

SINTESIS

El contenido de esta tesis, esta principalmente enfocado al análisis de la estabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo, es decir, con coeficientes constantes.

Sabemos que para poder analizar un sistema, necesitamos primeramente representar a este mismo bajo un modelado matemático, es decir encontrar la ecuación matemática que defina al sistema, (esta tesis no se enfoca al modelado específico de sistemas). Por lo regular son ecuaciones diferenciales lineales la representación matemática del sistema. Existen ecuaciones diferenciales lineales compuestas por una entrada y una salida; en el capítulo dos se muestra este tipo de representación, normalmente llamado función de transferencia, que pertenece al tipo convencional o clásico de la teoría de control; a su vez tratamos en este capítulo con la representación en variables de estado, ya que sistemas modernos han evolucionado con el paso del tiempo, existen en la actualidad sistemas modernos muy complejos, los cuales pueden estar comprendidos de múltiples entradas y múltiples salidas, con lo que el grado de complejidad se incrementa para representar dichos sistemas matemáticamente, aunque afortunadamente existe la teoría de control moderna o el método de espacio de estado que facilita el manejo de estos tipos de sistema, cabe mencionar que es indispensable el conocimiento de álgebra lineal para el manejo del espacio de estado, se representará la matriz función de transferencia, se dará la solución general de las ecuaciones de estado, resolviendo su parte homogénea y su parte no homogénea. Se obtendrá también la matriz de transición. Por último se darán algunas definiciones de estabilidad, donde nos basaremos principalmente en la localización de la parte real de las raíces del polinomio característico para definir estabilidad, por lo que, para que un sistema sea estable, las raíces del polinomio característico deben encontrarse en el semiplano izquierdo del plano s , es decir que tengan parte real negativa, o equivalentemente, para un sistema representado en el espacio de estado, que los valores propios de la matriz de estado

tengan parte real negativa. Con esto identificamos si un sistema es o no estable, (estabilidad absoluta) podemos hacer uso del criterio de Routh-Hurwitz o de la tabla equivalente de Routh implementado por el Dr. Cesar Elizondo González para este caso, estos criterios se verán en el capítulo cuatro, así como también el método del lugar geométrico de las raíces concebido por Evans en 1950 que consiste de graficar el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema de lazo cerrado como una función de un factor de ganancia proporcional en la función de transferencia de lazo abierto, estas gráficas dan una figura clara de aproximación de las propiedades de estabilidad del sistema como una función de la ganancia.

Ya que muchas de las veces, se requiere de mas información acerca del sistema, es decir, no solo el hecho de saber si un sistema es o no estable, sino también es necesario saber que tan estable lo es; en el capítulo tres se ven métodos gráficos con los cuales podemos obtener información de que tan estable es el sistema, es decir métodos que muestren la estabilidad relativa del sistema.

El análisis y diseño en el dominio de la frecuencia ofrece varias técnicas gráficas aplicables en sistemas de control lineales e invariantes en el tiempo casi de cualquier complejidad. Es importante la correlación que existe entre el desempeño del dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia de un sistema lineal, de tal forma que las propiedades en el dominio del tiempo de un sistema se pueden predecir con base en las características en el dominio de la frecuencia. Desde un punto de vista histórico, el análisis y diseño en el dominio de la frecuencia de sistemas de control es un campo bien desarrollado. En el capítulo tres se ven algunos de los varios métodos que existen para analizar sistemas de control bajo el dominio de la frecuencia, como el criterio de Nyquist para el análisis de estabilidad, la gráfica de Nyquist de una función de transferencia, usualmente la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$, es un mapeo de la trayectoria de Nyquist en el plano s sobre el plano $G(s)H(s)$ en coordenadas polares; por lo que el diagrama de Nyquist también se conoce como gráfica polar; las estabildades absoluta y relativa de los sistemas de control de lazo cerrado se pueden obtener a partir de las gráficas de Nyquist. Los diagramas de Bode, son gráficas de la amplitud (dB) y el ángulo de fase de una función de transferencia (por lo general la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$), en funciones de la frecuencia ω . Se introducen los conceptos

claves para el análisis de estabilidad relativa como lo es el margen de ganancia y el margen de fase. La carta de Nichols y el criterio de estabilidad de Mikhilov son temas también de este capítulo.

En el capítulo cinco se verán algunas aplicaciones de estos métodos anteriormente vistos, con la finalidad de poder aplicarlos y deducir si los sistemas vistos son estables o no, y si lo son, ver que tan estables.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 Planteamiento del problema

El problema más importante en sistemas de control lineal es referido a la estabilidad. Partiendo de la definición de que un sistema de control es estable si, y solo si, todos los polos de lazo cerrado se encuentran ubicados en el semiplano izquierdo del plano s . Esta tesis aborda el problema de identificar si un sistema de control es estable o inestable, de acuerdo a la definición anterior, ya que un requisito primario en un sistema de control es que debe de ser estable, de lo contrario no sería de utilidad.

1.2 Objetivo de la tesis

El diseño de sistemas físicos puede ser analizado por métodos empíricos, pero en la actualidad los sistemas físicos son cada vez más complejos, por lo tanto, es necesario analizarlos por métodos analíticos. El estudio analítico de sistemas físicos consiste básicamente en cuatro partes: modelado del sistema, desarrollo de la ecuación matemática, análisis y diseño.

Este trabajo se basa principalmente en el método analítico el cuál puede hacerse de manera cuantitativa y/o cualitativa; en el análisis cuantitativo el interés es conocer la respuesta exacta de los sistemas debido a la aplicación de ciertas señales de entrada. El análisis cualitativo se enfoca en las propiedades generales del sistema, tales como, controlabilidad, observabilidad y estabilidad; esta parte del análisis es muy importante ya que los diseños técnicos de sistemas frecuentemente se ven envueltos de estos estudios.

El objetivo principal de esta tesis es precisamente el análisis de la estabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo de lazo cerrado por medio de algunos criterios o métodos existentes basados tanto en el dominio de la frecuencia como en el espacio de los coeficientes; a partir de las representaciones de los sistemas en entrada-salida y variables de estado; ya que este estudio es importante tanto para el análisis como para el diseño de cualquier sistema de control.

1.3 Justificación de la tesis

El concepto de estabilidad es muy general y es aplicable en cualquier ámbito; podemos referirnos al crecimiento de una planta, la fotosíntesis de la misma, o las transformaciones materiales que se efectúan constantemente en las células de cualquier organismo vivo. En cualquiera de estos procesos, existe en forma automática su estabilidad o equilibrio.

Durante años el hombre se ha visto en la necesidad de crear sistemas que cumplan ciertos tipos de procesos automáticamente con el mejor desempeño posible y eficiencia. En la actualidad existen sistemas muy complejos para los cuales es necesario hacer uso de los criterios de estabilidad establecidos, los cuales nos aportan información valiosa como: posible pérdida de estabilidad, procedimientos para estabilizar un sistema o para asignarle la dinámica que más convenga al proceso. Por lo tanto un primordial requisito de un sistema es que sea estable, si el sistema fuese inestable, es hablar de un proceso ineficiente, del cual no tenemos control del mismo, que hasta incluso puede llegar a su autodestrucción, por lo que son sistemas indeseables.

1.4 Metodología

La representación de sistemas lineales en entrada-salida y en variables de estado será nuestro punto de partida. Posteriormente se hará el análisis de la estabilidad bajo el dominio de la frecuencia utilizando métodos gráficos como el criterio de Nyquist, diagramas de Bode, carta de Nichols y el criterio de Mikhilov; y el análisis en el espacio de los coeficientes se utilizarán criterios como Routh-Hurwitz, la tabla equivalente de

Routh implementada por el Dr. Cesar Elizondo González en su tesis de estabilidad y controlabilidad robusta de sistemas lineales con incertidumbre multilineal que realizó para obtener su grado de doctor. También se verá el lugar geométrico de las raíces, realizado por Walter R. Evans en 1948 .

1.5 Límites de estudio

Las técnicas que se utilizan para el análisis de estabilidad en este trabajo son exclusivamente para sistemas lineales invariantes en el tiempo, no se consideran sistemas de tipo no lineal, en el cuál los métodos de análisis varían; aunque la relación entrada salida de muchos componentes son no lineales, normalmente esas relaciones se pueden linealizar en la vecindad de los puntos de operación, limitando el rango de las variables a valores pequeños. Tampoco se analizan sistemas lineales con coeficientes variables, es decir, variantes en el tiempo. Así como también cabe mencionar que solo se verán los casos en que la función de transferencia es de fase mínima, descartando las del tipo de fase no mínima.

1.6 Revisión bibliográfica

En vista de que el principal objetivo de esta tesis es el análisis de estabilidad, basándonos en la ubicación de las raíces del polinomio característico, hacemos uso de varios criterios de estabilidad como por ejemplo: el criterio de estabilidad de Nyquist, criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, Mikhailov, diagramas de Bode, la tabla equivalente de Routh, entre otros; para lo cual hago mención que las bibliografías aquí presentadas cumplen perfectamente con los criterios aquí descritos.

Este trabajo analiza varias bibliografías de control moderno y clásico de apoyo de autores muy experimentados en el área de control; en los cuales en caso de querer extender los diferentes métodos de análisis de estabilidad empleados, aunado con información adicional referente a esta área, el lector puede profundizar haciendo uso de ellas.

CAPITULO 2

REPRESENTACION DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

2.1 Introducción

El primer paso en el estudio analítico de un sistema de control es el modelado matemático de los procesos controlados, es decir, encontrar la ecuación matemática que describa al sistema. En general, dado un proceso de control, primero se debe definir el conjunto de variables que describan las características dinámicas de dicho proceso. Se pueden encontrar diferentes ecuaciones matemáticas que describan el mismo sistema debido a los diferentes métodos analíticos usados o debido a los diferentes tipos de preguntas realizadas para describir el sistema. De una manera general podemos decir que los sistemas pueden ser *lineales* o *no lineales*, esta tesis solamente estará enfocada a los sistemas lineales. Dentro de los sistemas lineales encontramos sistemas cuyo modelo matemático es un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, como se muestra en la ecuación 2.1 la cual puede tener coeficientes constantes o coeficientes variables con el tiempo, esta última no se considerará en esta tesis. La ecuación 2.1 muestra dos variables en función del tiempo: en donde y es la variable de salida del sistema, u es la variable de entrada del mismo, m y n son enteros positivos, a y b son coeficientes constantes;. Esta ecuación esta compuesta por una entrada-una salida (SISO); sistemas de este tipo pueden ser analizados por el método convencional de control. En la actualidad existen sistemas modernos muy complejos, los cuales pueden estar basados en múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), con lo que el grado de dificultad de su expresión matemática aumenta también. El control moderno o el método en el espacio de estado facilita el análisis de estos tipos de sistemas.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (2.1)$$

2.2 Representación en Entrada-Salida

Para sistemas lineales invariantes en el tiempo con una entrada-una salida la representación clásica es utilizando la *función de transferencia*, la cual resulta ser la expresión matemática que contiene la información básica sobre las características esenciales del sistema; con esto nos referimos a los valores de los parámetros que intervienen en el sistema, así como de su interconexión; ambas son responsables del comportamiento del sistema.

Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se puede estudiar la salida o respuesta para diversas formas de entradas con el objetivo de lograr una comprensión de la naturaleza del sistema; por lo contrario, si se desconoce, se puede hallar experimentalmente suministrando entradas conocidas y observando la respuesta o salida del sistema.

La representación de un sistema en entrada-salida nos da una relación matemática entre la entrada y la salida del sistema. Con el objetivo de desarrollar esta descripción, el conocimiento de la estructura interna de un sistema puede ser considerado inválido; el único acceso al sistema es por medio de las terminales de entrada y las terminales de salida. Bajo esta consideración, se puede representar el sistema como una caja negra. Lo que podemos hacer a la caja negra es solo aplicar todo tipo de entradas y medir sus salidas correspondientes, y entonces tratar de extraer propiedades claves del sistema proveniente de los pares entrada-salida.

Para esto debemos asumir que el sistema se encuentre en reposo antes que la entrada sea aplicada y que la salida sea excitada solamente por esa entrada aplicada. Si el concepto de energía es aplicable al sistema, se dice que el sistema se encuentra en reposo en tiempo t , si ninguna energía es suministrada en el sistema en ese instante.

2.2.1 Función de transferencia

La relación de la señal de salida entre la señal de entrada, en transformada de Laplace, con las condiciones iniciales nulas es la definición [19] de la *función de transferencia*, ecuación (2.2).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.2)$$

Donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(t)$ (salida) y $U(s)$ es la transformada de Laplace de $u(t)$ (entrada). Esto es, para obtener la función de transferencia del sistema lineal que está representado por la ecuación (2.1), simplemente se toma la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación y se suponen condiciones iniciales cero; obteniendo como resultado:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)U(s) \quad (2.3)$$

de donde:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (2.4)$$

Los términos en s del numerador significan derivaciones que se efectúan sobre la señal de entrada, en tanto que los términos en s del denominador significan integraciones. De la ecuación (2.4), se dice que la función de transferencia es *estrictamente propia* si $m < n$, es decir, que habrá un menor número de derivaciones que de integraciones sobre la señal de entrada para generar la señal de salida, como resultado suaviza las variaciones que presenta una determinada señal. Si $n = m$, la función de transferencia se conoce como *propia*. Se le llama *impropia* a la función de transferencia si $m > n$.

De la ecuación (2.4), se puede definir la ecuación característica de ese sistema lineal si se iguala a cero el polinomio denominador de la función de transferencia [12], tenemos entonces:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.5)$$

2.3 Representación en Variables de estado

Una ecuación diferencial de n -ésimo orden (2.1) se puede descomponer en n ecuaciones diferenciales de primer orden (2.7).

Se propone una variable nueva para la ecuación 2.1:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\ x_3(t) &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Después de derivar y de hacer sustituciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= x_4(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-2} x_{n-1}(t) - a_{n-1} x_n(t) + f(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

La última ecuación de (2.7) se obtiene de despejar el término de la derivada de mayor orden en la ecuación 2.1, la función $f(t)$ representa el segundo miembro de la ecuación (2.1) o la variable de entrada del sistema. El conjunto de las ecuaciones diferenciales de primer orden de (2.7) se conoce como *ecuaciones de estado* y el conjunto de ecuaciones del primer miembro de 2.6 se conoce como *variables de estado* o también son llamadas *variables de fase* [3].

Las variables de estado de un sistema se definen como un conjunto mínimo de variables $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, de cuyo conocimiento en cualquier tiempo $t = t_0$, y del conocimiento de la información de la entrada de excitación que se aplica subsecuentemente ($t \geq t_0$), son suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Un conjunto de variables de estado (x_i) no es única para determinado sistema, ésta depende de cómo se definan estas variables, se pueden tomar otro conjunto de funciones como variables de estado (x_i).

La salida se puede expresar como una combinación algebraica de las variables de estado y de la entrada.

La representación en variables de estado es expresar en forma matricial las ecuaciones de estado y la ecuación de salida; esto es:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.8)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.9)$$

Donde la ecuación (2.8) es la ecuación de estado del sistema lineal invariante en el tiempo y la ecuación (2.9) es la ecuación de salida para el mismo sistema; donde A se denomina matriz de estado de $(n \times n)$, B matriz de entrada de $(n \times m)$, C matriz de salida de $(p \times n)$, D matriz de transmisión directa de $(p \times m)$, $x(t)$ es el vector de estado de $(n \times 1)$, $u(t)$ es el vector de entradas de $(m \times 1)$ y $y(t)$ es el vector de salidas de $(p \times 1)$; m es el número de entradas y p el número de salidas. Los elementos de las cuatro matrices pueden ser elementos variantes en el tiempo o elementos invariantes en el tiempo (coeficientes constantes), este último es en el que se enfoca esta tesis.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (n * n) \quad (2.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad (n * p) \quad (2.11)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \quad (q * n) \quad (2.12)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \quad (q * p) \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) se pueden representar en un diagrama de bloques, como el que se muestra en la figura 2.1. Las líneas gruesas indican que las señales son vectores, y el símbolo integrador realmente indica n integradores escalares.

