

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**  
**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**SOLUCION A PROBLEMAS DE  
PROGRAMACION LINEAL MEDIANTE  
EL METODO ELIPSOIDAL MODIFICADO**

**PRESENTA:**

**ING. YEZMIN CORONADO PEREZ**

**TESIS**

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS EN INGENIERIA DE SISTEMAS**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. A SEPTIEMBRE DE 2002**



2002

TM

QA827

.C6

2002

c.1

SOLUCION A

PROBLEMAS

DE PROGRAMA

MACROECONOMIA

LINEAL

Y

CON

SP

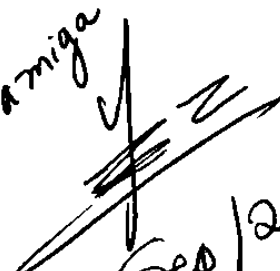


1080124380

Amigo y maestro Chalón:  
Le dedico de corazón este "NUESTRO"  
trabajo, pues sin su apoyo incondicional nada de  
esto hubiese existido.

No solo dedico este trabajo al asesor,  
si no también al amigo que con su acertado  
consejo logró hacer de mí una persona más  
fuerte y positiva.

Su amiga



Sep/2002.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SOLUCION A PROBLEMAS DE  
PROGRAMACION LINEAL MEDIANTE  
EL METODO ELIPSOIDAL MODIFICADO

PRESENTA:

ING. YEZMIN CORONADO PEREZ

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS EN INGENIERIA DE SISTEMAS  
'TESIS'

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS EN INGENIERIA DE SISTEMAS

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. A SEPTIEMBRE DE 2002





**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**SOLUCION A PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL**  
**MEDIANTE EL METODO ELIPSOIDAL MODIFICADO**

**PRESENTA**

**ING. YEZMIN CORONADO PEREZ**

**TESIS**

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN**  
**CIENCIAS EN INGENIERIA DE SISTEMAS**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA N.L A SEPTIEMBRE DE 2002**

TM

QA 427

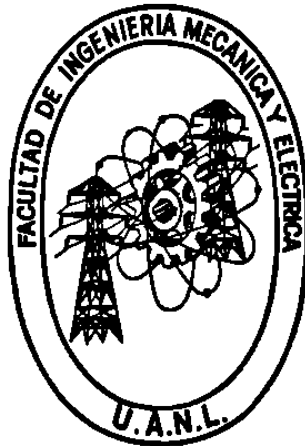
. C6

2002



**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**SOLUCION A PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL**  
**MEDIANTE EL METODO ELIPSOIDAL MODIFICADO**

**PRESENTA**

**ING. YEZMIN CORONADO PEREZ**

**TESIS**

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN**  
**CIENCIAS EN INGENIERIA DE SISTEMAS**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA N.L A SEPTIEMBRE DE 2002**

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**  
**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis SOLUCION A PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL MEDIANTE EL METODO ELIPSOIDAL MODIFICADO, realizada por la alumna YEZMIN CORONADO PEREZ, matrícula 915680, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias en INGENIERIA DE SISTEMAS.

El comité de Tesis



Asesor

Dr. Oscar L. Chacón



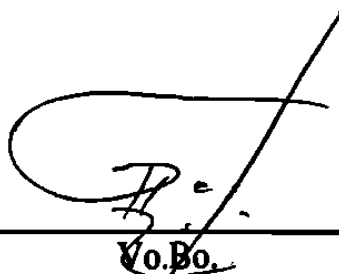
Coasesor

Dr. Igor Litvinchev



Coasesor

Dr. Francisco Román  
Angel-Bello Acosta



V.o.Bo.

Dr. Gpe. Alan Castillo Rodríguez  
Subdirector

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, N.L., septiembre de 2002

## DEDICATORIAS

*A Dios:* Por la vida, alegrías y sinsabores vividos en cada momento de mis estudios.

*A mis padres: Armando Coronado y Graciela Pérez,* quienes con su ejemplo, empuje y apoyo incondicional ayudaron a realizar el sueño que comenzó dos años atrás.

*A mis hermanos: Oséas, Armando, José Andrés, Yanet y Gilda Lorena,* por haber estado siempre para escucharme, tolerarme y aconsejarme.

*A mis amigos y maestros: Ada, Oscar, Roger, Igor y Karim* por su apoyo, terapias y un sin número de consejos.

*A mi amigo Oscar Noé,* por sus consejos, apoyo desinteresado y por compartir tantos comentarios y momentos durante la realización de este trabajo.

*“Y a todas aquellas personas que reconocieron en mí la oportunidad de la amistad y compañerismo”.*

## AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al *Dr. Oscar L. Chacón* asesor de mi tesis, así como a los coasesores *Dr. Igor S. Litvinchev* y *Dr. Francisco R. Angel-Bello*, por su ayuda y acertada guía para la elaboración del presente trabajo.

A la *Dra. Ada M. Socarrás* por sus valiosas sugerencias e interés, en el presente trabajo.

En forma especial, agradezco a todos mis compañeros del *Programa de Ingeniería en Sistemas (PISIS)* por su amistad, compañía y apoyo brindado durante el desarrollo de la tesis.

Agradezco a la *Universidad Autónoma de Nuevo León* por toda la ayuda proporcionada durante mi etapa de postgrado.

Por último, a los compañeros y amigos de todo el programa doctoral.



# RESUMEN

**Yezmín Coronado Pérez**

**Fecha de graduación: septiembre del 2002**

**Universidad Autónoma de Nuevo León**

**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**

**División de Estudios de Posgrado**

**Título del Estudio: SOLUCION A PROBLEMAS DE PROGRAMACION  
LINEAL MEDIANTE EL METODO ELIPSOIDAL  
MODIFICADO.**

**Número de Páginas: 126**

**Candidato para el grado de Maestría  
en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.**

**Area de Estudio: Análisis de métodos matemáticos y algoritmos de programación lineal.**

**Propósito y Método de Estudio:** El propósito del siguiente trabajo es analizar y discutir los elementos básicos del algoritmo elipsoidal (AE) y proponer modificaciones a la variante de corte profundo de este algoritmo. El desarrollo de la investigación considera: 1) Revisión de los antecedentes históricos del AE, 2) Análisis de la aplicación del AE al problema de factibilidad, 3) Interpretación geométrica de los elementos del AE, 4) Análisis de los parámetros requeridos en el AE, 5) Análisis de la convergencia del AE y propuestas para su mejora, 6) Estudio de la adecuación del AE para la

solución de problemas de Programación Lineal. La parte computacional numérica de las actividades señaladas se realizaron con la herramienta computacional MatLab. Se diseñaron rutinas de cómputo para el Algoritmo Elipsoidal Básico, para el Algoritmo Elipsoidal Modificado de Corte Profundo y finalmente para el algoritmo de solución de Problemas de Programación Lineal mediante el método propuesto del Algoritmo Elipsoidal Modificado de Corte Profundo.

**Contribución y Conclusiones:** La principal contribución es la propuesta del método elipsoidal modificado para la solución de problemas de Programación Lineal. El método propuesto es una variante del método de corte profundo y toma en consideración los gradientes de la función objetivo y de las restricciones del problema, para establecer, en cada etapa del proceso iterativo, el paso máximo de búsqueda del óptimo con factibilidad. El algoritmo propuesto muestra mejoras en la convergencia del problema de Programación Lineal en comparación con el método de corte central. El método propuesto es una nueva alternativa de solución a problemas de Programación Lineal a Gran Escala, específicamente para problemas con bloques de restricciones lineales y con la función objetivo como el Dual Lagrangeano de un subproblema.

Con lo anterior podemos concluir la satisfacción del trabajo realizado ya que creemos firmemente que líneas de investigación interesantes en el área, son abiertas a partir de este trabajo.

**FIRMA DEL ASESOR**

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping loops and a long horizontal stroke extending to the right, positioned above a solid horizontal line.

# TABLA DE CONTENIDO

Capítulo	Página
<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>0 CONCEPTOS BASICOS DE ALGEBRA LINEAL Y PROGRAMACION LINEAL</b>	<b>5</b>
0.1. Algebra lineal.	5
0.1.1. Notación básica.	5
0.1.2. Vectores.	6
0.1.3. Matrices.	7
0.1.4. Normas de los vectores, bolas.	10
0.2 Programación lineal.	13
0.2.1. Geometría de la programación lineal.	14
0.2.1.1. Conjuntos afines, convexos y conos.	14
0.2.1.2. Sistema de desigualdades, definiciones de poliedro y dimensión.	15
0.2.2. El problema de programación lineal	18
0.2.2.1. Semiespacios, hiperplanos y conjuntos poliédricos.	21
0.2.2.2. Caras de un poliedro.	24
0.2.3. Definición de diámetro y ancho de un conjunto $K$ .	25
<b>1 ANTECEDENTES HISTORICOS DEL METODO ELIPSOIDAL Y ASPECTOS ALGORITMICOS SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS.</b>	<b>27</b>
1.1. Métodos antecesores	27
1.1.1. El método de relajación para desigualdades lineales.	28
1.1.2. Algoritmos de plano de corte.	30
1.1.3. El método de subgradiente y dilatación del espacio.	30
1.1.4. El método de secciones centrales.	32
1.1.5. El método elipsoidal.	33
1.2. Problemas algorítmicos básicos para los conjuntos convexos y formulación de problemas.	34

<b>Capítulo</b>	<b>Página</b>
4.2.1. Formulación de los problemas algorítmicos.	35
1.2.1.1. El problema de optimización fuerte (SOPT).	35
1.2.1.2. El problema de violación fuerte (SVIOL).	35
1.2.1.3. El problema de validez fuerte (SVAL).	36
1.2.1.4. El problema de separación fuerte (SSEP).	36
1.2.1.5. El problema de membresía fuerte (SMEM).	36
1.2.2. Ejemplos típicos.	37
1.3. Definición de cuerpo convexo.	39
<b>2 FUNDAMENTOS IDEOLOGICOS Y GEOMETRICOS DEL ALGORITMO ELIPSOIDAL.</b>	<b>41</b>
2.1. Introducción.	41
2.2. ¿Cómo se puede capturar un león en el Sahara?	43
2.3. Fundamentos geométricos.	44
2.3.1. Definición de elipsoide.	45
2.3.2. Relación entre las propiedades geométricas del elipsoide $E(A,a)$ y las propiedades algebraicas de la matriz $A$ .	45
2.3.3. Todo elipsoide es la imagen de una bola unitaria.	47
2.3.4. Volumen de una elipsoide.	49
2.3.5. Razón de volúmenes entre dos elipsoides.	49
<b>3 ELEMENTOS BASICOS Y EL ALGORITMO DEL METODO ELIPSOIDAL.</b>	<b>50</b>
3.1. Elementos básicos del método elipsoidal.	50
3.1.1. Generación de un $1/2E(A,a)$ o $E'(A,a,c)$ .	50
3.1.2. Optimización de funciones objetivo lineales sobre elipsoides.	51
3.1.3. El elipsoide Löwner John $E(A',a')$ contenedor de $E'(A,a,c)$ .	54
3.2. Descripción del método elipsoidal básico.	57
3.2.1. Algoritmo básico elipsoidal bajo el criterio del corte central.	57
3.2.1.1. Datos.	58
3.2.1.2. Radio inicial.	58
3.2.1.3. Criterio de parada.	60
3.3. Ejemplo.	62
3.3.1. Analogía del algoritmo elipsoidal con la técnica "Captura de un león en el Sahara".	62
3.3.1.1. Generación del Sahara.	63
3.3.1.2. Cercamiento inicial-Sahara	63
3.3.1.3. División del Sahara en dos partes iguales.	63
3.3.1.4. Cercamiento de la región en la cual se encuentra el león.	65
<b>4 ALGORITMO ELIPSOIDAL BAJO CORTE PROFUNDO</b>	<b>67</b>
4.1. Introducción.	67
4.2. Modificaciones al método básico elipsoidal	68



<b>Capítulo</b>	<b>Página</b>
4.3. Parámetros considerados en el corte profundo.	69
4.3.1. Selección del vector $c$ .	71
4.3.2. Análisis del parámetro $\alpha$ .	71
4.4. Construcción del elipsoide Löwner John bajo corte profundo.	75
4.5. Descripción del método elipsoidal modificado bajo corte profundo.	76
4.5.1. Algoritmo elipsoidal modificado bajo el criterio de corte profundo.	76
4.6. Ejemplo.	78
4.6.1. Definición del politopo.	78
4.6.2. Definición del elipsoide inicial.	78
4.6.3. División del elipsoide actual.	78
4.6.4. Generación del elipsoide L-J.	82
4.7. Comparación entre el desempeño del algoritmo elipsoidal básico y el modificado.	83
<b>5 SOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL MEDIANTE EL METODO ELIPSOIDAL MODIFICADO.</b>	<b>87</b>
5.1. Introducción.	87
5.2. Definición informal del algoritmo utilizado en la propuesta.	88
5.3. Elementos básicos de la propuesta.	90
5.3.1. Datos.	90
5.3.2. Definición cotas inferiores para $x^*$ y $\zeta^*$ .	90
5.3.3. Definición cotas superiores para $x^*$ y $\zeta^*$ .	91
5.3.4. Generación de $x_{\text{mto}}$ y $\zeta_{\text{mto}}$ .	92
5.3.5. Criterio de terminación.	93
5.3.6. Utilización de la función objetivo $g^T x$ como hiperplano de corte de $E$ .	93
5.4. Algoritmo para solucionar problemas de programación lineal mediante el algoritmo elipsoidal modificado.	94
<b>6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>97</b>
6.1. Conclusiones.	97
6.2. Límites del estudio.	98
6.3. Recomendaciones.	99
<b>ANEXO i</b>	<b>100</b>
<b>ANEXO ii</b>	<b>104</b>
a. Complejidad computacional	105
a.1. Las clases $\mathcal{P}$ , $\mathcal{NP}$ y co- $\mathcal{NP}$ .	108
b. Optimización combinatoria	110
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS</b>	<b>111</b>
<b>RESUMEN AUTOBIOGRAFICO</b>	<b>114</b>

# LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>		<b>Página</b>
0.1.	Representación gráfica de un vector.	10
0.2.	Gráfica de las relaciones existentes entre normas.	12
0.3.	Representación gráfica de los autovalores de una matriz definida positiva.	13
0.4.	Representación de un poliedro no dimensionalmente completo.	18
0.5.	Vector normal de un hiperplano.	22
0.6.	Representación gráfica de un problema de programación lineal.	23
0.7.	Politopo.	24
0.8.	Caras de un poliedro.	25
1.1.	El método de bola.	29
1.2.	Relación trivial entre SOPT, SVIOL, SVAL, SSEP y SMEM.	36
2.1.	Bola máxima y mínima contenedora de y contenida en $E(A, a)$ .	47
3.1.	Generación de un $1/2E(A, a)$ .	51
3.2.	Optimización lineal sobre un $E(A, a)$ .	54
3.3.	Gráfica del elipsoide Löwner John bajo corte central.	56
3.4.	(a) Definición del politopo.	64
	(b) Elipsoide inicial.	64
3.5.	Selección del vector $c$ .	65
3.6.	Corte central.	65
3.7.	Punto máximo $x_{max}^*$ .	66
3.8.	Elipsoide Löwner John bajo corte central.	66
4.1.	(a) Corte profundo.	69
	(b) Corte central.	69
	(c) Corte poco-profundo.	69
	(d) Corte paralelo.	69
4.2.	(a) Análisis del parámetro $\alpha$ , ( $\alpha < 0$ ).	71
	(b) Análisis del parámetro $\alpha$ , ( $\alpha = 0$ ).	72
	(a) Análisis del parámetro $\alpha$ , ( $\alpha \in (0, 1)$ ).	72
4.3.	Intersección no-vacía del hiperplano de corte profundo con el $E(A_b, a_b)$ .	73

<b>Figura</b>		<b>Página</b>
4.4.	Gráfica del elipsoide Löwner John bajo corte profundo	76
4.5.	(a) Definición del politopo.	79
	(b) Elipsoide inicial.	79
4.6.	Selección del vector $c$	81
4.7.	Corte Profundo	81
4.8.	Punto máximo $x_{min}^*$ .	82
4.9.	Elipsoide Löwner John bajo corte profundo.	82
4.10.	Gráfica comparativa.	83
4.11-4.17.	Ejemplo bajo algoritmo elipsoidal básico.	84, 85
4.18-4.22.	Ejemplo bajo algoritmo elipsoidal bajo corte profundo.	85, 86

## INTRODUCCION

Existe en la optimización a Gran Escala la solución de problemas con cierta estructura especial a través de la definición o transformación de estos a su Función Dual Lagrangeana [1]. Los problemas de Asignación Generalizada, de Transporte y de Localización de plantas son algunos de los problemas que poseen dicha estructura especial, la cual esta formada por una función objetivo a ser optimizada, un conjunto de restricciones de acoplamiento (cardinalidad  $y$ ), un conjunto de restricciones con estructura de bloque (cardinalidad  $z$ ) y las restricciones de signo. Si un problema posee  $m = y + z$  restricciones y  $n$  variables, tenemos que

Para  $x \in \mathcal{R}^n$  determinar:

$$x^* = \min_x \{ g^T x \mid Bx \geq b, Dx \geq d, x \geq 0 \}$$

donde  $B \in \mathcal{R}^{y \times n}$  y  $D \in \mathcal{R}^{z \times n}$ ,  $b \in \mathcal{R}^y$  y  $d \in \mathcal{R}^z$ .

Se tiene que

$$\min_x \{ g^T x \mid Bx \geq b, Dx \geq d, x \geq 0 \} = \max_u \{ L(u) \mid u \geq 0 \}$$



donde  $u \in \mathcal{U}$ . (ver [1], p-396).

$L(u)$  es la Función Lagrangeana asociada al Problema de Programación Lineal, que se define como

$$L(u) = \min_x \{ g^T x + u^T (b - Bx) \mid Dx \leq d, x \geq 0 \},$$

La solución de la Función Dual Lagrangeana suele ser una tarea bastante tediosa y compleja, pues antes que nada esta función es Cóncava Lineal Segmentada formada por la intersección de segmentos lineales generadores de puntos de quiebre. Por lo anterior surgen varias preguntas; ¿es posible resolver problemas de programación lineal aplicando el método elipsoidal?. Por otro lado, cuáles serían los efectos de dicha transformación en la solución de la Función Dual Lagrangeana si se aproxima:

- a) el conjunto de restricciones de acoplamiento o,
- b) el conjunto de restricciones con estructura de bloque, o bien,
- c) ambos conjuntos

por un elipsoide.

Estas preguntas motivan al análisis y discusión de los elementos básicos del Algoritmo Elipsoidal (AE). Se sabe que esta herramienta tiene la particularidad de resolver el problema de factibilidad de un conjunto de desigualdades lineales dado proporcionando además los elementos que definen el elipsoide contenedor de tal conjunto. Históricamente, existe una conexión bastante cercana entre la geometría y la optimización, lo cual es claramente ilustrado por los métodos tales como: "*el método del gradiente o como el método simplex*", los cuales están asociados con figuras geométricas bastante claras. En los últimos años los métodos geométricos han venido jugando un papel cada vez más importante en la optimización. El AE es uno de los algoritmos más recientes cuyo contenido teórico lo vuelven bastante interesante, el cual básicamente fue desarrollado para la programación no-lineal por N.Z. Shor, D.B. Yudin y A.S. Nemirovskii. [2]

El objetivo principal de este trabajo es analizar y discutir los elementos básicos del AE con la finalidad de proponer modificaciones a la variante de corte profundo de este algoritmo. En el capítulo 5 de este trabajo se presenta un estudio de las adecuaciones del AE para la solución de problemas de Programación Lineal. Pero antes deben ser analizados y comprendidos cada uno de los capítulos anteriores respetando su orden de aparición ya que la metodología utilizada para alcanzar el objetivo se apegan al orden de los capítulos.

Para el desarrollo de la investigación fue necesario realizar lo siguiente:

- 1) Revisión de los antecedentes históricos del AE,
- 2) Análisis de la aplicación del AE al problema de factibilidad,
- 3) Interpretación geométrica de los elementos del AE,
- 4) Análisis de los parámetros requeridos en el AE,
- 5) Análisis de la convergencia del AE y propuestas para su mejora,
- 6) Estudio de la adecuación del AE para la solución de problemas de Programación Lineal.

Debido a lo complejo, desde el punto de vista conceptual, que resulta el estudio de este método, se ha introducido un Capítulo 0 sumamente importante para la mejor comprensión y entendimiento de los capítulos posteriores ya que se proporcionan brevemente conceptos básicos así como la nomenclatura que será utilizada pues consideramos que incluir dichos conceptos a manera de anexos hubiese entorpecido la lectura de este trabajo.

El capítulo 1 habla de los antecedentes históricos del método elipsoidal así como ciertos aspectos algorítmicos sobre conjuntos convexos con la intención de comprender lo rico y bien fundamentado que resulta ser el AE y algunas de sus posibles aplicaciones (para futuros trabajos). Este capítulo resulta bastante interesante pues es la justificación del adjetivo “bien fundamentado teóricamente” que se ha ganado el AE.

Posteriormente en el capítulo 2, se describe de manera sencilla el fundamento ideológico del algoritmo así como la descripción y definición de los aspectos geométricos que se encuentran implícitos en el AE básico, con la finalidad de ilustrar la relevancia geométrica del método. Ya en el capítulo 3, se describirán los elementos básicos y el algoritmo mismo del método elipsoidal aplicado al problema de factibilidad de un conjunto de restricciones dados, así como, un pequeño ejemplo que ilustra el desempeño del mismo.

El capítulo 4 justifica la selección del AE modificado bajo el llamado corte profundo que es aplicado en nuestra propuesta, pues se marcan paso a paso las consideraciones que se deben realizar para mejorar el desempeño del AE desde el punto de vista práctico. Al final de este capítulo se presenta un ejemplo comparativo entre el desempeño del AE básico y el modificado bajo corte profundo.

Finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones a las que se llegaron al final de este trabajo.

# CAPITULO 0

## CONCEPTOS BASICOS DE ALGEBRA Y PROGRAMACION LINEAL

Este capítulo proporciona un pequeño resumen acerca de conceptos básicos de álgebra y programación lineal que resultan fundamentales para el buen entendimiento de este trabajo.

### 0.1. Algebra lineal.

En esta sección se indicará la notación y algunos hechos bien conocidos sobre el campo del álgebra lineal y teoría de poliedros. Este material es estándar por lo tanto puede ser encontrado en muchos de los libros de texto (ver por ejemplo [2], [3], [4], [5], [6]).

#### 0.1.1. Notación básica.

Por  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{C}$  denotaremos el conjunto de los números reales, enteros, naturales y complejos respectivamente. Si  $E$  y  $R$  son conjuntos, entonces  $\mathcal{R}^E$  es el conjunto de mapeos de  $E$  a  $R$ . El conjunto  $\mathcal{N}$  de números naturales, no contiene al cero. Los conjuntos  $\mathcal{R}_+$  y  $\mathcal{Z}_+$ , denotan los números reales y enteros no-negativos respectivamente. Para



$n \in \mathcal{N}$ , el símbolo  $\mathcal{R}^n$ , denota el conjunto de vectores de  $n$  componentes, es decir, un conjunto ordenado de  $n$  números  $\in \mathcal{R}$ .

