

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN**

### **1.1 NACIMIENTO DE UNA NUEVA CIENCIA.**

A partir de los ensayos pioneros de B.B. Mandelbrot en 1975 y 1982 [1,2] sobre geometría fractal, se despertó una nueva ciencia, rama de las matemáticas, llamada geometría fractal. Esta nueva geometría se basa en el uso de algoritmos y dimensiones fraccionarias a diferencia de la geometría euclidiana, o tradicional, que utiliza modelos matemáticos y dimensiones enteras.

No obstante del corto tiempo transcurrido, ya se cuenta con numerosos estudios, artículos, y bibliografía referente al tema, y su aplicación tecnológica. Sin embargo, existe aún mucho camino por recorrer en su desarrollo y aplicación.

### **1.2 OBJETIVO.**

Describir cuantitativamente la microestructura dendrítica de aleaciones metálicas usando geometría de fractales y explorar relaciones con la propiedad mecánica de la dureza.

### 1.3 JUSTIFICACIÓN.

El presente estudio se realiza con el fin de contribuir al desarrollo de las nuevas técnicas de análisis fractal en el ámbito de la ciencia de los materiales, mediante una caracterización fractal de morfologías dendríticas en un material específico, una aleación aluminio-silicio A319 modificada; así como encontrar relaciones entre ésta caracterización y las propiedades físicas del material.

Durante el crecimiento, las interfases están sujetas a perturbaciones causadas por partículas insolubles, fluctuaciones térmicas o fronteras de grano, dichas perturbaciones son aleatorias. Como se verá más adelante, el factor aleatorio que genera la microestructura forma un objeto estadísticamente autosimilar a diferentes magnificaciones.

### 1.4 METODOLOGÍA.

Mediante el uso de un microscopio óptico metalúrgico y un analizador de imágenes se obtienen imágenes a las magnificaciones de 50x, 100x, 200x y 400x de muestras de aluminio-silicio vaciado. El analizador de imágenes cuenta con una cámara de vídeo que digitaliza las imágenes directamente del microscopio, esto permite guardar imágenes en archivos de computadora, para su análisis posterior.

La obtención de las imágenes se realiza en dos formas, la primera es una imagen global que implica un conjunto de dendritas dentro de un espacio fijo, para posteriormente magnificar ese mismo espacio muestral. La segunda implica la toma de una dendrita específica, a las magnificaciones antes mencionadas.

Las imágenes son posteriormente analizadas para encontrar áreas y perímetros de las dendritas. Este proceso se repite para las muestras en sus tres vistas (frontal, superior y lateral).

A partir de los datos obtenidos en el analizador de imágenes, y el procesamiento de los datos por medio de diferentes técnicas de análisis fractal, se encuentra la dimensión fractal.

Al obtener las imágenes resulta claro que el campo de una imagen a 50x es cuatro veces más grande que el de una imagen a 100x, éste a su vez es cuatro veces más grande que una imagen a 200x, y éste finalmente es cuatro veces más grande que el de una imagen a 400x. Por lo que para tomar a distintas magnificaciones la misma imagen a 50x, resulta necesario tomar 4 imágenes a 100x, 16 imágenes a 200x, y 64 imágenes a 400x.

El área y perímetro de las dendritas de las imágenes obtenidas a diferentes aumentos permite obtener su dimensión fractal, y con ello caracterizarlas.

Se realizan mediciones sobre los espaciamentos dendríticos; es decir, las distancias de los brazos de las dendritas, mediante el uso del analizador de imágenes, con el fin de buscar relaciones y ayudar a la caracterización fractal.

Como una propiedad mecánica importante se encuentra la dureza, con la ayuda de un microdurómetro Vickers, se realizan mediciones de microdureza sobre puntos situados sobre el eje principal de las dendritas.

# CAPÍTULO 2

## GEOMETRÍA FRACTAL

### 2.1 GEOMETRÍA EUCLIDIANA Y GEOMETRIA FRACTAL.

La palabra geometría etimológicamente alude a "medir la tierra". Una antigua opinión transmitida por Herodoto atribuye el origen de la geometría a la necesidad de medir las tierras de cultivo con la finalidad de que los impuestos se pagasen en forma equitativa.

La necesidad de comparar áreas y volúmenes de figuras simples, la construcción de canales y edificios, el estudio del movimiento de los astros contribuyeron al desarrollo de esas reglas y propiedades geométricas encontradas en los documentos de las civilizaciones egipcia y mesopotámica.

En manos de los griegos, particularmente los pitagóricos, esos conocimientos adquieren fisonomía científica. Creándose teoremas, propiedades, métodos, se analizan fundamentos, se plantean problemas, se inventan curvas, de modo que dos siglos después, hacia finales del siglo IV, la geometría griega abarcaba un vasto conjunto de conocimientos.

Aunque existían intentos anteriores, la primera compilación de ese conjunto de conocimientos, que ha perdurado hasta hoy en día, está plasmada en los célebres Elementos de Euclides (300 A.C.). Después de Euclides, Arquímedes (287-212), no sólo perfeccionó los elementos, sino que enriqueció la geometría con nuevas aportaciones, y así mismo Apolonio (190 A.C.). En 1637, Descartes anexa a la geometría el álgebra.

Durante siglos, los matemáticos pusieron en tela de duda los axiomas de Euclides al tratar de remover el quinto axioma [3] argumentando que podría llegar a deducirse de los otros cuatro. Este axioma enunciaba: “Si una recta corta a otras dos formando ángulos internos, por el mismo lado que sumen menos de dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se cortaran” (Fig. 2.1). Muchos pensadores plantearon el problema omitiendo el quinto axioma, otros plantearon un quinto axioma que resultaba al final ser análogo al original. Durante más de dos mil años se consideró a la geometría de Euclides como la verdad absoluta.