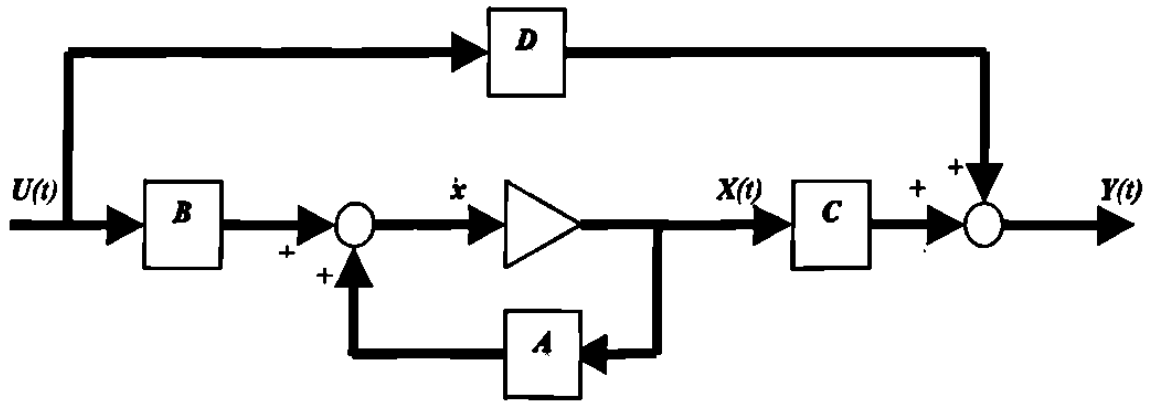


Figura 2.1

Es de utilidad saber como escribir las ecuaciones de estado directamente a partir de una ecuación diferencial de orden superior o de una función de transferencia, por lo tanto, la ecuación (2.8) se puede utilizar para representar las n ecuaciones de estado de la ecuación (2.7), y los elementos matriciales quedan representados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

De donde las ecuaciones de (2.14) se le conocen como la *forma canónica en variables de fase* (FCVF), o la *forma canónica controlable* (FCC).

2.3.1 Matriz función de transferencia

Se han presentado los métodos para modelar un sistema lineal e invariante con el tiempo mediante funciones de transferencia y ecuaciones de estado.

La función de transferencia de un sistema lineal con una entrada y una salida (2.4) se define en términos de los coeficientes de la ecuación diferencial del sistema.

Para obtener la *matriz función de transferencia* se hace uso de la transformada de Laplace, ya que partimos de ecuaciones dinámicas lineales invariantes en el tiempo. Entonces, asumiendo que $x(0) = x_0$ y aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones de estado (2.8) y (2.9); obtenemos:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \quad (2.15)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2.16)$$

Resolviendo para $X(s)$ se tiene:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (2.17)$$

Sustituyendo la ecuación (2.17) en la ecuación (2.16) obtenemos:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \quad (2.18)$$

Ya que la definición de la función de transferencia requiere que las condiciones iniciales sean puestas a cero $x(0) = 0$, esto es que el sistema este en reposo en $t = 0$. Entonces la ecuación (2.18) se reduce a:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] U(s) \quad (2.19)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.20)$$

Donde $G(s)$ es la *matriz función de transferencia*, se puede también escribir de la siguiente forma [4]:

$$G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} C[Adj(sI - A)]B + D \quad (2.21)$$

2.3.2 Solución de las ecuaciones de estado

Procederemos a resolver las ecuaciones (2.8) y (2.9); empezaremos resolviendo la ecuación homogénea de (2.8), la cual es obtenida al igualar a cero la entrada ($u(t) = 0$), esto es, $\dot{x} = Ax$. Donde x es un vector de n elementos y A es una matriz constante de $n \times n$ elementos, como ya habíamos mencionado anteriormente. Después encontraremos una solución particular de la ecuación no homogénea, y sumando esta a la vez con la solución homogénea encontramos la solución general.

▪ Ecuación Homogénea:

Consideremos el sistema homogéneo de orden n th:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2.22)$$

Podemos suponer que hemos encontrado n soluciones linealmente independientes, x_1, x_2, \dots, x_n . Las ecuaciones diferenciales correspondientes son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.23)$$

Integrando la ecuación (2.23), tenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_1(0) &= \int_0^t (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) d\tau \\ x_2(t) - x_2(0) &= \int_0^t (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) d\tau \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(t) - x_n(0) &= \int_0^t (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) d\tau \end{aligned} \quad (2.24)$$

La matriz correspondiente es:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t Ax(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

Reemplazando t por τ :

$$x(\tau) = x(0) + \int_0^\tau Ax(\tau) d\tau \quad (2.26)$$

y sustituyendo (2.26) en (2.25), tenemos:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \left[x(0) + \int_0^\tau Ax(\tau) d\tau \right] d\tau \quad (2.27)$$

$$x(t) = x(0) + x(0) \int_0^t A d\tau + \int_0^t A \int_0^\tau Ax(\tau) d\tau d\tau \quad (2.28)$$

Continuando con este proceso:

$$x(t) = x(0) \left[I + \int_0^t A d\tau + \int_0^t A \int_0^\tau A d\tau d\tau + \int_0^t A \int_0^\tau A \int_0^\tau A d\tau d\tau d\tau + \dots \right] \quad (2.29)$$

El resultado de cada integración es:

$$\int_0^\tau A d\tau = A\tau \quad (2.30)$$

$$\int_0^t A \int_0^\tau A d\tau d\tau = \int_0^t A [A\tau] d\tau = \frac{A^2 t^2}{2!} \quad (2.31)$$

$$\int_0^t A \int_0^\tau A \int_0^\tau A d\tau d\tau d\tau = \int_0^t A \frac{A^2 t^2}{2!} d\tau = \frac{A^3 t^3}{3!} \quad (2.32)$$

Por esto la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales representado por la ecuación homogénea (2.22) o (2.23) es:

$$x(t) = \left[I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \right] x(0) \quad (2.33)$$

$$x(t) = e^{At} x(0) \quad (2.34)$$

$$x(t) = \phi(t)x(0) \quad (2.35)$$

Donde:

$$\phi(t) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \quad (2.36)$$

$$\phi(t) = e^{At} \quad (2.37)$$

Se conoce a $\phi(t)$ como la Matriz de transición de estado [18]. La matriz de transición de estado opera en el estado inicial del sistema $x(0)$ para producir el estado del sistema $x(t)$ en cualquier tiempo t .

Podemos también resolver la ecuación de estado homogénea utilizando el método de la transformada de Laplace.

- Ecuación no homogénea:

La solución de la ecuación de estado no homogénea (2.38), la obtendremos por el método de la transformada de Laplace.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.38)$$

Esto es, la transformada de Laplace de (2.38) es:

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \quad (2.39)$$

o bien:

$$(sI - A)X(s) = X(0) + BU(s) \quad (2.40)$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por $(sI - A)^{-1}$ se obtiene:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0) + (sI - A)^{-1} BU(s) \quad (2.41)$$

Expresándolo en transformada de Laplace, tenemos:

$$X(s) = \mathfrak{L}\left[e^{At}\right] X(0) + \mathfrak{L}\left[e^{At}\right] BU(s) \quad (2.42)$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (2.42) se puede obtener mediante la integral de convolución como sigue:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.43)$$

Esta ecuación (2.43) es útil solamente cuando el tiempo inicial se define en $t = 0$. En el estudio de sistemas de control, casi siempre se desea descomponer un proceso de transición de estado en una secuencia de transiciones, de tal forma que se pueda escoger un tiempo inicial más flexible. Suponga que el tiempo inicial esta representado por t_0 , que el estado inicial correspondiente es $x(t_0)$ y suponga que la entrada $u(t)$ se aplica en $t \geq 0$.

Entonces la solución de la ecuación (2.43) se modifica a:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.44)$$

Notamos que este procedimiento ha producido ambas soluciones en una sola ecuación: La solución homogénea o complementaria y la solución particular [10].

Donde el primer término del segundo miembro (lado derecho) de la ecuación (2.44) es la solución a la ecuación de estado homogénea y el segundo término del lado derecho de la misma ecuación, es decir el término con la integral es la solución particular para el caso no homogéneo.

2.3.3 Matriz de transición

Una vez que las ecuaciones de estado de un sistema lineal invariante con el tiempo se encuentran expresadas en la forma de la ecuación (2.8), se procede a resolver estas ecuaciones, dado el vector de estado inicial $x(t_0)$, y el vector de entrada $u(t)$, para $t \geq 0$.

La matriz de transición de estado relaciona el estado de un sistema en $t = t_0$ con su estado en algún tiempo subsecuente t , cuando la entrada es $u = 0$.

Por lo tanto la matriz de transición se define como una matriz que satisface la ecuación de estado lineal homogénea:

$$\dot{x} = Ax \quad (2.45)$$

Podemos escribir:

$$x(t) = \phi(t)x(0) \quad (2.46)$$

Donde $\phi(t)$ es la matriz de transición de estado, la cual es una matriz cuadrada de $n \times n$ y es la solución de:

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t) \quad (2.47)$$

Una forma de poder determinar $\phi(t)$ es utilizando la transformada de Laplace en la ecuación (2.45), obteniendo:

$$sX(s) - X(0) = AX(s) \quad (2.48)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0) \quad (2.49)$$

donde la matriz $(sI - A)$ es no singular; ahora tomando la transformada inversa de Laplace en la ecuación (2.49), obtenemos:

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right] x(0) \quad t \geq 0 \quad (2.50)$$

donde:

$$e^{At} = \mathfrak{F}^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right] \quad (2.51)$$

Comparamos la ecuación (2.46) con la ecuación (2.50), la matriz de transición de estado se representa como:

$$\phi(t) = \mathfrak{F}^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right] \quad (2.52)$$

A continuación se muestran las propiedades de la matriz de transición [20]:

$$\blacksquare \phi(t, t) = \psi(t) \psi(t)^{-1} = I \quad (2.53)$$

$$\blacksquare \phi^{-1}(t) = e^{-At} = \phi(-t) \quad (2.54)$$

$$\blacksquare \phi(t_2 - t_0) = \phi(t_2 - t_1) \phi(t_1 - t_0) \quad (2.55)$$

$$\blacksquare \phi(t + \tau) = e^{A(t + \tau)} = e^{At} e^{A\tau} = \phi(t) \phi(\tau) \quad (2.56)$$

$$\blacksquare [\phi(t)]^n = \phi(nt) \quad (2.57)$$

2.4 Estabilidad

Sistema estable es aquel que, cuando es perturbado desde un estado de equilibrio tendera a regresar a ese estado de equilibrio. Por otro lado, un sistema inestable es aquel que, cuando es perturbado desde su equilibrio se desvía, alejándose cada vez mas (Sistemas Lineales) o posiblemente moviéndose hacia un estado de equilibrio diferente (Sistemas No-Lineales).

Estabilidad es la habilidad de la respuesta de un sistema de mantenerse acotada (permanezca dentro de límites) cuando es sometida a entradas acotadas. Se concluye que las raíces del denominador de la función de transferencia de un proceso determina la estabilidad de su respuesta a señales de entrada.

Podemos resumir lo anterior con la siguiente condición de estabilidad para sistemas lineales [21]:

Un sistema es estable si todas las raíces del denominador de su función de transferencia son cualquiera de los dos, números reales negativos o números complejos con parte real negativa.

Todos los sistemas dinámicos utilizables son necesariamente estables; ya sea que, son inherentemente estables o han sido hechos estables por la intención misma del diseño.

La estabilidad ocupa una posición clave en la teoría de control por la razón de que el límite superior del funcionamiento de un sistema de control retroalimentado es frecuentemente establecido por las consideraciones de estabilidad. Es posible checar si un sistema es estable o no por la examinación del comportamiento con respecto al tiempo, siguiendo una perturbación inicial. Para establecer si un sistema es estable o no, no necesitamos conocer la solución, solamente conociendo si después de la perturbación la solución decrece o aumenta.

Note que, para un sistema lineal [14], las respuestas a perturbaciones iniciales de diferentes magnitudes son idénticas excepto por un factor escalar. Esto es, sea x_0 la perturbación inicial y $x(t)$ la respuesta resultante; entonces la respuesta a una perturbación kx_0 será $kx(t)$. Por lo tanto si un sistema es estable en respuesta a una magnitud de perturbación, será estable en respuesta a todas las otras magnitudes.

La estabilidad de un sistema lineal se puede obtener tanto de su representación entrada-salida como en su representación en variables de estado.

Un sistema es estable [12] de entrada-acotada/salida-acotada (Bounded-Input/Bounded-Output, BIBO) o simplemente estable, si su salida $y(t)$ es acotada para una entrada $u(t)$ acotada.

De los estudios de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de sistemas SISO, sabemos que la solución homogénea que corresponde a la respuesta transitoria del sistema está gobernada por las raíces de la ecuación característica.

En la representación entrada-salida, el denominador de la función de transferencia ecuación (2.4) se le denomina polinomio característico o ecuación característica, o el determinante de $(sI - A)$ de la matriz de transferencia se le conoce también como polinomio característico:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.58)$$

Las raíces de este polinomio son equivalentes a los valores propios λ_i de la matriz A en la representación de variables de estado (2.8)

Como la respuesta impulso de un sistema continuo lineal invariable en el tiempo es una suma de funciones exponenciales en el tiempo, cuyos exponentes son las raíces de la ecuación característica del sistema. Una condición necesaria y suficiente [6] para que el sistema sea estable es que las partes reales de las raíces de la ecuación característica sean negativas o equivalentemente; los valores propios de la matriz A, tengan parte real negativa, esto es, que se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s. Como se muestra en la Figura 2.2.

Existen muchas definiciones de estabilidad; nosotros nos enfocaremos a la localización de los polos de la ecuación característica.

Ahora bien, saber si un sistema es o no absolutamente estable es una información insuficiente para la mayor parte de los propósitos. Si un sistema es estable, usualmente queremos saber que tan estable es o que tan cerca está de ser inestable; para esto necesitamos determinar su *estabilidad relativa*. La *estabilidad absoluta* solo nos da la información de que si un sistema es estable o no lo es.

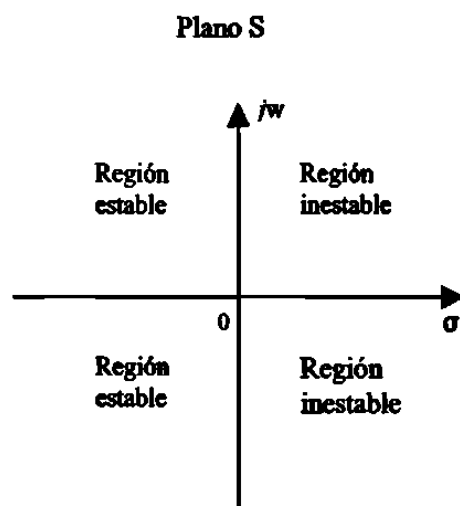


Figura 2.2

Existen varios métodos de análisis para conocer la *estabilidad relativa* de un sistema lineal; estos se verán en los capítulos posteriores.

CAPITULO 3

ANALISIS DE ESTABILIDAD EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

3.1 INTRODUCCION

Se entiende por el término respuesta a la frecuencia, la respuesta en estado estacionario de un sistema a una entrada senoidal. En los métodos de respuesta a al frecuencia, sé varia la frecuencia de una señal de entrada sobre un cierto rango y se estudia la respuesta resultante.

Frecuentemente se utilizan métodos de respuesta en frecuencia para diseñar sistemas de control industrial. En la practica el desempeño de la mayoría de sistemas de control se mide más real bajo sus características en el dominio del tiempo, juzgando su comportamiento en base en la respuesta del tiempo debido a varias señales de entrada de prueba. Debido a que la respuesta en el tiempo de un sistema de control es normalmente más difícil de determinar analíticamente; se hace entonces uso de los métodos gráficos que existen para analizar la respuesta en el dominio de la frecuencia, analizando el comportamiento de la salida del sistema a diferentes señales de entrada dentro de los rangos de interés (frecuencias). (El análisis en el dominio del tiempo no se verá en esta tesis).