Adición y multiplicación de vectores con escalares son operaciones bastante comunes, con estas operaciones,  $\mathcal{R}^n$  es un espacio vectorial sobre el campo de  $\mathcal{R}$ .

Para dos conjuntos  $M$  y  $N$ , la expresión  $M \subseteq N$ , significa que  $M$  es subconjunto de  $N$  ó  $N$  mismo, mientras que  $M \subset N$ , denota un contenido estricto. Para indicar que los elementos de cierto conjunto  $M$  no pertenecen a otro conjunto  $N$  escribimos  $M \setminus N$ , es decir  $\{x \in M \mid x \notin N\}$ .

### 0.1.2. Vectores.

Un vector renglón de  $n$  componentes es un conjunto ordenado de  $n$  números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Por otro lado, un vector columna de  $n$  componentes es un conjunto ordenado de  $n$  números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Por notación, cuando se hable de un vector se estará haciendo referencia a un vector columna, a menos que otra cosa sea especificada.

El superíndice  $T$ , denota transposición de los elementos de un vector, así que el vector  $x^T$  para un vector  $x \in \mathcal{R}^n$ , es un vector fila.

Sí  $a = (a_1, \dots, a_n)^T$  y  $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ , son vectores, entonces  $a \leq b$ , se cumple siempre y cuando esto sea válido para todos y cada uno de los elementos relacionados

uno a uno por la desigualdad, es decir, si  $a_i \leq b_i, \forall i = 1, \dots, n$ .  $\mathcal{R}^n$ , es dotado de un producto interno (*euclideo*) definido como:

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ para } x, y \in \mathcal{R}^n.$$

### 0.1.3. Matrices.

La expresión  $\mathcal{R}^{m \times n}$  denota el conjunto de matrices cuyos datos corresponden al conjunto de los números reales  $\mathcal{R}$ . Para una matriz  $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ , comúnmente se asume que el índice asociado al conjunto de filas de una matriz  $A$  es  $\{1, \dots, i, \dots, m\}$ , mientras que el conjunto de columnas es  $\{1, \dots, j, \dots, n\}$ .

Una **matriz cuadrada**, es una matriz con un número de filas  $m$  igual al número de columnas  $n$ , es decir  $m=n$ , por lo tanto puede ser representada como  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ .

A menos que se especifique lo contrario, los elementos o datos de la matriz  $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$  son denotados por  $(a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ . Los vectores con  $n$  componentes son también considerados matrices de dimensión  $n \times 1$ .

La **matrix identidad** denotada por  $I$ , es una matriz cuadrada. Cuando se desea enfatizar su dimensión de  $n \times n$ , entonces se denota por  $I_n$ . Para matrices con todos sus elementos igual a cero (0), el símbolo  $\theta$  es el utilizado para denotar este tipo de matrices. Cabe mencionar que esto se mantiene para cualquier matriz de tamaño apropiado, y de manera similar para cualquier vector cero. El símbolo  $\mathbf{1}$  denota un vector que posee todos sus componentes iguales a uno (1). El vector  $j$ -ésimo unitario en  $\mathcal{R}^n$ , denotado por  $e_j$ , es un vector cuyo  $j$ -ésimo componente es uno y sus componentes restantes son todos iguales a cero. Si  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , es un vector, entonces la matrix cuadrada  $n \times n$  con los datos  $x_1, \dots, x_n$ , sobre su diagonal principal y ceros fuera de ésta se denota por  $diag(x)$ .

Sí  $A \in \mathcal{R}^{m \times p}$  y  $B \in \mathcal{R}^{m \times q}$ , entonces  $(A, B)$ , (o simplemente  $(A B)$ ), denota la matriz en  $\mathcal{R}^{m \times (p+q)}$ , cuyas primeras  $p$  columnas, corresponden a la matriz  $A$  y las  $q$  restantes son las de  $B$ .

El determinante de una matriz  $A \in \mathcal{R}^{m \times m}$  se denota como  $\det(A)$  y su traza por  $\text{tra}(A)$ . La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz. Cuando se utilicen funciones tales como  $\det$ ,  $\text{tra}$ , o  $\text{diag}$  omitiremos los paréntesis, por ejemplo escribir  $\det A$ , en lugar de  $\det(A)$ , etc.

La inversa de una matriz  $A \in \mathcal{R}^{m \times m}$ , es denotada por  $A^{-1}$ . Una matriz para la cual exista su matriz inversa es llamada matriz no-singular, de otro modo matriz singular. Una matriz  $A \in \mathcal{R}^{m \times m}$  es no-singular si y solo si su  $\det A \neq 0$ .

El rango de una matriz  $A$ , denotado por  $\text{rango}(A)$  es la cardinalidad del conjunto de sus vectores columna (vectores fila) linealmente independientes. Una matriz  $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$  se dice que posee rango de fila completo (rango de columna completo) si el  $\text{rango}(A) = m$  ( $\text{rango}(A) = n$ ) (ver [3], [4]).

Dada una matriz  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , todo número complejo  $\lambda$  con la propiedad  $Au = \lambda u$ , donde  $u$  es un vector no-cero y  $u \in \mathbb{C}^n$ , es un autovalor o valor propio de  $A$ . El vector  $u$  es llamado autovector de  $A$  asociado a  $\lambda$  (ver [2], p-4).

La función  $f(\lambda) := \det(\lambda I_n - A)$  es una polinomial de grado  $n$ , llamada función polinomial característica de  $A$ . Por lo tanto la ecuación,

$$\det(\lambda I_n - A) = 0,$$

tiene  $n$  raíces (múltiples raíces complejas tomando en cuenta su multiplicidad). Estas raíces son los  $n$  autovalores (no necesariamente distintos) de  $A$ .

Una matriz simétrica es aquella matriz  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , tal que  $A = (a_{ij})$  con  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Es fácil observar que todos los autovalores de matrices reales simétricas son números reales.

Existen útiles relaciones entre los autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de una matriz  $A$ , su determinante y su traza, las cuales se muestran a continuación:

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Una matriz  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , es llamada **positiva definida (semidefinida positiva)**, si  $A$  es simétrica y si además cumple con que  $x^T A x > 0$  para todo  $x \in \mathcal{R}^n \setminus \{0\}$  ( $x^T A x \geq 0$  para todo  $x \in \mathcal{R}^n$ ). Si  $A$  es definida positiva, entonces  $A$  es no singular y su inversa es también definida positiva. De hecho, para una matriz simétrica  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i)  $A$  es definida positiva.
- (ii)  $A^{-1}$  es definida positiva.
- (iii) Todos los autovalores de  $A$  son números positivos reales.
- (iv)  $A = B^T B$  para alguna matriz no singular  $B$ .
- (v) El  $\det A^k > 0$  para  $k=1, \dots, n$ , donde  $A^k$  es la  $k$ -ésima submatriz principal dirigida de  $A$ .

Es bien conocido que para cualquier matriz definida positiva  $A$ , existe exactamente una única matriz, entre las matrices  $B$  posibles, que satisface (iv) y que en sí misma es definida positiva. Esta matriz es llamada la **raíz (cuadrada)** de  $A$  denotada por  $A^{1/2}$ .

Las matrices **semi-definidas positivas** pueden ser caracterizadas de manera similar, es decir, para una matriz simétrica  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i)  $A$  es semi-definida positiva.
- (ii) Todos los autovalores de  $A$  son números no-negativos reales.

- (iii)  $A = B^T B$  para alguna matriz  $B$ ,
- (iv) El  $\det A_{II} \geq 0$  para todas las submatrices  $A_{II}$  de  $A$ .

Nota: Si  $I$  es el subconjunto del conjunto de índices  $M$  de las filas de  $A$  y  $J$  es un subconjunto del conjunto de índices  $N$  de las columnas de  $A$ , entonces  $A_{IJ}$  denota la submatriz de  $A$  generada por aquellas filas y columnas correspondientes a  $I$  y  $J$  respectivamente. En lugar de  $A_{MJ}$  ( $A_{IN}$ , respectivamente) escribiremos  $A_J$  ( $A_I$ ). Una submatriz  $A$  de la forma  $A_{II}$  es llamada submatriz principal dirigida de  $A$ .

#### 0.1.4. Normas de los vectores, bolas.

Una función  $N : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  es llamada una **norma** si las siguientes tres condiciones se cumplen:

- (i)  $N(x) \geq 0$ , para  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $N(x) = 0$ , sí y solo sí  $x=0$ .
- (ii)  $N(\alpha x) = |\alpha|N(x)$ , para todo  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$ .
- (iii)  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ , para todo  $x, y \in \mathcal{R}^n$  (desigualdad triangular).

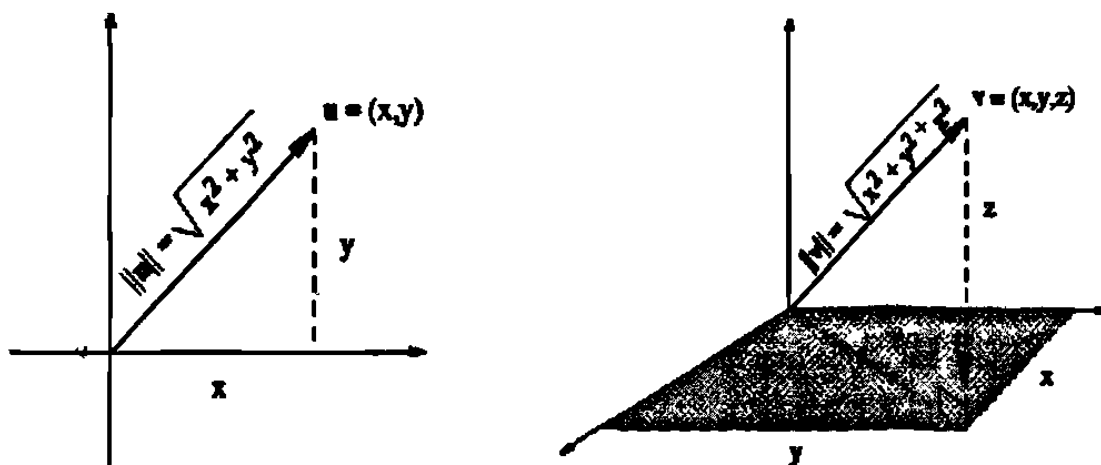


Figura 0.1 Representación gráfica de un vector.

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Toda norma  $N$  sobre  $\mathcal{R}^n$  induce una **distancia**  $d_N$  definida por  $d_N(x, y) := N(x - y)$ , para  $x, y \in \mathcal{R}^n$ .

Las siguientes definiciones corresponden a las normas que serán utilizadas,

$$\|x\|_2 := \sqrt{x^T x} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Norma Euclidiana}).$$

Esta norma induce la distancia euclidiana  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Usualmente, la norma euclidiana es denotada por  $\|\cdot\|$  en lugar de  $\|\cdot\|_2$ . En la práctica las siguientes normas son las de uso más común:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{Norma 1}),$$

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (\text{Norma máxima}),$$

$$\|x\|_A := \sqrt{x^T A^{-1} x} \quad (\text{Norma Elipsoidal}),$$

donde  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva. La matriz  $A$  induce un producto interno  $x^T A^{-1} y$  sobre  $\mathcal{R}^n$ . Las normas de tipo  $\|\cdot\|_A$  algunas veces son llamadas euclidiana generales o normas elipsoidales.

Siempre se considerará el espacio  $\mathcal{R}^n$  como un espacio euclidiano inducido por la norma euclidiana  $\|\cdot\|_A$ , a menos que otra cosa sea especificada. Así será para todas las notaciones relacionadas con distancias y aquellas que sean definidas a través de la norma euclidiana. Para todo  $x \in \mathcal{R}^n$ , las siguientes relaciones surgen entre las normas mencionadas previamente:

$$\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

### Ejemplo 0.1.

Para observar el efecto de las relaciones anteriores, veamos la aplicación de estas a un vector  $x \in \mathcal{R}^n$ , definido como  $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ , para  $n=2$ .

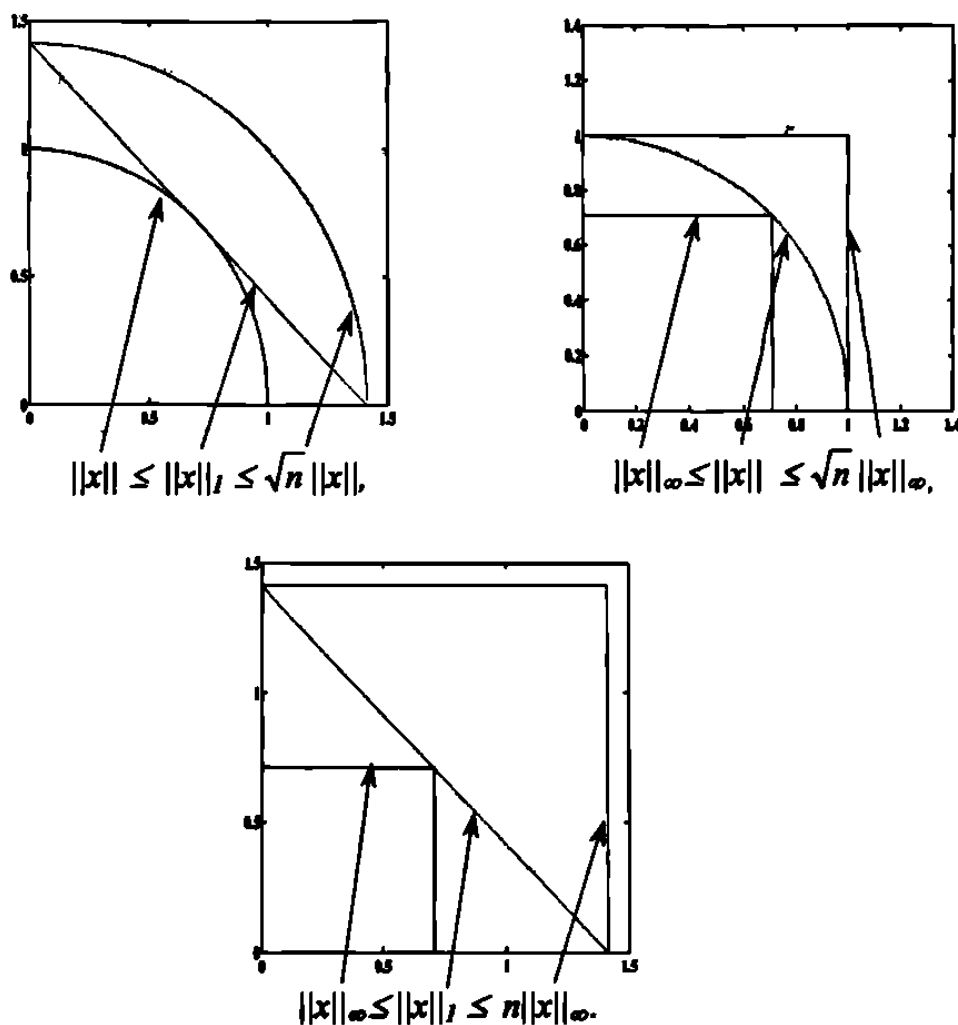


Figura 0.2 Gráfica de las relaciones existentes entre normas.

Dado un vector  $x \neq 0$ , en ocasiones resulta conveniente definir otro vector que posea la misma dirección que  $x$  (por ejemplo, algún múltiplo de  $x$ ) pero cuya longitud sea la unidad. Para construir tal vector, se normaliza  $x$  estableciendo que,

$$u = \frac{x}{\|x\|}.$$

Este vector normalizado posee la siguiente propiedad

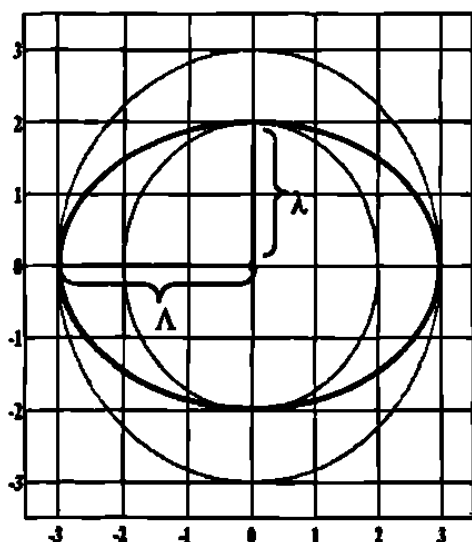
$$\|u\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$$

por consiguiente  $x = \|x\| u$ .

Si  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva, cuyos autovalores menor y mayor son  $\lambda$  y  $\Lambda$  respectivamente, entonces:

$$\sqrt{\lambda} \|x\| \leq \|x\|_{A^{-1}} \leq \sqrt{\Lambda} \|x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{R}^n.$$

### Ejemplo 0.2.



$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix};$$

$$\|x\| = \sqrt{2} \qquad \sqrt{\lambda} \|x\| = 2.8284$$

$$\|x\|_{A^{-1}} = \sqrt{x^T A^{-1} x} = 3.6056 \qquad \sqrt{\Lambda} \|x\| = 4.2426$$

por lo tanto, se cumple la relación

$$\sqrt{\lambda} \|x\| \leq \|x\|_{A^{-1}} \leq \sqrt{\Lambda} \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

Figura 0.3. Representación gráfica de los autovalores de una matriz definida positiva.

## 0.2. Programación lineal.

La programación lineal esta asociada a problemas en los cuales una función objetivo lineal en términos de variables de decisión es optimizada (ya sea maximizar o minimizar), mientras un conjunto de ecuaciones, desigualdades y restricciones de signos son impuestas a las variables de decisión como requerimientos. La gran aplicación que



poseen los modelos de programación lineal y la teoría matemática involucrada, así como la metodología computacional dirigida según estos modelos, ha despertado un gran interés tanto de profesionistas como académicos durante las últimas cinco décadas (ver [5], p-1).

### 0.2.1. Geometría de la programación Lineal.

En esta sección se enunciarán algunos resultados y definiciones interesantes con respecto a la programación lineal, pero desde un punto de vista geométrico.

#### 0.2.1.1. Conjuntos afines, convexos y conos.

Para un estudio detallado sobre conjuntos poliédricos y politopos se requieren las siguientes definiciones.

Dados  $p$  puntos  $x^1, x^2, \dots, x^p \in \mathcal{R}^n$ , y  $p$  escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathcal{R}$ , la expresión  $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_p x^p$ , es una combinación lineal. Una combinación lineal llega a ser combinación afín cuando  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1$ ; combinación convexa cuando  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1$ ; y  $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \leq 1$ ; y una combinación cónica convexa cuando  $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  (ver [5], p-17).

Estas combinaciones son llamadas propias si el vector formado por los  $p$  escalares  $\lambda \in \mathcal{R}^p$ , no es  $0$ , ni tampoco es  $e_j$  para algún  $j = \{1, 2, \dots, p\}$ .

Para entender un poco el significado geométrico de la combinación afín y convexa, consideremos el caso de dos puntos  $x^1, x^2 \in \mathcal{R}^n$ , y su combinación lineal. Si definimos  $\lambda_1 = 1 - s$ , y  $\lambda_2 = s$  para un escalar  $s$ , al remplazar la ecuación  $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = 1$  vemos que:

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = (1 - s)x^1 + sx^2 = x^1 + s(x^2 - x^1).$$

Consecuentemente, el conjunto de todas las combinaciones afines de dos puntos distintos  $x^1, x^2 \in \mathcal{R}^n$  es toda la línea determinada por estos dos puntos, mientras que el conjunto de todas las combinaciones convexas es el segmento de línea que une a  $x^1$  y  $x^2$ . Obviamente cada combinación convexa es una combinación afín, pero lo contrario solo se mantiene cuando  $x^1 = x^2$ . Un conjunto  $C \subset \mathcal{R}^n$  es un cono si  $\lambda x \in C$ , para cada  $x \in C$ , y  $\lambda \geq 0$ . Obviamente todo cono posee al vector cero (ver [5], p-19).

A partir de las definiciones anteriores, para un subconjunto no vacío  $S \subset \mathcal{R}^n$ , decimos que  $S$  es afín si  $S$  contiene toda combinación afín de cualesquiera dos puntos  $x^1, x^2 \in S$ ;  $S$  es convexo si  $S$  contiene toda combinación convexa de cualesquiera dos puntos  $x^1, x^2 \in S$ .

Dado un conjunto no vacío  $S \subset \mathcal{R}^n$ , el conjunto de todas las combinaciones afines (convexas, cónicas convexas) de puntos en  $S$  es un conjunto afín (convexo, cónico convexo) al cual se le conoce también como envolvente afín (convexo, cónica convexa).

Un subconjunto  $S \subseteq \mathcal{R}^n$  se llama linealmente (afinmente) independiente, si ninguno de sus miembros es una combinación linealmente (afín) propia. Recordemos que los subconjuntos de  $\mathcal{R}^n$  linealmente independientes (afinmente independientes) contienen a lo sumo  $n$  elementos ( $n+1$ ) (ver [2], p-3).

#### 0.2.1.2. Sistemas de desigualdades, definiciones de poliedro y dimensión.

Un conjunto de puntos  $x^1, \dots, x^k \in \mathcal{R}^n$  es linealmente independiente si la única solución de  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i = 0$  es  $\lambda_i = 0$ , para  $i = 1, \dots, k$ . El máximo número de puntos linealmente independientes en el espacio  $\mathcal{R}^n$  es  $n$ .

Dada una matriz  $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$  y  $b \in \mathcal{R}^m$ , entonces  $Ax \leq b$ , es llamado sistema de desigualdades lineales, y  $Ax = b$ , sistema de ecuaciones lineales.

Un poliedro  $P \subseteq \mathcal{R}^n$  es el conjunto de puntos que satisfacen un número finito de desigualdades lineales (ver [6], p-85), es decir

$$P = \{x \mid Ax \leq b\}, \text{ para lo cual } (A, b) \in \mathcal{R}^{m \times (n+1)},$$

el cuál es acotado (o politopo) si existe un  $\omega \in \mathcal{R}_+$  tal que,

$$P \subseteq \{x \in \mathcal{R}^n \mid -\omega \leq x_j \leq \omega, \text{ para } j = 1, \dots, n\}.$$

Un conjunto  $T \subseteq \mathcal{R}^n$  es un conjunto convexo si al tomar cualquier par de puntos  $x^1, x^2 \in T$  cumple la condición  $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in T$  para  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

De las definiciones anteriores podemos concluir que un conjunto poliedral o poliedro es un conjunto formado por la intersección de un número finito de semiespacios cerrados. Si la intersección es válida y acotada, este poliedro es llamado politopo.

Es bien conocido que todo subespacio  $S$  posee una dimensión  $\dim(S)$ , igual al máximo número de vectores linealmente independientes de éste. Un poliedro  $P$  es de dimensión  $\dim(P) = k$ , si el máximo número de puntos afinmente independientes en  $P$  es  $k+1$ . Por lo que un poliedro  $P \subseteq \mathcal{R}^n$  es dimensionalmente completo si  $\dim(P) = n$  (ver [6], p-87)

Si  $P$  no es dimensionalmente completo, entonces quiere decir que al menos una de las desigualdades  $a_i^T x \leq b_i$  (donde  $a_i^T$  es un vector fila) es satisfecha como igualdad por todos los puntos de  $P$ .

