$$a_0 = \omega r_o \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega r_o}{\upsilon_s} \qquad (4\text{-}2)$$

En la ecuación, υ_s es la velocidad de propagación de la onda de corte en el cuerpo elástico.

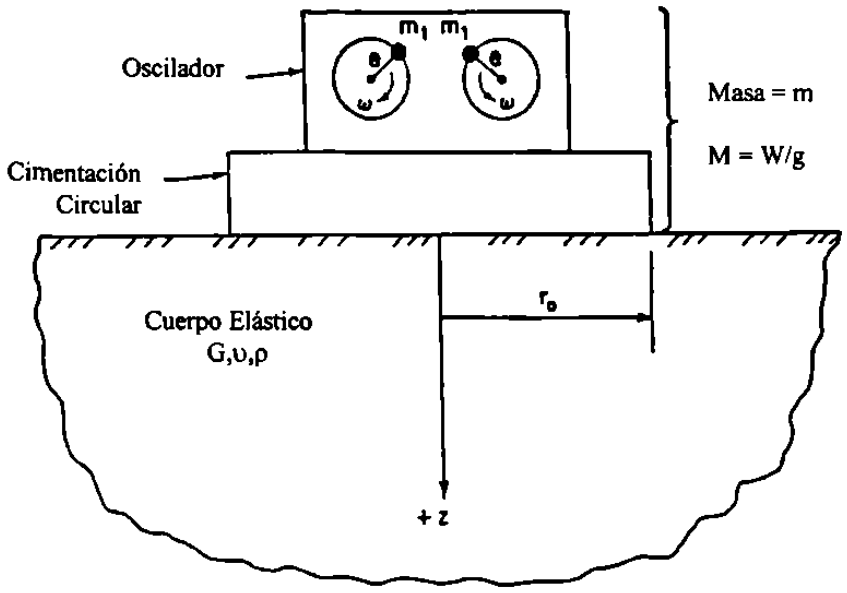

Fig. 4.3 Oscilador con Masa Rotatoria con Cimentación Circular Apoyada en un Cuerpo Elástico y Semi-infinito

Reissner también estableció un término dimensional secundario, designado como " relación de masa " b, la cual se describe por:

$$b = \frac{m}{\rho r_o^3} \qquad (4\text{-}3)$$

En donde m es la masa total de la cimentación y del mecanismo de excitación el cual se apoya en la superficie del semi-espacio elástico (fig. 4.3). La ecuación (4-3) esencialmente describe una relación entre la masa del cuerpo rígido la cual es sometida a un movimiento vertical y una partícula de masa del cuerpo elástico.

Reissner estableció expresiones para la amplitud del movimiento oscilador.

$$A_z = \frac{Q_o}{Gr_o}\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(1 - ba_o^2 f_1\right)^2 + \left(ba_o^2 f_2\right)^2}} \qquad (4\text{-}4)$$

El ángulo de fase ϕ entre la fuerza externa $Q = Q_o^{i\omega t}$, y el desplazamiento z_o fue expresado como

$$tan\phi = \frac{f_2}{-f_1 + ba_o^2\left(f_1^2 + f_2^2\right)} \qquad (4\text{-}5)$$

y la potencia de entrada requerida fue expresada por

$$PR = \frac{Q_o^2}{r_o^2\sqrt{Gr_o}}\frac{a_o f_1}{\left(1 - ba_o^2 f_1\right)^2 + \left(ba_o^2 f_2\right)^2} \qquad (4\text{-}6)$$

La amplitud de la fuerza oscilatoria Q_o puede ser una constante independiente de la frecuencia ω o puede ser una función de la frecuencia de excitación. El

tipo de masa-rotatoria con masa total de m_e actuando en un radio designado como la excentricidad e, la fuerza de excitación es:

$$Q_o = m_e e \omega^2 \qquad (4\text{-}7)$$

Para dos masas oscilatorias mostradas en la Fig. 4.3, la masa total excéntrica m_e es igual a $2m_1$.

La teoría de Reissner formó la base para clarificar los estudios analíticos de osciladores apoyados en el semi-espacio, no obstante su teoría no recibió una inmediata aceptación por los ingenieros que trabajaban en el campo de la dinámica de suelos debido a que los resultados teóricos no correspondían completamente con los resultados de las pruebas de campo. Existen varias razones que explican esta diferencia:

1. Asentamientos permanentes desarrollados durante muchas pruebas, de tal modo que se violaron las condiciones asumidas para el medio elástico.
2. Las amplitudes de movimiento mantenido por el modelo de vibración usado en campo fueron mayores que las aceleraciones a menudo del orden de 2g a 3g, lo cual permitió al vibrador saltar libremente por encima del suelo y actuar como un martillo.
3. La consideración de una presión uniformemente distribuida en la zona de contacto del oscilador no fue realista.

4. Hubo un error en el cálculo del f_2 el cual influyó en el valor numérico de los resultados; sin embargo, el estudio realizado por Reissner es el escrito clásico en este campo.

Quinlan (1953) y Sung (1953).- La solución de Reissner fue ampliada por Quinlan y Sung, quienes consideraron el efecto de tres tipos de presión de contacto vertical bajo la base ocasionada por una fuerza vertical oscilatoria. Las distribuciones de presión que fueron consideradas son las siguientes:

Base rígida.

$$\sigma_z = \frac{P_o e^{i\omega t}}{2\pi r_o \sqrt{r_o^2 - r^2}} \text{ para } r \leq r_o \qquad (4\text{-}8)$$

$$\sigma_z = 0 \text{ para } r > r_o$$

Uniforme.

$$\sigma_z = \frac{P_o e^{i\omega t}}{\pi r_o^2} \text{ para } r \leq r_o \qquad (4\text{-}9)$$

$$\sigma_z = 0 \text{ para } r > r_o$$

Parabólica.

$$\sigma_z = \frac{2P_o\left(r_o^2 - r^2\right)e^{i\omega t}}{\pi r_o^4} \text{ para } r \leq r_o \qquad (4\text{-}10)$$

$$\sigma_z = 0 \text{ para } r > r_o$$

La Fig. 4.4 muestra la amplitud de la frecuencia para una cimentación típica, con tres tipos de distribución de presiones para b = 5 y ν= ¼ . La distribución de presiones parabólica y uniforme producen mayores desplazamientos que una base rígida, esto muestra la importancia de la distribución de presiones bajo la cimentación.

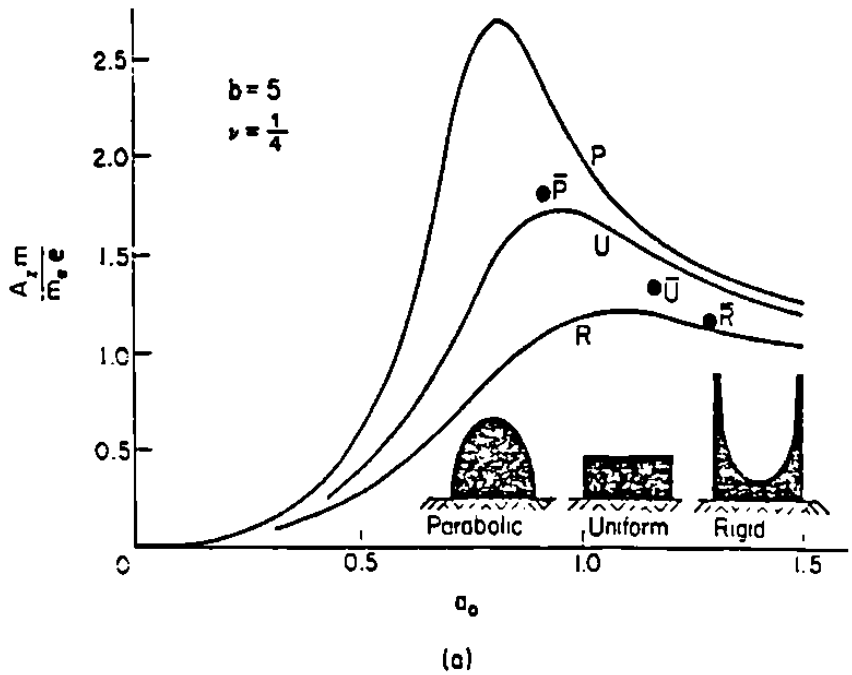

Fig. 4.4 Efecto de la Distribución de Presiones en la Respuesta Teórica de una Cimentación Rígida Vibrando Verticalmente

Se puede hacer un mejor cálculo de la respuesta si la amplitud se basa sobre un promedio compensado de los desplazamientos verticales. El efecto del cambio en la relación de poisson del semi-espacio elástico, en la respuesta de vibración en estado continuo de la cimentación, para el caso de una distribución de presiones con base rígida, se muestra en la Fig. 4.5.

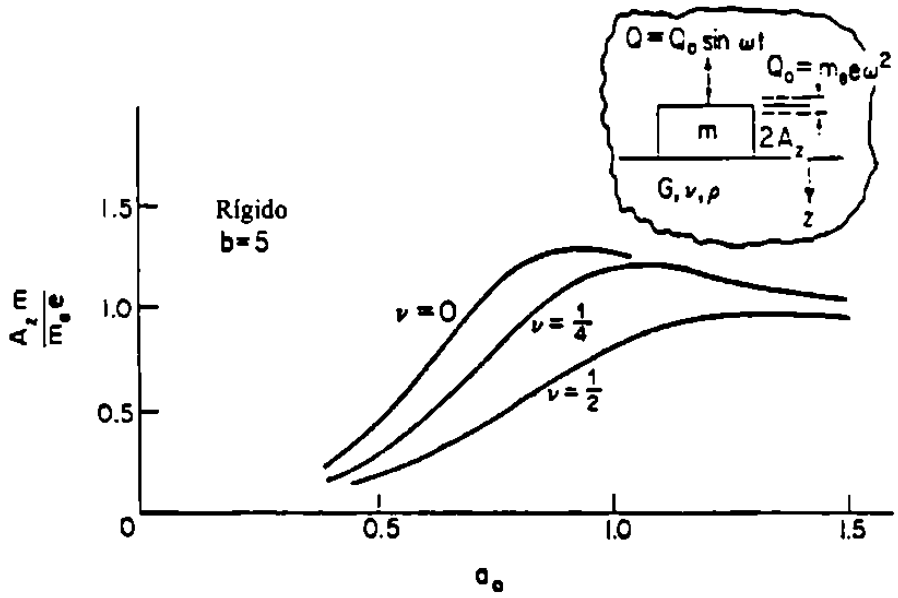

Fig. 4.5 Efecto de la Relación de Poisson

Los valores de las funciones de desplazamientos, f_1, f_2 para valores de υ =0.25, 0.33 y 0.5 para los tres tipos de distribución de presiones y para a_o = 0 a 1.5 fueron obtenidos por Sung (1953). La amplitud de la frecuencia de respuesta, para el caso de una fuerza de excitación constante y para una frecuencia que depende de la excitación, para diferentes valores de la relación de masa b, y para υ = 0.25 se muestran en la Fig. 4.6. Ésta figura presenta el efecto de la relación de masa en la cima de la amplitud de la respuesta. Una alta relación de masa (mayor peso de la cimentación y pequeño radio de contacto) implica una mayor amplitud de vibración para unas condiciones dadas. Otro punto significativo es que las curvas para bajos valores de relación de masa b corresponden con las curvas de altas relaciones de amortiguamiento, esto implica que las vibraciones verticales de un cuerpo rígido en un semi-espacio elástico son amortiguadas. Estos amortiguamientos ocurren

como un resultado de la energía que está siendo disipada dentro del semi-espacio elástico por las ondas elásticas radiadas del cuerpo en vibración.

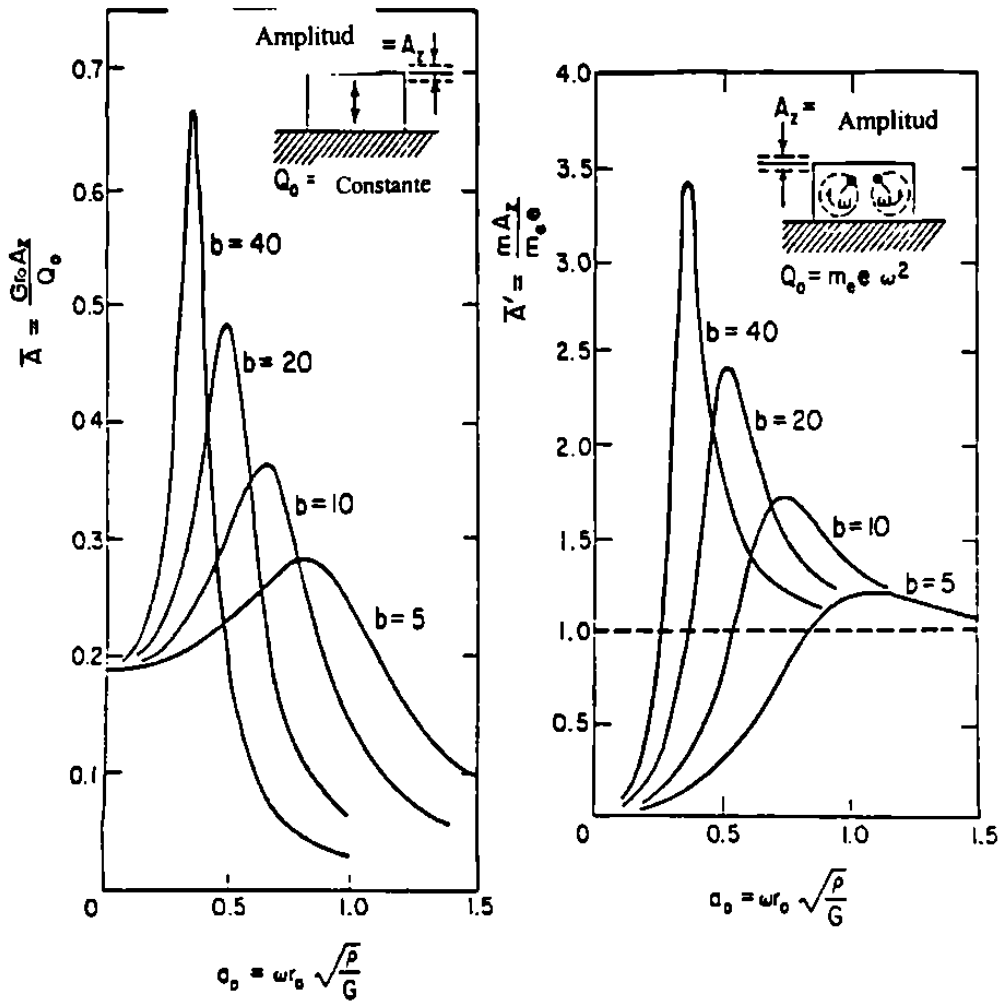

Fig. 4.6 Relaciones de Amplitud vs Frecuencia para Oscilación Vertical de una Cimentación Circular Rígida en un Semi-espacio Elástico

Los valores de las funciones de desplazamiento f_1, f_2 fueron calculados por Sung asumiendo que la distribución de presiones permanece sin cambio con la frecuencia. Bycroft (1956) evaluó un promedio compensado de los desplazamientos debajo de la cimentación y estableció funciones de desplazamientos para la distribución de las presiones de bases rígidas (fig. 4.7).

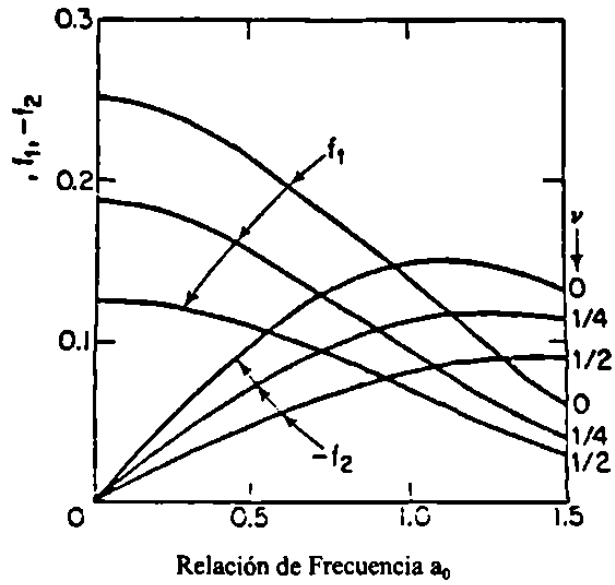

Fig. 4.7 Funciones de Desplazamientos

Para el caso estático, a_o y f_2 son iguales a cero. El desplazamiento estático z_s, debido a una carga vertical P_o es dado por:

$$z_s = \frac{P_o(1-\upsilon)}{4Gr_o} \qquad (4\text{-}11)$$

La ecuación (4-11) ayuda a definir el valor de la constante de resorte equivalente para vibraciones verticales:

$$k_z = \frac{4Gr_o}{(1-\upsilon)} \qquad (4\text{-}12)$$

La analogía de Hsieh.- Las soluciones básicas de Reissner fueron modificadas por Hsieh (1962) para proponer la obtención de una ecuación para vibraciones verticales, similar a la ecuación para vibraciones amortiguadas de un sistema de un grado de libertad. Un disco de radio r_o sin peso, circular y rígido se apoya en la superficie de un semi-espacio elástico como se muestra en la Fig. 4.8a, este disco fue sujeto a una fuerza oscilatoria vertical.

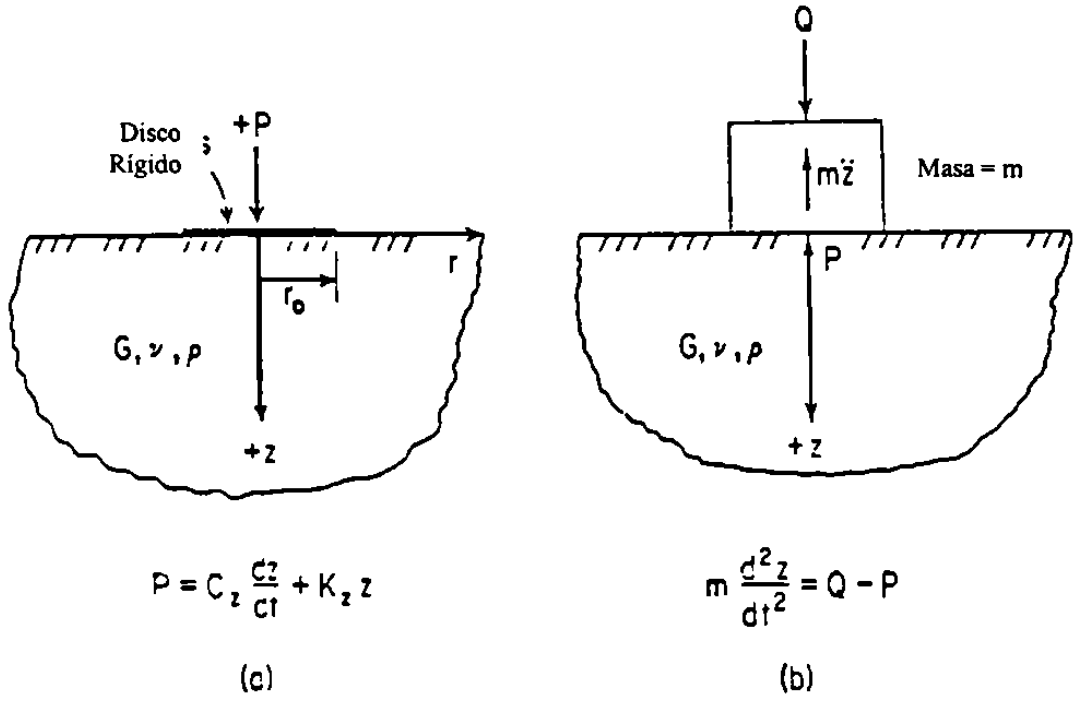

Fig. 4.8 Parámetros de las Ecuaciones de Hsieh

$$P = P_o e^{i\omega t} \qquad (4\text{-}13)$$

El desplazamiento vertical es dado por

$$z = \frac{P_o e^{i\omega t}}{Gr_o}\left(f_1 + if_2\right) \qquad (4\text{-}14)$$

Derivando la ecuación (4-14) con respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{P_o \omega e^{i\omega t}}{Gr_o}\left(if_1 - f_2\right) \qquad (4\text{-}15)$$

luego,

$$f_1 \omega z - f_2 \frac{dz}{dt} = \frac{P_o \omega}{Gr_o}\left(f_1^2 + f_2^2\right)e^{i\omega t} = \frac{P\omega}{Gr_o}\left(f_1^2 + f_2^2\right) \qquad (4\text{-}16)$$

despejando

$$P = -\frac{Gr_o}{\omega}\frac{f_2}{\left(f_1^2 + f_2^2\right)}\frac{dz}{dt} + Gr_o \frac{f_1}{f_1^2 - f_2^2} z \qquad (4\text{-}17)$$

La ecuación (4-17) puede ser simplificada a

$$P = C_z \frac{dz}{dt} + k_z z \qquad (4\text{-}18)$$

en donde

$$C_z = \frac{r_o^2}{a_o}\sqrt{G\rho}\left(\frac{-f_1}{f_1^2 + f_2^2}\right) \qquad (4\text{-}19)$$

y

$$k_z = Gr_o \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \qquad (4\text{-}20)$$

Luego, tanto C_z y k_z dependen de a_o y υ. Posteriormente Hsieh también consideró una cimentación cilíndrica rígida de un peso total W colocada en la superficie de un semi-espacio elástico y excitado por una fuerza periódica vertical Q (fig. 4.8b).

La ecuación de movimiento de tal sistema es dada por:

$$\frac{W}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = Q - P \qquad (4\text{-}21)$$

sustituyendo P de la ecuación (4-18) y $m = \frac{W}{g}$, se reduce a

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + C_z\frac{dz}{dt} + k_z z = Q = Q_o e^{i\omega t} \qquad (4\text{-}22)$$

La ecuación (4-22) es conocida como la *Analogía de Hsieh*, e ilustra que las vibraciones verticales de una cimentación en un semi-espacio elástico, pueden ser representadas desde el punto de vista de un modelo equivalente de masa-resorte-amortiguado, con la diferencia de que tanto la constante de resorte como el amortiguamiento dependen de la frecuencia.

La analogía de Lysmer.- Lysmer y Richart (1966) propusieron una simplificada analogía masa-resorte-amortiguamiento, conocida como la *Analogía de Lysmer,* para calcular la respuesta de una cimentación circular rígida, sujeta a oscilaciones verticales. También definieron una nueva función de desplazamiento F como:

$$F = \frac{4}{1-\upsilon} f = F_1 + iF_2 \qquad (4\text{-}23)$$

Los componentes de F son prácticamente independientes de υ, como se muestra en la Fig. 4.9.Lysmer también definió una relación de masa modificada como:

$$B_z = \frac{1-\upsilon}{4} b = \frac{1-\upsilon}{4} \frac{m}{\rho r_o^3} \qquad (4\text{-}24)$$

En el cual B_z es la relación de masa modificada para vibraciones verticales.

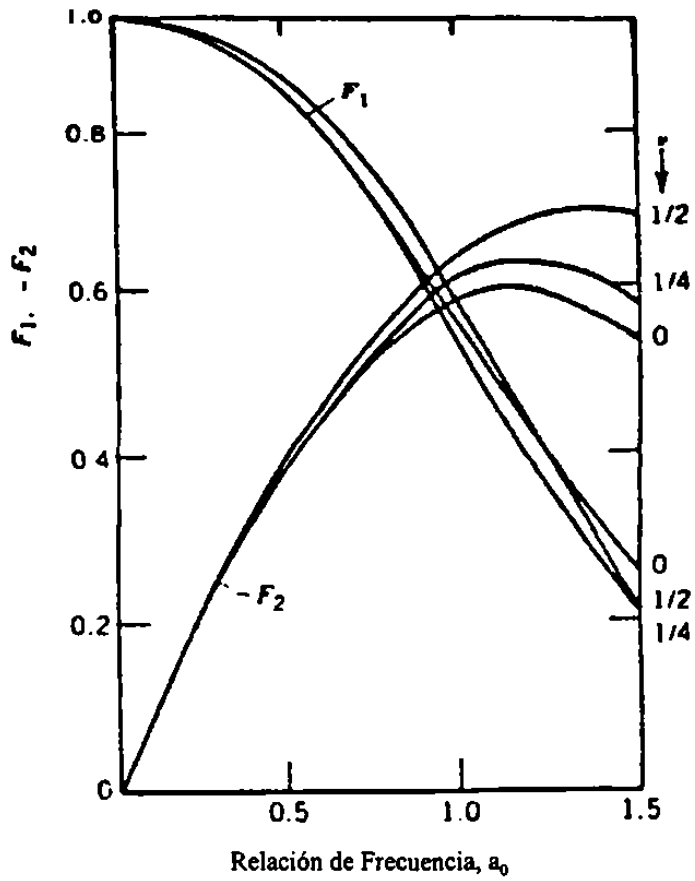

Fig. 4.9 Variación de la Función de Desplazamiento Modificada con la Relación de Poisson

Utilizando los valores de F y B_z Lysmer y Richart (1966) desarrollaron las curvas de respuesta mostradas en la Fig. 4.10.

Se estudió el efecto de la relación de la frecuencia en la variación en los factores de rigidez y amortiguamiento, se observó que las constantes independientes de los valores de frecuencia de estas cantidades pueden usarse en los intervalos de frecuencia de interés práctico. La constante de rigidez fue tomada igual al valor estático y es dada por:

$$k_z = \frac{4Gr_o}{1-\upsilon} \qquad (4\text{-}25)$$

la cual es la misma que la ecuación (4-12) y el amortiguamiento puede ser representado por

$$C_z = \frac{3.4r_o^2}{(1-\upsilon)}\sqrt{\rho G} \qquad (4\text{-}26)$$

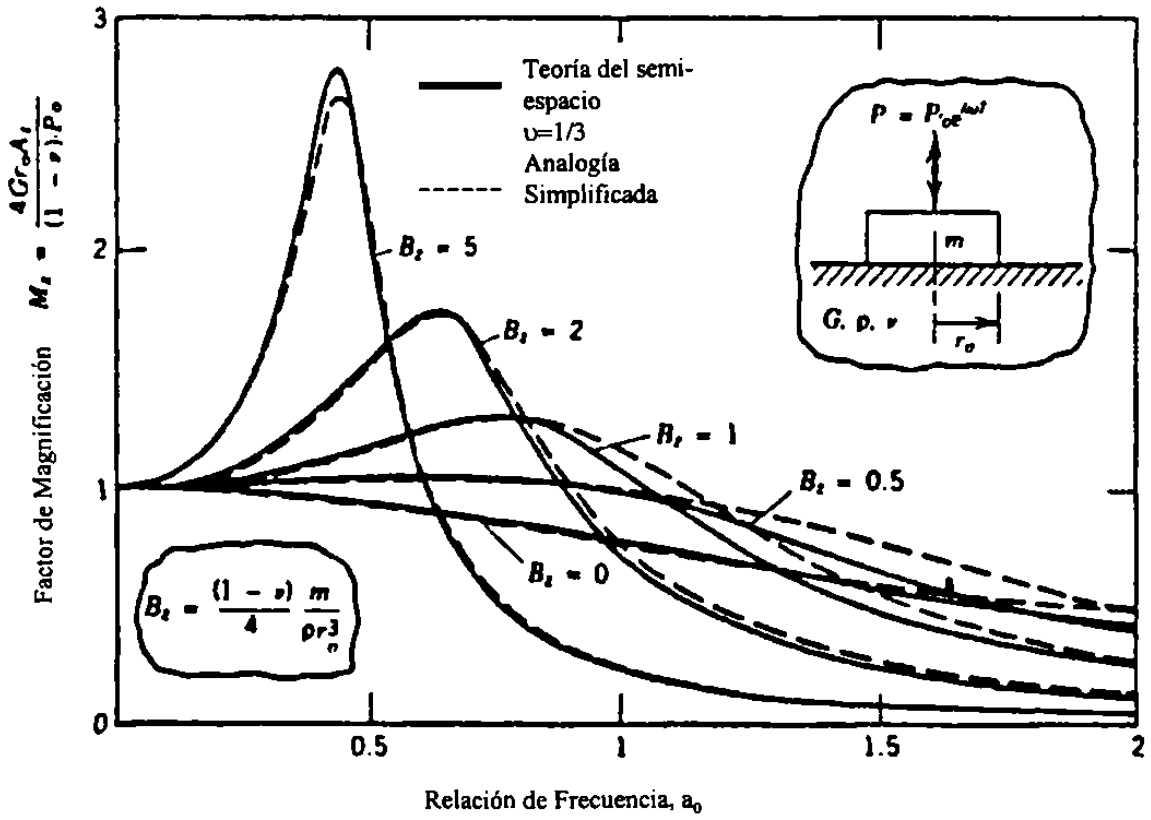

Fig. 4.10 Respuesta de una Cimentación Rígida Circular debido a una Fuerza Vertical Generada por una Fuerza de Excitación

Usando los valores de las constantes de rigidez y amortiguamiento y la teoría de vibraciones, la frecuencia natural ω_{nz} es determinada

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \qquad (4\text{-}27)$$

Se obtuvieron las curvas de respuesta entre el factor de amplificación, M_z y a_o, mostrados por las líneas punteadas en la Fig. 4.10. Las curvas continuas son para obtener soluciones exactas con el modelo del semi-espacio elástico. La ecuación de movimiento para la analogía de Lysmer puede ser escrita como

$$m\ddot{z} + \frac{3.4r_o^2}{(1-\upsilon)}\sqrt{\rho G}\dot{z} + \frac{4Gr_o}{(1-\upsilon)}z = P \qquad (4\text{-}28)$$

La relación de amortiguamiento ξ_z es obtenida como

$$\xi_z = \frac{C_z}{C_c} = \frac{C_z}{2\sqrt{k_z m}} = \frac{3.4r_o^2}{2(1-\upsilon)}\frac{\sqrt{\rho G}}{\sqrt{\frac{4Gr_o m}{1-\upsilon}}} \qquad (4\text{-}29)$$

o

$$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} \qquad (4\text{-}30)$$

La resonancia ocurre solamente cuando $B_z \geq 0.3$, y se establecieron las siguientes fórmulas aproximadas para la condición de resonancia para una fuerza de excitación independiente de la frecuencia:

$$\omega_{nz} = \frac{V_s}{r_o} \frac{\sqrt{B_z - 0.36}}{B_z} \qquad (4\text{-}31)$$

y

$$(A_z)_{max} = \frac{P_o}{k_z} \frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z - 0.18}} \qquad (4\text{-}32)$$

La amplitud de la frecuencia de operación puede ser obtenida usando la teoría de vibración.

$$A_z = \frac{P_z}{k_z\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi_z r\right)^2}} = \frac{P_z}{k_z\left\{\left|1-\left(\omega\ \omega_{nz}\right)^2\right|^2 + \left(2\xi_z\ \omega\ \omega_{nz}\right)^2\right\}^{1/2}} \qquad (4\text{-}33)$$

Para una fuerza de excitación dependiente de la frecuencia, lo que es normalmente el caso con fuerzas asociadas con operación de la maquinaria, la frecuencia de resonancia es dada por:

$$\omega_{nz} = \frac{V_s}{r_o}\sqrt{\frac{0.9}{B_z - 0.45}} \qquad (4\text{-}34)$$

La amplitud de vibración máxima para una fuerza de excitación dependiente de la frecuencia es:

$$A_z = \frac{m_e e}{m}\frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z - 0.18}} \qquad (4\text{-}35)$$

En donde m_e es la relación de la masa desbalanceada y e es la excentricidad de la masa m_e para el eje de rotación. La masa en la analogía es el total de la masa vibratoria en la superficie del semi-espacio elástico. La gráfica del factor de amplificación M_z contra a_o para fuerzas de excitación constante (fig. 4.10), muestra que los picos en la resonancia son relativamente planos, y que un significativo amortiguamiento es asociado con el modo vertical de vibrar.