Existe una correlación entre el desempeño en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia de un sistema lineal, debido a que las propiedades en el dominio del tiempo de un sistema se pueden predecir por medio de las características en el dominio de la frecuencia.

Es necesario expresar el comportamiento de un sistema en términos de su respuesta en frecuencia, ya que factores como el ruido se presentan en cualquier sistema, y este método permite evaluarlo. También puede utilizarse en situaciones donde algunos o todos los componentes de la función de transferencia de un sistema son desconocidos. La respuesta en frecuencia puede ser determinada experimentalmente y una expresión aproximada para la función de transferencia puede obtenerse a partir de las gráficas de los datos experimentales. El método de la respuesta en frecuencia es un método poderoso también para el análisis y diseño de sistemas robustos multivariantes (MIMO) con incertidumbre paramétrica de la planta.

Este método permite hacer una determinación aproximada de la respuesta del sistema a través de la interpretación gráfica en el dominio de la frecuencia.

Para visualizar esta ventaja, supongamos que se ha determinado la respuesta en frecuencia de un sistema cualquiera, la respuesta en el tiempo puede determinarse utilizando la correspondiente transformada inversa de Fourier. El comportamiento en el dominio de la frecuencia para una función de entrada dada $x(t)$ se determina por la transformada de Fourier:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.1)$$

Para un sistema de control la respuesta en frecuencia de la variable controlada es:

$$Y(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} X(j\omega) \quad (3.2)$$

Usando la transformada inversa de Fourier la variable controlada como función del tiempo es:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3)$$

En muchas ocasiones esta ecuación (3.3) no puede ser evaluada por tablas de referencia de integrales definidas, pero puede evaluarse por integración numérica o gráfica; esto se hace necesario si $Y(j\omega)$ es válida solamente como una curva y no puede ser expresada en forma analítica, que resulta ser el mayor de los casos.

3.2 Respuesta a la frecuencia

Básicamente pertenecen a dos categorías las gráficas en el dominio de la frecuencia que son de gran utilidad para el análisis y diseño gráfico de sistemas de control con retroalimentación. La primera categoría, es la gráfica de la magnitud de la razón de la salida con la entrada contra la frecuencia, en coordenadas rectangulares. En coordenadas logarítmicas estas son conocidas como gráficas de Bode. Asociado con esta gráfica, esta una segunda gráfica correspondiente al ángulo de fase contra la frecuencia. En la segunda Categoría, la razón de la salida con la entrada debe graficarse en coordenadas polares con la frecuencia como parámetro. Las gráficas polares son generalmente usadas para respuesta de lazo abierto y son normalmente referidas como gráficas de Nyquist.

Estas gráficas pueden obtenerse con la ayuda de software, como por ejemplo: Matlab, que es una herramienta de gran utilidad para el análisis y diseño de sistemas de control, al igual que el programa CC. Nos apoyaremos para la realización de las gráficas en estas herramientas; aunque cuando no se tiene disponibilidad a estas herramientas, las gráficas de Bode se obtienen fácilmente por un procedimiento gráfico, las otras gráficas pueden ser obtenidas a partir de las gráficas de Bode.

El punto de comienzo para el análisis en el dominio de la frecuencia de un sistema lineal es su función de transferencia. Para una señal de entrada senoidal, la entrada y la salida en estado estacionario son de la siguiente forma:

$$x(t) = X \sin \alpha t \quad (3.4)$$

$$y(t) = Y \sin (\alpha t + \alpha) \quad (3.5)$$

La respuesta a la frecuencia de lazo cerrado esta dado por:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} = M(\omega) \angle \alpha(\omega) \quad (3.6)$$

Para cada valor de frecuencia en la ecuación (3.6), se produce una cantidad fasorial, cuya magnitud es M , y ángulo de fase α es el ángulo entre $Y(j\omega)$ y $X(j\omega)$.

Un sistema ideal puede ser definido como aquel donde $\alpha = 0^\circ$ y $X(j\omega) = Y(j\omega)$ para $0 < \omega < \infty$. Sin embargo esto implica una transferencia de energía instantánea desde la entrada hacia la salida. Ya que en la práctica una transferencia de un sistema físico no puede llevarse a cabo sin la disipación de algo de energía y de elementos que almacenen algo de energía. La figura 3.1 muestra las características de respuesta a la frecuencia de la función de transferencia de la ecuación (3.6) en coordenadas rectangulares: un sistema ideal (curva 1) y la respuesta en la frecuencia de sistemas de control prácticos (curva 2 y 3).

El ancho de banda de la respuesta a la frecuencia está definida como el rango de frecuencias desde 0 hasta la frecuencia ω_b , donde $M = 0.707$ del valor en $\omega = 0$. La frecuencia ω_m es la frecuencia en la cual se encuentra la amplitud máxima M_m de la curva 2. En cualquier sistema la señal de entrada puede contener señales de ruido falsas además de la señal de entrada auténtica, o pueden ser fuentes de ruido dentro del sistema de lazo cerrado. Este ruido está generalmente en una banda de frecuencias arriba de la banda de frecuencia dominante de la señal de entrada auténtica. Por esto, para reproducir la señal auténtica y atenuar el ruido, los sistemas de retroalimentación son diseñados para tener un ancho de banda definido. En ciertos casos la frecuencia del ruido puede existir en la misma banda de frecuencia que el de la señal auténtica. Cuando esto ocurre, el problema de estimar la señal deseada es más complicado.

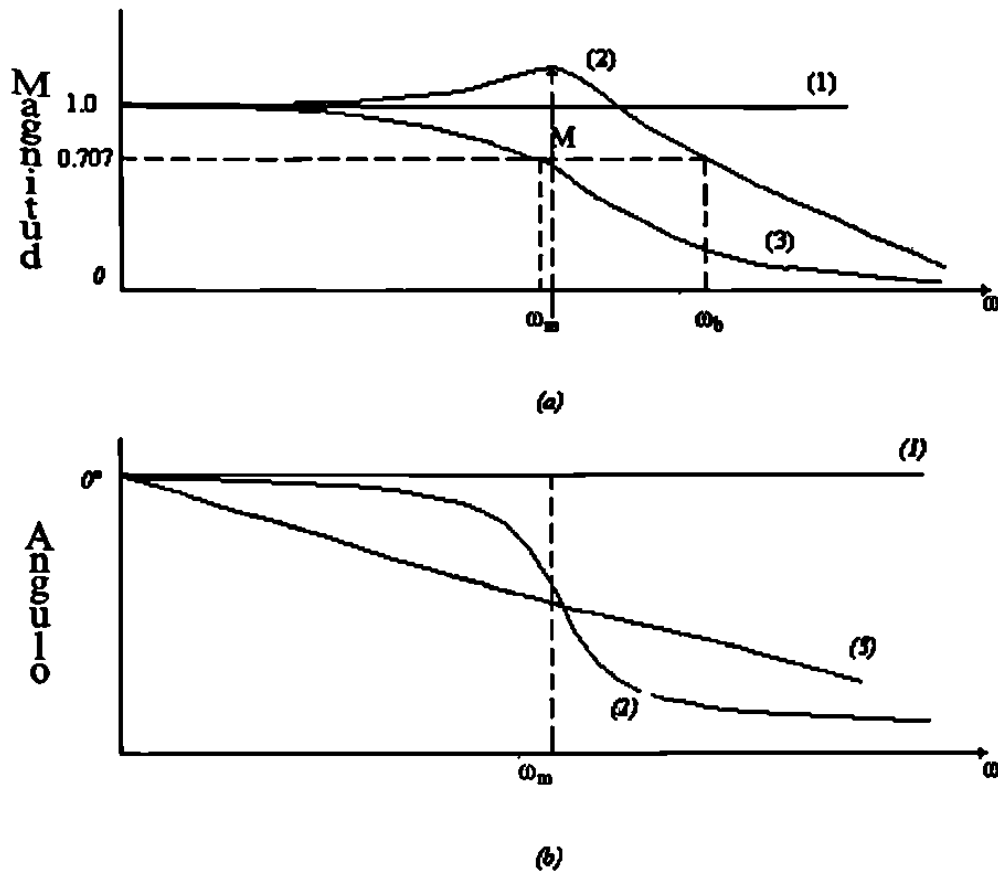


Figura 3.1

3.3 Criterio de estabilidad de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist nos permite investigar la estabilidad absoluta y la estabilidad relativa de sistemas lineales de lazo cerrado a partir del conocimiento de sus características de respuesta a la frecuencia de lazo abierto.

La gráfica de Nyquist de una función de transferencia senoidal $G(j\omega)$ es una gráfica de la magnitud de $G(j\omega)$ contra el ángulo de fase de $G(j\omega)$ en coordenadas polares conforme ω varía desde cero hasta infinito. Por lo tanto la gráfica polar es el

lugar del vector $|G(j\omega)| \angle G(j\omega)$ al variar ω desde cero hasta infinito. En los diagramas polares un ángulo de fase positivo o negativo es medido en sentido antihorario o sentido horario desde el eje real positivo. Las gráficas de Nyquist son también llamadas gráficas polares. La figura 3.2 muestra un ejemplo de este tipo de gráficas. Cada punto de $G(j\omega)$ en la gráfica polar representa el punto terminal de un vector en un valor particular de ω . Las proyecciones de $G(j\omega)$ en los ejes real e imaginario son sus componentes real e imaginario.

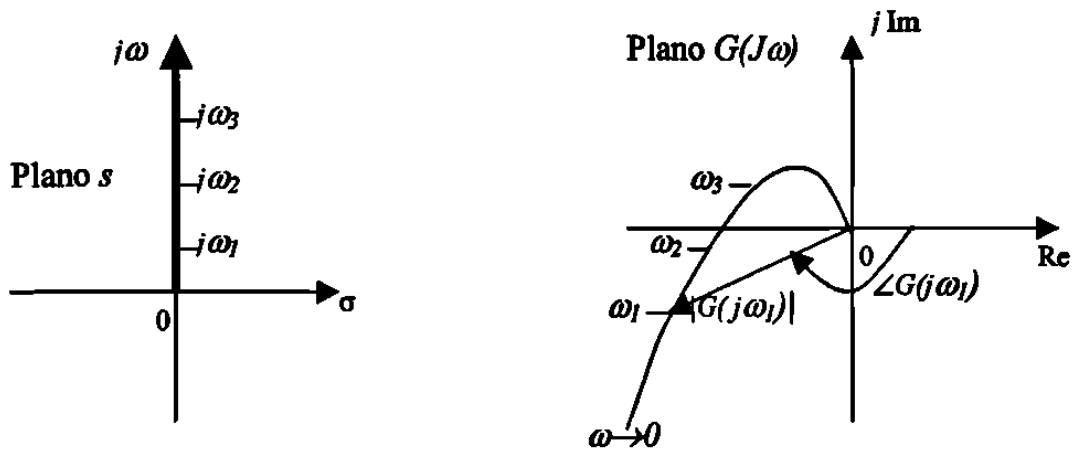


Figura 3.2

Algunas de las ventajas de utilizar las gráficas de Nyquist, es que describen las características de respuesta en frecuencia de un sistema en todo el rango de frecuencia en una sola gráfica, además de proporcionar información sobre la estabilidad relativa de un sistema estable y el grado de inestabilidad de un sistema inestable, y como mejorar la estabilidad del sistema en caso de ser necesario. Una desventaja es que la gráfica no indica claramente las contribuciones de cada factor individual de la función de transferencia de lazo abierto.

La estabilidad del sistema esta en función de los polos de $Y(s) / X(s)$, es decir, para que un sistema sea estable, las raíces de la función característica (3.7) no deben

localizarse en el semiplano derecho positivo del plano s , como ya se había mencionado anteriormente.

$$B(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \quad (3.7)$$

Si $G = N_1/D_1$ y $H = N_2/D_2$, podemos escribir la ecuación (3.7) como:

$$B(s) = 1 + \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2} = \frac{D_1 D_2 + N_1 N_2}{D_1 D_2} \quad (3.8)$$

Notamos que los polos de la función de transferencia de lazo abierto ($G(s)H(s)$) son los mismos que los polos de $B(s)$. Para la función de transferencia de lazo cerrado del sistema, la ecuación:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{N_1 D_2}{D_1 D_2 + N_1 N_2} \quad (3.9)$$

notamos que el denominador de la ecuación (3.9) es el mismo que el numerador de la ecuación (3.8), entonces, para la condición de estabilidad, ninguno de los ceros de $B(s)$ que son las raíces de la ecuación característica o los polos de la función de transferencia de lazo cerrado deben localizarse en el semiplano derecho positivo del plano s .

El criterio de Nyquist se originó en una aplicación en la ingeniería del bien conocido *principio del argumento* [12] de la teoría de la variable compleja, esto es, sea $B(s)$ una fracción racional univaluada, podemos representar la función característica (3.7) en forma racionalizada y factorizada ecuación (3.10), la cual tiene un número finito de polos en el plano s . Univaluado significa que para cada punto de s , existe un punto, y solo uno, correspondiente, incluyendo el infinito, en el plano complejo $B(s)$

$$B(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots\dots(s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots\dots(s - p_n)} \quad (3.10)$$

Donde z_1, z_2, \dots, z_n son los ceros y p_1, p_2, \dots, p_n son los polos. Algunos de los polos y ceros de la forma generalizada de la función $B(s)$ son dibujados arbitrariamente en el plano s de la figura 3.3. También se dibuja arbitrariamente el contorno cerrado Q' que encierra al cero z_1 . Para el punto O' que se encuentra sobre el contorno de Q' cuyas coordenadas son $s = \sigma + j\omega$, están dibujados segmentos de líneas directas que están dadas por $s - z_1, s - z_2, s - p_1, s - p_2$, etc, no es necesario indicar todos los segmentos directos de polos y ceros. Si el punto O' es rotado una vez en el sentido horario alrededor del contorno cerrado Q' , la línea de longitud $(s - z_1)$ rota sobre el contorno una cantidad completa en sentido horario de un ángulo de 360° . Todos los otros segmentos rotan una cantidad de un ángulo de 0° . Por lo tanto, la rotación en sentido horario de 360° para la longitud de $(s - z_1)$ debe realizarse simultáneamente por la función $B(s)$ de la ecuación (3.10) para el encierro de z_1 por la trayectoria Q' . Si consideramos un contorno mas largo Q'' que encierre los ceros z_1, z_2, z_3 , y el polo p_4 mientras el punto O'' es rotado en sentido horario una vez alrededor del contorno cerrado Q'' , cada uno de los segmentos directos de línea de polos y ceros encerrados, rotan a través del contorno en sentido horario un ángulo de 360° . Ya que la rotación angular de un polo esta experimentado por la función característica $B(s)$ en su denominador, la rotación angular completa realizada por la ecuación (3.10) debe ser igual a la rotación angular completa debido al polo p_4 menos la rotación angular completa debido a los ceros z_1, z_2 y z_3 . En otras palabras, la rotación angular completa de $B(s)$ es $360^\circ - (3)(360^\circ) = -720^\circ$. Por lo tanto, para este caso, el número completo de rotaciones (N) experimentado por $B(s)$ para el movimiento en sentido horario de O'' realizado una vez sobre el contorno cerrado Q'' es igual a -2 ; esto es:

$$N = (\text{número de polos encerrados}) - (\text{número de ceros encerrados}) = 1 - 3 = -2$$

Donde el signo negativo indica rotación en sentido horario. Si el contorno Q'' incluyera solamente el polo p_4 , $B(s)$ experimenta entonces una rotación en sentido antihorario (signo positivo) mientras el punto O'' se mueve en sentido horario alrededor del contorno. Para cualquier trayectoria cerrada que se pueda escoger, todos los polos y

ceros que se encuentren fuera de ella contribuyen con una rotación angular de 0° para $B(s)$ mientras un punto se mueve una vez alrededor de esta trayectoria.

El principio del argumento puede mencionarse como sigue:

Sea $B(s)$ una función univaluada que tiene un número finito de polos en el plano s . Suponga que una trayectoria arbitraria cerrada Q' o Q'' se escoge en el plano s , de tal forma que la trayectoria no atraviese ninguno de los polos o ceros de $B(s)$; el lugar geométrico correspondiente a Q' o Q'' mapeado en el plano $B(s)$ (Q_B' o Q_B'') encerrará al origen tantas veces como la diferencia entre el número de ceros y polos de $B(s)$ que están rodeados por el lugar geométrico Q' o Q'' en el plano s .