Para mostrar lo anterior consideremos conjunto  $M$  integrado por el conjunto de índices  $i$  de  $m$  desigualdades lineales, es decir  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ , a partir del cual definimos los siguientes subconjuntos:

✓ Conjunto de desigualdades que sean satisfechas como igualdad por todos los puntos contenidos en  $P$ :  $M^= = \{i \in M \mid a_i^T x = b_i, \text{ para todo } x \in P\}$ ,

✓ Conjunto de desigualdades que resulten de estricta desigualdad por algún punto en  $P$ :  $M^< = \{i \in M \mid a_i^T x < b_i, \text{ para algún } x \in P\} = M \setminus M^=$ ,

A partir de lo cual podemos decir que la matriz  $(A, b)$  puede ser referida a partir de las submatrices  $(A^=, b^=)$  y  $(A^<, b^<)$ , o bien, los conjuntos de igualdades y desigualdades, respectivamente. Entonces el poliedro  $P$  puede ser definido de modo equivalente como:

$$P = \{x \in \mathcal{R}^n \mid A^= x = b^=, A^< x \leq b^<\}.$$

Observe que si  $i \in M^<$ , entonces  $(a_i^T, b_i)$  no pueden ser escritas como una combinación lineal de las filas de  $(A^=, b^=)$ . A partir de la definición de  $P$  en términos de sus submatrices  $(A^=, b^=)$  y  $(A^<, b^<)$ , surgen las siguientes definiciones:

- o Un vector  $x \in P$ , es un punto interior de  $P$ , si  $a_i^T x < b_i$ , para todo  $i \in M^<$ ,
- o por otro lado  $x \in P$ , es llamado un punto interno de  $P$ , si  $a_i^T x = b_i$ , para todo  $i \in M$ .

Todo poliedro que sea no vacío  $P \neq \emptyset$  posee un punto interno. Lo anterior se debe a que si  $M^< = \emptyset$ , todo punto en  $P$  es interno

Sí  $P \subseteq \mathcal{R}^n$ , asociando la dimensión de  $P$  con el rango de la matriz de igualdad  $(A^=, b^=)$  (siempre asumiremos que  $P \neq \emptyset$ ), el siguiente resultado  $\dim(P) + \text{rango}(A^=, b^=) = n$ , es válido con la condición de que si  $P \neq \emptyset$ , entonces  $\dim(P) = -1$ . Por lo tanto, un poliedro  $P$  es dimensionalmente completo, si y solo si tiene un punto interior.

### Ejemplo 0.3.

Suponga que  $P \subset \mathcal{R}^3$ , esta dado por las siguientes desigualdades lineales:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &\leq -1 \\ x_1 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ x_3 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

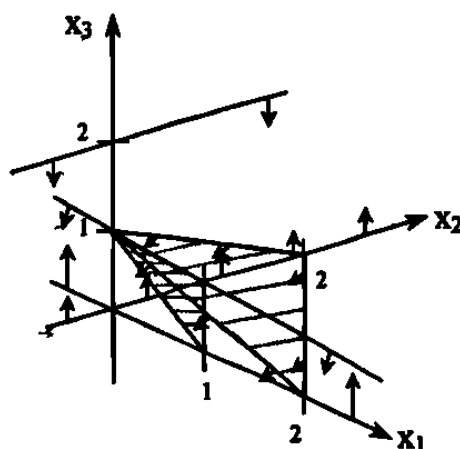


Figura 0.4. Representación de un Poliedro no dimensionalmente completo.

Los tres puntos  $(1 \ 0 \ 0)$ ,  $(0 \ 1 \ 0)$ ,  $(0 \ 0 \ 1)$ , se encuentran dentro de  $P$  y son afinmente independientes. Por lo tanto la  $\dim(P) \geq 2$ , porque todos los puntos de  $P$  satisfacen la igualdad  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , tenemos que el  $\text{rango}(A^=, b^=) \geq 1$ ; por lo tanto, ya que

$$\dim(P) + \text{rango}(A^=, b^=) = n,$$

tenemos que  $\dim(P) = 2$  (ver [6], p-87).

#### 0.2.2. El problema de programación lineal.

En esta sección introduciremos un problema de programación lineal estándar. La forma estándar de un programa lineal trabaja con un problema de minimización lineal con variables de decisión no negativas y restricciones funcionales de igualdad.

En general, un programa lineal es un problema de minimización o maximización a una función objetivo lineal con variables de decisión restringidas o no en presencia de restricciones en forma de ecuaciones y/o desigualdades lineales.

Existen ciertos mecanismos para la conversión de un problema de programación lineal general a su forma estándar (ver [5], p-4).

Un programa de programación lineal en forma estándar puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n & \rightarrow \text{Función Objetivo Lineal} \\
 \text{Sujeto a } \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} & \rightarrow \text{Restricciones Funcionales} \\
 x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 & \rightarrow \text{Restricciones de Signo}
 \end{array}$$

en el cual  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ , son variables de decisión no negativas a ser calculadas y  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son los coeficientes de costos asociados a las variables de decisión, de manera que la función objetivo  $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ , sea minimizada.

Además,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i,$$

denota la  $i$ -ésima restricción funcional para  $i=1, \dots, m$ , donde  $a_{ij}$ , para  $i=1, \dots, m$  y  $j=1, \dots, n$  son los coeficientes funcionales y  $b_i$ , para  $i=1, \dots, m$ , son los elementos de requerimientos (ver [5], p-3).

Solucionar un problema de programación lineal (en forma estándar) es encontrar un valor específico no negativo para cada una de las variables de decisión de tal manera que la función objetivo alcance su valor mínimo en cierta solución, mientras que todas las restricciones funcionales son satisfechas.

Si denotamos que:

Vector de las variables de decisión  $\rightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,

Vector de costo  $\rightarrow c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ ,

Vector de lado derecho  $\rightarrow b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  y

Matriz de restricciones funcionales  $\rightarrow A = \text{matriz}(a_{ij})$ ,

entonces el problema de programación lineal puede ser escrito en notación matricial como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } c^T x \\ &\text{sujeto a } Ax = b \\ &\quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Existen una serie de suposiciones necesarias para representar un problema de optimización como un problema de programación lineal (ver [5], p-3).

Además de la forma estándar, los problemas de programa lineal son comunmente representados en la forma canónica siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ &\text{sujeto a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \text{ para } i = 1, \dots, m \\ &\quad x_j \geq 0, \text{ para } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

El conjunto  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$  es el dominio factible o región de factibilidad del programa lineal. Cuando  $P$  es válido, el programa lineal es llamado consistente. Si un programa lineal consistente con una solución factible  $x^* \in P$ , tiene a  $c^T x^*$  como el valor mínimo de la función objetivo  $c^T x$  sobre el dominio factible  $P$ , entonces  $x^*$  es la solución óptima del programa lineal.

Se dice que un programa lineal posee un dominio factible acotado, si existe una constante  $\beta$  positiva tal que para toda solución factible  $x \in P$ , su norma euclidiana,  $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ , es menor o igual a  $\beta$ .

### 0.2.2.1. Semiespacios, hiperplanos y conjuntos poliédricos.

Un semiespacio es un conjunto convexo, por lo tanto la intersección de los semiespacios es también convexa.

Una entidad geométrica fundamental que se presenta en la optimización lineal es el hiperplano

$$H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid a^T x = \beta\},$$

cuya descripción involucra al vector  $a \in \mathcal{R}^n$  y al escalar  $\beta \in \mathcal{R}$ . Un hiperplano separa todo el espacio en dos semiespacios cerrados

$$H_L = \{x \in \mathcal{R}^n \mid a^T x \leq \beta\},$$

y

$$H_U = \{x \in \mathcal{R}^n \mid a^T x \geq \beta\},$$

que intersectan al hiperplano  $H$ . Eliminando al hiperplano  $H$  se obtienen dos semiespacios abiertos disjuntos:

$$H_L^i = \{x \in \mathcal{R}^n \mid a^T x < \beta\},$$

y

$$H_U^i = \{x \in \mathcal{R}^n \mid a^T x > \beta\}.$$

La definición de un vector  $a$  del hiperplano  $H$  es llamada la normal de  $H$  ya que para cualquier vector  $y, z \in H$ ,

$$a^T (y - z) = a^T y - a^T z = \beta - \beta = 0.$$

Sabemos que el vector  $a$  es ortogonal a todos los vectores que son paralelos al hiperplano  $H$ . Más aún, para cada vector  $z \in H$  y  $w \in H_L^i$ ,



$$a^T(w-z) = a^T w - a^T z < \beta - \beta = 0.$$

Esto muestra que el vector normal  $a$  genera un ángulo obtuso con cualquier vector  $w$  que se dirige a partir del hiperplano  $H$  hacia el interior de  $H_L$ . En otras palabras,  $a$  es dirigido hacia el exterior de  $H_L$ . La figura 0.5. muestra lo anterior geoméricamente.

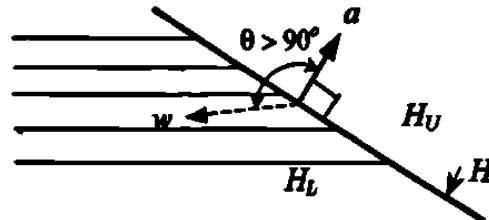


Figura 0.5. Vector normal de un hiperplano.

Nota: Este vector normal, puede definirse también como el vector gradiente de la función que representa el hiperplano. Es bien conocido que el vector gradiente es la dirección de máximo incremento de una función dada (ver [6], p-43).

Para un programa lineal en su forma estándar, los hiperplanos  $H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = \beta\}$ , para  $\beta \in \mathcal{R}$  representan el contorno de la función objetivo lineal y el vector costo  $c$  es la normal de sus hiperplanos contorno. Si denotamos  $a_i$  como el vector columna que representa la  $i$ -ésima fila de la matriz restricción  $A$  y  $\beta_i$  el  $i$ -ésimo elemento del vector de lado derecho  $b$ , tenemos  $m$  hiperplanos de la forma

$$H_i = \{x \in \mathcal{R}^n \mid a_i^T x = \beta_i\}, \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

y un dominio factible  $P$ , generado por la intersección de estos hiperplanos y el primer octante de  $\mathcal{R}^n$ .

Observe que cada hiperplano  $H$  es la intersección de dos semiespacios cerrados  $H_L$  y  $H_U$  y el primer octante de  $\mathcal{R}^n$  es la intersección de  $n$  semiespacios cerrados  $\{x \in \mathcal{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n\}$ . Por lo tanto el dominio factible  $P$  es un conjunto poliedral.

Una solución óptima del programa lineal puede ser fácilmente identificada si vemos como el hiperplano contorno formado por el vector costo  $c$  intersecta al poliedro formado por las restricciones. Para visualizar lo anterior, considere el siguiente problema de programación lineal.

#### Ejemplo 0.4.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && -x_1 - 2x_2 \\ &\text{Sujeto a} && x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ &&& 2x_1 + x_2 + x_4 = 60 \\ &&& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Pese a que tiene 4 variables, el dominio factible puede ser representado como una gráfica de dos dimensiones definido por, lo cual se muestra gráficamente en la figura 0.6.

$$x_1 + x_2 \leq 40, \quad 2x_1 + x_2 \leq 60, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

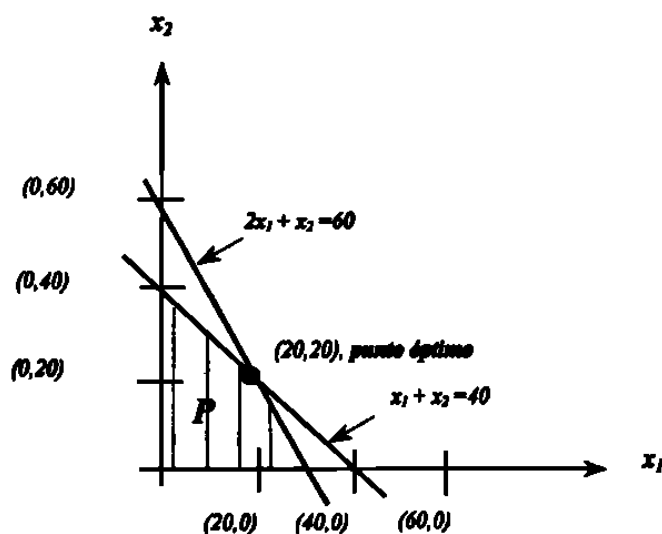


Figura 0.6. Representación gráfica de un problema de programación lineal.

De hecho, trabajaremos solo con polítopos convexos que se encuentren incluidos en el octante no negativo; en otras palabras, los semiespacios define un politopo que siempre será  $x_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, d$ .

### Ejemplo 0.5.

En la siguiente figura se muestra un politopo en tres dimensiones, definido como  $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq d, A \in \mathbb{R}^{7 \times 3}, d \in \mathbb{R}^7\}$ , el cual es generado por la intersección de los semiespacios indicados por las siguientes desigualdades  $Ax \leq d$ ,

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_3 \leq 3$$

$$3x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

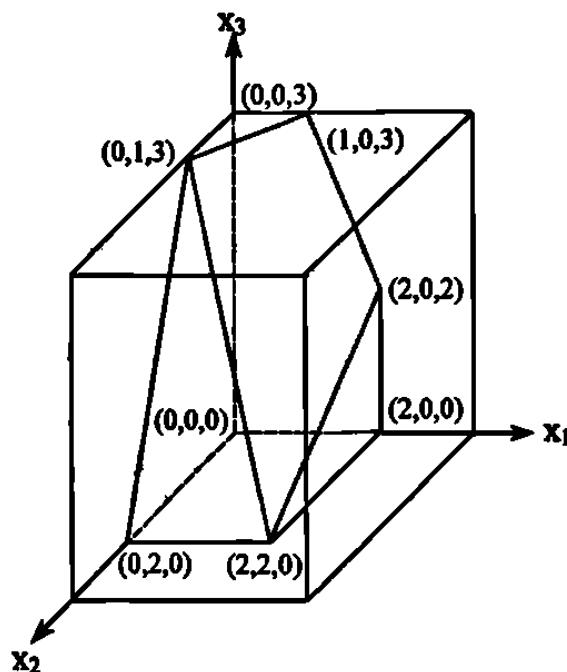


Figura 0.7. Politopo

#### 0.2.2.2. Caras de un poliedro.

Como es requerido,  $P$  es acotado porque resulta fácil mostrar que éste se encuentra totalmente contenido en el cubo definido por  $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 3$ . Ya que  $P$  es un politopo convexo de dimensión  $d=3$  y dado que  $HS$  es un semiespacio definido por el hiperplano  $H$ , si la intersección  $f = P \cap HS$  es un subconjunto de  $H$  (en otras palabras  $P$  y  $HS$  se tocan justamente en sus exteriores) entonces  $f$  es llamada cara de  $P$  y  $H$  se define como el hiperplano de soporte de  $f$ . Los tres tipos de caras (ver figura 0.8.) que posee un politopo son los siguientes:

- Una faceta es una cara de dimensión  $d-1$ ,
- Un vértice es una cara de dimensión cero (un punto),
- Una arista es una cara de dimensión uno (un segmento de línea).

### Ejemplo 0.6.

La siguiente figura muestra el politopo anterior con tres hiperplanos  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  los cuales definen tres caras: una faceta, una arista y un vértice respectivamente.

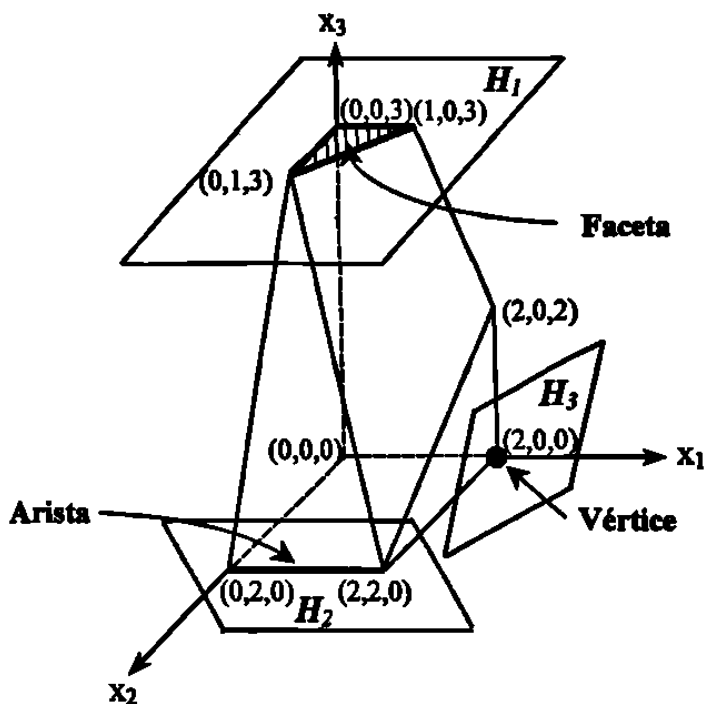


Figura 0.8. Caras de un poliedro

Un politopo puede ser definido ya sea como:

- la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos (cuando se conocen solamente los vértices del politopo), o bien
- como la intersección de muchos semiespacios, tan grande como el acotamiento de ésta (cuando un se considera un conjunto de desigualdades).

### 0.2.3. Definición de diámetro y ancho de un conjunto $K$ .

El diámetro de un conjunto  $K \subseteq \mathcal{R}^n$ , denotado por  $diam(K)$ , es la mayor distancia entre dos puntos de  $K$ , formalizando lo anterior,

$$diam(K) := \sup \{ \|x - y\| \mid \forall x, y \in K \}.$$

El **ancho** de un conjunto  $K \subseteq \mathcal{R}^n$ , es la mínima distancia entre dos hiper-planos con  $K$  entre ellos, esto es:

$$\text{ancho}(K) := \inf_{\substack{c \in \mathcal{R}^n \\ \|c\|=1}} \left\{ \sup \{c^T x \mid x \in K\} - \inf \{c^T x \mid x \in K\} \right\}.$$

Para cualquier  $K \subseteq \mathcal{R}^n$ , y cualquier número real positivo  $\varepsilon$ , el conjunto

$$S(y, \varepsilon) := \{x \in \mathcal{R}^n \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\}, \text{ para algún } y \in K,$$

es llamado **bola de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $y$** . Para  $y = \{a\}$  tomamos  $S(a, \varepsilon) = S(\{a\}, \varepsilon)$ , y llamamos  $S(a, \varepsilon)$  la **bola de radio  $\varepsilon$  con centro en  $a$** .  $S(0, 1)$  es la **bola unitaria alrededor de cero**.

La bola unitaria alrededor de cero con respecto a la norma máxima es el hipercubo  $\{x \in \mathcal{R}^n \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ . Para cualquier matriz definida positiva  $A$ , la bola unitaria alrededor de cero con respecto a la norma  $\| \cdot \|_A$  es el elipsoide  $\{x \in \mathcal{R}^n \mid x^T A^{-1} x \leq 1\}$ .

Dado un conjunto  $T \subseteq \mathcal{R}^n$  el cierre de este es denotado por  $c_l T$ , que corresponde al conjunto de todos los puntos que se encuentren cercanos a  $S$ . Particularmente  $x \in c_l T$  si para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $T \cap S(y, \varepsilon) \neq \emptyset$ , donde  $S(y, \varepsilon) = \{x : \|x - y\| \leq \varepsilon\}$ . Se dice que el conjunto es cerrado si  $S = c_l S$ .

Dado un conjunto  $T \subset \mathcal{R}^n$  es **acotado** si este puede ser contenido en una bola de radio finito.

A partir de las definiciones anteriores un conjunto  $T \subset \mathcal{R}^n$  es **compacto** si este es cerrado y acotado. Para toda secuencia  $\{x_k\}$  en un conjunto  $S$ , existe una subsecuencia convergente que considera como límite el conjunto  $S$ .

# CAPITULO 1

## ANTECEDENTES HISTORICOS DEL METODO ELIPSOIDAL Y PROBLEMAS SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS

A raíz del anuncio de Khachiyan [7] acerca de la existencia de un algoritmo polinomial para la programación lineal, surgieron innumerables publicaciones cuyo principal objetivo era desmentir el hecho de que este algoritmo pertenecía a Khachiyan y que poseía conexión con la programación convexa, en lugar de la lineal. En este capítulo se describirá brevemente el desarrollo del método, es decir, sus antecedentes hasta llegar a ser el AE que hoy conocemos. Nuestro interés es la aplicación del método para encontrar una solución factible a un conjunto de desigualdades lineales. Cabe mencionar que el método elipsoidal es utilizado tanto para la localización de un punto factible a un conjunto de desigualdades lineales dadas y para la solución de problemas de programación lineal formado por tal conjunto de desigualdades lineales y una función objetivo a maximizar (minimizar).

### 1.1. Métodos antecesores.

El método posee una fuerte relación con otros métodos, los cuales serán descritos brevemente con la finalidad de obtener la idea principal de su desempeño y apreciar los elementos que son tomados por el AE de cada uno de ellos (ver [8]).

Los métodos antecesores son los siguientes:

- El método de relajación para desigualdades lineales,
- Algoritmos de plano de corte,
- El método de subgradiente y dilatación del espacio y
- El método de secciones centrales.

### 1.1.1. El método de relajación para desigualdades lineales.

Algoritmos de relajación para desigualdades fueron introducidos por Agmon [9] y Motzkin y Schoenberg [10] para encontrar un vector  $x \in \mathcal{R}^n$  tal que satisfaga un sistema de desigualdades lineales dado de la siguiente forma,

$$Cx \leq d, \quad (1.1)$$

el cual consiste de  $m$  restricciones y  $n$  variables, es decir, la matriz  $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$  y  $d \in \mathcal{R}^m$ .

Ambos métodos proponen la generación de una secuencia  $\{x_k\}$  iterativa de puntos, donde, sí en la  $k+1$  iteración el vector  $x_k$  es factible, el algoritmo termina; de otro modo, alguna restricción estará siendo violada, digamos

$$c^T x \leq \gamma, \quad (1.2)$$

donde  $c \in \mathcal{R}^n$  es el vector correspondiente a los coeficientes de la desigualdad y  $\gamma \in \mathcal{R}$ . Una vez seleccionada una restricción incumplida ( $c^T x_k > \gamma$ ) se establece,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\lambda_k c (c^T x_k - \gamma)}{c^T c} \quad (1.3)$$

El método propuesto por Motzkin y Schoenberg, establece que el parámetro  $\lambda_k = 2$ , ( $\lambda_k$  es el antecedente del parámetro de paso  $\tau$  utilizado en el método elipsoidal) mientras que para el propuesto por Agmon dicho parámetro cumple  $0 < \lambda_k < 2$ . Para la selección de un valor  $\lambda_k = 1$ , el vector es el resultado de la proyección del vector  $x_k$  sobre el hiperplano  $\{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = \gamma\}$ . Este método con  $0 < \lambda_k < 2$ , corresponde al método de bola que será enunciado a continuación.

El método de bola inicia con una bola  $E_k$ , que se define como:

$$E_k = \{x \in \mathcal{R}^n \mid (x - x_k)^T B_k^{-1} (x - x_k) \leq 1\},$$

Esta bola posee una matriz  $B_k$ , múltiplo de la matriz identidad  $I$ . A partir de ésta se construye una bola siguiente  $E_{k+1} = S = \{x \in \mathcal{R}^n \mid (x - x_{k+1})^T I (x - x_{k+1}) \leq 1\}$ , que contiene al conjunto  $\{x \in E_k \mid a^T x \leq \beta\}$ , cuyo volumen es menor al de  $E_k$ .