4.2.2 Vibración Horizontal.

Como se señaló en la sección 4.1, las vibraciones por translación horizontal o deslizamiento y por rotación o cabeceo, de una cimentación en bloque, se acoplan y ocurren simultáneamente; pero por simplicidad es necesario estudiar primero los casos por separado, tanto del deslizamiento como del cabeceo.

La información de las frecuencias naturales únicamente por cabeceo o por deslizamiento se usa para calcular la respuesta de la cimentación bajo el efecto de ambas vibraciones, actuando simultáneamente. Se mostrará posteriormente que la frecuencia natural de solamente el deslizamiento es muy cercana a las frecuencias naturales bajas de cabeceo y deslizamiento combinado.

Arnold et al. (1955) y Bycroft (1956) presentan soluciones analíticas para la translación horizontal de un disco circular rígido, apoyado en la superficie de un semi-espacio elástico y excitado por una fuerza horizontal.

$$P_x = Pe^{i\omega t} \qquad (4\text{-}36)$$

Sus resultados se expresaron en términos de una relación de frecuencias dimensionales a_0 y una relación de masas b, la solución fue válida para todos los valores de υ, de una manera similar a la solución de Lysmer. Hall (1967) desarrolló una analogía entre la solución del semi-espacio elástico y un sistema equivalente masa-rigidez-amortiguamiento.

Analogía de Hall.- Hall (1967) definió la relación de masa modificada para deslizamiento como

$$B_z = \frac{7-8\upsilon}{32(1-\upsilon)}\frac{m}{\rho r_o^3} = \frac{7-8\upsilon}{32(1-\upsilon)}\frac{W}{\gamma_s r_o^3} \qquad (4\text{-}37)$$

El factor de frecuencia dimensional a_{0x} es igual a $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$. Las expresiones para los factores equivalentes de resorte y amortiguamiento son los siguientes:

El resorte equivalente.

$$k_x = \frac{32(1-\upsilon)}{7-8\upsilon} G r_o \qquad (4\text{-}38)$$

El amortiguamiento equivalente.

$$C_x = \frac{18.4(1-\upsilon)}{7-8\upsilon} r_o^2 \sqrt{\rho G} \qquad (4\text{-}39)$$

La relación de amortiguamiento ξ_x es dada por:

$$\xi_x = \frac{C_x}{C_c} = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}} \qquad (4\text{-}40)$$

La ecuación de la analogía para el deslizamiento es

$$m\ddot{x} + C_x\dot{x} + k_x x = P_x \qquad (4\text{-}41)$$

entonces la frecuencia circular se obtiene como:

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \qquad (4\text{-}42)$$

Las curvas para los factores de amplificación M_x contra el factor de frecuencia adimensional a_{0x}, derivadas completamente de la solución del semi-espacio elástico, se comparan en la Fig. 4.11 con las curvas de la solución de la analogía. Las crestas planas en las curvas de la Fig. 4.11 indican que el modo de vibración para el deslizamiento horizontal es también asociado con un amortiguamiento significativo tal como en el caso de las vibraciones verticales. También puede mencionarse que las expresiones para el deslizamiento a lo largo del eje Y son similares a las presentadas en esta sección.

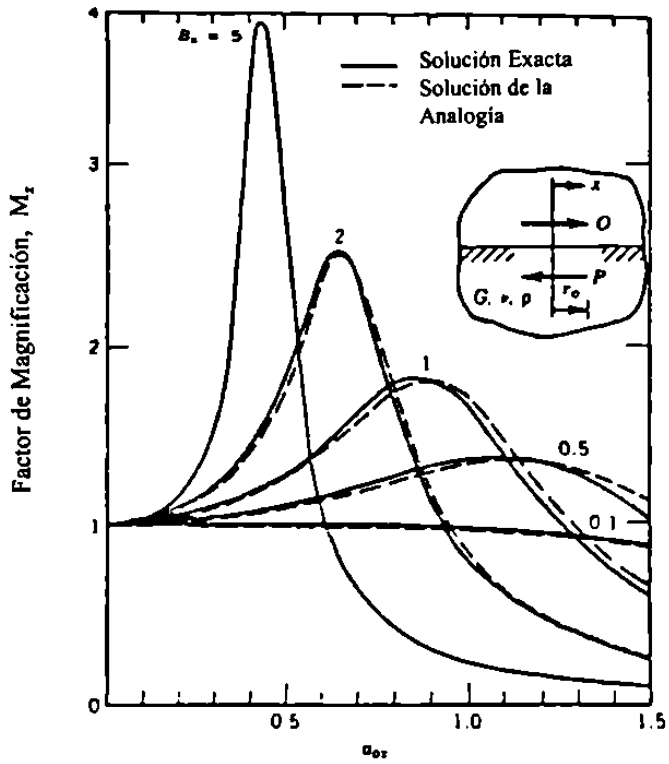

Fig. 4.11 Respuesta de una cimentación circular rígida en el semi-espacio elástico para deslizamiento puro.

4.3 Modo Rotacional

4.3.1 Vibración por Cabeceo.

El problema de vibración por balanceo o cabeceo puro fue analizado por Arnold et al. (1955) y Bycroft (1956). Ellos asumieron que la presión vertical bajo la cimentación varía de acuerdo con:

$$\sigma_z = \frac{3M_y re^{i\omega t}\cos\phi}{\pi r_o^3\sqrt{r_o^2 - r^2}} \qquad (4\text{-}43)$$

$$r \le r_o$$

En donde M_y es el momento de excitación en el plano ZX que causa la rotación alrededor del eje Y, y ϕ es el ángulo de rotación. La Fig. 4.12 ilustra la geometría del problema y muestra una gráfica del factor de amplificación $M\phi$ vs el factor de frecuencia dimensional $a_0\phi$ para diferentes valores de la relación de inercia B_ϕ (análogo a la relación de masa en el caso de translación). La relación de inercia es definida como:

$$B_\phi = \frac{3(1-\upsilon)}{8}\frac{M_{mo}}{\rho r_o^5} = \frac{3}{8}\frac{M_{mo}(1-\upsilon)}{(\gamma_s\ g)r_o^5} \qquad (4\text{-}44)$$

En donde M_{mo} es el momento de inercia de la masa de la cimentación y de la máquina alrededor del eje de rotación.

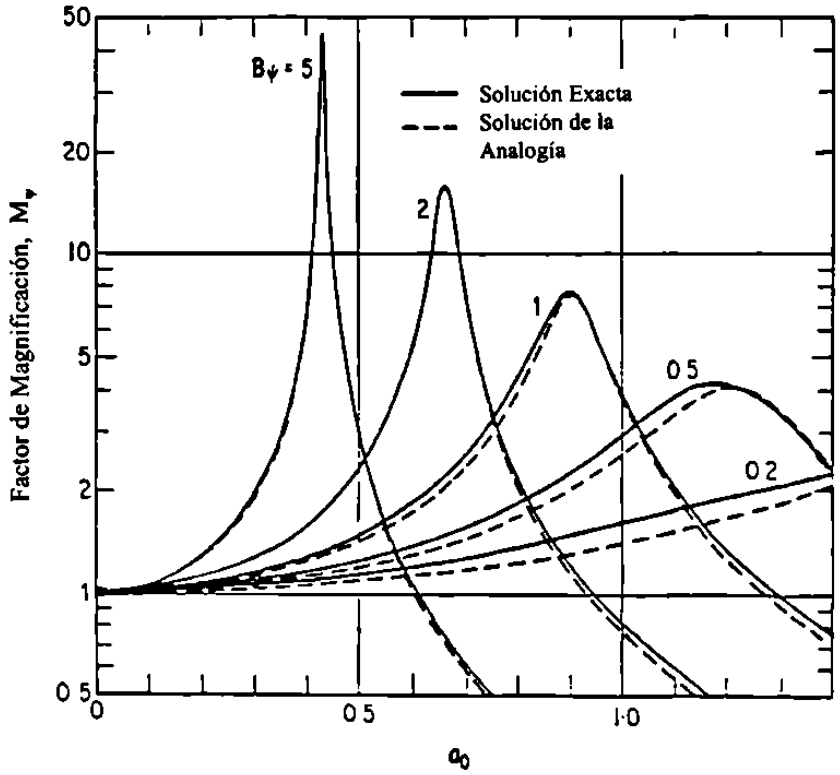

Fig. 4.12 Factor de Amplificación vs Factor de Frecuencia Dimensional para Cabeceo Solamente de una Cimentación Circular Rígida

Se puede apreciar en la Fig. 4.12 que las curvas de respuesta son caracterizadas por picos relativamente agudos, comparados con el caso de vibraciones verticales; por lo tanto, un amortiguamiento menor se asocia con el modo de vibración por cabeceo.

Hall (1967) propuso un modelo equivalente masa-rigidez-amortiguamiento que podría usarse para evaluar la respuesta del cabeceo, en una cimentación rígida, en la superficie de un semi-espacio elástico. Su analogía para el cabeceo es representada por:

$$M_{mo}\ddot{\phi} + C_{\phi}\dot{\phi} + k_{\phi}\phi = M_y e^{i\omega t} \qquad (4\text{-}45)$$

en donde

k_{ϕ} = Constante de resorte para el cabeceo.

C_{ϕ} = Constante de amortiguamiento.

Los términos k_{ϕ} y C_{ϕ} pueden ser calculados como sigue:

$$k_{\phi} = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\upsilon)} \qquad (4\text{-}46)$$

y

$$C_{\phi} = \frac{0.8r_o^4\sqrt{G\rho}}{(1-\upsilon)(1+B_{\phi})} \qquad (4\text{-}47)$$

para el amortiguamiento crítico

$$C_{\phi c} = 2\sqrt{k_{\phi}M_{mo}} \qquad (4\text{-}48)$$

y la relación de amortiguamiento para el cabeceo ξ_{ϕ} es dada por

$$\xi_{\phi} = \frac{C_{\phi}}{C_{\phi c}} = \frac{0.15}{(1+B_{\phi})\sqrt{B_{\phi}}} \qquad (4\text{-}49)$$

$$M_{mo}\ddot{\phi} + C_{\phi}\dot{\phi} + k_{\phi}\phi = M_y e^{i\omega t} \qquad (4\text{-}45)$$

en donde

k_{ϕ} = Constante de resorte para el cabeceo.

C_{ϕ} = Constante de amortiguamiento.

Los términos k_{ϕ} y C_{ϕ} pueden ser calculados como sigue:

$$k_{\phi} = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\upsilon)} \qquad (4\text{-}46)$$

y

$$C_{\phi} = \frac{0.8r_o^4\sqrt{G\rho}}{(1-\upsilon)(1+B_{\phi})} \qquad (4\text{-}47)$$

para el amortiguamiento crítico

$$C_{\phi c} = 2\sqrt{k_{\phi}M_{mo}} \qquad (4\text{-}48)$$

y la relación de amortiguamiento para el cabeceo ξ_{ϕ} es dada por

$$\xi_{\phi} = \frac{C_{\phi}}{C_{\phi c}} = \frac{0.15}{(1+B_{\phi})\sqrt{B_{\phi}}} \qquad (4\text{-}49)$$

la frecuencia natural sin amortiguamiento para el cabeceo $\omega_{n\phi}$ es igual a

$$\omega_{n\phi} = \sqrt{\frac{k_\phi}{M_{mo}}} \qquad (4\text{-}50)$$

La solución de la analogía es mostrada en la Fig. 4.12 por las líneas punteadas al lado de la solución del semi-espacio elástico y es muy similar a esta última.

4.3.2 Vibración por Torsión.

El problema de las vibraciones por torsión (rotación alrededor del eje Z) de una cimentación circular apoyada en la superficie del semi-espacio elástico fue analizado por Reissner (1937) y luego por Reissner y Sagoci (1944). Los desplazamientos horizontales en el caso de una cimentación rígida varía linealmente del eje de rotación como se muestra en la Fig. 4.13. La relación de inercia, B_ψ , para este caso puede ser definida como

$$B_\psi = \frac{M_{mz}}{\rho r_o^5} \qquad (4\text{-}51)$$

En donde M_{mz} = momento polar de inercia de la masa de la cimentación alrededor del eje vertical de rotación.

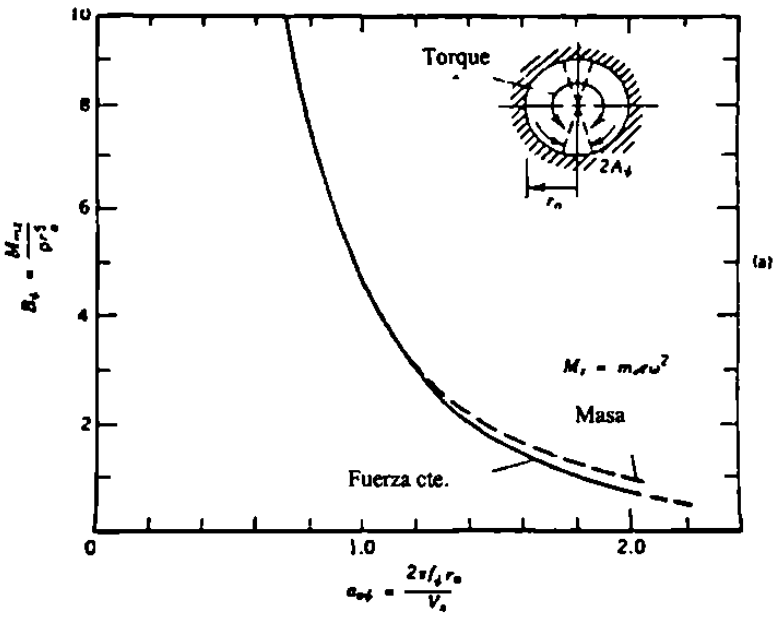

Fig. 4.13 Relación de la Inercia Contra el Factor de la Frecuencia Dimensional en la Resonancia, para Vibraciones por Torsión

La solución de la analogía para el caso de vibraciones por torsión puede ser expresarse como sigue (Richart 1970) :

$$M_{mz}\ddot{\psi} + C_{\psi}\dot{\psi} + k_{\psi}\psi = M_z e^{i\omega t} \qquad (4\text{-}52)$$

en donde

ψ = Rotación angular de la cimentación alrededor de su eje vertical.

C_{ψ} = Constante de amortiguamiento para vibraciones por torsión.

k_{ψ} = Constante equivalente de resorte del suelo para vibraciones por torsión.

$M_z e^{i\omega t}$ = Momento de excitación horizontal actuando alrededor del eje Z.

Las constantes de resorte k_ψ y la de amortiguamiento C_ψ son dadas por (Richart y Whitman, 1967).

$$k_\psi = \frac{16}{3} G r_o^3 \qquad (4\text{-}53)$$

$$C_\psi = \frac{1.6 r_o^4 \sqrt{G\rho}}{1 + B_\psi} \qquad (4\text{-}54)$$

La frecuencia natural no amortiguada $\omega_{n\psi}$ de las vibraciones por torsión es dada por:

$$\omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{k_\psi}{M_{mz}}} \qquad (4\text{-}55)$$

la amplitud de las vibraciones A_ψ es dada por:

$$A_\psi = \frac{M_z}{k_\psi \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n\psi}}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_\psi \frac{\omega}{\omega_{n\psi}}\right)^2}} \qquad (4\text{-}56)$$

en la cual la relación de amortiguamiento ξ_ψ es dada por:

$$\xi_\psi = \frac{0.5}{\left(1+2B_\psi\right)} \qquad (4\text{-}57)$$

Como en el caso de las vibraciones por balanceo o cabeceo, el amortiguamiento efectivo para las vibraciones por torsión es pequeño.

4.3.3 Vibración por Cabeceo-Deslizamiento.

Tanto el cabeceo o el deslizamiento puro es una condición ideal. En realidad, el movimiento de una cimentación excitada por una fuerza horizontal o un momento vertical involucra tanto el cabeceo como el deslizamiento, en la Fig. 4.14 se ilustran las condiciones de una cimentación circular rígida que se apoya en la superficie de un semi-espacio elástico y es excitado por un momento vertical

$$M_y(t) = M_y e^{i\omega t} \qquad (4\text{-}58)$$

y una fuerza horizontal actuando en el centro de gravedad.

$$P_x(t) = P_x e^{i\omega t} \qquad (4\text{-}59)$$

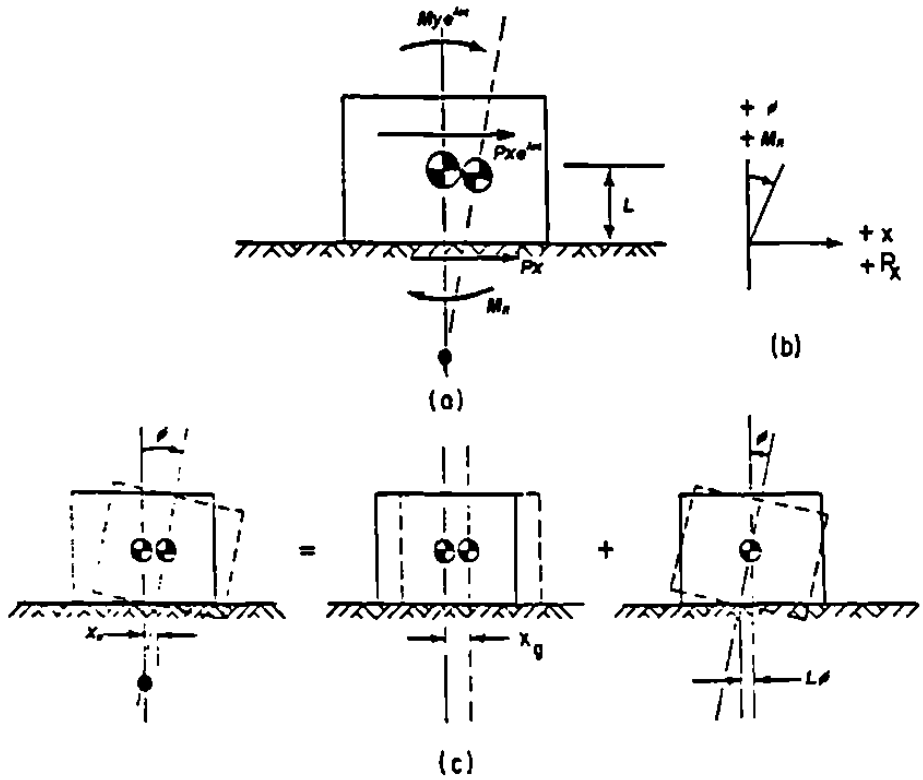

Fig. 4.14 Vibraciones por Cabeceo-Deslizamiento de un Bloque Circular Rígido en el Semi-espacio Elástico.

Haciendo que el centro de gravedad de la cimentación esté ubicado de tal manera que su eje vertical pase através del centro de la base circular, y a una altura L con respecto a la superficie del semi-espacio, el movimiento de la cimentación puede ser expresado en términos de la traslación del centro de gravedad x y el ángulo de rotación ϕ.

La ecuación de movimiento puede obtenerse considerando el equilibrio entre las fuerzas y momentos de excitación y los resistentes, en términos de la segunda ley de Newton.

La fuerza resistente horizontal R_x en la base es dada por:

$$R_x = c_x \dot{x}_o + k_x x_o \qquad (4\text{-}60)$$

en donde x_o = desplazamiento en la base y se obtiene como:

$$x_o = x - L\phi \qquad (4\text{-}61)$$

la ecuación (4-60) puede luego ser escrita como:

$$R_x = c_x \dot{x} + k_x x - Lc_x \dot{\phi} - Lk_x \phi = 0 \qquad (4\text{-}62)$$

Similarmente, el momento M_R, que representa el momento debido a la resistencia del semi-espacio elástico, puede escribirse como:

$$M_R = c_\phi \dot{\phi} + k_\phi \phi \qquad (4\text{-}63)$$

la ecuación de movimiento para el deslizamiento es entonces:

$$m\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x - Lc_x \dot{\phi} - Lk_x \phi = P_x e^{i\omega t} \qquad (4\text{-}64)$$

y para el cabeceo

$$M_m\ddot{\phi} = M_y(t) - M_R + LR_x \qquad (4\text{-}65)$$

En donde M_m es el momento de inercia de la masa de la cimentación con respecto al eje que pasa através del centro de gravedad del sistema y perpendicular al plano de vibraciones.

Sustituyendo M_R y R_x de las ecuaciones (4-63) y (4-62) respectivamente, en la ecuación (4-65), se obtiene:

$$M_m\ddot{\phi} + \left(c_\phi + L^2 c_x\right)\dot{\phi} + \left(k_\phi + L^2 k_x\right)\phi - Lc_x\dot{x} - Lk_x x = M_y e^{i\omega t} \qquad (4\text{-}66)$$

Las ecuaciones (4-64) y (4-66) demuestran que el acoplamiento de los dos movimientos (cabeceo y deslizamiento) se origina porque el centro de gravedad de la cimentación y el punto donde se aplica la reacción horizontal R_x del semi-espacio elástico no son los mismos. Si L es igual a cero, no hay efecto de acoplamiento y tanto el deslizamiento como el cabeceo son independientes. Se puede obtener soluciones particulares de las ecuaciones (4-64) y (4-66) sustituyendo:

$$x = Ae^{i\omega_{nd} t} \qquad (4\text{-}67)$$

y

$$\phi = Be^{i\omega_{nd}t} \qquad (4\text{-}68)$$

En donde A y B son constantes arbitrarias.

Cuando una cimentación se apoya en un semi-espacio elástico; los valores, tanto de la constante de resorte como de los coeficientes de amortiguamiento, son dependientes de la frecuencia y deben ser calculados para cualquier frecuencia dada, antes de que las ecuaciones mencionadas puedan ser resueltas; sin embargo, si se considera que la constante de resorte y el amortiguamiento tienen un valor constante independiente de la frecuencia, tal como en el caso de la solución de la analogía para el deslizamiento y el cabeceo, las ecuaciones (4-64) y (4-66) pueden ser fácilmente resueltas.

Las frecuencias naturales del acoplamiento del cabeceo y el deslizamiento se obtienen igualando a cero las funciones $P_x e^{i\omega t}$ y $M_y e^{i\omega t}$ en las ecuaciones (4-64) y (4-66). Esto se muestra a continuación:

$$m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x - Lc_x\dot{\phi} - Lk_x\phi = 0 \qquad (4\text{-}69)$$

y

$$M_m\ddot{\phi} + \left(c_\phi + L^2 c_x\right)\dot{\phi} + \left(k_\phi + L^2 k_x\right)\phi - Lc_x\dot{x} - Lk_x x = 0 \qquad (4\text{-}70)$$

Por sustitución de las ecuaciones (4-67) y (4-68) dentro de las ecuaciones (4-69) y (4-70) y reordenando los términos, la ecuación de la frecuencia se obtiene como se muestra abajo:

$$\left[\omega_{nd}^{4} - \omega_{nd}^{2}\left(\frac{\omega_{n\phi}^{2} + \omega_{nx}^{2}}{\gamma} - \frac{4\xi_x \xi_\phi \omega_{nx}\omega_{n\phi}}{\gamma}\right) + \frac{\omega_{nx}^{2}\omega_{n\phi}^{2}}{\gamma}\right]^2$$

$$+4\left[\frac{\xi_x \omega_{nx}\omega_{nd}}{\gamma}\left(\omega_{n\phi}^{2} - \omega_{nd}^{2}\right) + \frac{\xi_\phi \omega_{n\phi}\omega_{nd}}{\gamma}\left(\omega_{nx}^{2} - \omega_{nd}^{2}\right)\right]^2 = 0 \qquad (4\text{-}71)$$

en donde:

$$\gamma = \frac{M_m}{M_{mo}} \qquad (4\text{-}72)$$

ω_{nd} = Frecuencia natural amortiguada para el cabeceo y el deslizamiento juntos.

ξ_x = Relación de amortiguamiento para vibraciones por deslizamiento.

ξ_ϕ = Relación de amortiguamiento para vibraciones por cabeceo.

Si $\xi_x = \xi_\phi = 0$, es decir, cuando no hay amortiguamiento en el sistema, la ecuación (4-71) se reduce a:

$$\omega_n^4 - \omega_n^2\left(\frac{\omega_{nx}^2 + \omega_{n\phi}^2}{\gamma}\right) + \frac{\omega_{nx}^2\omega_{n\phi}^2}{\gamma} = 0 \qquad (4\text{-}73)$$

En donde ω_n es la frecuencia natural no amortiguada del sistema.

Debido a que el efecto del amortiguamiento, en la frecuencia natural es pequeño, se puede calcular la frecuencia natural no amortiguada para la vibración por cabeceo y deslizamiento, usando la ecuación (4-73). Resolviendo la ecuación (4-73) como una cuadrática, con valor característico de ω_n^2, se obtiene:

$$\omega_{n1,2}^2 = \frac{1}{2\gamma}\left[\left(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\phi}^2\right) \pm \sqrt{\left(\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2\right)^2 - 4\gamma\omega_{n\phi}^2\omega_{nx}^2}\right] \qquad (4\text{-}74)$$

ω_{n1} y ω_{n2} son las dos frecuencias naturales del sistema suelo-cimentación que se encuentra vibrando debido a la combinación del cabeceo y el deslizamiento. El cabeceo y el deslizamiento pueden ser coincidentes o no coincidentes dependiendo del valor de la frecuencia de operación ω y de las dos frecuencias naturales ω_{n1} y ω_{n2}.

Las amplitudes amortiguadas de la combinación del cabeceo y deslizamiento ocasionadas por un momento de excitación M_y pueden ser obtenidas de las siguientes ecuaciones :

$$A_x = \frac{M_y}{M_m} \frac{\left[\left(\omega_{nx}^2\right)^2 + \left(2\xi_x \omega_{nx}\right)^2\right]^{1/2}}{\Delta\left(\omega^2\right)} \qquad (4\text{-}75)$$

$$A_\phi = \frac{M_y}{M_m} \frac{\left[\left(\omega_{nx}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\xi_x \omega_{nx} \omega\right)^2\right]^{1/2}}{\Delta\left(\omega^2\right)} \qquad (4\text{-}76)$$

el valor de $\Delta\left(\omega^2\right)$ se obtiene como se muestra abajo

$$\Delta\left(\omega^2\right) = \left[\begin{array}{l} \left(\omega^4 - \omega^2\left\{\dfrac{\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2}{\gamma} - \dfrac{4\xi_x \xi_\phi \omega_{nx} \omega_{n\phi}}{\gamma}\right\} + \dfrac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\phi}^2}{\gamma}\right)^2 \\ + 4\left\{\xi_x \dfrac{\omega_{nx}\omega}{\gamma}\left(\omega_{n\phi}^2 - \omega^2\right) + \dfrac{\xi_\phi \omega_{n\phi}\omega}{\gamma}\left(\omega_{nx}^2 - \omega^2\right)\right\}^2 \end{array}\right]^{1/2} \qquad (4\text{-}77)$$

Las siguientes ecuaciones son para obtener las amplitudes amortiguadas del cabeceo y deslizamiento ocasionadas por una fuerza horizontal P_x .

$$A_x = \frac{P_x}{mM_m} \frac{\left[\left(-M_m\omega^2 + k_\phi + L^2 k_x\right)^2 + 4\omega^2\left(\xi_\phi\sqrt{k_\phi M_{mo}} + L^2 \xi_x \sqrt{k_x m}\right)^2\right]^{1/2}}{\Delta\left(\omega^2\right)} \qquad (4\text{-}78)$$

y

$$A_\phi = \frac{P_x L}{M_m} \frac{\omega_{nx}\left(\omega_{nx}^2 + 4\xi_x \omega^2\right)^{1/2}}{\Delta\left(\omega^2\right)} \qquad (4\text{-}79)$$

En el caso que la cimentación esté sujeta a la acción conjunta de un momento y una fuerza horizontal, las amplitudes resultantes del deslizamiento y el cabeceo pueden obtenerse sumando, a las anteriores, las soluciones correspondientes de las ecuaciones (4-75) y (4-76).

Se puede obtener soluciones más exactas para las ecuaciones (4-64) y (4-66) tanto del semi-espacio elástico, como de la analogía de Hall usando técnicas numéricas en una computadora digital.

En este capítulo se consideró que la cimentación tiene un área de contacto circular; sin embargo, la mayoría de las cimentaciones son rectangulares o cuadradas. En el siguiente capítulo se tomará en cuenta el efecto de la forma de la cimentación, en su respuesta dinámica.

CAPITULO 5

ANALISIS DEL BLOQUE DE CIMENTACION PARA MAQUINARIA

5.1 Efecto de la Forma de la Cimentación en la Respuesta

La frecuencia natural de una cimentación está influida por su forma. La teoría del semi-espacio fue desarrollada para un oscilador con un área circular. A continuación se presenta la aplicación para cimentaciones con área de contacto rectangulares o cuadradas.