Esto es :

$$N = P - Z \quad (3.11)$$

Donde N es el número de encierros del origen hechos por el lugar geométrico Q_B en el plano $B(s)$, Z es el número de ceros de $B(s)$ encerrados en el plano s por el lugar geométrico Q y P es el número de polos de $B(s)$ encerrados en el plano s por el lugar geométrico Q .

Hace años cuando Nyquist se enfrentó al problema de resolver la estabilidad, que involucra determinar si la función $B(s)$ tiene ceros en el semiplano derecho del plano s , descubrió aparentemente que el principio del argumento se podía aplicar para resolver el problema de estabilidad si consideramos para esto un contorno cerrado muy particular, es decir, hasta ahora cuando nos referimos a un contorno cerrado en el plano complejo, pensamos en una figura de cualquier forma y situada en cualquier lugar del plano s .

Para establecer el criterio de estabilidad con el método de Nyquist definiremos un contorno específico. Esto es consideremos un contorno cerrado Q tal que todo el semiplano positivo del plano s es encerrado, este contorno, es también conocido como el contorno de Bromwich [9, pg.168]. Se trata de una semicircunferencia con radio infinito, con centro en el origen y recorrida en el sentido horario (negativo), esta trayectoria es definida como la trayectoria de Nyquist; por lo que esta trayectoria encerrará todos los polos y ceros de $B(s)$ que tengan parte real positiva, ver la figura

3.4. La teoría de variable compleja utilizada en esta derivación rigurosa requiere que el contorno Q no pase por ninguno de los polos o ceros de $B(s)$.

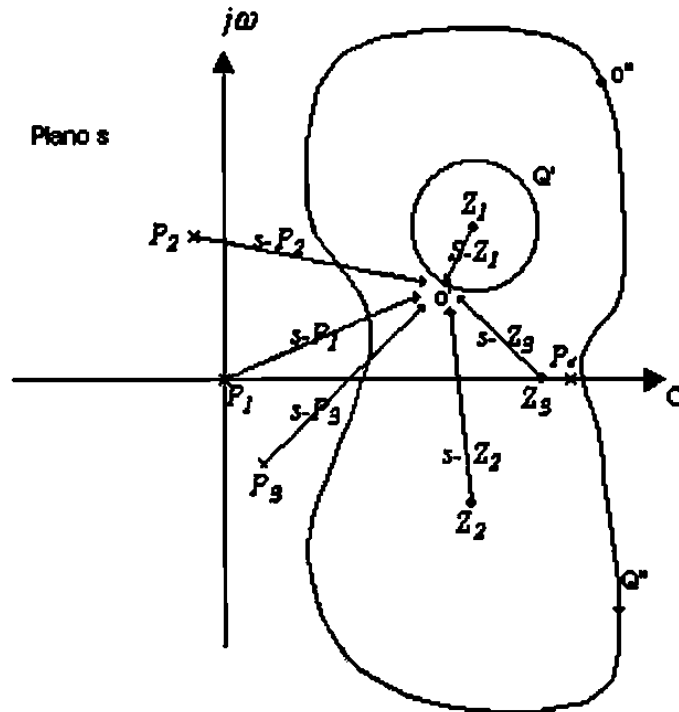


Figura 3.3

El criterio de Nyquist es una aplicación directa del principio del argumento cuando el lugar geométrico del plano s es la trayectoria de Nyquist de la figura 3.4. Una vez que la trayectoria de Nyquist se especifica, la estabilidad del sistema en lazo cerrado se puede determinar al proyectar la función $B(s)$ cuando s toma valores a lo largo de la trayectoria de Nyquist, tendremos entonces en el plano de $B(s)$ una figura de alguna cierta forma que efectuará un cierto número de circunvalaciones del origen dado por la fórmula de la ecuación (3.11), se concluye entonces que para que un sistema sea estable, el número de rotaciones del contorno de $B(s)$ alrededor del origen debe ser en sentido antihorario (positivo) e igual al número de polos P que se encuentran en el semiplano derecho positivo del plano s , en otras palabras si $B(s)$ experimenta una

rotación del contorno en sentido horario (negativo), esto indica que $Z > P$, donde $P \geq 0$, y por esto, el sistema de lazo cerrado es inestable. Si no hay rotaciones del contorno de $B(s)$ alrededor del origen, esto indica que $Z = P$ y el sistema puede ser o no estable, en medida si $P = 0$ o $P > 0$.

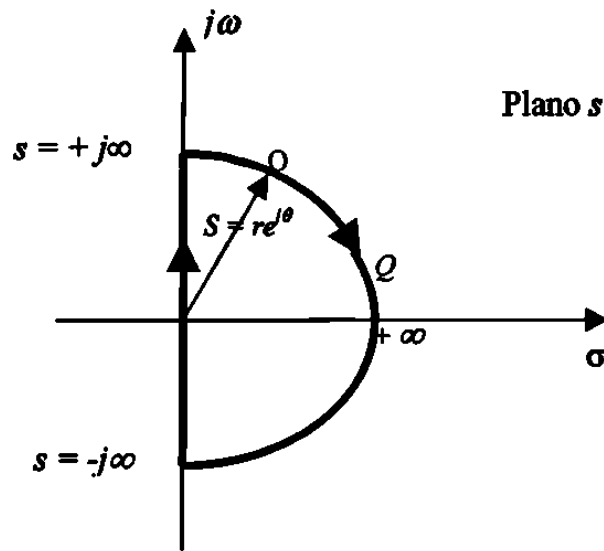


Figura 3.4

Sin embargo simplificamos los cálculos, si en lugar de graficar $B(s) = 1 + G(s)H(s)$, graficamos solo $G(s)H(s)$. La figura 3.5 muestra esta situación; para obtener la gráfica de $1 + G(s)H(s)$ basta con trasladar el origen del sistema de coordenadas de la gráfica de $G(s)H(s)$ (inciso (b)) al punto $(-1, j0)$.

Por lo tanto, la estabilidad de un sistema de lazo cerrado se puede obtener analizando los rodeos del punto $(-1, j0)$ por la gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$; esto es, rodear al origen por la gráfica de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ es equivalente a hacerlo con el punto $(-1, j0)$ por la gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$. Si partimos de la ecuación $N = P - Z$, donde:

N = Número de rodeos alrededor del punto $(-1, j0)$ hechos por $G(s)H(s)$.

Z = Número de ceros de $1 + G(s)H(s)$ que están dentro de la trayectoria de Nyquist.

P = Número de polos de $G(s)H(s)$ que están dentro de la trayectoria de Nyquist, observe que el número de polos de $1 + G(s)H(s)$ son los mismos que $G(s)H(s)$.

Si P no es cero, para que un sistema de control sea estable, se debe tener $Z = 0$, o $N = P$, lo que significa que hay que tener P rodeos antihorarios alrededor del punto $(-1, j0)$. Si $G(s)H(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s , entonces $Z = N$. Por lo tanto para que haya estabilidad, no debe de haber rodeos alrededor del punto $(-1, j0)$ por parte de la gráfica $G(j\omega)H(j\omega)$. En la figura 3.6 se muestra como la región encerrada por la gráfica de Nyquist, (región sombreada), no encierra al punto $(-1, j0)$; para que haya estabilidad, dicho punto debe quedar fuera de esta región.

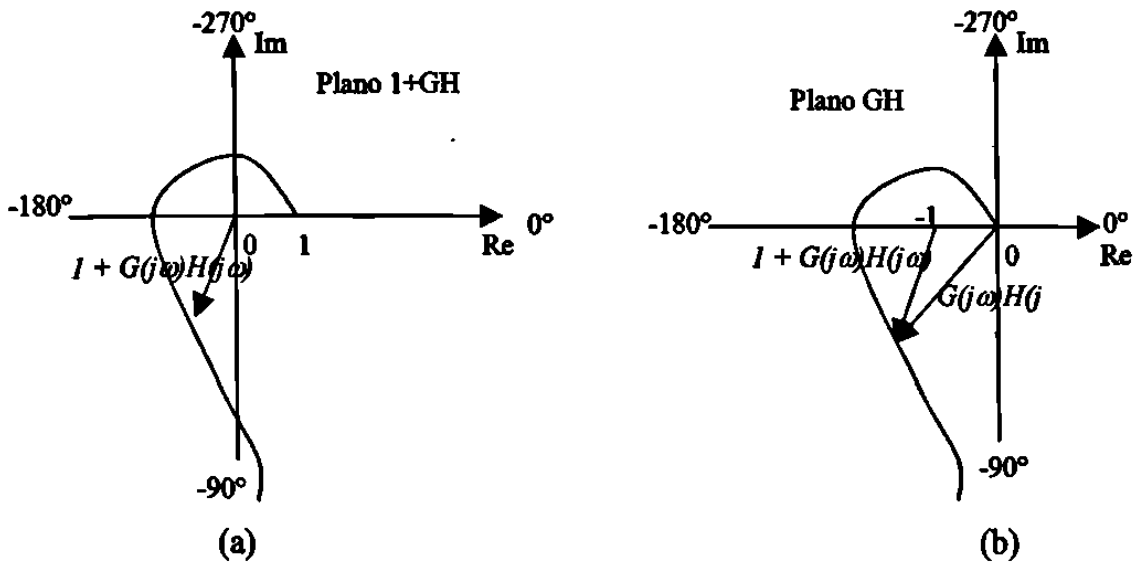


Figura 3.5

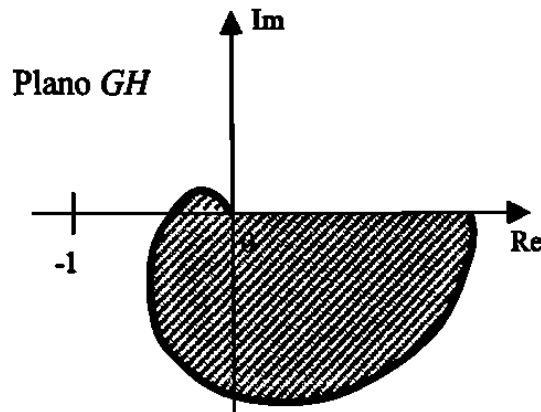


Figura 3.6

Otro de los requisitos del criterio de Nyquist es que $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) \rightarrow 0$ o a una constante. Por lo que $\lim_{s \rightarrow \infty} B(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} [1 + G(s)H(s)] \rightarrow 1$ o 1 más una constante; dependiendo de que si el sistema es propio o estrictamente propio, respectivamente.

En el caso en el que $G(s)H(s)$ tenga polos o cero en el origen, o en el eje $j\omega$ fuera del origen, la trayectoria de Nyquist no debe pasar por estos polos o ceros, por lo tanto, se hace una modificación a la trayectoria de Nyquist. Para esto, se hace un semicírculo de radio infinitesimal ϵ en la trayectoria alrededor de la vecindad del origen. Se desplaza un punto s a lo largo del eje imaginario negativo, desde $-j\infty$ hasta $j0^-$, después el punto se mueve de $j0^-$ a $j0^+$ a través de un semicírculo de radio ϵ ($\epsilon \ll 1$), posteriormente, a lo largo del eje positivo imaginario, desde $j0^+$ hasta $j\infty$ después continua con su trayectoria normal, de un semicírculo de radio infinito, retornando al punto de comienzo. La gráfica se dibuja para los dos valores de frecuencia (positivos y negativos). Aunque, la gráfica polar para las frecuencias negativas, es el conjugado de la gráfica polar para las frecuencias positivas, ya que es simétrica con respecto al eje real.

Consideremos el siguiente ejemplo para visualizar mejor esto. La función de transferencia de lazo abierto con valor positivo de T es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (3.12)$$

El punto O se mueve a través del eje imaginario negativo desde $s = -j\infty$ hasta un punto donde $s = -j\epsilon = 0^- \angle -\pi/2$ es muy pequeño. Después el punto se mueve a través de una trayectoria semicircular de radio ϵ , que se puede escribir: $s = \epsilon e^{j\theta}$ con un radio muy pequeño, hasta que alcanza el eje imaginario positivo en $s = +j\epsilon = 0^+ \angle \pi/2$. A partir de aquí el punto O procede a seguir su trayectoria por el eje imaginario positivo $s = +j\infty$. Por lo tanto, dejando que el radio $\epsilon \rightarrow 0$, para el semicírculo alrededor del origen, asegura la inclusión de todos los polos y ceros en el semiplano derecho positivo del plano s . La figura 3.7 muestra la trayectoria de este punto O en Q y la gráfica completa

para $G(s)H(s)$ cuando el punto O se mueve a través del contorno modificado Q en el plano s desde el punto 1 hasta el punto 7.

Para la porción semicircular de la trayectoria Q representado por $s = \varepsilon e^{j\theta}$, donde $\varepsilon \rightarrow 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, la ecuación (3.12) es:

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s} = \frac{K_1}{\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K_1}{\varepsilon} e^{-j\theta} = \frac{K_1}{\varepsilon} e^{j\psi} \quad (3.13)$$

Donde $K_1/\varepsilon \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y $\psi = -\theta$ va desde $\pi/2$ hasta $-\pi/2$ cuando el segmento directo s va en sentido antihorario desde $\varepsilon \angle -\pi/2$ hasta $\varepsilon \angle +\pi/2$.

La gráfica de $B(s)$ en la figura 3.7b, no encierra al punto $-1, j0$, por lo tanto, $N = 0$, de la ecuación (3.12), no hay polos dentro de la trayectoria Q ; esto es, $P = 0$. Por lo que si aplicamos la ecuación (3.11), $Z = 0$ y el sistema de lazo cerrado es estable.

Se escoge arbitrariamente el contorno del semicírculo de radio infinitesimal ε en el semiplano derecho del plano s para evadir el polo en el origen, en este caso, este polo no está incluido en la trayectoria de Nyquist Q , y la estabilidad requiere cero circunvalaciones del punto $-1, j0$. Este es el tratamiento normal. Sin embargo, podemos también localizar este semicírculo de radio infinitesimal en el semiplano izquierdo del plano s , y poder incluir este polo en el origen en la trayectoria de Nyquist Q . Entonces para estabilidad requerimos de una circunvalación en sentido antihorario del punto $-1, j0$. En la figura 3.7, de haber escogido el encerramiento del polo en el origen, es decir, que el semicírculo de radio ε se localizara en el semiplano izquierdo del plano s , entonces habría una circunvalación en el punto $-1, j0$ de la figura 3.7b, para fines de estabilidad.

Funciones de Transferencia que contengan el término s^m en el denominador, tienen la forma general de la ecuación (3.14), mientras $\varepsilon \rightarrow 0$.

