$

TABLA 3.2cc

Comparación de la solución del elemento finito con la solución analítica de una ecuación parabólica para dos elementos cuadráticos

Tiempo $\Delta\tau$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Solución exacta T_1	Solución exacta T_2	Solución exacta T_3	Solución exacta T_4	Solución exacta T_5
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.0375	0.9958	0.9935	0.9615	0.8815	0.2113	1.0082	1.0000	0.9702	0.7853	0.2798
0.0750	0.9900	0.9765	0.9397	0.6603	0.4566	0.9950	0.9734	0.8761	0.6310	0.2102
0.1125	0.9618	0.9423	0.8014	0.6388	0.2187	0.9616	0.9238	0.7932	0.5414	0.1753
0.1500	0.9368	0.8884	0.7879	0.5388	0.3063	0.9127	0.8672	0.7248	0.4808	0.1534
0.1875	0.8726	0.8434	0.7002	0.5190	0.2068	0.8572	0.8095	0.6666	0.4353	0.1377
0.2250	0.8369	0.7857	0.6768	0.4636	0.2372	0.8005	0.7535	0.6155	0.3984	0.1255
0.2625	0.7763	0.7433	0.6163	0.4423	0.1894	0.7452	0.7002	0.5694	0.3668	0.1152
0.3000	0.7367	0.6930	0.5879	0.4053	0.1967	0.6904	0.6469	0.5233	0.3352	0.1049
0.3375	0.6852	0.6526	0.5426	0.3837	0.1702	0.6356	0.5936	0.4772	0.3036	0.0946
0.3750	0.6463	0.6094	0.5133	0.3557	0.1681	0.5808	0.5403	0.4311	0.2720	0.0843

CAPITULO 4

PROBLEMAS EN DOS DIMENSIONES MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

4.1 Introducción

El análisis del elemento finito de problemas en dos dimensiones involucra los mismos pasos básicos que se describieron para problemas en una dimensión en el capítulo (2).

El análisis es algo complicado porque los problemas en dos dimensiones son descritos por ecuaciones diferenciales parciales sobre regiones de geometrias complejas.

La frontera (Γ) de un dominio en dos dimensiones (Ω) es, en general, una curva.

Las mallas del elemento finito consisten de elementos en dos dimensiones, tales como triángulos, rectángulos y o cuadriláteros.

La posibilidad para representar dominios con geometrias irregulares por una colección de elementos finitos hace del método una herramienta practica para la solución de problemas de valores en la frontera, valor inicial, y eigenvalor en varios campos de la ingeniería.

4.2 Problemas con valores en la frontera

4.2.1 Ecuación modelo

Considere el problema de encontrar la solución (u) de la ecuación diferencial parcial de segundo orden.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00}u - f = 0 \quad (4.1)$$

4.2.2 Discretización del elemento finito

La representación de una región dada por un conjunto de elementos (discretización o generación de malla) es un paso importante en el análisis del elemento finito. La elección del tipo de elemento, número de elementos, y la densidad de elementos dependen del dominio de la geometría.

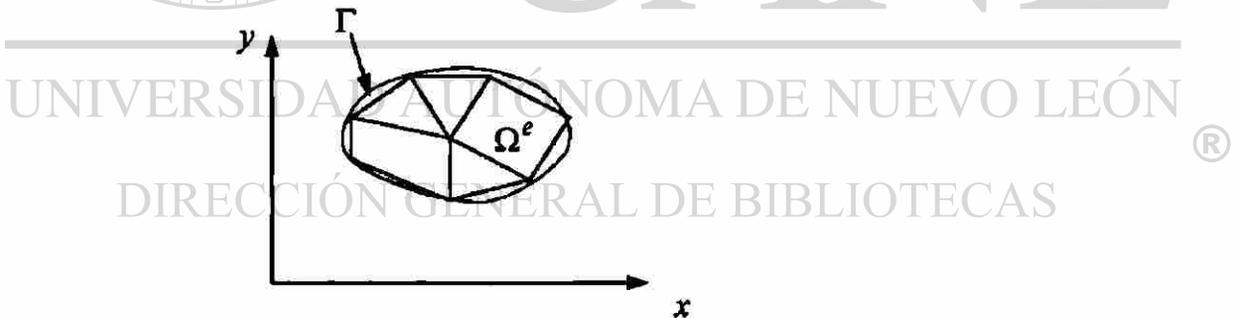


Figura 4.1

Discretización de un dominio por elementos triangulares y cuadriláteros.

4.2.3 Forma débil

Para desarrollar la forma débil, se considera un elemento típico arbitrario. Considere que (Ω^e) es dicho elemento, triangular o cuadrilátero.

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} w u - w f \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} w \left[n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] ds \quad (4.2 a)$$

$$q_n = \left[n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (4.2 b)$$

Por definición, (q_n) es positivo hacia fuera de la superficie cuando nos movemos en contra de las manecillas del reloj a lo largo de la frontera (Γ^e) . La variable secundaria (q_n) es de interés físico en muchos de los problemas. Por ejemplo, en el caso de transferencia de calor en un medio anisotrópico, (a_{ij}) son la conductividad del medio, y (q_n) es el flujo de calor normal a la frontera del elemento.

La forma débil (también llamado problema variacional) en (4.2 a) forma la base del modelo del elemento finito.

4.2.4 Modelo del elemento finito

La forma débil (4.2) requiere que la aproximación que se escoja para (u) debe ser al menos lineal en ambas (x, y) de tal manera que ningún término en la ecuación (4.2) sea cero.

$$u(x, y) \approx U^e(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x, y) \quad (4.3)$$

Sustituimos la aproximación del elemento finito (4.3) por (u) en la forma débil (4.2), y (ψ_i) por (w) .

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e = f_i^e + Q_i^e \quad (4.4 a)$$

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy$$

$$f_i^e = \int_{\Omega^e} f \psi_i^e dx dy, \quad Q_i^e = \int_{\Gamma^e} q_n \psi_i^e ds \quad (4.4 b)$$

En notación matricial

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (4.4 c)$$

4.2.5 Funciones de interpolación

La aproximación del elemento finito $U^e(x, y)$ de $u(x, y)$ sobre un elemento (Ω^e) debe satisfacer las siguientes condiciones para que la solución aproximada converja:

1. U^e debe ser diferenciable, como es requerido en la forma débil del problema.
2. El polinomio usado para representar U^e debe ser completo.
3. Todos los términos en el polinomio deben ser linealmente independientes.

a) Elemento lineal triangular

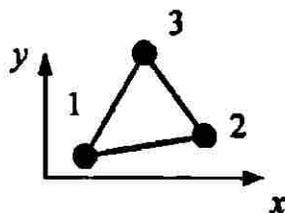


Figura 4.2a

Elemento finito en dos dimensiones elemento con tres nodos

$$U^e(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_i - y_k \\ \gamma_i &= -(x_j - x_k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $i \neq j \neq k$; y i, j y k permutan en orden natural

$$U^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \psi_i^e(x, y) \quad (4.7)$$

$$\psi_i^e = \frac{1}{2A_e} (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y) \quad (i=1,2,3) \quad (4.8)$$

A_e es el área del triángulo.

$$A_e = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

b) Elemento lineal rectangular

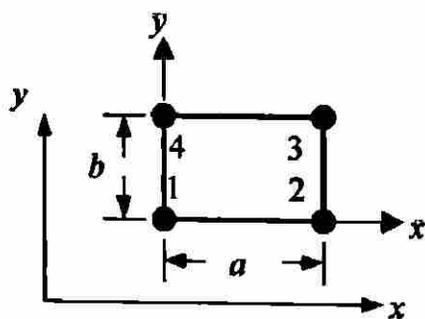


Figura 4.2b

Elemento finito en dos dimensiones elemento con cuatro nodos

$$U^e(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy \quad (4.9)$$

$$U^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 u_i^e \psi_i^e \quad (4.10)$$

$$\psi_1^e = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \psi_2^e = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$\psi_3^e = \frac{x}{a} \frac{y}{b}, \quad \psi_4^e = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \quad (4.10 a)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

4.2.6 Evaluación de los elementos de la matriz, y vectores

La evaluación exacta de los elementos de las matrices $[K^e]$ y $\{f^e\}$ en (4.4 b) son difícil en general. Cuando (a_{ij}) , (a_{00}) , y (f) son constantes, es posible evaluar las integrales exactamente con elementos triangulares y rectangulares. La integral en la frontera $\{Q^e\}$ de (4.4 b) puede ser evaluada siempre que (q_n) sea conocida

$$[K^e] = a_{00}[S^{00}] + a_{11}[S^{11}] + a_{12}[S^{12}] + a_{21}[S^{12}]^T + a_{22}[S^{22}] \quad (4.11)$$

$$S_{ij}^{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} \psi_{i,\alpha} \psi_{j,\beta} dx dy \quad (4.12)$$

con $\psi_{i,\alpha} \equiv \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$; $\psi_{i,0} = \psi_i$. Todas las matrices en (4.11) y funciones de interpolación (4.12) deben ser definidas sobre un elemento.

ELEMENTOS DE MATRICES PARA UN ELEMENTO TRIANGULAR LINEAL

$$I_{00} = A \quad (\text{área del triángulo})$$

$$I_{10} = A\bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i, \quad I_{01} = A\bar{y}, \quad \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

$$I_{11} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9\bar{x}\bar{y} \right), \quad I_{20} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9\bar{x}^2 \right), \quad I_{02} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9\bar{y}^2 \right) \quad (4.13)$$

$$S_{ij}^{11} = \frac{1}{4A} \beta_i \beta_j, \quad S_{ij}^{12} = \frac{1}{4A} \beta_i \gamma_j, \quad S_{ij}^{22} = \frac{1}{4A} \gamma_i \gamma_j$$

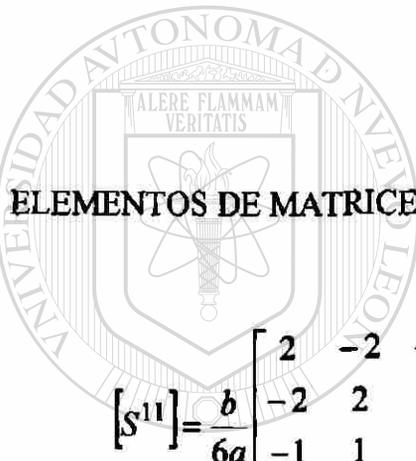
$$S_{ij}^{00} = \frac{1}{4A} \left\{ \alpha_i \alpha_j + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \bar{x} + (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \bar{y} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{A} \left[I_{20} \beta_i \beta_j + I_{11} (\gamma_i \beta_j + \gamma_j \beta_i) + I_{02} \gamma_i \gamma_j \right] \} \quad (4.14)$$

$$f_i^e = \frac{1}{3} f_e A_e \quad (4.15)$$

Por ejemplo, cuando (a_{12}) , (a_{21}) , y (a_{00}) son cero, y (a_{11}) , (a_{22}) son constantes se tiene.

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4A_e} (a_{11}^e \beta_i^e \beta_j^e + a_{22}^e \gamma_i^e \gamma_j^e) \quad (4.16)$$



ELEMENTOS DE MATRICES PARA UN ELEMENTO RECTANGULAR LINEAL.

$$[S^{11}] = \frac{b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad [S^{12}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$[S^{22}] = \frac{a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [S^{00}] = \frac{ab}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\{f\} = \frac{1}{4} fab \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}^T$$

EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES DE FRONTERA

Aquí se analizará la evaluación de las integrales del tipo

$$Q_i^e = \int_{\Gamma^e} q_n^e \psi_i^e(s) ds \quad (4.18)$$

donde (q_n^e) es una función conocida de la distancia (s) a lo largo de la frontera (Γ^e) .

No necesariamente se calculan dichas integrales cuando una porción de (Γ^e) no coincide con la frontera (Γ) del dominio total (Ω) . La evaluación de (Q_i^e) involucra el uso de funciones de interpolación (1-D) y variaciones conocidas de (q_n^e) en la frontera:

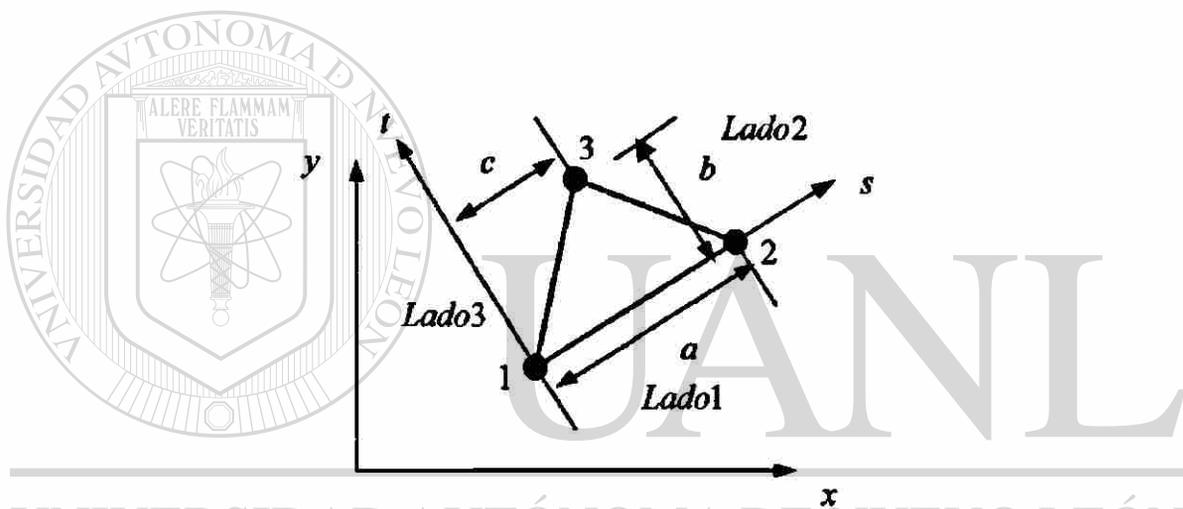


Figura 4.3

Elemento triangular lineal en coordenadas globales (x, y) y en coordenadas locales (s, t) .

$$Q_i^e = \int_{-2}^{-1} \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_{-1}^0 \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_{0}^1 \psi_i(s) q_n(s) ds$$

$$Q_i^e \equiv Q_{i1}^e + Q_{i2}^e + Q_{i3}^e \quad (4.19)$$

por ejemplo

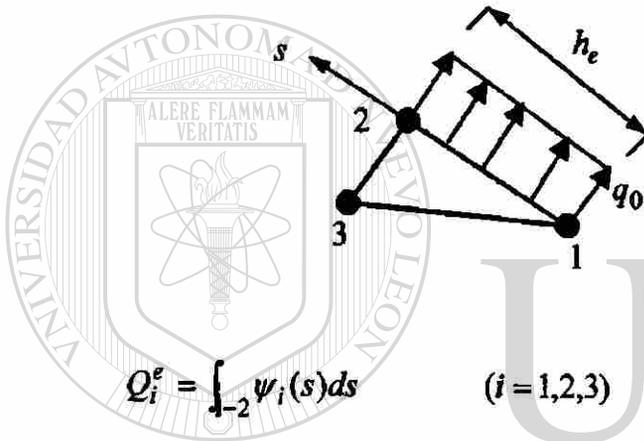
$$Q_1^e = \int_{\Gamma^e} q_n \psi_1(s) ds = \int_{-2}^{-1} (q_n)_{1-2} \psi_1 ds + 0 + \int_{0}^1 (q_n)_{3-1} \psi_1 ds$$

La contribución del lado (2-3) es cero, porque (ψ_1) es cero en el lado (2-3) de un elemento triangular.

Para un elemento rectangular, (Q_1^e) tiene contribuciones de los lados (1-2) y (4-1), porque (ψ_1) es cero en los lados (2-3) y (3-4).

Ejemplos. Considere la evaluación de la integral de frontera (Q_i^e)

Caso I. $q(s) = q_0 = \text{constante}$; elemento lineal:



donde

$$\psi_1 = 1 - \frac{s}{h_e}, \quad \psi_2 = \frac{s}{h_e}, \quad \psi_3 = 0$$

$$Q_1^e = q_0 \int_0^{h_e} \left(1 - \frac{s}{h_e}\right) ds = \frac{1}{2} q_0 h_e$$

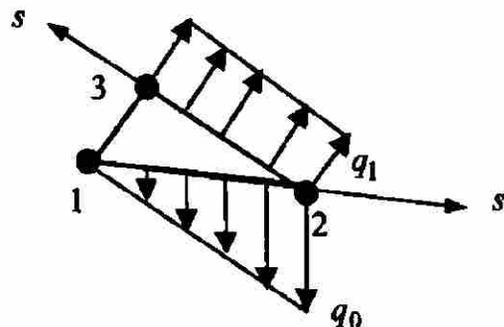
$$Q_1^e = Q_{11}^e$$

$$Q_2^e = q_0 \int_0^{h_e} \left(\frac{s}{h_e}\right) ds = \frac{1}{2} q_0 h_e$$

$$Q_2^e = Q_{21}^e$$

$$Q_3^e = 0$$

Caso II $q(s) = q_0 \frac{s}{h_e}$ como lo muestra la figura; elemento lineal:



$$Q_i^e = \int_{-2}^3 \psi_i(s) ds + \int_{2-3} \psi_i(s) q_n(s) ds \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$Q_i^e = \frac{q_0}{h_{12}} \int_0^{h_{12}} \psi_i s ds + q_1 \int_0^{h_{23}} \psi_i ds$$

donde

$$\psi_1 = 1 - \frac{s}{h_e}, \quad \psi_2 = \frac{s}{h_e}, \quad \psi_3 = 0$$

$$Q_1^e = \frac{q_0}{h_{12}} \int_0^{h_{12}} \left(1 - \frac{s}{h_{12}}\right) s ds = \frac{1}{6} q_0 h_{12}$$

$$Q_1^e = Q_{11}^e$$

$$Q_2^e = \frac{q_0}{h_{12}} \int_0^{h_{12}} \left(\frac{s}{h_e}\right) s ds + q_1 \int_0^{h_{23}} \left(1 - \frac{s}{h_{23}}\right) ds = \frac{1}{3} q_0 h_{12} + \frac{1}{2} q_1 h_{23}$$

$$Q_2^e = Q_{21}^e + Q_{22}^e$$

$$Q_3^e = q_1 \int_0^{h_{23}} \frac{s}{h_{23}} ds = \frac{1}{2} q_1 h_{23}$$

$$Q_3^e = Q_{32}^e$$

4.2.7 Ensamble de las ecuaciones del elemento

El ensamble de las ecuaciones de los elementos esta basada en los mismos dos principios que fueron usados en los problemas en una dimensión:

1. Continuidad de las variables primarias
2. Balance de las variables secundarias

Se ilustrara el procedimiento considerando una malla con dos elementos uno triangular y el otro cuadrilátero.

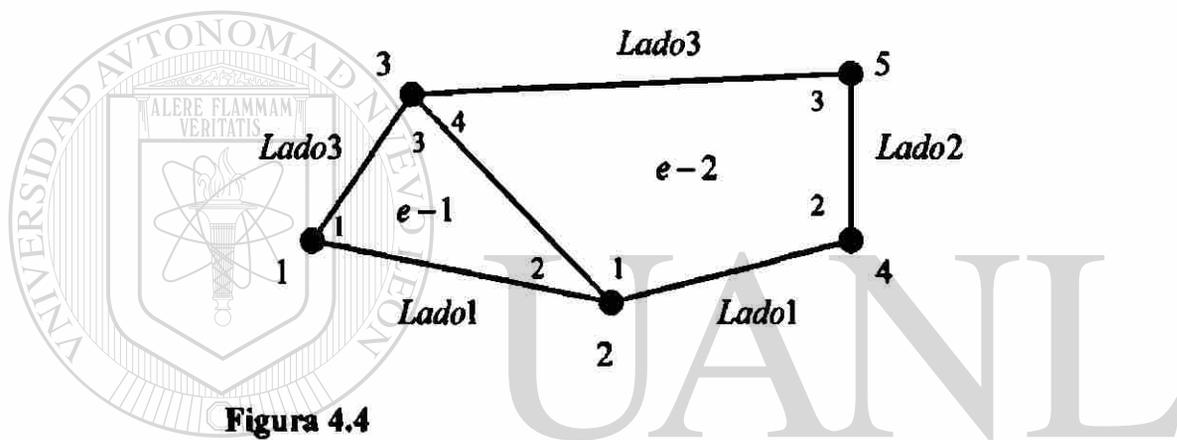


Figura 4.4

Ensamble de los coeficientes de las matrices del elemento finito:
ensamble de dos elementos.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Las ecuaciones de los dos elementos son escritas primero. Para el problema modelo a la mano, este tiene solo un grado de libertad por nodo.

Para el elemento triangular, las ecuaciones del elemento son de la forma.

$$\begin{aligned}
 K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 &= f_1^1 + Q_1^1 \\
 K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 &= f_2^1 + Q_2^1 \\
 K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 &= f_3^1 + Q_3^1
 \end{aligned}
 \tag{4.20 a}$$

Para el elemento rectangular, las ecuaciones del elemento son dadas.

$$\begin{aligned}
 K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 &= f_1^2 + Q_1^2 \\
 K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 &= f_2^2 + Q_2^2 \\
 K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 &= f_3^2 + Q_3^2 \\
 K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 &= f_4^2 + Q_4^2
 \end{aligned}
 \tag{4.20 b}$$

Continuidad de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1$$

$$u_2^1 = u_1^2 = U_2$$

$$u_3^1 = u_4^2 = U_3$$

$$u_2^2 = U_4$$

$$u_3^2 = U_5$$

Las ecuaciones ensambladas

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\
 K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & (K_{23}^1 + K_{14}^2) & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\
 K_{31}^1 & (K_{32}^1 + K_{41}^2) & (K_{33}^1 + K_{44}^2) & K_{42}^2 & K_{43}^2 \\
 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\
 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 f_1^1 \\
 f_2^1 + f_1^2 \\
 f_3^1 + f_4^2 \\
 f_2^2 \\
 f_3^2
 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{Bmatrix}
 Q_1^1 \\
 Q_2^1 + Q_1^2 \\
 Q_3^1 + Q_4^2 \\
 Q_2^2 \\
 Q_3^2
 \end{Bmatrix}$$

se sustituyen las condiciones frontera y después se soluciona el sistema de ecuaciones para las variables primarias (U_i) y las variables secundarias (Q_i^e).