La bola  $S$  posee su centro en  $x_{k+1}$ , obtenido mediante la formula (1.3) y que se encuentra sobre el segmento de línea abierto  $(x_k, x_k + 2(\hat{x}_k - x_k))$ , donde  $\hat{x}_k$  es la proyección de  $x_k$  sobre el hiperplano  $\{x \in \mathcal{R}^n \mid a^T x = \beta\}$ . Veamos lo anterior en la siguiente figura:

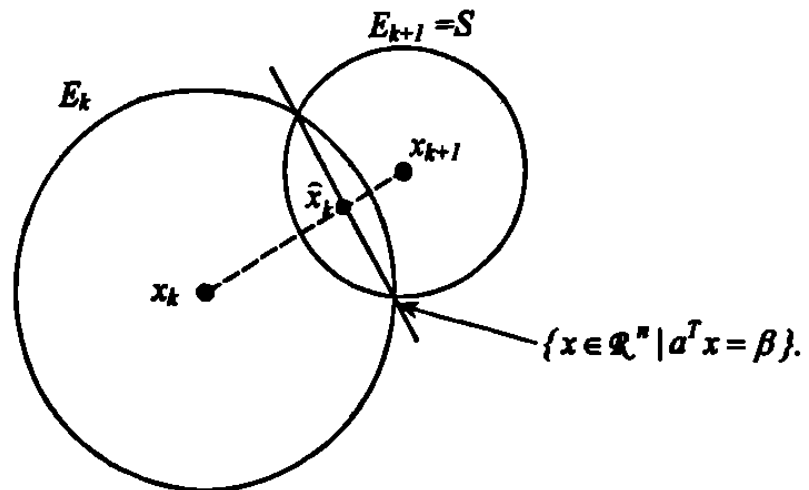


Figura 1.1. El método de bola

La bola  $S$  será la más pequeña posible, si  $x_{k+1}$  es  $\hat{x}_k$ .

No es necesario tener a priori una cota para la definición de una elipsoide inicial  $E_0$  para implementar el algoritmo. Sin embargo, éste puede ser útil para definir una secuencia de bolas  $\{E_k\}$  correspondiente a la secuencia  $\{x_k\}$ . Agmon mostró que si (1.1) es un sistema factible, y si se selecciona la restricción (1.2) mayormente incumplida en términos de la norma euclidiana, y si además  $\lambda_k$  es acotado más allá de 0 y 2, entonces



el método converge linealmente; asimismo mostró que en cada iteración el conjunto de soluciones factibles es reducido, bajo cierta tasa fija, en comparación con la iteración predecesora. Dicha tasa puede ser acotada tomando como base la razón de volúmenes existente entre las bolas  $E_{k+1}$  y  $E_k$ .

A diferencia del método elipsoidal ésta razón depende de los datos del problema más que de la dimensión.

### 1.1.2. Algoritmos de plano de corte.

La reducción de la región factible de un sistema de desigualdades lineales mediante planos de corte es bien conocida en la programación matemática. Por un lado Gomory, además de muchos otros, hizo uso de ello con la finalidad de descartar vértices no-enteros en la programación entera. Por otro lado, en la programación convexa, la idea básica es remplazar una función convexa, localmente, a través de uno de sus hiperplanos de separación. Mediante el uso de cortes con la dirección de la función objetivo, uno obtiene una secuencia de problemas con conjuntos factibles decrecientes así como de un valor de función objetivo creciente (ver [11], p-66)

### 1.1.3. El método de subgradiente y dilatación del espacio.

El método de subgradiente para minimizar una función convexa, no necesariamente diferenciable, es decir una función  $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ , aparentemente fue introducido por Shor [12].

El método posee la siguiente forma general:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\mu_k g_k}{\|g_k\|}, \quad (1.4)$$

donde  $g_k$  es un subgradiente de  $f$  en  $x_k$ .

Observe que si se desea resolver (1.1), podemos minimizar

$$f(x) = \max \{ \max_i (c_i^T x - \gamma_i), 0 \}; \quad (1.5)$$

entonces,  $c = c_i$  es un subgradiente de  $f$  en  $x_k$ , si  $c_i^T x \leq dr_i$ , es la restricción mayormente violada del sistema (1.1). Por lo tanto (1.4) incluye como caso especial una versión de (1.3) en la cual una restricción con máximo residuo es seleccionada. Polyak [13] y Shor [14] demuestran convergencia lineal para ciertas opciones de longitud de paso de  $\mu_k$ , bajo adecuadas condiciones sobre  $f$ . Sin embargo, la tasa de convergencia aún resulta demasiado dependiente de la función  $f$ .

Shor (ver [15] y [16]), fué el primero en darse cuenta que era posible obtener mejores resultados si se trabajaba en un espacio transformado. Esta es precisamente la idea que lleva del algoritmo de descenso acelerado (con convergencia lineal, la tasa depende de la función) al método Newton (con convergencia cuadrática para funciones suaves) y a algoritmos cuasi-Newton (con convergencia superlineal para funciones suaves). La iteración toma ahora la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_k &= \frac{J_k^T g_k}{\|J_k^T g_k\|}, \\ x_{k+1} &= x_k - \alpha_k J_k \tilde{g}_k, \\ J_{k+1} &= J_k (I - \beta_k \tilde{g}_k \tilde{g}_k^T),\end{aligned}\tag{1.6}$$

para ciertos parámetros  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  adecuados, tales que cumplan

$$\alpha_k \neq 0,\tag{1.7}$$

$$0 < \beta_k < 1.\tag{1.8}$$

Ambos parámetros  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son respectivamente los antecedentes de los parámetros de expansión  $\delta$  y dilatación  $\sigma$  del método elipsoidal

El término que  $\tilde{g}_k$  se interpreta como la distancia máxima (en términos de norma elipsoidal) que puede alcanzarse en la dirección del subgradiente  $g_k$ . El parámetro  $\alpha_k$  es un escalar de translación, pues  $\alpha_k J_k \tilde{g}_k$  es un vector de transformación de translación (ver [17], p-9) en la dirección del subgradiente  $g_k$  sujeto a las condiciones que imponga la matriz  $J_k$ .

Por otro lado la actualización de la matriz  $J_k$  corresponde precisamente a la dilatación del espacio en la dirección del subgradiente  $g_k$ , es decir,  $J_k$  debe ser una matriz no singular definida positiva (o la raíz cuadrada de cierta matriz  $B_k$ , tal que  $B_k = J_k^T J_k$ , (ver secc. 0.1.3).

La condición (1.8) es la condición característica de las matrices de transformación de dilatación (ver [3], p-496) . En el caso de la matriz  $J_{k+1}$  la matriz de dilatación es la resultante de

$$\beta_k g_k g_k^T, \quad (1.9)$$

en la dirección del subgradiente  $g_k$ .

Shor [16] describe la dificultad que existe con la tasa de convergencia lineal de su más reciente método de subgradiente publicado [14]. Su algoritmo modificado (1.6), cuando  $f$  satisface ciertas condiciones que permiten que los parámetros  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  sean estimados, proporciona una convergencia lineal cuya tasa depende de la función  $f$ , pero resulta invariante con respecto a transformaciones lineales. Cuando  $f$  es cuadrática y estrictamente convexa, los parámetros pueden ser seleccionados de manera que el método llegue a ser un método de gradientes conjugado [15]. Para la aplicación de este algoritmo, el valor mínimo de  $f$  debe ser conocido. Shor y Zhurbenko [18] realizan la dilatación del espacio en la dirección de la diferencia  $y_k = g_{k+1} - g_k$ , entre gradientes sucesivos; este método evoca aún más a los métodos de minimización cuasi-Newton (ver [19], p-343).

#### 1.1.4. El método de secciones centrales.

Un método más sobre el cual esta basado el AE es áquel desarrollado de manera independiente por Levin [20] y Newman [21], quienes agregaron al problema de minimización de una función convexa  $f$ , un poliedro acotado  $P_0 \subseteq \mathcal{R}^n$  como restricción

al problema de optimización. El método produce una secuencia iterativa  $\{x_k\}$  y politopos  $\{P_k\}$  mediante la selección de  $x_k$  como centro de gravedad de  $P_k$  y

$$P_{k+1} = \{x \in P_k \mid g_k^T x \leq g_k^T x_k\},$$

donde de nueva cuenta  $g_k$  es un subgradiente de  $f$  en el punto  $x_k$ . Ya que  $f$  es convexa,  $P_{k+1}$  contiene a todos los puntos de  $P_k$  cuyo valor de función objetivo no es mayor que el de  $x_k$ . En éste caso, el volumen de  $P_{k+1}$  es a lo mucho  $(1 - e^{-1})$  veces el de  $P_k$ . Sin embargo, calcular los centros de gravedad de politopos con muchas facetas en una gran dimensión espacial resulta ser una tarea en ocasiones imposible de realizar. Levin propuso algunas simplificaciones para  $n=2$ .

### 1.1.5. El método elipsoidal.

El método elipsoidal fue descrito, de manera un tanto enigmática, en un artículo de Iudin y Nemirovskii [22]. En ambas publicaciones [22, 23] plasman la problemática existente con respecto a la complejidad computacional de los problemas de programación convexa: dado un número limitado de llamados de función y/o subgradiente, con calculos indirectos ilimitados, ¿cómo se puede obtener un valor óptimo?. Para obtener una cota superior sobre tal desviación de la optimalidad, métodos específicos debieron ser propuestos en su momento. Iudin y Nemirovskii [22] utilizan una variante (el método de secciones centrales) del método de Levin and Newman; los pesados cálculos indirectos de los centros de gravedad no son contabilizados en su análisis. Para problemas con paralelepípedos como regiones factibles, este método utiliza solamente un factor más de iteraciones que un método óptimo para obtener una calidad de solución dada. En su segunda publicación, Iudin y Nemirovskii [23] discuten las dificultades computacionales del método de Levin y describen el método de secciones centrales modificado, utilizando elipsoides en lugar de poliedros.

Este método modificado es descrito para minimización de una función convexa  $f$  sujeta a un conjunto de restricciones convexas; sin embargo, para los problemas de

minimización de  $f$  sin restricciones en (1.5), éste se convierte en el método elipsoidal aplicado al problema de solución factible de un conjunto de restricciones. Este método modificado puede llegar a tomar tantas iteraciones, como las requeridas por el método sin modificación, para obtener una calidad de solución dada, pero resulta computacionalmente inimplementable. Iudin y Nemirovskii describen el método elipsoidal implícitamente, en términos de una secuencia  $\{O_k\}$  de sistemas de coordenadas. También puntualizaron el sorprendente hecho acerca del método elipsoidal, el de ser éste un caso especial del algoritmo de Sohr (1.6) con una dilatación del espacio en la dirección del subgradiente, cuando los parámetros  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son adecuadamente seleccionados. Sohr [24] proporciona el primer enunciado completamente explícito del método elipsoidal tal y como se conoce hoy en día.

Es de estos trabajos de donde el AE toma la idea del subgradiente para la actualización del nuevo centro y la idea de transformación del espacio para la actualización de la matriz que proporciona, en cada iteración, las modificaciones de la longitud de los ejes así como la dirección de estos, para generar una nueva elipsoide.

## 1.2. Problemas algorítmicos básicos para los conjuntos convexos y formulación de problemas.

Los conjuntos convexos y las funciones convexas son objetos típicos de estudio en diferentes áreas (ver [2], p-46), tales como: Programación Matemática, Análisis Convexo y áreas relativas. Algunas de las preguntas claves son las siguientes:

- Dado un punto  $y$  y un conjunto  $K$ , ¿es  $y$  un miembro de  $K$ , es decir, está  $y$  contenido en  $K$ ?
- Sí  $y$  no es miembro de  $K$ , ¿cómo encontrar un hiperplano separador de  $y$  y  $K$ ?
- Dada una desigualdad lineal, ¿es ésta válida para cada vector en  $K$ ?
- Dada una función lineal, ¿cómo encontrar un punto maximizador (minimizador) de la función en  $K$ ?
- Dada una función convexa, ¿cómo encontrar su mínimo?

Las preguntas anteriores son llamadas, respectivamente, problemas de:

- *Membresía,*
- *Separación,*
- *Validación,*
- *y Optimización* (para las dos últimas preguntas).

Los problemas de optimización han sido intensivamente estudiados en forma particular desde un punto de vista algorítmico, debido a su relevancia en las aplicaciones prácticas, pero la diferencia entre optimización y separación, membresía y validación, radica en que los resultados de optimización (teoremas o algoritmos) son el objetivo final (desde el punto de vista de la aplicación) mientras que los resultados de separación son utilizados como herramientas importantes para la derivación de tales resultados.

Los problemas que se definirán en breve son los objetos básicos de investigación del método elipsoidal. Una de las características principales e interesantes que puede observarse es la estrecha relación algorítmica que existe entre estos problemas, y cómo el AE aborda cada uno de ellos dentro de su aplicación.

### 1.2.1. Formulación de los problemas algorítmicos.

Sea  $K$  un conjunto convexo y compacto (ver secc. 0.2) en  $\mathcal{R}^n$ . Se pueden formular los siguientes problemas en relación a  $K$ .

#### 1.2.1.1 El problema de optimización fuerte (SOPT)

Sea  $c \in \mathcal{R}^n$ ; encuentre un vector  $y \in K$  tal que  $c^T y = \max\{c^T x \mid x \in K\}$ , o bien determine que  $K$  es vacío (si tal valor  $y$  no es encontrado).

#### 1.2.1.2 El problema de violación fuerte (SVIOL)

Sea  $c \in \mathcal{R}^n$  y un número  $\gamma \in \mathcal{R}$ ; determine si  $c^T x \leq \gamma$  se satisface para cada  $x \in K$ , y si no, encuentre un vector  $y \in \mathcal{R}^n$  tal que  $c^T y > \gamma$ .

Podemos observar que si  $c = 0$  y  $\gamma = -1$ , el problema de violación fuerte se reduce al problema de revisar si  $K$  es vacío y si no lo es, encontrar un punto en  $K$ . A este problema se le llama problema fuerte de no vacuidad (SNEMPT).

### 1.2.1.3 El problema de validez fuerte (SVAL)

Sea  $c \in \mathcal{R}^n$  y un número  $\gamma \in \mathcal{R}$ ; determine si  $c^T x \leq \gamma$  se satisface para todo  $x \in K$

### 1.2.1.4 El problema de separación fuerte (SSEP)

Sea  $y \in \mathcal{R}^n$ ; determine si  $y \in K$ , y si no, encuentre un hiperplano que separe  $y$  de  $K$ ; en forma más precisa, encuentre  $c \in \mathcal{R}^n$  tal que  $c^T y > \max\{c^T x \mid x \in K\}$ .

### 1.2.1.5 El problema de membresía fuerte (SMEM)

Sea  $y \in \mathcal{R}^n$ ; decida si  $y \in K$ .

Podemos observar que si podemos resolver el problema 1.2.1.1. también podemos resolver el 1.2.1.2. De manera similar si el problema 1.2.1.2. es resuelto podremos resolver el 1.2.1.3. Igualmente el problema 1.2.1.5 puede ser resuelto si 1.2.1.4 lo es.

La figura 1.2 muestra gráficamente la relación trivial entre SOPT, SVIOL, SVAL, SSEP y SMEM.

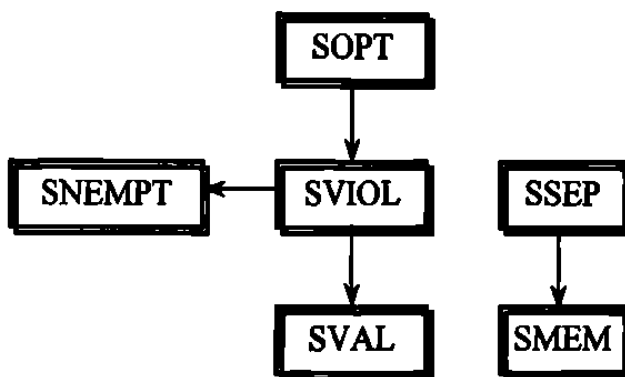


Figura 1.2. Relación trivial entre SOPT, SVIOL, SVAL, SSEP y SMEM

La formulación de estos problemas produce de manera inmediata una serie de preguntas. Por ejemplo:

- ¿Es necesario proporcionar una solución exacta a los problemas 1.2.1.1.,...,1.2.1.5. demasiado restrictiva?
- Las suposiciones acerca de que  $K$  debe ser convexo y compacto, ¿son demasiado generales o demasiado fuertes?
- Algorítmicamente, ¿estos problemas son del todo resueltos?
- ¿Existen otras relaciones entre SOPT,..., SMEM diferentes a las mostradas en la figura 1.2?

### 1.2.2. Ejemplos típicos

En esta sección mencionaremos brevemente algunos ejemplos típicos relacionados con los problemas mencionados en la sección anterior (ver [2], p-49).

#### Ejemplo 1.

Dado que  $K \subseteq \mathcal{R}^n$  es un poliedro definido por un sistema de desigualdades  $a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m$ , para cualquier vector  $y \in \mathcal{R}^n$ , los problemas separación 1.2.1.4. y membresía 1.2.1.5. son resueltos de manera trivial, simplemente se sustituye  $y$  por  $x$  en las desigualdades. Si  $y$  satisface todas y cada una de ellas, entonces  $y$  es un miembro de  $K$ , de otro modo no lo es y cualquier desigualdad violada, produce un hiperplano de separación. El problema de fuerte optimización 1.2.1.1. para  $K$  es un programa lineal. Los programas lineales pueden ser resueltos a través de varios algoritmos, pero no son tan sencillos como los problemas de separación mencionados inicialmente.

#### Ejemplo 2.

Dado que  $K \subseteq \mathcal{R}^n$  es un politopo definido como la envolvente convexa de un conjunto finito de vectores, es decir,  $K = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_k\})$ . Aquí el problema de fuerte



optimización 1.2.1.1 (y de manera similar los problemas 1.2.1.2. y 1.2.1.3.) para  $K$  puede ser resuelto fácilmente mediante la evaluación de la función  $c^T x$  para todos los puntos  $v_i$  y seleccionando aquel para el cual el valor  $c^T v_i$  sea el mayor posible. Para resolver el problema de membresía fuerte 1.2.1.5. dado un vector  $y \in \mathcal{R}^n$ , debemos revisar si  $y$  es una combinación convexa del vector  $v_i$  o no. Por lo tanto para este problema es necesario decidir si un sistema de ecuaciones y desigualdades lineales tiene una solución factible. Para resolver el problema de separación fuerte 1.2.1.4. se requiere, además, encontrar un vector  $c \in \mathcal{R}^n$ , con la propiedad  $c^T y > c^T v_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), si el sistema no tiene solución.

### Ejemplo 3.

Dado que  $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  es una función convexa y  $G_f := \{(x^T, t)^T \in \mathcal{R}^{n+1} \mid f(x) \leq t\}$  es el "epigrafo" de  $f$ . Si  $f(x)$  puede ser calculada, entonces el problema de membresía 1.2.1.5. para  $G_f$  se resuelve de manera trivial; si además un subgradiente  $f$  en  $x$  puede ser calculado, entonces el problema de separación 1.2.1.4. para  $G_f$  puede ser resuelto fácilmente. Sea  $(y^T, s)^T \in G_f$ . Entonces por definición,  $\pi \in \mathcal{R}^n$  es un subgradiente de  $f$  en  $y$  si  $f(x) \geq f(y) + \pi^T(x - y)$ , para todo  $x \in \mathcal{R}^n$ . Así que  $c := (\pi^T, -1)^T \in \mathcal{R}^{n+1}$  satisface

$$(y^T, s)c = \pi^T y - s > \pi^T y - f(y) \geq \pi^T x - f(x) \geq (x^T, t)c$$

para todo  $(x^T, t)^T \in G_f$ . Así que  $c$  produce un hiperplano de separación.

### Ejemplo 4.

En la geometría clásica, los conjuntos convexos  $K$  a menudo son descritos en términos de la función de soporte.

Para todo vector  $v \in \mathcal{R}^n$ , con  $\|v\| = 1$ , considerar al hiperplano de soporte  $H$  de  $K$  con su vector normal exterior  $v$  y  $\rho(v)$  como la definición de la distancia con signo que existe entre el cero y el hiperplano  $H$  medido a partir de cero, sucede que

$$\rho(v) := \max\{v^T x \mid x \in K\}, H = \{x \mid v^T x = \rho(v)\}, H \cap K \neq \emptyset, \text{ y } \{x \mid v^T x > \rho(v)\} \cap K = \emptyset,$$

Si la función  $\rho$  esta dada, entonces el problema de validación (1.2.1.3) se resuelve trivialmente, ya que  $c^T x \leq c_0$ , es válido si y solo si  $\rho(c/\|c\|) \leq c_0/\|c\|$  (si  $c \neq 0$ ; el caso  $c=0$  es resuelto trivialmente, así como  $K \neq \emptyset$ ).

La dificultad de cada uno de los problemas anteriores depende de la descripción del conjunto  $K$ .

### 1.3. Definición de cuerpo convexo.

Un conjunto convexo  $K$  es llamado circunscrito si la siguiente información acerca de  $K$  esta dada explícitamente:

(a) El entero  $n = n(K)$  tal que  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,

(b) Un número racional positivo  $R = R(K)$ , tal que  $K \subseteq S(0, R)$ .

así que un conjunto convexo circunscrito es un triple  $(K; n, R)$ .

Un conjunto convexo  $(K; n, R)$ , es llamado bien-acotado o bien delimitado, si además se otorga la siguiente información:

(c) Un número racional positivo  $r = r(K)$ , donde  $r$  corresponde al radio de una bola contenida en  $K$  (no es necesario conocer el centro de dicha bola).

Por lo tanto un conjunto convexo bien acotado  $(K; n, R, r)$  es llamado  $a_0$ -centrado (o solamente centrado), si adicionalmente se tiene la siguiente información:

(d) Un vector  $a_0 = a_0(K) \in \mathbb{Q}^n$  tal que  $S(a_0, r) \subseteq K$ .

Entonces se tiene que un conjunto convexo  $a_0$ -centrado es un quintuple  $(K; n, R, r, a_0)$ , con todas las propiedades anteriores.

Un conjunto convexo centrado siempre es bien-acotado, y un conjunto convexo bien acotado es siempre circunscrito. La mayoría de los conjuntos convexos que se utilizan en las aplicaciones son compactos y dimensionalmente completo (ver secc. 0.2.1.2). A los conjuntos convexos con estas dos propiedades se les llaman **Cuerpos Convexos** (ver [2], p-53).

Al restringir el interés a conjuntos convexos (básico para nuestro método) definidos con las propiedades enunciadas en la definición anterior, podríamos enunciar lo siguiente:

- El requerimiento del inciso (a), simplemente establece que debemos conocer el número de variables involucradas.
- El radio exterior  $R$ , nos dice en que porción del espacio  $\mathcal{R}^n$  se localiza  $K$ . Esto nos da una burda estimación acerca del espacio en el cual tendremos que realizar nuestra búsqueda de  $K$ .
- El requerimiento del inciso (b), regula el tratamiento de conjuntos no acotados, es decir, solo trabajar con conjuntos acotados.
- De manera similar, el requerimiento del inciso (c) es una condición explícita con respecto a la dimensionalidad completa.
- En algunas aplicaciones, los requerimientos de los incisos (a), (b) y (c) para un conjunto convexo son suficientes para calcular un punto interior en un tiempo polinomial. Esto sin embargo no siempre sucede, por lo cual necesitaremos el conocimiento a priori acerca de algún punto interior  $a_0(K)$  con las propiedades descritas en la definición de la sección 1.3.