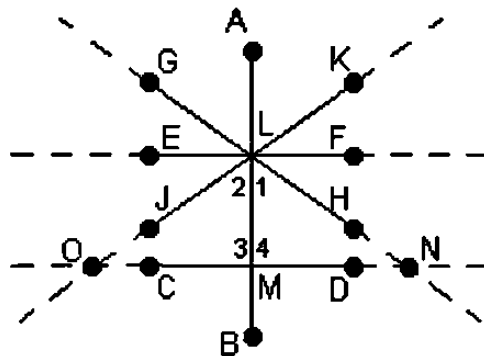


Fig. 2.1. Representación gráfica del quinto axioma de Euclides.

En 1733 el sacerdote italiano Girolamo Saccheri tuvo una idea que no se le había ocurrido a nadie durante más de dos mil años. Plantear una geometría, donde el quinto axioma de Euclides era sustituido por un axioma contradictorio al quinto. La idea de Saccheri era comprobar que el quinto axioma era redundante esperando obtener una contradicción. Sin embargo no encontró contradicciones. Saccheri había concebido una geometría no euclidiana, matemáticamente consistente. La idea de la existencia de una geometría no euclidiana, derrumbaría la “verdad absoluta de Euclides”, y esta sola idea provocó que Saccheri abandonara su trabajo.

En 1826 el ruso Nicolai Ivanovich Lobachevski desarrolló los teoremas de la geometría aguda. En 1831, el húngaro János Bolyai y su padre plantean los

principios de la geometría aguda. Se atribuye a Lobachevski y a Bolyai el descubrimiento de la primera geometría no euclidiana.

En 1854, el alemán Georg Riemman creó una tercera geometría, la geometría obtusa.

Con la concepción de estas nuevas geometrías surgieron nuevas incógnitas y nuevas propuestas entre los pensadores. Es Benoît Mandelbrot quien resume y aporta los elementos para crear otra geometría, la geometría fractal.

La geometría fractal adquiere su nombre a mediados de la década de los años 70, bautizada así por Benoît Mandelbrot. Él observó que aquellas construcciones geométricas aparentemente "caóticas" desarrolladas por otros matemáticos, realmente no lo eran del todo, como se pensaba. En su lugar observó que objetos cotidianos tales como costas, nubes, hojas y montañas se pueden llegar a describir naturalmente como fractales. Ordinariamente las construcciones geométricas que utilizan líneas rectas y curvas suaves no ayudan mucho a entender o modelar los intrincados patrones de la naturaleza. De ahí el surgimiento de una nueva rama de las matemáticas, la geometría fractal. En lo que lleva de vida, este campo de las matemáticas ha probado ser extremadamente útil en diversas aplicaciones tales como el estudio de materiales, análisis de fracturas en los materiales, estudio de la morfología celular, compresión de archivos de computadora, y muchas otras.

La geometría euclidiana utiliza modelos matemáticos como herramienta para describir formas y figuras, en cambio la geometría fractal hace uso de algoritmos.

## 2.2 FRACTALES MATEMÁTICOS Y NATURALES.

Existen varias definiciones sobre lo que es un conjunto fractal, sin embargo tales definiciones no siempre son satisfactorias en el contexto general. Los siguientes puntos delimitan a un conjunto fractal  $F$  dentro de un espacio métrico [4]:

- a)  $F$  tiene una estructura fina, que es irregular en detalle a escalas arbitrariamente pequeñas.
- b)  $F$  es muy irregular para ser descrito por el cálculo o el lenguaje de la geometría tradicional, tanto local como globalmente.
- c) Frecuentemente  $F$  tiene algún tipo de autosimilitud o autoafinidad, que puede ser en un sentido exacto o estadístico.
- d) Frecuentemente la 'dimensión de Hausdorff-Besicovitch de  $F$ , es estrictamente mayor a su dimensión topológica.
- e) En muchos casos de interés  $F$  tiene una definición muy simple, tal vez recursiva.
- f) Frecuentemente  $F$  tiene una apariencia 'natural'.

En la naturaleza existe una familia de formas irregulares demasiado complicadas para ser descritas por medio de geometría (ejemplos: las nubes, el contorno de las montañas, el cauce de los ríos, las líneas costeras, copos de nieve, árboles, y el movimiento browniano), a este tipo de formas se les denomina fractales naturales.

El término fractal proviene del latín fractus (romper, fragmento), y alude a aquello que es irregular y que puede dividirse en elementos similares al original.

Matemáticamente, un fractal es un objeto ideal que presenta características de autosimilitud y dimensión fraccionaria en forma estricta. La naturaleza presenta fractales naturales que no cumplen rigurosamente lo establecido por la matemática. Sin embargo al usar la geometría fractal para describir estas formas naturales, obtenemos una excelente aproximación a la realidad.

Un fractal matemático presenta las mismas características a cualquier magnificación o resolución con que se analice, un fractal natural presenta similitud en un intervalo limitado de magnificaciones.

Como ejemplos de fractales matemáticos tenemos: el conjunto de Cantor, las curvas de Von Koch (fig. 2.2), los conjuntos de Julia (fig. 2.4) y cientos de fractales provenientes del generador de Mandelbrot (fig. 2.3).

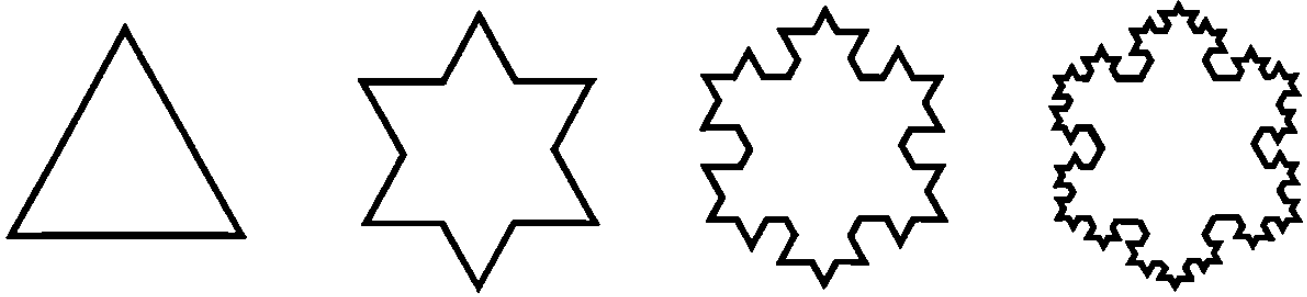


Fig. 2.2. Primeras 4 etapas en la construcción del copo de nieve de Koch.