Ejemplo 4.1. Escriba la aproximación por elemento finito y la solución de la ecuación de Poisson, para la geometría que se muestra en la figura 4.5.

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f_0 \quad \text{en } \Omega$$

Las condiciones frontera del problema son.

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma$$

D). SOLUCION POR ELEMENTOS TRIANGULARES LINEALES

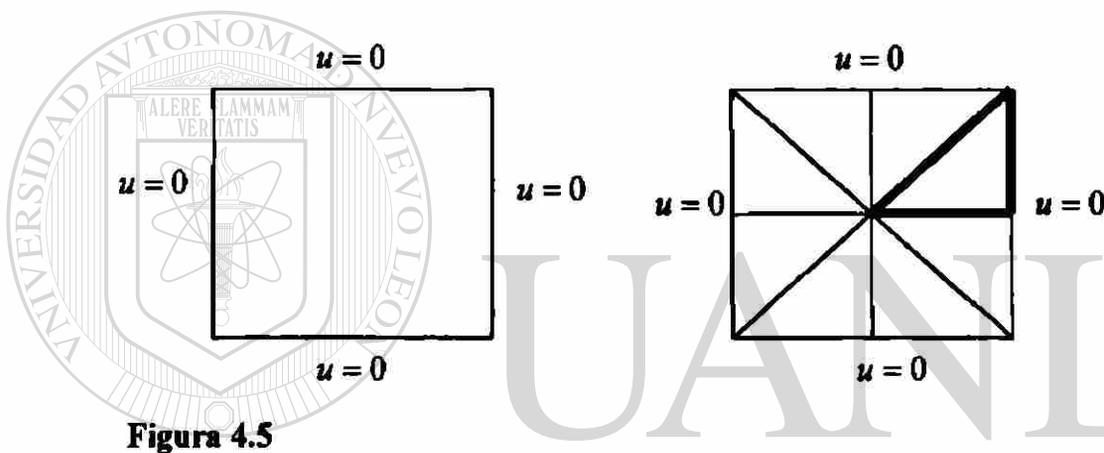


Figura 4.5

Dominio rectangular para la aplicación de la ecuación de poisson

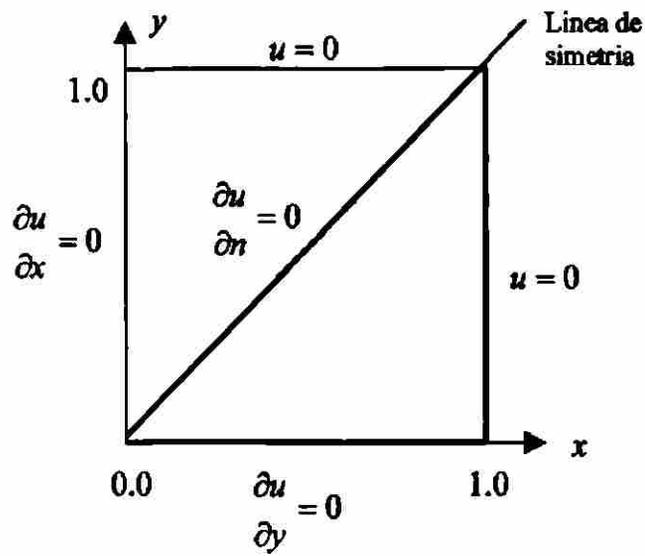
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

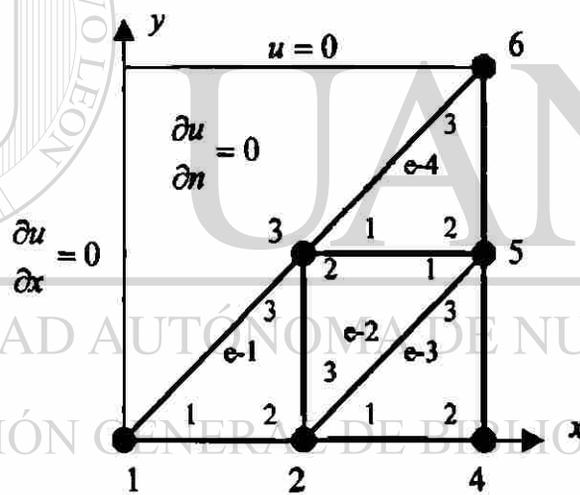
Un problema posee simetría de la solución a traves de una línea solo cuando hay simetría de.

- La geometría.
- Las propiedades del material.
- La variación de la fuente.
- Las condiciones de frontera a traves de la línea.

El análisis del problema (4.1) solo se hará en el triángulo de la figura (4.5)



(a)



(b)

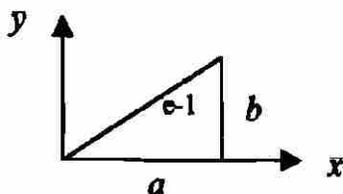
Figura 4.6

Subdominio rectangular para la aplicación de la ecuación de poisson

(a) Geometría y dominio computacional,

(b) Malla de elementos finitos lineales triangulares.

Considere el elemento uno, con su sistema de coordenadas locales (x, y) , suponemos que la longitud y la altura, son a y b , respectivamente.



Las coordenadas de los nodos del elemento son.

$$(x_1, y_1) = (0,0), \quad (x_2, y_2) = (a,0), \quad (x_3, y_3) = (a,b)$$

Los parámetros α_i , β_i , y γ_i son dados por la ecuación (4.6).

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_i - y_k \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\gamma_i = -(x_j - x_k)$$

$$\alpha_1 = ab, \quad \beta_1 = -b, \quad \gamma_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = b, \quad \gamma_2 = -a$$

$$\alpha_3 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \gamma_3 = a$$

Los coeficientes (K_{ij}^e) y (f_i^e) son dados por las ecuaciones (4.15) y (4.16)

$$f_i^e = \frac{1}{3} f_e A_e \tag{4.15}$$

$$\{f^1\} = \frac{f_0 ab}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4A_e} (a_{11}^e \beta_i^e \beta_j^e + a_{22}^e \gamma_i^e \gamma_j^e) \quad (4.16)$$

$$[K^1] = \frac{1}{2ab} \begin{bmatrix} b^2 & -b^2 & 0 \\ -b^2 & a^2 + b^2 & -a^2 \\ 0 & -a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

Para la malla mostrada en la figura 4.6 (b), tenemos.

$$[K^1] = [K^2] = [K^3] = [K^4], \quad \{f^1\} = \{f^2\} = \{f^3\} = \{f^4\}$$

Si $(a = b = \frac{1}{2})$, los coeficientes de las matrices toman la forma.

$$[K^e] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{f^e\} = \frac{f_0}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

Para los elementos triangulares, las ecuaciones para cada uno son de la forma.

Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 = f_1^1 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 = f_1^2 + Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 = f_2^2 + Q_2^2$$

$$K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 = f_3^2 + Q_3^2$$

Elemento(3)

$$K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3 + K_{13}^3 u_3^3 = f_1^3 + Q_1^3$$

$$K_{21}^3 u_1^3 + K_{22}^3 u_2^3 + K_{23}^3 u_3^3 = f_2^3 + Q_2^3$$

$$K_{31}^3 u_1^3 + K_{32}^3 u_2^3 + K_{33}^3 u_3^3 = f_3^3 + Q_3^3$$

Elemento(4)

$$K_{11}^4 u_1^4 + K_{12}^4 u_2^4 + K_{13}^4 u_3^4 = f_1^4 + Q_1^4$$

$$K_{21}^4 u_1^4 + K_{22}^4 u_2^4 + K_{23}^4 u_3^4 = f_2^4 + Q_2^4$$

$$K_{31}^3 u_1^3 + K_{32}^3 u_2^3 + K_{33}^3 u_3^3 = f_3^3 + Q_3^3$$

Continuidad de la variable primaria

$$u_1^1 = U_1$$

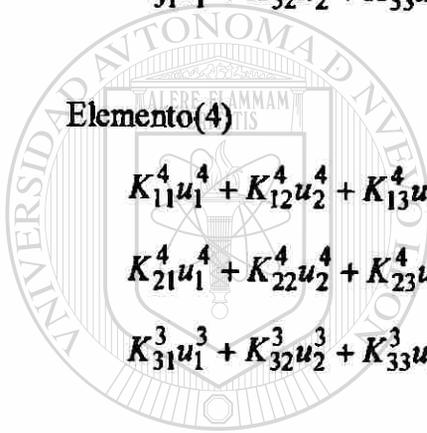
$$u_2^1 = u_3^2 = u_1^3 = U_2$$

$$u_1^4 = u_3^1 = u_2^2 = U_3$$

$$u_2^3 = U_4$$

$$u_2^4 = u_1^2 = u_3^3 = U_5$$

$$u_3^4 = U_6$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

COLECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ensamble del sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{33}^2 + K_{11}^3) & (K_{23}^1 + K_{32}^2) & K_{12}^3 & (K_{31}^2 + K_{13}^3) & 0 \\ K_{31}^1 & (K_{32}^1 + K_{23}^2) & (K_{33}^1 + K_{22}^2 + K_{11}^4) & 0 & (K_{21}^2 + K_{12}^4) & K_{13}^4 \\ 0 & K_{21}^3 & 0 & K_{22}^3 & K_{23}^3 & 0 \\ 0 & (K_{13}^2 + K_{31}^3) & (K_{12}^2 + K_{21}^4) & K_{32}^3 & (K_{11}^2 + K_{33}^3 + K_{22}^4) & K_{23}^4 \\ 0 & 0 & K_{31}^4 & 0 & K_{32}^4 & K_{33}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_3^2 + f_1^3 \\ f_3^1 + f_2^2 + f_4^1 \\ f_3^2 \\ f_1^2 + f_3^3 + f_2^4 \\ f_3^4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_3^1 + Q_2^2 + Q_1^4 \\ Q_2^3 \\ Q_1^2 + Q_3^3 + Q_2^4 \\ Q_3^4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = f_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_3^1 + Q_2^2 + Q_1^4 \\ Q_2^3 \\ Q_1^2 + Q_3^3 + Q_2^4 \\ Q_3^4 \end{Bmatrix}$$

La suma de las variables secundarias en los nodos globales (2),(3), y (5) son

$$Q_2^1 + Q_3^2 + Q_1^3 = Q_2$$

$$Q_3^1 + Q_2^2 + Q_1^4 = Q_3$$

$$Q_1^2 + Q_3^3 + Q_2^4 = Q_5$$

en los nodos (1),(4), y (6), tenemos ($Q_1^1 = Q_1$), ($Q_2^3 = Q_4$), y ($Q_3^4 = Q_6$).

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = f_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

Las condiciones de frontera especificadas en los grados de libertad de la variable primaria son.

$$U_4 = U_5 = U_6 = 0$$

Los grados de libertad especificados en la variable secundaria son (todos por simetría).

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

Usando los valores numéricos de los coeficientes (K_{ij}^e) y (f_i^e) con ($f_0=1$), escribimos las ecuaciones condensadas para (U_1), (U_2), y (U_3) como:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 2 & -1.0 \\ 0 & -1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$U_1 = 0.31250$$

$$U_2 = 0.22917$$

$$U_3 = 0.17708$$

TABLA 4.1a

Comparación de resultados elemento finito solución por series

Coordenadas (x,y)	Solución Aproximada U	Solución Por series U
(0,0)	0.31250	0.2947
(0.5,0)	0.22917	0.2284
(0.5,0.5)	0.17708	0.1801

Las variables secundarias desconocidas (Q_4), (Q_5), y (Q_6) pueden ser calculadas ya

sea por las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$Q_4 = -0.19717$$

$$Q_5 = -0.30208$$

$$Q_6 = -0.04166$$

o por la definición (4.19)

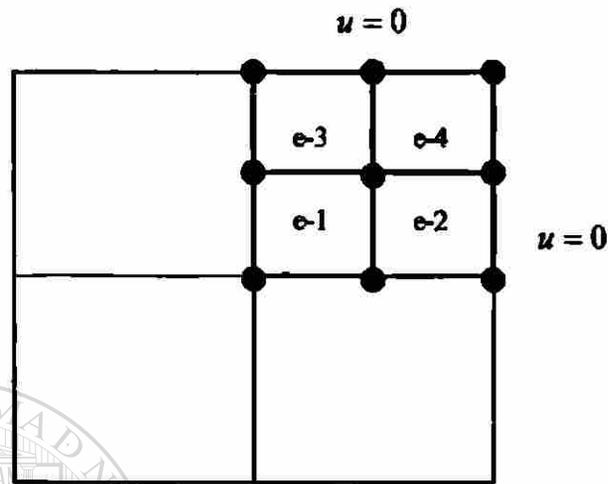
$$Q_i^e = \int_{-2}^{-1} \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_{-1}^0 \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_0^1 \psi_i(s) q_n(s) ds$$

$$Q_i^e = Q_{i1}^e + Q_{i2}^e + Q_{i3}^e$$

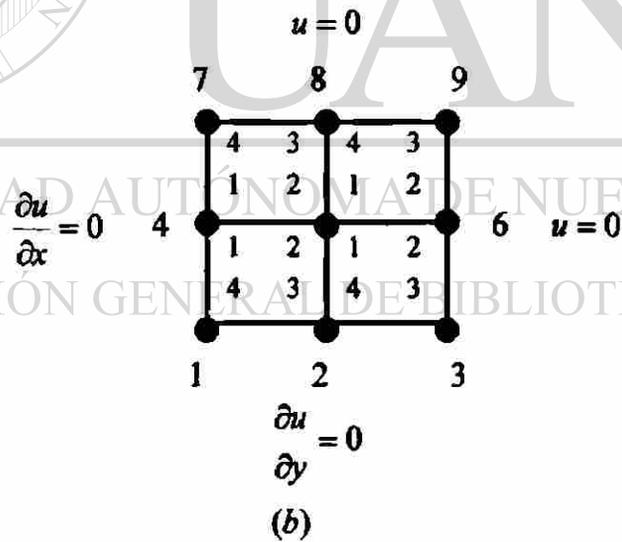
(4.19)

II) SOLUCION POR ELEMENTOS RECTANGULARES LINEALES

Note que no podemos explotar la simetría a lo largo de la diagonal $x = y$ cuando usamos una malla rectangular.



(a)



(b)

Figura 4.7

Discretización del dominio para elementos lineales rectangulares (a), (b).

Como todos los elementos en la malla son idénticos, podemos calcular las matrices del elemento solo para uno, para el elemento(1).

$$\begin{aligned}\psi_1 &= (1-2\bar{x})(1-2\bar{y}), & \psi_2 &= 2\bar{x}(1-2\bar{y}) \\ \psi_3 &= 4\bar{x}\bar{y}, & \psi_4 &= (1-2\bar{x})2\bar{y}\end{aligned}\quad (4.10 a)$$

$$K_{ij}^e = \int_b^{0.5} \int_b^{0.5} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.4 b)$$

$$f_i^e = \int_b^{0.5} \int_b^{0.5} f_0 \psi_i dx dy \quad (4.4 b)$$

Evaluando estas integrales, obtenemos (ver (4.11): $[K^e] = a_{11}[S^{11}] + a_{22}[S^{22}]$)

$$[S^{11}] = \frac{b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$[S^{22}] = \frac{a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = a_{22} = 1$$

$$a = b = \frac{1}{2}$$

$$f_0 = 1$$

$$[K^e] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{f^e\} = \frac{1}{4} f_0 ab \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T$$

$$\{f^e\} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{F^e\} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{Bmatrix}$$

donde

$$Q_i^e = \int_{x_1}^{x_2} [q_n^e \psi_i(x, y)]_{y=0} dx + \int_{y_2}^{y_3} [q_n^e \psi_i(x, y)]_{x=a} dy \\ + \int_{x_3}^{x_4} [q_n^e \psi_i(x, y)]_{y=b} dx + \int_{y_4}^{y_1} [q_n^e \psi_i(x, y)]_{x=0} dy$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

La matriz de coeficientes de las ecuaciones condensadas para las variables primarias[®] desconocidas puede ser directamente ensamblada.

Elemento(1)

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 + K_{14}^1 u_4^1 = f_1^1 + Q_1^1$$

$$K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 + K_{24}^1 u_4^1 = f_2^1 + Q_2^1$$

$$K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 + K_{34}^1 u_4^1 = f_3^1 + Q_3^1$$

$$K_{41}^1 u_1^1 + K_{42}^1 u_2^1 + K_{43}^1 u_3^1 + K_{44}^1 u_4^1 = f_4^1 + Q_4^1$$

Elemento(2)

$$K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 = f_1^2 + Q_1^2$$

$$K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 = f_2^2 + Q_2^2$$

$$K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 = f_3^2 + Q_3^2$$

$$K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 = f_4^2 + Q_4^2$$

Elemento(3)

$$K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3 + K_{13}^3 u_3^3 + K_{14}^3 u_4^3 = f_1^3 + Q_1^3$$

$$K_{21}^3 u_1^3 + K_{22}^3 u_2^3 + K_{23}^3 u_3^3 + K_{24}^3 u_4^3 = f_2^3 + Q_2^3$$

$$K_{31}^3 u_1^3 + K_{32}^3 u_2^3 + K_{33}^3 u_3^3 + K_{34}^3 u_4^3 = f_3^3 + Q_3^3$$

$$K_{41}^3 u_1^3 + K_{42}^3 u_2^3 + K_{43}^3 u_3^3 + K_{44}^3 u_4^3 = f_4^3 + Q_4^3$$

Elemento(4)

$$K_{11}^4 u_1^4 + K_{12}^4 u_2^4 + K_{13}^4 u_3^4 + K_{14}^4 u_4^4 = f_1^4 + Q_1^4$$

$$K_{21}^4 u_1^4 + K_{22}^4 u_2^4 + K_{23}^4 u_3^4 + K_{24}^4 u_4^4 = f_2^4 + Q_2^4$$

$$K_{31}^4 u_1^4 + K_{32}^4 u_2^4 + K_{33}^4 u_3^4 + K_{34}^4 u_4^4 = f_3^4 + Q_3^4$$

$$K_{41}^4 u_1^4 + K_{42}^4 u_2^4 + K_{43}^4 u_3^4 + K_{44}^4 u_4^4 = f_4^4 + Q_4^4$$

Donde (K_{ij}) y (F_i) son los coeficientes globales.

$$K_{22}^1 + K_{11}^2 = K_{22}$$

$$K_{44}^1 + K_{11}^3 = K_{44}$$

$$K_{33}^1 + K_{44}^2 + K_{22}^3 + K_{11}^4 = K_{55}$$

$$K_{33}^2 + K_{22}^4 = K_{66}$$

$$K_{33}^3 + K_{44}^4 = K_{88}$$

$$K_{23}^1 + K_{14}^2 = K_{25}$$

$$K_{43}^1 + K_{12}^3 = K_{45}$$

$$K_{43}^2 + K_{12}^4 = K_{56}$$

$$K_{23}^3 + K_{14}^4 = K_{58}$$

Continuidad de la variable primaria

$$U_1 = u_1^1$$

$$U_2 = u_2^1 = u_1^2$$

$$U_3 = u_2^2$$

$$U_4 = u_4^1 = u_1^3$$

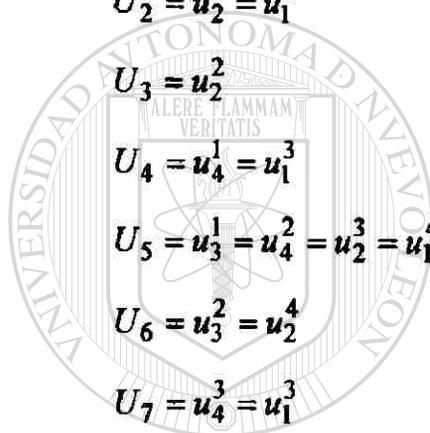
$$U_5 = u_3^1 = u_4^2 = u_2^3 = u_1^4 = u_4^2$$

$$U_6 = u_3^2 = u_2^4$$

$$U_7 = u_4^3 = u_1^3$$

$$U_8 = u_3^3 = u_4^4$$

$$U_9 = u_3^4$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Ensamble del sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & K_{12}^1 & K_{24}^1 & K_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 & K_{23}^2 & K_{13}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & (K_{44}^1 + K_{11}^3) & 0 & K_{13}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{31}^1 & (K_{32}^1 + K_{41}^2) & K_{42}^2 & (K_{34}^1 + K_{21}^3) & (K_{43}^2 + K_{12}^4) & (K_{23}^3 + K_{14}^4) & K_{13}^4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & 0 & (K_{33}^2 + K_{22}^4) & K_{24}^4 & K_{13}^4 & K_{23}^4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_{41}^3 & 0 & K_{43}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{42}^4 & (K_{33}^3 + K_{44}^4) & K_{43}^4 & K_{43}^4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{32}^4 & K_{34}^4 & K_{43}^4 & K_{33}^4 & K_{33}^4 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8 \\
 U_9
 \end{Bmatrix}
 =$$

$$\begin{bmatrix}
 f_1^1 \\
 f_2^1 + f_1^2 \\
 f_2^2 \\
 f_4^1 + f_1^3 \\
 f_3^1 + f_4^2 + f_2^3 + f_1^4 \\
 f_2^2 + f_4^4 \\
 f_4^3 \\
 f_3^3 + f_4^4 \\
 f_3^4
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 Q_1^1 \\
 Q_2^1 + Q_1^2 \\
 Q_2^2 \\
 Q_4^1 + Q_1^3 \\
 Q_1^3 + Q_4^2 + Q_2^3 + Q_1^4 \\
 Q_2^2 + Q_2^4 \\
 Q_4^3 \\
 Q_3^3 + Q_4^4 \\
 Q_3^4
 \end{bmatrix}$$



$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 8 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 16 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & 8 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_4 \\ \bar{Q}_5 \\ \bar{Q}_6 \\ \bar{Q}_7 \\ \bar{Q}_8 \\ \bar{Q}_9 \end{Bmatrix}$$

Condiciones de frontera.

$$U_3 = 0, U_6 = 0, U_7 = 0, U_8 = 0, U_9 = 0$$

$$\bar{Q}_1 = 0, \bar{Q}_2 = 0, \bar{Q}_4 = 0, \bar{Q}_5 = 0$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$U_1 = 0.31071$$

$$U_2 = 0.24107$$

$$U_4 = 0.24107$$

$$U_5 = 0.19286$$

TABLA 4.1b

Comparación de resultados elemento finito solución por series

Coordenadas (x,y)	Solución Aproximada U	Solución Por series U
(0,0)	0.31071	0.2947
(0.5,0)	0.24107	0.2284
(0,0.05)	0.24107	0.2293
(0.5,0.5)	0.19286	0.1801

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_6 \\ \bar{Q}_9 \end{Bmatrix}$$

La solución de las variables secundarias es.

$$\bar{Q}_3 = -0.16687 \quad \bar{Q}_6 = -0.26964 \quad \bar{Q}_9 = -0.12679$$

TABLA 4.1c

Comparación elemento finito solución por series

Coordenadas (x,y)	Para 4 elementos Triangulares U	Para 4 elementos Rectangulares U	Solución Por series U
(0,0)	0.31250	0.31071	0.2947
(0.5,0)	0.22917	0.24107	0.2284
(0,0.5)	0.23022*	0.24107	0.2293
(0.5,0.5)	0.17708	0.19286	0.1801*

* Valores interpolados

CAPITULO 5

EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El método de diferencias finitas obtiene un sistema de ecuaciones finito de una ecuación diferencial ordinaria o parcial discretizando el dominio; los valores de la solución aproximada son encontrados solo para un conjunto finito de puntos.