El problema que involucra las oscilaciones verticales de una cimentación rectangular en la superficie del semi-espacio elástico se analizó por Sung (1953), quien usó la solución simplificada de Lamb (1904). Kobori (1962) y Thomson-Kobori (1963) obtuvieron las funciones de los desplazamientos, f_1 y f_2 para los desplazamientos en el centro de un área con superficie rectangular uniformemente cargada. Elorduy (1967) obtuvo soluciones (en términos de las funciones de desplazamientos f_1 y f_2) para vibraciones verticales de cimentaciones rectangulares (a/b = 2) y cuadradas (a/b = 1) apoyadas en la superficie del semi-espacio elástico para un caso típico de ν = ¼ y comparándolas con las soluciones de Sung (1953) y Bycroft (1956), quien basó sus cálculos en un área circular equivalente. Sus soluciones son mostradas en

la Figura 5.1, para los casos de cimentaciones cuadradas y rectangulares, respectivamente.

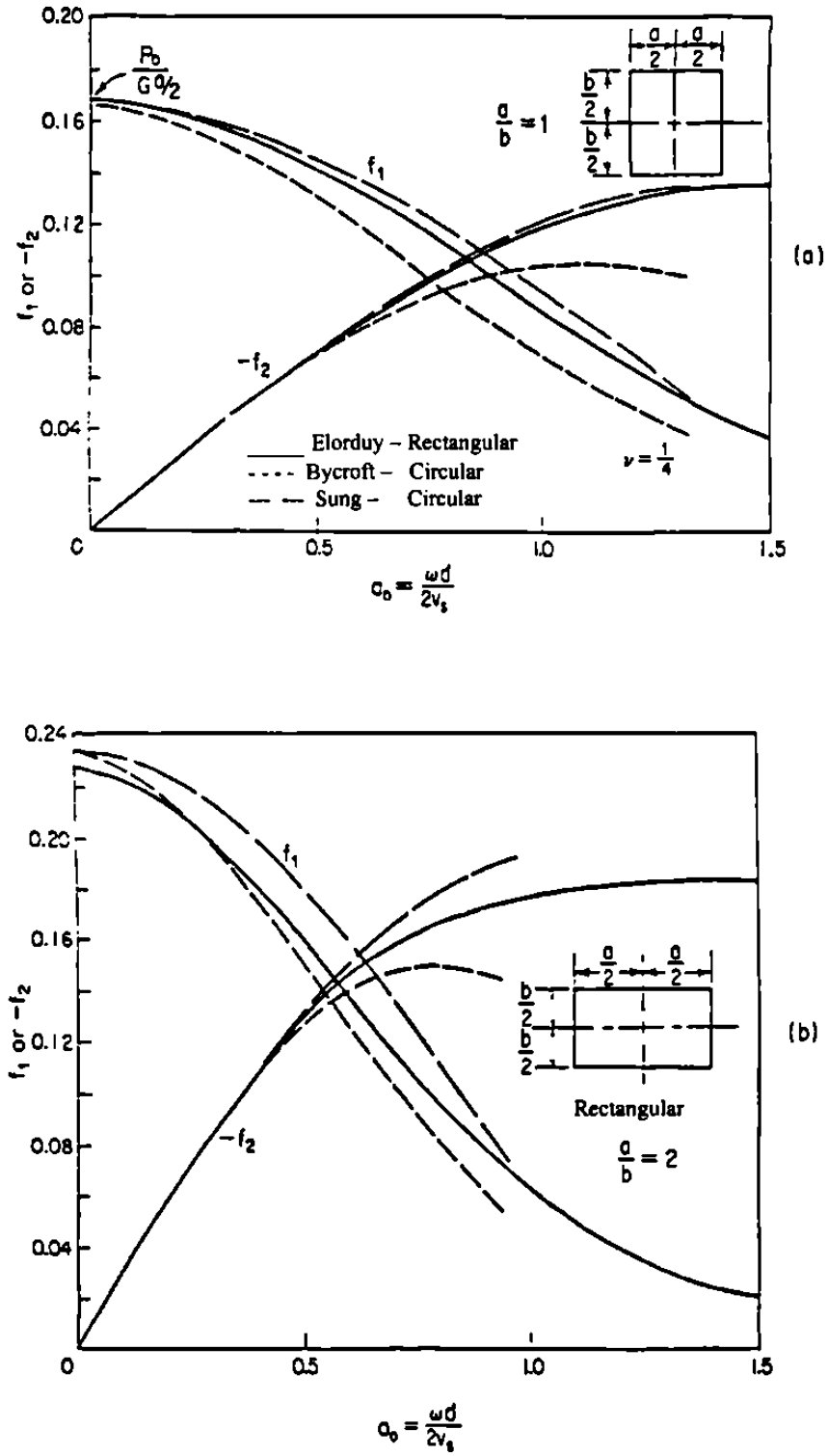

Fig. 5.1 Funciones de Desplazamientos para Vibración Vertical de Cimentaciones Cuadradas y Rectangulares

Debido a que estas funciones de desplazamientos son prácticamente las mismas, es aceptable usar las soluciones de una base circular rígida teniendo un área equivalente para una cimentación cuadrada o rectangular determinada, en el cálculo aproximado de la respuesta.

Similarmente, para las vibraciones por cabeceo o torsión de cimentaciones cuadradas o rectangulares, puede ser calculado un radio equivalente de una cimentación circular, tal que el momento de inercia de la cimentación dada con respecto al eje de rotación sea el mismo que el de una cimentación circular equivalente con respecto al mismo eje. Luego, el radio equivalente puede ser calculado como sigue:

Para traslación a lo largo de los ejes Z, X ó Y,

$$r_0 = r_{0z} = r_{0x} = r_{0y} = \left(\frac{ab}{\pi}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad (5\text{-}1)$$

Para cabeceo alrededor del eje Y ó X,

$$r_0 = r_{0\phi} = \left(\frac{ba^3}{3\pi}\right)^{1/4} \qquad (5\text{-}2)$$

Para vibraciones torsionales respecto al eje Z,

$$r_0 = r_{0\psi} = \left[\frac{ab\left(a^2+b^2\right)}{6\pi}\right]^{1/4} = \left(\frac{2I_z}{\pi}\right)^{1/4} \qquad (5\text{-}3)$$

en donde

a = Largo de la cimentación (perpendicular al eje de rotación para el cabeceo)

b = Ancho de la cimentación (paralelo al eje de rotación para el cabeceo)

Para cimentaciones con relaciones largo/ancho mayores que 6, una condición ideal bi-dimensional puede ser asumida y las cimentaciones tratadas como franja son analizadas aplicando el método de Quinlan (1953).

Lo anterior implica que una cimentación de cualquier forma sea circular o rectangular, responderá similarmente si la magnitud de las áreas de las cimentaciones son las mismas. Una cimentación con un área de 8 m^2 tendrá un radio equivalente de 1.6 m para oscilaciones de traslación; esta cimentación puede ser un círculo con un diámetro de 3.2 m o un rectángulo, con una relación largo/ancho tal que tenga la misma área. Sin embargo, la respuesta real de estas dos cimentaciones puede no ser la misma.

Se ha encontrado que dos cimentaciones de diferentes formas no se comportarán idénticamente, aunque los radios equivalentes basado en áreas iguales para modos de translación sean los mismos (Chae, 1969). En un análisis exacto, la forma de la cimentación debe ser tomada en cuenta. Basado en sus observaciones experimentales (Chae, 1969) sugirió que el concepto de áreas circulares equivalentes puede ser usado para predecir las frecuencias

naturales, pero que las características del perímetro deberán tomarse en cuenta para hacer unas razonables predicciones de las amplitudes.

El problema de vibraciones verticales de cimentaciones rectangulares también ha sido estudiado por Dasgupta Y Rao (1978), quienes usaron un modelo tridimensional en elemento finito y tres distribuciones de presión vertical diferentes para la interface suelo-cimentación; sin embargo, su modelo es muy complejo para el diseño de cimentaciones de maquinaria ordinarias. Además, no hay comparaciones con observaciones reales que hayan sido reportadas.

Es una práctica común transformar un área de cualquier forma a un círculo equivalente de la misma área (para modos de translación) o equivalentes momentos de inercia (para modos de cabeceo o de torsión) (Richart y Whitman, 1967). Dobry y Gazetas (1986) sugieren que este procedimiento usando el concepto de radio equivalente tiene limitaciones y la forma de la cimentación definida por la relación de aspecto a/b tiene una influencia significativa en los valores de la rigidez dinámica y amortiguamiento, especialmente en casos de cimentaciones grandes.

Por otra parte, al tener una cimentación circular de área equivalente, se pueden calcular las constantes necesarias para obtener su respuesta, como por ejemplo, las constantes de resorte, las cuales representan una relación lineal entre la carga aplicada y el desplazamiento de la cimentación, lo cual implica una relación lineal esfuerzo-deformación para el suelo.

Por consiguiente, siguiendo la teoría de elasticidad, se pueden tener útiles fórmulas para las constantes de resorte, para cimentaciones de formas simples.

Estas se obtienen a través de la teoría de la elasticidad para cimentaciones rectangulares, apoyadas en la superficie del semi-espacio elástico. Las expresiones han sido obtenidas para cimentaciones rígidas, excepto para el caso del movimiento horizontal, en donde la constante de resorte fue obtenida asumiendo una distribución uniforme de esfuerzos cortantes en el área de contacto y calculando el desplazamiento horizontal promedio de esta área.

Estas fórmulas se aplican para situaciones correspondientes a un bloque rígido o una losa de cimentación con poca profundidad, dentro del suelo.

Vibración Vertical (Barkan, 1962)

$$k_z = \frac{G}{1-\upsilon}\beta_z\sqrt{ab} \qquad (5\text{-}4)$$

Vibración Horizontal (Barkan, 1962)

$$k_x = 2(1+\upsilon)G\beta_x\sqrt{ab} \qquad (5\text{-}5)$$

Vibración por Cabeceo (Gorbunov-Possadov, 1961)

$$k_\psi = \frac{G}{1-\upsilon}\beta_\psi ba^2 \qquad (5\text{-}6)$$

Los valores para β_z, β_x y β_ψ son dados en la Figura 5.2 para varios valores de a/b.

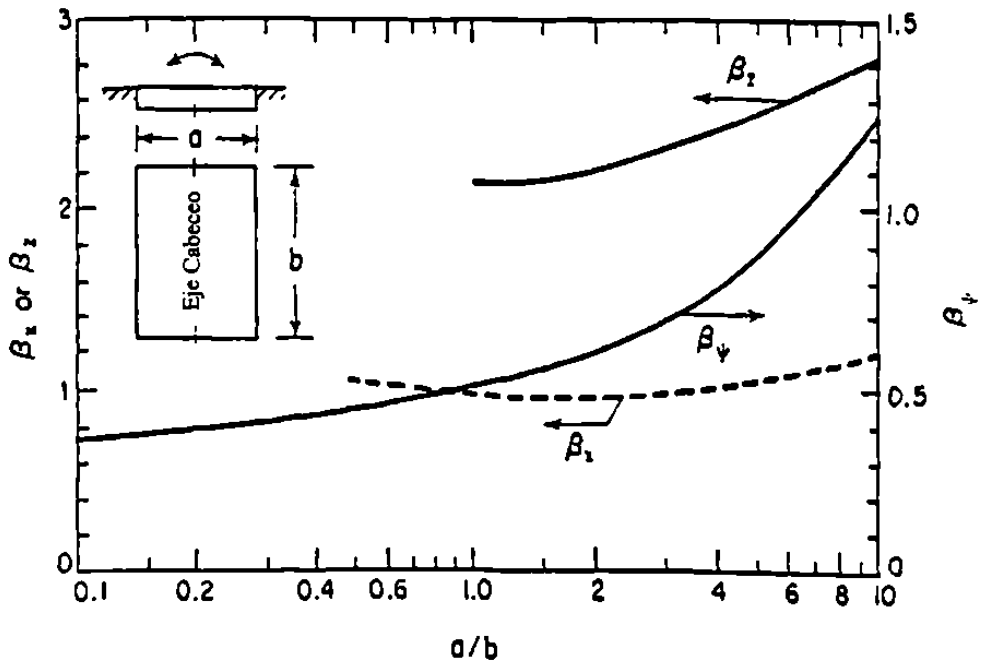

Fig. 5.2 Coeficientes β_z, β_x y β_ψ para Cimentaciones Rectangulares

5.2 Efecto del Encajonamiento de la Cimentación

El efecto del encajonamiento es un incremento de la resistencia del suelo al movimiento de la cimentación; por lo cual se incrementa la constante de resorte efectiva. En la Figura 5.3 se ilustra el cambio en la constante de resorte vertical, para cimentaciones circulares, con respecto al incremento de la profundidad encajonada. La curva (a) representa una cimentación rígida la cual tiene adherencia con el suelo a lo largo de la superficie vertical, de tal modo que genera una capa con fricción que resiste el movimiento vertical del bloque, así como desarrolla también una resistencia por presión en la base. La curva (b)

corresponde a la situación de una cimentación encajonada la cual es aislada del suelo a lo largo de la superficie vertical y muestra también que el incremento de la constante de resorte se genera solamente por la presión aplicada en la base para diferentes profundidades. La constante de resorte que corresponde a la curva (b) se obtuvo del asentamiento promedio producido por una carga uniformemente distribuida, aplicada a diferentes profundidades de encajonamiento.

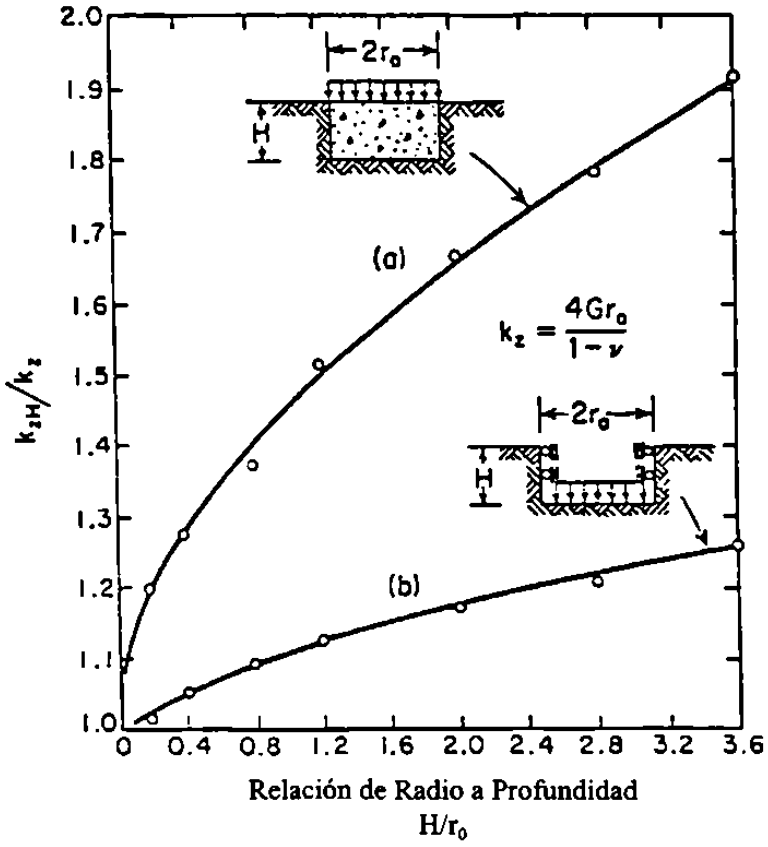

Fig. 5.3 Efecto de la Profundidad de Encajonamiento en la Constante de Resorte para Cimentaciones Circulares Cargadas Verticalmente.

Por comparación de las constantes de resorte para la curva (a) con los lados adheridos, y la curva (b) sin los lados adheridos, es posible separar los efectos

del apoyo y de la fricción. La información mostrada en la Figura 5.3 fue preparada por Kaldjian (1969) de una solución del problema de elasticidad por el método del elemento finito.

La profundidad de encajonamiento puede producir aun más efectos significativos en las constantes de resorte para movimientos de cabeceo y deslizamiento de la cimentación, todavía, a finales de los años sesenta no se habían encontrado las soluciones que resolvieran este problema.

Otro efecto que provee mayor rigidez a la constante de resorte de la cimentación es la presencia de un estrato rígido por debajo del estrato elástico. Esto es, un estrato elástico de poco espesor, soportado por una base rígida permite pequeños desplazamientos de la cimentación, para una carga dada, en comparación con los desplazamientos en el semi-espacio elástico.

5.3 Procedimiento de Diseño para el Bloque de Cimentación

Se han considerado, hasta ahora, tanto los métodos de análisis de cimentaciones en bloque, como los requerimientos de diseño de cimentaciones para maquinaria. Actualmente existen dos propuestas que están siendo utilizadas comúnmente para el diseño de cimentaciones de maquinaria, las cuales son: El semi-espacio elástico (Richart et al. , 1970) y la propuesta de los resortes lineales elásticos sin peso (Barkan, 1962).

A continuación, se establece un procedimiento general, paso a paso, para el diseño de cimentaciones con cualquiera de las dos propuestas. Es esencial

obtener los datos pertinentes de la máquina y el suelo, antes de hacer un diseño racional para una cimentación que soportará una maquinaria. La obtención de los datos relevantes es el primer y más importante paso y esto se explica enseguida, siguiendo después con una guía para seleccionar las dimensiones de prueba para la cimentación y las constantes dinámicas del suelo.

1. Datos de la maquinaria.

La siguiente información puede obtenerse de los fabricantes de la maquinaria, como guía para el diseño:

a) El arreglo de la maquinaria y un diagrama de cargas consistente de una planta, elevación y una sección mostrando los detalles de conexiones y los puntos de aplicación de todas las cargas en la cimentación.

b) La altura del eje principal de la máquina con respecto a la parte superior de la cimentación.

c) La capacidad o rendimiento nominal de la maquinaria.

d) La velocidad de operación de la maquinaria.

e) Las fuerzas y momentos excitadores de la máquina.

f) La posición de las cavidades, los espacios abiertos y la localización de los tornillos de anclaje.

g) Las amplitudes permisibles de vibración.

2. Datos del suelo.-

Se debe obtener la siguiente información, acerca del suelo de desplante de la cimentación:

a) El perfil estratigráfico del suelo y sus datos (incluyendo las propiedades del suelo, generalmente hasta una profundidad igual a dos veces el ancho de la cimentación propuesta o hasta el estrato resistente).

b) La investigación del suelo, para averiguar la capacidad de carga admisible y determinar las propiedades dinámicas del suelo.

c) La posición relativa del nivel freático, en el caso de existir éste en las diferentes etapas del año.

d) La distancia mínima de cualquier cimentación importante en las inmediaciones de la cimentación para la maquinaria.

3. Dimensiones de prueba de la cimentación.

Debe seleccionarse, por criterio, un tamaño apropiado de la cimentación, para un análisis preliminar. Las siguientes directrices serán útiles para esta propuesta y servirán para minimizar el número de pruebas.

a) Area del Bloque.- El tamaño de una cimentación en bloque (visto en planta) deberá ser mayor que el fondo de la placa que soporta a la máquina, con un mínimo de 150 mm de espacio libre alrededor de la placa.

b) Peralte.- En todos los casos, la cimentación deberá tener un peralte suficiente para desplantarse en el estrato de apoyo y para asegurar la estabilidad contra la falla.

c) Centro de Gravedad.- La combinación del centro de gravedad de la maquinaria y la del bloque deberá estar por debajo la parte superior de la cimentación, y en ningún caso deberá estar encima de la cimentación.

d) Excentricidad.- La excentricidad no deberá exceder el 5 % de la menor dimensión horizontal del bloque.

Para simplificar los cálculos, es aconsejable seleccionar una forma simple en planta. Deberá evitarse cualquier muesca, proyección y asimetría, excepto cuando éstas sean necesarias.

4. Selección de las constantes del suelo.

Para un diseño preliminar, las constantes del suelo pueden obtenerse según lo mencionado en el capítulo 4. Para todos los casos, es recomendable que las propiedades dinámicas del suelo sean determinadas en el laboratorio y en el campo, para al menos tres diferentes niveles de deformaciones. Este punto deberá tenerse en mente cuando se esté realizando una exploración en el suelo. Puede seleccionarse un valor particular para un nivel anticipado de deformación, en un problema de diseño dado.

Deberá aplicarse una corrección para la presión de confinamiento efectiva y para los niveles de deformación por corte, antes de proceder al diseño.

A menudo es deseable seleccionar un intervalo para las constantes del suelo y tener valores límites de las frecuencias naturales y las amplitudes de movimiento para valores seleccionados de las constantes del suelo.

5. Centrado del área de la cimentación, en contacto con el suelo y determinación de las presiones en el suelo.

Se ha de determinar el centro de gravedad combinado de la maquinaria y la cimentación en los planos (x, y, z) y revisar que la excentricidad a lo largo del eje X o Y no sea más del 5 %. Esto es un límite superior para este tipo de análisis. Si la excentricidad excede al 5 %, debe ser considerado en el análisis el cabeceo adicional ocasionado por la carga vertical excéntrica.

Debe también revisarse la presión estática en el suelo, la cual debe ser menor que el 80 % de la presión admisible del suelo, en condiciones estáticas. Esta condición se encuentra en la mayoría de las cimentaciones para maquinaria.

6. Valores de Diseño para Cargas y Momentos Desbalanceados.

Los valores de las fuerzas excitadoras y los momentos resultantes pueden ahora determinarse con respecto al centro de gravedad combinado del sistema. Si la fuerza vertical desbalanceada actúa con alguna excentricidad, esto aumentará el valor del momento.

Similarmente, si la fuerza horizontal desbalanceada actúa a una cierta distancia, con respecto a la parte superior del bloque de cimentación, la magnitud del momento ocasionado por la fuerza horizontal es igual al producto de la fuerza horizontal y la distancia entre el centro de gravedad del sistema combinado y el punto de aplicación de dicha fuerza. La naturaleza de las fuerzas y momentos desbalanceados deben dar al investigador una idea acerca de la naturaleza de las vibraciones en la cimentación.

7. Determinación de momentos de inercia y de los momentos de inercia de la masa.

a) Cimentación circular.

Para Vibraciones por Cabeceo:

$I_x = I_y = I$, Momento de inercia del área de la base con respecto a un eje que pasa a través del centroide del área de contacto de la base y perpendicular al plano de vibración.

$$I_x = I_y = I = \frac{\pi r_o^4}{4} \qquad (5\text{-}7)$$

r_o = Radio de la base de la cimentación.

M_m = Momento de inercia de la masa de la cimentación con respecto a un eje que pasa a través del centroide del sistema y perpendicular al plano de vibración.

$$M_m = \frac{\pi r_o^2 H \gamma_c r_o^2}{4g} \qquad (5\text{-}8)$$

en donde

γ_c = Peso volumétrico del concreto.

M_{mo} = Momento de inercia de la masa de la cimentación con respecto a un eje que pasa a través del centroide de la base y perpendicular al plano de vibración.

$$M_{mo} = \frac{\pi r_o^2 H}{g} \gamma_c \left(\frac{r_o^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) \qquad (5\text{-}9)$$

Para Vibraciones por Torsión:

I_z = Momento polar de inercia del área de contacto de la base, con respecto al eje vertical que pasa a través del centro de gravedad.

$$J_z = I_z = \frac{\pi r_o^4}{2} \qquad (5\text{-}10)$$

M_{mz} = Momento polar de inercia de la masa de la cimentación, con respecto al eje vertical de rotación.

$$M_{mz} = \frac{\pi r_o^2 H}{g} \gamma_c \frac{r_o^2}{2} \qquad (5\text{-}11)$$

b) Cimentación no circular.

Para Vibraciones por Cabeceo:

I = Momento de inercia del área de base con respecto a un eje que pasa a través del centroide del área de contacto de la base y perpendicular al plano de vibración. Esto es igual a $ba^3\ 12$ en donde "a" es la dimensión mayor del área rectangular en el plano de la vibración, y "b" es la dimensión perpendicular a ese plano. También:

$$M_{mo} = M_m + mL^2 \qquad (5\text{-}12)$$

En donde L es la altura del centro de gravedad combinado con respecto a la base. El valor de γ puede ser determinado como:

$$\gamma = \frac{M_m}{M_{mo}} \qquad (5\text{-}13)$$

Para Vibraciones por Torsión:

I_z = Momento polar de inercia del área base con respecto al eje vertical que pasa a través del centro de gravedad.

$$J_z = I_z = ab\frac{\left(a^2 + b^2\right)}{12} \qquad (5\text{-}14)$$

M_{mz} = Momento polar de inercia de la masa de la maquinaria y la cimentación con respecto al eje vertical.

$$M_{mz} = M_{mx} + M_{my} \qquad (5\text{-}15)$$

M_m, M_{mx}, M_{my}, Son los momentos de inercia de las masas.

8. Frecuencias naturales y amplitudes de vibración.

Los pasos del 1 al 7 dan la información que se usará para calcular las frecuencias naturales y las amplitudes de vibración. Esta información es común y subsecuentemente la respuesta dinámica puede ser calculada tanto por el método del semi-espacio elástico como por cualquier otro método. A continuación se presenta los pasos para el cálculo con el método del semi-espacio elástico.

a) Radio equivalente.

Para cimentaciones no circulares, se determinará el radio equivalente r_o del área de contacto de la cimentación, considerando la dirección de las vibraciones.

para traslación:

$$r_{ox} = r_{oy} = r_{oz} = \left(\frac{ab}{\pi}\right)^{1/2} = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2} \qquad (5\text{-}16)$$

para vibración por cabeceo:

$$r_{o\phi} = \left(\frac{ba^3}{3\pi}\right)^{1/4} \qquad (5\text{-}17)$$

para vibraciones torsionales:

$$r_{o\psi} = \left[\frac{ba\left(a^2 + b^2\right)}{6\pi}\right]^{1/4} = \left(\frac{2I_z}{\pi}\right)^{1/4} \qquad (5\text{-}18)$$

b) Determinación de la relación de masa, constantes de resorte, y factores de amortiguamiento.

Los valores de la relación de masa o inercia, constantes de resorte, y factores de amortiguamiento pueden ser calculados según la tabla 5.1.

c) Frecuencias naturales y amplitudes de vibración en modos no acoplados.

Vibraciones verticales:

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \qquad (5\text{-}19)$$

$$A_z = \frac{P_z}{k_z\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_{nz}}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_z \frac{\omega}{\omega_{nz}}\right)^2\right]^{1/2}} \qquad (5\text{-}20)$$

Tabla 5.1

Relación de Masa o Inercia B , Factor de Amortiguamiento ξ , y Constante de Resorte k para una Cimentación Circular Rígida en un Semi-espacio Elástico Finito.			
Modo de Vibración	Relación de Masa	Factor de Amortiguamiento	Constante de Resorte
Vertical	$B_z = \frac{(1-\upsilon)}{4}\frac{m}{\rho r_o^3}$	$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}}$	$k_z = \frac{4Gr_o}{1-\upsilon}$
Deslizamiento	$B_x = \frac{(7-8\upsilon)}{32(1-\upsilon)}\frac{m}{\rho r_o^3}$	$\xi_x = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}}$	$k_x = \frac{32(1-\upsilon)}{7-8\upsilon}Gr_o$
Cabeceo	$B_\phi = \frac{3(1-\upsilon)}{8}\frac{M_{mo}}{\rho r_o^5}$	$\xi_\phi = \frac{0.15}{(1+B_\phi)\sqrt{B_\phi}}$	$k_\phi = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\upsilon)}$
Torsional	$B_\psi = \frac{M_{mz}}{\rho r_o^5}$	$\xi_\psi = \frac{0.5}{1+2B_\psi}$	$k_\psi = \frac{16}{3}Gr_o^3$

Vibraciones torsionales:

$$\omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{k_\psi}{M_{mz}}} \qquad (5\text{-}21)$$

$$A_\psi = \frac{M_z}{k_\psi\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_{n\psi}}\right)^2\right)^2+\left(2\xi_\psi\frac{\omega}{\omega_{n\psi}}\right)^2\right]^{1/2}} \qquad (5\text{-}22)$$

d) Frecuencias naturales y amplitudes de vibración en modos acoplados.

Las frecuencias naturales de la combinación por cabeceo y deslizamiento son obtenidas de las ecuaciones (5-25 y 5-26) con $\omega_{nx}, \omega_{n\phi}$ obtenidas como sigue:

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \qquad (5\text{-}23)$$

$$\omega_{n\phi} = \sqrt{\frac{k_\phi}{M_{mo}}} \qquad (5\text{-}24)$$

Las frecuencias naturales amortiguadas son obtenidas de las raíces de la siguiente ecuación:

$$\left[\omega_{nd}^4 - \omega_{nd}^2\left(\frac{\left(\omega_{n\phi}^2+\omega_{nx}^2\right)}{\gamma} - \frac{4\xi_x\xi_\phi\omega_{nx}\omega_{n\phi}}{\gamma}\right) + \frac{\omega_{nx}^2\omega_{n\phi}^2}{\gamma}\right]^2$$

$$+4\left[\frac{\xi_x\omega_{nx}\omega_{nd}}{\gamma}\left(\omega_{n\phi}^2-\omega_{nd}^2\right)+\frac{\xi_\phi\omega_{nd}\omega_{n\phi}}{\gamma}\left(\omega_{nx}^2-\omega_{nd}^2\right)\right]^2 = 0 \qquad (5\text{-}25)$$

Las frecuencias naturales no amortiguadas se obtienen con la siguiente ecuación:

$$\omega^2{}_{n1,2} = \frac{1}{2\gamma}\left[\left(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\phi}^2\right) \pm \sqrt{\left(\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2\right)^2 - 4\gamma\omega_{n\phi}^2\omega_{nx}^2}\right] \qquad (5\text{-}26)$$

Las amplitudes amortiguadas para el movimiento ocasionado por la aplicación de un momento se obtienen como sigue:

$$A_x = \frac{M_y}{M_m}\frac{\left[\left(\omega_{nx}^2\right)^2 + \left(2\xi_x\omega_{nx}\right)^2\right]^{1/2}}{\Delta\left(\omega^2\right)} \qquad (5\text{-}27)$$

y

$$A_\phi = \frac{M_y}{M_m}\frac{\left[\left(\omega_{nx}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\xi_x\omega_{nx}\omega\right)^2\right]^{1/2}}{\Delta\left(\omega^2\right)} \qquad (5\text{-}28)$$

En donde $\Delta(\omega)^2$ es dada por la ecuación (5-29).

$$\Delta(\omega)^2 = \left\{\begin{array}{l}\left(\omega^4 - \omega^2\left(\dfrac{\left(\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2\right)}{\gamma} - \dfrac{4\xi_x\xi_\phi\omega_{nx}\omega_{n\phi}}{\gamma}\right) + \dfrac{\omega_{nx}^2\omega_{n\phi}^2}{\gamma}\right)^2 \\ + 4\left(\xi_x\dfrac{\omega_{nx}\omega}{\gamma}\left(\omega_{n\phi}^2 - \omega^2\right) + \dfrac{\xi_\phi\omega_{n\phi}\omega}{\gamma}\left(\omega_{nx}^2 - \omega^2\right)\right)^2\end{array}\right\}^{1/2} \qquad (5\text{-}29)$$

Las amplitudes amortiguadas para el movimiento ocasionado por la aplicación de una fuerza P_x actuando en el centro de gravedad de la cimentación pueden ser obtenidas como:

$$A_x = \frac{P_x}{mM_m} \frac{\left[\left(-M_m\omega^2 + k_\phi + L^2 k_x\right)^2 + 4\omega^2\left(\xi_\phi\sqrt{k_\phi M_{mo}} + L^2\xi_x\sqrt{k_x m}\right)^2\right]^{1/2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (5\text{-}30)$$

y

$$A_\phi = \frac{P_x L}{M_m} \frac{\omega_{nx}\left(\omega_{nx}^2 + 4\xi_x\omega^2\right)^{1/2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (5\text{-}31)$$

9. Revisión para una Adecuada Cimentación.

Las frecuencias naturales y las amplitudes de vibración calculadas en el paso 8 deben compararse con la velocidad de operación y las amplitudes permisibles, respectivamente, para verificar si el tamaño de la cimentación seleccionada es el adecuado. La frecuencia natural del sistema suelo-cimentación deberá ser menor en un 30 % (preferiblemente 50 %) de la velocidad de operación de la maquinaria. La amplitud de vibración debe ser menor que los valores límites de amplitud especificados por el fabricante de la maquinaria. Si no ha sido posible obtener esta información, la amplitud permisible debe fijarse con una debida consideración de la estabilidad de la máquina y también de los efectos de las

vibraciones en maquinarias y estructuras vecinas, ver figura 1.2 en el capítulo 1.