El grado del término s , proporciona el tipo del sistema a analizar, esto es, la cantidad de polos en el origen. La representación de estabilidad de Nyquist de un sistema tipo m , incluye m semicírculos en sentido horario de radio infinitos alrededor del origen en su trayectoria. Es decir, que hay $180m$ grados en el arco de conexión en el infinito del plano $G(s)H(s)$.

$$G(s)H(s) = \frac{K_m}{s^m} = \frac{K_m}{(\varepsilon^m)e^{jm\theta}} = \frac{K_m}{\varepsilon^m} e^{-jm\theta} = \frac{K_m}{\varepsilon^m} e^{jm\psi} \quad (3.14)$$

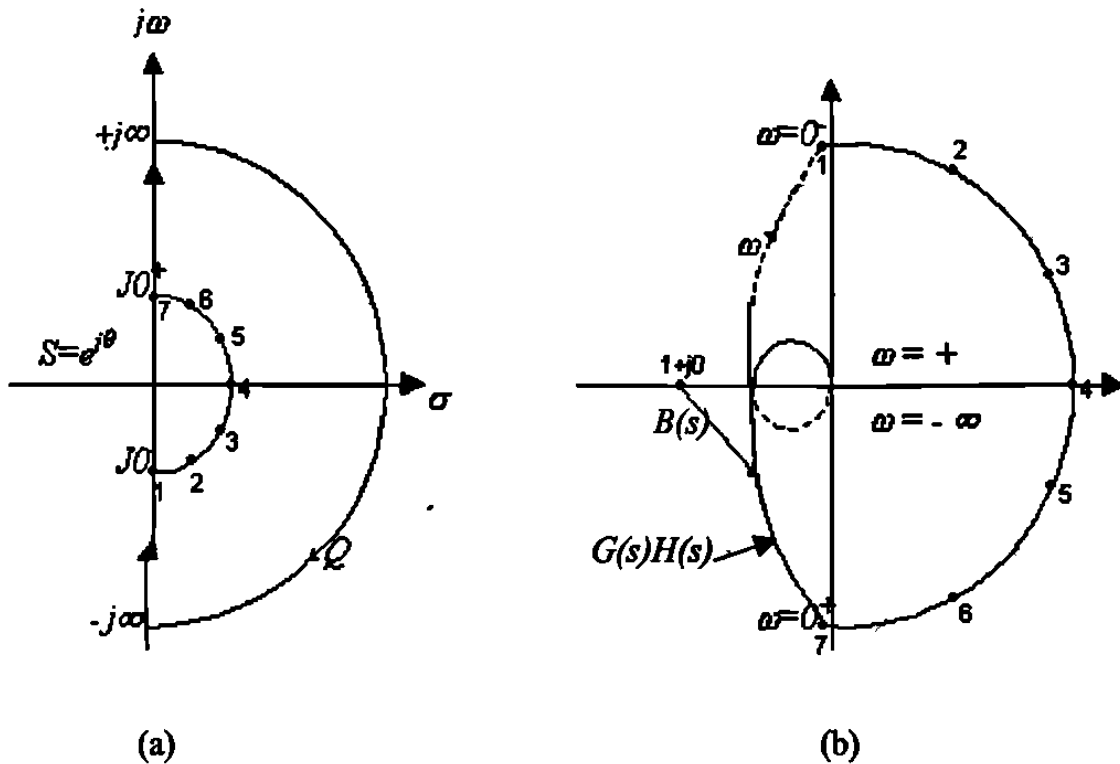


Figura 3.7

3.3.1 Estabilidad relativa

En general sé esta interesado no solo en la estabilidad absoluta de un sistema, sino también en que tan estable es, esto se refiere a la estabilidad relativa. El diagrama de Nyquist da información de que tan estable es un sistema. Consideraremos en este análisis que los sistemas son de fase mínima, es decir que la función de transferencia de lazo abierto no tiene polos ni ceros en el semiplano derecho del plano s ; de lo contrario, la función de transferencia de lazo abierto sería de fase no mínima.

Para un sistema en lazo cerrado con función de transferencia de fase mínima, el sistema es estable en lazo cerrado si la gráfica de $G(s)H(s)$ que corresponde a la trayectoria de Nyquist no encierra al punto crítico $(-1, j0)$ en el plano $G(s)H(s)$, de lo

contrario, es decir, si el punto $(-1, j0)$ está encerrado por la gráfica de $G(s)H(s)$ que corresponde a la trayectoria de Nyquist, entonces el sistema es inestable.

El margen por el cual ese encerramiento del punto $(-1, j0)$ es evadido, proporciona medidas de estabilidad relativa. Si la gráfica de Nyquist evita minuciosamente el encierro del punto $(-1, j0)$, el sistema de lazo cerrado tiene polos casi en el semiplano derecho, y por lo tanto tiene uno o más polos cerca del eje imaginario del plano complejo. Polos cerca del eje imaginario causan que la respuesta del sistema para alcanzar el estado estacionario sea lenta después de que los disturbios de entrada son aplicados debido a los correspondientes términos transitorios ligeramente amortiguados, por lo que esta condición es generalmente inaceptable. Dos medidas precisas de evadir la proximidad del punto $(-1, j0)$ han sido definidas para relacionar las características en el dominio de la frecuencia (Gráficas de Nyquist, Bode,) y el dominio del tiempo (respuesta transitoria, amortiguamiento), estas son, margen de fase y margen de ganancia.

Las características de estabilidad están especificadas en términos de las siguientes cantidades:

Cruce de fase. Este es el punto en la gráfica de la función de transferencia, en el cual el ángulo de fase es de -180° . La frecuencia a la que el cruce de fase ocurre se le denomina, frecuencia del cruce de fase o frecuencia de margen de ganancia ω_c .

Margen de ganancia. Es el factor a por el cual la ganancia de lazo abierto debe cambiarse para producir inestabilidad, si todos los otros parámetros permanecen constantes. Expresado en términos de la función de transferencia en la frecuencia ω_c , es

$$|G(\omega_c)H(\omega_c)| a = 1 \quad (3.15)$$

En la gráfica polar de $G(\omega_c)H(\omega_c)$ el valor en ω_c es

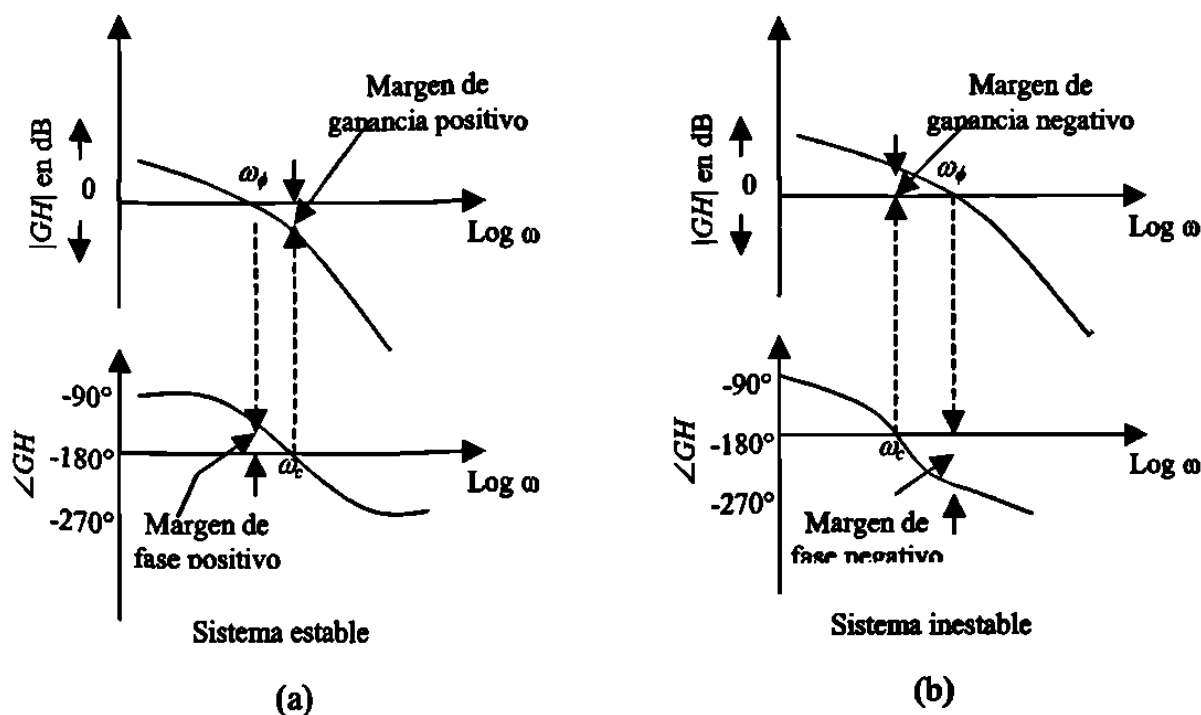
$$|G(\omega_c)H(\omega_c)| = 1 / a \quad (3.16)$$

En decibeles tenemos

$$\text{Margen de ganancia} = -20 \log_{10} |G(j\omega_c)H(j\omega_c)| \quad (3.17)$$

Cruce de Ganancia. Este es el punto en la gráfica de la función de transferencia en el cual la magnitud de $G(j\omega)H(j\omega)$ es la unidad ($20 \log_{10} |G(j\omega)H(j\omega)| = 0$ dB); esto es, la frecuencia donde la gráfica de Nyquist intercepta al círculo unitario más cerca del punto -1 . La frecuencia en el cruce de ganancia se le denomina frecuencia del cruce de ganancia o frecuencia de margen de fase ω_g [5, pg.283].

Margen de fase. Se define como el ángulo en grados que la gráfica $G(j\omega)H(j\omega)$ se debe rotar alrededor del origen, para que el cruce de ganancia pase por el punto $(-1, j0)$. Esto es 180° mas el ángulo considerado trigonométricamente negativo de la función de transferencia en el punto del cruce de ganancia, y se expresa como $\gamma = 180^\circ + \phi$, donde $\angle G(j\omega)H(j\omega) = \phi$ es negativo. La figura 3.8, muestra márgenes de fase y ganancia de sistemas estables e inestables. (a), (b) Diagramas de Bode; (c),(d) Diagramas polares; (e), (f) Diagramas del logaritmo de la magnitud en función de la fase.



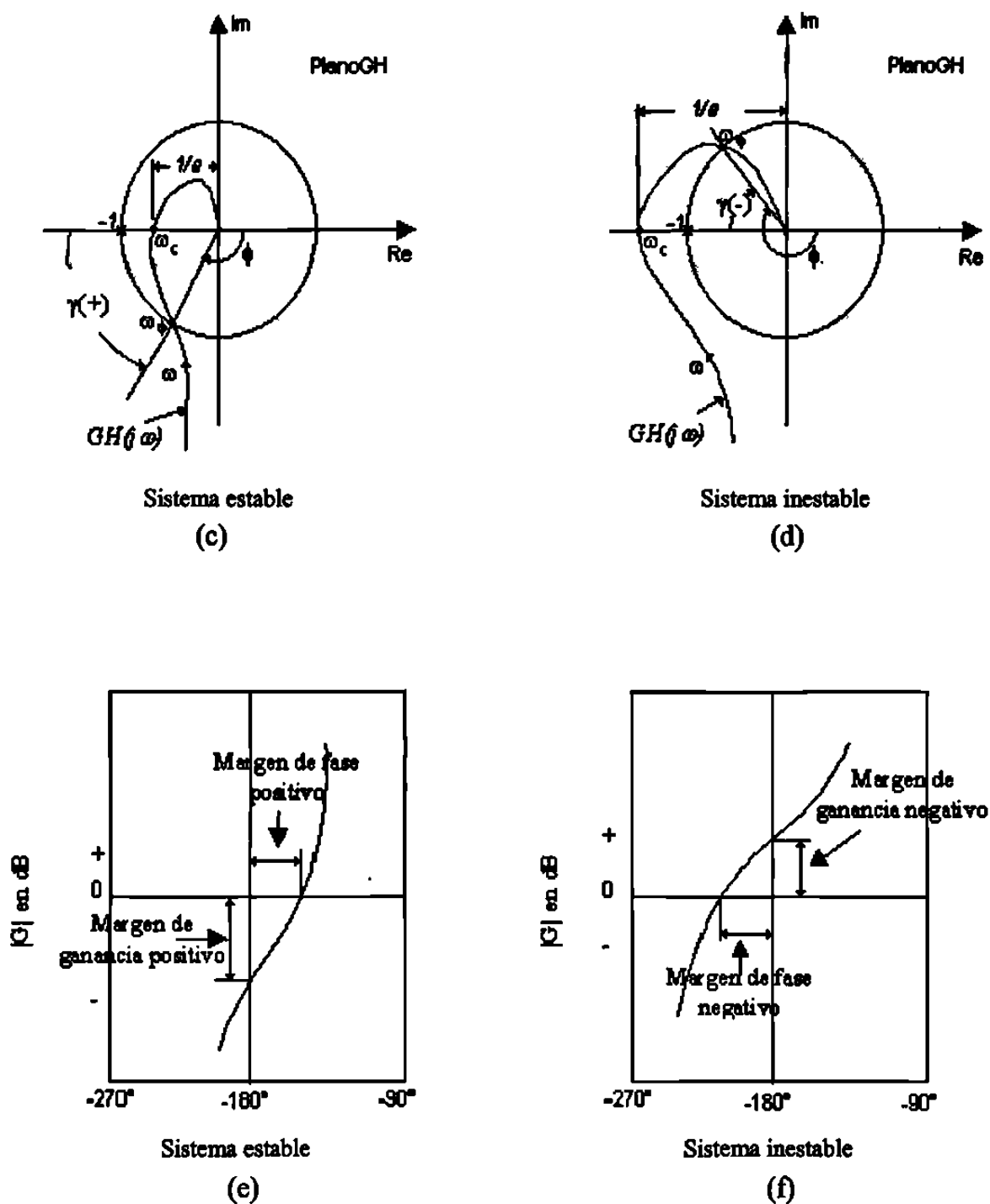


Figura 3.8

Para un sistema de fase mínima, tanto el margen de fase como el margen de ganancia deben de ser positivos para que el sistema sea estable; de lo contrario se dice que el sistema es inestable, es decir, si los márgenes de fase y ganancia son negativos.

En diseños clásicos de sistemas de retroalimentación, la robustez¹ esta frecuentemente especificada al establecer valores mínimos de margen de fase y margen de ganancia. Requerimientos prácticos son $|G(\omega_c)H(\omega_c)| > 2$ para el margen de ganancia y $30^\circ < \gamma < 60^\circ$ para el margen de fase. Aunque ambos márgenes solos no nos pueden asegurar una estabilidad duradera o una robustez adecuada en todos los casos, debido a que situaciones inusuales en las cuales pueden aumentar de valor los márgenes, o en el caso de pequeñas perturbaciones que puedan desestabilizar el sistema.

Por esta razón Landau, Rolland, Cyrot, y Vota (1993) introdujeron dos márgenes más[13].

Margen de módulo. El margen de módulo s_m , es el radio del círculo más pequeño con centro de -1 que es tangente a la gráfica de Nyquist. Este margen expresa muy directamente que tan lejos esta la gráfica de Nyquist del punto -1 . Figura 3.9.

Margen de retraso. El margen de retraso τ_m es el retraso extra más pequeño que puede ser introducido al lazo con el que desestabilise al sistema. El margen de retraso esta vinculado con el margen de fase γ , por la relación:

$$\tau_m = \frac{\gamma}{\omega_c} \quad 3.18$$

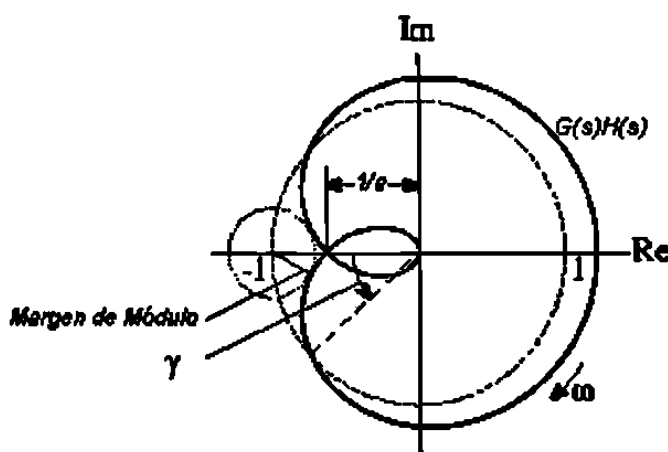


Figura 3.9

¹ Estabilidad robusta es la propiedad de los sistemas de lazo cerrado de permanecer estables bajo cambios de la planta y del compensador.

Una especificación práctica para el margen de módulo es $s_m > 0.5$. El margen de retraso debe ser al menos del orden de $1/2B$, donde B es el ancho de banda (en términos de frecuencia angular) del sistema de lazo cerrado.

Existen sistemas *condicionalmente estables*, esto es que el sistema puede volverse inestable con un decremento o incremento de la ganancia. Esta situación no es deseable en la práctica. Un sistema así se hace inestable cuando se aplican señales de entrada grandes, pues éstas pueden producir saturación en alguno de los componentes, lo que a su vez reduce la ganancia de lazo abierto del sistema. En muchos casos es más conveniente encontrar el rango de los valores de la ganancia sobre los cuales el sistema será estable por el diagrama de Nyquist que por el método de Routh-Hurwitz.