La diferenciación numérica, o aproximación por diferencias, se utiliza para evaluar las derivadas de una función por medio de sus valores dados en los puntos de una retícula.

Aproximación por diferencias centrales para la primera segunda y tercera derivada.

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (5.1)$$

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad (5.2)$$

$$f'''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} \quad (5.3)$$

Ejemplo 2.1 Considere una aleta rectangular como lo muestra la figura 2.1.

Determine la distribución de temperaturas.

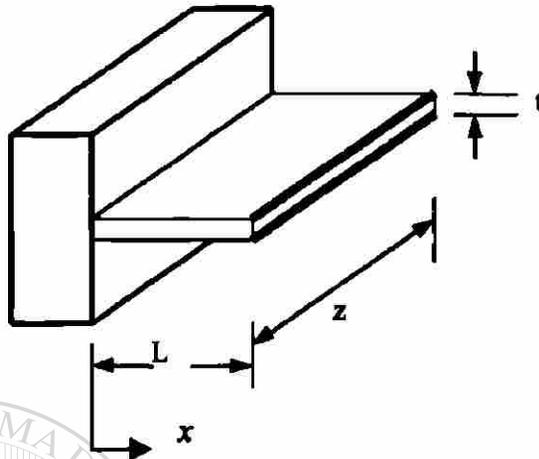


Figura 2.1 Aleta rectangular

Datos

T_0 = Temperatura en la base de la aleta = 250°C

T_∞ = Temperatura del medio ambiente = 75°C

t = Espesor de la aleta = $0.254 \times 10^{-2} \text{ m}$

k = Conductividad térmica del material de la aleta = $207.6 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$

β = Coeficiente de película = $283.9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

p = Perímetro de la aleta

A = Área de sección transversal

$$m^2 = \frac{\beta p}{kA} = 1076.79$$

L = Longitud de la aleta = $1.524 \times 10^{-2} \text{ m}$

h = Espacio entre los puntos de la retícula

$$h = \frac{L}{2} = 0.00762 \text{ m}$$

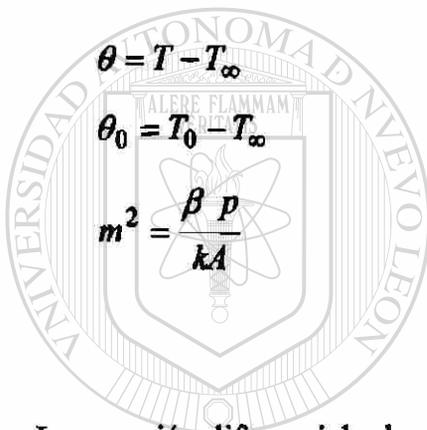
Ecuación diferencial de una aleta rectangular.

$$-\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\beta p}{kA}(T - T_\infty) = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

Las condiciones frontera de la ecuación diferencial

$$T(0) = T_0 \quad (kA \frac{dT}{dx})_{x=L} = 0$$

haciendo un cambio de variable:



La ecuación diferencial y las condiciones de frontera toman la forma siguiente.

$$-\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta = 0 \quad \Omega = (0, L)$$

Condiciones frontera.

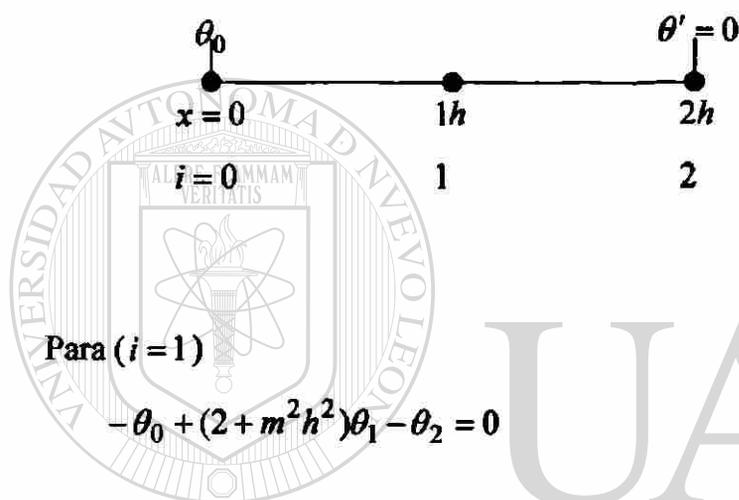
$$\theta(0) = \theta_0 \quad \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

Aplicamos la aproximación por diferencias centrales (5.2) al primer término de la ecuación diferencial, con lo que obtenemos la ecuación en diferencias.

$$\frac{-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}}{h^2} + m^2\theta_i = 0$$

$$-\theta_{i-1} + (2 + m^2h^2)\theta_i - \theta_{i+1} = 0$$

$i = 1$, hasta $N-1$



Para ($i = 1$)

$$-\theta_0 + (2 + m^2h^2)\theta_1 - \theta_2 = 0 \quad (1)$$

Para ($i = 2$) Condición de frontera derecha.

Utilizamos la aproximación por diferencias hacia adelante con base en un intervalo de longitud ($\frac{h}{2}$) de la ecuación de la aleta en ($x = L$).

$$-\left[\frac{\theta'(L) - \theta'(L - \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \right] + m^2\theta(L) = 0 \quad (A)$$

Por diferencias centrales

$$\theta'(L) = 0 \quad (B)$$

$$\theta'(L - \frac{h}{2}) = \frac{\theta(L) - \theta(L - h)}{h} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{h} \quad (C)$$

sustituimos (B) y (C) en (A).

$$-2\theta_1 + (2 + m^2 h^2)\theta_2 = 0 \quad (2)$$

Solucionando el sistema de ecuaciones .

$$\begin{bmatrix} (2 + m^2 h^2) & -1 \\ -2 & (2 + m^2 h^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_1 = 160.205$$

$$\theta_2 = 155.374$$

$$\theta_1 = T_1 - T_\infty$$

$$\theta_2 = T_2 - T_\infty$$

$$T_1 = 235.2^\circ C$$

$$T_2 = 230.37^\circ C$$

TABLA 5.1

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia	Temperatura Solución aproximada	Temperatura Solución exacta
$x \text{ m}$	$T^\circ C$	$T^\circ C$
0	250	250
0.00762	235.20	234.95
0.01524	230.37	230.05

Ejemplo 2.2 Considere conducción de calor en estado estable en un alambre de sección transversal circular con una fuente de calor eléctrica. Supón que el radio del alambre es (R_o), este tiene una conductividad eléctrica, este transporta una corriente eléctrica de densidad (I) $amp\ cm^{-2}$. Durante la transmisión de una corriente eléctrica, algo de energía eléctrica es convertida en energía térmica. La rapidez de producción de calor por unidad de volumen es dada por ($q = \frac{I^2}{k_e}$). Suponga que la temperatura alcanzada en el alambre es suficientemente pequeña que la dependencia de la conductividad eléctrica o térmica en la temperatura puede ser despreciada.

Determine la distribución de temperaturas en el alambre.

Datos

$T_3 =$ Temperatura en la superficie del conductor = $60^\circ c$

$R_o =$ Radio del conductor = $2cm$

$i =$ Corriente por el conductor = $300amp$

$R =$ Resistencia del conductor = 0.0104Ω

$L =$ Longitud del conductor = $10cm$

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad k = \frac{1}{\rho} \quad I = \frac{i}{\pi(R_o)^2} \quad q = \frac{I^2}{k}$$

$$\rho = .013\Omega - cm$$

$$I = 23.87amp - cm^{-2}$$

$$k = 76.5\Omega^{-1} - cm^{-1}$$

$$q = 7.448watts - cm^{-3}$$

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} \right) = q \quad 0 \leq r \leq R_o$$

$$\left(kr \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r=0} = 0 \quad T(R_o) = T_o$$

Reescribimos la ecuación diferencial en la forma.

$$-k \frac{d^2 T}{dr^2} - \frac{k}{r} \frac{dT}{dr} = q$$

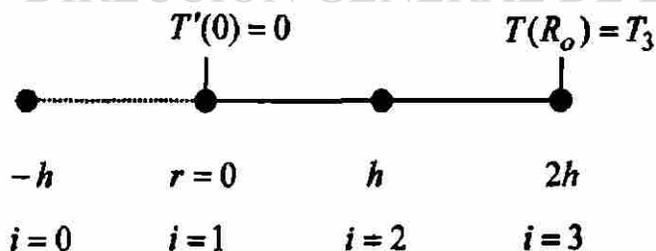
Aplicamos la aproximación por diferencias centrales al primero y segundo termino del lado izquierdo de la ecuación diferencial.

$$-k \left[\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} \right] - \frac{k}{r_i} \left[\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} \right] = q \quad i = 1, 2$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Para ($i = 1$)

$$-\frac{k}{h^2}(T_2 - 2T_1 + T_0) - \frac{k}{2hr_1}(T_2 - T_0) = q$$

La condición de la frontera izquierda, es equivalente a una condición simétrica en la frontera llamada *condición adiabática en la frontera* en el caso de la transferencia de calor ($T_0 = T_2$).

$$\left(\frac{2k}{h^2}\right)T_1 - \left(\frac{2k}{h^2}\right)T_2 = q$$

Para ($i = 2$)

$$-\frac{k}{h^2}(T_3 - T_2 + T_1) - \frac{k}{2hr_2}(T_3 - T_1) = q$$

$$-\left(\frac{k}{h^2} - \frac{k}{2hr_2}\right)T_1 + \left(\frac{2k}{h^2}\right)T_2 - \left(\frac{k}{h^2} + \frac{k}{2hr_2}\right)T_3 = q$$

El conjunto de ecuaciones se escribe en forma conjunta como.

$$\begin{bmatrix} \frac{2k}{h^2} & -\frac{2k}{h^2} \\ -\left(\frac{k}{h^2} - \frac{k}{2hr_2}\right) & \frac{2k}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ q + \left(\frac{k}{h^2} + \frac{k}{2hr_2}\right)T_3 \end{Bmatrix}$$

$$T_1 = 60.1721^\circ \text{C}$$

$$T_2 = 60.1234^\circ \text{C}$$

TABLA 5.2

Comparación diferencias finitas solución exacta

Radio r cm	Temperatura Solución aproximada $T^\circ \text{C}$	Temperatura Solución exacta $T^\circ \text{C}$
0	60.1721	60.09
1	60.1234	60.07
2	60	60

Ejemplo 2.3 Encuentre la distribución de temperatura en la aleta que muestra la fig.2.3.

Suponga que la temperatura en la base de la aleta es ($T_0 = 250^\circ F$) la conductividad térmica es ($k = 120 \text{ Btu} - \text{hr}^{-1} - \text{ft}^{-1} - ^\circ F^{-1}$), y el coeficiente de película

($\beta = 15 \text{ Btu} - \text{hr}^{-1} - \text{ft}^{-2} - ^\circ F^{-1}$). La temperatura del medio ambiente es ($T_\infty = 75^\circ F$).

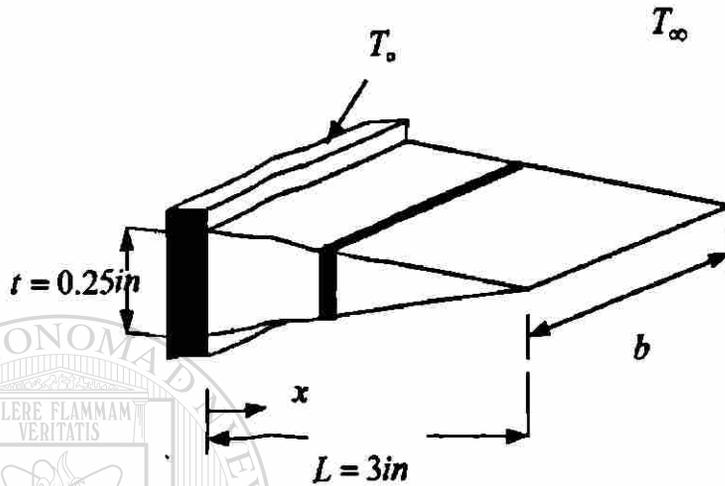


Figura 2.3 Aleta triangular

$$m = \frac{24\beta}{k} = 0.249 \text{ in}^{-1}$$

h = Espacio entre los puntos de la retícula

$$h = \frac{L}{3} = 1 \text{ in}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La ecuación diferencial y las condiciones frontera para esta aleta triangular son.

$$(3-x) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} - mT + mT_\infty = 0$$

$$T(0) = T_0$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

Haciendo un cambio de variable la ecuación diferencial y las condiciones de frontera toman la forma.

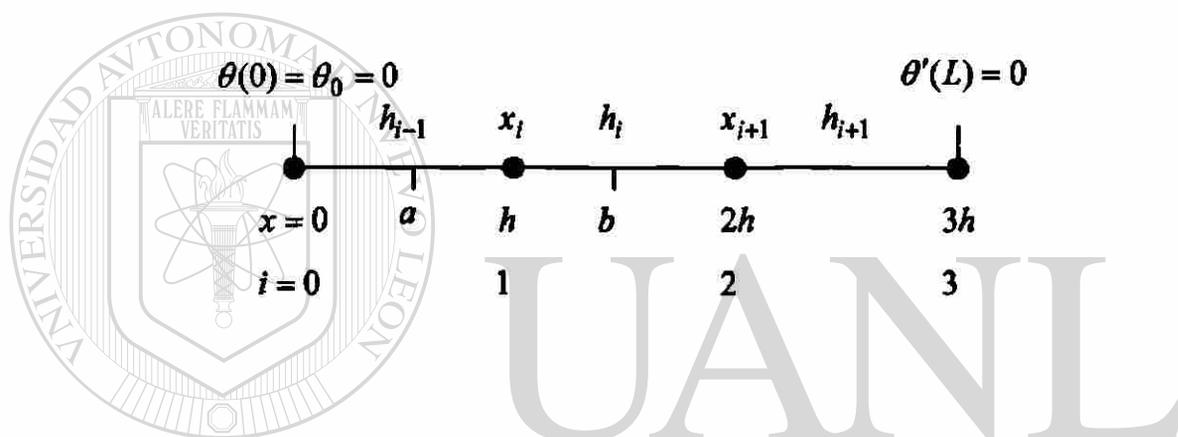
$$\theta = T - T_{\infty}$$

$$(3-x)\theta'' - \theta' - m\theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \theta'(L) = 0$$

La ecuación diferencial también puede tomar esta forma.

$$[(3-x)\theta']' - m\theta = 0$$



El método de integración es una forma natural para obtener ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes por partes. En este método, integramos la ecuación desde (a) hasta (b) .

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx - \int_a^b m\theta dx = 0 \quad (A)$$

Para el primer término de la ecuación (A).

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = ((3-x)\theta') \Big|_a^b$$

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = (3-x)\theta' \Big|_b - (3-x)\theta' \Big|_a$$

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = (3-x)\theta' \Big|_{i+\frac{1}{2}} - (3-x)\theta' \Big|_{i-\frac{1}{2}} \quad (\text{B})$$

Aproximamos las derivadas mediante diferencias hacia atrás.

$$(3-x)\theta' \Big|_{i+\frac{1}{2}} = (3-x_i) \left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h_i} \right) \quad (\text{C})$$

$$(3-x)\theta' \Big|_{i-\frac{1}{2}} = (3-x_{i-1}) \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad (\text{D})$$

Sustituimos (C) y (D) en (B).

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = \left[\frac{(3-x_{i-1})}{h_{i-1}} \right] \theta_{i-1} - \left[\frac{(3-x_i)}{h_i} + \frac{(3-x_{i-1})}{h_{i-1}} \right] \theta_i + \left[\frac{(3-x_i)}{h_i} \right] \theta_{i+1} \quad (\text{E})$$

Para el segundo término de la ecuación (A).

$$\int_a^b m\theta dx = \frac{1}{2} m(h_{i-1} + h_i)\theta_i \quad (\text{F})$$

Sustituimos las ecuaciones (E) y (F) en (A)

$$\left[\frac{(3-x_{i-1})}{h_{i-1}} \right] \theta_{i-1} - \left[\frac{(3-x_i)}{h_i} + \frac{(3-x_{i-1})}{h_{i-1}} \right] \theta_i + \left[\frac{(3-x_i)}{h_i} \right] \theta_{i+1} - \frac{1}{2} m(h_{i-1} + h_i)\theta_i = 0$$

la ecuación anterior se aplica para $i = 1, 2, \dots, N-1$

Para ($i = 1$)

$$\left[\begin{array}{c} (3-x_0) \\ h_0 \end{array} \right] \theta_0 - \left[\begin{array}{c} (3-x_1) \\ h_1 \end{array} + \begin{array}{c} (3-x_0) \\ h_0 \end{array} \right] \theta_1 + \left[\begin{array}{c} (3-x_1) \\ h_1 \end{array} \right] \theta_2 - \frac{1}{2} m(h_0 + h_1) \theta_1 = 0$$

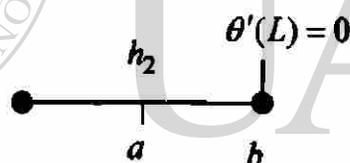
$$\left[\begin{array}{c} (3-x_0) \\ h_0 \end{array} \right] \theta_0 - \left[\begin{array}{c} (3-x_1) \\ h_1 \end{array} + \begin{array}{c} (3-x_0) \\ h_0 \end{array} + \frac{1}{2} m(h_0 + h_1) \right] \theta_1 + \left[\begin{array}{c} (3-x_1) \\ h_1 \end{array} \right] \theta_2 = 0 \quad (1)$$

Para ($i = 2$)

$$\left[\begin{array}{c} (3-x_1) \\ h_1 \end{array} \right] \theta_1 - \left[\begin{array}{c} (3-x_2) \\ h_2 \end{array} + \begin{array}{c} (3-x_1) \\ h_1 \end{array} \right] \theta_2 + \left[\begin{array}{c} (3-x_2) \\ h_2 \end{array} \right] \theta_3 - \frac{1}{2} m(h_1 + h_2) \theta_2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} (3-x_1) \\ h_1 \end{array} \right] \theta_1 - \left[\begin{array}{c} (3-x_2) \\ h_2 \end{array} + \begin{array}{c} (3-x_1) \\ h_1 \end{array} + \frac{1}{2} m(h_1 + h_2) \right] \theta_2 + \left[\begin{array}{c} (3-x_2) \\ h_2 \end{array} \right] \theta_3 = 0 \quad (2)$$

Para el caso del punto frontera derecho



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$a = x_2 + \frac{h_2}{2}$$

$$b = x_3$$

Para el primer termino de la ecuación (A)

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = ((3-x)\theta') \Big|_a^b$$

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = (3-x)\theta' \Big|_3 - (3-x)\theta' \Big|_{3-\frac{1}{2}}$$

$$\int_a^b ((3-x)\theta')' dx = 0 - (3-x_2) \frac{\theta_3 - \theta_2}{h_2} \quad (G)$$

Para el segundo termino de la ecuación (A).

$$\int_a^b m\theta dx = \frac{1}{2} mh_3\theta_3 \quad (H)$$

Sustituimos (G) y (H) en (A).

$$-(3-x_2) \frac{\theta_3 - \theta_2}{h_2} - \frac{1}{2} mh_2\theta_3 = 0$$

$$\left[\frac{(3-x_2)}{h_2} \right] \theta_2 - \left[\frac{(3-x_2)}{h_2} + \frac{1}{2} mh_2 \right] \theta_3 = 0 \quad (3)$$

En resumen, las ecuaciones en diferencias (1),(2) y (3) en notación matricial son:

$$\begin{bmatrix} -\left[\frac{(3-x_1)}{h_1} + \frac{(3-x_0)}{h_0} + \frac{m(h_0+h_1)}{2} \right] & \frac{(3-x_1)}{h_1} & 0 \\ \frac{(3-x_1)}{h_1} & -\left[\frac{(3-x_2)}{h_2} + \frac{(3-x_1)}{h_1} + \frac{m(h_1+h_2)}{2} \right] & (3-x_2) \\ 0 & \frac{(3-x_2)}{h_2} & -\left[\frac{(3-x_2)}{h_2} + \frac{m(h_2)}{2} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$D = -\left(\frac{3-x_0}{h_0} \right) \theta_0$$

$$\begin{bmatrix} -5.25 & 2 & 0 \\ 2 & -3.25 & 1 \\ 0 & 1 & -1.125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -525 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones:

$$\theta_1 = 147.64 \quad \theta_2 = 125 \quad \theta_3 = 111.16$$

$$T_1 = 222.64^\circ F$$

$$T_2 = 200^\circ F$$

$$T_3 = 186^\circ F$$

TABLA 5.3 Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia desde la base x in	Solución aproximada $T^\circ F$	Solución exacta $T^\circ F$
0	250	250
1	222.64	218.75
2	200	191.12
3	186	166.72

Ejemplo 2.4 Considere flujo estable laminar de dos fluidos inmisibles e incompresibles en una región de dos placas paralelas estacionarias bajo la influencia de un gradiente de presión.