# CAPITULO 2

## FUNDAMENTOS IDEOLOGICOS Y GEOMETRICOS DEL ALGORITMO ELIPSOIDAL

### 2.1. Introducción.

En 1979 una nota de L. G. Khachiyan [7] indicó como un algoritmo, el llamado **método elipsoidal**, ideado originalmente para la optimización no diferenciable no lineal, pudo ser modificado para revisar la factibilidad de un sistema de desigualdades lineales en tiempo polinomial (ver ANEXO ii, a.). Este resultado causó gran entusiasmo en el mundo de la programación matemática puesto que implica la solubilidad en tiempo polinomial de los problemas de programación lineal. Algunas de las causas de tal entusiasmo fueron las siguientes:

- ✓ Primero, el hecho de que muchos investigadores, alrededor de todo el mundo ya habían trabajado en la búsqueda de un algoritmo de tiempo polinomial para programación lineal; esto resolvía uno de los más importantes problemas en el área.
- ✓ Segundo, se pensaba que  $\mathcal{P} = \mathcal{N}\mathcal{P} \cap \text{co-}\mathcal{N}\mathcal{P}$  (ver ANEXO ii, a.) y que el problema de programación lineal era precisamente uno de los pocos

problemas pertenecientes a  $\mathcal{P} \cap \text{co-}\mathcal{P}$  pero no había sido demostrado que perteneciera a  $\mathcal{P}$ . Por lo tanto, se obtenía una corrección a esta conjetura.

- ✓ Tercero, el método elipsoidal junto con cierto número adicional, teóricamente “truco”, resulto ser un método bastante diferente a todos los algoritmos para programación lineal considerados hasta el momento.
- ✓ Cuarto, el método elipsoidal, pese a su “eficiencia teórica”, no ha probado el ser “prácticamente eficiente”, por lo que fueron puestas a discusión controversias en teoría de complejidad computacional (ver ANEXO ii, a.) con respecto al comportamiento polinomial del algoritmo, además del cómo medir la longitud de codificación de los problemas y los tiempos de corrida.

Para la mayoría de las versiones conocidas del método simplex, existen algunos ejemplos (artificiales) para los cuales el algoritmo tiene un tiempo de corrida exponencial. Los primeros ejemplos de este tipo fueron descubiertos por Klee y Minty [25].

El método elipsoidal en promedio ha resultado ser mucho más lento que el método simplex en cuanto cálculos prácticos. De hecho, existen casos para los cuales el tiempo de ejecución esperado de una versión del método simplex es polinomial y mucho mejor que el tiempo de ejecución del método elipsoidal.

Aunque el método elipsoidal no parece haber sido un descubrimiento en la programación lineal aplicada, resulta de gran valor en la optimización no lineal. La optimización no lineal es una de las raíces del método elipsoidal. El método se desarrolló fácilmente en la optimización no diferencial convexa (métodos tales como: *relajación, subgradiente, dilatación del espacio, de secciones centrales y algoritmos de plano de corte* (ver secc. 1.1), así como en los estudios sobre complejidad computacional de los problemas de programación convexa.

La historia del método elipsoidal y sus antecedentes han sido cubierta extensamente por Bland [8] and Schrader [26], los cuales se basaron en trabajos previos de Shor [15, 16], quien describió un nuevo algoritmo de proyección de subgradiente con dilatación del espacio para programación convexa no diferenciable. Iudin y Nemirovskii [22, 23] observaron que el algoritmo de Shor otorgaba una respuesta al problema discutido por Levin [20] proporcionando un esbozo del método elipsoidal. El primer enunciado del método elipsoidal, tal como se le conoce hoy en día, se le adjudica a Shor [24].

En el lenguaje de la programación no lineal, el método elipsoidal puede ser visto como un algoritmo de corrección de rango uno (ver [27]. P-45) y como uno, muy lejano, análogo al método de métrica variable cuasi-Newton (ver [28]) para tales interpretaciones del método elipsoidal. Este método fue adaptado por Khachiyan [7] para establecer la solubilidad en tiempo polinomial de los problemas de programación lineal.

La aplicabilidad del método elipsoidal a la optimización combinatoria (ver ANEXO ii, b.) fue descubierta de manera independiente por Karp y Papadimitriou [29], Padberg y Rao [30] y Grötschel, Lovász y Schrijver [2].

La intención no es pensar que el método elipsoidal llegue a ser un verdadero competidor para el método simplex desde el punto de vista práctico; sin embargo, el gran fundamento teórico del método elipsoidal, lo hace ser una elegante y atractiva herramienta para probar tiempo de solubilidad polinomial de muchos problemas de optimización geométrica y combinatoria (ver ANEXO ii, b.)

## 2.2 . ¿Cómo se puede capturar un león en el Sahara?

Es bastante simple la idea bajo la cual trabaja el AE para resolver el problema de factibilidad de un conjunto dado de desigualdades lineales, el cual se puede ser enunciado de la siguiente manera:

*“Determinar si un conjunto de desigualdades lineales dado es vacío o no; y si este es no- vacío, encontrar una solución factible a dicho conjunto de desigualdades”.*

o propiamente dicho,

Para un poliedro  $P = \{x \in \mathcal{R}^n \mid Cx \leq d\}$ , donde  $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$  y  $d \in \mathcal{R}^m$ , establecer si  $P = \emptyset$ ; si no, encontrar un  $x \in P$ .

La técnica “Capturar un león en el Sahara”, puede ser aplicada para resolver este problema. Su funcionamiento es el siguiente:

1. Cercar el Sahara,
2. División del Sahara en dos partes y cercar la parte en la cual se encuentra el león,
3. Repetimos el proceso de dividir la parte de interés y cercar la sección en la cual se encuentre el león para que,
4. en un número finito de pasos la cerca sea tan pequeña que el león ya se encuentre atrapado por el cercado anterior o para darnos cuenta que la zona es ya tan pequeña que no podrá contener al león; es decir, no existe león alguno.

Basta con revisar esta técnica para captar su fundamento ideológico, pero antes de distinguir cómo se aplican cada una de estas ideas en el método elipsoidal, es necesario conocer los siguientes fundamentos geométricos del método, así como sus elementos básicos.

### 2.3. Fundamentos geométricos.

El propósito de esta sección es explicar la idea geométrica que existe detrás del método del elipsoide y para ello iniciaremos resumiendo hechos geométricos bien conocidos sobre elipsoides.

Posteriormente en el capítulo 3 se mencionarán los elementos básicos y el algoritmo del método elipsoidal aplicado al problema de la factibilidad de un conjunto de desigualdades lineales dado.

### 2.3.1. Definición de elipsoide.

Un conjunto  $E \subseteq \mathcal{R}^n$  es un elipsoide si existe un vector  $a \in \mathcal{R}^n$  y una matriz definida positiva  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , tal que:

$$E = E(A, a) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid (x - a)^T A^{-1} (x - a) \leq 1\}. \quad (2.1)$$

Utilizando la norma elipsoidal  $\| \cdot \|_A$  podemos escribir equivalentemente:

$$E = E(A, a) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid \|x - a\|_A \leq 1\}. \quad (2.2)$$

Es decir, el elipsoide  $E(A, a)$  es la bola de radio unitario alrededor de  $a$  en el espacio vectorial  $\mathcal{R}^n$  inducida por la norma  $\| \cdot \|_A$ .

Como podemos ver el elipsoide  $E$  define únicamente a la matriz  $A$  y al vector  $a$ , donde a éste último se le conoce como el centro del  $E$ , por lo tanto se dice que  $E(A, a)$  es el elipsoide asociado a la matriz  $A$  y al vector  $a$ .

### 2.3.2. Relación entre las propiedades geométricas del elipsoide $E(A, a)$ y las propiedades algebraicas de la matriz $A$ .

Existen conexiones interesantes entre las propiedades geométricas del elipsoide  $E(A, a)$  y las propiedades algebraicas de la matriz  $A$ , las cuáles serán enfatizadas a continuación.



Para toda matriz definida positiva  $A$ , todos sus autovalores son positivos y reales (ver secc. 0.1.3.). Si representamos al autovalor mayor y el menor de  $A$  como  $\Lambda$  y  $\lambda$  respectivamente, tenemos que:

- El diámetro del  $E$ , o longitud de su eje mayor, es igual a  $2\sqrt{\Lambda}$ .
- La dirección del eje mayor del  $E$  corresponde al autovector de  $A$ .
- El ancho del  $E$ , o longitud del eje menor, es igual a  $2\sqrt{\lambda}$ .

lo anterior produce lo siguiente:

- La bola máxima contenida en  $E(A,a)$  se define como  $S(a,\sqrt{\lambda})$ .
- La bola mínima contenedora de  $E(A,a)$  se define como  $S(a,\sqrt{\Lambda})$ .

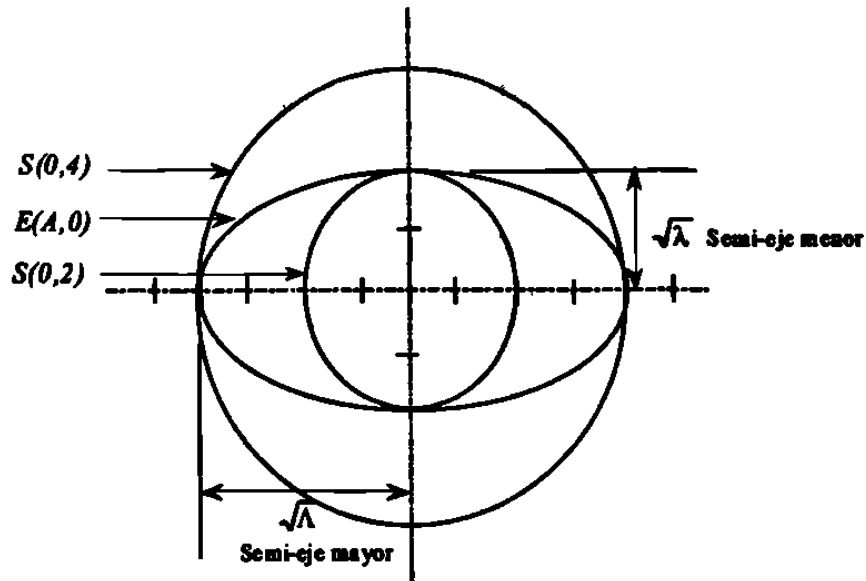
De hecho, este es el contenido geométrico de la desigualdad,

$$\sqrt{\lambda}\|x\| \leq \|x\|_{A^{-1}} \leq \sqrt{\Lambda}\|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

De manera más explícita, los ejes de simetría del elipsoide  $E(A,a)$  corresponden a los autovectores de la matriz  $A$ . Para visualizar mejor estas relaciones veamos el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 2.1.

Dado un elipsoide  $E(A,0) \subseteq \mathbb{R}^n$ , donde  $A = \text{diag}((16,4)^T)$ . Los autovalores de  $A$  son  $\Lambda = 16$  y  $\lambda = 4$ , con sus autovectores correspondientes  $e_1 = (1,0)^T$  y  $e_2 = (0,1)^T$ . Por lo tanto el diámetro de  $E(A,0)$ , es  $2\sqrt{\Lambda} = 8$  mientras que el ancho es  $2\sqrt{\lambda} = 4$ . Además podemos observar en la figura 2.1, que para este ejemplo la bola máxima contenida en  $E(A,0)$ , es definida como  $S(0,2)$ , mientras que la bola mínima contenedora de  $E(A,0)$ , se define como  $S(0,4)$ .



**Figura 2.1. Bola máxima y mínima  
contenedora de y contenida en  $E(A,a)$**

### 2.3.3. Todo elipsoide es la imagen de una bola unitaria.

El hecho de que todo elipsoide  $E(A,0)$  sea la imagen de la bola unitaria  $S(0,1)$  alrededor del origen, se debe a que para toda matriz definida positiva  $A$  existe una única matriz definida positiva denotada por  $A^{1/2}$ , tal que  $A = A^{1/2} A^{1/2}$ .

Lo anterior permite, bajo simples cálculos, determinar que:

$$E(A,a) = A^{1/2} S(0,1) + a. \quad (2.4)$$

lo cual se obtiene si denotamos por  $\hat{x} \in \mathcal{R}^n$  a todo punto  $x \in S(0,1)$ ; es decir:

$$S(0,1) = \{\hat{x} \in \mathcal{R}^n \mid \hat{x}^T \hat{x} \leq 1\}.$$

Por otro lado denotamos simplemente por  $x \in \mathcal{R}^n$  a todo punto  $x \in E(A,a)$  donde  $A$  es una matriz definida positiva.

Entonces a partir de lo anterior, tenemos que:

$$E(A, a) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid (x - a)^T A^{-1} (x - a) \leq 1\}.$$

Observamos que  $(x - a)^T A^{-1} (x - a) \leq 1$ , puede expresarse como

$$(x - a)^T A^{-1/2} A^{-1/2} (x - a) \leq 1,$$

que es equivalente a

$$(A^{-1/2} (x - a))^T (A^{-1/2} (x - a)) \leq 1.$$

y finalmente:

$$E(A, a) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid (A^{-1/2} (x - a))^T (A^{-1/2} (x - a)) \leq 1\}.$$

Ahora, si se define  $\hat{x} = A^{-1/2} (x - a)$ , entonces los puntos  $x \in E(A, a)$  en términos de  $\hat{x} \in S(0, 1)$  se definen como

$$x = A^{1/2} \hat{x} + a.$$

Con lo anterior podemos establecer que todo  $x \in \mathcal{R}^n$  en el elipsoide  $E(A, a)$  es el resultado del mapeo de los puntos correspondientes a la esfera  $\hat{x} \in S(0, 1)$ , bajo una transformación biyectiva afín. Se dice transformación biyectiva afín porque se aplica una matriz de transformación de rotación y expansión  $A^{1/2}$  sobre los ejes de la bola unitaria (que da como resultado la dirección y magnitud de los semi-ejes del elipsoide  $E(A, a)$ ), así como un vector  $a$  que traslada la posición de la bola unitaria a partir del origen.

Podemos concluir que si se aplican simultáneamente una matriz de transformación (ver [3], p-500)  $A^{1/2}$  y un vector  $a$  de translación a la bola unitaria  $S(0, 1)$ , obtenemos el elipsoide  $E(A, a)$ .

$$E(A, a) = A^{1/2} S(0, 1) + a. \quad (2.5)$$

Lo anterior confirma el hecho de que todo elipsoide es la imagen de una bola unitaria bajo una transformación biyectiva (doble) afín.

### 2.3.4. Volumen de una elipsoide.

Otra característica geométrica que podemos obtener a partir de la matriz  $A$  es el volumen del elipsoide  $E(A, a)$  denotado por  $\text{vol}(E)$ , el cual solo depende del determinante de tal matriz y de la dimensión  $n$  del espacio. El volumen de una elipsoide se define como:

$$\text{vol}(E(A, a)) = \sqrt{\det A} \cdot V_n \quad (2.6)$$

donde  $V_n$  es el volumen de la bola unitaria  $S(0, 1)$  en  $\mathcal{R}^n$ , para el cual se sabe que:

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left( \frac{2e\pi}{n} \right)^{n/2}.$$

Sea:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \text{para } x > 0,$$

donde la función gama:

$$\Gamma(n) := (n-1)!, \text{ para toda } n \in \mathcal{N}.$$

### 2.3.5. Razón de volúmenes entre dos elipsoides.

Sí  $x \rightarrow A^{-1/2}\hat{x} + a$  es la transformación biyectiva afin  $T$  entonces,

$$\text{vol}(T(E(A, a))) = \det A^{-1/2} \sqrt{\det A} \cdot V_n$$

esto en particular muestra que:

$$\frac{\text{vol}(E(A, a))}{\text{vol}(E(B, b))} = \frac{\text{vol}(T(E(A, a)))}{\text{vol}(T(E(B, b)))},$$

es decir, la razón de volúmenes de dos elipsoides es invariante bajo la transformación biyectiva afin.

# CAPITULO 3

## ELEMENTOS BASICOS Y EL ALGORITMO DEL METODO ELIPSOIDAL

Este capítulo proporciona inicialmente, una descripción detallada de los elementos básicos bajo los cuales trabaja el método elipsoidal para posteriormente describir los elementos que forman el algoritmo en sí. La información contenida en los capítulos 2 y 3 es de suma importancia para el mejor entendimiento de los capítulos 4 y 5 posteriores.

### 3.1. Elementos básicos del método elipsoidal.

Hasta ahora se han mencionado algunos hechos bien conocidos sobre los elipsoides, conceptos que se encuentran implícitos en el AE. Ahora, son descritos los elementos del método antes de definir el algoritmo explícitamente.

#### 3.1.1. Generación de un $1/2E(A,a)$ o $E'(A,a,c)$ .

Dado un elipsoide  $E(A,a)$  y un vector  $c \in \mathcal{R}^n \setminus \{0\}$ . La intersección del elipsoide  $E(A,a)$  y el semiespacio  $\{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x \leq c^T a\}$  se define como un medio elipsoide  $E'(A,a,c)$ ; esto es

$$1/2E(A,a) = E'(A,a,c) = E(A,a) \cap \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x \leq c^T a\}. \quad (3.1)$$

Por lo tanto,  $E'(A,a,c)$  es obtenido a partir de un corte central de  $E(A,a)$  utilizando el hiperplano  $H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = c^T a\}$  que pasa exactamente por el centro  $a$  del elipsoide.

### Ejemplo 3.1.

Sea  $E(A,a)$  el elipsoide denotado por  $A = \text{diag}((16,4)^T)$  y  $a = (0, 0)^T$  y considere el vector  $c = (-1, 0)^T$ . La figura 3.1. muestra a el  $E'(A,a,c)$  (región sombreada de acuerdo a la definición (3.1)), formado a partir de los datos anteriores.

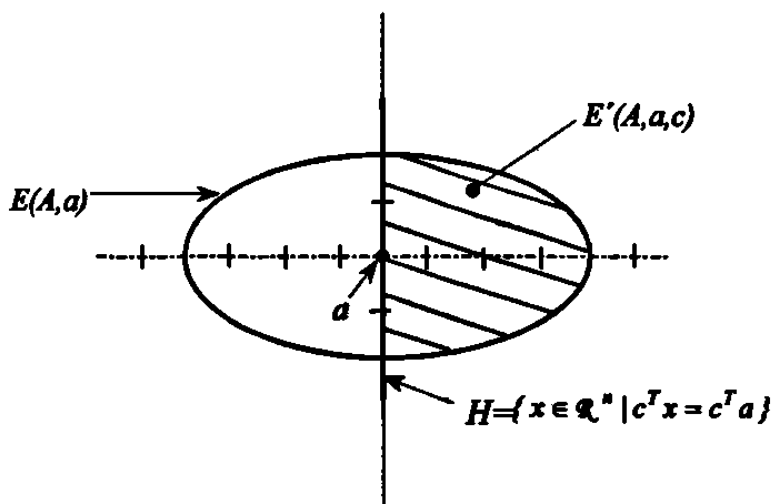


Figura 3.1. Generación de un  $1/2E(A,a)$

### 3.1.2. Optimización de funciones objetivo lineales sobre elipsoides.

Sea  $x \in \mathcal{R}^n$ , dada una función lineal  $c^T x$  y un elipsoide  $E(A,a)$  encontrar:

$$z_{\max} = c^T x_{\max}^* = \max\{c^T x \mid x \in E(A,a)\}. \quad (3.2)$$

donde  $E(A,a) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$ .

El problema anterior puede ser resuelto si se transforma el problema actual con una sola restricción, a uno equivalente sin restricción; lo anterior puede lograrse al establecer la función Lagrangeana (ver [19], p-167) correspondiente.

Para facilitar los cálculos denotamos  $A^{-1} = Q^2$ . Como la restricción es de desigualdad, se considera para la transformación al problema equivalente que se desea generar, un solo multiplicador Lagrangeano  $\lambda \in \mathcal{R}$ ,  $\lambda \geq 0$ , pues se aplicará una penalización siempre que el vector  $x \in \mathcal{R}^n$  incumpla la restricción establecida por la elipsoide  $E(A, a)$ , es decir, siempre que ocurra  $(x - a)^T A^{-1} (x - a) > 1$ .

A partir de lo anterior, la función Lagrangeana de este problema se define como:

$$L(x, \lambda) = c^T x - \lambda((x - a)^T Q^2 (x - a) - 1), \quad (3.3)$$

y su solución como:

$$z_{\max} = \max\{c^T x \mid x \in E(A, a)\}, \text{ o bien, } z_{\max} = \max_x \min_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda). \quad (3.4)$$

Para resolver lo anterior es necesario considerar y satisfacer las condiciones de optimalidad (1) y (2). A partir de lo anterior cualquier solución  $\lambda$  y  $x$  satisface la condición complementaria (3). Estas condiciones se presentan a continuación:

$$(1) \quad \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = 0 \rightarrow c - 2\lambda Q^2 (x - a) = 0 \quad \text{Ec.1}$$

$$(2) \quad \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow -(x - a)^T Q^2 (x - a) + 1 = 0 \quad \text{Ec.2}$$

$$(3) \quad \lambda((x - a)^T Q^2 (x - a) - 1) = 0 \quad \text{Ec.3}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones generado, obtenemos de (1) la expresión

$$(x - a) = \frac{Q^{-2}c}{2\lambda}, \text{ y sustituimos en (2)}$$

$$\left[ \frac{Q^{-2}c}{2\lambda} \right]^T Q^2 \left[ \frac{Q^{-2}c}{2\lambda} \right] = 1,$$

$$\frac{c^T Q^{-2} Q^2 Q^{-2} c}{4\lambda^2} = 1,$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{c^T Q^{-2} c}}{2}.$$

Por lo tanto, sustituyendo  $\lambda$  en la expresión obtenida para  $(x - a)$ , tenemos que

$$(x-a) = \frac{Q^{-2}c}{\sqrt{c^T Q^{-2}c}}$$

y finalmente la solución es:

$$x_{max}^* = a + \frac{Q^{-2}c}{\sqrt{c^T Q^{-2}c}}, \text{ o su equivalente, } x_{max}^* = a + \frac{Q^{-2}c}{\|Q^{-1}c\|_2}. \quad (3.5)$$

Transformando  $Q^2 = A^{-1}$ , para volver a nuestro problema original:

$$x_{max}^* = a + \frac{Ac}{\sqrt{c^T Ac}}, \text{ o bien, } x_{max}^* = a + \frac{Ac}{\|A^{1/2}c\|}. \quad (3.6)$$

El problema

$$z_{min} = c^T x_{min}^* = \min\{c^T x \mid x \in E(A, a)\}, \quad (3.7)$$

se resuelve de la misma manera, por lo tanto su solución es:

$$x_{min}^* = a - \frac{Ac}{\sqrt{c^T Ac}}, \text{ o bien, } x_{min}^* = a - \frac{Ac}{\|A^{1/2}c\|}. \quad (3.8)$$

Si definimos un vector  $b \in \mathcal{R}^n$ , tal que

$$b = \frac{Ac}{\sqrt{c^T Ac}}; \text{ o bien, } b = \frac{Ac}{\|A^{1/2}c\|}, \quad (3.9)$$

podemos redefinir  $x_{max}^*$  y  $x_{min}^*$  en función del vector  $b$  como:

$$x_{max}^* = a + b \quad \text{y} \quad x_{min}^* = a - b, \quad (3.10)$$

y el valor de la función objetivo para cada caso se define como:

$$z_{max} = c^T x_{max}^* \quad \text{y} \quad z_{min} = c^T x_{min}^*. \quad (3.11)$$

Dada una desigualdad lineal  $c^T x \leq \gamma$  tal que  $c^T a > \gamma$ , el punto máximo que puede alcanzar cualquier punto  $x \in E(A, a)$  a partir de su centro  $a$  en la dirección del vector  $-c$  es  $x_{min}^*$  lo cual se muestra en la figura 3.2. Por lo anterior, concluimos que la



optimización de la función lineal se alcanza a partir del centro  $a$  del elipsoide en la dirección del vector  $+b$  ó  $-b$ , según sea el caso, (3.2) ó (3.7).