3.4 Diagramas de Bode

Las gráficas de Bode son representaciones gráficas comunes de funciones de magnitud y ángulo de fase con la frecuencia como parámetro. Una grafica de Bode consiste de dos gráficas: la primera es el logaritmo de la magnitud contra el logaritmo de la frecuencia y la otra es el ángulo de fase contra el logaritmo de la frecuencia. Frecuentemente representado el logaritmo de la magnitud en decibeles como: $20\log |G(j\omega)|$ teniendo 10 como la base del logaritmo.

Una de las ventajas de utilizar diagramas logarítmicos es que las operaciones matemáticas de multiplicación y división son transformadas a suma y resta respectivamente y que el trabajo de obtener la función de transferencia es más gráfico que analítico.

El procedimiento laborioso para graficar la magnitud y fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ por la sustitución de varios valores de $j\omega$ ya no es necesaria cuando se dibujan las gráficas de Bode, porque podemos usar varios procedimientos o pasos cortos.

Estos procedimientos están basados en simplificar las aproximaciones de la curva las cuales nos permiten representar la curva exacta, una gráfica suave con líneas asintóticas. La diferencia entre la característica de la amplitud actual y la aproximación asintótica son solo unos pocos decibeles. Demostraremos la aplicación de esta técnica

de aproximación a siete comunes funciones de transferencia representativas: una constante K , factor de integración, factor de diferenciación, un término de primer orden de retardo de fase, un término de primer orden de adelanto de fase, un término cuadrático de atraso de fase.

- *Gráficas de K .* El valor de la magnitud en dB de una constante K o $1/K$, donde K es una constante real $K > 1$, está dado por:

$$(K)_{dB} = 20 \log_{10} K \quad (3.18)$$

$$(1/K)_{dB} = -20 \log_{10} K \quad (3.19)$$

Su dibujo es por lo tanto una recta horizontal. El ángulo de fase correspondiente a una constante es 0° o 180° depende en que si la constante es positiva o negativa, respectivamente. En cualquier caso, se trata también de una recta horizontal que se confunde con el eje de 0° para el caso en que $K > 0$ o que se encuentra en $+180^\circ$ o -180° para el caso en que $K < 0$. La figura 3.10 muestra estas gráficas de Bode de magnitud y fase de una constante.

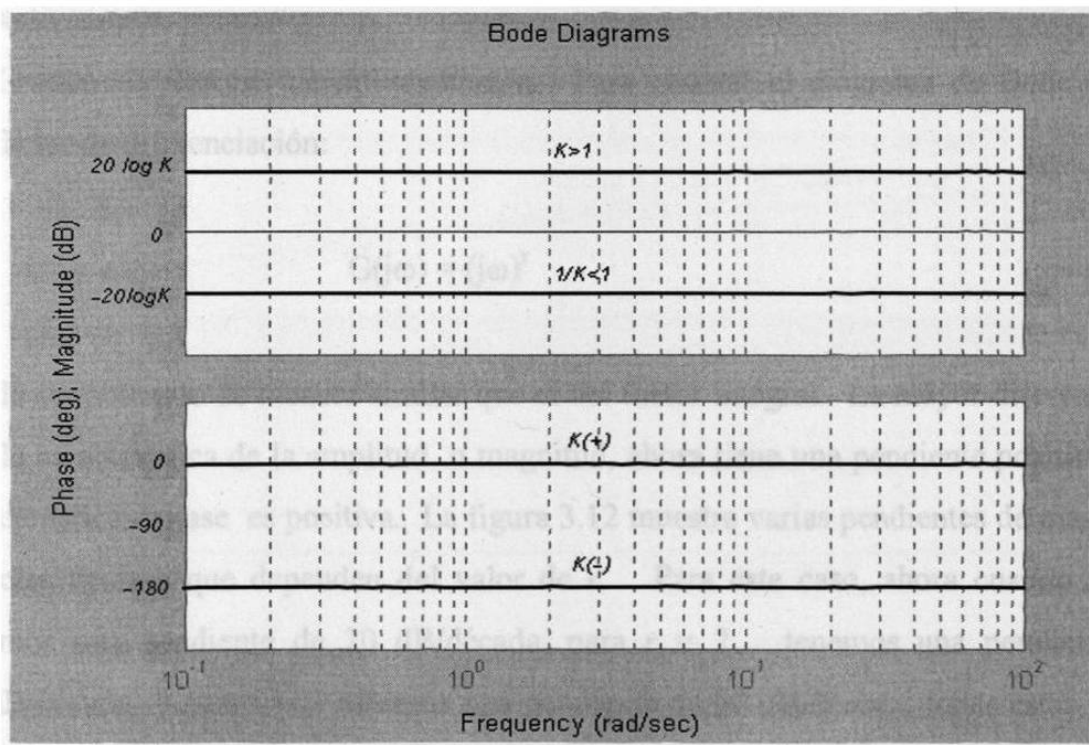


Figura 3.10

La constante K es una ganancia del sistema; esto es, cualquier señal en el lazo es multiplicada por K cuando tal señal pasa por el bloque que contiene a K .

- *Gráfica de factores de integración.* Para obtener el diagrama de Bode de un factor de integración:

$$G(j\omega) = 1/(j\omega)^r \quad (3.20)$$

En donde r es un entero positivo, tomamos el logaritmo de la ecuación (3.20), obteniendo:

$$20 \log \frac{1}{(j\omega)^r} = -20 \log 1 - 20 \log(\omega)^r = -20 \log(\omega)^r = -20r \log \omega \quad (3.21)$$

La figura 3.11 muestra varios diagramas de Bode de magnitud y de fase dependientes de r , vemos que para $r = 1$ tenemos una pendiente de -20 dB/década, para $r = 2$ tenemos una pendiente de -40 dB/década y para $r = 3$ tenemos una pendiente de -60 dB/década; todas estas rectas cruzan el eje de 0 dB en $\omega = 1$ rad/seg. Con respecto a la fase tenemos rectas localizadas en -90° , -180° y -270° ; para $r = 1$, $r = 2$ y $r = 3$, respectivamente.

- *Gráfica de factores de diferenciación.* Para obtener el diagrama de Bode de un factor de diferenciación:

$$G(j\omega) = (j\omega)^r \quad (3.22)$$

Puede ser obtenido de manera similar que el del factor integral. La mayor diferencia es que la característica de la amplitud o magnitud, ahora tiene una pendiente positiva y la característica de fase es positiva. La figura 3.12 muestra varias pendientes de magnitud y rectas de fase que dependen del valor de r . Para este caso, ahora cuando $r = 1$ tenemos una pendiente de 20 dB/década, para $r = 2$ tenemos una pendiente de 40 dB/década y para $r = 3$ tenemos una pendiente de 60 dB/década; todas estas rectas cruzan también el eje de 0 dB en $\omega = 1$ rad/seg. Con respecto a la fase tenemos rectas localizadas en 90° , 180° y 270° ; para $r = 1$, $r = 2$ y $r = 3$, respectivamente.

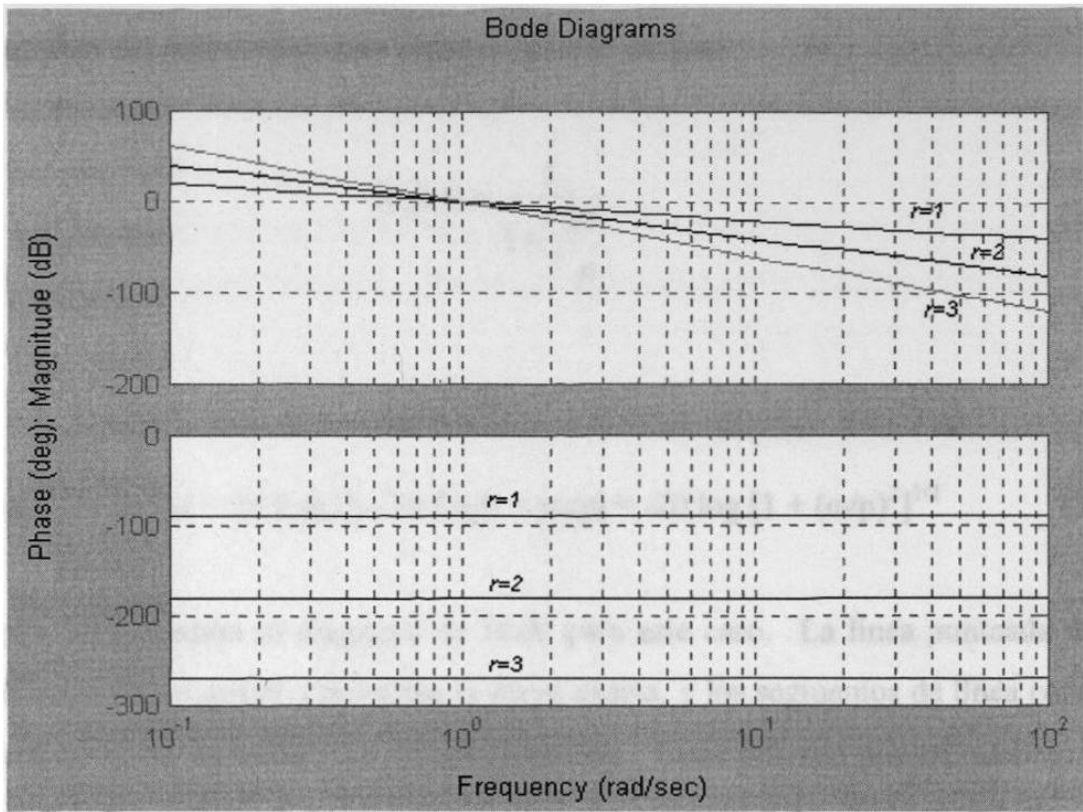


Figura 3.11

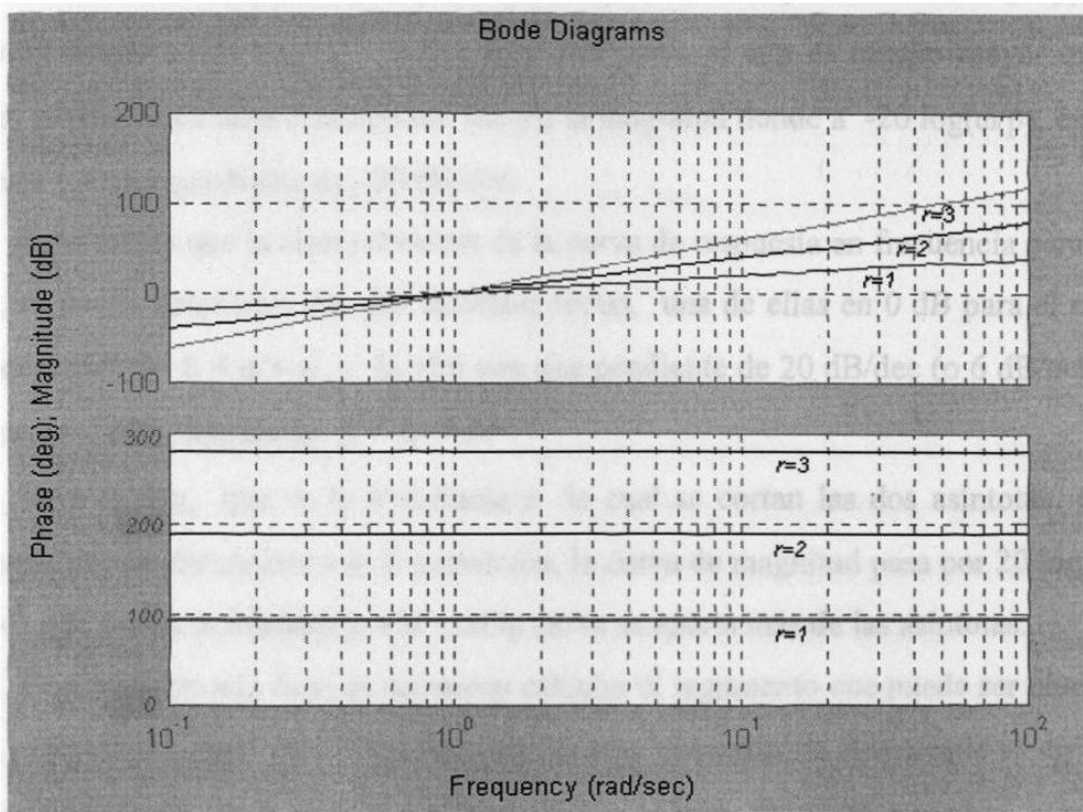


Figura 3.12

- *Gráfica de un término de primer orden de retardo de fase.* El logaritmo de la magnitud del factor de primer orden de retardo de fase :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{p}} \quad (3.23)$$

Es:

$$20 \log|1/(1+j\omega/p)| = 20 \log(1) - 20 \log|1 + j\omega/p| = -20 \log [1 + (\omega/p)^2]^{1/2} \quad (3.24)$$

La figura 3.13 muestra el diagrama de Bode para este caso. La línea punteada de la característica de magnitud representa la curva exacta, y los segmentos de línea continua representan las líneas asintóticas de aproximación. Estas difieren por un máximo de 3 dB en $\omega/p = 1$.

Las aproximaciones asintóticas se pueden dibujar fácilmente; por ejemplo, cuando ω/p es mucho menor que la unidad, es decir, para bajas frecuencias ($\omega \ll p$), esa magnitud tiende a $-20 \log(1)^{1/2} = 0$. Por otra parte, si ω/p es mucho mayor que la unidad, es decir para altas frecuencias ($\omega \gg p$); la magnitud tiende a $-20 \log(\omega/p)$, esto es una recta con una pendiente de -20 dB/dec.

Esto indica que la representación de la curva de respuesta en frecuencia para este factor, se puede aproximar por dos asíntotas rectas, una de ellas en 0 dB para el rango de frecuencias de $0 < \omega < p$ y la otra con una pendiente de 20 dB/dec (o 6 dB/octava) en el rango de frecuencias de $p < \omega < \infty$.

Para $\omega = p$, que es la frecuencia a la cual se cortan las dos asíntotas se le denomina *frecuencia de cruce o de transición*, la curva de magnitud pasa por $20 \log(1 + 1)^{1/2} = 3$ dB; ésa es la frecuencia a la cual la curva se aparta más de las asíntotas.

Con respecto a la fase, es necesario calcular el argumento que puede ser obtenido por la expresión: $-\tan^{-1} \omega/p$. Para frecuencias muy pequeñas, la fase tiende a $-\tan^{-1} 0 = 0^\circ$, para frecuencias altas, la fase tiende a $-\tan^{-1} \infty = -90^\circ$. En tanto que para $\omega = p$ la fase vale $-\tan^{-1} 1 = -45^\circ$.