Las velocidades en el fluido son ajustadas tal que la parte media inferior de la región esta llena con el fluido μ_1 (fluido mas denso y más viscoso) y la parte media superior esta llena con el fluido μ_2 (fluido menos denso y menos viscoso), como lo muestra la figura.

Queremos determinar la distribución de velocidades en cada región usando el método de diferencias finitas.

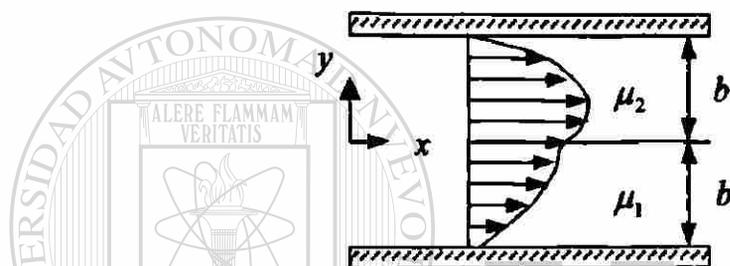


Figura 2.4 Flujo en una tubería

Las ecuaciones gobernantes para cada fluido son:

$$-\mu_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2} = f_0, \quad -\mu_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2} = f_0$$

Las condiciones frontera son:

$$u_1(-b) = 0, \quad u_1(0) = u_2(0), \quad u_2(b) = 0$$

donde $f_0 = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right)$ es el gradiente de presión.

Datos

$$h = \text{Espacio entre los puntos de la retícula} = 0.25m$$

$$b = 2h$$

$$L = 5000m$$

$$P_0 = 200kPa$$

$$P_L = 190kPa$$

$$\mu_1 = 0.01Pa \cdot s$$

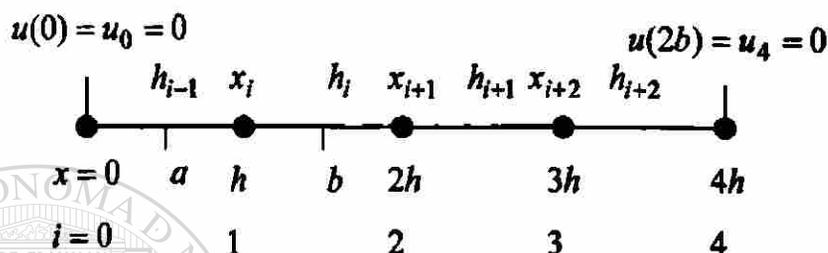
$$\mu_2 = 0.00035Pa \cdot s$$

Ecuación diferencial del problema.

$$-\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = f_0$$

La ecuación diferencial también puede tomar esta forma.

$$-(\mu u')' = f_0$$



El método de integración es una forma natural para obtener ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes por partes. En este método, integramos la ecuación desde (a) hasta (b) .

$$-\int_a^b ((\mu u')') dx = \int_a^b f_0 dx \quad (\text{A})$$

Para el primer termino de la ecuación (A).

$$\begin{aligned} -\int_a^b (\mu u')' dx &= -(\mu u') \Big|_a^b \\ -\int_a^b (\mu u')' dx &= -(\mu u') \Big|_{i+\frac{1}{2}} + (\mu u') \Big|_{i-\frac{1}{2}} \\ -\int_a^b (\mu u')' dx &= -\left[\mu_i \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} \right) \right] + \left[\mu_{i-1} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] \\ -\int_a^b (\mu u')' dx &= -\left[\frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} \right] u_{i-1} + \left[\frac{\mu_i}{h_i} + \frac{\mu_{i-1}}{h_{i-1}} \right] u_i - \left[\frac{\mu_i}{h_i} \right] u_{i+1} \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Para el segundo termino de la ecuación (A).

$$\int_a^b f_0 dx = \frac{f_0}{2} (h_{i-1} + h_i) \quad (C)$$

Sustituimos las ecuaciones (B) y (C) en (A).

$$-\begin{bmatrix} \mu_{i-1} \\ h_{i-1} \end{bmatrix} u_{i-1} + \begin{bmatrix} \mu_i + \mu_{i-1} \\ h_i + h_{i-1} \end{bmatrix} u_i - \begin{bmatrix} \mu_i \\ h_i \end{bmatrix} u_{i+1} = \frac{f_0}{2} (h_{i-1} + h_i)$$

La ecuación anterior se aplica para $i = 1, 2, \dots, N-1$

Para ($i = 1$)

$$-\begin{bmatrix} \mu_0 \\ h_0 \end{bmatrix} u_0 + \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_0 \\ h_1 + h_0 \end{bmatrix} u_1 - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ h_1 \end{bmatrix} u_2 = \frac{f_0}{2} (h_0 + h_1) \quad (1)$$

Para ($i = 2$)

$$-\begin{bmatrix} \mu_1 \\ h_1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \mu_2 + \mu_1 \\ h_2 + h_1 \end{bmatrix} u_2 - \begin{bmatrix} \mu_2 \\ h_2 \end{bmatrix} u_3 = \frac{f_0}{2} (h_1 + h_2) \quad (2)$$

Para ($i = 3$)

$$-\begin{bmatrix} \mu_2 \\ h_2 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} \mu_3 + \mu_2 \\ h_3 + h_2 \end{bmatrix} u_3 - \begin{bmatrix} \mu_3 \\ h_3 \end{bmatrix} u_4 = \frac{f_0}{2} (h_2 + h_3) \quad (3)$$

En resumen, las ecuaciones en diferencias (1),(2) y (3) en notación matricial son:

$$\begin{bmatrix} \frac{2\mu_1}{h} & -\frac{\mu_1}{h} & 0 \\ -\frac{\mu_1}{h} & \frac{\mu_1 + \mu_2}{h} & -\frac{\mu_2}{h} \\ 0 & -\frac{\mu_2}{h} & \frac{2\mu_2}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2hf_0 \\ 2hf_0 \\ 2hf_0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.08 & -0.04 & 0 \\ -0.04 & 0.0414 & -0.0014 \\ 0 & -0.0014 & 0.0028 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones:

$$u_1 = 30.4 \frac{m}{s} \quad u_2 = 48.3 \frac{m}{s} \quad u_3 = 202.72 \frac{m}{s}$$

TABLA 5.4

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia	Velocidad	Velocidad
	Solución aproximada	Solucion exacta
	$u \frac{m}{s}$	$u \frac{m}{s}$
0	0	0
0.25	30.40	30.40
0.50	48.30	48.28
0.75	202.72	202.67
1.0	0	0

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Ejemplo 2.5a. Para el problema de la viga mostrada en la figura 2.5a determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados)

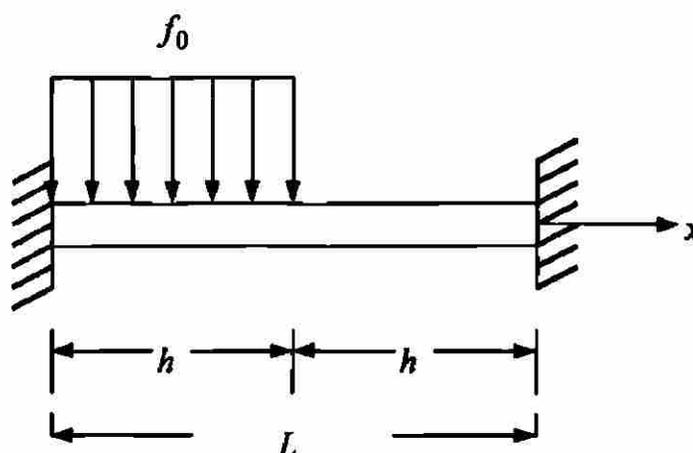


Figura 2.5a Flexión de una viga empotrada en los extremos

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f_0$$

$$b = EI = \text{cte.}$$

Datos:

$$L = 10m$$

$$f_0 = 400 \frac{N}{m}$$

$$E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$$

$$I = 20 \times 10^{-6} m^4$$

$$h = \text{Espacio entre los puntos de la retícula} = 5m$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = f_0$$

Las condiciones frontera para este problema son:

Para la frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y'(0) = y'_0 = 0$$

Para la frontera derecha.

$$y(L) = y_2 = 0$$

$$y'(L) = y'_2 = 0$$

La derivada (y'''') de la ecuación diferencial del problema se evalúa numéricamente mediante la aproximación por diferencias centrales.

$$\frac{EI}{h^4} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] = f(x_i) \quad i = 1, N-1$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Para ($i = 1$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1)$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y_0 = 0$$

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$\frac{EI}{h^4} [7y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1) \quad (1)$$

Condición de frontera derecha.

$$y_2 = 0$$

$$y'_2 = \frac{y_3 - y_1}{2h} = 0$$

$$y_3 - y_1 = 0$$

(2)

Solucionando el sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 7\left(\frac{EI}{h^4}\right) & \left(\frac{EI}{h^4}\right) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7(6400) & (6400) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -400 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = -0.0078m \quad y_3 = -0.0078m$$

TABLA 5.5a

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia x m	Deflexión Solución aproximada y m	Deflexión Solución exacta y m
5	-0.0078	-0.00128

Ejemplo 2.5b. Para el problema de la viga mostrada en la fig.2.5b, determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados)

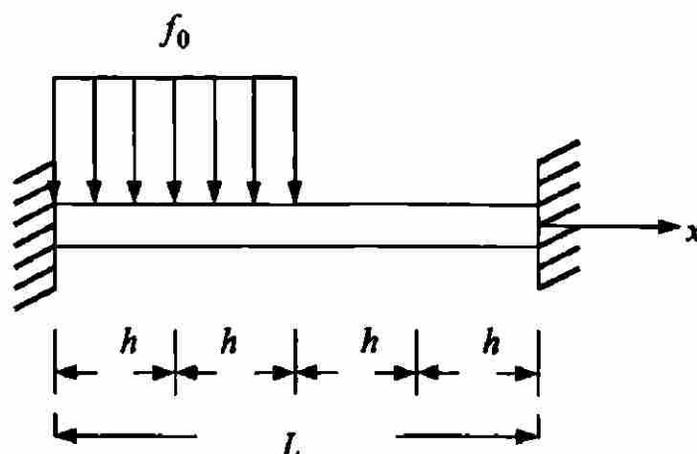


Figura 2.5b Flexión de una viga empotrada en los extremos

$h =$ Espacio entre los puntos de la retícula $= 2.5m$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = f_0$$

Las condiciones frontera para este problema son:

Para la frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y'(0) = y'_0 = 0$$

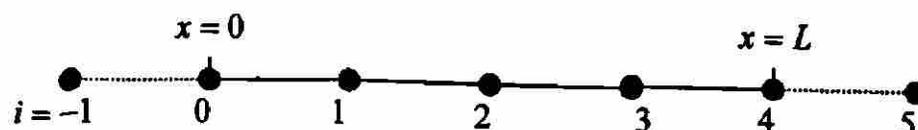
Para la frontera derecha.

$$y(L) = y_4 = 0$$

$$y'(L) = y'_4 = 0$$

La derivada (y'''') de la ecuación diferencial del problema se evalúa numéricamente mediante la aproximación por diferencias centrales.

$$\frac{EI}{h^4} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] = f(x_i) \quad i = 1, N-1$$



Para ($i=1$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1)$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y_0 = 0$$

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$\frac{EI}{h^4} [7y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1) \quad (1)$$

Para ($i=2$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4] = f(x_2) \quad (2)$$

Para ($i = 3$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5] = f(x_3) \quad (3)$$

Condición de frontera derecha.

$$y_4(L) = y_4 = 0$$

$$y_4'(L) = y_4' = \frac{y_5 - y_3}{2h} = 0$$

$$y_5 - y_3 = 0 \quad (4)$$

Solucionando el sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} \frac{7EI}{h^4} & -\frac{4EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 & 0 \\ -\frac{4EI}{h^4} & \frac{6EI}{h^4} & -\frac{4EI}{h^4} & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_0 \\ -f_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = -0.0020m$$

$$y_2 = -0.0029m$$

$$y_3 = -0.0014m$$

$$y_5 = -0.0014m$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
TABLA 5.5b

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia x m	Deflexión Solución aproximada y m	Deflexión Solución exacta y m
2.5	-0.0020	-0.00089
5.0	-0.0029	-0.00128
7.5	-0.0014	-0.00054

Ejemplo 2.5c. Para el problema de la viga mostrada en la fig.2.5c., determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados)

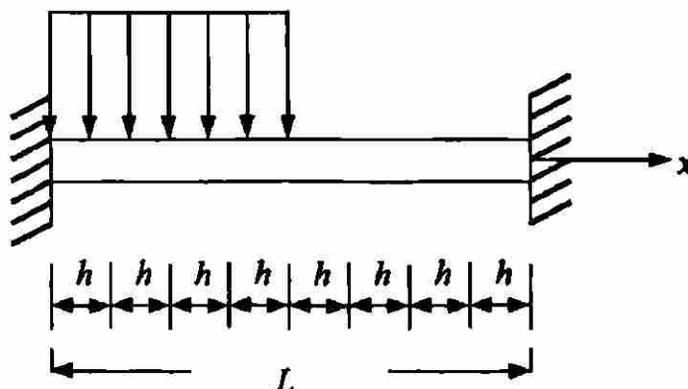


Figura 2.5c Flexión de una viga empotrada en los extremos

Ecuación diferencial del problema

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = f_0$$

Las condiciones frontera son:

Para la frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y'(0) = y'_0 = 0$$

Para la frontera derecha.

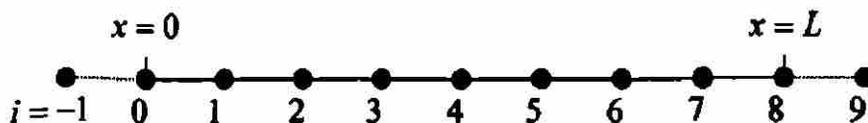
$$y(L) = y_8 = 0$$

$$y'(L) = y'_8 = 0$$

La derivada (y'') de la ecuación diferencial del problema se evalúa numéricamente mediante la aproximación por diferencias centrales.

$$\frac{EI}{h^4} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] = f(x_i) \quad i = 1, N-1$$

h = Espacio entre los puntos de la retícula = 1.25m



Para ($i = 1$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1)$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y_0 = 0$$

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$\frac{EI}{h^4} [7y_1 - 4y_2 + y_3] = f(x_1) \quad (1)$$

Para ($i = 2$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4] = f(x_2) \quad (2)$$

Para ($i = 3$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5] = f(x_3) \quad (3)$$

Para ($i = 4$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6] = f(x_4) \quad (4)$$

Para ($i = 5$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7] = 0 \quad (5)$$

Para ($i = 6$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8] = 0 \quad (6)$$

Para ($i = 7$)

$$\frac{EI}{h^4} [y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9] = 0 \quad (7)$$

Condición de frontera derecha.

$$y_8(L) = y_8 = 0$$

$$y'_8(L) = y'_8 = \frac{y_9 - y_7}{2h} = 0$$

$$y_9 - y_7 = 0$$

(8)

Solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 7 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 \frac{EI}{h^4} & 6 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & 6 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & 6 \frac{EI}{h^4} & -4 \frac{EI}{h^4} & \frac{EI}{h^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_0 \\ -f_0 \\ -f_0 \\ -f_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = -0.0005m$$

$$y_3 = -0.0018m$$

$$y_5 = -0.0014m$$

$$y_7 = -0.0003m$$

$$y_2 = -0.0012m$$

$$y_4 = -0.0018m$$

$$y_6 = -0.0008m$$

$$y_9 = -0.0003m$$

TABLA 5.5c Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $x \text{ m}$	Deflexión	Deflexión
	Solución aproximada $y \text{ m}$	Solución exacta $y \text{ m}$
1.25	-0.0005	-0.000324
2.50	-0.0012	-0.00089
3.75	-0.0018	-0.00388
5.00	-0.0018	-0.00128
6.25	-0.0014	-0.000986
7.50	-0.0008	-0.000542
8.75	-0.0003	-0.000138

Ejemplo 2.6a. Para el problema de la viga mostrada en la fig.2.6a, determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados).

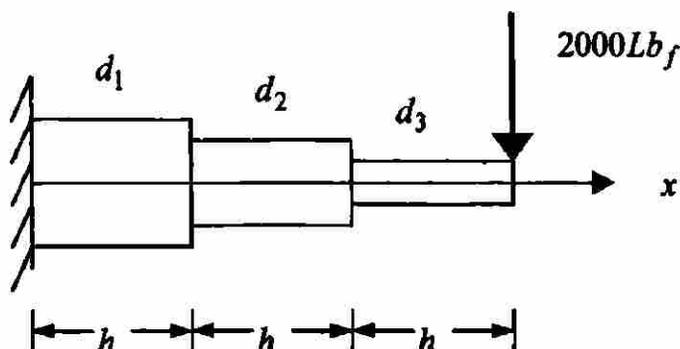


Figura 2.6a Viga de sección variable empotrada en un extremo

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right] = 0$$

Condición de frontera izquierda.

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

Condición de frontera derecha.

$$y''(L) = \frac{M}{EI} = 0$$

$$y'''(L) = \frac{V}{EI}$$

Datos:

$h =$ Espacio entre los puntos de la retícula = 20 in

$$E = 30 \times 10^6 \frac{Lbf}{in^2}$$

$$d_1 = 4in \quad d_2 = 3in \quad d_3 = 2in$$

Derivando la ecuación diferencial del problema.

$$EI_i y_i'''' + 2EI_i y_i''' + EI_i y_i'' = 0 \quad (1)$$

Las derivadas y'''' , y''' y y'' se evalúan numéricamente mediante las aproximaciones por diferencias centrales.

$$y'''' = (y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) / h^4$$

$$y''' = (-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}) / 2h^3$$

$$y'' = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / h^2$$

Los términos I_i' e I_i'' se calculan mediante la aproximación por diferencias finitas como sigue: para $i = 1, 2, \dots, N-1$

$$I_i' = \frac{I_{i+1} - I_{i-1}}{2h}$$

$$I_i'' = \frac{I_{i+1} - 2I_i + I_{i-1}}{h^2}$$

La aproximación por diferencias hacia atrás; para N

$$I_N' = \frac{3I_N - 4I_{N-1} + I_{N-2}}{2h}$$

$$I_N'' = \frac{2I_N - 5I_{N-1} + 4I_{N-2} - I_{N-3}}{h^2}$$

Sustituir las ecuaciones anteriores en la ecuación (1) para obtener las ecuaciones en diferencias.

$$a_i y_{i-2} + b_i y_{i-1} + c y_i + d_i y_{i+1} + e_i y_{i+2} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

donde

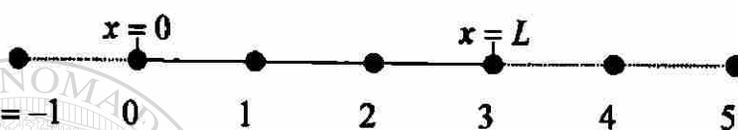
$$a_i = EI_i/h^4 - EI'_i/h^3$$

$$b_i = -4EI_i/h^4 + 2EI'_i/h^3 + EI''_i/h^2$$

$$c_i = 6EI_i/h^4 - 2EI'_i/h^3$$

$$d_i = -4EI_i/h^4 - 2EI'_i/h^3 + EI''_i/h^2$$

$$e_i = EI_i/h^4 + EI'_i/h^3$$



Para ($i=1$)

$$a_1 y_{-1} + b_1 y_0 + c_1 y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = 0$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y'(0) = y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$(a_1 + c_1)y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = 0 \quad (1)$$

Para ($i=2$)

$$a_2 y_0 + b_2 y_1 + c_2 y_2 + d_2 y_3 + e_2 y_4 = 0$$

$$b_2 y_1 + c_2 y_2 + d_2 y_3 + e_2 y_4 = 0 \quad (2)$$

Para ($i = 3$)

$$a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3 + d_3 y_4 + e_3 y_5 = 0 \quad (3)$$

Condición de frontera derecha.

$$y''(L) = \frac{M}{EI} = \frac{y_2 - 2y_3 + y_4}{h^4} = 0$$

$$y_2 - 2y_3 + y_4 = 0 \quad (4)$$

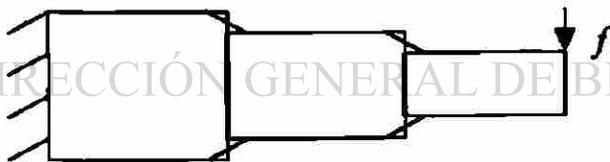
$$y'''(L) = \frac{V}{EI_3} = \frac{-y_1 + 2y_2 - 2y_4 + y_5}{2h^3}$$

$$\frac{EI_3}{2h^3} [-y_1 + 2y_2 - 2y_4 + y_5] = V \quad (5)$$

Solución del sistema de ecuaciones para los siguientes valores.