### Ejemplo 3.2.

Sea  $x \in \mathcal{R}^n$ ; dada una función lineal  $c^T x$  y un elipsoide  $E(A,a)$  encontrar  $x_{max}^*$  y  $x_{min}^*$  tal que:

$$z_{max} = c^T x_{max}^* = \max\{c^T x \mid x \in E(A,a)\} \text{ y } z_{min} = c^T x_{min}^* = \min\{c^T x \mid x \in E(A,a)\}.$$

Sea  $E(A,a)$  el elipsoide para el cual  $a = (0,0)^T$  y  $A = [1 \ 0; 0 \ 1]$  siendo el vector  $c \in \mathcal{R}^2$  de la función objetivo lineal  $c = (-1,-1)^T$ . La figura 3.2, ilustra gráficamente ambas soluciones  $x_{max}^* = (-0.7071,-0.7071)^T$  y  $x_{min}^* = (0.7071,0.7071)^T$  resultantes.

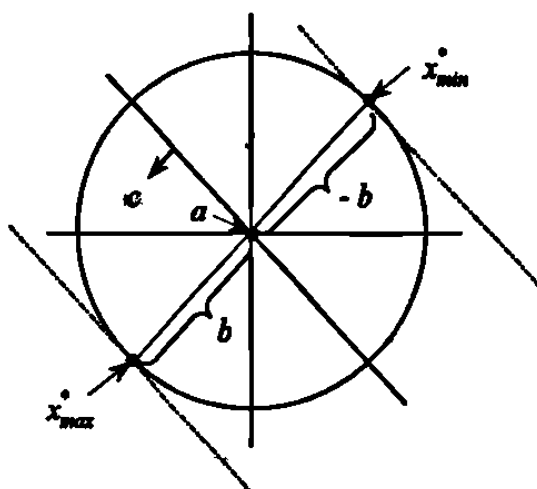


Figura 3.2. Optimización lineal sobre un  $E(A,a)$

### 3.1.3. El elipsoide Löwner John $E(A',a')$ contenedor de $E(A,a,c)$ .

Existe un hecho bien conocido, el cual afirma que todo cuerpo convexo (ver secc. 1.3) es contenido en un único elipsoide de volumen mínimo, y que dicho cuerpo a su vez contiene a un único elipsoide de volumen máximo.

En particular, el primer resultado se atribuye a K. Löwner John (ver [2], p-69) quien provó el siguiente teorema más general en el cual se basa el método elipsoidal.

**Teorema.**

*Para todo cuerpo convexo  $K \subseteq \mathcal{R}^n$  existe un único elipsoide  $E$  de volumen mínimo contenedor de  $K$ . Más aún,  $K$  contiene al elipsoide obtenido a partir de  $E$  mediante la reducción de este a partir de su centro mediante un factor de  $n$ .*

Llamaremos **elipsoide Löwner John**, al elipsoide de volumen mínimo contenedor de un cuerpo convexo  $K$ . En fórmulas, la segunda parte del teorema establece que, si  $E(A, a)$  es el elipsoide Löwner John de  $K$ , entonces  $K$  contiene al elipsoide  $E(n^2 A, a)$ . Para un simplex regular  $S$ , la elipsoide Löwner John es una bola  $E(R^2 I, a)$  con un radio  $R$  apropiado alrededor del centro de gravedad  $a$  de  $S$ . Una bola concéntrica  $E(n^2 R^2 I, a)$ , es la elipsoide máxima contenida en  $S$ . Esto muestra que el parámetro  $n$  enunciado en el teorema es el mejor posible.

Para la construcción del elipsoide Löwner John  $E(A', a')$  contenedor de  $E(A, a, c)$  (ver secc. 3.1.1) se aplican las siguientes fórmulas:

$$a' = a - \frac{1}{n+1}b, \text{ y } A' = \frac{n^2}{n^2-1} \left( A - \frac{2}{n+1}bb^T \right), \quad (3.12)$$

donde  $b$  es el vector definido en la secc. 3.1.2, por (3.9).

Las fórmulas anteriores pueden ser reescritas en términos de los parámetros de paso ( $\tau$ ), dilatación ( $\sigma$ ) y expansión ( $\delta$ ) (ver sus antecedentes en el Capítulo 1):

$$a' = a - \tau b \quad \text{y} \quad A' = \delta [A - \sigma bb^T]. \quad (3.13)$$

donde:

$$\tau = \frac{1}{n+1}, \quad \sigma = \frac{2}{n+1}, \quad \delta = \frac{n^2}{n^2-1}. \quad (3.14)$$

Dado  $P = \{x \in \mathcal{R}^n \mid Cx \leq d, C \in \mathcal{R}^{m \times n}, d \in \mathcal{R}^m\} = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c_i^T x \leq \gamma_i, i=1, \dots, m\}$  y un elipsoide  $E(A, a)$ , el elipsoide Löwner John se define como  $E(A', a') = E(A, a) \cap \{x \in \mathcal{R}^n \mid c_i^T x \leq c_i^T a\}$ .

La figura 3.3 muestra la construcción del  $E(A', a')$  y sus parámetros  $(\tau)$ ,  $(\sigma)$  y  $(\delta)$  a partir de un hiperplano  $H_i = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c_i^T x = c_i^T a\}$ , llamado de corte central por dividir elipsoide  $E(A, a)$  a partir de su centro  $a$ .

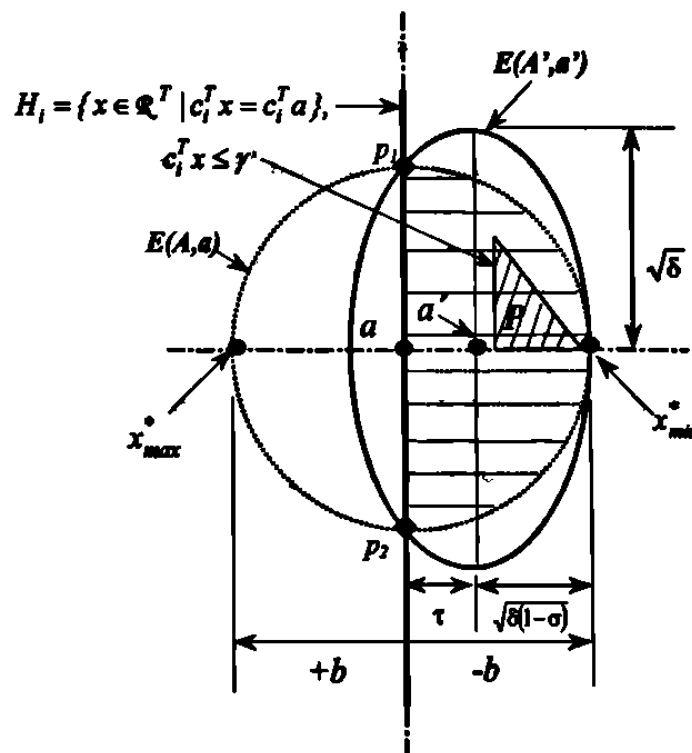


Figura 3.3. Gáfica del Elipsoide Löwner John bajo corte central.

Se puede observar que el centro  $a'$  del elipsoide Löwner John  $E(A', a')$  contenedor del medio elipsoide  $E(A, a, c)$  (región sombreada), se encuentra sobre la línea que une a los puntos  $x_{max}^*$  y  $x_{min}^*$ .

Por lo tanto el centro  $a'$  puede ser obtenido a partir de  $a$  realizando un paso de longitud  $\frac{1}{n+1} \|x_{min}^* - a\|$ .

Además la frontera del elipsoide  $E(A', a')$  toca al  $E(A, a, c)$  en el punto  $x_{\min}^*$  y en el conjunto  $\{x \in \mathcal{R}^n | x \in E(A, a)\} \cap \{x \in \mathcal{R}^n | c_i^T x = c_i^T a\}$ . En el caso particular de  $\mathcal{R}^2$  este último conjunto está formado por dos puntos  $p_1$  y  $p_2$ .

### 3.2. Descripción del método elipsoidal básico.

Inicialmente en la sección 3.2.1. se describirá inicialmente el AE básico para la solución de problemas convexos de fuerte vacuidad (ver secc. 1.2.1) para politopos dimensionalmente completos o vacíos (ver secc. 0.2.1.2) y posteriormente se mencionarán ciertas características de los elementos que lo conforman.

#### 3.2.1. Algoritmo básico elipsoidal bajo el criterio de corte central.

*Los datos de entrada.* Sistema de desigualdades  $Cx \leq d$ , donde tanto  $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$  y  $d \in \mathcal{R}^m$  poseen coeficientes enteros. Los parámetros del problema garantizan que el poliedro  $P = \{x \in \mathcal{R}^n | Cx \leq d\}$  sea vacío o acotado y dimensionalmente completo. Estas condiciones en los datos de entrada garantizan la convergencia de la solución del problema mediante el AE bajo el criterio del corte central (ver [2], p-75).

##### ✓ Paso de iniciación,

a)  $k = 0$ , (contador de iteraciones)

b)  $N = 2n((2n+1)\langle C \rangle + n\langle d \rangle) - n^3$ , \* (maxiter)

c)  $a_0 = 0$  y  $A_0 = R^2 I$  con  $R = \sqrt{n} 2^{\langle C, d \rangle - n^2}$  (o cualquier  $R$  que contenga a  $P$ ), de manera que  $E_0 = E(A_0, a_0)$  es el elipsoide inicial.

##### ✓ Paso general,

d) Sí  $k = N \Rightarrow$  ¡el algoritmo para!, y se declara que  $P$  es vacío.

e) Sí  $a_k \in P \Rightarrow$  ¡el algoritmo para!,  $a_k$  es la solución factible buscada.

\* Nota:  $\langle \bullet \rangle$ , longitud de código, ANEXO II, a.

f) Si  $a_k \notin P \Rightarrow$  esto implica que al menos una desigualdad lineal a sido violada digamos  $c^T x \leq \gamma$ , por el actual centro  $a_k$  del sistema  $Cx \leq d$ , es decir,  $c^T a_k > \gamma$ . Entonces se establece que:

$$g) b = \frac{A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}}, \quad h) a_{k+1} = a_k - \frac{1}{n+1} b, \quad i) A_{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1} \left( A_k - \frac{2}{n+1} b b^T \right)$$

j) volver al inciso d).

### 3.2.1.1. Datos.

Como datos del algoritmo se considera un sistema de desigualdades de la forma  $c_i^T x \leq \gamma$ , para  $i=1, \dots, m$ , con coeficientes enteros y  $n$  variables. Lo que se desea resolver con este algoritmo es la determinación de sí,

$$P = \{x \in \mathcal{R}^n \mid Cx \leq d\} = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c_i^T x \leq \gamma, i=1, \dots, m\} \quad (3.15)$$

es vacío o no, y de ser no-vacío, encontrar un punto que sea contenido por  $P$ . Para obtener una respuesta correcta, los datos deben poseer las siguientes características:

- ✓  $P$  debe ser acotado. (3.16)
- ✓ Si  $P$  es no vacío, entonces  $P$  debe ser dimensionalmente completo.

### 3.2.1.2. Radio inicial.

Haciendo referencia a la técnica "*Capturar un león en el Sahara*", mencionada en la secc. 2.2, como Sahara seleccionaremos una bola  $S(0, R)$  alrededor del origen que contiene al politopo  $P$ , nuestro león. Si el sistema de desigualdades (3.15) proporciona explícitamente tanto el límite inferior como superior de las variables, digamos,  $l_i \leq x_i \leq u_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , entonces un radio  $R$  tal que  $P \subseteq S(0, R)$  es fácil de encontrar.

Considere por ejemplo, el radio  $R$  siguiente:

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n \max\{u_i^2, l_i^2\}}.$$

Cuando no se tienen dichos límites, solo la información sobre los coeficientes enteros de la matriz  $C$  y el vector  $d$ , y que además  $P$  es un politopo, entonces para definir un radio  $R$  se utiliza el siguiente lema.

**Lema.**  $P \subseteq S(0, R)$ , donde

$$R = \sqrt{n} 2^{\langle C, d \rangle - n^2}. \quad (3.17)$$

$\langle C, d \rangle$  denota la longitud de codificación de  $C$  y  $d$  (ver ANEXO ii, a. y prueba de lo anterior en [2], p-76).

A partir de este radio se define el primer elipsoide  $E(A_0, a_0)$  contenedor de  $P$ , cuyo centro  $a_0$  (centro inicial) es el origen y la matriz  $A_0$  (matriz inicial) que se define como  $A_0 = R^2 I$ . Describiremos a continuación el  $k$ -ésimo paso,  $k \geq 0$ , del procedimiento.

Llamaremos  $E_k = E(A_k, a_k)$ , al elipsoide actual contenedor de  $P$ . El elipsoide  $E_k$  posee un punto característico que conocemos como el centro actual  $a_k$ . Por lo tanto, para revisar si todas las desigualdades son satisfechas solo tenemos que sustituir  $a_k$  en el sistema de desigualdades (3.15). En caso afirmativo podemos parar, habiendo encontrado ya la solución factible del sistema. Pero en caso contrario, si el centro  $a_k$  no es factible, al menos una de las desigualdades del sistema (3.15) estará siendo incumplida, digamos:

$$c^T x \leq \gamma,$$

lo cual implica que en realidad,

$$c^T a_k > \gamma.$$

Con esta información sabemos que el hiperplano  $H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = c^T a_k\}$  pasa por el centro  $a_k$  del elipsoide  $E_k$  y lo corta en dos mitades y que además el politopo  $P$  esta contenido en la mitad del elipsoide  $E_k$  definida por:

$$E'(A_k, a_k, c) = \{x \in E(A_k, a_k) \mid c^T x \leq c^T a_k\}. \quad (3.18)$$

Por lo tanto seleccionamos, como siguiente elipsoide  $E_{k+1}$  en nuestra secuencia, al elipsoide Löwner John de  $E'(A_k, a_k, c)$ , el cual está dado por las fórmulas (3.9) y (3.12).

### 3.2.1.3. Criterio de parada.

El criterio de terminación es un elemento de suma importancia dentro de la estructura del algoritmo. Si se localiza algorítmicamente un punto en  $P$ , el proceso termina; pero, ¿cuántas iteraciones se deben realizar, para obtener un punto factible?. El criterio de terminación surge o se establece a partir de un argumento relacionado con la razón de volumen entre elipsoides sucesivas considerando que siempre es posible determinar el volumen de cualquier elipsoide  $E(A, a)$  aplicando la fórmula (2.6).

Durante el AE, en cada paso  $k$  se construye un nuevo elipsoide  $E_{k+1}$  cuyo volumen es estrictamente más pequeño en comparación al  $\text{vol}(E_k)$ , de hecho se puede mostrar que bajo los parámetros de paso ( $\tau$ ), dilatación ( $\sigma$ ) y expansión ( $\delta$ ) indicados en (3.14) ocurre que,

**Lema.**

$$\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} = \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{1/2} < e^{-1/(2n)} < 1. \quad (3.19)$$

(ver prueba [2], p-77).

El siguiente lema muestra el interesante hecho de que el volumen de un polítopo dimensionalmente completo, no puede ser extremadamente pequeño; es decir, es posible definir una cota inferior sobre el  $\text{vol}(P)$  que puede ser calculado en tiempo polinomial.

**Lema.** Si  $P = \{x \in \mathcal{R}^n \mid Cx \leq d\}$  es un politopo dimensionalmente completo y si además la matriz  $C$  y el vector  $d$  poseen datos enteros, entonces

$$\text{vol}(P) \geq 2^{-(n+1)\langle C \rangle + n^3}. \quad (3.20)$$

(ver prueba [2], p-79).

De la teoría de poliedros se sabe que todo politopo dimensionalmente completo  $P \in \mathcal{R}^n$  contiene  $n+1$  vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  afinmente independientes y que la envolvente convexa de esos vértices forma un simplex  $S$  que es contenido en  $P$ . Por lo tanto, el volumen de  $P$  es acotado por el volumen de un simplex, determinado por la siguiente formula [ver R1-p79],

$$\text{vol}(S) = \frac{1}{n!} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_0 & v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \right|$$

Se tiene además que

$$\text{vol}(P) \geq \text{vol}(S) \geq \frac{1}{n!} (2^{\langle C \rangle - n^2})^{-(n+1)} \geq 2^{-(n+1)\langle C \rangle + n^3}.$$

Por lo tanto, ya que es posible la estimación del volumen de una elipsoide inicial  $E_0 = E(A_0, a_0)$  así como el volumen del politopo  $P$  y que además se conoce la tasa de reducción de volúmenes, podemos concluir que el número de iteraciones máximo que debemos realizar será hasta que el elipsoide actual  $E_k$  tenga un volumen más pequeño que el límite inferior (3.20) del volumen de  $P$ . De alcanzar dicho estado, en el paso  $N$ , podemos parar el proceso iterativo ya que, para un ciclo adicional si  $P \subseteq E_N$ , implicaría que

$$\text{vol}(E_N) < \text{vol}(P).$$

El número  $N$  de iteraciones máximo que tendremos que realizar, en el peor caso, puede estimarse de la siguiente manera:

$$N = 2n((2n+1)\langle C \rangle + n\langle d \rangle) - n^3, \quad (3.21)$$



**Lema.** Sea  $P = \{x \in \mathcal{R}^n \mid Cx \leq d\}$  un politopo y  $Cx \leq d$  un conjunto de desigualdades lineales con coeficientes enteros.

Si  $E_0 = E(A_0, a_0)$ , con  $a_0 = (0, 0)^T$ ,  $A = R^2 I$  y  $R = \sqrt{n} 2^{(C, d) - n^2}$ , es el elipsoide inicial y si el paso general del método elipsoidal de la secc. 3.2.1. se aplica  $N = 2n((2n+1)(C) + n(d) - n^3)$  veces, entonces

$$\text{vol}(E_N) < 2^{-(n+1)(C)+n^2} \leq \text{vol}(P).$$

Por lo tanto podemos concluir que el  $\text{vol}(E_N) < 2^{-(n+1)(C)+n^2}$ .

### 3.3. Ejemplo

El siguiente ejemplo tiene como fin principal mostrar las analogías del AE con la técnica “capturar un león en el Sahara”. Al aplicar una primer iteración del AE básico se hará referencia a definiciones correspondientes a secciones ya enunciadas anteriormente.

#### 3.3.1. Analogía del AE con la técnica “Captura de un león en el Sahara”.

Mediante un ejemplo sencillo será fácil mostrar la analogía existente entre la técnica “Captura de un león en el Sahara” con el AE, al mismo tiempo se enfatizarán las características principales de cada paso del algoritmo de la secc. 3.2.1. Cabe mencionar que los datos no poseen coeficientes enteros, pero recordemos que esa característica del problema se utiliza para determinar un *maxiter* (máximo número de iteraciones) con el cuál se pueda asegurar que si una solución factible no es encontrada en dicho número de iteraciones, implica que el conjunto de desigualdades lineales es vacío. La intención de este ejemplo es simplemente mostrar paso a paso el funcionamiento del AE.

### 3.3.1.1. Generación del “Sahara”.

Este primer paso corresponde a la definición de la zona de búsqueda inicial (Sahara) contenedora del poliedro acotado (león) definido por un sistema de desigualdades lineales dado, para el cual se desea encontrar una solución factible.

Sea  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq d\}$  donde el sistema de desigualdades lineales  $Cx \leq d$  correspondiente es:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 0.8 \\ -x_1 - x_2 &\leq -1.0, \\ x_2 &\leq 0.5 \end{aligned}$$

Dicho politopo se muestra en la figura 3.4.(a).

### 3.3.1.2. Cercamiento inicial – Sahara.

Para realizar el cercado de nuestro león, utilizaremos el elipsoide inicial  $E_0 = S(0, R) = E(A_0, a_0)$ , donde  $a_0 = (0, 0)^T$  y  $A_0 = R^2 I = \text{diag}((1, 1)^T)$  que produce una bola lo suficientemente grande para contener a  $P$ , como se puede ver en la figura 3.4.(b).

### 3.3.1.3 División del Sahara en dos partes iguales.

Es precisamente en esta parte del método, donde se lleva a cabo la aplicación de la idea de los *algoritmos de corte*, con la finalidad de reducir la región de factibilidad cubierta por el elipsoide. Para realizar la reducción de la región de factibilidad, es necesario antes que nada, que el centro actual sea un punto no perteneciente al politopo  $P$ , a lo que llamamos “revisión de membresía”.

a) **Revisión de membresía.** Una vez cercado el politopo  $P$  es necesario revisar si el centro actual  $a_0$  satisface todas las desigualdades lineales, para lo cual solo tenemos que sustituir el valor de  $x$  por  $a_0$  en cada una de las desigualdades. De ser este el caso, se indica que el centro se encuentra contenido en el politopo  $P$ .

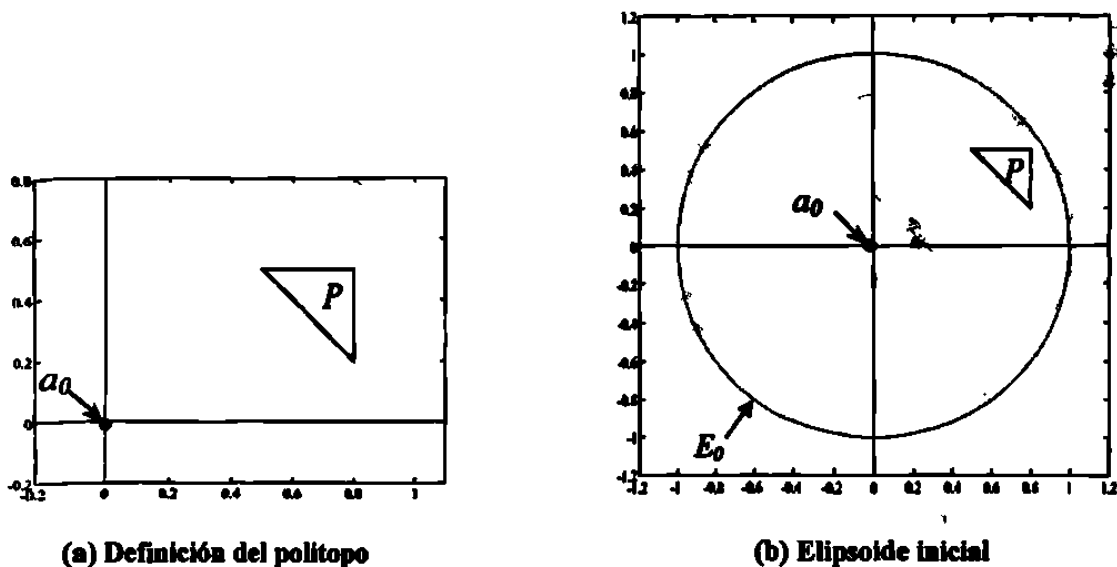


Figura 3.4

b) **Violación.** De estar  $a_0$  contenido en  $P$ , el algoritmo para  $y$  se declara una solución factible encontrada  $a_0$ ; en caso contrario, al menos una de las desigualdades lineales se encuentra incumplida por  $a_0$ , digamos  $c^T x \leq \gamma$ . En nuestro ejemplo, esto se presenta en la desigualdad número 2,  $-x_1 - x_2 \leq -1.0$ , donde,  $c = (-1, -1)^T$  lo cual se ilustra en figura 3.5.

c) **Generación del hiperplano de corte.** Una vez identificada la desigualdad incumplida, tomamos el vector de coeficientes  $c \in \mathcal{R}^n$  [ver secc. 3.2.1.f] de tal desigualdad para generar un hiperplano de corte central  $H = \{x \in \mathcal{R}^n | c^T x = c^T a_0\}$ . En la figura 3.6 se muestra el corte central generado por el hiperplano  $H = \{x \in \mathcal{R}^2 | (-1, -1)^T x = 0\}$ .