Para maquinaria con diferentes modos de vibrar, la amplitud de vibración resultante no deberá exceder el valor permisible.

5.4 Concepto de las Fuerzas Desbalanceadas Producidas por la Maquinaria

Como se mencionó en el punto 6 de la sección anterior, es necesario conocer las fuerzas desbalanceadas de la maquinaria o motores, además de su localización, con respecto a algún punto de referencia de la base de la máquina, el fabricante deberá proporcionar esta información.

Para ilustrar el concepto de una máquina produciendo tanto fuerzas primarias como fuerzas secundarias brevemente se examinará una maquinaria idealizada con un cilindro simple como se observa en la figura 5.4. Definiendo a z_p como el desplazamiento hacia abajo del pistón desde cero en el punto muerto superior (cuando $\omega t = 0$ y el máximo ocurre cuando $\omega t = \pi$ rad en contra de las manecillas) en cualquier tiempo t tenemos para ωt:

$$z_p = r(1 - \cos\omega t) + L(1 - \cos\alpha) \qquad (5\text{-}32)$$

Pero $\alpha = f(\omega t)$ tal que y_c es común tanto para r como para L; entonces,

$$sin\alpha = \frac{r}{L} sin\omega t \qquad (5\text{-}33)$$

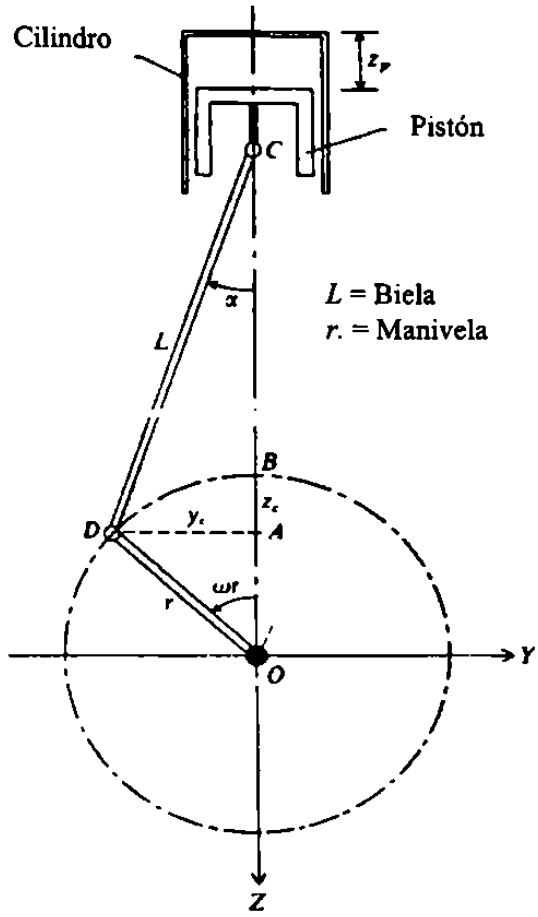

Fig. 5.4 Cilindro Simple de una Máquina que Produce Fuerzas Desbalanceadas que Depende de la Frecuencia.

Usando las relaciones de trigonometría finalmente se obtiene:

$$z_p = \left(r + \frac{r^2}{4L}\right) - r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4L}\cos 2\omega t\right)$$

$$\dot{z}_p = r\omega\left(sin\omega t + \frac{r}{2L} sin2\omega t\right) \qquad (5\text{-}34)$$

$$z_p = r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{L}\cos 2\omega t\right)$$

Un ejercicio similar puede ser hecho para la manivela:

$$\begin{aligned} y_c &= -r\sin\omega t \\ \dot{y}_c &= -r\omega\cos\omega t \\ \ddot{y}_c &= r\omega^2\sin\omega t \end{aligned} \qquad (5\text{-}35)$$

$$\begin{aligned} z_c &= r(1-\cos\omega t) \\ \dot{z}_c &= r\omega\sin\omega t \\ \ddot{z}_c &= r\omega^2\cos\omega t \end{aligned} \qquad (5\text{-}36)$$

Designando la masa del pistón más una parte de la biela (barra de conexión) como la masa reciprocante vertical m_{rec} concentrada en el punto C de la figura 5.4, y la manivela más el resto de la biela como la masa rotatoria m_{rot} concentrada en D, se puede obtener las fuerzas desbalanceadas como:

Vertical

$$\begin{aligned} F_z &= m_{rec}\ddot{z}_p + m_{rot}\ddot{y}_c \\ F_z &= (m_{rec} + m_{rot})r\omega^2\cos\omega t + m_{rec}\frac{r^2\omega^2}{L^2}\cos 2\omega t \end{aligned} \qquad (5\text{-}37)$$

Horizontal

$$F_y = m_{rot}\ddot{y}_c = m_{rot}r\omega^2\sin\omega t \qquad (5\text{-}38)$$

de estas fuerzas tenemos en la ecuación (5-37) dos partes que consisten en:

Una fuerza primaria $(m_{rec} + m_{rot})r\omega^2 \cos\omega t$

Una fuerza secundaria $m_{rec} \frac{r^2\omega^2}{L^2} \cos 2\omega t$

Estas son fuerzas verticales y tienen un valor máximo cuando $\omega t = 2\omega t = 0$ y con múltiplos de π que igualen a la unidad el término del coseno con el mismo signo. Se puede notar que estas fuerzas son directamente proporcionales a la frecuencia.

Hay también una fuerza horizontal primaria dada en la ecuación (5-38) en la cual se puede observar que no se presenta una fuerza secundaria. Esta fuerza es máxima cuando $\omega t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, etc., y estará a una distancia y con respecto al centro de la interface base – suelo, debido a esto, la fuerza horizontal produce un momento de cabeceo con respecto al eje X (el cual es perpendicular al plano de la hoja y pasando a través del punto O de la figura 5.4).

En este caso la fuerza horizontal produce tanto un modo de deslizamiento y un modo de cabeceo, estos dos modos generalmente son independientes o acoplados. La mayoría de los motores y similares tienen más de un cilindro y los fabricantes intentan mantener las fuerzas desbalanceadas pequeñas (usando valores de r y masa pequeños y teniendo manivelas girando en

sentido contra las manecillas mientras que las otras están girando a favor). Si bien esto es posible para minimizar las fuerzas desbalanceadas y los momentos de cabeceo resultantes, estos no podrán ser eliminados completamente.

Los procedimientos computacionales pueden ser utilizados para obtener las fuerzas desbalanceadas pero este simple ejemplo ilustra que se trata de un trabajo formidable. Por esta razón, los fabricantes de maquinaria usan datos electrónicos generados por equipo especializado; como por ejemplo, los transductores de desplazamiento, y acelerómetros localizados en puntos estratégicos en la maquinaria, con el fin de medir los desplazamientos y aceleraciones de estos puntos para varias frecuencias de operación. Estos datos pueden usarse para respaldar el cálculo de las fuerzas tales que la masa total de la máquina sea fácilmente obtenida por su peso exclusivamente. Usando estos métodos se obtienen directamente las fuerzas desbalanceadas sin tener qué determinar las masas de las demás partes componentes.

5.5 Amplitud de Vibraciones Permisibles

Las amplitudes permisibles son generalmente especificadas por el fabricante del equipo. La amplitud permisible de una cimentación para maquinaria esta relacionada con la relativa importancia de la misma y la susceptibilidad a la vibración por parte de las estructuras cercanas.

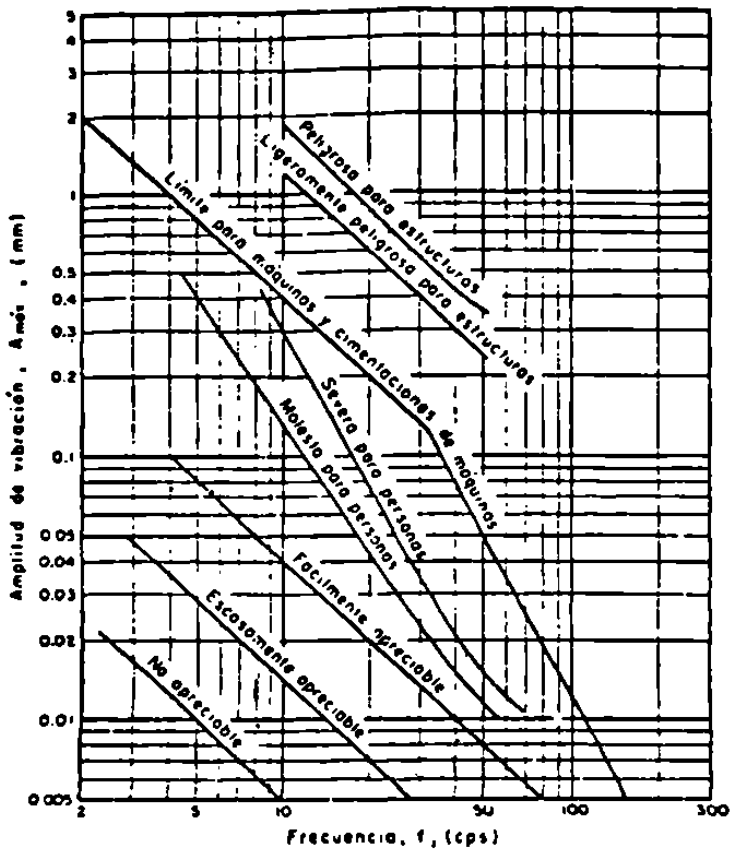

Fig. 1.2 Límites Permisibles para Amplitudes Debidas a Vibración Vertical

Cuando los datos del fabricante no contienen las amplitudes permisibles, los valores mostrados en la Fig. 1.2 propuestas por Richart pueden ser adoptadas para diseños preliminares. La envolvente descrita por la línea de mayor longitud en la Fig. 1.2 indica solamente un límite para la seguridad y no un límite para la operación satisfactoria de la maquinaria. Información mas actualizada debe ser suministrada por el proveedor de la maquinaria. Barkan ha propuesto los valores mostrados en la tabla 1.1, de acuerdo con sus observaciones del funcionamiento de maquinaria.

Tabla 1.1

Tipo	Amplitud Permisible (mm)
1. - Maquinaria de baja velocidad (500 r.p.m.)	0.02 a 0.025
2. - Cimentaciones para martillos	0.1 a 0.12
3. - Maquinaria de alta velocidad:	
a) 3000 r.p.m.	
I Vibraciones verticales	0.002 a 0.003
II Vibraciones horizontales	0.004 a 0.005
b) 1500 r.p.m.	
I Vibraciones verticales	0.004 a 0.006
II Vibraciones horizontales	0.007 a 0.009

Para cimentaciones de equipo sensible, tales como los bancos de pruebas de calibración y maquinaria de precisión, el criterio de diseño debe establecerlo el usuario o el fabricante del equipo. Para instalaciones en las cuales el equipo por si mismo no es causa de vibración, es necesario evaluar las vibraciones ambientales en el lugar y proveer adecuados aislamientos que mantengan a las amplitudes de movimiento del equipo, dentro de los límites aceptables.

CAPITULO 6

SISTEMAS DE AISLAMIENTO DE VIBRACION

6.1 Transmisiblidad – Aislamiento Activos y Pasivos

Desde el punto de vista del aislamiento, dos tipos de problemas de vibración se encuentran en la práctica industrial:

a) El aislamiento activo

b) El aislamiento pasivo

En el tipo activo, el aislamiento se requiere contra la vibración causada por la misma maquinaria. La cimentación para tal máquina deberá ser diseñada para reducir la transmisión de vibración, en los niveles permisibles preestablecidos. En el aislamiento de vibración de tipo pasivo, la cimentación para una máquina delicada se diseña dé tal forma que la amplitud de vibración proveniente del piso (causada por una fuente de disturbio en las inmediaciones) se reduzca hasta un límite aceptable. Estos dos casos se ilustran en la figura 6.1.

El término " transmisibilidad " se define en el caso de un aislamiento activo (fig. 6.1.a), como la relación entre la fuerza transmitida a la cimentación y la fuerza de vibración desarrollada por la maquinaria. En el caso de un aislamiento del

tipo pasivo (fig. 6.1.b), el término se define como la relación de la amplitud del instrumento sensitivo con la amplitud de la base.

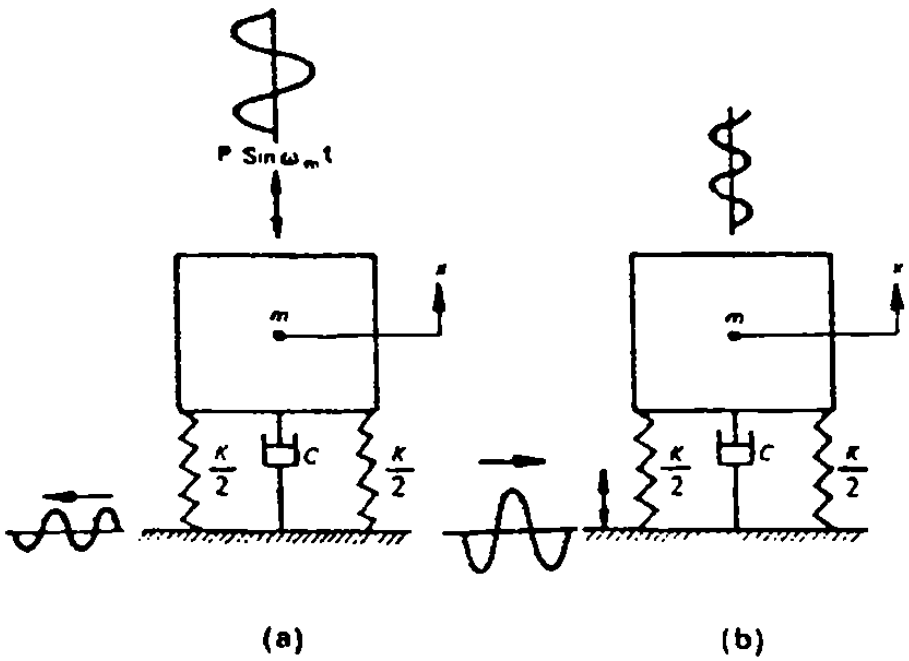

Fig. 6.1 Aislamiento de Vibración – (a) Tipo Activo, (b) Tipo Pasivo

De la teoría de vibraciones, se pueden derivar las siguientes expresiones comunes de transmisibilidad.

$$T = \sqrt{\frac{1+4\beta^2\zeta^2}{\left(1-\beta^2\right)^2+4\beta^2\zeta^2}} \qquad (6\text{-}1)$$

Donde β es la relación de frecuencia y ζ es la relación de amortiguamiento.

La variación de la transmisibilidad con las relaciones de frecuencia y amortiguamiento se muestra en la figura 6.2. Si el grado de amortiguamiento es

tan pequeño, que pudiera ser despreciado, la expresión de transmisibilidad se puede simplificar:

$$T = \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{f_n^2}{f_m^2 - f_n^2} \qquad (6\text{-}2)$$

Es obvio notar que con respecto a la relación con valores mayores de β la transmisibilidad será menor $\left(\beta > \sqrt{2}\right)$. Entonces, para un aislamiento efectivo, el valor de β debería ser lo más alto posible. Esto significa que la frecuencia natural del sistema aislado debe ser lo más bajo posible, en relación con la frecuencia de excitación.

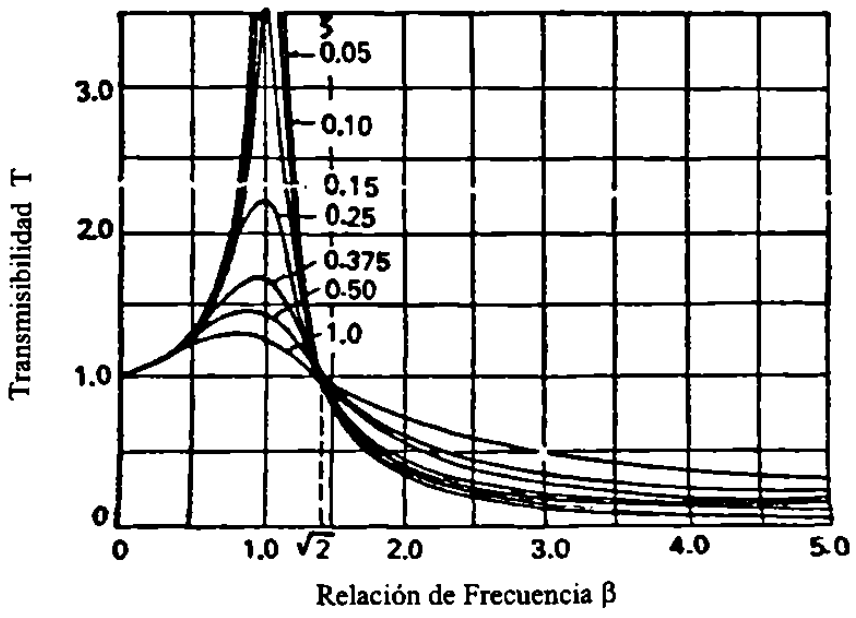

Fig. 6.2 Transmisibilidad (T) versus Relación de Frecuencia (β)

Como puede verse en la figura 6.2, para valores de $\beta < \sqrt{2}$, la transmisibilidad es mayor que la unidad, lo cual no es deseable. Por lo cual se recomienda que la relación de frecuencia sea mayor o al menos igual a $\sqrt{2}$, en todos los casos de aislamiento de vibración.

La figura 6.3 da la información necesaria para resolver los problemas de aislamiento; que se obtiene de la ecuación 6.2, remplazando $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}}$ donde δ es la deflexión estática del sistema.

La transmisibilidad puede expresarse como:

$$T = \frac{1}{(2\pi f_m)^2 \frac{\delta}{g} - 1} \qquad (6\text{-}3)$$

resolviendo para f_m se obtiene la siguiente ecuación:

$$f_m = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}\left(\frac{1}{T}+1\right)} \qquad (6\text{-}4)$$

la cual también puede ser escrita como:

$$f_m = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}\left(\frac{2-R}{1-R}\right)} \qquad (6\text{-}5)$$

Donde $R = (1 - T)$ y representa la reducción relativa de la vibración transmitida, y δ esta dada en cm.

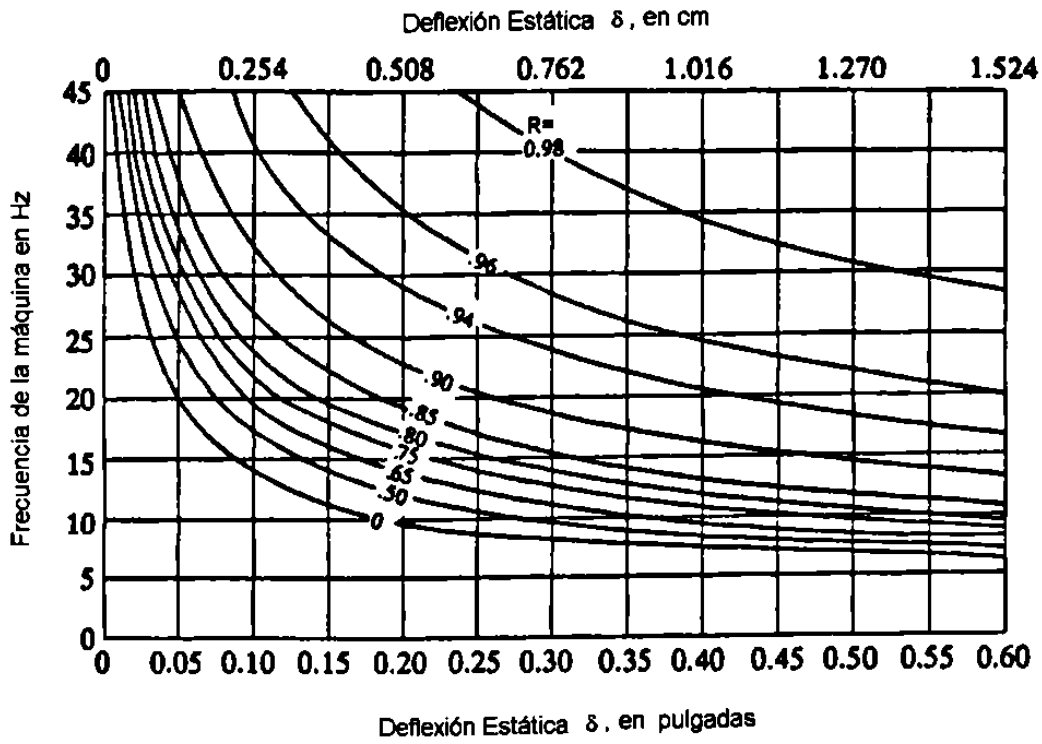

Fig. 6.3 Eficiencia de Aislamiento

Lo discutido anteriormente ha sido limitado a los cuerpos con movimiento en una dirección solamente. En general, un cuerpo rígido, colocado en un resorte, tiene seis grados de libertad y, por lo tanto seis modos de vibración. El diseño deberá asegurar un adecuado aislamiento en todos los posibles modos de vibrar. La ecuación 6.1 se aplica para los modos de vibración traslatorios y rotatorios.

6.2 El Principio de la Absorción de Vibración

Una cimentación sobre resortes está usualmente constituida por dos partes: una losa inferior, en donde los resortes se colocan y un bloque de cimentación en la parte superior apoyada en los resortes. La maquinaria, a su vez, se ancla al bloque de cimentación. Para equipo ligero, la placa base de la máquina puede anclarse directamente a los resortes, siendo innecesario el bloque de cimentación.

Un dibujo esquemático de una cimentación para maquinaria sobre resortes se muestra en la figura 6.4.a, y el modelo usado comúnmente para el análisis de este sistema es el que se muestra en la figura 6.4.b. Cada masa rígida (1) m_2 debido a la losa de concreto y (2) m_1 para el bloque de cimentación + maquinaria, tendrán seis grados de libertad, por lo cual, el número total de grados de libertad del sistema entero es de doce. Los aisladores de vibración se usan generalmente para maquinaria con vibraciones verticales y con fuerzas desbalanceadas verticales. Como se mencionó anteriormente, las vibraciones verticales son independientes de los otros modos de vibrar; sin embargo, en algunas ocasiones es deseable tratar de aislar las vibraciones producidas por los otros modos, tal como se estudiará en el capítulo 7.

El problema de una cimentación de maquinaria sobre resortes puede ser entonces analizado considerando el sistema únicamente con dos grados de libertad (fig. 6.4.c).

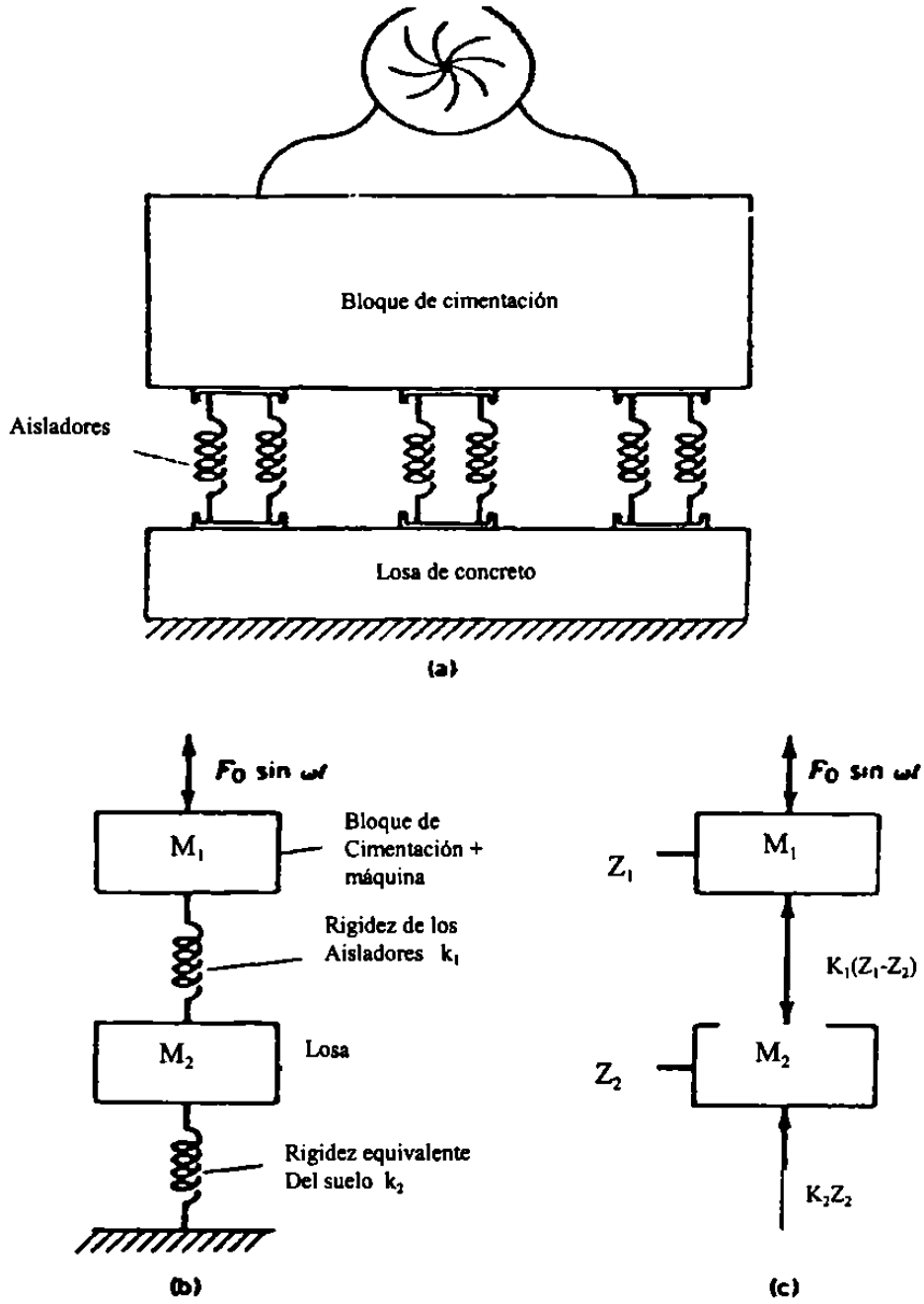

Fig. 6.4 Diagrama Esquemático de una Cimentación sobre Aisladores

Asumiendo que las masas del sistema son concentradas en sus centros de gravedad y alineadas verticalmente, la ecuación diferencial de movimiento se escribe de la siguiente manera:

$$m_1 z_1 + k_1(z_1 - z_2) = F_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad (6\text{-}6)$$

$$m_2 z_2 + k_2 z_2 + k_1(z_2 - z_1) = 0 \qquad (6\text{-}7)$$

donde

$F_0 \operatorname{sen} \omega t$ = Fuerza excitadora

ω = Frecuencia de operación de la maquinaria rad/sec.

z_1, z_2 = Desplazamientos verticales de los centros de gravedad de las masas m_1 y m_2 respectivamente.

k_2 = Rigidez vertical equivalente del suelo bajo la base y es dado por:

$$k_z = k_2 = \frac{4Gr_0}{1-\upsilon} \qquad (6\text{-}8)$$

y k_1 es la rigidez total equivalente de todos los resortes del sistema aislador. La ecuación de la frecuencia del sistema es:

$$\omega_n^4 - (\omega_{n1}^2 + \omega_{n/2}^2)(1+\mu)\omega_n^2 + (1+\mu)\omega_{n1}^2 \omega_{n2}^2 = 0 \qquad (6\text{-}9)$$

en donde $\omega_{n1,2}$ son las frecuencias naturales del sistema, y la relación de masa es:

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \qquad (6\text{-}10)$$

ω_{n2} es la frecuencia natural límite del sistema completo apoyado en el suelo (cuando los aisladores no son utilizados) y es dada por:

$$\omega_{n/2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}} \qquad (6\text{-}11)$$

y ω_{n1} es la frecuencia natural límite de la masa m_1 apoyada en los resortes y calculado con aseveración de que el sistema bajo los resortes tiene una gran rigidez. ω_{n1} es dada por:

$$\omega_{n/1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \qquad (6\text{-}12)$$

Las amplitudes máximas Z_1 y Z_2 son dadas por

$$Z_1 = \frac{(1+\mu)\omega_{n2}^2 + \mu\omega_{n1}^2 - \omega^2}{m_1\Delta(\omega^2)} F_0 \qquad (6\text{-}13)$$

$$Z_2 = \frac{\omega_{n/1}^2}{m_2 \Delta(\omega^2)} F_0 \qquad (6\text{-}14)$$

en donde:

$$\Delta(\omega^2) = \left[\omega^4 - (1+\mu)(\omega_{n/1}^2 + \omega_{n\,2}^2)\omega^2 + (1+\mu)\omega_{n\,1}^2 \omega_{n\,2}^2\right] \qquad (6\text{-}15)$$

y ω es la frecuencia de operación.