I) Para los siguientes radios:

$h =$ Espacio entre los puntos de la retícula = 20 in



$$r_0 = 2 \text{ in} \quad r_1 = 1.75 \text{ in} \quad r_2 = 1.25 \text{ in} \quad r_3 = 1 \text{ in}$$

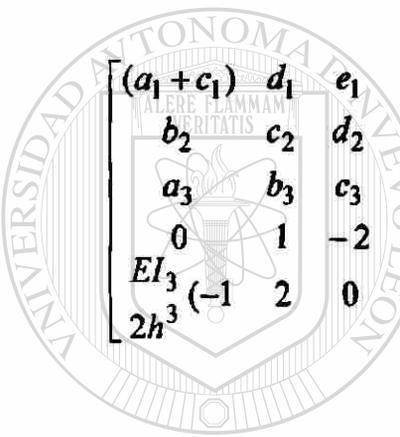
$$I_0 = 12.566 \text{ in}^4$$

$$I_1 = 7.366 \text{ in}^4 \quad I'_1 = -0.266 \text{ in}^3 \quad I''_1 = -0.00062 \text{ in}^2$$

$$I_2 = 1.917 \text{ in}^4 \quad I'_2 = -0.1645 \text{ in}^3 \quad I''_2 = 0.01079 \text{ in}^2$$

$$I_3 = 0.785 \text{ in}^4 \quad I'_3 = 0.0513 \text{ in}^3 \quad I''_3 = 0.0222 \text{ in}^2$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 30078 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & b_2 &= -29637 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & a_3 &= 816 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \\ c_1 &= 132960 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & c_2 &= 28032 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & b_3 &= 318 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \\ d_1 &= -72618 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & d_2 &= -9897 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & c_3 &= 810 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \\ e_1 &= 14118 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & e_2 &= 816 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 & d_3 &= -5838 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \\ & & & & e_3 &= 3894 \text{ Lb}_f / \text{in}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} (a_1 + c_1) & d_1 & e_1 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ EI_3 & (-1 & 2 & 0 & -2 & 1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{Bmatrix}$$

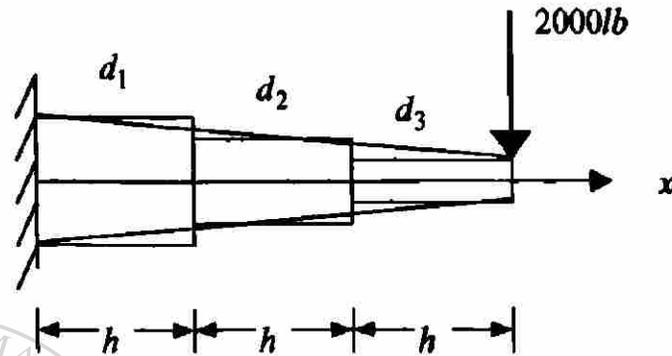
$$\begin{aligned} y_1 &= -0.3774 \text{ in} & y_2 &= -1.6235 \text{ in} & y_3 &= -3.3993 \text{ in} \\ y_4 &= -6.3625 \text{ in} & y_5 &= -8.4966 \text{ in} \end{aligned}$$

TABLA 5.6a Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $x \text{ in}$	Deflexión Solución aproximada $y \text{ in}$	Deflexión Solución exacta $y \text{ in}$
20	-0.3774	-0.0700
40	-1.6235	-0.2260
60	-3.3993	-0.4524

II) Para los siguientes radios:

$h =$ Espacio entre los puntos de la retícula = 20 in



$$r_0 = 2 \text{ in} \quad r_1 = 1.668 \text{ in} \quad r_2 = 1.336 \text{ in} \quad r_3 = 1 \text{ in}$$

$$I_0 = 12.566 \text{ in}^4$$

$$I_1 = 6.079 \text{ in}^4$$

$$I'_1 = -0.2516 \text{ in}^3$$

$$I''_1 = 0.00727 \text{ in}^2$$

$$I_2 = 2.502 \text{ in}^4$$

$$I'_2 = -0.1323 \text{ in}^3$$

$$I''_2 = 0.00465 \text{ in}^2$$

$$I_3 = 0.785 \text{ in}^4$$

$$I'_3 = -0.0393 \text{ in}^3$$

$$I''_3 = 0.00202 \text{ in}^2$$

$$a_1 = 25785 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$b_2 = -36615 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$a_3 = 3534 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$c_1 = 105060 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$c_2 = 42318 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$b_3 = -11172 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$d_1 = -55671 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$d_2 = -20739 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$c_3 = 12918 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$e_1 = 10689 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$e_2 = 3549 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$d_3 = -6456 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$e_3 = 1176 \text{ Lb}_f / \text{in}^2$$

$$\begin{bmatrix} (a_1+c_1) & d_1 & e_1 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{EI_3}{2h^3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = -0.1976 \text{ in} \quad y_2 = -0.7980 \text{ in} \quad y_3 = -1.7377 \text{ in}$$

$$y_4 = -2.6773 \text{ in} \quad y_5 = -2.5976 \text{ in}$$

TABLA 5.6b

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia x in	Deflexión Solución aproximada y in	Deflexión Solución exacta y in
20	-0.1976	-0.0700
40	-0.7980	-0.2260
60	-1.7377	-0.4524

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ejemplo 2.6b Para el problema de la viga mostrada en la fig.2.6b, determine.

Las variables primarias desconocidas (desplazamientos generalizados).

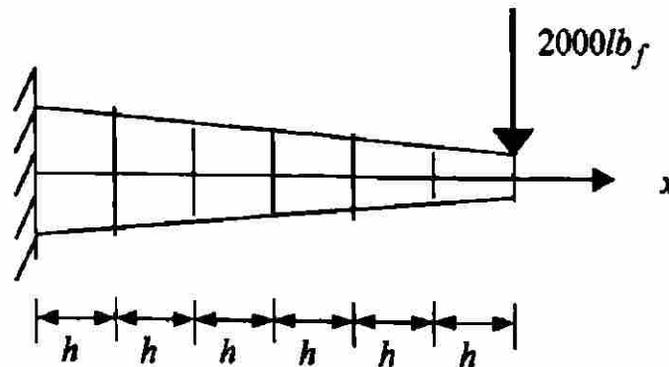


Figura 2.6b Viga de sección variable empotrada en un extremo

La ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$d^2 \left[EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right] = 0$$

Condición de frontera izquierda.

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

Condición de frontera derecha.

$$y''(L) = \frac{M}{EI} = 0$$

$$y'''(L) = \frac{V}{EI}$$

Datos:

$$E = 30 \times 10^6 \frac{\text{Lb}_f}{\text{in}^2}$$

$$d_0 = 4 \text{ in}$$

$$d_1 = 3.668 \text{ in}$$

$$d_2 = 3.336 \text{ in}$$

$$d_3 = 3 \text{ in}$$

$$d_4 = 2.672 \text{ in}$$

$$d_5 = 2.34 \text{ in}$$

$$d_6 = 1 \text{ in}$$

Derivando la ecuación diferencial del problema.

$$EI_i y_i'''' + 2EI_i' y_i''' + EI_i'' y_i'' = 0 \quad (1)$$

$$a_i y_{i-2} + b_i y_{i-1} + c_i y_i + d_i y_{i+1} + e_i y_{i+2} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

donde

$$a_i = EI_i / h^4 - EI_i' / h^3$$

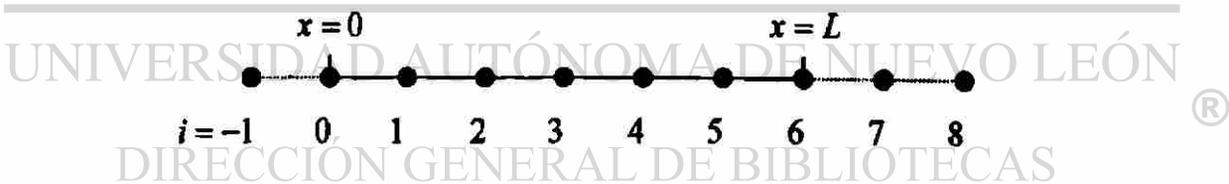
$$b_i = -4EI_i / h^4 + 2EI_i' / h^3 + EI_i'' / h^2$$

$$c_i = 6EI_i / h^4 - 2EI_i'' / h^2$$

$$d_i = -4EI_i / h^4 - 2EI_i' / h^3 + EI_i'' / h^2$$

$$e_i = EI_i / h^4 + EI_i' / h^3$$

$h =$ Espacio entre los puntos de la retícula = 10 in



Para ($i = 1$)

$$a_1 y_{-1} + b_1 y_0 + c_1 y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = 0$$

Condiciones de frontera izquierda.

$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y'(0) = y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$$

$$y_1 = y_{-1}$$

$$(a_1 + c_1)y_1 + d_1y_2 + e_1y_3 = 0 \quad (1)$$

Para $(i = 2)$

$$a_2y_0 + b_2y_1 + c_2y_2 + d_2y_3 + e_1y_4 = 0$$

$$b_2y_1 + c_2y_2 + d_2y_3 + e_1y_4 = 0 \quad (2)$$

Para $(i = 3)$

$$a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 + d_3y_4 + e_3y_5 = 0 \quad (3)$$

Para $(i = 4)$

$$a_4y_2 + b_4y_3 + c_4y_4 + d_4y_5 + e_4y_6 = 0 \quad (4)$$

Para $(i = 5)$

$$a_5y_3 + b_5y_4 + c_5y_5 + d_5y_6 + e_5y_7 = 0 \quad (5)$$

Para $(i = 6)$

$$a_6y_4 + b_6y_5 + c_6y_6 + d_6y_7 + e_6y_8 = 0 \quad (6)$$

Condición de frontera derecha.

$$y''(L) = \frac{M}{EI} = \frac{y_5 - 2y_6 + y_7}{h^4} = 0$$

$$y_5 - 2y_6 + y_7 = 0 \quad (7)$$

$$y'''(L) = \frac{V}{EI_3} = \frac{-y_4 + 2y_5 - 2y_7 + y_8}{2h^3}$$

$$\frac{EI_3}{2h^3} [-y_4 + 2y_5 - 2y_7 + y_8] = V \quad (8)$$

Solución del sistema de ecuaciones:

$$r_0 = 2 \text{ in} \quad r_1 = 1.834 \text{ in} \quad r_2 = 1.668 \text{ in} \quad r_3 = 1.502 \text{ in}$$

$$r_4 = 1.336 \text{ in} \quad r_5 = 1.17 \text{ in} \quad r_6 = 1 \text{ in}$$

$$I_0 = 12.566 \text{ in}^4$$

$$I_1 = 8.885 \text{ in}^4$$

$$I_2 = 6.079 \text{ in}^4$$

$$I_3 = 3.997 \text{ in}^4$$

$$I_4 = 2.502 \text{ in}^4$$

$$I_5 = 1.471 \text{ in}^4$$

$$I_6 = 0.785 \text{ in}^4$$

$$I'_1 = -0.3243 \text{ in}^3$$

$$I'_2 = -0.2444 \text{ in}^3$$

$$I'_3 = -0.1788 \text{ in}^3$$

$$I'_4 = -0.1263 \text{ in}^3$$

$$I'_5 = -0.0858 \text{ in}^3$$

$$I'_6 = -0.05135 \text{ in}^3$$

$$I''_1 = 0.00875 \text{ in}^2$$

$$I''_2 = 0.00724 \text{ in}^2$$

$$I''_3 = 0.00587 \text{ in}^2$$

$$I''_4 = 0.00464 \text{ in}^2$$

$$I''_5 = 0.00345 \text{ in}^2$$

$$I''_6 = 0.00226 \text{ in}^2$$

$$a_1 = 36384 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$c_1 = -123453 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$d_1 = -84537 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$e_1 = 16926 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$b_2 = -85440 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$c_2 = 105078 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$d_2 = -56112 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$e_2 = 10905 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$a_3 = 17355 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$b_3 = -56931 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$c_3 = 68424 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$d_3 = -35475 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$e_3 = 6627 \text{ Lb}_f/\text{in}^2$$

$$\begin{array}{lll}
 a_4 = 11295 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & a_5 = 6987 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & a_6 = 3895 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \\
 b_4 = -36210 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & b_5 = -21765 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & b_6 = -11823 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \\
 c_4 = -42252 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & c_5 = 24408 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & c_6 = -12774 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \\
 d_4 = -21054 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & d_5 = -11469 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & d_6 = -5661 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 \\
 e_4 = 3717 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & e_5 = 1839 \text{ Lb}_f/\text{in}^2 & e_6 = 815 \text{ Lb}_f/\text{in}^2
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
 (a_1 + b_1) & d_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{EI}{2h^2} (-1 & 2 & 0 & -2 & 1)
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4 \\
 y_5 \\
 y_6 \\
 y_7 \\
 y_8
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 2000
 \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = -0.0092 \text{ in} \quad y_2 = -0.0402 \text{ in} \quad y_3 = -0.0969 \text{ in}$$

$$y_4 = -0.1836 \text{ in} \quad y_5 = -0.3031 \text{ in} \quad y_6 = -0.4521 \text{ in}$$

$$y_7 = -0.6010 \text{ in} \quad y_8 = -0.6096 \text{ in}$$

TABLA 5.6c Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Distancia $x \text{ in}$	Deflexión	Deflexión
	Solución aproximada $y \text{ in}$	Solución exacta $y \text{ in}$
10	-0.0092	-0.0080*
20	-0.0402	-0.0700
30	-0.0969	-0.1480*
40	-0.1836	-0.2260
50	-0.3031	-0.3392*
60	-0.4521	-0.4524

* Valores interpolados.

Ejemplo 3.1 Una barra delgada a una temperatura inicial de (θ_1) , aislada, menos por uno de sus extremos, que se somete a la temperatura de (θ_0) , que es la temperatura ambiente. La barra tiene una longitud (L) , determine la distribución de temperaturas.

Ecuación diferencial del problema

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 < x < L$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

θ = Temperatura

α = Difusividad térmica

t = Tiempo

Condiciones de frontera

$$\theta(x, 0) = \theta_1$$

$$\theta(0, t) = \theta_0$$

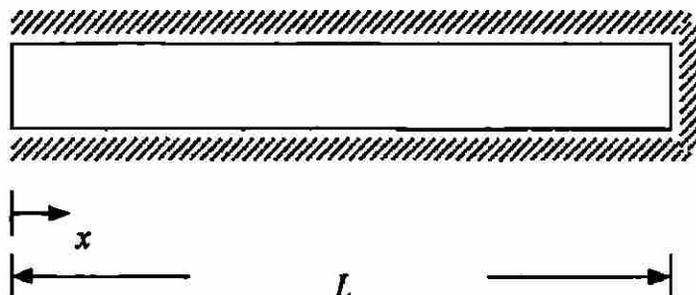
$$0 < x < L$$

$$t > 0$$

$$\frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = 0$$

$$t > 0$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



$$\theta(0, t) = \theta_0$$

$$\frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = 0$$

Normalizando

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad \tau = \frac{\alpha t}{L^2} \quad X = \frac{x}{L}$$

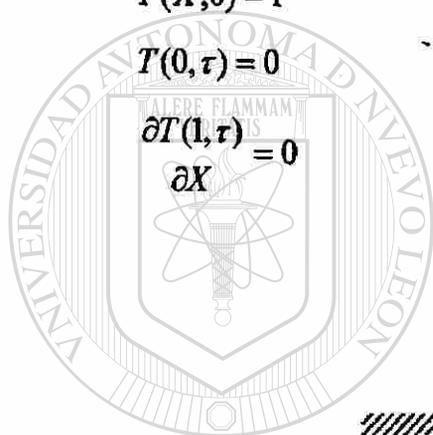
La ecuación diferencial y las condiciones de frontera del problema se transforma en

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad 0 < X < 1$$

$$T(X, 0) = 1 \quad 0 < X < 1$$

$$T(0, \tau) = 0 \quad \tau > 0$$

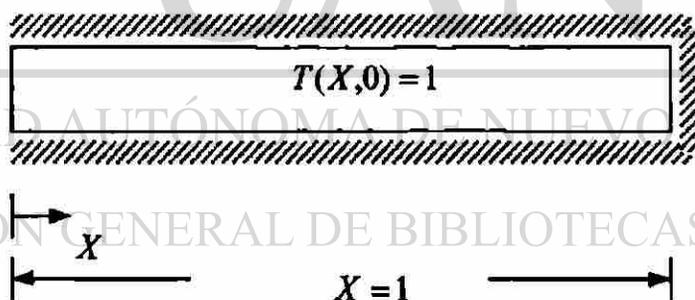
$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial X} = 0 \quad \tau > 0$$



U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



$$T(0, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial X} = 0$$

Solución de la ecuación diferencial parcial parabólica.

Método implícito.

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}$$

Se utiliza Euler hacia atrás con respecto al dominio del tiempo y el término de la segunda derivada de la ecuación mediante la aproximación por diferencias centrales.

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta \tau} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta X^2}$$

$$\gamma = \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2}$$

$$T_i^n = -\gamma T_{i-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_i^{(n+1)} - \gamma T_{i+1}^{(n+1)}$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

1) Malla con dos nodos

$$\Delta X = 1$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$T(0, \tau) = T_0 = 0 \quad T'(1, \tau) = T_1' = 0$$



Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T_1' = \frac{T_2 - T_0}{2\Delta X} = 0$$

$$T_0^{(n+1)} = T_2^{(n+1)}$$

$$T_1^n = -2\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)}$$

$$\left\{ (2\gamma + 1) T_1^{(n+1)} \right\} = \left\{ T_1^n + 2\gamma T_0^{(n+1)} \right\} \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2} = \frac{0.05}{(1)^2} = 0.05$$

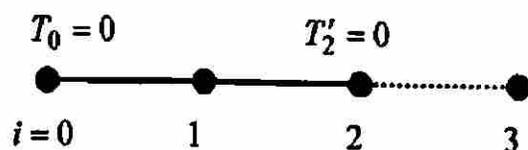
Solución de la ecuación (1)

TABLA 5.7a Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo τ	T_0	T_1	Solución Exacta T_1
0	0	0	1	1
1	0.05	0	0.909	0.9969
2	0.10	0	0.826	0.9493
3	0.15	0	0.751	0.8642
4	0.20	0	0.682	0.7723
5	0.25	0	0.620	0.6854
6	0.30	0	0.564	0.6068
7	0.35	0	0.512	0.5367
8	0.40	0	0.465	0.4745
9	0.45	0	0.422	0.4119
10	0.50	0	0.383	0.3708

2) Malla con tres nodos

$$\Delta X = 0.5$$



Para ($i=1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)} \quad (2)$$

Para ($i=2$)

$$T_2^n = -\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} - \gamma T_3^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T_2' = \frac{T_3 - T_1}{2\Delta X} = 0$$

$$T_3^{(n+1)} = T_1^{(n+1)}$$

$$T_2^n = -2\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} \quad (3)$$

Solución de las ecuaciones (2) y (3)

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} = \frac{0.05}{(0.5)^2} = 0.2$$

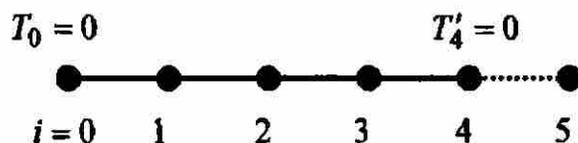
$$\begin{bmatrix} (2\gamma+1) & -\gamma \\ -2\gamma & (2\lambda+1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \end{Bmatrix}$$

TABLA 5.7b Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo		T_0	T_1	T_2	Solución
	τ					Exacta
						T_2
0	0	0	0	1	1	1
1	0.05	0	0	0.8510	0.9574	0.9969
2	0.10	0	0	0.7355	0.8940	0.9493
3	0.15	0	0	0.6428	0.8222	0.8642
4	0.20	0	0	0.5666	0.7490	0.7723
5	0.25	0	0	0.5016	0.6783	0.6854
6	0.30	0	0	0.4456	0.6118	0.6068
7	0.35	0	0	0.3969	0.5504	0.5367
8	0.40	0	0	0.3541	0.4943	0.4745
9	0.45	0	0	0.3162	0.4434	0.4119
10	0.50	0	0	0.2826	0.3974	0.3708

3) Malla con cinco nodos

$$\Delta X = 0.25$$

Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)} \quad (4)$$

Para ($i = 2$)

$$T_2^n = -\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} - \gamma T_3^{(n+1)} \quad (5)$$

Para ($i = 3$)

$$T_3^n = -\gamma T_2^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_3^{(n+1)} - \gamma T_4^{(n+1)} \quad (6) \quad \text{®}$$

Para ($i = 4$)

$$T_4^n = -\gamma T_3^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_4^{(n+1)} - \gamma T_5^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T_4' = \frac{T_5 - T_3}{2\Delta X} = 0$$

$$T_5^{(n+1)} = T_3^{(n+1)}$$

$$T_4^n = -2\gamma T_3^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_4^{(n+1)} \quad (7)$$

Solución de las ecuaciones (4) , (5) , (6) y (7)

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} = \frac{0.05}{(0.25)^2} = 0.8$$

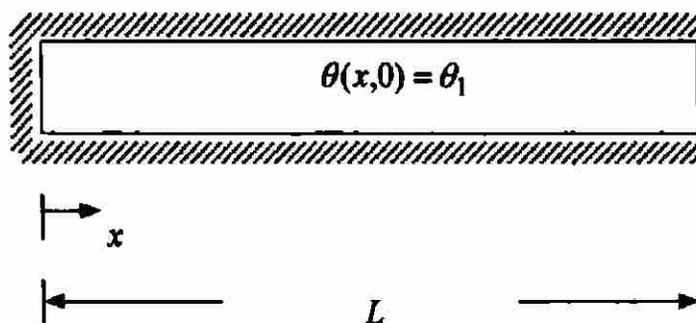
$$\begin{bmatrix} (2\gamma+1) & -\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma & (2\gamma+1) & -\gamma & 0 \\ 0 & -\gamma & (2\gamma+1) & -\gamma \\ 0 & 0 & -2\gamma & (2\gamma+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \\ T_3^{(n+1)} \\ T_4^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ T_3^n \\ T_4^n \end{bmatrix}$$

TABLA 5.7c

Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo τ	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	Solución Exacta T_4
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0.05	0	0.6554	0.8799	0.9544	0.9720	0.9969
2	0.10	0	0.4858	0.7596	0.8830	0.9172	0.9493
3	0.15	0	0.3897	0.6591	0.8031	0.8470	0.8642
4	0.20	0	0.3274	0.5769	0.7236	0.7711	0.7723
5	0.25	0	0.2823	0.5084	0.6489	0.6959	0.6854
6	0.30	0	0.2471	0.4501	0.5803	0.6247	0.6068
7	0.35	0	0.2180	0.3997	0.5182	0.5592	0.5367
8	0.40	0	0.1932	0.3554	0.4624	0.4996	0.4745
9	0.45	0	0.1717	0.3164	0.4124	0.4460	0.4194
10	0.50	0	0.1528	0.2819	0.3678	0.3979	0.3708

Ejemplo 3.2 Una barra delgada a una temperatura inicial de (θ_1) , aislada, menos por uno de sus extremos, por el que intercambia calor con el medio ambiente. La barra tiene una longitud (L) , determine la distribución de temperaturas.