En resumen, un fractal es todo lo que presenta un crecimiento con lazos de retroalimentación de la información sobre su propio crecimiento.

### 2.3 ITERACIÓN.

La iteración es la repetición de un proceso  $n$  veces. En matemáticas este proceso consiste comúnmente en la aplicación repetida de una función matemática. Para los conjuntos de Mandelbrot y de Julia, la función utilizada es  $f(x) = x^2 + c$ , donde  $c$  es una constante. Para iterar  $x^2 + c$ , se comienza con una "semilla", ésta puede ser un número real o complejo ( $x_0$ ). Al evaluar la función en  $x_0$  se obtiene el siguiente número,

$$x_1 = x_0^2 + c$$

El siguiente valor se obtiene de la iteración del cálculo previo como alimentación para el siguiente, por lo tanto:

$$x_2 = x_1^2 + c$$

$$x_3 = x_2^2 + c$$

$$x_4 = x_3^2 + c$$



y así sucesivamente. Los números generados ( $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ ) por esta iteración toman el nombre de "órbita" de  $x_0$  bajo la iteración  $x^2 + c$ . El comportamiento de las órbitas obtenidas puede ser: convergente, divergente, cíclico o errático.

### 2.3.1 Conjunto de Mandelbrot.

El conjunto de Mandelbrot consiste en todas aquellas órbitas con semilla  $x_0=0$ , con valores complejos de  $c$  que no divergen.

La definición del conjunto de Mandelbrot (fig. 2.2) [2,4], nos da consigo el algoritmo para calcularlo.

Para construir el conjunto de Mandelbrot, considérese un plano de números reales versus números complejos. Entonces para cada valor dentro del plano se calcula si su órbita diverge o converge. Si la órbita de un pixel específico (valor específico de  $c$ ) converge, se le asigna un color negro. De lo contrario, se deja al pixel un color blanco.

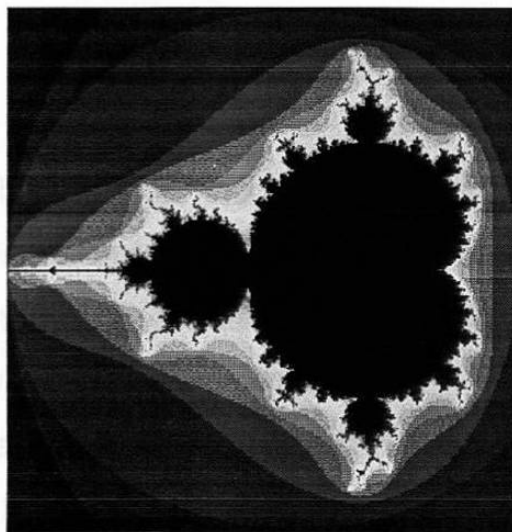


Fig. 2.3. El conjunto de Mandelbrot

### 2.3.2 Conjuntos de Julia.

Los conjuntos de Julia (fig. 2.3) [2,5] para  $x^2 + c$  difieren del conjunto de Mandelbrot en que se da un valor específico a  $c$ . Se calculan las órbitas para cada posible semilla, donde formarán parte de un conjunto de Julia aquellas semillas cuyas órbitas sean convergentes.

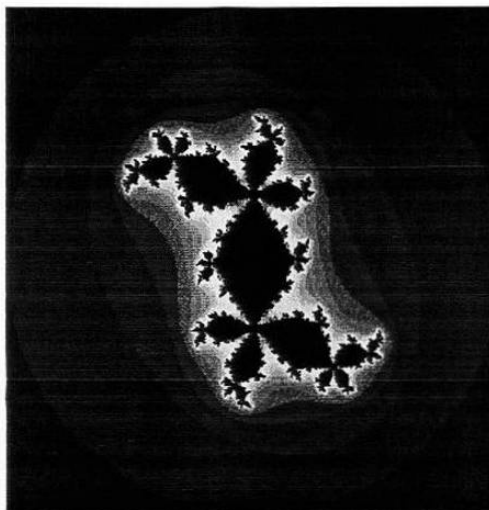


Fig. 2.4. Un conjunto de Julia

## 2.4 DIMENSIÓN.

La geometría euclidiana está limitada a conjuntos donde las dimensiones son enteras y del mismo orden, de forma tal que podrían ser llamados conjuntos de dimensiones concordantes. Este tipo de geometría tiene principal aplicación en objetos creados por el hombre.

Gran cantidad de objetos naturales son más fácilmente descritos por medio de geometría fractal, con dimensión intermedia entre dos valores enteros. Una línea recta tiene una dimensión de 1, mientras una curva tendrá una dimensión entre 1 y 2, dependiendo del espacio que tome el hacer sus dobleces. Entre mejor llenado del plano tenga un fractal, más se aproximará a 2 dimensiones. Del mismo modo una "sábana en el espacio" tendrá una

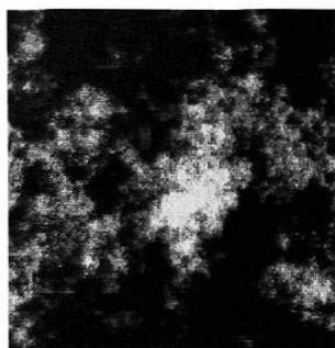
dimensión entre 2 y 3. Las siguientes imágenes de nubes naturales (fig. 2.4), muestran consigo su dimensión fractal.

De las imágenes de la fig. 2.5 se puede observar que conforme se tiene una dimensión fractal menor, las nubes resultan más difusas, es decir "llenar" con menor eficiencia el espacio.