El hiperplano central  $H$ , genera dos semiespacios  $H_L = \{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \leq c^T a_0\}$  que es donde queda contenido  $P$  y  $H_U = \{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \geq c^T a_0\}$ . El siguiente paso es cercar la media elipsoide  $E^*(A_0, a_0, c) = E(A_0, a_0) \cap H_L$  en la cual queda contenido  $P$  (ver secc.3.1.1), como se puede observar en la figura 3.6.

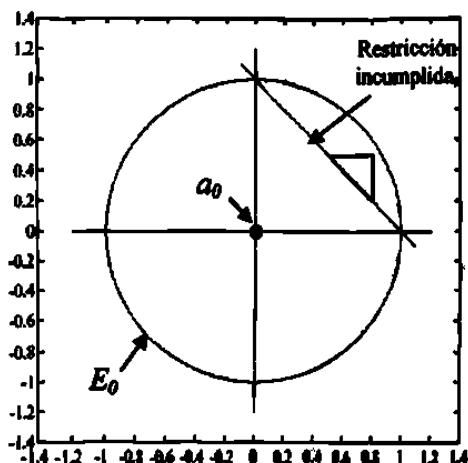
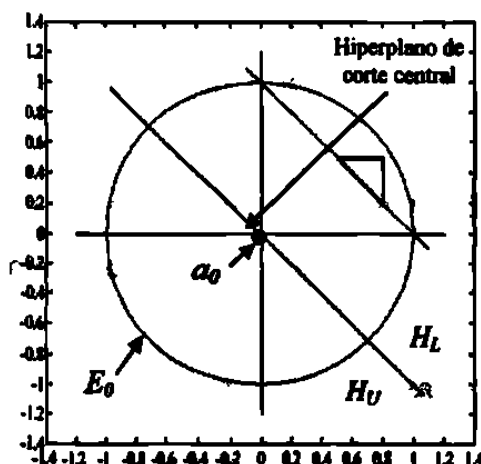
Figura 3.5. Selección del vector  $c$ .

Figura 3.6. Corte central

3.3.1.4. Cercamiento de la región en la cual se encuentra el león. Una vez identificada la región de factibilidad, se realiza un nuevo cercado con el elipsoide Löwner John  $E(A', a') = E(A_1, a_1)$  contenedora de  $E'(A_0, a_0, c)$  (ver secc. 3.1.3). Para ello es necesario determinar el punto máximo que debe ser contenido por el nuevo cercado (ver secc. 3.1.2). Dicho punto corresponde a  $x_{min}^*$  que se obtiene aplicando con (3.9) y (3.10), es decir

$$x_{min}^* = a_0 - b, \quad \text{donde } b = \frac{A_0 c}{\sqrt{c^T A_0 c}}.$$

La figura 3.7. muestra el  $x_{min}^* = (0.7071, 0.7071)^T$  correspondiente al ejemplo analizado.

a) Generación del elipsoide L-J. La elipsoide Löwner John  $E(A', a') = E(A_1, a_1)$  del elipsoide  $E'(A_0, a_0, c)$  es obtenido a través de las formulas (3.9), (3.12) y (3.14) de la secc. 3.1.3.

$$a_1 = a_0 - \frac{1}{n+1} b \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left( A_0 - \frac{2}{n+1} b b^T \right)$$

Evaluando tenemos

$$a_1 = (0.2357, 0.2357)^T \text{ y } A_1 = [0.8889 \quad -0.4444; -0.4444 \quad 0.8889].$$

La figura 3.8. muestra finalmente el elipsoide Löwner John correspondiente a la 1ª iteración del método elipsoidal básico para el ejemplo dado.

El proceso anterior se repite tantas veces como sea necesario, hasta alcanzar aquél punto  $a_k$  que se encuentre contenido en el politopo  $P$ . Recuerde que el *maxiter*  $N$ , garantiza que el sistema de desigualdades lineales tenga solución factible, o que el conjunto factible sea vacío.

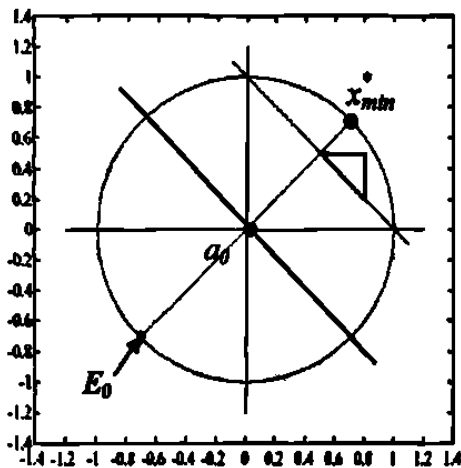


Figura 3.7. Punto máximo  $x_{min}^*$ .

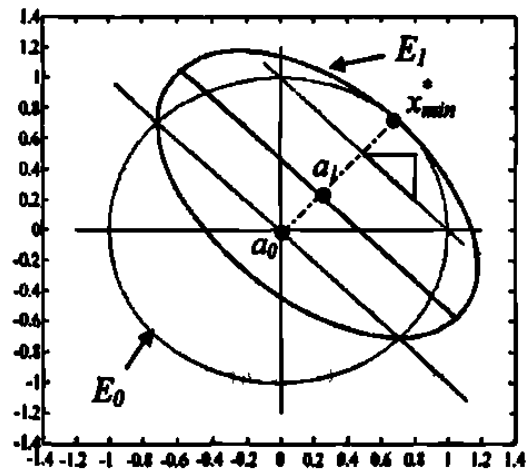


Figura 3.8. Elipsoide Löwner John, bajo corte central

Nota: En el ANEXO i se proporciona la programación del algoritmo 3.2.1 en MATLAB Ver. 5.3.0. así como la rutina utilizada para la generación de los gráficos presentados en las figuras 3.4. a 3.8.

# CAPITULO 4

## ALGORITMO ELIPSOIDAL BAJO CORTE PROFUNDO

### 4.1. Introducción.

El método elipsoidal bajo corte central posee una lenta convergencia, lo cual ha sido ya analizado por algunos investigadores cuyos resultados han generado modificaciones interesantes al AE básico. La primer pregunta práctica que surge al analizar el desempeño del AE, con la idea de mejorar la tasa de convergencia del algoritmo, es el cuestionar la forma en que se da la posición al hiperplano de corte  $H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = c^T a\}$ , también llamado hiperplano de corte central, utilizado para dividir al actual elipsoide  $E_k = E(A_k, a_k)$  en dos partes iguales.

Observando la figura 3.6. del capítulo anterior, puede verse claramente que en lugar de cortar el elipsoide  $E_0$  con el hiperplano de corte central, podemos remplazar la cantidad  $c^T a$  de éste, por la cantidad  $\gamma \in \mathcal{R}$  correspondiente a la desigualdad  $c^T x \leq \gamma$  incumplida por el centro actual  $a_k$ , es decir, utilizar el hiperplano  $H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = \gamma\}$  en lugar de  $H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = c^T a\}$  y de esa manera generar

una sección elipsoidal, mucho menor al medio elipsoide  $E^* = E(A_0, a_0, c)$ , que permite una mayor reducción de la región de búsqueda. Del mismo modo, el elipsoide Löwner John correspondiente a la sección elipsoidal generada bajo el corte central será estrictamente menor a la contenedora del medio elipsoide generado bajo el corte central.

La idea de una reducción de la región de búsqueda es la que motiva a considerar secciones elipsoidales menores al utilizar una forma de dar posición al hiperplano de corte, diferente al enunciado por el algoritmo básico enunciado en la sección 3.2. A continuación serán descritas las modificaciones que se realizan al algoritmo básico con la finalidad de generar en cada iteración elipsoides Löwner John menores.

## 4.2. Modificaciones al método básico elipsoidal

Si se realiza la modificación al algoritmo como se mencionó anteriormente, se mantiene la idea de generación de secuencias de elipsoides  $\{E_k\}$  con sus correspondientes centros  $\{a_k\}$ , pero no así, la razón constata de volúmenes existente entre  $E_{k+1}$  y  $E_k$  enunciada en la sección 3.2.1.3 (ver (3.19) bajo los parámetros de paso ( $\tau$ ), dilatación ( $\sigma$ ) y expansión ( $\delta$ ) definidos en (3.14); es decir,

$$\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} = \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{1/2}. \quad (4.1)$$

Es esta la idea que sustenta la posibilidad de un aceleramiento en la tasa de convergencia del algoritmo, pues el método básico para encontrar una solución factible a un sistema de desigualdades lineales bajo el corte central utiliza un criterio de convergencia basado en dicho factor (ver secc. 3.2.1.3).

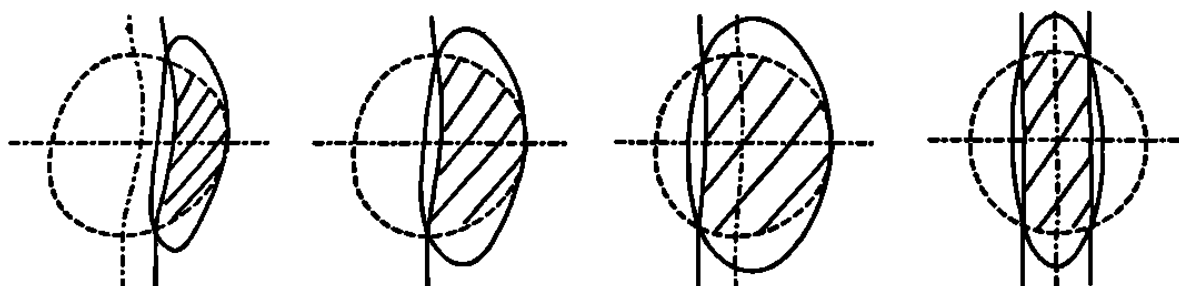
De manera general, las modificaciones realizadas al método básico en la  $k$ -ésima iteración utilizando el corte profundo, en lugar del corte central, son las siguientes:

- ✓ Cambio en el criterio de selección del vector de coeficientes  $c$  de la desigualdad incumplida por un centro actual  $a_k$ .

- ✓ Forma de dar posición al hiperplano de corte, el cual genera cierta porción del elipsoide actual  $E(A_k, a_k)$  a ser cubierta por el elipsoide Löwner John  $E(A_{k+1}, a_{k+1})$ .
- ✓ Modificaciones en los parámetros de paso  $\tau_i$ , dilatación  $\sigma$  y expansión  $\delta$ , requeridos para la obtención de  $a_{k+1}$  y  $A_{k+1}$ .

Debemos enfatizar que todas estas modificaciones se realizan con la firme idea de mejorar la lenta convergencia a una solución factible (de existir esta) del algoritmo básico.

La propuesta para resolver problemas de programación lineal, que será expuesta en el capítulo 5, utiliza las bondades del corte profundo pero cabe mencionar que existen otros hiperplanos de corte (ver [2], p-72). La figura 4.1 muestra cuatro tipos de cortes utilizados en otras versiones del método elipsoidal.



(a) corte profundo

(b) corte central

(c) corte poco-profundo

(d) corte paralelo

Figura 4.1.

### 4.3. Parámetros considerados en el corte profundo.

El AE bajo corte central, señalado en el inciso f) de la sección 3.2.1, indica que una vez que se determina que el actual centro  $a_k$  correspondiente al elipsoide  $E_k$  incumple al menos una de las desigualdades lineales, es decir,  $a_k \notin P$ , se puede tomar el vector de coeficientes  $c$  de cualquiera de las restricciones incumplidas para la generación del elipsoide Löwner John.



La selección de dicho vector se realiza ahora de la siguiente manera:

- ✓ Identificación del conjunto de desigualdades incumplidas por el centro actual  $a_k$ .
- ✓ Cuantificación del incumplimiento del centro actual  $a_k$ , sobre cada desigualdad lineal mediante un parámetro  $\alpha \in \mathcal{R}$ , que se definirá más adelante.
- ✓ Finalmente se toma el vector  $c$  de coeficientes de la desigualdad mayormente incumplida por el actual centro  $a_k$  es decir aquella que posea el  $\alpha_{max}$ .

El hiperplano que ahora se utiliza para seccionar el elipsoide actual  $E_k$  es aquél generado por la desigualdad  $c^T x \leq \gamma$  mayormente incumplida, es decir el hiperplano de corte profundo

$$H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = \gamma\} \quad (4.2)$$

en lugar del hiperplano de corte central

$$H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = c^T a\} \quad (4.3)$$

que utiliza el método elipsoidal básico.

Debemos aclarar que el criterio de sustitución del hiperplano de corte central (4.3) por el profundo (4.2), no garantiza que el número de iteraciones necesario para encontrar una solución factible a un conjunto de desigualdades lineales dado, sea necesariamente menor al requerido por el método básico (bajo corte central).

La posibilidad de obtener una mayor reducción de la región de búsqueda de una iteración a otra, en lugar de la reducción siempre constante que se obtiene con el método básico, rompe la dependencia del número de iteraciones máximo  $N$  (ver (3.2.7)) de la razón del volumen, necesario para determinar si el poliedro  $P$  es vacío o no (ver secc.3.2.1.3).

### 4.3.1. Selección del vector $c$ .

Para realizar la selección del vector de coeficientes  $c$  de la restricción mayormente incumplida es necesario, identificar el conjunto de desigualdades incumplidas por el centro actual  $a_k$  y realizar la cuantificación del incumplimiento de cada una de ellas mediante la relación

$$\alpha = \frac{c^T a_k - \gamma}{\sqrt{c^T A_k c}}. \quad (4.4)$$

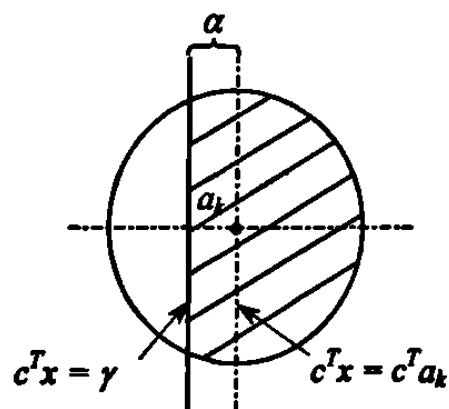
El parámetro  $\alpha$  cuantifica la distancia relativa medida a partir del hiperplano de corte central (4.3) que pasa por el centro  $a_k$  del elipsoide actual  $E(A_k, a_k)$  a la frontera del semiespacio  $\{x \in \mathbb{R}^n | c^T x \leq \gamma\}$  generado por alguna desigualdad  $c^T x \leq \gamma$ .

### 4.3.2. Análisis del parámetro $\alpha$ .

Dado un elipsoide  $E_k = E(A_k, a_k)$  definido por su correspondiente centro  $a_k$  y matriz  $A_k$ , y una desigualdad lineal  $c^T x \leq \gamma$  generadora del hiperplano de corte profundo  $H = \{x \in \mathbb{R}^n | c^T x = \gamma\}$ , analicemos los valores posibles que puede tomar el parámetro  $\alpha$ .

#### Caso 1.

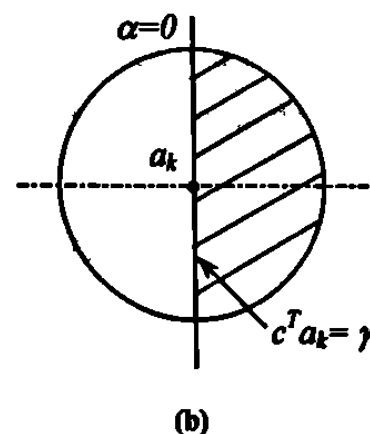
Cuando  $\alpha < 0$ , indica que el centro  $a_k$  se encuentra contenido en el semiespacio  $\{x \in \mathbb{R}^n | c^T x \leq \gamma\}$ , generado por la desigualdad lineal,  $c^T x \leq \gamma$ , es decir,  $c^T a_k < \gamma$ , por lo tanto, la desigualdad no es incumplida, como se muestra en la figura 4.2(a).



(a)

**Caso 2.**

Sí  $\alpha = 0$ , implica que el centro  $a_k$  pertenece al hiperplano  $\{x \in \mathcal{R}^n | c^T x = \gamma\}$ , es decir,  $c^T a_k = \gamma$ , por lo tanto, la desigualdad no es incumplida por dicho punto, como se muestra en la figura 4.2(b).

**Caso 3.**

Finalmente sí  $\alpha \in (0,1)$ , indica que el centro  $a_k$  es contenido en el semiespacio  $\{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \geq \gamma\}$ , generado por la desigualdad lineal  $c^T x \leq \gamma$ , de hecho al evaluarla con el centro  $a_k$  se obtiene que  $c^T a_k > \gamma$ , por lo tanto, la desigualdad es incumplida como se muestra en la figura 4.2(c).

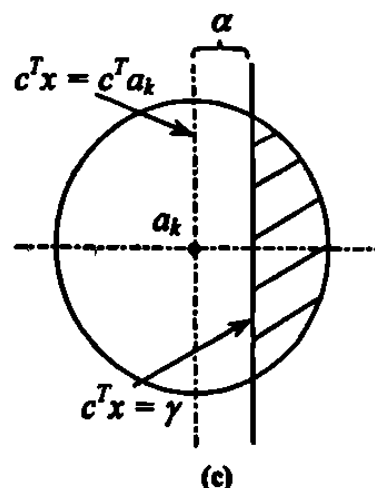


Figura 4.2 Análisis del parámetro  $\alpha$

Es interesante que el utilizar  $\sqrt{c^T A_k c}$  como denominador de  $\alpha$  nos permite determinar si el el semiespacio factible de la desigualdad lineal se encuentra o no cubierto por el elipsoide actual, pues este valor es la distancia máxima que puede alcanzar cualquier punto que pertenezca al elipsoide.

Por lo anterior podemos afirmar que dado un elipsoide  $E_k$ , un vector  $c \in \mathcal{R}^n \setminus \{0\}$  y un escalar  $\gamma \in \mathcal{R}$ , el hiperplano  $H$ , correspondiente a la frontera del semiespacio  $\{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \leq \gamma\}$ , intersecta el elipsoide  $E(A_k, a_k)$ , sí y solo sí,

$$-1 \leq \alpha \leq 1,$$

lo cual se debe a que los máximos puntos que pueden ser alcanzados en una elipsoide dada bajo la dirección del vector  $c$ , dependen de los puntos resultantes de las optimizaciones lineales:

$$z_{max} = c^T x_{max}^* = \{ \max c^T x \mid (x - a_k)^T A_k^{-1} (x - a_k) \leq 1 \},$$

$$z_{min} = c^T x_{min}^* = \{ \min c^T x \mid (x - a_k)^T A_k^{-1} (x - a_k) \leq 1 \},$$

El procedimiento enunciado en la secc. 3.1.2 define que la solución a cada uno de estos problemas como

$$x_{max}^* = a_k + \frac{A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}} \quad y \quad x_{min}^* = a_k - \frac{A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}}.$$

El hiperplano de corte profundo  $H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid c^T x = \gamma\}$  posee una intersección no vacía con  $E(A_k, a_k)$  si y solo si:  $c^T x_{min}^* \leq \gamma \leq c^T x_{max}^*$  esto es sí y sólo sí,

$$|c^T a_k - \gamma| \leq \sqrt{c^T A_k c}.$$

Como se puede apreciar en la figura 4.3.

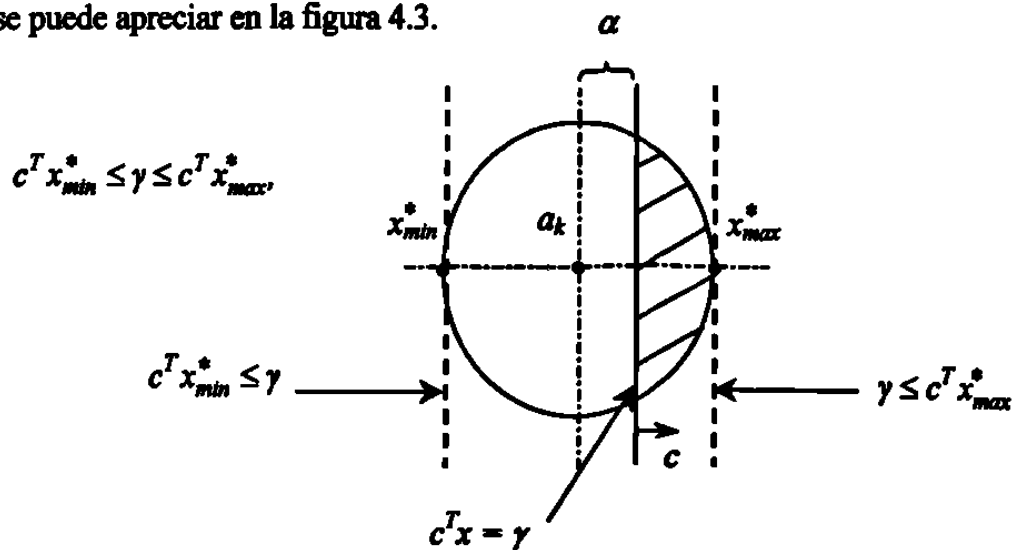


Figura 4.3. Intersección no-vacía del hiperplano de corte profundo con el  $E(A_k, a_k)$ .

Sustituyendo  $x_{min}^*$  y  $x_{max}^*$  en  $c^T x_{min}^* \leq \gamma \leq c^T x_{max}^*$  tenemos:

$$c^T \left[ a_k - \frac{A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}} \right] \leq \gamma \leq c^T \left[ a_k + \frac{A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}} \right]$$

$$c^T a_k - \frac{c^T A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}} \leq \gamma \leq c^T a_k + \frac{c^T A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}}$$

racionalizando  $\frac{c^T A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}}$ , obtenemos que

$$\frac{c^T A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}} \cdot \frac{\sqrt{c^T A_k c}}{\sqrt{c^T A_k c}} = \sqrt{c^T A_k c},$$

$$c^T a_k - \sqrt{c^T A_k c} \leq \gamma \leq c^T a_k + \sqrt{c^T A_k c}.$$

separando las desigualdades para que sean ambas  $\leq \sqrt{c^T A_k c}$ :

Desigualdad 1  $c^T a_k - \sqrt{c^T A_k c} \leq \gamma$

$$c^T a_k - \gamma \leq \sqrt{c^T A_k c}.$$

Desigualdad 2  $(\gamma \leq c^T a_k + \sqrt{c^T A_k c}) \cdot (-1),$

$$-\gamma \geq -c^T a_k - \sqrt{c^T A_k c},$$

$$-c^T a_k + \gamma \leq \sqrt{c^T A_k c}.$$

por lo tanto:

$$|c^T a_k - \gamma| \leq \sqrt{c^T A_k c}.$$

Se concluye que siempre que exista al menos una desigualdad para la cual  $\alpha \geq 1$ , no existe solución factible para  $P$ , ya que el semiespacio de la desigualdad lineal no se encuentra cubierto por el actual elipsoide. Así mismo, el conjunto de desigualdades que no se satisfacen por el centro actual  $a_k$ , son aquellas para las cuales  $0 < \alpha_k < 1$ .