Datos:

$$\theta_1 = \text{Temperatura inicial} = 100^\circ F$$

$$\theta_\infty = \text{Temperatura del medio ambiente} = 1600^\circ F$$

$$\beta = \text{Coeficiente de transferencia de calor por convección} = \frac{5 \text{ Btu}}{\text{hr} - \text{ft}^2 - ^\circ F}$$

$$k = \text{Coeficiente de transferencia de calor por conducción} = \frac{0.54 \text{ Btu}}{\text{hr} - \text{ft} - ^\circ F}$$

$$C_p = \text{Calor específico} = \frac{0.2 \text{ Btu}}{\text{Lb}_m - ^\circ F}$$

$$\rho = \text{Densidad} = \frac{144 \text{ Lb}_m}{\text{ft}^3}$$

$$L = \text{Longitud de la barra} = 1 \text{ ft}$$

$$\alpha = \text{Difusividad térmica} = \frac{k}{\rho C}$$

$$t = \text{Tiempo}$$

Ecuación diferencial del problema

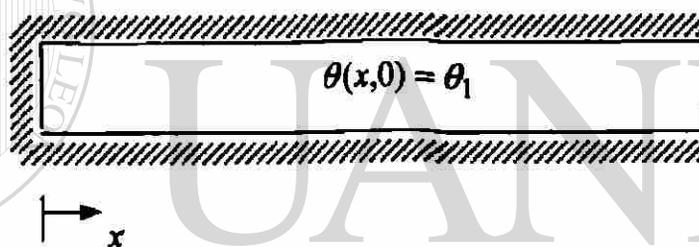
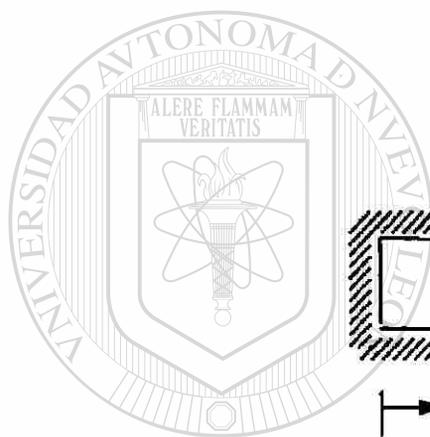
$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 < x < L$$

Condiciones de frontera

$$\theta(x, 0) = \theta_1 \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0 \quad t > 0$$

$$-k \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = \beta(\theta - \theta_0) \quad t > 0$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0 \quad -k \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = \beta(\theta - \theta_0)$$

Normalizando

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$X = \frac{x}{L}$$

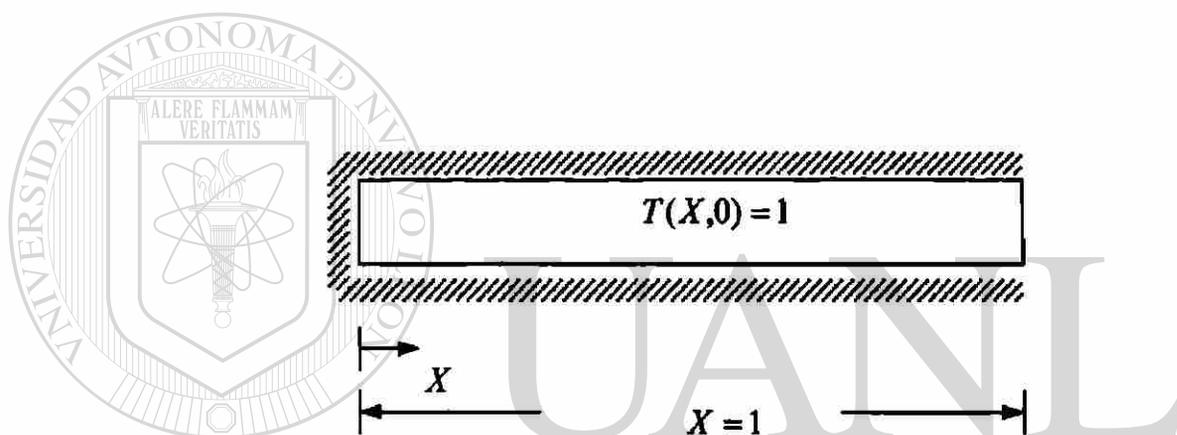
La ecuación diferencial y las condiciones de frontera del problema se transforma en.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad 0 < X < 1$$

$$T(X, 0) = 1 \quad 0 < X < 1$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad \tau > 0$$

$$-k \frac{\partial T(L, \tau)}{\partial X} = \beta T \quad \tau > 0$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
 $\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial X} = 0$ $-k \frac{\partial T(L, \tau)}{\partial X} = \beta T$ ®
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Solución de la ecuación diferencial parcial parabólica.

Método implícito.

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}$$

Se utiliza Euler hacia atrás con respecto al dominio del tiempo y el término de la segunda derivada de la ecuación mediante la aproximación por diferencias centrales.

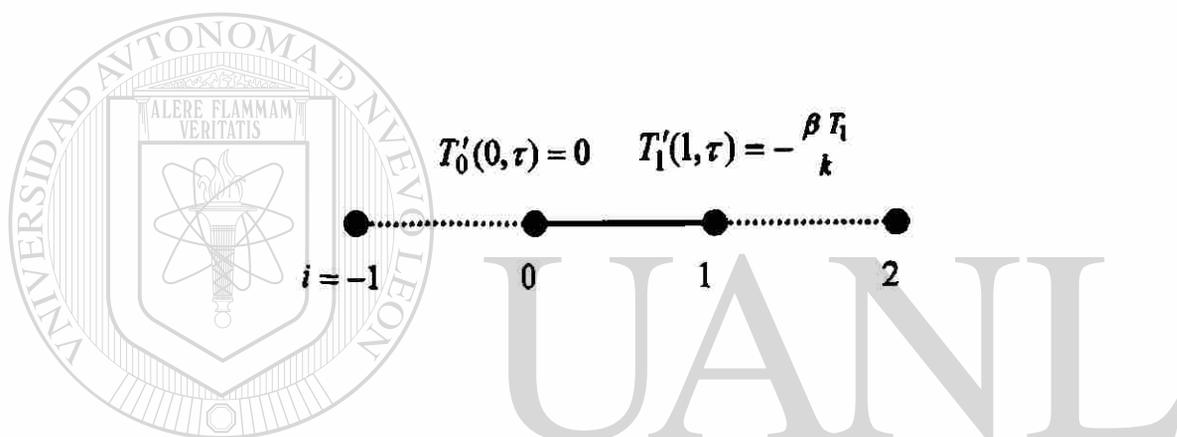
$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta\tau} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta X^2}$$

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2}$$

$$T_i^n = -\gamma T_{i-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_i^{(n+1)} - \gamma T_{i+1}^{(n+1)} \quad i = 0, 1, \dots, N$$

1) Malla con dos nodos

$$\Delta X = 1$$



Para ($i = 0$)

$$T_0^n = -\gamma T_{-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - \gamma T_1^{(n+1)}$$

Condición de frontera izquierda

$$T_0' = \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta X} = 0$$

$$T_1^{(n+1)} = T_{-1}^{(n+1)}$$

$$T_0^n = (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - 2\gamma T_1^{(n+1)} \quad (1)$$

Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha.

$$T_1' = \frac{T_2 - T_0}{2\Delta X} = -\frac{\beta}{k} T_1$$

$$T_2^{(n+1)} = \frac{-2\Delta X\beta}{k} T_1^{(n+1)} + T_0^{(n+1)}$$

$$T_1^n = -2\gamma T_0^{(n+1)} + \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X\beta}{k} \right) \right] T_1^{(n+1)} \quad (2)$$

Solución de las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{bmatrix} (2\gamma + 1) & -2\gamma \\ -2\gamma & (2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X\beta}{k} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0^{(n+1)} \\ T_1^{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \end{Bmatrix}$$

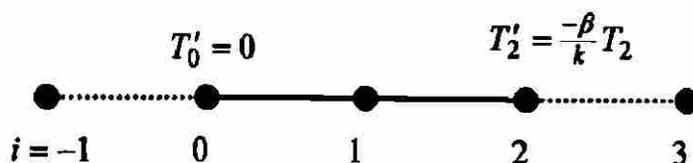
$$\gamma = \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2} = \frac{0.01875}{(1)^2} = 0.01875$$

TABLA 5.8a Comparación de los resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo τ			Solución	Solución
		T_0	T_1	Exacta T_0	Exacta T_1
0	0	1	1	1	1
1	0.01875	0.9909	0.7490	1.0210	0.3500
2	0.03750	0.9747	0.5673	1.0082	0.2798
3	0.05620	0.9552	0.4355	1.0034	0.2379
4	0.07500	0.9329	0.3397	0.9950	0.2102
5	0.09375	0.9089	0.2699	0.9810	0.1904
6	0.11250	0.8839	0.2188	0.9616	0.1753
7	0.13125	0.8585	0.1812	0.9384	0.1633
8	0.15000	0.8330	0.1534	0.9127	0.1534
9	0.16875	0.8076	0.1326	0.8853	0.1450
10	0.18750	0.7826	0.1169	0.8572	0.1377

2) Malla con tres nodos

$$\Delta X = 0.5$$



Para ($i = 0$)

$$T_0^n = -\gamma T_{-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - \gamma T_1^{(n+1)}$$

Condición de frontera izquierda.

$$T'_0 = \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta X} = 0$$

$$T_1^{(n+1)} = T_{-1}^{(n+1)}$$

$$T_0^n = (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - 2\gamma T_1^{(n+1)} \quad (3)$$

Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)} \quad (4) \text{®}$$

Para ($i = 2$)

$$T_2^n = -\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} - \gamma T_3^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T'_2 = \frac{T_3 - T_1}{2\Delta X} = -\frac{\beta}{k} T_2$$

$$T_3^{(n+1)} = -\frac{2\Delta X \beta}{k} T_2^{(n+1)} + T_1^{(n+1)}$$

$$T_2^n = -2\gamma T_1^{(n+1)} + \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X \beta}{k} \right) \right] T_2^{(n+1)} \quad (5)$$

Solución de las ecuaciones (3), (4) y (5)

$$\begin{bmatrix} (2\gamma + 1) & -2\gamma & 0 \\ -\gamma & (2\gamma + 1) & -\gamma \\ 0 & -2\gamma & \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X \beta}{k} \right) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0^{(n+1)} \\ T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ T_2^n \end{Bmatrix}$$

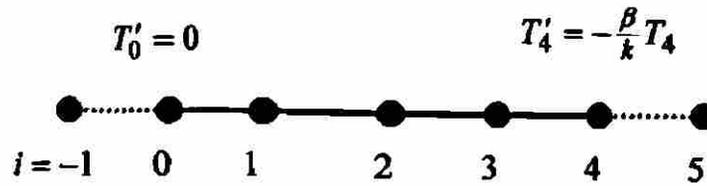
$$\gamma = \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2} = \frac{0.05}{(0.5)^2} = 0.2$$

TABLA 5.8b Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

n	Tiempo τ	T_0	T_1	T_2	Solución	Solución	Solución
					Exacta T_0	Exacta T_1	Exacta T_2
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0.01875	0.9967	0.9751	0.6216	1.0210	1.0040	0.3500
2	0.03750	0.9892	0.9393	0.4135	1.0082	0.9702	0.2798
3	0.05625	0.9775	0.8999	0.2974	1.0034	0.9636	0.2379
4	0.07500	0.9622	0.8603	0.2312	0.9950	0.8761	0.2102
5	0.09375	0.9439	0.8221	0.1922	0.9810	0.8326	0.5812
6	0.11250	0.9233	0.7860	0.1681	0.9616	0.7932	0.1753
7	0.13125	0.9009	0.7521	0.1523	0.9384	0.7575	0.1636
8	0.15000	0.8773	0.7204	0.1411	0.9127	0.7248	0.1534
9	0.16875	0.8529	0.6907	0.1327	0.8853	0.6947	0.1450
10	0.1875	0.8280	0.6628	0.1258	0.8572	0.6667	0.1377

3) Malla con cinco nodos

$$\Delta X = 0.25$$



Para ($i = 0$)

$$T_0^n = -\gamma T_{-1}^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - \gamma T_1^{(n+1)}$$

Condición de frontera izquierda

$$T'_0 = \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta X} = 0$$

$$T_1^{(n+1)} = T_{-1}^{(n+1)}$$

$$T_0^n = (2\gamma + 1)T_0^{(n+1)} - 2\gamma T_1^{(n+1)} \quad (6)$$

Para ($i = 1$)

$$T_1^n = -\gamma T_0^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_1^{(n+1)} - \gamma T_2^{(n+1)} \quad (7)$$

Para ($i = 2$)

$$T_2^n = -\gamma T_1^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_2^{(n+1)} - \gamma T_3^{(n+1)} \quad (8)$$

Para ($i = 3$)

$$T_3^n = -\gamma T_2^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_3^{(n+1)} - \gamma T_4^{(n+1)} \quad (9)$$

Para ($i = 4$)

$$T_4^n = -\gamma T_3^{(n+1)} + (2\gamma + 1)T_4^{(n+1)} - \gamma T_5^{(n+1)}$$

Condición de frontera derecha

$$T_4' = \frac{T_5 - T_3}{2\Delta X} = -\frac{\beta}{k} T_4$$

$$T_5^{(n+1)} = -\frac{2\Delta X\beta}{k} T_4^{(n+1)} + T_3^{(n+1)}$$

$$T_4^n = -2\gamma T_3^{(n+1)} + \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X\beta}{k} \right) \right] T_4^{(n+1)} \quad (10)$$

Solución de las ecuaciones (6) , (7) , (8) , (9) y (10)

$$\begin{bmatrix} (2\gamma + 1) & -2\gamma & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & (2\gamma + 1) & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & (2\gamma + 1) & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & (2\gamma + 1) & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma & \left[(2\gamma + 1) + \gamma \left(\frac{2\Delta X\beta}{k} \right) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0^{(n+1)} \\ T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \\ T_3^{(n+1)} \\ T_4^{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ T_2^n \\ T_3^n \\ T_4^n \end{Bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} = \frac{0.01875}{(0.25)^2} = 0.3$$

TABLA 5.8c Comparación de resultados diferencias finitas solución exacta

Tiempo τ	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_0^x	T_1^x	T_2^x	T_3^x	T_4^x
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.01875	0.9986	0.9963	0.9817	0.9059	0.5166	1.0210	0.9936	1.0040	0.9174	0.3500
0.03750	0.9944	0.9873	0.9500	0.8071	0.3350	1.0082	1.0000	0.9702	0.7853	0.2798
0.05625	0.9863	0.9729	0.91190	0.7237	0.2574	1.0034	0.9916	0.9236	0.6960	0.2379
0.07500	0.9743	0.9543	0.8720	0.6567	0.2180	0.9950	0.9734	0.8761	0.6310	0.2102
0.09375	0.9586	0.9323	0.8328	0.6030	0.1940	0.9810	0.9501	0.8326	0.5812	0.1904
0.11250	0.9396	0.9081	0.7956	0.5593	0.1772	0.9616	0.9238	0.7932	0.5414	0.1753
0.13125	0.9181	0.8823	0.7608	0.5230	0.1643	0.9384	0.8959	0.7575	0.5086	0.1633
0.15000	0.8947	0.8558	0.7282	0.4923	0.1538	0.9127	0.8672	0.7248	0.4808	0.1534
0.16875	0.8700	0.8288	0.6979	0.4657	0.1450	0.8853	0.8383	0.6947	0.4567	0.1450
0.18750	0.8445	0.8019	0.6695	0.4423	0.1374	0.8572	0.8095	0.6667	0.4353	0.1377

T^x Solución exacta

Ejemplo 4.1 Escriba la aproximación por diferencias y la solución de la ecuación de Poisson, para la geometría que se muestra en la figura 5.1.

Ecuación diferencial del problema.(EDP elíptica)

$$-\nabla^2 T(x, y) = f_0$$

$$-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = f_0$$

Geometría del problema y condiciones de frontera.

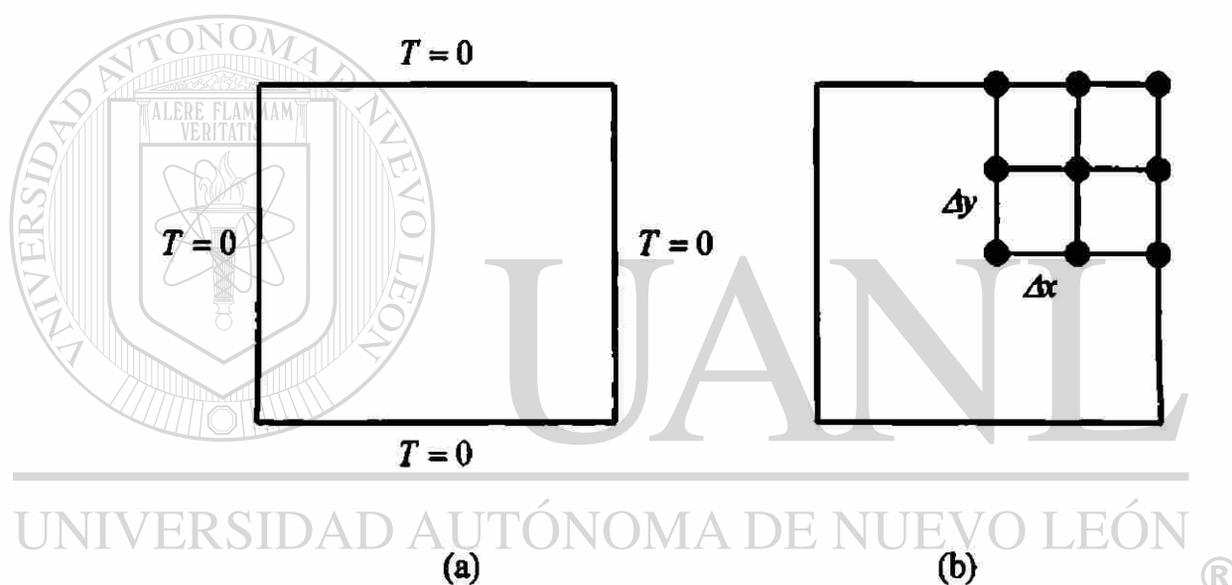


Figura 5.1 Dominio del problema (a), y retícula de análisis (b)

Condiciones de frontera de la raticula de análisis.

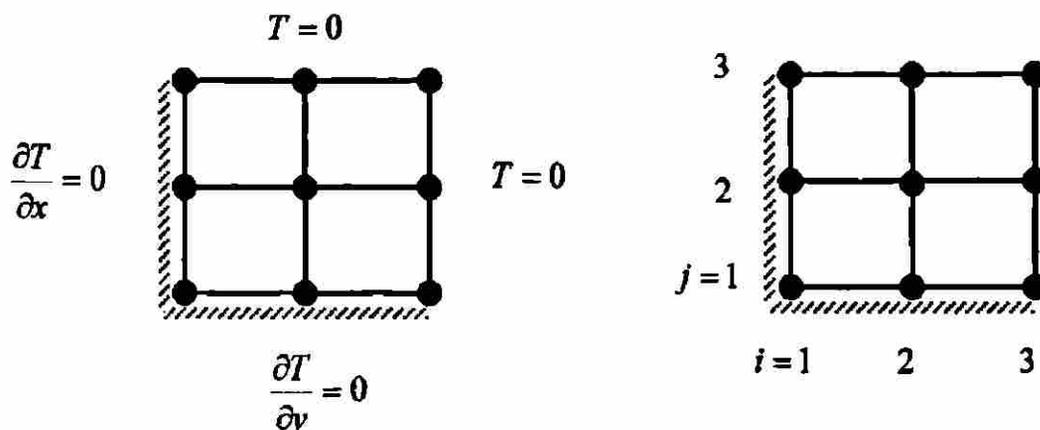
Frontera izquierda $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ (Tipo Neuman)

Frontera derecha $T = 0$ (Tipo Dirichlet)

Frontera inferior $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

Frontera superior $T = 0$

Condiciones de frontera de la retícula de análisis



$$-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = f_0 \quad (1)$$

La ecuación en diferencias para un punto (i, j) de la retícula situado dentro de la frontera. Si aplicamos la aproximación por diferencias centrales, aproximamos el primer termino de la ecuación (1) por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (2)$$

De manera análoga, la aproximación por diferencias del segundo termino es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (3)$$

Sustituimos (2) y (3) en (1)

$$\frac{-T_{i-1,j} + 2T_{i,j} - T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-T_{i,j-1} + 2T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f_{0,i,j} \quad (4)$$

La ecuación (4) se aplica a todos los puntos de la retícula excepto los de la frontera.

La frontera inferior, ecuación en diferencias para un punto.

$$(1 < i < i_{max} \text{ y } j = 1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,1+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,1}}{2 \Delta y} \quad (\text{a})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,1+\frac{1}{2}} = \frac{T_{i,2} - T_{i,1}}{\Delta y} \quad (\text{b})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,1} = 0 \quad (\text{Condición de frontera inferior}) \quad (\text{c})$$

Sustituimos (b) y (c) en (a)

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{2T_{i,2} - 2T_{i,1}}{\Delta y^2} \quad (\text{5})$$

Sustituimos (5) y (2) en (1)

$$\frac{-T_{i-1,j} + 2T_{i,j} - T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-2T_{i,2} + T_{i,1}}{\Delta y^2} = f_{0,i} \quad (\text{6})$$

La ecuación (6) se aplica para cualquier punto en la frontera inferior.