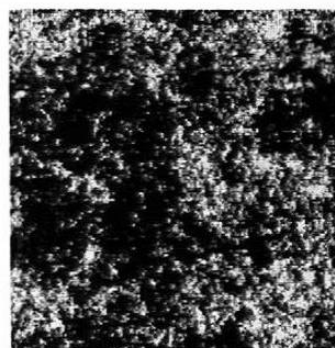
La tabla 2.1 muestra la dimensión fractal de algunos objetos matemáticos y reales.



Nubes con dimensión  $D \approx 2.15$



Nubes con dimensión  $D \approx 2.50$



Nubes con dimensión  $D \approx 3.00$

Fig. 2.5. La dimensión fractal de las nubes.

Tabla 2.1. Dimensión fractal de objetos matemáticos y reales [6]

Objeto	Dimensión	Comentarios:
Conjunto de Cantor	0.63093	Obtenido mediante la Fórmula de Hausdorff-Besicovitch.
Copo de nieve de Koch	1.26186	Idem.
Triángulo de Sierpinsky	1.58496	Idem.
Esponja de Menger	2.72683	Idem.
Línea costera	1.05-1.25	Reportado por Mandelbrot.

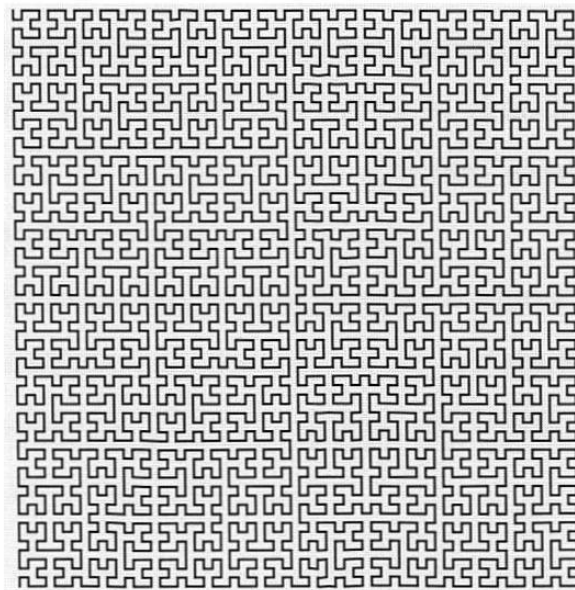


Fig. 2.6. La curva de Peano, propone la ambigüedad de tener dimensión 1 ó dimensión 2. Gracias a B. Mandelbrot, hoy en día sabemos que tiene una dimensión fraccionaria que tiende a  $D = 2$ , conforme  $r$  tiende a 0.

### 2.4.1 Dimensión Topológica.

La dimensión topológica se obtiene a partir del número de parámetros o coordenadas requeridos para describir un objeto. En topología, un objeto tiene dimensión  $n$ , si puede ser dividido en dos a partir de otro con dimensión  $(n-1)$ .

Así, un punto tiene dimensión cero, no es divisible; una línea tiene dimensión 1, ya que puede ser dividida en dos por un punto; un área tiene dimensión 2, puesto que puede ser dividida en dos por una línea; un volumen tiene dimensión 3, ya que puede ser dividido en dos por una superficie.

#### 2.4.2 Dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

Es de interés general el cuantificar el tamaño de los objetos. Los objetos naturales presentan infinidad de detalles, donde resultan ignorables aquellos inferiores en tamaño a la unidad de medición. Se obtendrá una mayor medida al considerar mayor detalle por medio de una unidad de medición menor. De esta forma resultarían las medidas infinitamente grandes. Sin embargo, esta ambigüedad se rompe al encontrar la relación existente para diferentes unidades de medición y las medidas respectivas.

Un método clásico para medir una superficie plana consiste en cubrir esa superficie con cuadrados muy pequeños, y posteriormente contar esos cuadrados con dimensión  $E = 2$ . De la misma forma podemos realizar la medición para longitudes y volúmenes [7].

$$M = \sum \varepsilon^E \quad \text{Ec. 2.1}$$

De esta forma, la medida  $M$  es el resultado de la sumatoria de una serie de elementos  $\varepsilon$  de dimensión entera  $E$ . En 1919, Hausdorff propuso permitir que la dimensión fuera fraccionaria. La medición es nuevamente el resultado de la sumatoria de elementos infinitamente pequeños, pero con dimensión  $D$  [7]:

$$M = \sum \varepsilon^D \quad \text{Ec. 2.2}$$

Donde el valor del exponente que hace que la medición sea independiente de  $\varepsilon$ , es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

Si  $V$  representa la medida de un objeto y  $L$  representa su tamaño lineal. Podríamos decir que  $V \approx L^D$ , donde  $D$  es una dimensión efectiva que podría ser fraccionaria o entera.

Consideremos un cubo con volumen unitario  $u^3$ , cada una de sus caras tiene un área de  $u^2$ , y cada una de sus aristas una longitud de  $u$ . Ahora bien, si a este cubo se le cambia la escala por un factor de 3, las medidas del cubo para el volumen serán de  $27u^3$ , donde cada una de sus caras tendrá un área de  $9u^2$ , y cualquiera de sus aristas tendrá una longitud de  $3u$ .

En otras palabras:

Una línea unitaria  $u$  al ser escalada a  $3X$  ( $r = 1/3$ ) tendrá un tamaño igual a 3 veces el original ( $N = 3$ ).

Un área unitaria  $u^2$  al ser escalada a  $3X$  ( $r = 1/3$ ) tendrá un tamaño igual a 9 veces el original ( $N = 9$ ).

Un volumen unitario  $u^3$  al ser escalado  $3X$  ( $r = 1/3$ ) tendrá un tamaño igual a 27 veces el original ( $N = 27$ ).