La fuerza excitadora desbalanceada debido a la maquinaria es proporcional al cuadrado de la frecuencia de operación de la máquina y, por consiguiente, F_0 puede ser expresado como:

$$F_0 = S\omega^2 \qquad (6\text{-}16)$$

En donde S es una constante que depende de las características de la máquina como por ejemplo la masa desbalanceada y la excentricidad. Sustituyendo las expresiones para F_0 y $\Delta(\omega^2)$ en la ecuación (6-13) y dividiendo el numerador y el denominador por ω^4, tenemos

$$Z_2 = \frac{S}{m_2} \frac{r_1^2}{\left[1 - (1+\mu)(r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2)\right]} \qquad (6\text{-}17)$$

en el cual:

$$r_1 = \frac{\omega_{n/1}}{\omega} \qquad r_2 = \frac{\omega_{n\,2}}{\omega} \tag{6-18}$$

En caso de no usar aisladores, la amplitud de la vibración de la cimentación apoyada en el suelo es dada por:

$$Z = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)(\omega_{n/2}^2 - \omega^2)} \tag{6-19}$$

o

$$Z = \frac{S}{m_2(1+\mu)(r_2^2 - 1)} \tag{6-20}$$

Puede verse en la ecuación (6-17), que la amplitud con aisladores será más pequeña si la relación r_1 es pequeña. Cuando r_1 es despreciable, la amplitud de vibración Z_2 es casi cero y la eficiencia del aislador es alta. La efectividad del aislamiento es máxima cuando $r_1 = 0$, para valores grandes de r_1 $(r_1 \to \infty)$, el valor de Z_2 se aproxima al valor de Z para el caso sin aislamiento.

De la anterior discusión, se puede concluir que los aisladores tienen un efecto favorable en las amplitudes de vibración en cimentaciones, cuando la frecuencia natural de la masa sobre los aisladores es lo más pequeña posible en comparación con la frecuencia de operación de la maquinaria. La frecuencia

natural requerida de la cimentación sobre los aisladores puede ser obtenida usando aisladores de rigidez apropiada y una adecuada selección de la masa sobre los aisladores.

Para maquinarias que operan a altas velocidades, la condición requerida entre ω_{n1} y ω es fácilmente satisfecha sin un incremento significativo en el peso de la cimentación sobre los aisladores. Para maquinarias operando a baja frecuencia, las relaciones son usualmente difíciles de satisfacer ya que se necesita un decremento en la rigidez del aislador pero este decremento no debe sobrepasar los límites requeridos por resistencia. En tal caso, se necesitaría una cimentación masiva sobre los aisladores.

Para tales fines se vuelve crítico la selección adecuada del tipo de los aisladores, el sistema del aislamiento puede ser diseñado basado en el valor de r_1, que depende del grado de absorción requerido η definido por:

$$\eta = \frac{Z}{Z_2} = \frac{\left[1-(1+\mu)\left(r_1^2+r_2^2-r_1^2 r_2^2\right)\right]}{r_1^2\left[(1+\mu)\left(r_2^2-1\right)\right]} \qquad (6\text{-}21)$$

El principio de la absorción de la vibración explicada anteriormente será usado para desarrollar un procedimiento de diseño para cimentaciones con aisladores. Antes de esto se describen los diferentes tipos de aisladores comúnmente utilizados.

6.3 Métodos Generales de Sistemas de Aislamiento

Fue una creencia general que un pesado bloque de cimentación daría un adecuado aislamiento contra las vibraciones producidas por la operación de una maquinaria colocada sobre el bloque.

Este concepto tuvo vigencia mientras se utilizaban fórmulas aproximadas para obtener el peso del bloque de cimentación con relación a la capacidad o peso de la maquinaria. Posteriormente, fue creyéndose adecuado el colocar la maquinaria sobre un bloque de cimentación puesto dentro de un cajón de concreto reforzado, forrado con material aislante. Esto se realiza para proveer un efectivo aislamiento.

A continuación, se mencionan algunos métodos generales para tratar de aislar la transmisión de vibraciones.

a) La separación física de la unidad vibratoria y la cimentación.- La maquinaria es instalada sobre el bloque de concreto, el cual no se encuentra en contacto con el suelo circundante. Es un método simple y barato para aislamiento de vibración de la maquinaria; pero es el menos efectivo, frecuentemente usado para máquinas de herramientas o equipos similares, donde la vibración transmitida es tolerable.

b) La unidad vibratoria se monta sobre el bloque base y éste es soportado por un material aislador.- Los aisladores pueden ser resortes de metal, hule o goma, corcho, bloques de fieltro o algunos otros materiales resistentes. Los aisladores pueden ser colocados directamente, bajo la maquinaria o bajo el

bloque base que provee una adicional masa. En algunos casos, los aisladores son colocados por debajo de la maquinaria y sobre el bloque base. En otros casos, la maquinaria se coloca sobre el bloque y éste se mantiene suspendido como un péndulo, soportado por los aisladores de vibración. De cualquier modo, el aislador debe ser apropiadamente diseñado, con base en la teoría de transmisibilidad explicada anteriormente. Un sistema comparativamente reciente de aislamiento de vibración es el de resortes neumáticos, tal como se utiliza en la suspensión de los vehículos. Estos aisladores son utilizados para una variedad de maquinarias que originan vibración. Los aisladores de goma o hule son frecuentemente empleados para los compresores y los martillos pesados, mientras que las prensas pueden ser colocadas en excavaciones forradas con material aislador o soportadas por resortes. Los instrumentos muy sensibles generalmente son colocados en materiales aisladores.

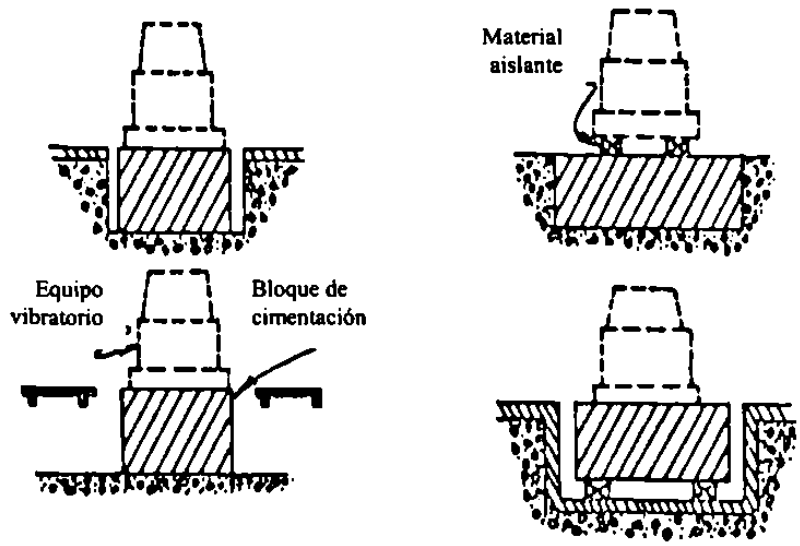

Fig. 6.5 Métodos de Aislamientos

Adicionalmente, se mencionarán algunos métodos que se basan en interrumpir por medio de barreras la transmisión de vibraciones.

c) Aislamiento mediante barreras por zanjas.- Se ha dicho que la presencia de una zanja en la trayectoria de las ondas reduce el avance de las transmisiones de vibración. (Fig. 6.6). La experiencia ha mostrado que las zanjas no son del todo adecuadas para la generalidad de las aplicaciones y, en casos dados, podrían ser menos efectivas; particularmente para el aislamiento de vibraciones de baja frecuencia. De acuerdo con Barkan, para un aislamiento efectivo, la profundidad de la zanja deberá ser al menos una tercera parte de la longitud de onda de la vibración. De tal manera, si la velocidad de vibración en un suelo particular es 200 m/seg. y la frecuencia de vibración es de 10 r.p.m., la longitud de onda sería de 20 m y la zanja debería al menos tener 7 m de profundidad. Las zanjas rellenas con lechada bentonítica se ha reportado que muestran mejores características de aislamiento. Por otra parte, cuando las vibraciones son ocasionadas por una fuente que opera a muy baja frecuencia, la longitud de onda de Rayleigh sería muy grande, alrededor de 50 m o más. Para que la zanja fuera efectiva debería tener una profundidad de aproximadamente 20 m, esto limita su aplicación ya que rellenar la zanja con lechada bentonítica resultaría impráctico y costoso. En estos casos, el uso de barreras mediante pilas resulta adecuado ya que estas pueden ser instaladas a cualquier profundidad. Esta alternativa usando hileras de pilas como aislamiento

pasivo ha sido investigado por Woods. (1974), usando el principio de la holografía y observando las vibraciones de un modelo en el semi-espacio para evaluar el efecto que originan los obstáculos mediante cilindros huecos en la reducción de las amplitudes de vibración.

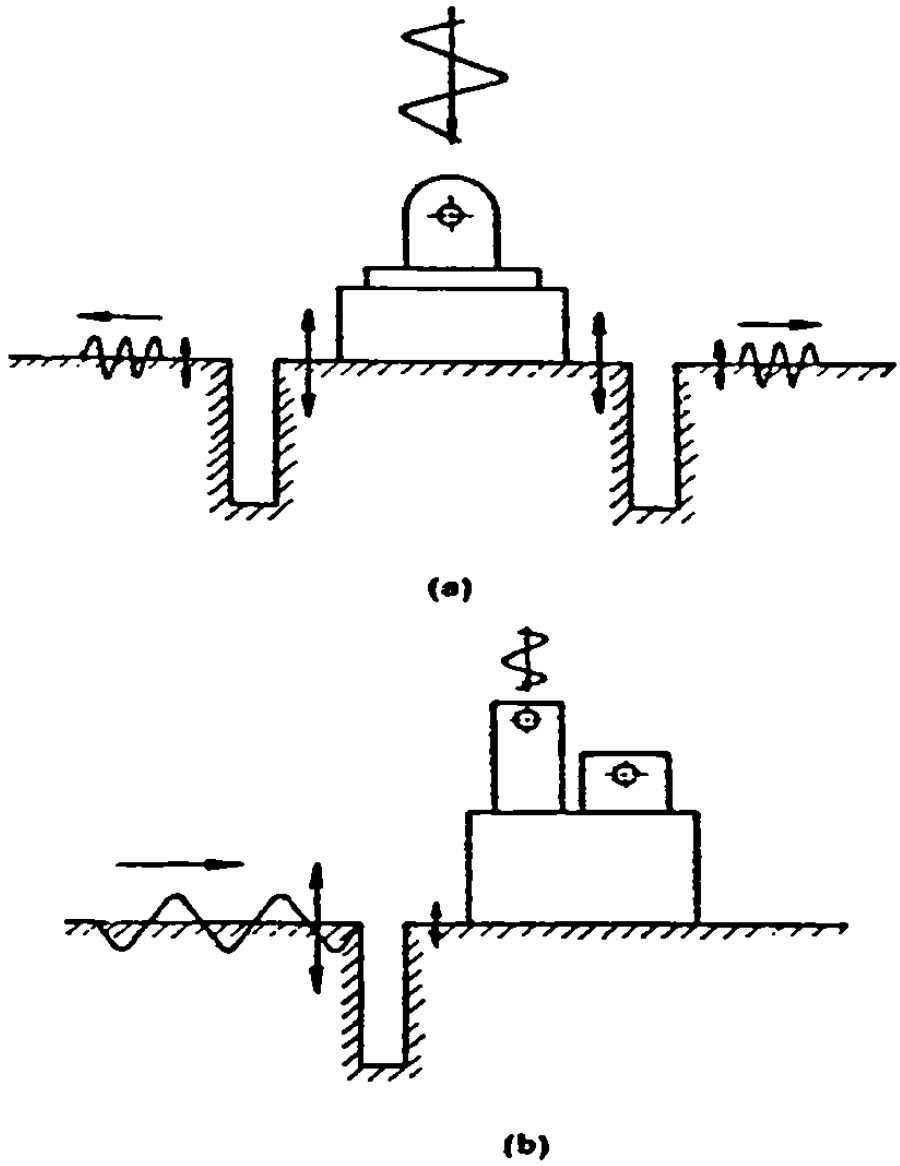

Fig. 6.6 Aislamiento de Vibración por Zanjas – (a) Activo, (b) Pasivo

6.4 Características de los Aisladores de Vibración más Comunes

Aquellos materiales que estando bajo una deformación elástica pueden ser utilizados como aisladores de vibración.

Los que generalmente se utilizan en la mayoría de los casos se enlistan a continuación:

a. Corcho

b. Fieltro

c. Hule o Goma

d. Resortes metálicos

e. Madera

f. Aisladores neumáticos

a) Corcho.- El corcho es un efectivo medio de aislamiento contra la vibración, es de baja densidad, alta compresibilidad e impermeabilidad. Se usan generalmente en forma de placas hechas con partículas de corcho prensado, bajo altas presiones y subsecuentemente cocidas a vapor. Las placas de corcho son colocadas directamente bajo la base de la maquinaria o bajo la cimentación de concreto. La rigidez del corcho es relativamente grande y el área del corcho requerido en muchos de los casos es pequeña. Consecuentemente, el corcho es colocado espaciando las placas bajo la base. El corcho tiene un relativamente pequeño valor de rigidez y está disponible solamente en forma de placa capaz de soportar únicamente cargas de compresión. El corcho tiene una densidad que varía de 2 a 4

g/cm^3. La carga máxima recomendada es equivalente a la presión de 2 kg/cm^2 para una densidad baja y de 4 kg/cm^2 para una alta densidad. Las frecuencias naturales de varias densidades de corcho están en función de la intensidad de la carga, estas deberán ser proporcionadas por el fabricante para los diferentes espesores de corcho. El decremento logarítmico Δ del corcho en compresión es aproximadamente 0.4, y este corresponde a una relación de amortiguamiento (ζ) de 6 %. Las placas de corcho necesitan ser confinadas por un marco de acero para prevenir expansiones laterales. Las propiedades resistentes del corcho se deterioran cuando están en contacto con el agua o con aceite, por tal motivo, se recomienda que las placas de corcho sean tratadas con un preservador antes de ser utilizadas.

b) Fieltro.- El fieltro es un tejido compuesto por un entrelazado de fibras mediante algunos procesos mecánicos o de acción química. Puede consistir de lana u otras fibras sintéticas. El fieltro es usado en forma de pequeños cojinetes cortados con el área requerida y colocados bajo la maquinaria, está generalmente pegado a la base de la máquina y a su soporte. Las frecuencias naturales están en función de la intensidad de la carga para varias densidades del fieltro y son usualmente proporcionadas por el fabricante. La curva fuerza-deflexión de un cojinete de fieltro en compresión es lineal hasta una deflexión no mayor del 25 % de su espesor, pero después de eso la rigidez se incrementa rápidamente. El esfuerzo de compresión del fieltro es aproximadamente 80 kg/cm^2 y su módulo elástico

es alrededor de 800 kg/cm^2. El fieltro pierde generalmente sus propiedades elásticas cuando es usado durante largos periodos de tiempo, en condiciones alternadas de humedad y secado.

c) Hule o Goma.- Los resortes de hule tienen la ventaja del endurecimiento por compresión así como también por cortante. Las características del hule en compresión dependen de la relación del área que soporta la carga y el área expandida lateralmente. Esta relación se define como la " relación de área " (A_r). Para un bloque rectangular de dimensiones l,b,h se plantea la siguiente ecuación:

$$A_r = \frac{lb}{2h(l+b)} \qquad (6\text{-}22)$$

Los cojinetes cuyas relaciones de áreas son iguales se flambean el mismo porcentaje de sus espesores cuando soportan cargas y causan la misma intensidad de presión. El hule puede ser flambeado bajo una fuerza de compresión solamente si es permitido que se expanda lateralmente, a diferencia del corcho, por lo tanto, el hule no requiere ser confinado en sus lados. La máxima deformación (δ) con relación a la altura del bloque de hule (h) puede ser tomada como 0.2 en compresión y 0.4 en cortante. Los esfuerzos admisibles son alrededor de 8 kg/cm^2 en compresión y 3 kg/cm^2 a cortante para un hule que tiene una inclinación de la dureza de 40°. Estos valores se incrementan con el incremento en la dureza alrededor del 16

kg/cm^2 en compresión, y 5 kg/cm^2 en cortante correspondiendo a una inclinación de la dureza de 70°. La tabla 6.1 contiene las propiedades del aislador de hule o goma, una propiedad conocida como " inclinación de dureza " especifica la calidad del hule y sus características de diseño. La rigidez a corte (K_s) de un bloque de hule de un espesor h y un área de la sección transversal A se pueden determinar del módulo de corte G usado en la siguiente ecuación.

$$K_s = \frac{GA}{h} \qquad (6\text{-}23)$$

La anterior fórmula asume que la relación de altura a ancho es suficientemente pequeña como para ignorar la deformación debido a la flexión.

Tabla 6.1
Propiedades Naturales de los Aisladores de Hule o Goma

Inclinación de Dureza (S)°	Módulo de Corte (G) kg/cm^2	Módulo de Young (E) kg/cm^2	Módulo de Volúmen (B) kg/cm^2	α
40.00	4.59	15.29	10193.68	0.85
45.00	5.50	18.35	10193.68	0.80
50.00	6.52	22.43	10499.49	0.73
55.00	8.26	33.13	11111.11	0.64
60.00	10.81	45.36	11722.73	0.57
65.00	13.97	59.63	12334.35	0.54
70.00	17.64	74.92	12945.97	0.53

La rigidez de un cojinete de hule ó goma en compresión (K_c) es dada por:

$$\frac{1}{K_c} = \frac{h}{A}\left[\frac{1}{E\left(1+2\alpha A_r^2\right)} + \frac{1}{B}\right] \qquad (6\text{-}24)$$

Donde E, B y α están dados en la tabla 6.1 y los otros términos son definidos fácilmente.

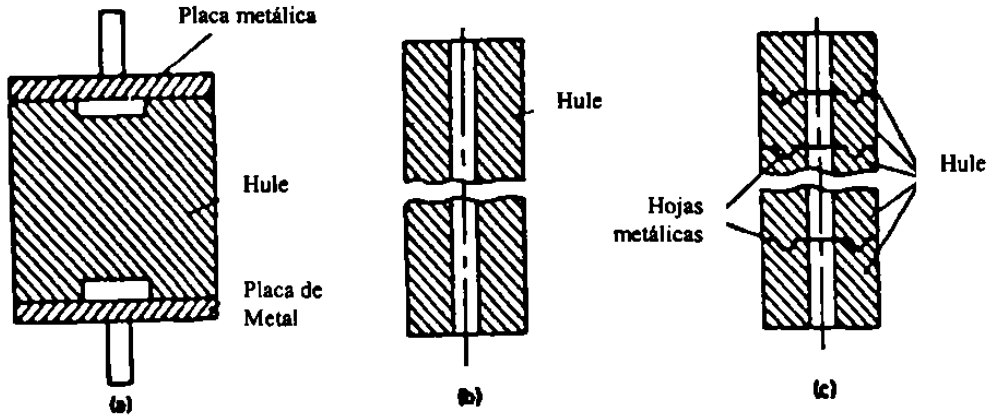

Fig. 6.7 Cojinetes de Hule Ligadas: (a) Resorte de Hule Ligado entre dos Placas Metálicas; (b) Resorte de Hule en Forma de Cilindro Hueco; (c) Resorte de Hule en Forma de Cilindro Hueco Ligado con Placas Machimbradas de Acero.

d) Resortes Metálicos.- Los resortes helicoidales hechos de acero son los más efectivos soportes elásticos para reducir las amplitudes de vibración en una cimentación de maquinaria. En la figura 6.8 se muestra un resorte metálico sencillo, este tipo de aislador es adecuado solamente para maquinaria con muy baja capacidad.

Para máquinas de media a alta capacidad, son usadas unidades de aislamiento con varios resortes, ver figura 6.9.

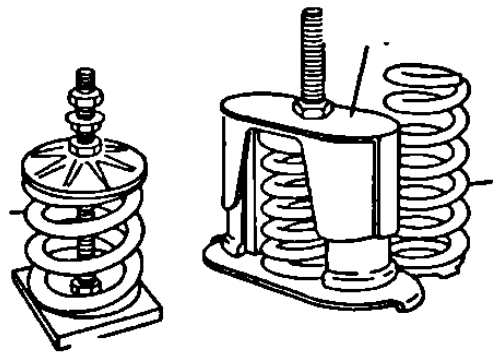

Fig. 6.8 Aisladores Metálicos con un solo Resorte

Para soportar la cimentación de la maquinaria es posibles hacer dos tipo de arreglos para colocar los aisladores de resorte. Está el tipo sostenido (fig. 6.4.a) y el tipo suspendido (fig. 6.10). En el arreglo tipo sostenido, los resortes son colocados directamente bajo la maquinaria o la cimentación, en el sistema de aislador tipo suspendido, los resortes son colocados justo en el nivel del piso, y la maquinaria principal es suspendida por los resortes. Un típico aislador suspendido es mostrado en la figura 6.10.

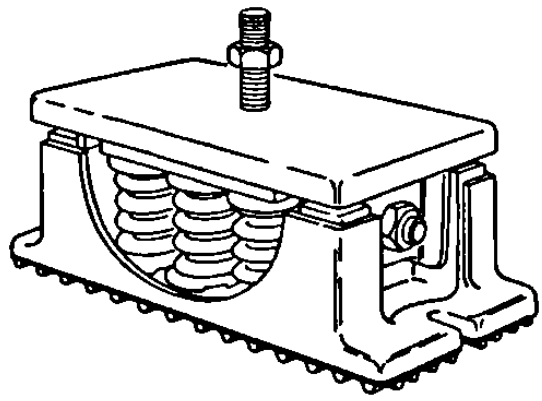

Fig. 6.9 Aislador Ensamblado con Múltiples Resortes

La selección de cualquier arreglo depende del balance de la maquinaria y de la velocidad de operación. Para máquinas de alta velocidad que están relativamente bien balanceadas, se utiliza un arreglo tipo sostenido en los casos que no es necesaria una cimentación pesada sobre resortes. Para maquinaria de baja frecuencia, donde llega a ser necesario una masa pesada sobre los resortes se adopta generalmente un arreglo de los aisladores del tipo suspendido. El arreglo tipo suspendido permite un fácil acceso a las cajas que contienen a los resortes.

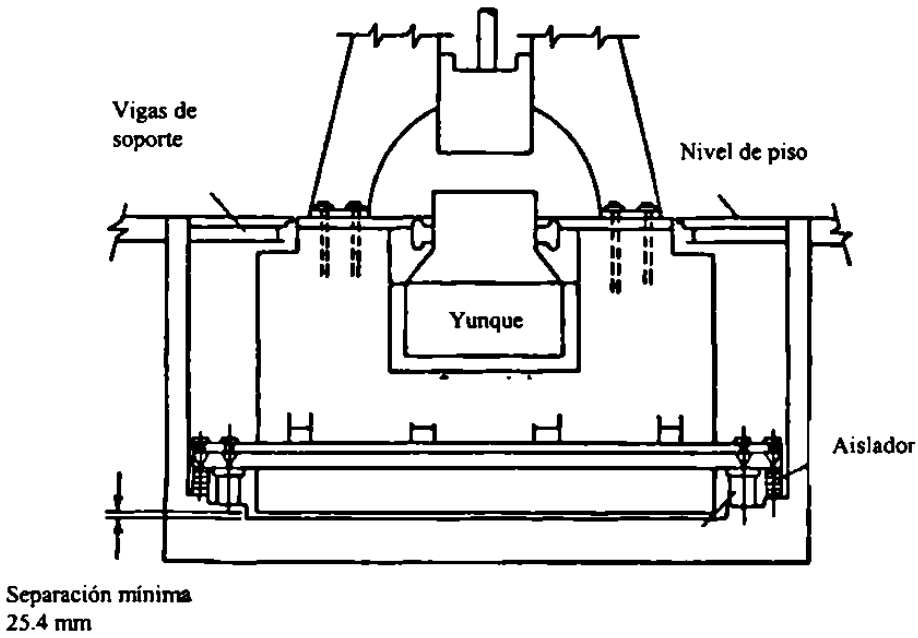

Fig. 6.10 Típica Cimentación para un Martillo con Sistema de Aislamiento del Tipo Suspendido

El análisis de un sistema de cimentación con aisladores, independientemente si es un tipo sostenido o suspendido, puede ser hecho tratándolo como un sistema de dos grados de libertad, como se describió en la sección 6.2. Los aisladores con base en resortes metálicos se manejan en el comercio de varios tamaños y capacidades, la información de las características de carga – deformación son proporcionadas por el fabricante. Los resortes de acero son afectados por las condiciones ambientales y deben de ser protegidos contra la corrosión.

e) Madera.- Las placas de madera son usadas comúnmente bajo los yunques de las cimentaciones para martillos. Se colocan una o varias capas de vigas de madera dura (como el roble, el pino o el encino). Las vigas de madera son colocadas de tal manera que la dirección de la carga a compresión es perpendicular a la fibra. La rigidez de una placa de madera a compresión se obtiene con la siguiente ecuación:

$$K_2 = \frac{E}{b} A_2 \qquad (6\text{-}25)$$

donde

K_2 = Rigidez del Resorte de la placa de madera bajo el yunque

E = Módulo de Young de la madera

b = Espesor de la placa

A_2 = Area de la base del yunque en contacto con la placa

f) Aisladores neumáticos.- Un aislador neumático utiliza gas o aire a presión para absorber las vibraciones, la rigidez de este tipo de aisladores se obtiene de las leyes aplicables a los gases. Los resortes neumáticos pueden ser de acción simple o de doble acción y generalmente proveen un buen amortiguamiento. En el comercio se encuentran resortes neumáticos que tienen diferentes formas y capacidades, las características especificas de estos aisladores deben ser proporcionados por el fabricante y se deben investigar antes de planear el uso de este sistema. Cuando las cargas son altas y la frecuencia natural requerida del aislador debe ser baja, la deformación bajo carga estática para los tipos usuales (resortes o cojinetes) de aisladores podría ser grande. Sin embargo, en los aisladores neumáticos la deformación ocasionada por la carga estática puede ser controlada ajustando la presión del aire o gas manteniendo la rigidez necesaria.

6.5 Procedimiento de Diseño para Cimentaciones con Aisladores

Se describe a continuación el procedimiento de diseño para una cimentación sobre aisladores, y soporta una máquina reciprocante que tiene componentes de las fuerzas desbalanceadas en la dirección vertical.

1. Datos de diseño.- Se deben obtener todos los datos de diseño respecto a la maquinaria y al suelo, así como también las amplitudes permisibles.

2. Primer tanteo.- Hacer un diseño tentativo de la cimentación sin considerar aisladores, siguiendo el procedimiento de la sección 5.3 y satisfaciendo las amplitudes permisibles. El tamaño de la cimentación resultante puede ser demasiado grande para el tamaño de la maquinaria o bien para el espacio disponible.
3. Segundo tanteo.- Dependiendo de los requerimientos mínimos del tamaño de cimentación para la maquinaria y del espacio disponible, seleccionar el área de la cimentación en contacto con el suelo y la porción del peso de la cimentación bajo los aisladores W_2 (figura 6.4.a).
4. Determinar la rigidez del resorte equivalente del suelo k_2 bajo la base.

$$k_z = k_2 = C_u A \qquad (6\text{-}26)$$

o

$$k_2 = \frac{4Gr_0}{(1-\upsilon)} \qquad (6\text{-}27)$$

en donde

C_u = Coeficiente de compresión uniforme elástica

A = área de la base de la cimentación

G = Módulo de cortante del suelo

r_0 = Radio equivalente del área de contacto de la cimentación

υ = Relación de Poisson

5. Determinar la frecuencia natural límite del sistema completo apoyado en el suelo, $\omega_{n/2}$

$$\omega_{n/2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}} \qquad (6\text{-}28)$$

En donde $m_1 = W_1/g$ y $m_2 = W_2/g$. La relación de masas μ se calcula como:

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \qquad (6\text{-}29)$$

6. Determinar la relación de frecuencias r_2

$$r_2 = \frac{\omega_{n/2}}{\omega} \qquad (6\text{-}30)$$

Donde ω es la velocidad de operación de la maquinaria.

7. Calcular la amplitud Z para el sistema apoyado sobre el suelo (sin aisladores).

$$Z = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)\left(\omega_{n/2}^2 - \omega^2\right)} \qquad (6\text{-}31)$$

En donde F_0 es la fuerza vertical desbalanceada.

8. Calculo del grado de absorción η

$$\eta = \frac{Z}{Z_2} = \frac{\left[1 - (1+\mu)\left(r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2\right)\right]}{r_1^2\left[(1+\mu)\left(r_2^2 - 1\right)\right]} \qquad (6\text{-}32)$$

Z_2 es la amplitud de la cimentación con aisladores o la amplitud permisible de vibración en la cimentación.

9. Determinar la relación de frecuencia r_1 despejando la ecuación (6-32)

$$r_1 = \frac{\omega_{n/1}}{\omega} \qquad (6\text{-}33)$$

en donde $\omega_{n/1}$ es la frecuencia natural límite de la cimentación sobre los aisladores y se calcula como:

$$\omega_{n/1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \qquad (6\text{-}34)$$

10. Determinar $\omega^2_{n/1}$

.

$$r_1^2 = \frac{\omega_{n1}^2}{\omega^2} \qquad (6\text{-}35)$$

o

$$\omega_{n1}^2 = r_1^2\omega^2 \qquad (6\text{-}36)$$

11. Determinar la rigidez total vertical del aislador k_1

$$k_1 = m_1\omega^2_{n/1} \qquad (6\text{-}37)$$

12. Seleccionar el tipo de aislador.- Se selecciona un aislador que tenga una rigidez total igual a k_1, esto puede ser realizado fácilmente de la información dada por el fabricante particularmente de los catálogos donde se especifiquen las características carga vs deformación de los aisladores comerciales.