La frontera izquierda, ecuación en diferencias para un punto.

$$(1 < j < j_{max} \text{ y } i = 1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{1,j} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{1+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{1,j}}{2 \Delta x} \quad (\text{d})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{1+\frac{1}{2},j} = \frac{T_{2,j} - T_{1,j}}{\Delta x} \quad (\text{e})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{1,j} = 0 \quad (\text{Condición de frontera izquierda}) \quad (\text{f})$$

Sustituimos (e) y (f) en (d)

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{2T_{2,j} - 2T_{1,j}}{\Delta x^2} \quad (7)$$

Sustituimos (7) y (3) en (1)

$$\frac{2T_{1,j} - 2T_{2,j}}{\Delta x^2} + \frac{-T_{1,j-1} + 2T_{1,j} - T_{1,j+1}}{\Delta x^2} = f_{0,j} \quad (8)$$

La ecuación (8) se aplica para cualquier punto en la frontera izquierda.

Ecuación en diferencias para el punto de la esquina ($i = j = 1$).

Sustituimos (5) y (7) en (1)

$$\frac{2T_{1,1} - 2T_{2,1}}{\Delta x^2} + \frac{2T_{1,1} - 2T_{1,2}}{\Delta y^2} = f_{0,1} \quad (9)$$

Aplicamos las ecuaciones (4), (6), (8) y (9) para la solución de la retícula del problema. ($\Delta x = \Delta y$)

Para ($i = j = 1$)

$$4T_{1,1} - 2T_{2,1} - 2T_{1,2} = \Delta x^2 f_0 \quad (10)$$

Para ($i = 2, j = 1$)

$$-T_{1,1} + 4T_{2,1} - 2T_{2,2} = \Delta x^2 f_0 \quad (11)$$

Para ($i = 1, j = 2$)

$$-T_{1,1} + 4T_{1,2} - 2T_{2,2} = \Delta x^2 f_0 \quad (12)$$

Para $(i = 2, j = 2)$

$$-T_{2,1} - T_{1,2} + T_{2,2} = \Delta x^2 f_0 \quad (13)$$

Solución de las ecuaciones (10) , (11) , (12) , y (13)

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x^2 f_0 \\ \Delta x^2 f_0 \\ \Delta x^2 f_0 \\ \Delta x^2 f_0 \end{bmatrix}$$

Para $(f_0 = 1)$ y $(\Delta x = \Delta y = 0.5)$

TABLA 5.9

Comparación de resultados diferencias finitas solución por series

Coordenadas (i, j)	Solución aproximada T	Solución por series T
(1,1)	0.2812	0.2947
(2,1)	0.2187	0.2284
(1,2)	0.2188	0.2293
(2,2)	0.1719	0.1801*

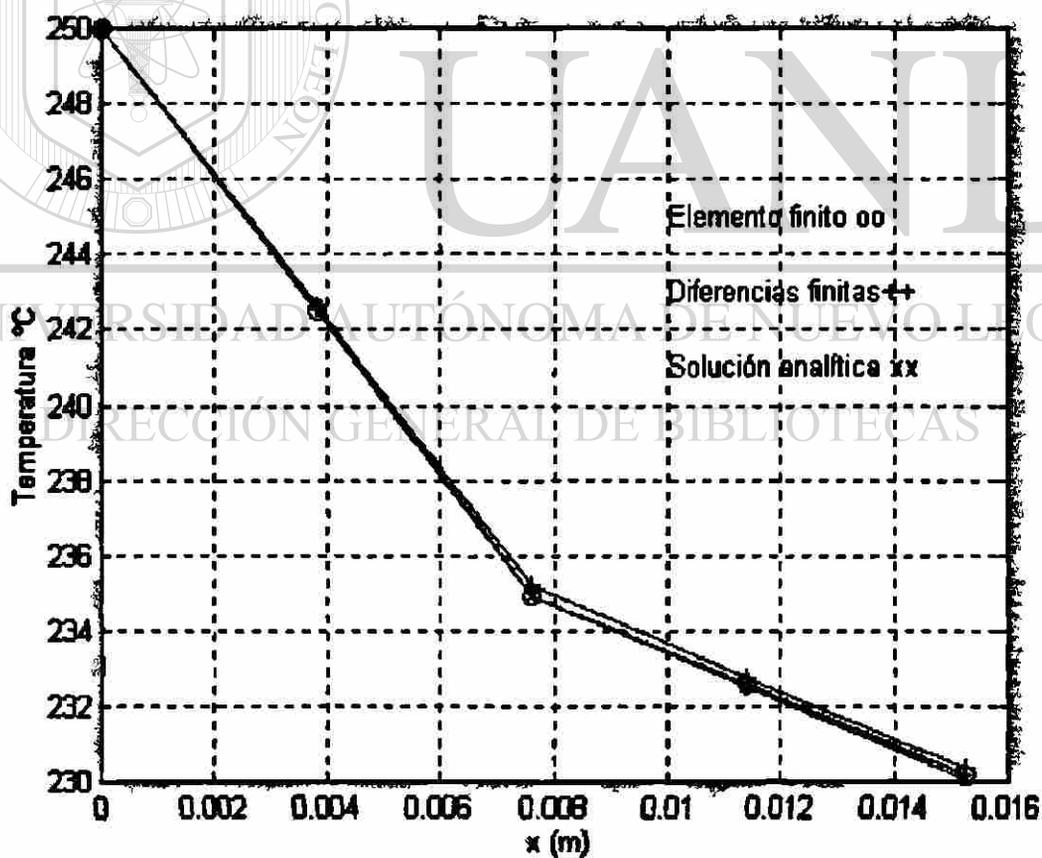
Valor interpolado *

CAPITULO 6

COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

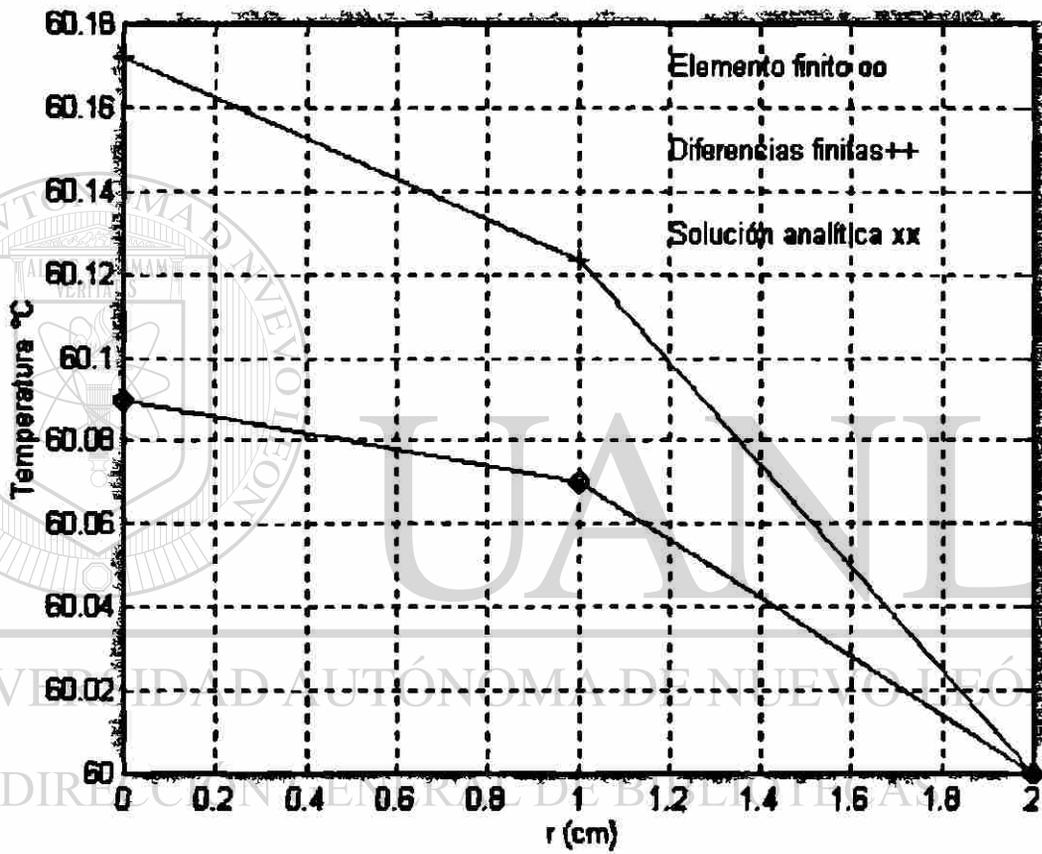
GRAFICA 6.1

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en una aleta rectangular (Ejemplo 2.1)



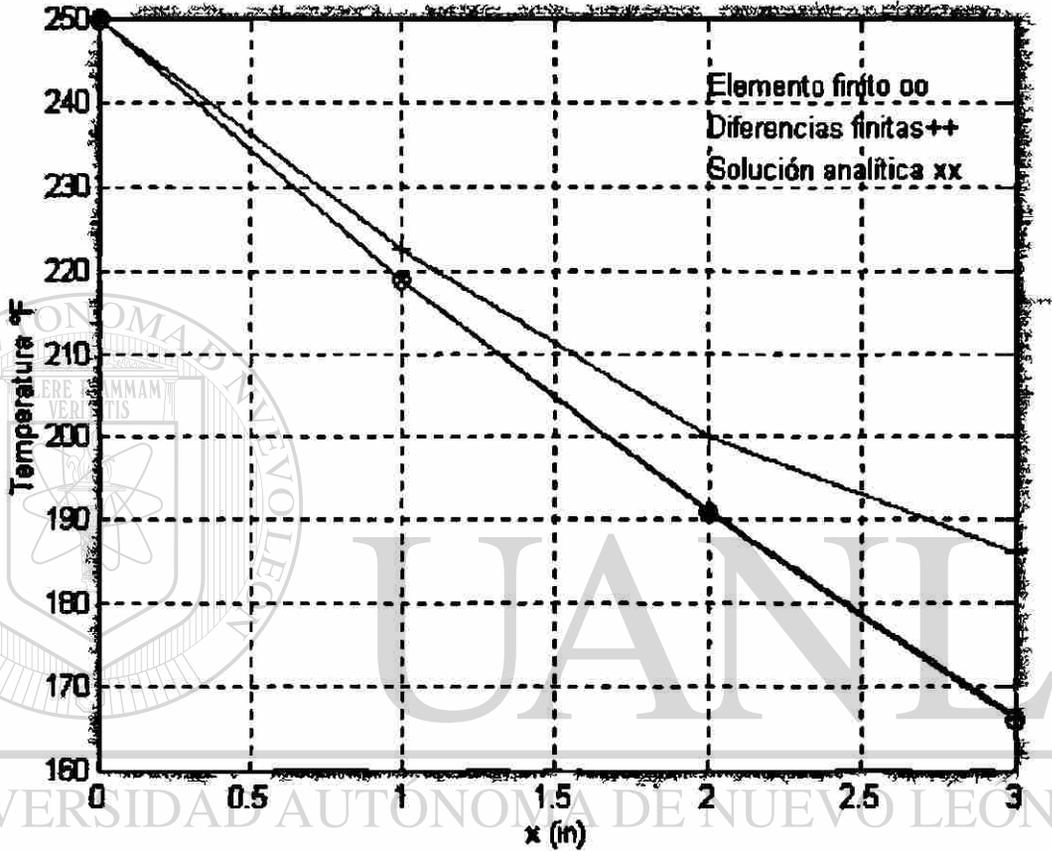
GRAFICA 6.2

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en un conductor eléctrico (Ejemplo 2.2)



GRAFICA 6.3

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en una aleta triangular (Ejemplo 2.3)

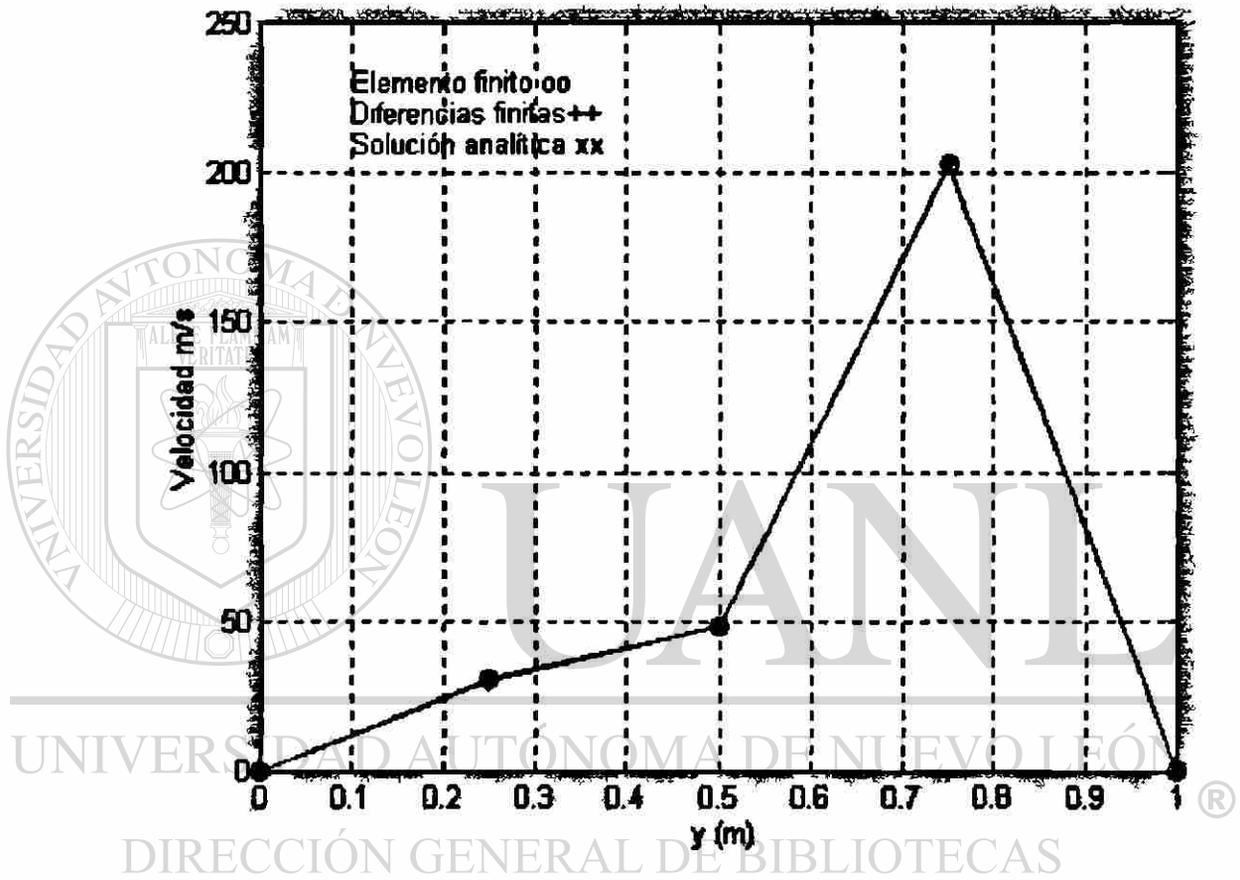


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

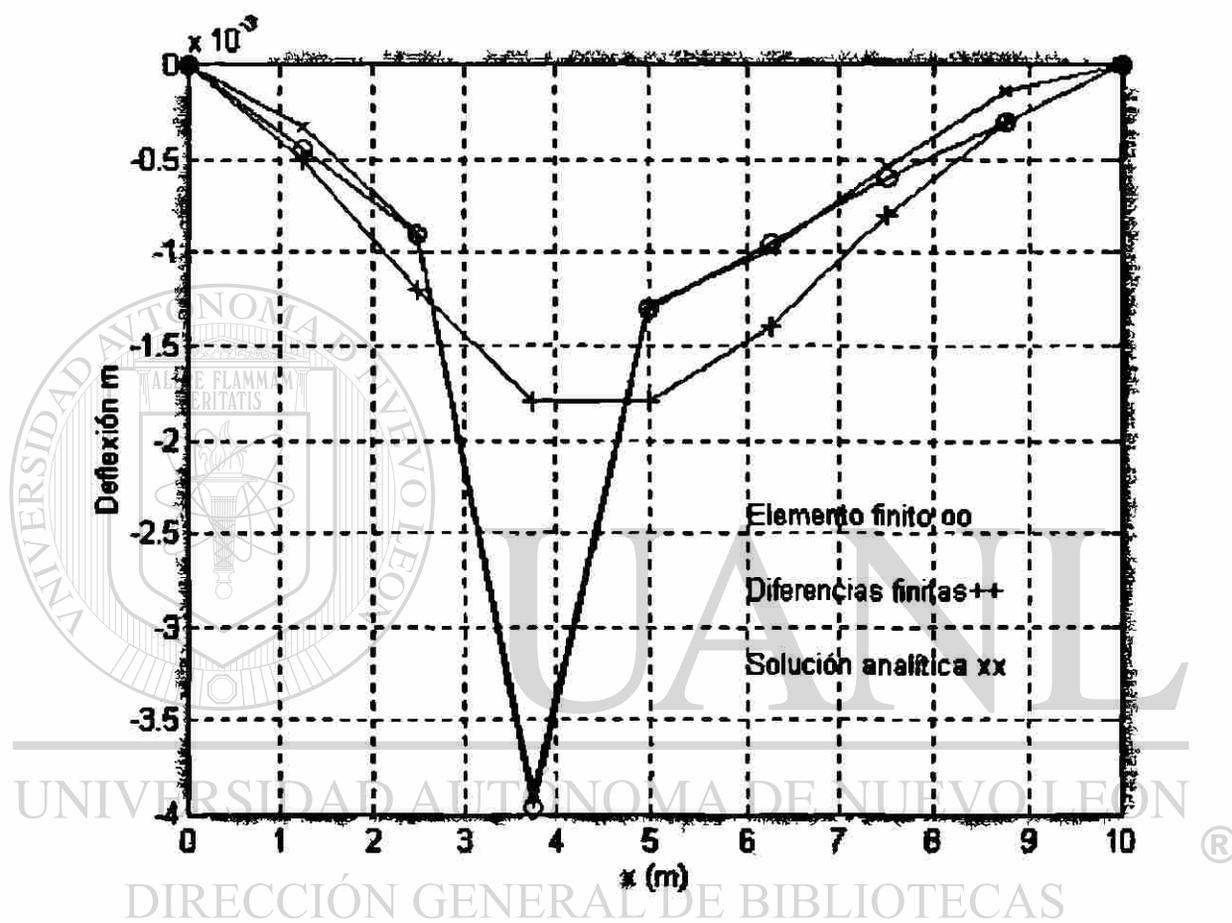
GRAFICA 6.4

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de velocidades en un fluido (Ejemplo 2.4)



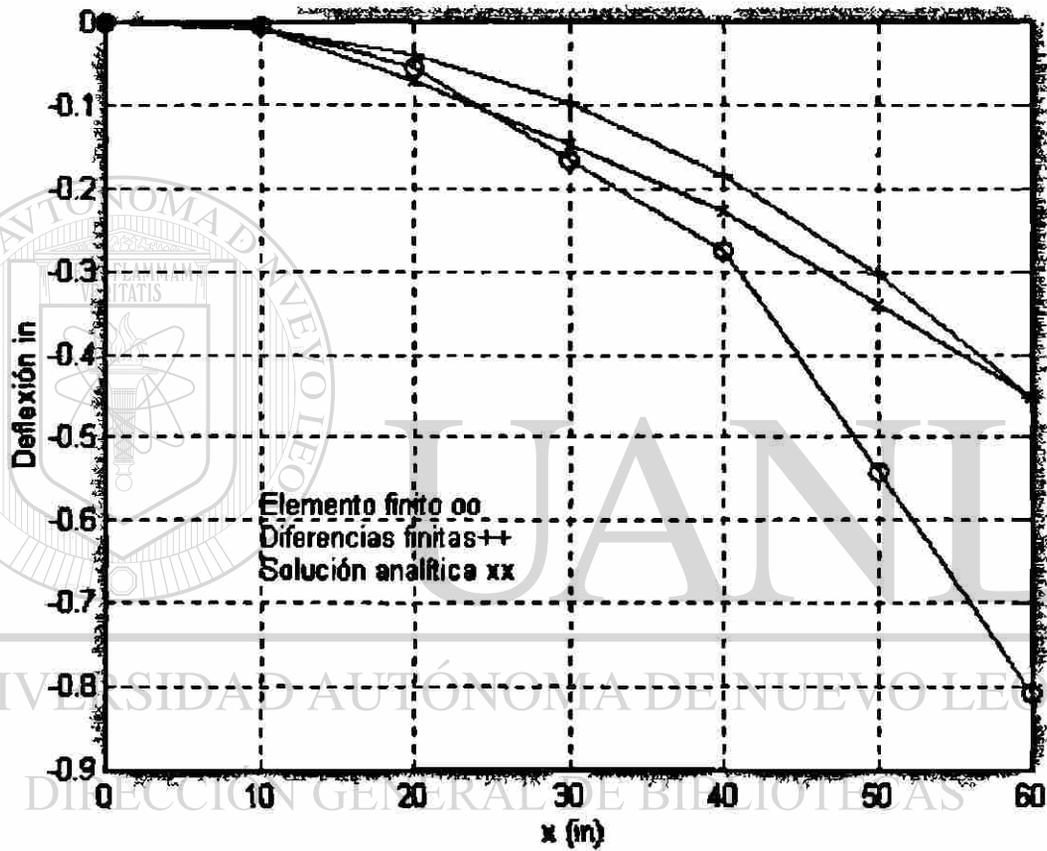
GRAFICA 6.5

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la flexión de una viga empotrada en los extremos (Ejemplo 2.5)