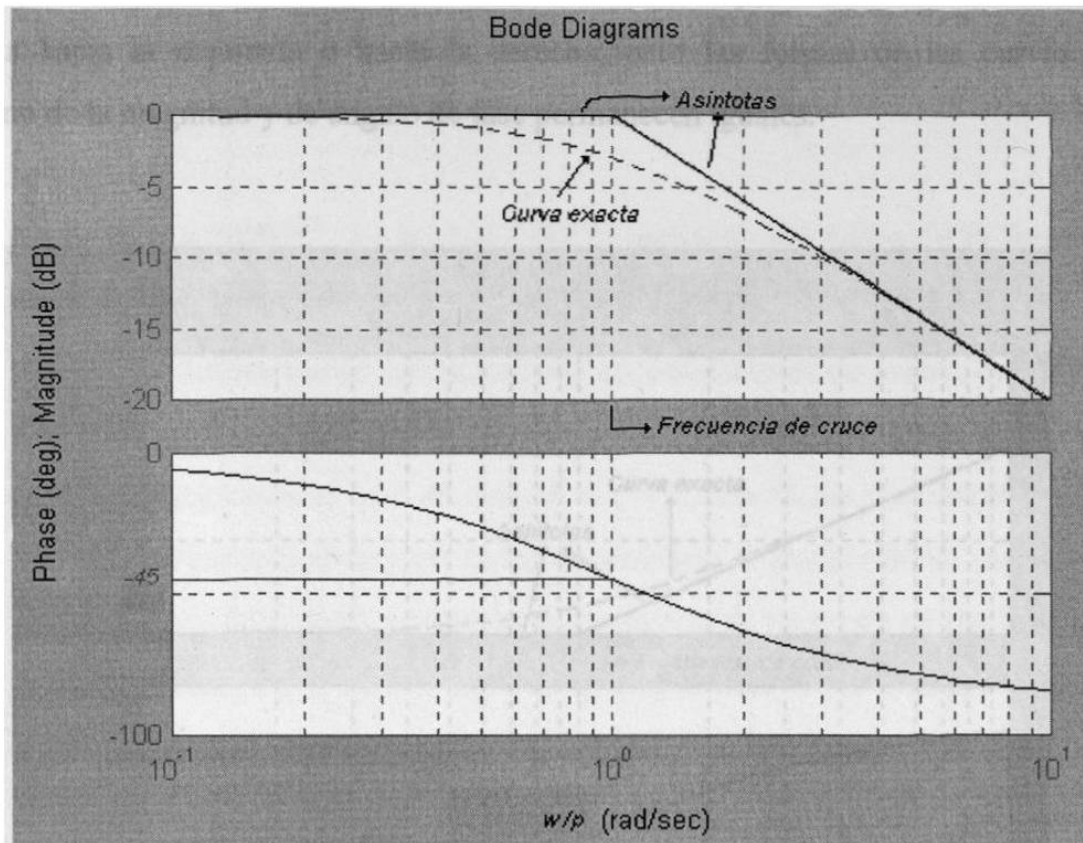


Figura 3.13

- *Gráfica de un término de primer orden de adelanto de fase.* El diagrama de Bode para un término de primer orden de adelanto de fase:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega/z \quad (3.25)$$

puede ser obtenido de manera muy similar que para el término de atraso. Las mayores diferencias son que la característica de magnitud tiene pendiente positiva y la característica de fase tiene valor positivo (Adelanto de fase). La figura 3.14 muestra el diagrama de Bode para este término o factor. La frecuencia de transición es la misma que para el caso anterior. La pendiente de la asintota de alta frecuencia es de 20 dB/dec, y el ángulo de fase varía de 0 a 90° al aumentar la frecuencia ω de cero a infinito.

Nótese que si la constante de tiempo varia ($\tau = 1/z$, $\tau = 1/p$), la frecuencia de cruce se desplaza hacia la izquierda o hacia la derecha, pero las formas de las curvas del logaritmo de la magnitud y de ángulo de fase permanecen iguales.

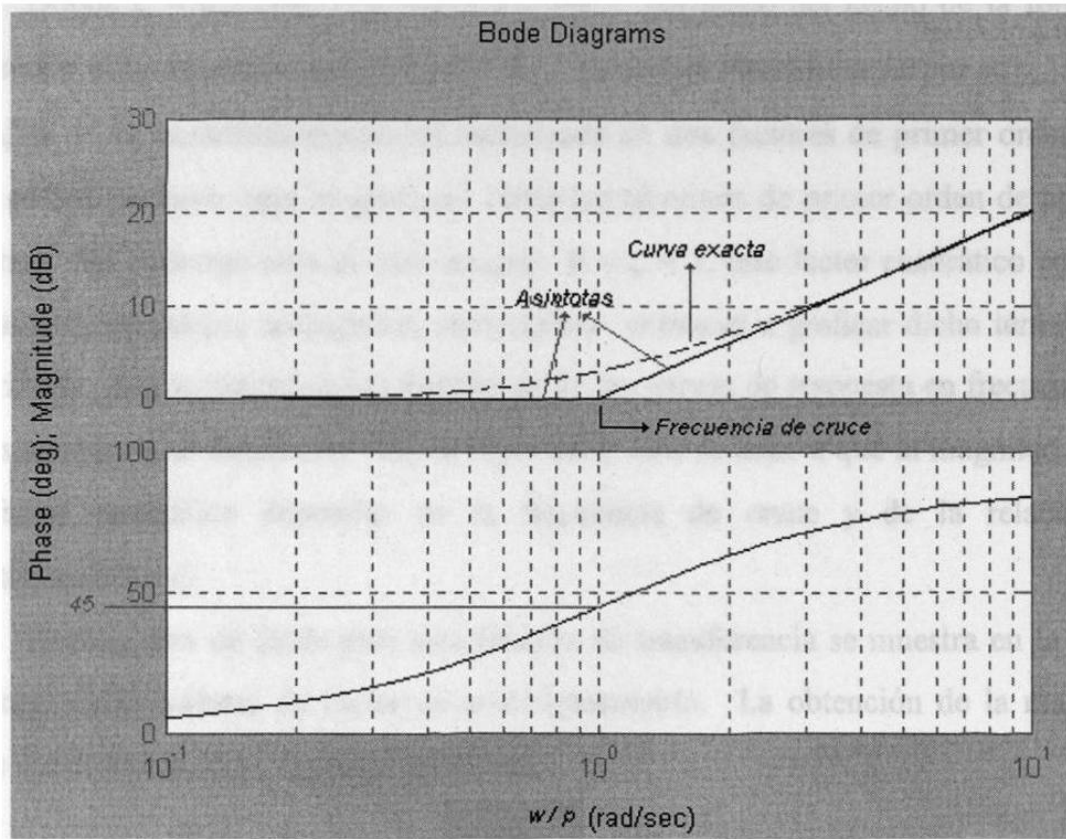


Figura 3.14

- *Gráfica de un término cuadrático de atraso de fase.* Consideremos la función de transferencia de segundo orden dado por:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (3.26)$$

o puede quedar de la siguiente forma :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (3.27)$$

Donde $\zeta = a / 2(b)^{1/2}$ y $\omega_n = 1 / (b)^{1/2}$ partiendo del hecho de la forma de representar el factor cuadrático: $1 + as + bs^2$ y después de sustituir $j\omega$ por s .

Para $\zeta \geq 1$ la cuadrática puede ser factorizada en dos factores de primer orden con polos reales, en cuyo caso se graficará como los términos de primer orden de atraso o adelanto. Sin embargo para el caso en que $0 < \zeta < 1$, este factor cuadrático contiene dos factores complejos conjugados, procedemos entonces a graficar dicho término sin factorizarlo. Las aproximaciones asintóticas de las curvas de respuesta en frecuencia no son exactas para un factor con valores bajos de ζ ; esto se debe a que la magnitud y fase del factor cuadrático dependen de la frecuencia de cruce y de la relación de amortiguamiento ζ .

El diagrama de Bode para esta función de transferencia se muestra en la figura 3.15 con varios valores de factor de amortiguamiento. La obtención de la magnitud puede ser evaluada de la siguiente expresión:

$$-20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.28)$$

Para frecuencias muy pequeñas $\omega \ll \omega_n$, la magnitud tiende a:

$$-20 \log \sqrt{1} = 0 \text{ dB} \quad (3.29)$$

Tenemos por lo tanto una línea horizontal a 0 dB para bajas frecuencias. Por otra parte, para altas frecuencias $\omega \gg \omega_n$, el logaritmo de la magnitud es:

$$\begin{aligned} -20 \log \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} &= -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 4\zeta^2\right]} \approx \\ &-20 \log \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] \approx -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para frecuencias altas tenemos, una línea recta con una pendiente de -40 dB/dec. La asíntota de baja frecuencia corta a la de alta frecuencia en $\omega = \omega_n$. Entonces, la curva de magnitud tiene dos asíntotas, una horizontal sobre el eje de 0 dB que se encuentra en el rango de $0 < \omega \leq \omega_n$, y la otra, una recta inclinada a -40 dB/dec que parte del eje de 0 dB en $\omega = \omega_n$. Estas dos asíntotas son independientes del valor de ζ . Sin embargo cerca de la frecuencia $\omega = \omega_n$, se produce un pico de resonancia; el factor de amortiguamiento determina la magnitud de ese pico de resonancia, este valor de pico del logaritmo de la magnitud es más grande que 0 dB, por lo que hay una desviación de la curva del logaritmo de la magnitud con respecto a las asíntotas, que depende del valor de ζ . Esta desviación o error es elevado para valores pequeños de ζ .

En cuanto al ángulo de fase, éste se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\phi = \angle \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2} = -\tan^{-1} \left[\frac{2\zeta \omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \quad (3.30)$$

La curva del ángulo de fase para esta función, también varía con ζ . En frecuencia cero el ángulo es 0° , a la frecuencia de transición el ángulo de fase es -90° independientemente de ζ ; y en frecuencia infinito el ángulo es -180° .

Cuando el factor cuadrático aparece en el numerador, las curvas de respuesta en frecuencia se pueden obtener con solo cambiar el signo del logaritmo de la magnitud y el del ángulo de fase.

El logaritmo de la magnitud para este término cuadrático tiene un valor pico de resonancia (M_p) para $0 < \zeta < 0.707$, a la frecuencia que ocurre este valor pico o valor máximo de magnitud se le denomina frecuencia de resonancia (ω_p). A medida que la relación de amortiguamiento tiende a cero, la frecuencia de resonancia tiende a ω_n , y la curva de magnitud se eleva por encima del eje de 0 dB.

Estos valores se pueden obtener de las siguientes expresiones:

$$M_p = 1 / 2\zeta (1 - \zeta^2)^{1/2} \quad (3.31)$$

$$\omega_p = \omega_n (1 - 2\zeta^2)^{1/2} \quad (0 \leq \zeta \leq 0.707) \quad (3.32)$$

De la ecuación (3.32) vemos que si $\zeta = 0$, entonces $\omega_p = \omega_n$, esto significa que el sistema no tiene ningún amortiguamiento, es decir, que si se excita al sistema no amortiguado con una entrada finita a su frecuencia natural, la magnitud de la señal de la salida tiende a infinito. Esto significa en la práctica que el sistema se destruye o que el crecimiento de la magnitud de las señales es detenido por las no linealidades del sistema.

Observamos también que no existe frecuencia de resonancia para $\zeta > 0.707$, esto sucede cuando el amortiguamiento es tan grande que la magnitud de la señal de salida es siempre inferior a la de la señal de entrada, excepto a la frecuencia cero, en la cual las amplitudes de la señal de entrada y salida son iguales.

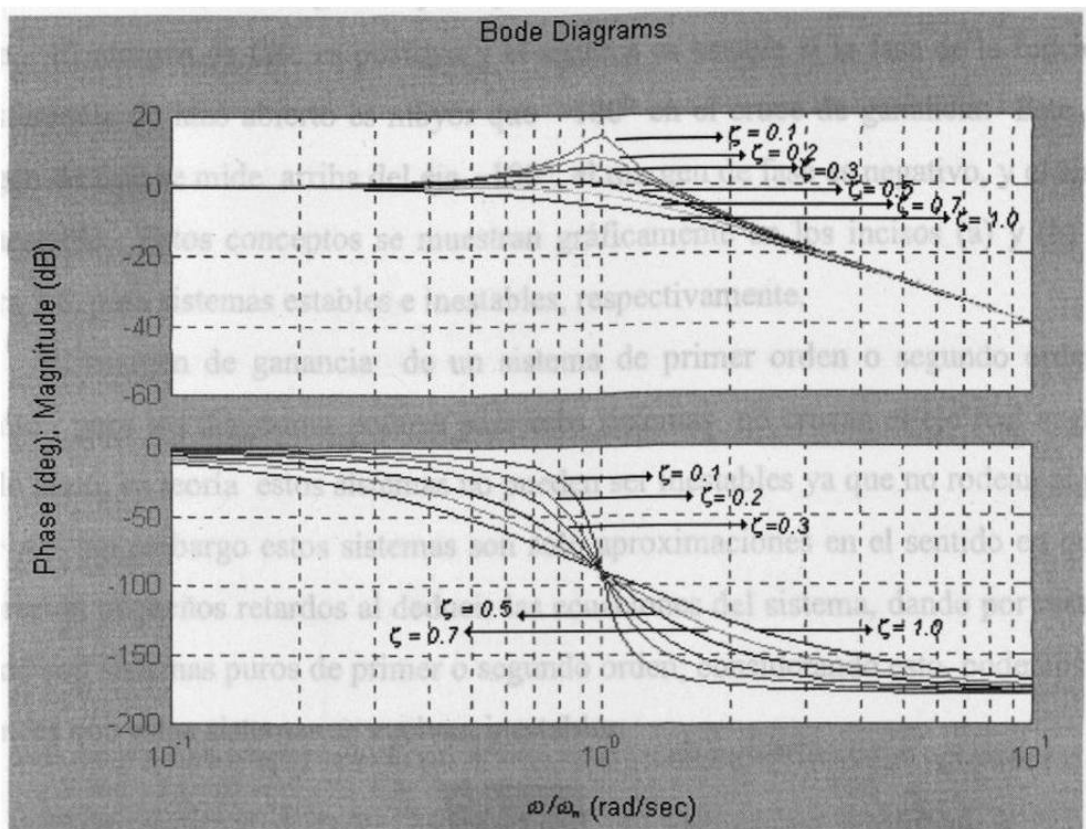


Figura 3.15

3.4.1 Criterio de estabilidad

El criterio de estabilidad de Bode se establece relacionando las gráficas logarítmicas con las polares; esta relación se puede hacer ya que ambas gráficas contienen la misma información, es decir, el módulo de la función de transferencia y el argumento para diferentes valores de frecuencia. Por lo tanto hay una relación entre el criterio de Nyquist y el de Bode.

El margen de ganancia definido anteriormente puede expresarse en decibeles, e identificarse sobre el diagrama de Bode como la cantidad de magnitud debajo de 0 dB donde la curva del ángulo de fase cruza el eje de -180° . En este caso el margen de ganancia es positivo y con esto el sistema es estable. Un margen de ganancia negativo en decibeles sobre el diagrama de Bode es la cantidad de magnitud por encima de 0 dB donde la curva del ángulo cruza al eje de -180° , en este caso el sistema es inestable.

Ahora bien, *el margen de fase* puede también obtenerse de los diagramas de Bode. El margen de fase es positivo y el sistema es estable si la fase de la función de transferencia de lazo abierto es mayor que -180° en el cruce de ganancia. Esto es, el margen de fase se mide arriba del eje -180° , el margen de fase es negativo, y el sistema es inestable. Estos conceptos se muestran gráficamente en los incisos (a) y (b) de la figura 3.8, para sistemas estables e inestables, respectivamente.

El margen de ganancia de un sistema de primer orden o segundo orden es infinito, pues los diagramas polares para esos sistemas no cruzan el eje real negativo. Por lo tanto, en teoría estos sistemas no pueden ser inestables ya que no rodean al punto $-1 + j0$; sin embargo estos sistemas son solo aproximaciones en el sentido en que se desprecian pequeños retardos al deducir las ecuaciones del sistema, dando por resultado que no son sistemas puros de primer o segundo orden; considerando esto, podemos tener entonces que estos sistemas se vuelvan inestables.

3.5 Carta de Nichols

La carta de Nichols es una técnica muy útil para determinar la estabilidad y la respuesta a la frecuencia de lazo cerrado de un sistema retroalimentado. La estabilidad

esta determinada por una gráfica de la ganancia de lazo abierto, contra las características de fase. Al mismo tiempo, la respuesta de frecuencia de lazo cerrado del sistema es determinado por utilizar contornos de amplitud constante de lazo cerrado y de cambio de fase los cuales están encima de la gráfica de ganancia-fase, es decir, la ganancia y fase de lazo abierto están representados en coordenadas rectangulares, y la ganancia y fase de lazo cerrado en curvas. La gráfica de Nichols puede adquirirse a partir de experimentos en el sistema, de una gráfica de Bode o directamente de conocer la función de transferencia y evaluarla para diferentes valores de frecuencia ($G(s)|_{s=j\omega}$ $0 \leq \omega \leq \infty$).