13. Encontrar la amplitud de vibración Z_1 del sistema sobre los aisladores.

$$Z_1 = \frac{(1+\mu)\omega_{n/2}^2 + \mu\omega_{n/1}^2 - \omega^2}{m_1\Delta(\omega^2)}F_0 \qquad (6\text{-}38)$$

siendo

$$\Delta(\omega^2) = \omega^4 - (1+\mu)(\omega_{n/1}^2 + \omega_{n/2}^2)\omega^2 + (1+\mu)\omega_{n/1}^2\omega_{n\,2}^2 \qquad (6\text{-}39)$$

14. Carga efectiva por resorte P_a

$$P_a = k_1 Z_1 \qquad (6\text{-}40)$$

15. Revisar la seguridad del resorte, de tal manera que los esfuerzos en el resorte cumplan con $P_a < P$ admisible.

6.6 Reducción de Amplitudes de Vibración en Cimentaciones de Maquinaria Existentes

Algunas veces pueden desarrollarse vibraciones excesivas en la cimentación después de la instalación de la maquinaria o bien, debido a un incremento en las fuerzas desbalanceadas por el desgaste natural de la máquina, a cambios en las condiciones del suelo, o bien un diseño inadecuado o una construcción defectuosa.

Para reducir en lo posible estas vibraciones se recomienda utilizar algunos de los siguientes métodos, no sin antes enfatizar que es necesario establecer primero la causa de las vibraciones excesivas para poder realizar una

adecuada selección del método a utilizar. Un método inapropiado podría empeorar la situación en lugar de mejorarla. Los métodos utilizados para reducir las vibraciones en cimentaciones de maquinaria ya existentes son:

1. Equilibrar las fuerzas desbalanceadas.
2. Estabilización química del suelo.
3. Medidas estructurales.
4. Proveer amortiguadores de vibración.

1. Equilibrar las fuerzas desbalanceadas debido a la operación de la maquinaria.- Él contrabalanceo de las fuerzas de excitación de la maquinaria originará que estas sean pequeñas, de tal manera que las amplitudes de vibración se reduzcan. Las fuerzas desbalanceadas de una máquina rotatoria tal como una banda centrifuga, turbogeneradores y turbinas están dadas por:

$$F_0 = me\omega^2 sin\omega t \qquad (6\text{-}41)$$

en donde:

F_0 = Fuerza desbalanceada

m = Masa del rotor

e = excentricidad de la masa

ω = Velocidad de operación de la maquinaria

La reducción de F_0 se puede conseguir agregando masa adicional en el rotor de tal manera que la excentricidad efectiva de la masa rotatoria decrece. El desbalanceo de los rotores de máquinas rotatorias de alta velocidad es revisado como una parte normal del mantenimiento de la operación. Las fuerzas primarias en las máquinas reciprocantes pueden ser balanceadas por medio de dos maneras de contrapeso:

a) La componente de la fuerza en la dirección perpendicular al movimiento del pistón puede ser completamente balanceada y la componente a lo largo de la dirección del movimiento es solamente balanceada en forma parcial.

b) Es posible también el contrabalancear completamente la fuerza de excitación en la dirección del movimiento del pistón, usando contrapeso a distancias apropiadas de los ejes de rotación. De esta manera la componente de la fuerza desbalanceada en la dirección perpendicular del movimiento del pistón se incrementará.

El uso de alguno de los procedimientos anteriores y su eficiencia para contrabalancear las fuerzas inducidas por la maquinaria depende del tipo de esta y de las condiciones especiales de la cimentación. En maquinarias reciprocantes con movimiento horizontal, las vibraciones más peligrosas en la cimentación son las ocasionadas por la acción simultánea del cabeceo y el movimiento horizontal. En este caso, para disminuir las vibraciones de la

cimentación es necesario contrabalancear las fuerzas de inercia de la máquina mediante el procedimiento del inciso (b), aunque esto incremente un poco las vibraciones verticales. Por consiguiente, si una maquinaria se contrabalanceó por el primer método pero tiene vibraciones horizontales no permisibles después de la construcción de la cimentación, entonces se sugiere utilizar el procedimiento (b) para él contrabalanceo como una medida simple para reducir las vibraciones. El primer procedimiento se recomienda cuando las vibraciones verticales tienen una amplitud no permisible en motores horizontales, similarmente para motores verticales, el procedimiento de contrabalanceo seleccionado dependerá del tipo de vibraciones en la cimentación (vertical, horizontal o cabeceo).

2. Estabilización química del suelo.- Algunas veces las vibraciones de la cimentación pueden reducirse por la estabilización del suelo que resulta en un incremento en la rigidez de la base y, consecuentemente en un incremento en la frecuencia natural de la cimentación. Este método es efectivo solamente cuando las frecuencias naturales de la cimentación antes de la estabilización del suelo son mayores que la frecuencia operacional de la máquina. Un incremento en la rigidez del suelo, dará como resultado que se amplíe la diferencia entre la frecuencia natural de vibración y la frecuencia de operación de la maquinaria, resultando en un decremento en las amplitudes de vibración. Si la cimentación tiene frecuencias naturales menores que la frecuencia de operación de la maquinaria, la estabilización del suelo puede causar un incremento en las amplitudes de vibración, debido

a que la frecuencia natural después de la estabilización puede acercarse a la velocidad operacional de la máquina. La estabilización química del suelo resulta relativamente económica ya que los costos son más bajos en comparación con otros métodos de reducción de vibraciones. Otra ventaja de este método es que puede ser aplicado sin una interrupción prolongada de la maquinaria. La extensión de la estabilización del suelo bajo la cimentación depende de la naturaleza de las vibraciones. Para una cimentación con vibraciones por cabeceo, la estabilización puede ser necesaria solamente cerca de los bordes (perpendicular al plano de vibraciones). Si las vibraciones en la cimentación son verticales, es necesario la estabilización en el área entera bajo la cimentación. La profundidad de la zona estabilizada no debe ser menor que el ancho de la cimentación y debe extenderse al menos unos 30 cm en la periferia. Barkan (1962) reportó un caso donde las amplitudes de vibración de una cimentación para un compresor horizontal disminuyeron en un 50 % como resultado de la estabilización del suelo mediante la inyección de silicatos.

3. Medidas estructurales.- Las medidas estructurales son usadas con el objeto de cambiar las frecuencias naturales del sistema suelo - cimentación, como una manera de lograr una mayor diferencia entre las frecuencias naturales y la frecuencia de operación de la maquinaria. Estas medidas consisten en incrementar la rigidez de la cimentación, por medio de pilas bajo ésta mediante el método de recalce; en incrementar el área de contacto de la cimentación con el suelo; en incrementar la masa de la cimentación; diseñar

adecuadamente losas adyacentes para una cimentación existente. Una selección apropiada de las medidas depende de la naturaleza de las vibraciones y de la relación entre las frecuencias naturales y la velocidad de operación. También es posible incrementar la masa de la cimentación sin inducir cambios en la frecuencia de vibración, resultando en una disminución de las amplitudes de vibración vertical. Para maquinaria de baja frecuencia, un incremento en rigidez de la cimentación producirá efectos indeseables. En tal caso, es mejor disminuir las frecuencias naturales de la cimentación mediante el incremento de la masa de la cimentación sin aumentar el área de contacto con el suelo. Las condiciones locales pueden influir en la selección de algunos casos. El uso especial de losas junto a la cimentación principal puede proveer una efectiva reducción de vibraciones en algunas situaciones. El peso de la losa y el área de contacto con el suelo debe ser analizado para determinar la eficiencia de esta medida.

4. Aisladores de vibración.- Las amplitudes de vibración de una cimentación sujeta a vibraciones verticales pueden ser disminuidas agregando aisladores de vibración por medio de tensores elásticos. El sistema del bloque de cimentación en conjunto con la maquinaria es representado con una m_1, mientras que m_2 es la masa de la losa de base, k_2 es el resorte equivalente del suelo y k_1 es la rigidez del tensor o del resorte que se agrega a la cimentación. El principio del aislamiento de vibración establece que si la masa sobre del aislador y su rigidez se seleccionan tal que su frecuencia

natural ω_{n1} sea considerablemente menor a la frecuencia de operación de la máquina ω la amplitud de vibración de la cimentación tiende a cero. La amplitud de vibración del aislador se establece como:

$$Z_1 = -\frac{F_0}{k_1} \qquad (6\text{-}42)$$

La amplitud Z_1 se iguala a la deflexión estática de la masa m_1 producida por una fuerza cuya magnitud es igual al máximo valor de la fuerza de excitación F_0. Puede ser notado entonces que ni la frecuencia o las amplitudes de vibración del aislador dependen de las propiedades del suelo bajo la base o bajo la masa de la cimentación. Para satisfacer la condición $\omega_{n1} \leq \omega$, se requiere de un valor pequeño de rigidez del resorte k_1 para un determinado valor de masa. De tal forma que los requerimientos de resistencia serán los principales en la determinación de la rigidez del aislador. El sistema de aislamiento funcionará más eficientemente si la velocidad de operación de la maquinaria ω es constante. Las fluctuaciones en la velocidad de operación de la maquinaria dificulta el diseño del aislador de vibración. Para vibraciones por cabeceo o deslizamiento se pueden mantener las mismas consideraciones del aislamiento.

CAPITULO 7

EVALUACION ANALITICA DE LOS EFECTOS DEL AISLAMIENTO

7.1 Planteamiento del Problema

Hasta este punto del trabajo de tesis, se han establecido, entre otras cosas; los requerimientos generales para el diseño de cimentaciones sujetas a efectos dinámicos, se han descrito los diferentes tipos de maquinaria, se describieron los procedimientos para obtener las propiedades dinámicas de los suelos, así como también la teoría de análisis de vibraciones. Se estudiaron los diferentes sistemas de aislamientos utilizados para la reducción de las amplitudes de vibración.

Es necesario complementar lo anterior con la resolución de problemas prácticos, en los cuales se puedan aplicar los conceptos ya tratados en los capítulos precedentes. Mas aún, estos casos prácticos deberán de proporcionar la información necesaria para poder evaluar el comportamiento de los distintos modelos analíticos de sistemas dinámicos relacionados con el diseño de cimentaciones para maquinaria. Además, de la aplicación práctica de las ecuaciones establecidas anteriormente para la obtención de las respuestas de vibración.

Para tal fin, y teniendo en mente los objetivos y el alcance de este trabajo se plantearán dos casos prácticos en los cuales se desarrollan cuatro modelos matemáticos, los cuales se describen en la siguiente sección.

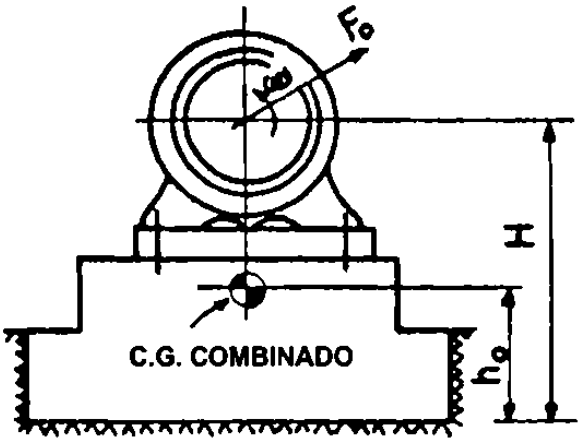

Fig. 7.1 Bloque de Cimentación para Maquinaria sin Aislamiento de la Base

El primero de los casos prácticos pretende el estudio de las vibraciones verticales; ya que, debido a su naturaleza, estas vibraciones pueden presentarse independiente de los demás modos de vibrar, se establecerá la ecuación de movimiento para los modelos matemáticos, considerando el aislamiento de la máquina y de su cimentación, y sin considerar ningún otro tipo de aislamiento. Esto nos dará la información de los diferentes parámetros por comparar en los dos modelos; como por ejemplo, las frecuencias naturales, las amplitudes máximas del movimiento, la relación de frecuencias y para el caso aislado, la transmisibilidad y la eficiencia del aislamiento.

El segundo caso práctico estudiará el problema del acoplamiento entre las vibraciones horizontales y las originadas por el cabeceo, ya que los casos en donde estos modos de vibrar actúan independientemente son escasos en la

práctica, por lo cual los modelos matemáticos incluyen el efecto del acoplamiento de los dos modos de vibrar. Al igual del primer caso se pretende estudiar el comportamiento de los modelos con aislamiento y sin él, buscando evaluar analíticamente los beneficios obvios de los aisladores de vibración y su rango de aplicación para que resulten eficientes.

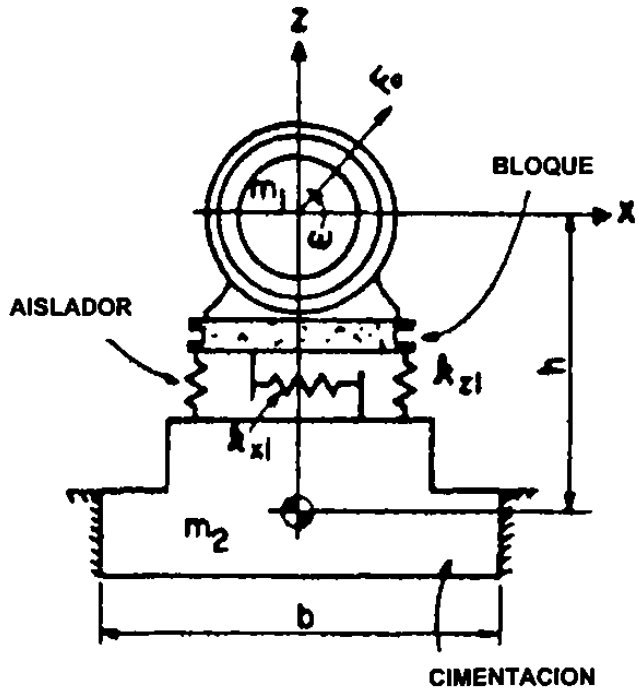

Fig. 7.2 Bloque de Cimentación para Maquinaria con Aislamiento de la Base

Referente a los modelos matemáticos se puede decir que están de acuerdo a las técnicas de discretización; basadas en el concepto de las masas concentradas en un punto ideal, y que la obtención de las constantes de resorte y los coeficientes de amortiguamiento del suelo están con base en la teoría del semi-espacio elástico. El cálculo de las amplitudes de vibración de los diferentes modelos matemáticos será realizado mediante la aplicación de las ecuaciones establecidas en el capítulo 5. Las frecuencias naturales de los

modelos se obtendrán utilizando el programa CAL-91. Este programa obtiene por computadora las frecuencias naturales y los modos de vibrar utilizando las matrices de rigidez y de masa.

A continuación se describen a detalle los diferentes modelos matemáticos y se establecen las respectivas ecuaciones de equilibrio dinámico.

7.2 Modelos Matemáticos

7.2.1 Vibración Vertical.

La masa (m) de la maquinaria y la cimentación se asume que es concentrada en el eje vertical. La constante de resorte del suelo (k_z), el amortiguamiento en el suelo (c_z) y la función de la fuerza (F_z) de la maquinaria tienen su línea de acción coincidente con el eje vertical.

De tal manera que el modelo matemático puede expresarse de la siguiente manera:

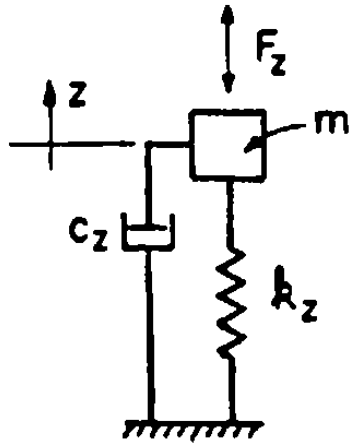

Fig. 7.3 Modelo Matemático No. 1 para la Vibración Vertical sin Aislamiento

A este tipo de modelo se le denomina un sistema amortiguado de un grado de libertad sujeto a una vibración armónica. De tal forma que la ecuación de equilibrio dinámico se puede expresar como:

$$m\ddot{z}(t)+c_z\dot{z}(t)+k_z z(t)=F_z(t)=F_o \operatorname{sen}\omega_e t \qquad (7\text{-}1)$$

Dividiendo entre la m y notando que $\frac{c}{m}=2\xi\omega$, tenemos

$$\ddot{z}(t)+2\xi\omega\dot{z}(t)+\omega^2 z(t)=\frac{F_o}{m}\operatorname{sen}\omega_e t \qquad (7\text{-}2)$$

La solución transitoria de esta ecuación es la respuesta bajo vibración libre amortiguada.

$$z_t(t)=\left(A\cos\omega_d t+B\operatorname{sen}\omega_d t\right)e^{-\xi\omega t} \qquad (7\text{-}3)$$

y la solución estacionaria es de la forma

$$z_e(t)=C_1\cos\omega_e t+C_2\operatorname{sen}\omega_e t \qquad (7\text{-}4)$$

obteniendo la primera y la segunda derivada de la ecuación (7-4)

$$z_e(t) = -C_1\omega_e \operatorname{sen}\omega_e t + C_2\omega_e \cos\omega_e t \qquad (7\text{-}5)$$

$$z_e(t) = -C_1\omega_e^2 \cos\omega_e t - C_2\omega_e^2 \operatorname{sen}\omega_e t \qquad (7\text{-}6)$$

y sustituyendo en la ecuación (7-2) encontramos que

$$\left(-C_1\omega_e^2 + C_2\omega_e(2\xi\omega) + C_1\omega^2\right)\cos\omega_e t + \left(-C_2\omega_e^2 - C_1\omega_e(2\xi\omega) + C_2\omega^2 - \frac{F_o}{m}\right)\operatorname{sen}\omega_e t = 0$$

(7-7)

Para poder satisfacer estas ecuaciones para todos los valores de (t), es necesario que cada término dentro de los paréntesis sea igual a cero; y dividiendo entre ω^2 así como sabiendo que $\beta = \frac{\omega_e}{\omega}$ tenemos:

$$\begin{aligned} C_1(1-\beta^2) + C_2(2\xi\beta) &= 0 \\ C_2(1-\beta^2) - C_1(2\xi\beta) &= \frac{F_o}{k} \end{aligned} \qquad (7\text{-}8)$$

resolviendo las ecuaciones simultáneas:

$$C_1 = \frac{F_o}{k}\left[\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)+(2\xi\beta)^2}\right]$$

$$C_2 = \frac{F_o}{k}\left[\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\right] \qquad (7\text{-}9)$$

Introduciendo estas expresiones dentro de la ecuación (7-4) y combinando con la solución transitoria ecuación (7-3), la respuesta total se obtiene de la siguiente forma:

$$z(t) = (A\cos\omega_d t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_d t)e^{-\xi\omega t} + \frac{F_o}{k}\left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\right]\left[(1-\beta^2)\mathrm{sen}\,\omega_e t - 2\xi\beta\cos\omega_e t\right]$$

(7-10)

Las constantes A, B de la respuesta transitoria se pueden evaluar con las condiciones iniciales $z(0), \dot{z}(0)$. Sin embargo, la respuesta transitoria se amortigua rápidamente debido al término $e^{-\xi\omega t}$, por lo que usualmente esta respuesta tiene poco interés, no así la respuesta estacionaria que es definida por el segundo término.

$$z_e(t) = \frac{F_o}{k}\left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\right]\left[(1-\beta^2)\mathrm{sen}\,\omega_e t - 2\xi\beta\cos\omega_e t\right] \qquad (7\text{-}11)$$

Sí se grafican los dos correspondientes vectores rotatorios en un plano complejo [ver Clough y Penzien " Dynamics of Structures " pag. 37 segunda edición], donde sus componentes en el eje real son idénticos a los términos de la ecuación (7-11). La componente real del vector resultante dará la respuesta estacionaria en la forma:

$$z_e(t) = \frac{F_o}{k} \frac{\operatorname{sen}(\omega_e t - \theta)}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \qquad (7\text{-}12)$$

en donde θ es el ángulo de fase respecto a la excitación, y es definido como:

$$\theta = tan^{-1}\left[\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)}\right] \qquad (7\text{-}13)$$

7.2.2 Vibración Vertical + Aislamiento.

La solución de este modelo da las frecuencias naturales y la respuesta de vibración en la dirección vertical. El modelo es representado con dos masas y dos grados de libertad así como también, dos frecuencias naturales. El amortiguamiento del sistema de aislamiento generalmente es despreciado. Sin embargo, el amortiguamiento del suelo es significativo y se incluye en las ecuaciones de movimiento.

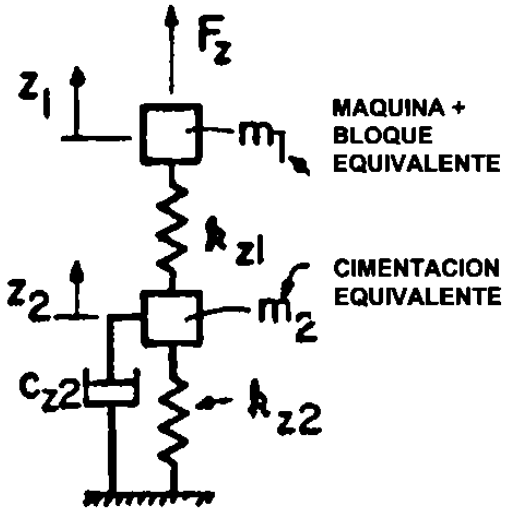

Fig. 7.4 Modelo Matemático No. 2 para la Vibración Vertical con Aislamiento

$$
\begin{aligned}
&m_1 z_1 + k_{z1}(z_1 - z_2) = F_z(t) \\
&m_2 z_2 + C_{z2} z_2 + k_{z1}(z_2 - z_1) + k_{z2} z_2 = 0
\end{aligned}
\qquad (7\text{-}14)
$$

Estas ecuaciones pueden ser expresadas en términos matriciales de la siguiente manera

$$[M]\{z\}+[C_z]\{z\}+[k_z]\{z\}=\{F_z(t)\} \qquad (7\text{-}15)$$

en donde las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez quedan definidas como:

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$
$$[C_z]=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{z2} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}16)$$
$$[k_z]=\begin{bmatrix} k_{z1} & -k_{z1} \\ -k_{z1} & k_{z1}+k_{z2} \end{bmatrix}$$

De tal manera que la ecuación de movimiento (7-15) se expresaría de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{z2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{z1} & -k_{z1} \\ -k_{z1} & k_{z1}+k_{z2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_z(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (7\text{-}17)$$

El modelo se resuelve con las ecuaciones del capítulo 6 y las frecuencias naturales se calculan con el programa CAL-91.

7.2.3 Vibración Horizontal + Cabeceo.

Si se considera únicamente el modo horizontal resultaría ser una aproximación, ya que contrario al modo vertical en el movimiento horizontal las masas no están ubicadas en el mismo eje horizontal y no coinciden con la línea de acción de las fuerzas. Debido a estas razones el modo horizontal normalmente está acoplado con el modo de cabeceo, y su modelo matemático representa mejor el verdadero comportamiento dinámico de la estructura.

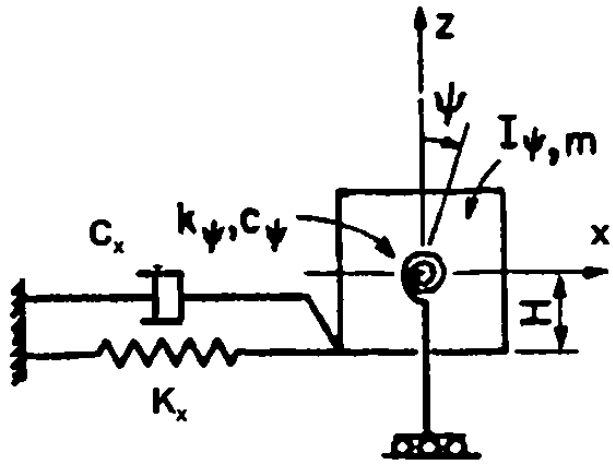

Fig. 7.5 Modelo Matemático No. 3 para la Vibración Horizontal + Cabeceo sin Aislamiento

El efecto del acoplamiento ocurre cuando la maquinaria está localizada a un nivel más alto que el de la cimentación, y sus ecuaciones de equilibrio dinámico serían las siguientes:

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x} + C_x\dot{x} + k_x(x - \psi h_0) - h_0 C_x \dot{\psi} = F_0 \cos\omega t \\
&I_\psi \ddot{\psi} + \left(C_\psi + h_0^2 C_x\right)\dot{\psi} + \left(k_\psi + h_0^2 k_x\right)\psi - h_0 C_x \dot{x} - h_0 k_x x = F_0 H \cos\omega t
\end{aligned}
\qquad (7\text{-}18)
$$

El modelo planteado tiene dos grados de libertad y dos frecuencias naturales, así como también amplitudes máximas para el modo horizontal y el modo por cabeceo.

Tratando de plantear matricialmente las ecuaciones (7-18), las matrices estructurales quedarían definidas de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
[M] &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \\
[C] &= \begin{bmatrix} C_x & -h_0 C_x \\ -h_0 C_x & C_\psi + h_0^2 C_x \end{bmatrix} \\
[k] &= \begin{bmatrix} k_x & -h_0 k_x \\ -h_0 k_x & k_\psi + h_0^2 k_x \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (7\text{-}19)
$$

y la ecuación de movimiento estaría dada como:

$$
\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x & -h_0 C_x \\ -h_0 C_x & C_\psi + h_0^2 C_x \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & -h_0 k_x \\ -h_0 k_x & k_\psi + h_0^2 k_x \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \cos\omega t \\ F_0 H \cos\omega t \end{Bmatrix}
$$

(7-20)

Para resolver este modelo se usarán las ecuaciones del capítulo 5.

7.2.4 Vibración Horizontal + Cabeceo + Aislamiento.

Este modelo incorpora el acoplamiento de las propiedades dinámicas del modo horizontal y por cabeceo. El modelo matemático representado tiene tres grados de libertad asociados con las tres coordenadas x_1, x_2, ψ_2. Por consiguiente, tres formas modales son posibles con sus correspondientes frecuencias naturales de vibración.

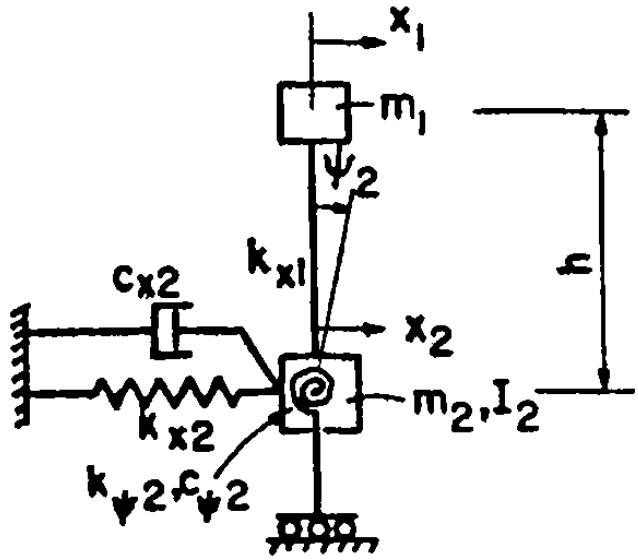

Fig. 7.6 Modelo Matemático No. 4 para la Vibración Horizontal + Cabeceo con Aislamiento

Las ecuaciones de movimiento del modelo mostrado son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 + k_{x1}(x_1 - x_2 - \psi_2 h) = F_x(t) \\
&m_2\ddot{x}_2 + C_{x2}\dot{x}_2 + k_{x2}x_2 - k_{x1}(x_1 - x_2 - \psi_2 h) = 0 \\
&I_2\ddot{\psi}_2 + C_{\psi 2}\dot{\psi}_2 + m_1\ddot{x}_1 h + k_{\psi 2}\psi_2 = F_x(t)h
\end{aligned}
\qquad (7\text{-}21)
$$

en donde las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez serían las siguientes:

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_1 h & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{\psi 2} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}22)$$

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{x1} & -k_{x1} & -k_{x1}h \\ -k_{x1} & k_{x1}+k_{x2} & k_{x1}h \\ 0 & 0 & k_{\psi 2} \end{bmatrix}$$

La expresión matricial de la ecuación de equilibrio dinámico es como se especifica en la ecuación (7-23), y al igual que los modelos anteriores sus frecuencias se obtienen utilizando el programa CAL-91.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_1 h & 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\psi}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{\psi 2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{x1} & -k_{x1} & -k_{x1}h \\ -k_{x1} & k_{x1}+k_{x2} & k_{x1}h \\ 0 & 0 & k_{\psi 2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_x(t) \\ 0 \\ F_x(t)h \end{Bmatrix}$$

(7-23)

7.3 Solución a Casos Prácticos y Ejemplos Numéricos

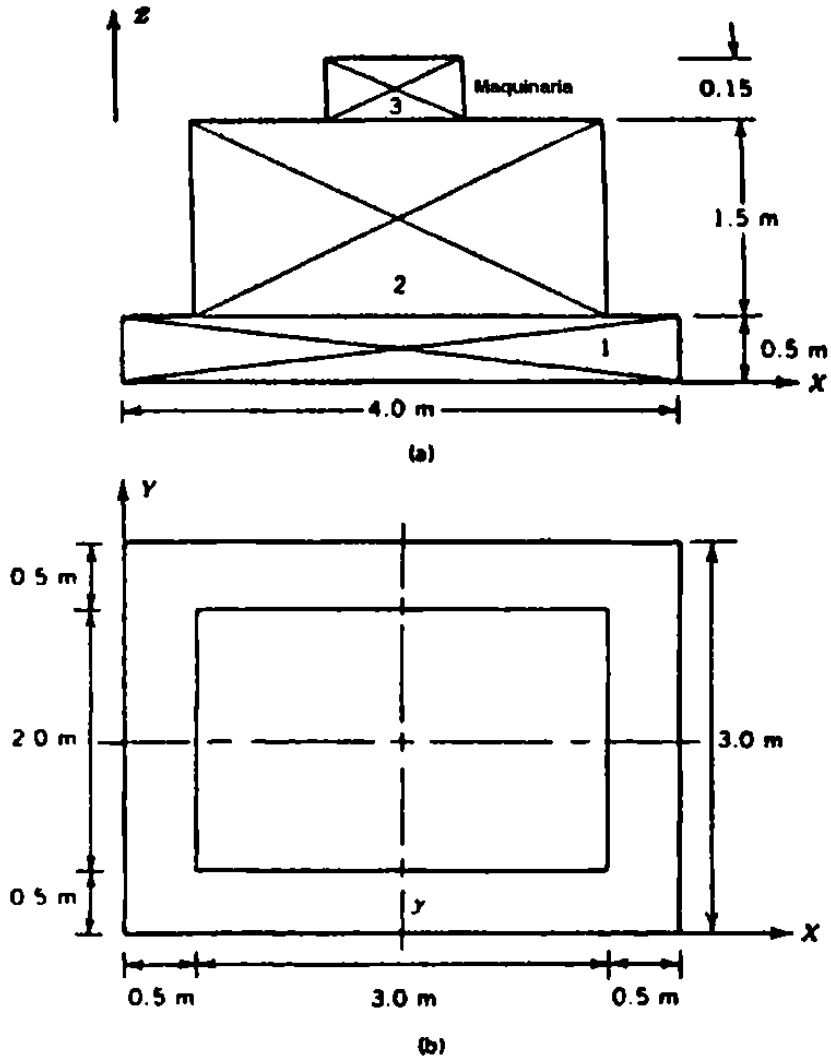

Fig. 7.7 Dimensiones de la Cimentación para los Casos Prácticos (a) Elevación, (b) Planta.