Para cualquier objeto de dimensión  $D$  y longitud unitaria  $u$ , al efectuar un escalamiento de orden  $1/r$  y contar el nuevo número de partes  $N$  de longitud unitaria, se tendrá que [6]:

$$N(r^D) = 1$$

de donde:

$$D = \log(N)/\log(1/r) \quad \text{Ec. 2.3}$$

Debido a que no existen restricciones,  $D$  resulta ser muy general. Se puede observar, que el valor del tamaño real del objeto ( $V$ ) puede ser presentado como la medida obtenida para una cierta escala o magnificación.

El concepto de una dimensión generalizada se remonta al matemático alemán Felix Hausdorff (1868-1942). Considerando el tamaño total de un objeto como  $L$ , y luego llenándolo o cubriéndolo con  $N$  diminutos cubos (o esferas) de tamaño  $r$ , la dimensión de Hausdorff [6] queda denotada por:

$$D_{H-B} = \log N(r) / \log(1/r) \quad \text{Ec. 2.4}$$

### 2.4.3 Dimensión de conteo de celdas.

La dimensión de conteo de celdas (*box counting dimension*, o dimensión de Minkowski) es conceptualmente la dimensión más simple utilizada en trabajos experimentales. Para encontrar el valor de la dimensión fractal de un objeto, éste se recubre con  $N(\varepsilon)$  fragmentos de tamaño  $\varepsilon$ . Al utilizar diferentes valores de  $\varepsilon$ ,  $N(\varepsilon)$  varía proporcionalmente a  $\varepsilon^{-D}$ :

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D} \quad \text{Ec. 2.5} \quad [7]$$

quedando la dimensión de conteo de celdas definida por:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)} \quad \text{Ec. 2.6} \quad [7]$$

Conforme se evalúan valores menores de  $\varepsilon$ , resultarán valores mayores de  $N(\varepsilon)$ .

## 2.5 Autosimilitud.

Un objeto posee autosimilitud cuando, una vez que se amplifica una porción del mismo, la porción es idéntica al objeto total. El proceso de amplificación puede continuar, guardando siempre para porciones cada vez menores la autosimilitud a la imagen total.

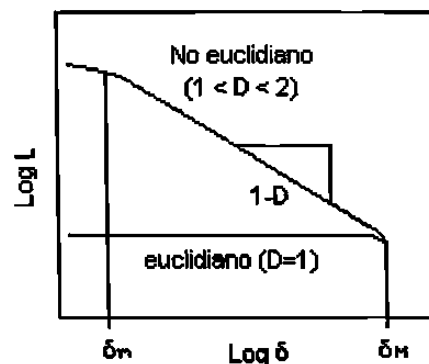
### 2.5.1 Autosimilitud estadística.

Mandelbrot en su ensayo de 1967 [8] indica que la mayoría de los fractales naturales poseen autosimilitud estadística. La autosimilitud estadística se presenta en curvas altamente intrincadas tales que una porción puede ser considerada, en términos estadísticos, una reducción de la imagen total. En el presente estudio los materiales caracterizados presentan este tipo de autosimilitud, también llamada autoafinidad.

### 2.5.2 Efecto Richardson.

El perímetro medido de un objeto,  $L$ , depende de la unidad de medición utilizada  $\delta$ , donde para un  $\delta$  cada vez menor se obtendrá una medición mayor del perímetro. Para fractales naturales, esto será válido dentro de cierto rango [9], hasta que  $\delta$  sea tan pequeño que se considera el ancho de línea mismo. Richardson [8] mostró empíricamente que:

$$L(\delta) \propto \delta^{1-D} \quad \text{Ec. 2.7}$$



Donde:  $L(\delta)$  es la medida,  $\delta$  es la unidad de medición.

Fig. 2.7. Dependencia del perímetro medido  $P$  sobre el tamaño de la unidad de medición  $\delta$ , para objetos euclidianos y no euclidianos.



## 2.6 RELACIÓN ÁREA - PERÍMETRO.

Para círculos, cuadrados, triángulos, y otros polígonos euclidianos, la relación ente el perímetro y la raíz cuadrada de su área [10],

$$\rho = P / A^{1/2} \quad \text{Ec. 2.8}$$

es independiente del tamaño del polígono. La relación  $\rho$  es la misma para todas las curvas cerradas con la misma forma.

Para "islas" con perímetro fractal  $L(\delta)$ , la relación área-perímetro depende de la unidad de medición  $\delta$  utilizada durante la medición, donde  $L(\delta) \rightarrow \infty$ , cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Por otra parte, el área  $A(\delta)$  de la isla, al ser medida cubriendo la superficie con cuadrados de área  $\delta^2$ , permanece constante. Mandelbrot [1] muestra que para curvas fractales la relación divergente  $\rho$  debe ser reemplazada por la relación dada por

$$\rho_D = (P)^{1/D} / (A)^{1/2} = [L(\delta)]^{1/D} / [A(\delta)]^{1/2} \quad \text{Ec. 2.9}$$

donde  $\rho_D$  es una constante para todas las "islas" de forma similar.  $D$  es la dimensión fractal de la periferia de las islas. La relación  $\rho_D$  es independiente del tamaño de la isla, así como de la unidad de medición  $\delta$  utilizada.

## 2.7 USO DEL ANÁLISIS FRACTAL PARA LA DESCRIPCIÓN DE MICROESTRUCTURAS METÁLICAS.

El procedimiento básico consiste en digitalizar una imagen, para posteriormente contar la cantidad de píxeles que definen el área ( $A$ ), y el número de píxeles que definen el perímetro ( $P$ ).

$$A = x\delta^2 \qquad P = y\delta \qquad [11]$$

El campo de observación depende de la magnificación, es decir un mayor aumento de la imagen equivale a un decremento de la unidad de medición ( $\delta$ ). Conforme  $\delta$  se aproxime al ancho de la línea del contorno, el parámetro euclidiano  $P$  tenderá a su medida real.