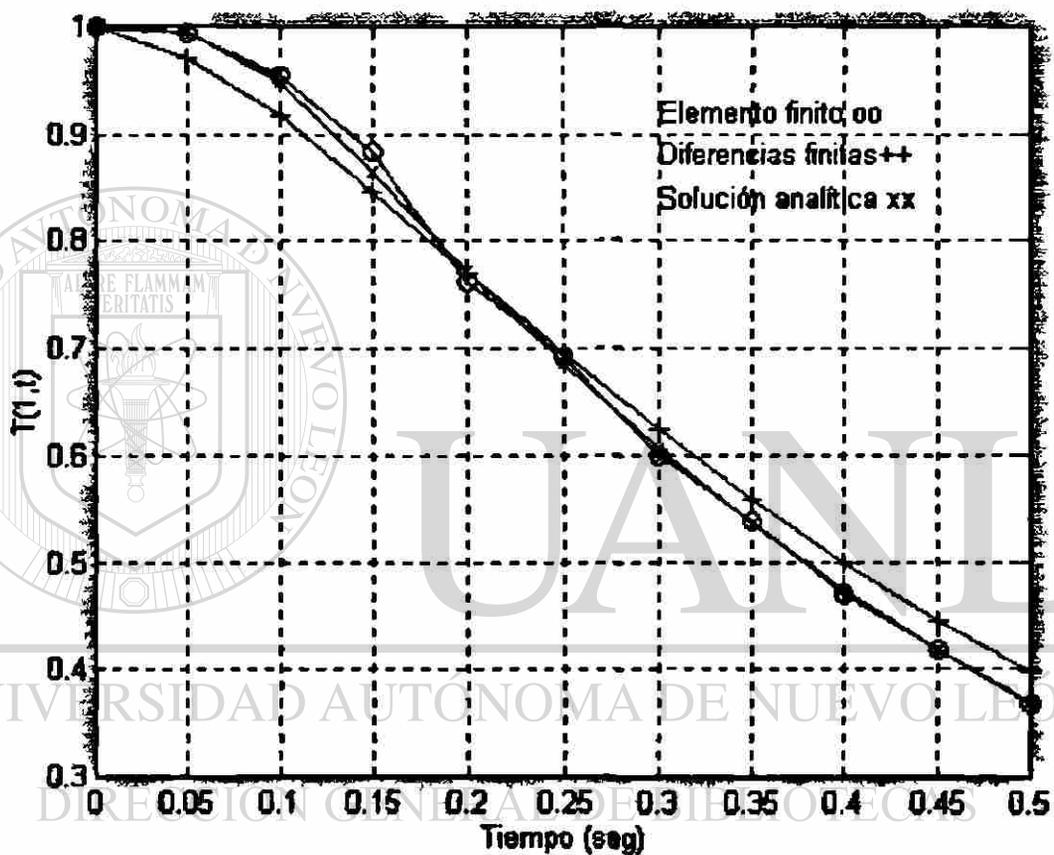
GRAFICA 6.6

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la flexión de una viga de sección variable empotrada en el extremo izquierdo y con una carga concentrada en el extremo derecho (Ejemplo 2.6)



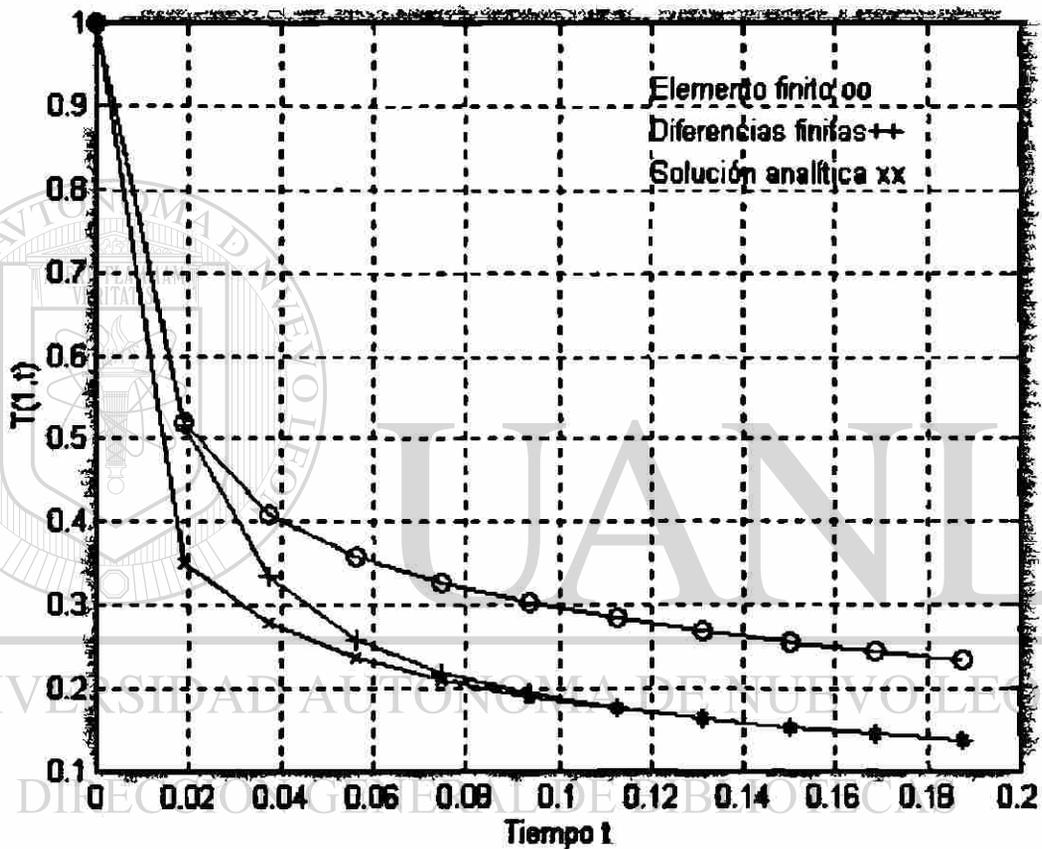
GRAFICA 6.7

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en estado transitorio en una barra aislada en un extremo. (Ejemplo 3.1)



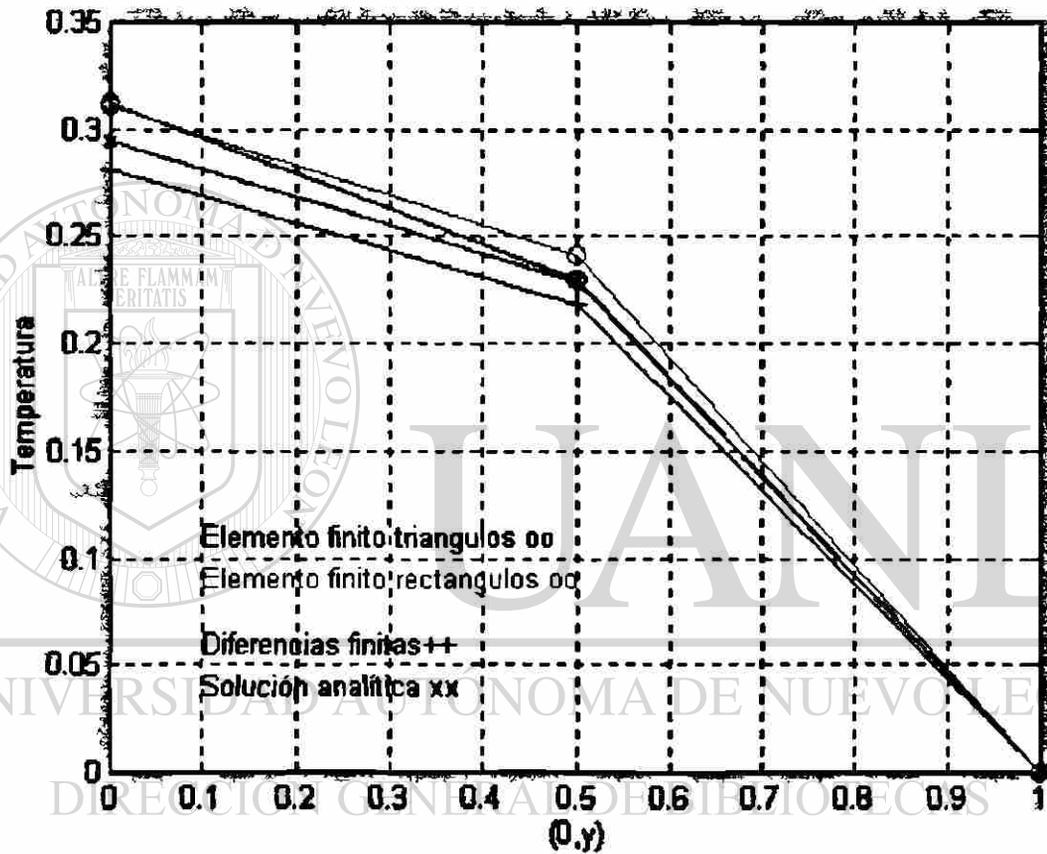
GRAFICA 6.8

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en estado transitorio en una barra aislada en el extremo izquierdo y que intercambia calor por el extremo derecho. (Ejemplo 3.2)



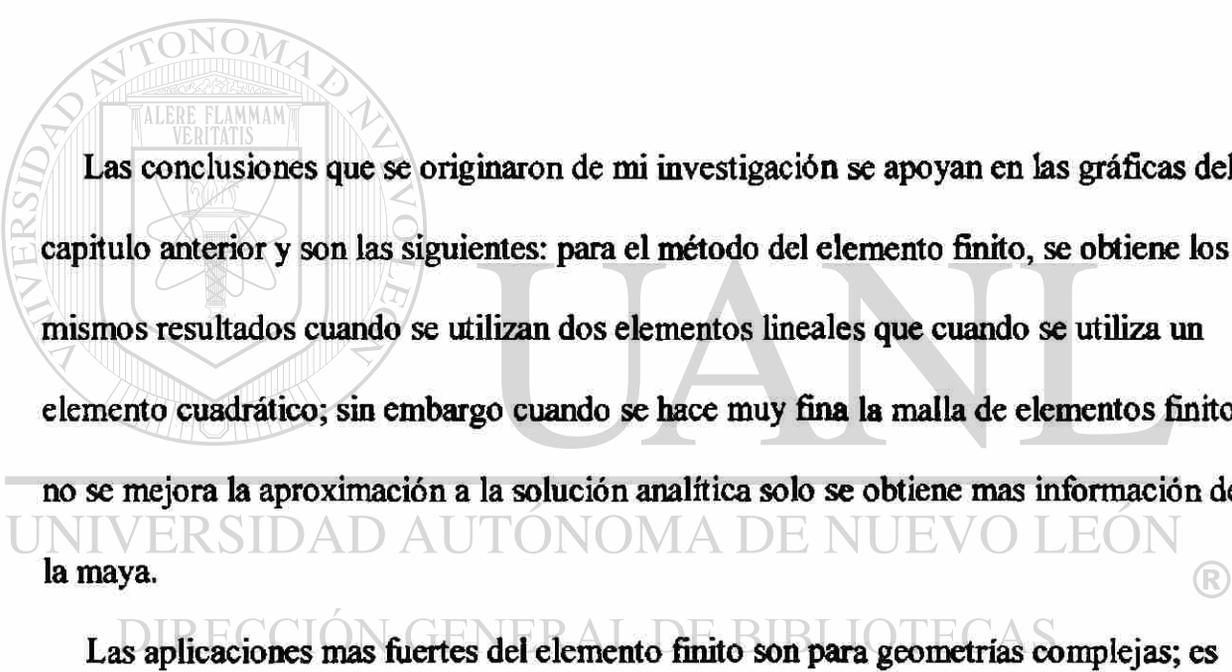
GRAFICA 6.9

Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica para la distribución de temperaturas en estado estable dos dimensiones en una placa rectangular. (Ejemplo 4.1)



CAPITULO 7

CONCLUSIONES



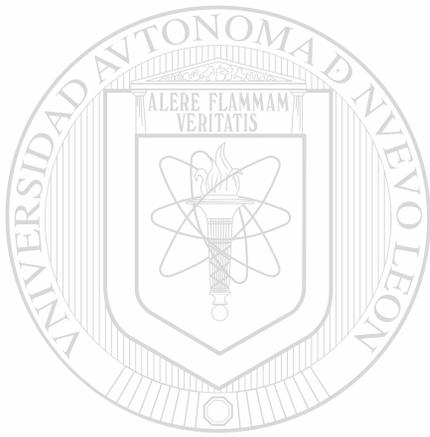
Las conclusiones que se originaron de mi investigación se apoyan en las gráficas del capítulo anterior y son las siguientes: para el método del elemento finito, se obtiene los mismos resultados cuando se utilizan dos elementos lineales que cuando se utiliza un elemento cuadrático; sin embargo cuando se hace muy fina la malla de elementos finitos

no se mejora la aproximación a la solución analítica solo se obtiene mas información de la maya.

Las aplicaciones mas fuertes del elemento finito son para geometrias complejas; es decir para todo lo que no sea cuadrado en problemas de estado estable. Lo interesante de este método es que proporciona además información de las variables secundarias del problema que pueden ser: el flujo de calor, las reacciones en vigas, los momentos etc.

Otro de los puntos importantes de mi investigación es el método de las diferencias finitas, en este punto quiero señalar las siguientes conclusiones: es muy importante que las distancias entre los puntos de la retícula sean muy pequeñas para que se tenga una mejor aproximación a la solución analítica, por otra parte quiero mencionar que no

recomiendo el método para problemas de vigas o de estructuras porque no se obtendrían las variables secundarias solo se obtendría la flexión si la geometría es sencilla; lo que me pareció muy interesante del método son: Las aplicaciones a problemas de valor inicial para problemas que tengan geometría sencillas; es decir cuadrados o rectángulos.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Bibliografías

ANALYSIS OF HEAT AND MASS TRANSFER

E.R.G. ECKERT

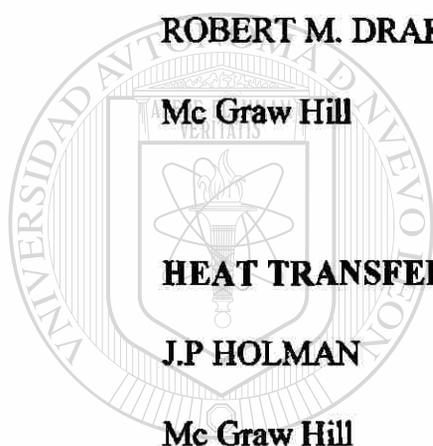
ROBERT M. DRAKE, JR.

Mc Graw Hill

HEAT TRANSFER

J.P HOLMAN

Mc Graw Hill



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

MECHANICS OF MATERIALS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FERDINAND P. BEER

E. RUSSEL JOHNSTON, JR.

Mc Graw Hill

METODOS NUMERICOS APLICADOS CON SOFTWARE

SHOICHIRO NAKAMURA

Prentice Hall

ANALISIS NUMERICO Y VISUALIZACION GRAFICA CON MATLAB**SHOICHIRO NAKAMURA****Prentice Hall****NUMERICAL METHODS, SOFTWARE, AND ANALYSIS****JOHN R. RICE****Mc Graw Hill****NUMERICAL HEAT TRANSFER****TIEN MO SHIH****Hemisphere publishing corporation****METHODS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS****DALE U. VON ROSENBERG****American Elsevier publishing company****FINITE ELEMENT METHOD****J.N. REDDY****Mc Graw Hill**

**APPLIED FUNCTIONAL ANALYSIS AND VARIATIONAL
METHODS IN ENGINEERING**

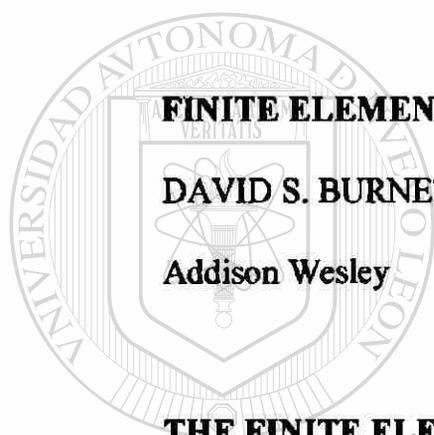
J.N. REDDY

Mc Graw Hill

APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS

LARRY J. SEGERLIND

John Wiley & Sons



FINITE ELEMENT ANALYSIS FROM CONCEPTS TO APPLICATIONS

DAVID S. BURNETT

Addison Wesley

THE FINITE ELEMENT METHOD FOR ENGINEERS

KENNETH H. HUEBNER

John Wiley & Sons

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING

S.S. RAO

Pergamon Press

LISTA DE TABLAS

TABLA 1.1	Ejemplos de ecuaciones de segundo orden en una dimensión	6
TABLA 2.1a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	36
TABLA 2.1b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	42
TABLA 2.2a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	50
TABLA 2.2b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	58
TABLA 2.3	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	69
TABLA 2.4a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	78
TABLA 2.4b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	86
TABLA 2.5a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	99 [®]
TABLA 2.5b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	100
TABLA 2.6	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	107
TABLA 2.7	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	113
TABLA 3.1a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	127
TABLA 3.1b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	131
TABLA 3.1c	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	136
TABLA 3.2a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	141
TABLA 3.1aa	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	142

TABLA 3.2b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	146
TABLA 3.2bb	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	147
TABLA 3.2c	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	152
TABLA 3.2cc	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	153
TABLA 4.1a	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	174
TABLA 4.1b	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	181
TABLA 4.1c	Comparación de resultados elemento finito solución analítica	182
TABLA 5.1	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	187
TABLA 5.2	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	190
TABLA 5.3	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	195
TABLA 5.4	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	199
TABLA 5.5a	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	202
TABLA 5.5b	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	205
TABLA 5.5c	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	208
<hr/>		
TABLA 5.6a	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	213
TABLA 5.6b	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	215
TABLA 5.6c	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	220
TABLA 5.7a	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	224
TABLA 5.7b	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	226
TABLA 5.7c	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	228
TABLA 5.8a	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	233
TABLA 5.8b	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	235
TABLA 5.8c	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	237
TABLA 5.9	Comparación de resultados diferencias finitas solución analítica	242

Lista de gráficas

Figura 1.1	Elemento finito en una dimensión.	5
Figura 1.2	Elemento lineal en una dimensión.	10
Figura 1.3	Funciones de forma lineales.	11
Figura 1.4	Funciones de interpolación en coordenadas locales.	12
Figura 1.5	Elementos cuadráticos funciones de interpolación.	13
Figura 1.6	Ensamble de dos elementos lineales.	25
Figura 2.1	Aleta rectangular.	29
Figura 2.3	Aleta triangular.	59
Figura 2.4	Fluido en una tubería.	71
Figura 2.5	Flexión de viga apoyada en el extremo.	87
Figura 2.6	Desplazamientos generalizados y fuerzas generalizadas.	88 [®]
Figura 2.7	Ensamble de dos elementos.	93
Figura 2.8	Viga empotrada en los extremos.	95
Figura 2.9	Viga empotrada de sección variable.	101
Figura 2.10	Viga simplemente apoyada con carga senoidal.	108
Figura 4.1	Discretización de un dominio por elementos triangulares y cuadriláteros.	155
Figura 4.2a.	Elemento finito en dos dimensiones.	158
Figura 4.2b.	Elemento finito en dos dimensiones.	159

Figura 4.3.	Elemento triangular lineal.	162
Figura 4.4.	Ensamble de los coeficientes de las matrices del elemento finito.	158
Figura 4.5.	Dominio rectangular para la aplicación de la ecuación de poisson.	167
Figura 4.6.	Dominio rectangular para la aplicación de la ecuación de poisson.	168
Figura 4.7.	Discretización del dominio para elementos lineales rectangulares.	175
Figura 5.1.	Dominio del problema	238
Figura 6.1.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.1)	243
Figura 6.2.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.2)	244
Figura 6.3.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.3)	245
Figura 6.4.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.4)	246
Figura 6.5.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.5)	247
Figura 6.6.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo2.6)	248
Figura 6.7.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo3.1)	249
Figura 6.8.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo3.2)	250
Figura 6.9.	Comparación de los métodos elemento finito y diferencias finitas con la solución analítica (Ejemplo4.1)	251

AUTOBIOGRAFIA

Mi nombre es Raúl Acosta Landín, nací en H. Matamoros Tamps. el 3 de octubre de 1958. Soy Ingeniero electromecánico, Egresado del Instituto Tecnológico de Matamoros Tamaulipas en el año de 1983.

En el año de 1984 al 1986 empecé y terminé los créditos de la maestría en ingeniería térmica en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Nuevo León.

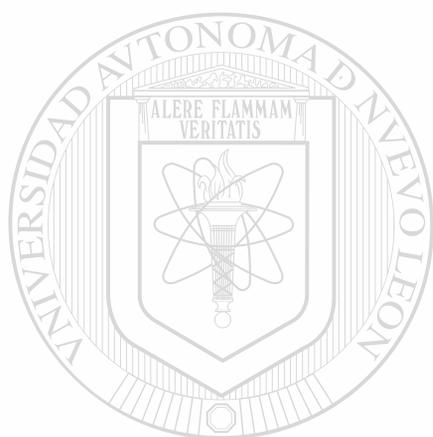
En el año de 1987 empecé a trabajar en la misma como maestro asignado al departamento de Térmica y Fluidos, en las materias de Transferencia de Calor,

Termodinámica, Mecánica de Fluidos, Refrigeración, Maquinas Hidráulicas en donde continuo a la fecha.

En el año de 1991 a 1994 paralelamente con mi trabajo de catedrático realice mis estudios de Maestría en Sistemas de información en la Facultad de Ciencias Químicas obteniendo mi grado de Maestro en Ciencias.

Actualmente soy jefe de la Academia de Termodinámica I y II.

Uno de mis objetivos concluye con esta investigación, para continuar con una de mis metas obtener el doctorado en Ingeniería.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



DONATIVO