Caso práctico 1.

El bloque de concreto mostrado en la figura 7.7 será usado como cimentación de una máquina reciprocante operando a 600 r.p.m. y montada simétricamente con respecto a la cimentación. El peso de la máquina es de 1.1 ton. La fuerza desbalanceada vertical debido a la operación es $P_z = 0.2 sin\omega_e t$. Asumiendo que

el módulo dinámico al esfuerzo cortante es G = 500 kg/cm^2, la relación de poisson $\upsilon = 0.33$, la densidad del suelo $\gamma_s = 1.65$ ton/m^3 y el peso unitario del concreto es $\gamma_c = 2.4$ ton/m^3.

Modelo matemático No. 1 (Vibración vertical sin aislamiento).

a) Datos de la maquinaria.

Peso de la máquina = 1.1 ton

Velocidad de operación de la máquina = 600 r.p.m. = 62.83 rad/s

Fuerza desbalanceada vertical = P_z = 0.2 ton

b) Datos del suelo.

G = 500 kg/cm^2 = 5000 ton/m^2

υ = 0.33

γ_s = 1.65 ton/m^3

c) Datos de la cimentación.

γ_c = 2.4 ton/m^3

Peso de la cimentación = 2.4 (4 x 3 x 0.5 + 3 x 2 x 1. 5) = 36 ton

Peso total de cimentación + máquina = 36 + 1.1 = 37.1 ton

Area de la base de la cimentación = 4 x 3 = 12 m^2

Según la teoría del semi-espacio elástico el radio equivalente r_{oz} es

$$r_{oz} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad (5\text{-}1)$$

$$r_{oz} = \sqrt{\frac{4x3}{\pi}} = 1.9544 \text{ m}$$

d) Determinación de la relación de masa, constante de resorte y relación de amortiguamiento.

Relación de masa.

$$B_z = \frac{(1-\upsilon)}{4}\frac{m}{\rho r_{oz}^3} \qquad (4\text{-}24)$$

$$\rho = \frac{\gamma_s}{g} \qquad (7\text{-}24)$$

sustituyendo

$$B_z = \frac{(1-\upsilon)}{4}\frac{mg}{\gamma_s r_{oz}^3} \qquad (7\text{-}25)$$

$$B_z = \frac{(1-0.33)}{4}\frac{37.1}{1.65(1.9544)^3} = 0.5045$$

Constante de resorte

$$k_z = \frac{4Gr_{oz}}{1-\upsilon} \qquad (4\text{-}25)$$

$$k_z = \frac{4x5000x1.9544}{(1-0.33)} = 58340 \text{ ton/m}$$

Relación de amortiguamiento

$$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} \qquad (4\text{-}30)$$

$$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{0.5045}} = 0.5984$$

$$\xi_z = 59.84\ \%$$

e) Frecuencia natural de vibración.

$$\omega = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \qquad (5\text{-}19)$$

$$m = \frac{W}{g} \qquad (7\text{-}26)$$

$$m = \frac{37.1}{9.81} = 3.7819 \text{ ton-s}^2/\text{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{58340}{3.7819}} = 124.2 \text{ rad/s}$$

en donde

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (7\text{-}27)$$

$$f = \frac{124.2}{2\pi} = 19.77 \text{ Hz}$$

f) Relación de frecuencias.

$$\beta = \frac{\omega_e}{\omega} \qquad (7\text{-}28)$$

$$\beta = \frac{62.83}{124.2} = 0.5059$$

g) Cálculo de la amplitud de vibración donde $F_0 = P_z$.

$$A_z = \frac{P_z}{k_z\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi_z\beta\right)^2}} \qquad (5\text{-}20)$$

$$A_z = \frac{0.2}{58340\sqrt{\left[1-(0.5059)^2\right]^2 + (2x0.5984x0.5059)^2}} = 3.6x10^{-6} \text{ m}$$

$$A_z = 0.0036 \text{ mm}$$

Modelo matemático No. 2 (Vibración vertical con aislamiento).

Utilizando la misma cimentación del modelo 1 se obtendrán las amplitudes de vibración y sus frecuencias naturales siguiendo el procedimiento dado en la sección 6.5.

a) Cálculo de las masas.

No se considera necesario colocar un bloque de concreto sobre los aisladores, además, para permitir una comparación directa la masa m_1 será únicamente la masa de la maquinaria.

$$m_1 = \frac{W_1}{g} \qquad (7\text{-}29)$$

$$m_1 = \frac{1.1}{9.81} = 0.1121 \text{ ton-s}^2\text{/m}$$

$$m_2 = \frac{W_2}{g} \qquad (7\text{-}30)$$

$$m_2 = \frac{36}{9.81} = 3.6697 \text{ ton-s}^2\text{/m}$$

donde

W_1 = Peso de la maquinaria

W_2 = Peso de la cimentación

b) Relación de masas.

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \qquad (6\text{-}29)$$

$$\mu = \frac{0.1121}{3.6697} = 0.0305$$

c) Constante de resorte del suelo bajo la cimentación.

$k_2 = 58340$ ton/m (del Modelo No. 1)

d) Frecuencia natural límite del sistema completo (maquinaria + cimentación).

$$\omega_{n/2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}} \qquad (6\text{-}28)$$

$$\omega_{n/2} = \sqrt{\frac{58340}{0.1121 + 3.6697}} = 124.2 \text{ rad/s}$$

e) Relación de frecuencias r_2.

$$r_2 = \frac{\omega_{n/2}}{\omega_e} \qquad (6\text{-}30)$$

$$r_2 = \frac{124.2}{62.83} = 1.9768$$

f) Amplitud del sistema (sin considerar los aisladores).

$$Z = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)\left(\omega_{n/2}^2 - \omega_e^2\right)} \qquad (6\text{-}31)$$

$$Z = \frac{0.2}{(0.1121 + 3.6697)\left[(124.2)^2 - (62.83)^2\right]} = 4.6x10^{-6} \text{ m}$$

$$Z = 0.0046 \text{ mm}$$

La diferencia entre el valor de la amplitud del modelo No. 1 y el valor anterior se debe principalmente, a que en la ecuación (6-31) no está considerado el amortiguamiento del suelo ($\xi_z = 0.5984$) lo cual origina un mayor valor de la amplitud de vibración.

g) Grado de absorción.

$$\eta = \frac{Z}{Z_2} \qquad (6\text{-}32)$$

Suponiendo que existan equipos sensibles a las vibraciones en las inmediaciones de la cimentación, o bien por requerimientos especiales se pueden limitar las amplitudes de las vibraciones verticales definiendo como límite Z_2 = 0.002 mm.

$$\eta = \frac{0.0046}{0.002} = 2.3$$

el valor del grado de absorción debe ser negativo como se puede ver en la gráfica No. 3 del Apéndice B.

h) Relación de frecuencia r_1.

$$\eta = \frac{\left[1-(1+\mu)(r_1^2+r_2^2-r_1^2r_2^2)\right]}{r_1^2\left[(1+\mu)(r_2^2-1)\right]} \qquad (6\text{-}32)$$

despejando r_1^2

$$r_1^2 = \frac{1-(1+\mu)r_2^2}{(1+\mu)(\eta-1)(r_2^2-1)} \qquad (7\text{-}31)$$

$$r_1^2 = \frac{1-(1+0.0305)(1.9768)^2}{(1+0.0305)(-2.3-1)\left[(1.9768)^2-1\right]} = 0.3061$$

i) Determinación de $\omega_{n/1}^2$.

$$\omega_{n/1}^2 = r_1^2\omega_e^2 \qquad (6\text{-}36)$$

$$\omega_{n/1}^2 = (0.3061)(62.83)^2 = 1208.36$$

$$\omega_{n/1} = 34.76 \text{ rad/s}$$

j) Rigidez total del aislador.

$$k_1 = m_1 \omega_{n/1}^2 \qquad (6\text{-}37)$$

$$k_1 = (0.1121)(34.76)^2 = 135.44 \text{ ton/m}$$

k) Amplitud de vibración del sistema sobre los aisladores.

$$Z_1 = \frac{(1+\mu)\omega_{n/2}^2 + \mu\omega_{n/1}^2 - \omega_e^2}{m_1 \Delta(\omega^2)} F_0 \qquad (6\text{-}38)$$

donde

$$\Delta(\omega^2) = \omega_e^4 - (1+\mu)\left(\omega_{n/1}^2 + \omega_{n/2}^2\right)\omega_e^2 + (1+\mu)\omega_{n/1}^2\omega_{n/2}^2 \qquad (6\text{-}39)$$

$$\Delta(\omega^2) = (62.83)^4 - (1+0.0305)\left[(34.76)^2 + (124.2)^2\right](62.83)^2 + (1+0.0305)(34.76)^2(124.2)^2$$

$$\Delta(\omega^2) = 0.3288x10^8$$

$$Z_1 = \frac{(1+0.0305)(124.2)^2 + (0.0305)(34.76)^2 - (62.83)^2}{0.1121(0.3288x10^8)} 0.2 = 0.00065 \text{ m}$$

$$Z_1 = 0.6504 \text{ mm}$$

La amplitud Z_1 es calculada para revisar los esfuerzos en el material aislante.

$$P_{actuante} = k_1 Z_1 \leq P_{admisible} \qquad (6\text{-}40)$$

l) Verificar la amplitud de vibración del sistema completo.

$$Z_2 = \frac{\omega_{n/1}^2}{m_2 \Delta(\omega^2)} F_0 \qquad (6\text{-}14)$$

$$Z_2 = \frac{(34.76)^2}{(3.6697)(0.3288x10^8)} 0.2 = 2.0x10^{-6}$$

$$Z_2 = 0.002 \text{ mm}$$

Para obtener las frecuencias naturales se usará la ecuación (7-17) expresada en forma matricial. De tal manera que las matrices estructurales quedan definidas como:

m)Matrices estructurales.

Matriz de masas.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1121 & 0 \\ 0 & 3.6697 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigideces.

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{z1} & -k_{z1} \\ -k_{z1} & k_{z1}+k_{z2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 135.44 & -135.44 \\ -135.44 & 135.44+58340 \end{bmatrix}$$

Matriz de Amortiguamiento.

De acuerdo con el capítulo 4 tenemos que

$$C_z = \frac{3.4r_0^2}{(1-\upsilon)}\sqrt{\rho G} \qquad (4\text{-}26)$$

$$C_z = \frac{3.4(1.9544)^2}{(1-0.33)}\sqrt{\frac{(1.65)(5000)}{9.81}} = 562.11$$

$$[C]=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{z2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 562.11 \end{bmatrix}$$

n) Cálculo de las frecuencias naturales de vibración usando el programa CAL-91 (ver Apéndice C).

Las frecuencias circulares se definen como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (7\text{-}32)$$

entonces

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{0.18099} = 34.72 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{0.04977} = 126.24 \text{ rad/s}$$

$$f_1 = \frac{34.72}{2\pi} = 5.53 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{126.24}{2\pi} = 20.09 \text{ Hz}$$

o) Determinación de la Transmisibilidad y la Eficiencia del Aislamiento.

$$\beta = \frac{\omega_e}{\omega} \qquad (7\text{-}28)$$

$$\beta = \frac{62.83}{34.72} = 1.8096$$

Despreciando el amortiguamiento de los aisladores $(\zeta = 0)$ entonces la transmisibilidad es:

$$T = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad (6\text{-}2)$$

$$T = \frac{1}{1-(1.8096)^2} = -0.4396$$

La transmisibilidad es del 44 % aproximadamente y la eficiencia del aislamiento es:

$$R = (1-T) \qquad (7\text{-}33)$$

$$R = (1 - 0.4396) = 0.56$$

$$R = 56\%$$

R representa el porcentaje de reducción de la vibración la cual se transmite a la cimentación.

Caso Práctico 2.

El bloque de concreto mostrado en la figura 7.7 es utilizado para soportar un compresor montado simétricamente. El peso del compresor es de 2.5 ton. , y transmite una fuerza horizontal desbalanceada de $P_x = 0.2 sin\omega t$ la cual se aplica a una altura de 0.15 m sobre la cara superior del bloque. La velocidad de operación del compresor es de 450 r.p.m. y su centro de gravedad esta a 0.15 m con respecto al bloque. Asumiendo que el módulo de cortante dinámico es G = 600 kg/cm^2, la relación de poisson $\upsilon = 0.33$, la densidad del suelo $\gamma_s = 1.65$ ton/m^3 y el peso unitario del concreto es $\gamma_c = 2.4$ ton/m^3.

Modelo Matemático No. 3 (Vibración horizontal + cabeceo sin aislamiento).

a) Datos de la maquinaria.

Peso del compresor = 2.5 ton

Velocidad de operación = 450 r.p.m. = 47.12 rad/s

Fuerza desbalanceada horizontal = P_x = 0.2 ton

b) Datos del suelo.

G = 600 kg/cm^2 = 6000 ton/m^2

υ = 0.33

γ_s = 1.65 ton/m^3

c) Datos de la cimentación.

γ_c = 2.4 ton/m^3

Peso de la cimentación = 2.4 (4 x 3 x 0.5 + 3 x 2 x 1. 5) = 36 ton

Peso total de cimentación + máquina = 36 + 2.5 = 38.5 ton

Area de la base de la cimentación = 4 x 3 = 12 m^2

d) Selección de las constantes del suelo.

Los valores de las constantes del suelo (relación de masa, rigidez y amortiguamiento) se obtendrán mas adelante usando los datos del suelo.

e) Centrado del área de la cimentación.

Cálculo de la altura del centro de gravedad combinado haciendo momentos estáticos en la base.

$$h_0 = \frac{2.5(2.15)+21.6(1.25)+14.4(0.25)}{38.5} = 0.9344 \text{ m}$$

Debido a que la maquinaria y el bloque de cimentación tienen el mismo eje vertical las excentricidades son $e_x = e_y = 0$.

f) Fuerzas de excitación desbalanceadas.

$$P_x = 0.2 \text{ ton}$$

g) Momentos de inercia y momentos de inercia de la masa.

Momento de inercia de la masa con respecto al eje que pasa a través del centro de gravedad combinado y paralelo al eje y (M_m).

$$M_m = M_{m1} + M_{m2} + M_{m3} \qquad (7\text{-}34)$$

$$M_m = \sum_{n=1}^{3} \left[\frac{m_n}{12} \left(a_x^2 + a_z^2 \right) + m_n \left\{ (x_1 - x_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \right\} \right] \qquad (7\text{-}35)$$

donde

m_1 = Es la masa de la losa de base.

m_2 = Es la masa del bloque de cimentación.

m_3 = Es la masa de la maquinaria.

$$M_m = \frac{14.4}{12x9.81}\left[(4)^2 + (0.5)^2\right] + \frac{14.4}{9.81}\left[(0.25 - 0.9344)^2\right] + \frac{21.6}{12x9.81}\left[(3)^2 + (1.5)^2\right]$$
$$+ \frac{21.6}{9.81}\left[(1.25 - 0.9344)^2\right] + \frac{2.5}{9.81}\left[(2.15 - 0.9344)^2\right]$$

$$M_m = 5.3354 \text{ ton m s}^2$$

Momento de inercia de la masa con respecto al eje y que pasa a través del centro de gravedad de la base (M_{mo}) siendo $h_0 = L$.

$$M_{mo} = M_m + mh_0^2 \qquad (5\text{-}12)$$

$$M_{mo} = 5.3354 + \frac{38.5}{9.81}(0.9344)^2 = 8.762 \text{ ton m s}^2$$

$$\gamma = \frac{M_m}{M_{mo}} \qquad (5\text{-}13)$$

$$\gamma = \frac{5.3354}{8.762} = 0.6089$$

Momento de inercia del área de contacto de la base con respecto al eje y.

$$I = \frac{ba^3}{12} \qquad (7\text{-}36)$$

$$I = \frac{3(4)^3}{12} = 16 \text{ m}^4$$

De acuerdo con la teoría del semi-espacio elástico se obtendrá la relación de masa, la constante de resorte y la relación de amortiguamiento.

Vibración por deslizamiento.

Radio equivalente

$$r_{ox} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad (5\text{-}16)$$

$$r_{ox} = \sqrt{\frac{4x3}{\pi}} = 1.9544 \text{ m}$$

Relación de masa.

$$B_x = \frac{(7-8\upsilon)}{32(1-\upsilon)} \frac{W}{\gamma_s r_{ox}^3} \qquad (4\text{-}37)$$

$$B_x = \frac{7-8(0.33)}{32(1-0.33)} \frac{38.5}{1.65(1.9544)^3} = 0.6356$$

Constante de resorte

$$k_x = \frac{32(1-\upsilon)Gr_{ox}}{7-8\upsilon} \qquad (4\text{-}38)$$

$$k_x = \frac{32(1-0.33)6000x1.9544}{(7-8x0.33)} = 57663 \text{ ton/m}$$

Amortiguamiento equivalente.

$$C_x = \frac{18.4(1-\upsilon)}{7-8\upsilon} r_{ox}^2 \sqrt{\frac{\gamma_s G}{g}} \qquad (4\text{-}39)$$

$$C_x = \frac{18.4(1-0.33)}{7-8(0.33)}(1.9544)^2 \sqrt{\frac{1.65x6000}{9.81}} = 337.86$$

Relación de amortiguamiento

$$\xi_x = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}} \qquad (4\text{-}40)$$

$$\xi_x = \frac{0.2875}{\sqrt{0.6356}} = 0.36$$

$$\xi_x = 36\ \%$$

Vibraciones por cabeceo.

Radio equivalente, remplazando ψ por ϕ

$$r_{o\psi} = \left(\frac{ba^3}{3\pi}\right)^{1/4} \qquad (5\text{-}17)$$

$$r_{o\psi} = \left[\frac{3(4)^3}{3\pi}\right]^{1/4} = 2.1245\ \text{m}$$

Relación de masa.

$$B_\psi = \frac{3}{8}\frac{M_{mo}(1-\upsilon)}{\left(\gamma_s/g\right)r_{o_\psi}^5} \qquad (4\text{-}44)$$

$$B_\psi = \frac{3}{8}\frac{8.762(1-0.33)}{\left(1.65/9.81\right)(2.1245)^5} = 0.3024$$

Constante de resorte.

$$k_\psi = \frac{8Gr_{o\psi}^3}{3(1-\upsilon)} \qquad (4\text{-}46)$$

$$k_\psi = \frac{8x6000(2.1245)^3}{3(1-0.33)} = 228990 \text{ ton m/rad}$$

Amortiguamiento equivalente.

$$C_\psi = \frac{0.8r_{o\psi}^4\sqrt{\frac{\gamma_s G}{g}}}{(1-\upsilon)(1+B_\psi)} \qquad (4\text{-}47)$$

$$C_\psi = \frac{0.8(2.1245)^4\sqrt{\frac{1.65x6000}{9.81}}}{(1-0.33)(1+0.3024)} = 593.3$$

Relación de amortiguamiento.

$$\xi_{\psi} = \frac{0.15}{(1+B_{\psi})\sqrt{B_{\psi}}} \qquad (4\text{-}49)$$

$$\xi_{\psi} = \frac{0.15}{(1+0.3024)\sqrt{0.3024}} = 0.2094$$

$$\xi_{\psi} = 20.94\%$$

h) Determinación de las frecuencias naturales.-

Frecuencia natural por deslizamiento.

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \qquad (5\text{-}23)$$

$$m = \frac{38.5}{9.81} = 3.9246 \text{ ton s}^2/\text{m}$$

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{57663}{3.9246}} = 121.21 \text{ rad/s}$$

Frecuencia natural por cabeceo.

$$\omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{k_{\psi}}{M_{mo}}} \qquad (5\text{-}24)$$

$$\omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{228990}{8.762}} = 161.66 \text{ rad/s}$$

Frecuencias naturales del sistema combinado.

Utilizando el programa CAL-91 (ver Apéndice C), y sustituyendo los valores correspondientes en las matrices estructurales tenemos:

Matriz de masas $(I_\psi = M_m)$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9246 & 0 \\ 0 & 5.3354 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez

$$[k] = \begin{bmatrix} k_x & -h_0 k_x \\ -h_0 k_x & k_\psi + h_0^2 k_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57663 & -0.9344(57663) \\ -0.9344(57663) & 228990 + (0.9344)^2(57663) \end{bmatrix}$$

Cálculo de las frecuencias naturales de vibración.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{0.059069} = 106.4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{0.026615} = 236 \text{ rad/s}$$

$$f_1 = 16.93 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 37.57 \text{ Hz}$$

También se puede utilizar la ecuación (5-26) para obtener las frecuencias naturales.

i) Cálculo de las amplitudes $(L = h_0);(\psi = \phi)$.

$$\Delta(\omega)^2 = \left\{ \begin{array}{l} \left(\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{\left(\omega_{n\psi}^2 + \omega_{nx}^2\right)}{\gamma} - \frac{4\xi_x \xi_\psi \omega_{nx} \omega_{n\psi}}{\gamma} \right) + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\psi}^2}{\gamma} \right)^2 \\ + 4\left(\xi_x \frac{\omega_{nx}\omega}{\gamma}\left(\omega_{n\psi}^2 - \omega^2\right) + \frac{\xi_\psi \omega_{n\psi}\omega}{\gamma}\left(\omega_{nx}^2 - \omega^2\right) \right)^2 \end{array} \right\}^{1/2} \qquad (5\text{-}29)$$

$$\Delta(\omega)^2 = \left\{ \begin{array}{l} \left((47.12)^4 - (47.12)^2 \left[\frac{161.66^2 + 121.21^2}{0.6089} - \frac{4x0.36x0.2094x121.21x161.66}{0.6089} \right] \right. \\ \left. + \frac{121.21^2 x 161.66^2}{0.6089} \right)^2 \\ + 4\left[\begin{array}{l} \frac{0.36x121.21x47.12}{0.6089}\left(161.66^2 - 47.12^2\right) + \frac{0.2094x161.66x47.12}{0.6089} \\ x\left(121.21^2 - 47.12^2\right) \end{array} \right]^2 \end{array} \right\}^{1/2}$$

$$\Delta(\omega)^2 = 5.5651x10^8$$

La amplitud por la vibración horizontal es

$$A_x = \frac{P_x}{mM_m} \frac{\left[\left(-M_m\omega^2 + k_\psi + h_0{}^2 k_x\right)^2 + 4\omega^2\left(\xi_\psi \sqrt{k_\psi M_{mo}} + h_0{}^2 \xi_x \sqrt{k_x m}\right)^2 \right]^{1/2}}{\Delta\left(\omega^2\right)} \qquad (5\text{-}30)$$

$$A_x = \frac{0.2}{3.9246x5.3354x5.5651x10^8}\left[\begin{array}{l}\left(-5.3354x47.12^2 + 228990 + 0.9344^2 x57663\right)^2 \\ +4x47.12^2\left(\begin{array}{l}0.2094\sqrt{228990x8.762} + 0.9344^2 x0.36 \\ x\sqrt{57663x3.9246}\end{array}\right)^2\end{array}\right]^{1/2}$$

$$A_x = 4.6473x10^{-6}\,\text{m} = 0.0046\ \text{mm}$$

Amplitud por el cabeceo

$$A_\psi = \frac{P_x h_0}{M_m}\frac{\omega_{nx}\left(\omega_{nx}^2 + 4\xi_x\omega^2\right)^{1/2}}{\Delta\left(\omega^2\right)} \qquad (5\text{-}31)$$

$$A_\psi = \frac{0.2x0.9344}{5.3354}\frac{121.21\left(121.21^2 + 4x0.36x47.12^2\right)^{1/2}}{5.5651x10^8}$$

$$A_\psi = 1.02x10^{-6}\ \text{rad}$$

Amplitud horizontal total.

$$A_h = A_x + hA_\psi \qquad (7\text{-}37)$$

$$A_h = 0.0046 + (2.15 - 0.9344)(1.02x10^{-6})(10^3) = 0.0058\ \text{mm}$$

Modelo matemático No. 4 (Vibración horizontal +cabeceo con aislamiento).

Utilizando los datos del caso No. 2 se obtendrán las amplitudes de vibración y sus frecuencias naturales mediante el programa CAL-91.

a) Cálculo de las masas.

No se considera necesario colocar un bloque de concreto sobre los aisladores, además, para permitir una comparación directa la masa m_1 será únicamente la masa de la maquinaria.

$$m_1 = \frac{W_1}{g} \qquad (7\text{-}29)$$

$$m_1 = \frac{2.5}{9.81} = 0.2548 \text{ ton-s}^2/\text{m}$$

$$m_2 = \frac{W_2}{g} \qquad (7\text{-}30)$$

$$m_2 = \frac{36}{9.81} = 3.6697 \text{ ton-s}^2/\text{m}$$

donde

W_1 = Peso del compresor

W_2 = Peso de la cimentación

b) Datos para cálculo obtenidos del modelo No. 3.

$I_2 = M_m = 5.3354$ ton m s^2

. k_{x1} = 135.44 ton/m (Rigidez total del aislador del modelo No. 2)

k_{x2} = 57663 ton/m

$k_{\psi 2} = 228990$ ton m/rad

$h = (2.15 - h_o) = (2.15 - 0.9344) = 1.2156$ m

c) Determinación de las frecuencias naturales.-

Para obtener las frecuencias naturales se usarán las matrices (7-22). Sustituyendo los datos del inciso (b).

Matrices estructurales.

Matriz de masas.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_1 h & 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2548 & 0 & 0 \\ 0 & 3.6697 & 0 \\ 0.3097 & 0 & 5.3354 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigideces.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{x1} & -k_{x1} & -k_{x1}h \\ -k_{x1} & k_{x1} + k_{x2} & k_{x1}h \\ 0 & 0 & k_{\psi 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135.44 & -135.44 & -164.64 \\ -135.44 & 57798.44 & 164.64 \\ 0 & 0 & 228990 \end{bmatrix}$$

Cálculo de las frecuencias naturales de vibración usando el programa CAL-91 (ver Apéndice C).

Las frecuencias circulares se definen como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (7\text{-}32)$$

entonces

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{0.27298} = 23 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{0.050063} = 125.51 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{0.029226} = 215 \text{ rad/s}$$

$$f_1 = \frac{23}{2\pi} = 3.66 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{125.51}{2\pi} = 20 \text{ Hz}$$

$$f_3 = \frac{215}{2\pi} = 34.2 \text{ Hz}$$

d) Formas modales.-

Tabla 7.1

FORMAS MODALES			
Masas	Modos de Vibrar		
	1	2	3
1	1.9792E+00	-1.7490E-02	-5.5217E-01
2	4.7994E-03	5.2199E-01	6.6888E-04
3	1.4359E-03	-5.8862E-04	4.4906E-01

e) Cálculo de las amplitudes de vibración.-

Para obtener la respuesta del sistema de tres grados de libertad del modelo No. 4 se utilizará una técnica de análisis modal. Este método de análisis consiste en calcular la respuesta de cada modo normal individualmente y luego superponer las respuestas individuales para calcular la solución total. Existen algunas limitantes para la aplicación de este método las cuales son:

(1) Las fuerzas dinámicas que actúan en las masas deben seguir una misma variación, por ejemplo que sean fuerzas armónicas. (2) Las fuerzas deben actuar en una misma frecuencia. Sin embargo, estas restricciones pueden superarse si se utilizan métodos numéricos en la solución de las ecuaciones modales.

La teoría para derivar la siguiente ecuación se establece en la referencia ("Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines" de Arya, O'Neill y Pincus, pag. 166).

El desplazamiento total para la masa r es dado por la superposición de los N modos:

$$X_r(t) = \sum_{n=1}^{N} A_{rn}(M)_n \frac{\sum_{r=1}^{j} F_{r1} A_{rn}}{\omega_n^2 \sum_{r=1}^{j} M_r A_{rn}^2} f(t) \qquad (7\text{-}38)$$

En el apéndice A se realiza el cálculo de las respuestas dinámicas utilizando la ecuación (7-38), en la tabla 7.2 se muestran los resultados de las amplitudes máximas.

Tabla 7.2

TABLA DE CALCULO DEL ANALISIS DE LA RESPUESTA MODAL										
Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1.979E+00	0.2	0.39584	0.2548	9.981E-01				
	2	4.799E-03	0	0	3.6697	8.453E-05	529	7.48E-04	0.3128	4.6285E-04
	3	1.436E-03	0.2431	0.0003491	5.3354	1.100E-05				
	Σ			**0.3961891**		**0.99821**				
2	1	-1.749E-02	0.2	-0.003498	0.2548	7.794E-05				
	2	5.220E-01	0	0	3.6697	9.999E-01	15752.76	-2.31E-07	1.1104	9.8834E-07
	3	-5.886E-04	0.2431	-0.000143	5.3354	1.849E-06				
	Σ			**-0.003641**		**0.99998**				
3	1	-5.522E-01	0.2	-0.110434	0.2548	7.769E-02				
	2	6.689E-04	0	0	3.6697	1.642E-06	46225	-3.16E-08	1.0456	3.2108E-07
	3	4.491E-01	0.2431	0.1091665	5.3354	1.076E+00				
	Σ			**-0.001268**		**1.15360**				

Para la definición del significado de cada columna ver el apéndice A.

Amplitud por la vibración horizontal en los aisladores.

$$A_{x1} = 0.4629 \text{ mm}$$

Amplitud por la vibración horizontal en el bloque de cimentación.

$$A_{x2} = 0.0010 \text{ mm}$$

Amplitud por cabeceo.

$$A_{\psi} = 0.32108x10^{-6} \text{ rad}$$

Amplitud horizontal total.

$$A_h = 0.0010 + (2.15 - 0.9344)(0.32108x10^{-6})(10^3) = 0.0014 \text{ mm}$$

f) Determinación de la Transmisibilidad y la Eficiencia del Aislamiento.

$$\beta = \frac{\omega_e}{\omega} \qquad (7\text{-}28)$$

$$\beta = \frac{47.12}{23} = 2.05$$

Despreciando el amortiguamiento de los aisladores $(\zeta = 0)$ entonces la transmisibilidad es

$$T = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad (6\text{-}2)$$

$$T = \frac{1}{1-(2.05)^2} = -0.3123$$

La transmisibilidad es del 31 % aproximadamente y la eficiencia del aislamiento es

$$R = (1-T) \qquad (7\text{-}33)$$

$$R = (1-0.3123) = 0.6877$$

$$R = 69\%$$

R representa el porcentaje de reducción de la vibración la cual se transmite a la cimentación.