Considerando  $\delta$  como el instrumento de medición y a la vez la unidad de medida. Al tomar la medida del perímetro de la imagen mediante la sobreposición punto por punto de  $\delta$ , alrededor del perímetro, se obtiene el perímetro medido, que se incrementará de acuerdo a una observación más detallada de la periferia ( $\delta$  menor) [7,11].

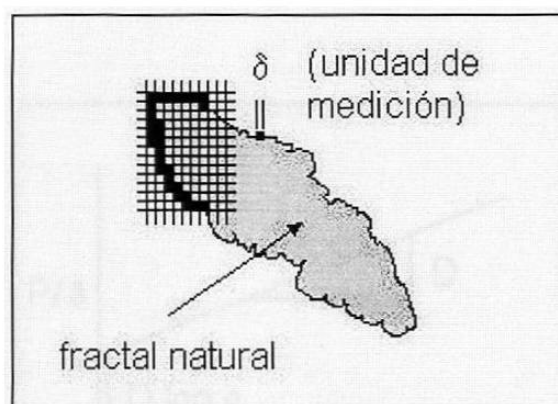


Fig. 2.8. Esquema del procedimiento de análisis de imágenes.

Definiendo el factor de forma como:

$$\rho = P_R / A^{1/2} \quad \text{para objetos euclidianos.}$$

$$\rho = P_R^{1/D} / A^{1/2} \quad \text{para objetos fractales.}$$

ahora bien, si

$$P = P_R \delta^{1-D}$$

$$P_R = P / \delta^{1-D}$$

entonces:

$$(P/\delta^{1-D})^{1/D} = \rho (A^{1/2})$$

$$(1/\delta) (P/\delta^{1-D})^{1/D} = \rho(A^{1/2}/\delta)$$

$$(1/\delta^D)^{1/D} (P/\delta^{1-D})^{1/D} = \rho(A^{1/2}/\delta)$$

$$(P/\delta)^{1/D} = \rho(A^{1/2}/\delta)$$

$$(1/D) \log(P/\delta) = \log(A^{1/2}/\delta) + \log \rho$$

$$\log(P/\delta) = D \log(A^{1/2}/\delta) + D \log \rho \quad \text{Ec. 2.10}$$

Donde  $D \log(\rho)$  es una constante, y por tanto, de la gráfica logarítmica de los datos  $A^{1/2}/\delta$  versus  $P/\delta$  se tiene por pendiente a la dimensión fractal  $D$  [6].

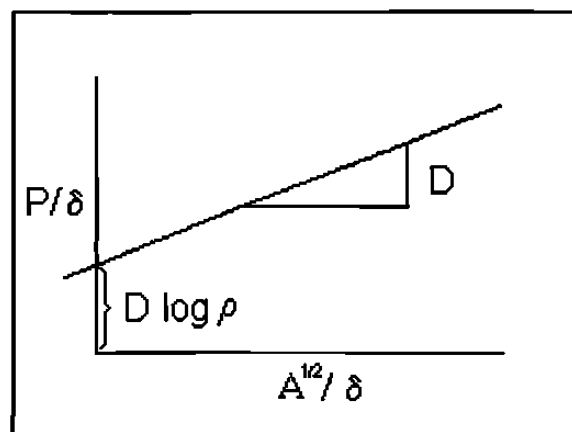


Fig. 2.9. Gráfica típica  $A^{1/2}/\delta$  versus  $P/\delta$ .

# CAPÍTULO 3

## EL ALUMINIO Y SUS FORMAS

### 3.1 ALEACIONES DE ALUMINIO.

#### 3.1.1 INTRODUCCIÓN.

Las aleaciones de aluminio se han desarrollado para mejorar sus propiedades mecánicas, de resistencia a la corrosión, baja temperatura de fusión, fluidez, buena conductividad térmica y eléctrica. Así como reducir los costos en su producción.

El uso del aluminio ha tenido gran aceptación, y ha desplazado a otros materiales como madera, hierro y aceros, en todas las industrias.

En el presente capítulo se exponen algunas generalidades de las aleaciones Al-Si obtenidas por fundición en cuanto a su morfología, y el método de análisis fractal utilizado.

#### 3.1.2 ALEACIONES ALUMINIO-SILICIO.

El aluminio [15] y el silicio forman un sistema eutéctico simple con algunas solubilidades de los sólidos en ambos extremos. El eutéctico de aluminio y silicio contiene 12.6% de Si y solidifica a 577°C. El componente rico en aluminio, en condiciones de equilibrio tiene 1.65% de Si a esta temperatura, y

el constituyente rico en silicio contiene 0.5% de aluminio. La solubilidad del silicio sólido en aluminio baja al 1.3% a 550°C, 0.8% a 500°C, 0.29% a 400°C y 0.05-0.008% a 250°C (fig. 3.1). Pueden existir dos formas de silicio en aleaciones: la resultante de la precipitación sólida y la producida por la solidificación directa de la fusión eutéctica. Ambas son cristalográficamente equivalentes aunque difieren en la forma y distribución. No hay compuestos intermetálicos entre el aluminio y el silicio.

Las aleaciones basadas en el sistema Al-Si son de particular importancia en la industria de la fundición debido a su elevada fluidez. El silicio reduce la fragilidad en el intervalo de temperatura de trabajo en caliente en la solidificación y también reduce el coeficiente de dilatación térmica, en tanto que el cobre y el níquel mejoran las propiedades a temperaturas elevadas.

Las principales aplicaciones de las aleaciones de Al-Si en formas forjadas son como barras de soldar y revestimientos de baja temperatura de fusión para soldadura fuerte de hoja de calidad, algunas aleaciones de bajo coeficiente de expansión térmica responden al tratamiento de precipitaciones a temperaturas elevadas y se utilizan forjadas en los cuerpos de los cilindros de motores de combustión interna convencionales, motores radiales de aviación y otros [15].

En la industria automotriz, el aluminio ha sido ampliamente utilizado, empleándose en la fabricación de partes como: monobloques, cabezas y pistones en los motores de combustión interna, corazas de transmisión, componentes y accesorios. En esta industria, las aleaciones aluminio-silicio son las aleaciones de aluminio que mejor han logrado satisfacer sus requerimientos.