Para determinar la relación básica de la carta de Nichols, consideremos un sistema con retroalimentación unitaria, como se muestra en la figura 3.16. La función de transferencia de lazo cerrado esta dado por:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \quad (3.33)$$

o, se puede representar en función de su magnitud y fase:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)} \quad (3.34)$$

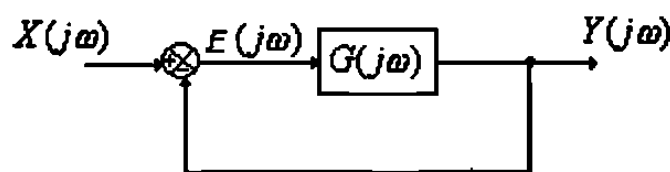


Figura 3.16

Donde $M(\omega)$ representa el componente de magnitud de la función de transferencia y $\alpha(\omega)$ representa el componente de fase de la función de transferencia. La frecuencia a la

cual ocurre el máximo valor de $Y(j\omega) / X(j\omega)$ se le denomina frecuencia de resonancia del sistema (ω_p), y el máximo valor de $Y(j\omega) / X(j\omega)$ es denotado como M_p .

Sabemos que un margen de estabilidad pequeño significa relativamente un valor pequeño de ζ ($\zeta \ll 1$), y un valor relativamente grande para M_p , por lo contrario, si el margen de estabilidad es grande, tendremos un valor grande de ζ y un valor relativamente pequeño de M_p . Con la carta de Nichols, además de poder obtener la información de que si un sistema es o no estable, también podemos determinar los valores de M_p y ω_{ps} que es de valiosa ayuda para el caso de diseño de sistemas. Para poder determinar los valores de M_p y ω_p cuantitativamente, para un sistema de control retroalimentado unitariamente, procederemos a desarrollar los contornos de la carta de Nichols en el plano complejo. Partimos de la representación de un sistema de control con retroalimentación unitaria (Figura 3.16) y representamos el vector complejo $G(j\omega)$ en función de su magnitud y fase:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\theta} \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.35) en la función de transferencia de la ecuación (3.34), obtenemos:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{|G(j\omega)|}{1 + |G(j\omega)|e^{j\theta}} \quad (3.36)$$

Si dividimos por $|G(j\omega)|e^{j\theta}$ tenemos:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \left[\frac{e^{-j\theta}}{|G(j\omega)|} + 1 \right]^{-1} \quad (3.37)$$

Utilizando la relación trigonométrica para el término exponencial, la ecuación (3.37) queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \left[\frac{\cos\theta}{|G(j\omega)|} + \frac{j\sin\theta}{|G(j\omega)|} + 1 \right]^{-1} \quad (3.38)$$

Esta última expresión tiene una magnitud M y ángulo de fase α , los cuales se determinan como sigue:

$$M(\omega) = \left\{ \left[1 + \frac{1}{|G(j\omega)|^2} + \frac{2\cos\theta}{|G(j\omega)|} \right]^{1/2} \right\}^{-1} \quad (3.39)$$

$$\alpha(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\sin\theta}{\cos\theta + |G(j\omega)|} \quad (3.40)$$

La ubicación de estos valores de ganancia de lazo cerrado (contornos M) y cambio de fase de lazo cerrado (contornos N) se muestran en la figura 3.17. Esta gráfica o diagrama que consiste en los lugares de M y N en el diagrama del logaritmo de la magnitud en función de la fase, se denomina diagrama o carta de Nichols.

El punto crítico $(-1 + j0)$ del plano complejo está representado en la carta de Nichols por el punto $(0 \text{ dB}, -180^\circ)$. La carta de Nichols es simétrica respecto al eje -180° .

El criterio de estabilidad para la carta de Nichols es simple, partiendo de su punto crítico. Por lo tanto, para un sistema de fase mínima, el margen de fase puede ser determinado y decimos que un sistema de control con retroalimentación es estable si, al graficar la trayectoria de $G(j\omega)H(j\omega)$, para $0 \leq \omega \leq \infty$, sobre la carta de Nichols, esta pasa del lado derecho del punto crítico $(0 \text{ dB}, -180^\circ)$ [20].

Aunque el objetivo de esta tesis es solo el análisis de estabilidad y no el diseño, no está demás mencionar que la carta de Nichols es de gran ayuda para el diseño de sistemas de control con retroalimentación. Para análisis podemos utilizar la carta de Nichols para determinar la respuesta en frecuencia de lazo cerrado a partir de la

respuesta de lazo abierto utilizando el diagrama de Bode, y encontrar el valor máximo M_p , y la frecuencia a la cual esto ocurre ω_p , ya que las intersecciones de la curva de respuesta en frecuencia de lazo abierto sobre los contornos M y N, dan los valores correspondientes de magnitud y ángulo de fase de la respuesta en frecuencia de lazo cerrado en cada punto de frecuencia.

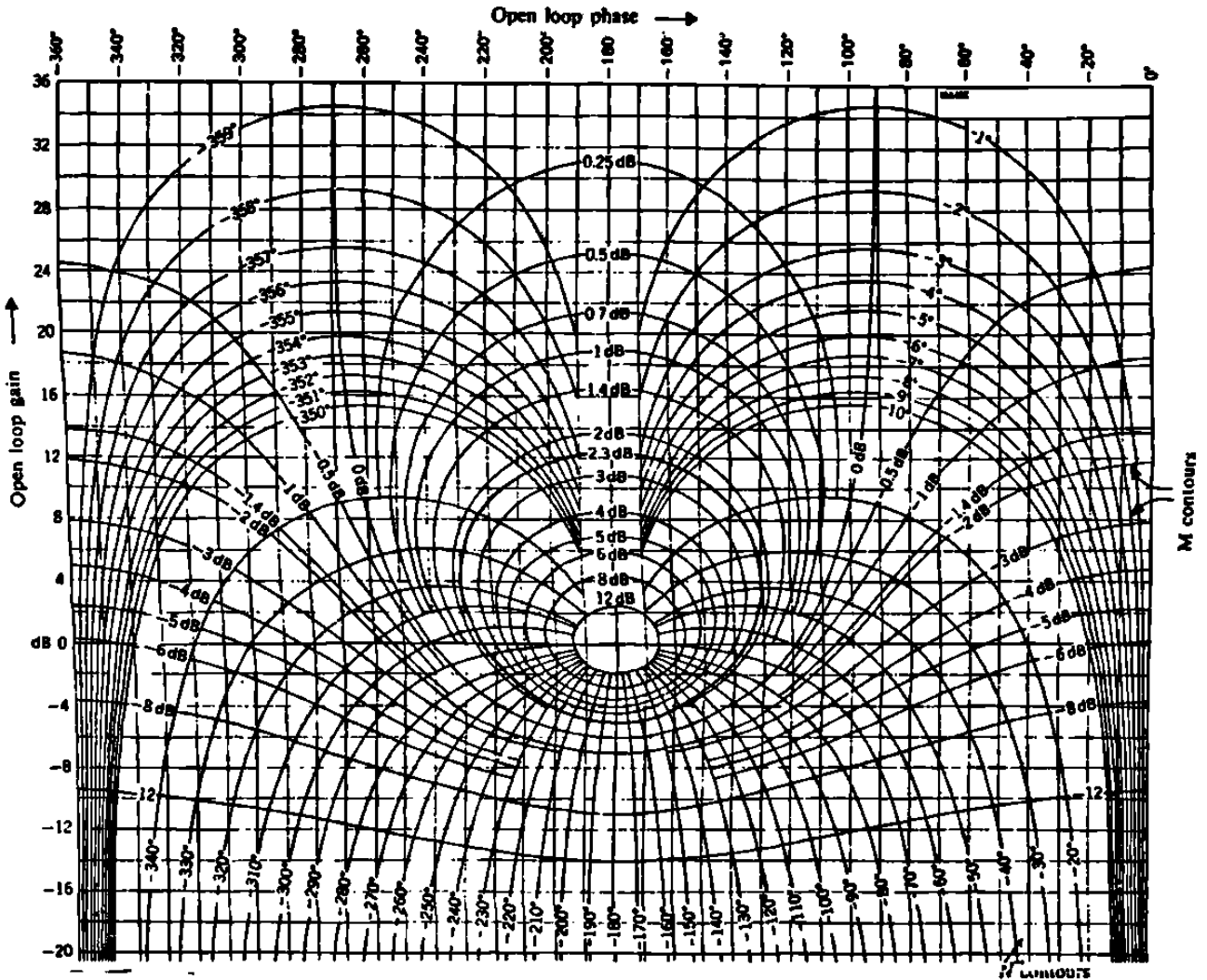


Figura 3.17

Ejemplo [2]. Consideremos la función de transferencia de lazo abierto, con retroalimentación unitaria:

$$G(s) = \frac{200(s+2.5)}{s^4 + 6.5s^3 + 28s^2 + 15s} \quad (3.41)$$

La tabla 3.1 muestra los valores de magnitud en decibeles y ángulo de fase correspondientes a la función de transferencia de la ecuación (3.41); con estos valores obtenidos del diagrama de Bode, podemos sobreponerlos sobre la carta de Nichols y así encontrar la respuesta de frecuencia de lazo cerrado; como se muestra en la figura 3.18.

Para poder representar la ecuación (3.41) en forma factorial, necesitamos conocer los valores de las raíces del polinomio del denominador. El apéndice A muestra algunos métodos para la solución de polinomios de orden mayor a tres. La ecuación (3.41) queda de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{40(1 + 0.4s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.24s + 0.04s^2)} \quad (3.42)$$

sustituyendo s por $j\omega$, tenemos:

$$G(j\omega) = \frac{40(1 + j\omega 0.4)}{j\omega(1 + j\omega 2)(1 + j\omega 0.24 + (j\omega)^2 0.04)} \quad (3.43)$$

ω (\log_{10} rad /seg)	$ G(j\omega) $ dB	$\angle G(j\omega)$
0.01	72	-91.0
0.02	65.9	-92.1
0.04	59.9	-94.2
0.06	56.3	-96.3
0.1	51.8	-100.3
0.5	35.3	-130.5
0.7	30.8	-138.5
1.0	25.7	-145.6
3.0	10.9	-168.8
7.0	-4.0	-225.3
10.0	-13.4	-242.5

30.0	-42.6	-262.2
50.0	-60.4	-266.1
80.0	-68.0	-267.1
100.0	-73.9	-267.7

Tabla 3.1

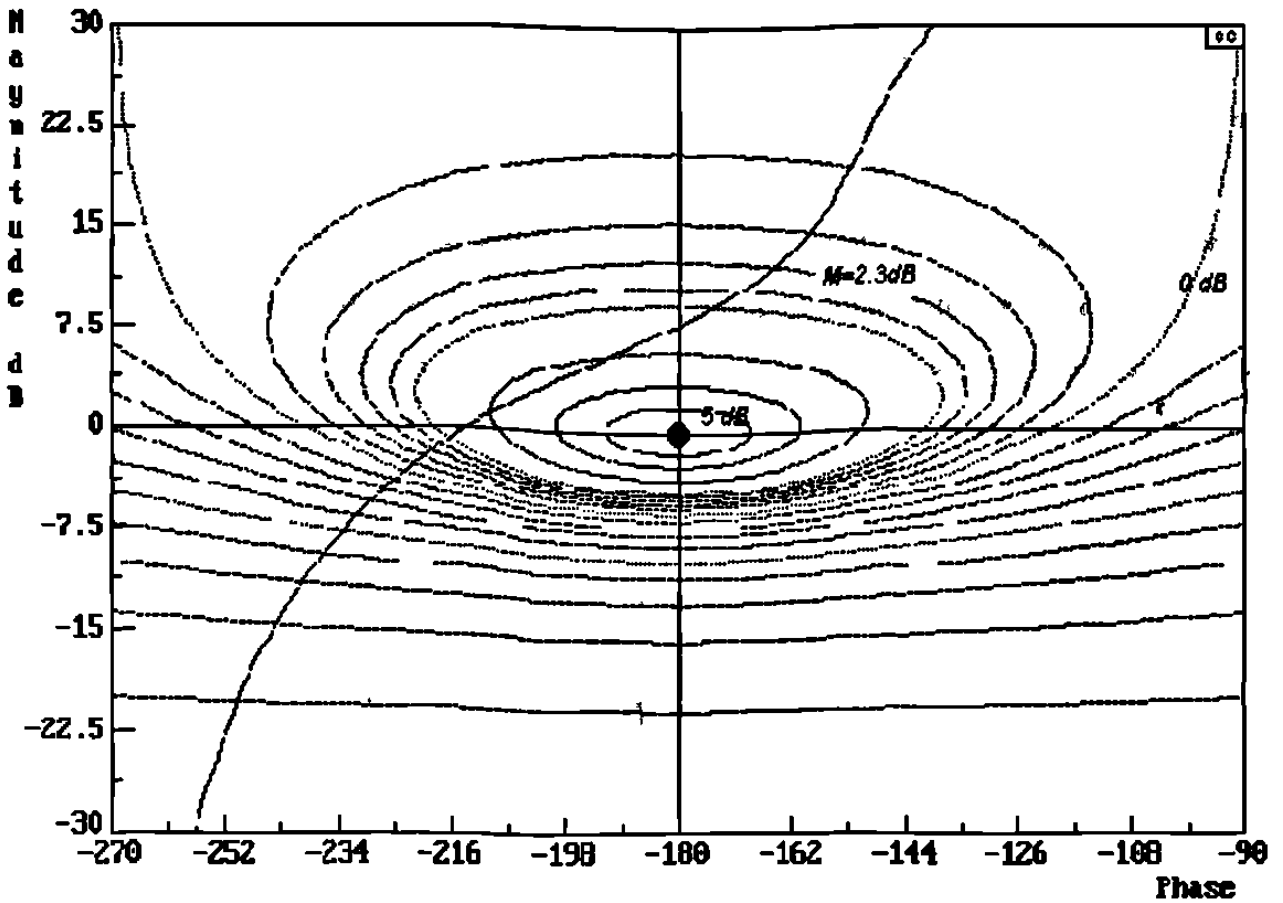


Figura 3.18

Ya que el contorno de la trayectoria de $G(j\omega)$ pasa por la izquierda del punto de lazo abierto (0 dB, -180°), entonces el sistema de lazo cerrado correspondiente es inestable.

3.6 Criterio de estabilidad de Mikhailov

El criterio de estabilidad de Mikhailov se basa en el siguiente teorema propuesto por él en 1938, así como cabe mencionar la propiedad del ángulo monotónico, que propuso en el mismo año, que se centra en analizar el ángulo de un polinomio como función de la frecuencia.

Teorema 3.1 [15]. *Un polinomio $p(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + \dots + c_ns^n$ de grado n con coeficientes reales positivos, es estable si y solo si c_0 es positivo y la gráfica del polinomio $p(j\omega)$ en el plano de los complejos rodea al origen en el sentido contrario a las manecillas del reloj, girando un ángulo de $n(\pi/2)$ cuando la frecuencia se incrementa de cero a infinito.*

Lema 3.1 [1]. (Propiedad del ángulo monotónico): *Suponga que $p(s)$ es un polinomio estable. Entonces el ángulo de $P(j\omega)$ es una función estrictamente creciente de $\omega \in \mathbf{R}$. Además, mientras ω varía desde 0 hasta ∞ , $\angle p(j\omega)$ experimenta un incremento de $n(\pi/2)$.*

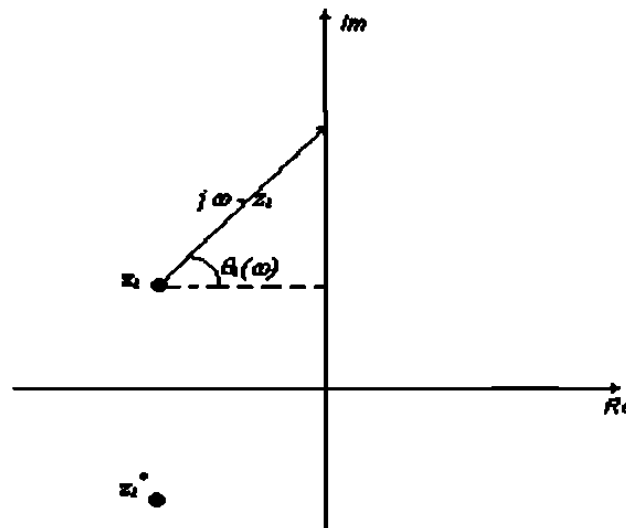


Figura 3.19