CAPITULO 8

ASPECTOS CONSTRUCTIVOS DE CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA

8.1 Construcción de Bloques de Cimentación

La construcción de una cimentación para una maquinaria es muy importante, ya que si no se tiene el cuidado necesario durante esta etapa todo el diseño cuidadoso y el dinero invertido en su desarrollo será desperdiciado. Además, las reparaciones posteriores que se realicen en la cimentación generarán interrupciones en la operación de la maquinaria y la consiguiente pérdida de producción; estas pérdidas, en un momento dado, pueden exceder el costo de la misma máquina y de su cimentación.

Algunos defectos de construcción que pueden ocasionar mal funcionamiento de la maquinaria son por ejemplo, un curado deficiente del concreto, una altura de vaciado inadecuada, interrupciones indeseables durante el colado, negligencia en la colocación de juntas de construcción, y un alineamiento imperfecto de la maquinaria con la cimentación. Debido a descuidos en lo referente a las aberturas y cavidades, éstas pueden moverse durante el colado, lo cual originará trabajos adicionales posteriores. Debido a todo lo anterior, la construcción de una cimentación para maquinaria es un proyecto que requiere

sumo cuidado, y precauciones adicionales a las normalmente observadas en la construcción de estructuras de concreto reforzado. Así también, las cimentaciones requieren de una adecuada compactación, que origine una densa matriz para tener buena adherencia con el acero de refuerzo.

Los requerimientos estándar de la construcción del concreto reforzado están establecidos por el ACI 318-95 (American Concrete Institute, 1995), pero los problemas específicos en la construcción de cimentaciones para maquinaria y otras consideraciones adicionales, se discutirán a continuación:

El concreto.

1. La selección de los agregados y el proporcionamiento de la mezcla de concreto debe ser hacerse de acuerdo con las especificaciones dadas por el ACI 301, o códigos similares, relacionados con el uso del concreto para la construcción.
2. La resistencia última a la compresión, del concreto, debe estar conforme al criterio del ACI 318-95. Si no se dispone de la información necesaria, la resistencia última del concreto a la compresión no deberá ser menor que 150 kg/cm^2 o 2.2 ksi.
3. El concreto deberá colarse en capas horizontales. La primera capa será de 300 mm (12 pulg) y las coladas subsecuentes, en capas de 400 mm (16 pulg).
4. La altura del vaciado deberá ser la adecuada para evitar la segregación del concreto.

5. La cimentación debe ser colada en una sola operación, para evitar las juntas "frías". Si es necesario, se tendrá que acortar el tiempo entre dos coladas sucesivas, y esta duración no deberá exceder de 30 min.
6. Debido a las dificultades prácticas, algunas veces el colar en una sola operación no es posible, y las juntas frías son inevitables. En estos casos, se deberá considerar una junta de construcción y su localización se escogerá cuidadosamente. El bloque debe tener un comportamiento monolítico y la junta de construcción deberá tener esta condición. Esto se logra por medio de un adecuado número de varillas y candados de corte, a través de la junta, además de un mayor control de la calidad y supervisión durante el colado. Las varillas deberán tener la longitud suficiente para asegurar una capacidad total de adherencia. Su longitud deberá ser, al menos, 4db o 12 pulg. la que sea mayor. Las varillas a utilizar pueden ser del # 5 o # 6. Para lograr una adecuada junta de construcción, en la masa del concreto, se deben proveer conectores de cortante (varillas en forma de U) en el nivel de la junta. Para obtener una fuerte adhesión, entre el concreto nuevo y el viejo, es recomendable escarificar la superficie de contacto y limpiarla vigorosamente con un cepillo de alambre; posteriormente, cubrirla con una capa delgada de lechada, antes de colar el concreto nuevo. El código del ACI especifica recomendaciones para asegurar una adecuada junta de construcción.
7. Deberá evitarse el pandeo en el concreto, debido a fallas en la cimbra o en el molde, que puedan originar desbastes posteriores.

8. Las áreas alrededor de los huecos y cavidades deberán ser tratadas cuidadosamente.
9. La cimentación deberá ser curada adecuadamente. Un curado mal realizado puede originar grietas por contracción, que afectarían posteriormente la operación de la maquinaria.

Refuerzo para la cimentación tipo bloque.

Las cimentaciones de bloque masivo no tienen los mismos requerimientos estructurales que las vigas y columnas. Por consiguiente, estas se refuerzan con porcentajes mínimos para tomar los efectos de contracción y temperatura. Según el ACI 318, el refuerzo mínimo del acero G-42 será de 0.0018 del área gruesa del concreto en cada dirección.

El acero de refuerzo no deberá espaciarse a más de 450 mm (18 pulg) centro a centro. El recubrimiento mínimo del concreto para proteger al refuerzo deberá ser al menos de 75 mm (3 pulg) en el lecho inferior y de 50 mm (2 pulg) en el lecho superior.

Los detalles de refuerzo para una cimentación tipo bloque, de una máquina de impacto, son similares a los discutidos anteriormente, excepto para la parte superior del bloque bajo el yunque, donde se requiere un refuerzo adicional para tomar los esfuerzos producidos por los impactos. El espaciamiento de las varillas, en esta parte del bloque, es usualmente de 100 mm (4 pulg) de centro a centro.

Refuerzo alrededor de aberturas y huecos.

Se deberá colocar un porcentaje refuerzo del orden del 0.5 al 0.75 % de la sección transversal de las aberturas y deberá colocarse alrededor de éstas. Este refuerzo debe ser colocado en forma de caja. En el caso de aberturas circulares, el refuerzo deberá colocarse a una longitud igual a 40 veces el diámetro de la varilla y se extenderá más allá del punto de intersección de las varillas en no menos de 300 mm (12 pulg).

Lo mencionado anteriormente se refiere a las cimentaciones tipo bloque, ya que son las estudiadas en este trabajo; sin embargo, existen indicaciones similares para otros tipos de cimentaciones, como por ejemplo, las del tipo marco.

8.2 Instalación y Conexión de la Maquinaria a la Cimentación

La maquinaria, la placa base, y otros equipos que tengan tolerancias precisas para su colocación, no pueden ser colocadas directamente en el concreto, debido a que las irregularidades en la superficie de éste generarían problemas de alineamiento.

Después del colado del concreto, la maquinaria se fija a la cimentación con una placa base y anclas. El nivel de vaciado de la cimentación estará en el mismo nivel que la placa base y se usará mortero para realizar la nivelación final de la placa. El espesor del "grout" bajo la placa base varía, de 20 a 50 mm (0.75 pulg a 2 pulg), dependiendo del tamaño de la misma. La placa base se fija a la

cimentación mediante las anclas, las cuales se colocan en su posición, antes del vaciado de la cimentación y se mantienen en su lugar preciso utilizando una plantilla (ver figura 8.1). La plantilla se remueve después del vaciado.

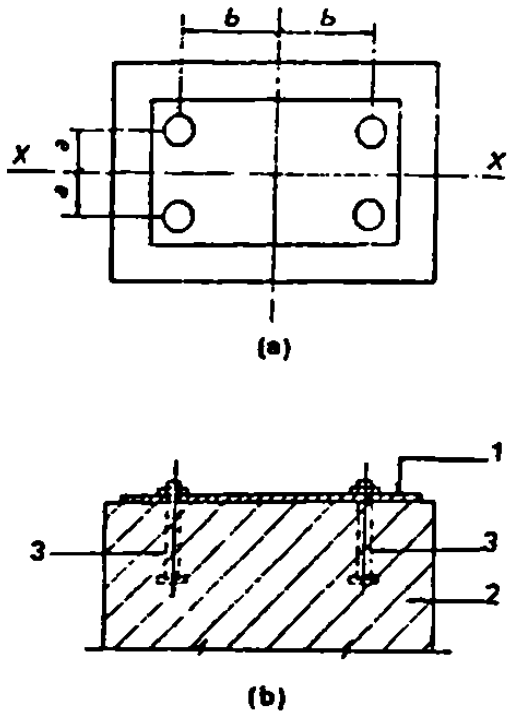

Fig. 8.1 Detalle del Posicionamiento de las Anclas. (1) Plantilla, (2) Cimentación, (3) Anclas.

Alternativamente, utilizando adecuadas cimbras se pueden dejar agujeros en el concreto, en la posición de las anclas, los cuales serán rellenados con mortero, después de colocar la placa base y alinear las anclas. Los agujeros para las anclas no deberán ser muy grandes, un tamaño de 150 x 150 mm (6 x 6 pulg) es generalmente el adecuado. La mínima distancia entre los agujeros para las anclas y el borde de la cimentación no deberá ser menor que 80 mm (3 pulg), como se muestra en la figura 8.2.

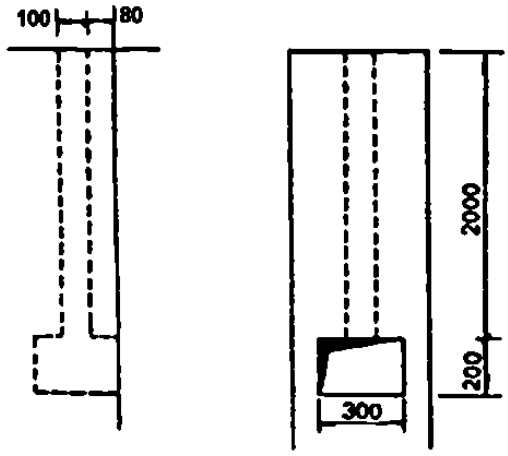

Fig. 8.2 Detalles del Agujero para las Anclas Cerca del Borde

La longitud de las anclas es usualmente determinada considerando la adherencia y no debe ser menor que 40 veces el diámetro de las anclas. En el caso de no ser posible proveer la longitud total a las anclas, se deberá usar un arreglo similar al mostrado en la figura 8.3. La posición del ancla, invariablemente, se fijará con referencia al eje de la máquina.

El "grout" bajo la placa deberá ser de un tipo sin contracciones y deberá asegurar una contacto completo con la superficie del concreto de la cimentación, así como mantener un soporte uniforme. Pueden usarse los "grout" de cemento que consiste de cementos hidráulicos y aditivos expansivos, que compensan los efectos de contracción, o "grout" epóxicos, con mezclas especiales de agregados y arenas que reducirán o eliminarán la contracción. Los "grout" epóxicos tienen la ventaja de la resistencia química, alta resistencia

inicial y tolerancia al impacto; pero son sensibles al incremento de la temperatura.

El "grout" debe ser colocado bajo la placa base cuidando que no quede aire o agua atrapada. En el comercio se dispone de mezclas de "grout" ya preparados; sin embargo, se recomienda que la selección se haga después de una cuidadosa consideración de sus propiedades y de acuerdo con los requerimientos específicos del equipo a instalar.

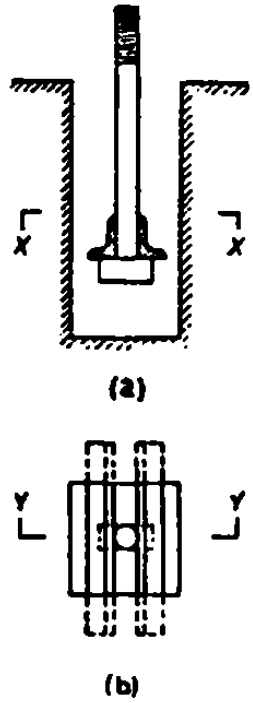

Fig. 8.3 Detalles Típicos de Anclas

Para prevenir el estallamiento del concreto en los bordes de la cimentación, se colocará un ángulo de acero en todo el borde como se indica en la figura 8.4.

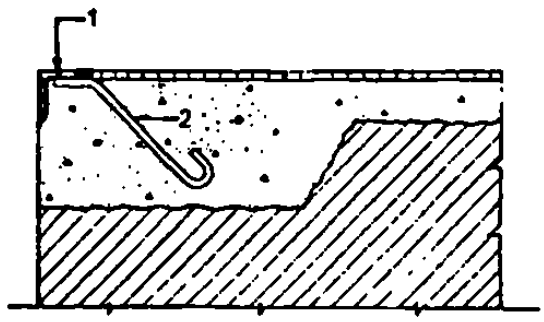

Fig. 8.4 Detalle Típico de Angulo de Borde. (1) Angulo de Acero, (2) Ancla.

8.3 Instalación de Resortes Aisladores de Vibración

Los métodos para instalar resortes aisladores en una cimentación de maquinaria dependen del tipo de sistema de aislamiento. Existen dos diferentes tipos de sistemas aisladores con resortes: el tipo soportado y el tipo suspendido. Estos sistemas fueron descritos en el capítulo 6.

Tipo Soportado.

Cuando no se requiere que la masa de concreto se apoye sobre los resortes.- Para sistemas de cimentación soportadas sobre resortes, en donde no se requiere una masa pesada sobre éstos, la maquinaria puede montarse directamente en un marco rígido metálico, apoyado sobre los resortes (ver figura 8.5). Este arreglo se usa para un buen balanceo de la maquinaria, la cual es esencialmente afectada por las fuerzas desbalanceadas, asociadas con las altas frecuencias armónicas de la operación. Los principales pasos de la construcción de tales cimentaciones son los siguientes:

1. La construcción de la losa de la base es similar a la de una cimentación en bloque. Su peralte depende del diseño de la cimentación para la máquina y generalmente varía de 0.3 a 1.2 m.
2. Antes del colado de la losa de la base, se colocarán las anclas en los lugares establecidos, según el diseño; éstas anclarán las placas bajo los resortes aisladores.
3. Los resortes son colocados sobre las placas, y éstos son cubiertos por otras placas que se fijarán a un marco metálico.
4. Se instala un marco rígido metálico sobre las placas de los aisladores (ver figura 8.5). Este marco consistirá en vigas de acero.
5. Se nivela el marco metálico para la colocación de la maquinaria ajustando los tornillos de los resortes.

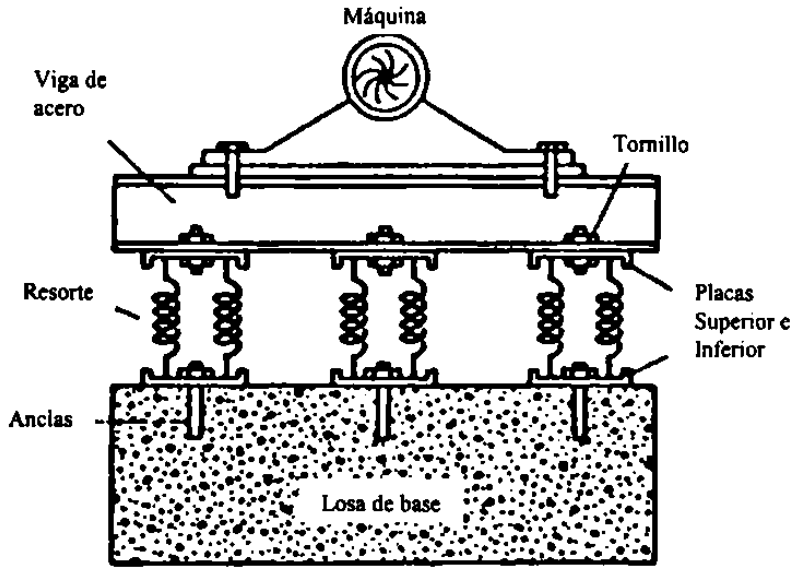

Fig. 8.5 Sistema Aislador de Resortes del Tipo Soportado con una Máquina Sujeta al Marco Metálico

Cuando se requiere que la masa de concreto se apoye sobre los resortes.- Se requiere una masa pesada de concreto sobre los resortes, generalmente, en los casos donde la operación de la maquinaria induce grandes fuerzas desbalanceadas, producidas por altas frecuencias armónicas de operación. Esta masa de concreto se coloca sobre los resortes aisladores, como se indica en la figura 8.6. Los principales procesos de la construcción de este tipo de cimentación se mencionan a continuación:

1. La construcción de la losa base y la colocación de las anclas para las placas de los resortes son similares al caso anterior.
2. Cuando el concreto ha sido colado, la superficie de la losa de la base se cubre con papel, para evitar el contacto directo con el bloque de concreto superior, el cual se colará sobre éste.
3. Las placas colocadas bajo los resortes se fijan en su posición indicada.
4. Se instala el marco rígido metálico sobre las placas de los aisladores.
5. Se construye la cimbra del bloque superior y se vacía el concreto. Las vigas del marco metálico son embebidas en la parte inferior del bloque de concreto. Dependiendo del arreglo de los aisladores y del tipo de marco usado, se necesitarán huecos en la parte inferior del bloque de concreto para poder accesar los resortes.
6. Los resortes se colocan en su posición después de colar el bloque de concreto superior. La parte superior de los resortes estará bajo las placas ancladas al marco metálico.
7. El bloque de concreto se nivelará ajustando los tornillos de los resortes.

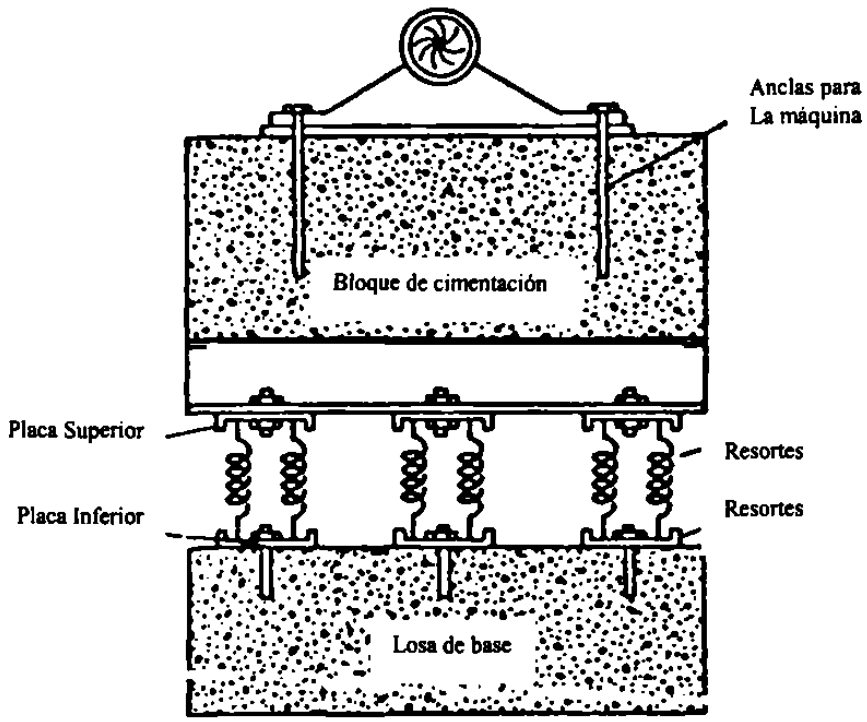

Fig. 8.6 Sistema Aislador de Resortes del Tipo Soportado con un Bloque de Cimentación Superior

Tipo Suspendido.

Una cimentación con sistema de aislamiento del tipo suspendido (figura 6.11) se construye de forma similar a las cimentaciones del tipo soportado. Los principales pasos para su construcción son los siguientes:

1. Colar la losa de cimentación bajo los resortes.
2. Cuando el concreto ha endurecido, colocar dos o tres capas de papel impermeable, en la losa de cimentación (figura 6.10).
3. Se instala un marco rígido sobre la losa de cimentación, el cual sirve como soporte de las placas de anclaje para los tornillos reguladores del aislador.

4. Cuando se coloca la cimbra para el bloque de concreto, habrá que hacer lo necesario para formar cavidades en el concreto para cada uno de los aisladores.
5. Una vez que el concreto ha sido colado, se colocan los aisladores. Estos se ubican sobre la losa inferior y sobre éstos se monta una losa soportada superior la cual se atornilla a las trabes principales de acero.
6. Se nivela la cimentación, ajustando los tornillos de los resortes.

8.4 Aspectos Generales

8.4.1 Cambio a la Frecuencia de la Cimentación.

Cuando los datos de diseño son inciertos o el margen de seguridad no puede mantenerse, con un adecuado nivel contra la resonancia, es deseable dejar una debida provisión en la construcción, para cambios posteriores que originen modificaciones en la frecuencia natural de la cimentación.

El incremento del área de la base de la cimentación resultaría en un incremento en la rigidez y la consecuente adición a la masa no es muy considerable; de tal manera que esto incrementará la frecuencia natural. Para reducir la frecuencia natural es conveniente adicionar masa en una misma área base. En cualquier caso, se deberán dejar las debidas provisiones, durante la construcción, para poder realizar estas alteraciones. Para facilitar el agrandamiento de la cimentación, se dejarán varillas embebidas, de manera que se asegure una buena adherencia entre el concreto fresco y el concreto endurecido.

Al alterar la frecuencia natural de la cimentación, deberá buscarse un valor adecuado con respecto a la resonancia, y éste puede ser de $0.7f_m > f_n > 1.3f_m$. En donde f_m es la velocidad de operación de la máquina y f_n es la frecuencia natural del sistema.

8.4.2 Adherencia entre el Concreto Fresco y el Endurecido.

Tal vez sea necesario adherir concreto fresco al concreto endurecido, para reparar una superficie de concreto defectuosa debido a una interrupción durante el colado o por un curado inadecuado. También, si por alguna razón la superficie del concreto después del colado fuese dañada, es necesario proveer una superficie dura para el buen funcionamiento de la maquinaria. En tales casos, el área afectada deberá ser escarificada y limpiada. Posteriormente, se dejarán conectores a corte directo en la superficie; esto con la finalidad de asegurar una trabazón adecuada. El número y el tamaño de estos conectores de concreto dependerán de la extensión del área a reparar. Como mínimo se colocarán cuatro conectores de cortante.

La superficie a reparar, incluyendo las áreas de los conectores, podrá ser tratada con un concreto epóxico; así también, se deberá agregar varillas del # 3 mínimo, ancladas en los conectores de corte.

CAPITULO 9

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Sobre la base de los cálculos realizados en el capítulo 7 y las gráficas mostradas en el Apéndice B, los resultados de los análisis hechos para los distintos modelos matemáticos nos sugieren entre otras cosas lo siguiente:

Con respecto al modelo No. 1, el cual tiene solamente un grado de libertad y está sujeto a vibraciones del tipo vertical, se observó que la amplitud máxima de la respuesta está desfasada de la frecuencia de excitación; esto sucede, principalmente cuando existe un porcentaje del amortiguamiento crítico del suelo mayor que el 20 %.

De tal manera que la " resonancia " ocurre no necesariamente cuando la frecuencia de operación es igual a la frecuencia natural, sino cuando la relación de frecuencias tiene el siguiente valor:

$$\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

para una fuerza de excitación es constante. En el caso de una fuerza de excitación que dependa de la frecuencia de operación, como es el caso

general, entonces la " resonancia " se presenta cuando la relación de frecuencias tiene un valor de:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$

sin embargo; para ambos casos el factor de amplificación dinámica máximo será igual a

$$FAD = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

El modelo No. 2 se convierte en un sistema de dos grados de libertad. Al ser adicionado el aislador, se observó que la acción de los aisladores reduce en forma considerable la frecuencia de excitación que se transmite al bloque de cimentación; es decir, la eficiencia del aislamiento es alta y, por consiguiente, el porcentaje de transmisibilidad es bajo.

Lo anterior se consigue debido a que la relación de frecuencias (β) es mayor que el valor crítico $\sqrt{2}$, el cual es el punto en que coinciden las curvas " Transmisibilidad contra Relación de Frecuencias " mostradas en la gráfica No. 4 y las cuales tienen diferentes porcentajes del amortiguamiento crítico.

De acuerdo con la gráfica mencionada al incrementar el amortiguamiento, cuando $\beta < \sqrt{2}$, disminuye la transmisibilidad del sistema; cuando se

incrementa el amortiguamiento para valores de $\beta > \sqrt{2}$, aumenta la transmisibilidad. Así también, puede verificarse que los valores de transmisibilidad son menores para $\beta > \sqrt{2}$, lo cual sugiere que, para aumentar la eficiencia del aislamiento, se requiere que para altas frecuencias de operación existan frecuencias naturales de vibración bajas.

En el diseño del sistema de aislamiento, se asume que la velocidad de operación es constante, las fluctuaciones en la frecuencia de operación afectarían adversamente a la eficiencia del aislamiento, como puede observarse en la gráfica 1, donde una variación en la frecuencia de operación podría ocasionar un incremento considerable en las amplitudes.

Al plantear la solución modal para poder obtener las frecuencias del modelo No. 4, el cual tiene tres grados de libertad, no se obtuvieron las gráficas de respuesta que pudieran comparar a este modelo con el modelo No. 3, tal como se realizó con las vibraciones verticales. Lo anterior con la finalidad de observar el comportamiento del sistema con aisladores y sin ellos.

Sin embargo, de la misma forma que, en las vibraciones verticales, el sistema de aislamiento fue benéfico, ya que produjo una considerable disminución en la frecuencia transmitida a la cimentación, tanto para el modo horizontal como para el modo por cabeceo.

Por consiguiente, las amplitudes de vibración en la cimentación se redujeron de una manera importante.

CONCLUSIONES FINALES

1. El cuerpo rígido que representa al bloque de cimentación y que se encuentra apoyado teóricamente en un soporte elástico, tiene estrictamente seis grados de libertad; sin embargo, se pueden plantear modelos matemáticos de uno, dos y, en ciertos casos, de tres grados de libertad sin afectar la validez de los resultados.
2. La veracidad de los resultados obtenidos de los modelos matemáticos discretos, depende en gran medida de los valores elegidos o calculados para la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la constante de rigidez; según Richart y Whitman (1970), la estimación de una respuesta dinámica no puede ser mejor que la de sus constantes.
3. En el caso de las vibraciones verticales, que han sido motivo de una mayor cantidad de pruebas experimentales, los resultados obtenidos por Richart y Whitman (1967) muestran que la teoría elástica predice satisfactoriamente el comportamiento de los modelos experimentales, siempre y cuando las aceleraciones se conserven menores que 0.5g, lo cual es común en cimentaciones para maquinaria. Para aceleraciones mayores la respuesta del suelo deja de ser lineal.
4. Los valores de las constantes de rigidez y amortiguamiento, obtenidos por la teoría elástica; tienen que afectarse cuando la cimentación está piloteada, el bloque de cimentación se encuentra totalmente embebido en el suelo, o se presentan estratos más rígidos a cierta profundidad respecto a la superficie, etc. Existe incertidumbre respecto a estos tópicos, ya que la evidencia

experimental no es suficiente. Se recomienda en estos casos realizar las pruebas necesarias para cada problema en particular.

5. La suposición de que los sistemas de aislamiento aseguran una baja transmisión de la fuerza actuante al bloque de cimentación, se cumple parcialmente, ya que no resulta válido para todas las frecuencias naturales del sistema; esto se debe a que, sí la relación de frecuencias β es mayor al valor crítico $\sqrt{2}$, se logra una aceptable eficiencia en el aislamiento; en caso contrario, para las relaciones de frecuencia menores al valor crítico, ocurre una amplificación en el movimiento de la masa, siendo innecesario colocar aisladores. De manera que para tener altas relaciones de frecuencia β, se requiere que la masa de la maquinaria, más el bloque de concreto, sean lo suficientemente grandes, lo cual resulta antieconómico, o bien, que el sistema de aislamiento sea muy flexible, para que se considere efectivo.
6. La necesidad de predecir más exacta y completamente el comportamiento dinámico de las cimentaciones para maquinaria, trae inevitablemente consigo el planteamiento de nuevos y más complicados problemas que se deben resolver. Es necesario, por ejemplo, que en el diseño de este tipo de estructuras se cuide con mayor cuidado la selección de adecuados valores de las constantes de rigidez y amortiguamiento pero, sobre todo, entender el verdadero núcleo del problema, esto es, la evaluación de la respuesta del cimiento sujeto a efectos dinámicos.

REFERENCIAS

Barkan, D.D. (1962). "Dynamics of Bases and Foundations", New York, McGraw Hill Book Co. Inc..

Biggs, J. M. (1964). "Introduction to Structural Dynamics", New York, McGraw-Hill Inc.

Bowles, J.E. (1988). "Foundation Analysis and Design", New York, McGraw Hill Book Co. Inc.

Bycroft, G. N. (1956). "Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum", Philosophical Transactions, London, Royal Society.

Cañizo, L. y Jiménez, J. A. (1980). "Geotécnia y Cimentaciones III, Cimentaciones, Excavaciones y Aplicaciones de la Geotécnia", McGraw-Hill Book Co.

Clough, R. W. Y Penzien, J. (1975). "Dynamics of Structures", New York, McGraw-Hill Inc.

Díaz Rodriguez, J. A. (1995). "Determinación de las Propiedades Dinámicas de los Suelos", Div. De Estudios de Posgrado Fac. de Ingeniería, UNAM.

Dobry, R., y Gazetas, G. (1986). "Dynamic Response of Arbitrary Shaped Foundations", JGED, Proc. ASCE, Vol. 112, No. SM2.

Dobry, R., y Gazetas, G. (1985). "Dynamic Stiffness and Damping of Foundations Using Simple Methods", Proc. Symposium: Vibration Problems in Geotechnical Engineering, ASCE.

Lysmer, J. (1965). "Vertical Motion of Rigid Footings", Dept. of Civil Eng., U. of Michigan Report to U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, C.E., Vick-sburg, Miss.

Paz, M. (1985). "Structural Dinamics", New York, Van Nostrand Reinhold.

Prakash, S., y Puri, V. K. (1976). "Foundations for Machines: Analysis and Desing", New York, John Wiley & Sons Inc.

Prakash, S. (1965). "Field Investigations for Machine Foundations", Proceedings of Simposium on Foundations of Power Houses and Heavy Machine Foundations, Poona, March.

Richart, F.E., Jr. (1960). "Foundation Vibrations", Journal of Soil Mechanics and Foundations Div. , Proc. ASCE, Vol. 86, No. SM4.

Richart, F.E., Jr. y Hall, J.R., Jr. (1970). "Vibrations of Soils and Foundations", Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

Srinivasulu, P., y Vaidyanathan, C.V. (1976). "Handbook of Machine Foundation", McGraw Hill Publishing Co. Ltd.

Zobel, W. M. (1983). "Soil Mechanics and Foundation Design Manuals", Naval Facilities Engineering Command.