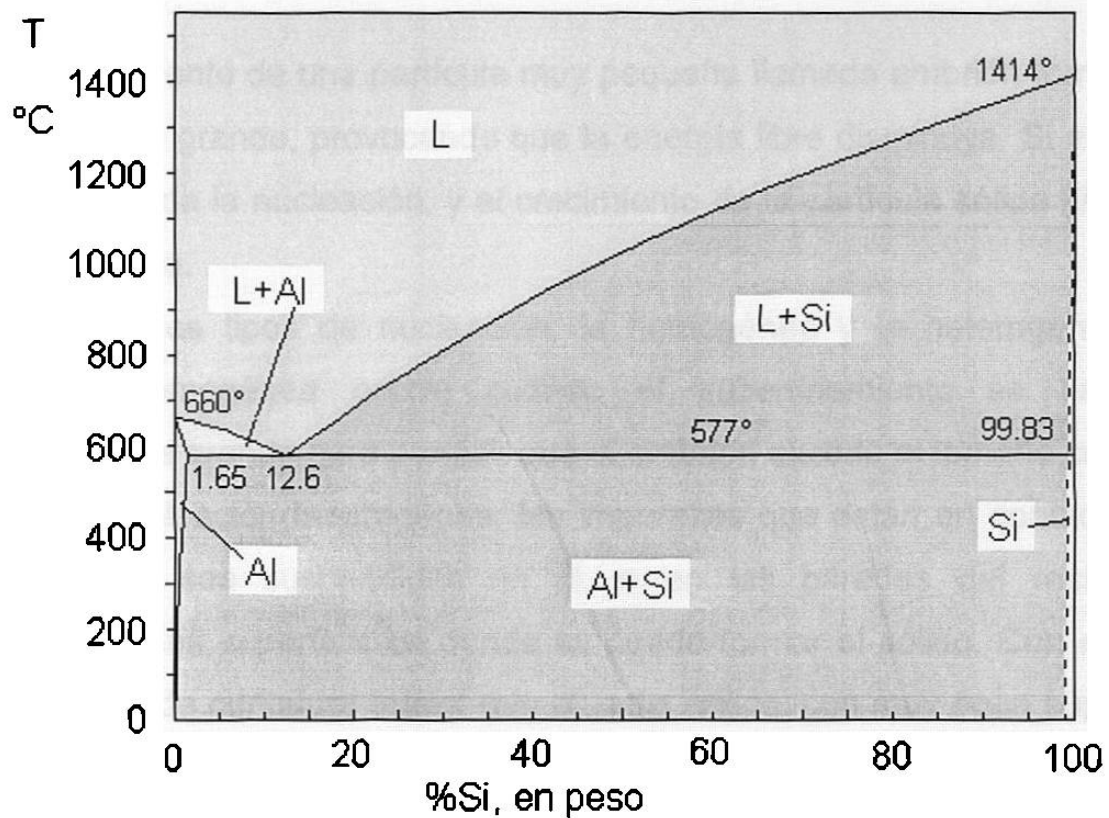


Fig. 3.1. Diagrama de equilibrio Al-Si

## 3.2 ESTRUCTURAS DENDRÍTICAS.

### 3.2.1 Solidificación y crecimiento.

La solidificación requiere de dos etapas: nucleación y crecimiento. La nucleación ocurre cuando una pequeña partícula sólida se forma dentro del líquido.

Se espera que un material solidifique cuando el líquido se enfríe por debajo de la temperatura de solidificación del mismo. Cuando esto ocurre, la energía asociada con la estructura cristalina del sólido es progresivamente menor que la energía del líquido, haciendo cada vez más estable al sólido conforme la temperatura desciende.

El crecimiento de una partícula muy pequeña llamada embrión forma una partícula sólida grande, provocando que la energía libre disminuya. Si el sólido es estable, se da la nucleación, y el crecimiento de la partícula sólida (llamada núcleo) da inicio.

Existen dos tipos de nucleación, la homogénea y la heterogénea. La nucleación homogénea ocurre cuando el subenfriamiento se hace lo suficientemente grande para permitir que el embrión exceda el tamaño crítico.

En la nucleación heterogénea, las impurezas que están en contacto con el líquido, ya sea suspendidas en él, o en las paredes del recipiente, proporcionan una superficie en donde se puede formar el sólido. Con esto se tiene un radio de curvatura mayor que el radio crítico, con muy poca superficie total entre el sólido y el líquido. Sólo unos cuantos átomos necesitan reunirse para producir una partícula sólida con el radio requerido. A medida que el subenfriamiento aumenta, el tamaño crítico del núcleo disminuye, como se puede observar en la fig. 3.2.

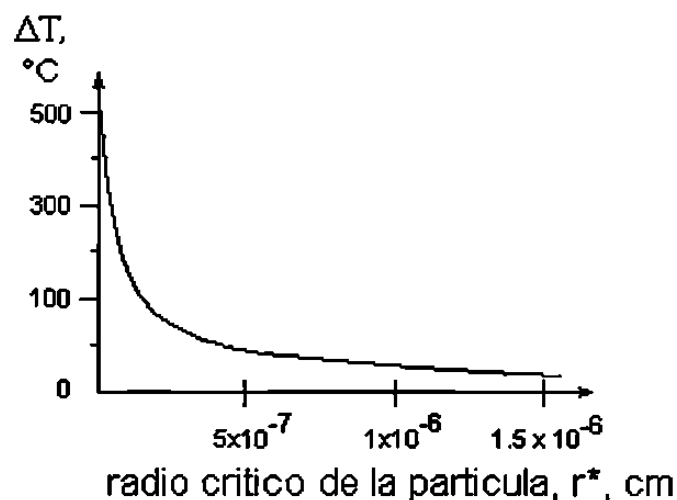


Fig. 3.2. Radio crítico de un núcleo de Cu, en función del subenfriamiento.

Algunas veces se introducen intencionalmente impurezas en el líquido. Tales prácticas en los metales son llamadas refinamiento de grano, o inoculación.

Cuando un líquido inoculado se enfría lentamente bajo condiciones de equilibrio, la temperatura del metal líquido es mayor que la temperatura de solidificación. El calor latente de fusión puede eliminarse solamente por conducción desde la interfase sólido-líquido hacia los alrededores sólidos. Cualquier protuberancia que empiece a crecer en la interfase es rodeada por metal líquido que está a una temperatura superior a la de solidificación. El crecimiento en la protuberancia se detiene entonces hasta que el resto de la interfase la alcanza. Este mecanismo es conocido como crecimiento planar. Sin embargo, cuando la nucleación no es significativa, el líquido puede subenfriarse a una temperatura inferior a la de solidificación. Bajo estas circunstancias, una pequeña protuberancia sólida llamada dendrita se forma en la interfase y empieza a crecer. Conforme crece la dendrita sólida, el calor latente de fusión es conducido hacia el líquido subenfriado, elevando la temperatura del líquido hacia la temperatura de solidificación. También se pueden formar brazos secundarios y terciarios en los troncos primarios de la dendrita para acelerar la evolución del calor latente. El crecimiento continúa hasta que el líquido subenfriado alcanza la temperatura de solidificación. Cualquier remanente solidifica entonces por crecimiento planar.

### 3.2.2 Solidificación de aleaciones eutécticas.

En la solidificación de aleaciones eutécticas se forman dos fases sólidas simultáneamente a partir del líquido,  $L \rightarrow \alpha + \beta$ , donde L es fase líquida, y tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son fases sólidas. El punto eutéctico del Al-Si se alcanza con 12.6% de Si y a la de temperatura de 577°C. Si una aleación de la zona hipoeutéctica es enfriada, la cristalización dará inicio con la formación y crecimiento de dendritas fase  $\alpha$  (aluminio primario). Conforme las dendritas



crecen, aumenta el porcentaje de Si en el líquido. El proceso continúa hasta que el líquido está tan saturado de silicio, que se da paso a la nucleación de la fase  $\beta$ . La fase  $\alpha$  y  $\beta$  (Al y Si principalmente) crecen entonces simultáneamente a partir del líquido. Donde la mayoría de los átomos de aluminio cristalizan en fase  $\alpha$ , y la mayoría de los átomos de silicio en fase  $\beta$ .

### 3.2.3 Morfología del eutéctico.

El eutéctico puede presentarse básicamente en 3 formas: Regular, irregular, y regular-complejo.

#### Eutéctico Regular.

Existen dos tipos : laminar y fibrosa. La microestructura laminar está constituida por placas paralelas de dos fases alternadas (fig. 3.3a); la microestructura fibrosa está formada por barras de una fase dentro de una matriz constituida por la otra fase (fig. 3.3b).

#### Eutéctico Irregular.

La microestructura irregular es un arreglo donde dos fases se presentan con orientaciones aleatorias (fig. 3.3c).

#### Eutéctico Regular complejo.

Se observan dos tipos de regiones, regiones con un tipo regular repetitivo, y regiones con orientación aleatoria (fig. 3.3d).

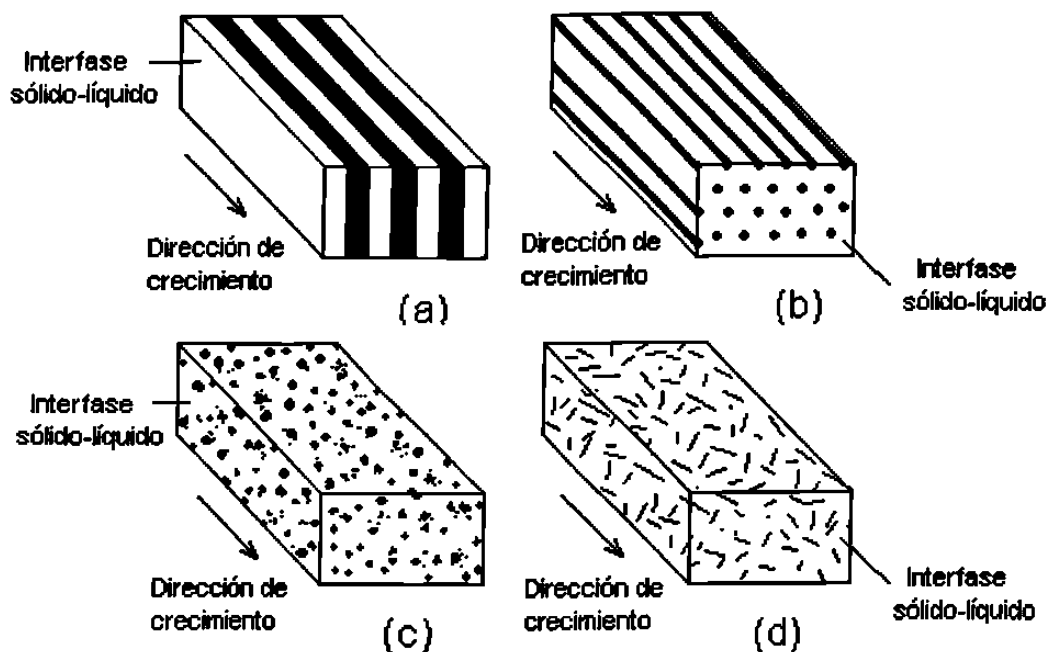


Fig. 3.3. Morfología que presentan las fases sólidas en un eutéctico.

### 3.2.4 Tamaño de grano.

Un tamaño de grano fino mejora en forma significativa las propiedades mecánicas, tales como: la resistencia a la tensión, la resistencia a la fatiga y la tenacidad. La reducción en el tamaño de grano mejora la distribución de las fases, reduce el tamaño de los poros y la fracción volumétrica de los mismos.