La selección del vector  $c$  requerido en la actualización del nuevo centro  $a_{k+1}$  y de la nueva matriz  $A_{k+1}$  se realiza considerando la desigualdad mayormente incumplida, es decir, aquella desigualdad cuyo valor  $\alpha$  sea el máximo.

#### 4.4. Construcción del elipsoide Löwner John bajo corte profundo.

El elipsoide Löwner John  $E(A_{k+1}, a_{k+1})$  que contiene el elipsoide:

$$E(A_k, a_k, c, \gamma) = E(A_k, a_k) \cap \{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \leq \gamma\} \quad (4.5)$$

se obtiene mediante las formulas (3.13)

$$A_{k+1} = \delta[A_k - \sigma b b^T] \quad a_{k+1} = a_k - \tau b$$

con las siguientes modificaciones a los parámetros de paso ( $\tau$ ), dilatación ( $\sigma$ ) y expansión ( $\delta$ ):

$$\tau = \frac{1+n\alpha}{n+1} \quad \sigma = \frac{2(1+n\alpha)}{(n+1)(1+\alpha)} \quad \delta = \frac{n^2(1-\alpha^2)}{n^2-1} \quad (4.6)$$

El parámetro  $b$  permanece sin cambio alguno, pues es el vector a partir del cual se alcanza el punto máximo que debe ser contenido en el elipsoide Löwner-John, definido en la secc.3.1.2.

$$b = \frac{Ac}{\sqrt{c^T Ac}}$$

La figura 4.4 muestra la construcción de la elipsoide Löwner John a partir del corte profundo, así como los parámetros de paso, expansión y dilatación.:

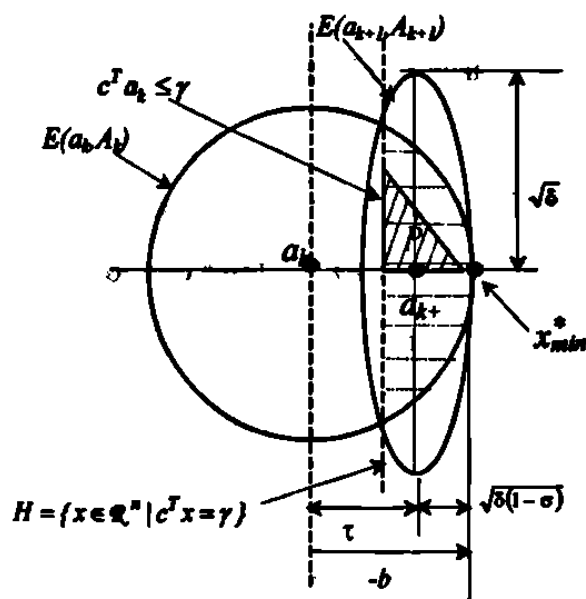


Figura 4.4. Gráfica del elipsoide Löwner John bajo corte profundo.

## 4.5. Descripción del método elipsoidal modificado bajo corte profundo

En esta sección se describirá inicialmente el AE modificado bajo corte profundo para la solución de problemas convexos de fuerte vacuidad (ver secc.1.2.1), para polítopos dimensionalmente completos o vacíos (ver secc.0.2.1.2) y posteriormente se aplicará una iteración básica del algoritmo modificado al ejemplo enunciado en la secc. 3.3. del capítulo anterior.

### 4.5.1. Algoritmo elipsoidal modificado bajo el criterio de corte profundo.

✓ *Los datos de entrada.* Sistema de desigualdades  $Cx \leq d$ , donde tanto  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  como  $d \in \mathbb{R}^m$  poseen coeficientes enteros. Se considera que el poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Cx \leq d\}$  es vacío o acotado y dimensionalmente completo.

✓ *Paso de iniciación,*

a)  $k = 0$ , (contador de iteraciones)

- b)  $N = 2n((2n+1)(C) + n(d) - n^3)$ , (maxiter)
- c)  $a_0 = 0$  y  $A_0 = R^2 I$  con  $R = \sqrt{n} 2^{(C,d)-n^2}$  (o cualquier  $R$  que contenga a  $P$ ), de manera que  $E_0 = E(A_0, a_0)$  es el elipsoide inicial.

✓ *Paso general,*

- d) Sí  $k = N \Rightarrow$  ¡el algoritmo para!, y se declara que  $P$  es vacío.
- e) Sí  $a_k \in P \Rightarrow$  ¡el algoritmo para!,  $a_k$  es la solución factible buscada.
- f) Sí  $a_k \notin P \Rightarrow$  esto implica que al menos una desigualdad lineal a sido violada por el actual centro  $a_k$ , digamos  $c^T x \leq \gamma$  del sistema  $Cx \leq d$ , es decir,  $c^T a_k > \gamma$ , entonces determinar:
- g) El conjunto de desigualdades incumplidas (si más de una desigualdad es incumplida).
- h) Cuantificar el incumplimiento a cada desigualdad por centro actual  $a_k$  a través de,

$$\alpha = \frac{c^T a_k - \gamma}{\sqrt{c^T A_k c}}$$

- i) Sí  $\alpha \geq 1 \Rightarrow$  ¡el algoritmo para!, y se declara que  $P$  es vacío.
- j) Sí  $\alpha \in (0,1) \Rightarrow$  Seleccionar el vector de coeficientes  $c$  y el  $\alpha$  resultante de la desigualdad mayormente incumplida, y establecer
- k)  $b = \frac{A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}},$
- l)  $a_{k+1} = a_k - \left( \frac{1+n\alpha}{n+1} \right) b,$
- m)  $A_{k+j} = \left( \frac{n^2(1-\alpha^2)}{n^2-1} \right) \left( A_k - \left( \frac{2(1+n\alpha)}{(n+1)(1+\alpha)} \right) b b^T \right),$
- n) volver al inciso d).



## 4.6. Ejemplo.

En este ejemplo aplicaremos una primer iteración del AE modificado bajo corte profundo enunciado en la sección previa 4.3.1, para ello consideraremos el mismo ejemplo de la sección 3.3. del capítulo anterior. La finalidad principal es ilustrar las modificaciones al método básico enunciadas en la sección 4.1, así como el desempeño del parámetro  $\alpha$  analizado en la sección 4.3.1.

Hemos considerado el mismo ejemplo del capítulo 3, para ilustrar de manera más evidente la ventajosa reducción de la región de búsqueda que ofrece el método modificado bajo corte profundo en comparación al corte central.

### 4.6.1. Definición del politopo.

Sea  $P = \{x \in R^n \mid Cx \leq d\}$  donde el sistema de desigualdades lineales  $Cx \leq d$  correspondiente es,

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 0.8 \\ -x_1 - x_2 &\leq -1.0, \\ x_2 &\leq 0.5 \end{aligned}$$

el cual se muestra en la figura 4.5(a).

### 4.6.2. Definición del elipsoide inicial.

Sea  $E_0 = S(0, R) = E(A_0, a_0)$ , para el cual consideramos un centro inicial  $a_0 = (0, 0)^T$  y  $A_0 = R^2 I = \text{diag}((1, 1)^T)$  lo cual genera una bola lo suficientemente grande para contener a  $P$ , como se puede ver en la figura 4.5(b).

### 4.6.3. División del elipsoide actual.

La división del elipsoide actual se realiza con la intención de reducir el espacio de búsqueda en el cual quede contenido  $P$ , para lo cual es necesario identificar un

hiperplano de corte profundo que genere la proporción del elipsoide actual (ver secc.4.3.formula (4.5)) la cual se define como

$$E'(A_k, a_k, c, \gamma) = E(A_k, a_k) \cap \{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \leq \gamma\}.$$

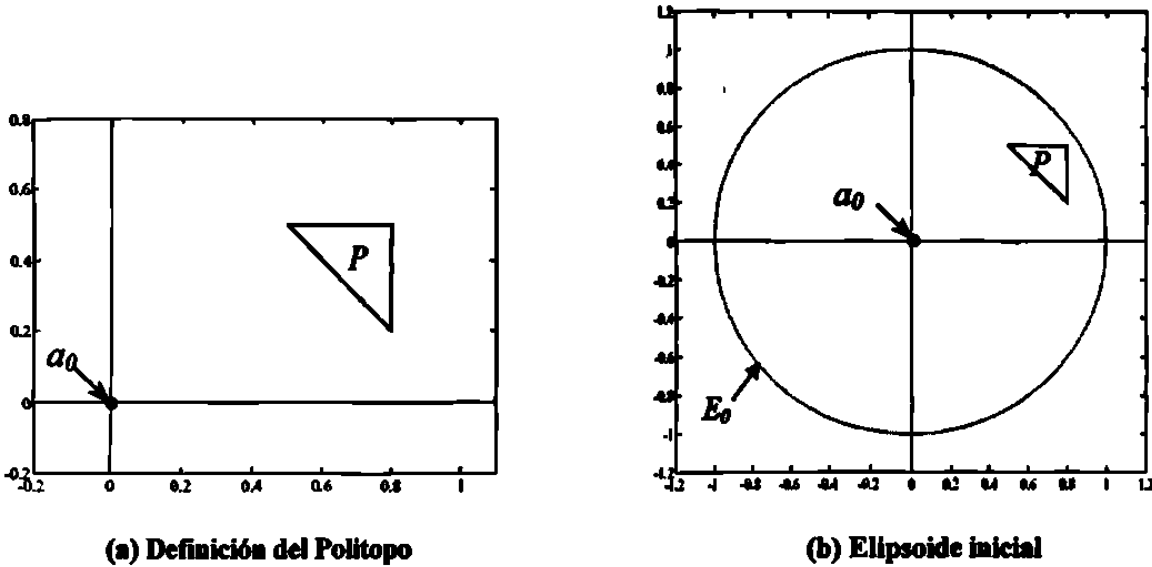


Figura 4.5.

Para lo anterior, es necesario que el centro actual  $a_0$  sea un punto no perteneciente al polítopo  $P$ , a lo que llamamos revisión de membresía.

a) **Revisión de membresía.** Una vez cercada el polítopo  $P$  es necesario revisar si el centro actual  $a_0$  satisface todas las desigualdades lineales; de ser este el caso, indica que el centro se encuentra contenido en el polítopo  $P$ .

b) **Violación.** De ser  $a_0$  contenido por  $P$ , el algoritmo para y declara solución factible encontrada, pero en caso contrario, al menos una de las desigualdades lineales se encuentra incumplida por  $a_0$ , digamos  $c^T x \leq \gamma$ . En nuestro ejemplo, esto se presenta solo en la desigualdad número 2,  $-x_1 - x_2 \leq -1.0$ , es decir  $c = (-1, -1)^T$  lo cual se ilustra en figura 4.6.

Como se menciona en el algoritmo modificado bajo corte central (ver secc.4.5.1), es aquí donde se presenta la primer modificación al método básico. Una vez determinado el conjunto de las desigualdades incumplidas, el siguiente paso es la cuantificación del incumplimiento mediante la relación

$$\alpha = \frac{c^T a_k - \gamma}{\sqrt{c^T A_k c}}$$

Para ilustrar lo mencionado en la sección 4.3.2. aplicaremos esta fórmula a las tres desigualdades de nuestro ejemplo.

Desigualdad 1. Sea  $c_1 = (1, 0)^T$  y  $\gamma = 0.8$ ,

$$\alpha_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (0.8)}{\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}} = -0.8$$

Desigualdad 2. Sea  $c_2 = (-1, -1)^T$  y  $\gamma = -1$ ,

$$\alpha_2 = \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-1.0)}{\sqrt{\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}}} = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Desigualdad 3. Sea  $c_3 = (0, 1)^T$  y  $\gamma = 0.5$ ,

$$\alpha_3 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (0.5)}{\sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}} = -0.5$$

Para este ejemplo, las desigualdades 1 y 3, son satisfechas por el centro actual, por lo tanto, se confirma lo enunciado en la sección 4.3.2. para el caso 2:

*“Cuando  $\alpha < 0$ , indica que el centro  $a_k$  se encuentra contenido en el semiespacio  $\{x \in \mathbb{R}^n | c^T x \leq \gamma\}$ , generado por la desigualdad lineal,  $c^T x \leq \gamma$ , es decir,  $c^T a_k < \gamma$ , por lo tanto, la desigualdad no es incumplida”.*

Por el contrario, en el caso de la desigualdad 2, se confirma lo enunciado en la misma sección, para el caso 3:

*“Si  $\alpha \in (0,1)$ , indica que el centro  $a_k$  es contenido en el semiespacio  $\{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \geq \gamma\}$ , generado por la desigualdad lineal  $c^T x \leq \gamma$ , de hecho al evaluarla con el centro  $a_k$  se obtiene que  $c^T a_k > \gamma$ , por lo tanto, la desigualdad es incumplida”.*

c) **Generación del hiperplano de corte.** Una vez identificada la desigualdad incumplida, tomamos el vector de coeficientes  $c \in \mathcal{R}^n$ , (ver 4.5.1. inciso (j)) de tal desigualdad para generar un hiperplano de corte profundo  $H = \{x \in \mathcal{R}^n | c^T x = \gamma\}$ . En la figura 4.7 se muestra el corte central generado por el hiperplano  $H = \{x \in \mathcal{R}^2 | (-1,-1)^T x = -1\}$ .

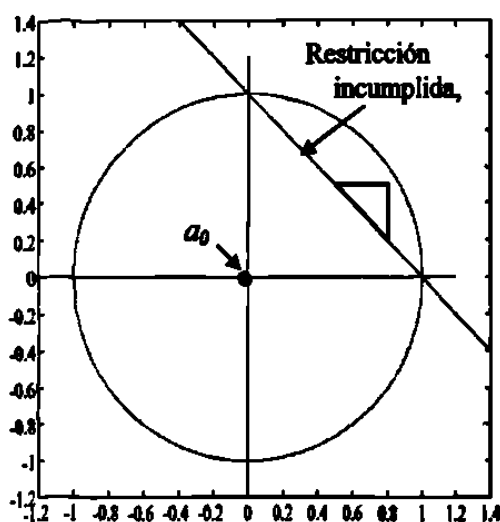


Figura 4.6. Selección del vector  $c$ .

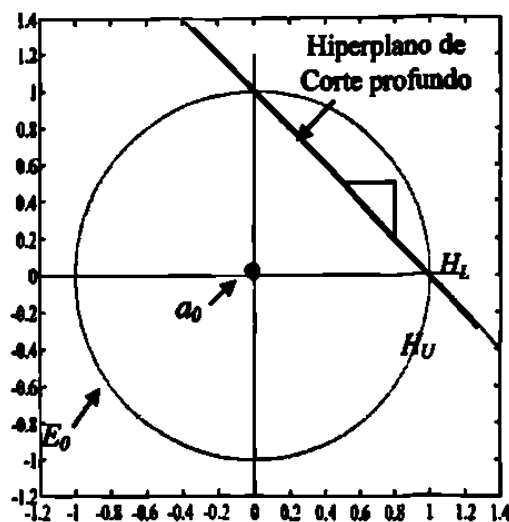


Figura 4.7. Corte profundo

El hiperplano profundo  $H$ , genera dos semiespacios  $H_L = \{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \leq c^T a_0\}$  que es donde queda contenido  $P$  y  $H_U = \{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \geq c^T a_0\}$ . El siguiente paso es cercar el elipsoide  $E'(A_k, a_k, c, \gamma) = E(A_k, a_k) \cap \{x \in \mathcal{R}^n | c^T x \leq \gamma\}$  (ver secc.4.4) en la cual queda contenido  $P$ .

#### 4.6.4. Generación del elipsoide L-J.

Finalmente para la generación del elipsoide Löwner John  $E(A_1, a_1)$  contenedora de  $E'(A_0, a_0, c, \gamma)$  (ver secc.4.4 (4.5)) es necesario determinar el punto máximo que debe ser contenido por dicho cercamiento (ver secc.3.1.2). Dicho punto corresponde a  $x_{min}^*$  que se obtiene aplicando con (3.9) y (3.10), es decir

$$x_{min}^* = a_0 - b, \quad \text{donde } b = \frac{A_0 c}{\sqrt{c^T A_0 c}}$$

La figura 4.8. muestra el  $x_{min}^* = (0.7071, 0.7071)^T$  correspondiente al ejemplo analizado. Finalmente el centro y matriz correspondientes a la 1ª iteración  $a_1$  y  $A_1$ , obtenidos a través de las formulas de los incisos k), l) y m) del algoritmo de la de la secc. 4.5.1, son  $a_1 = (0.5690, 0.5690)^T$  y  $A_1 = [0.3524 \quad -0.3143; -0.3143 \quad 0.3524]$ . Cuyo elipsoide Löwner John se muestra en la figura 4.9.

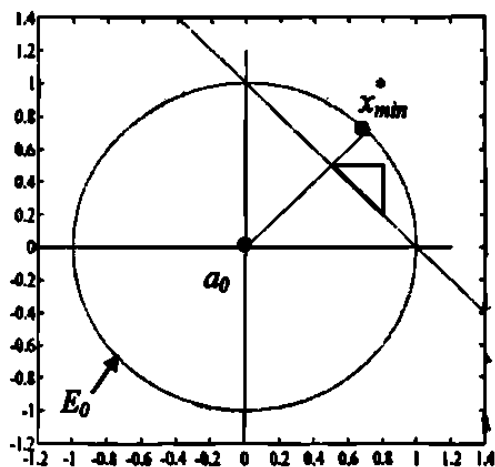


Figura 4.8. Punto máximo  $x_{min}^*$ .

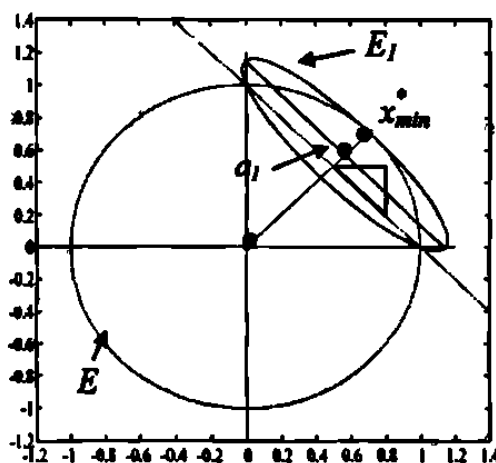


Figura 4.9. Elipsoide Löwner John, bajo corte profundo

La figura 4.10 ilustra la gran diferencia de volúmenes que se puede obtener entre una elipsoide Löwner John obtenida bajo corte central y un bajo corte profundo veamos

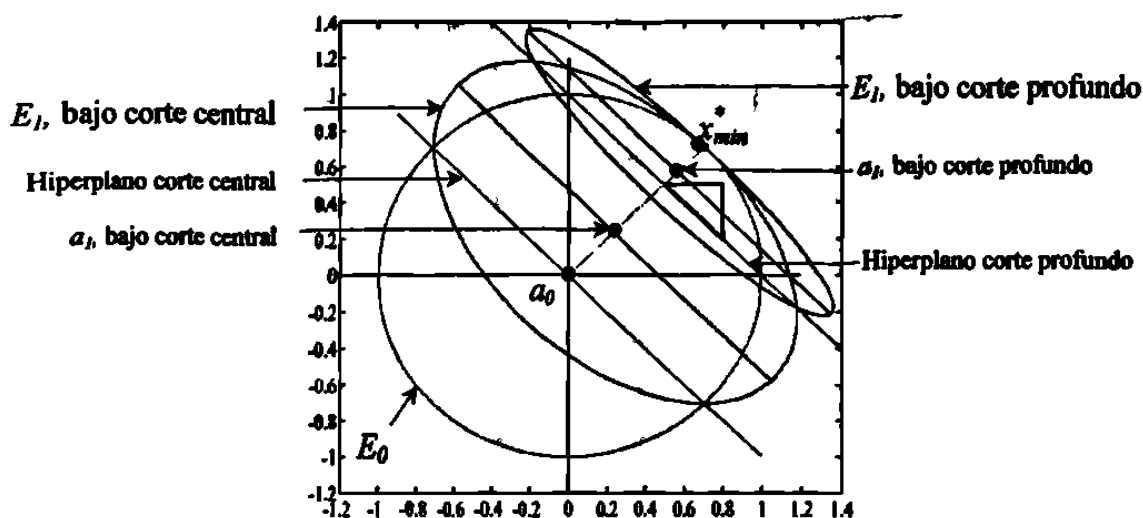


Figura 4.10. Gráfica comparativa

#### 4.7. Comparación entre el desempeño del algoritmo elipsoidal básico y el modificado.

El siguiente ejemplo se ha considerado para ilustrar el desempeño del método elipsoidal básico de manera gráfica.

Sea  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $P = \{x \mid Cx \leq d\}$  definido por el siguiente conjunto de desigualdades lineales:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\leq -2.0, \\ 3x_1 &\leq 4, \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 3 \end{aligned}$$

Para encontrar un punto en  $P$  se aplica el método elipsoidal básico considerando una elipsoide inicial  $E(A_0, a_0)$  (figura 4.11) para el cual  $a_0 = (0, 0)^T$  y  $A_0 = R^2 I = \text{diag}((49, 49)^T)$ . El centro  $a_0$  incumple la desigualdad 1, así que la primer iteración del algoritmo produce el elipsoide  $E(A_1, a_1)$  (figura 4.12) cuyo centro  $a_1$  incumple la desigualdad 2. Actualizamos y continuamos de la misma manera. Hacia la 5ta iteración el elipsoide  $E(A_5, a_5)$  (figura 4.16). Finalmente en la 7ta iteración el elipsoide  $E(A_7, a_7)$ , mostrado en la figura 4.17 el centro  $a_7 = (1.2661, 2.3217)^T$  es contenido finalmente en  $P$ .

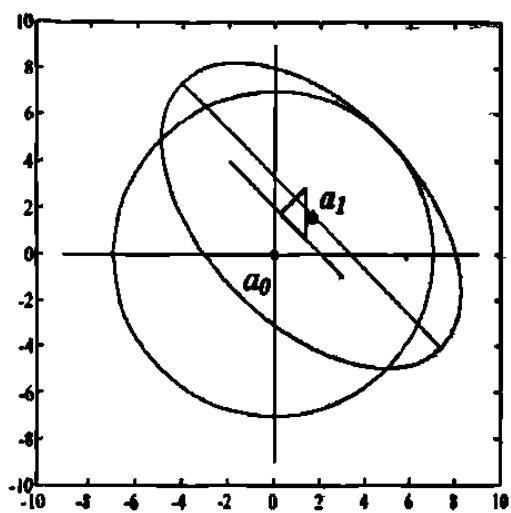


Figura 4.11.

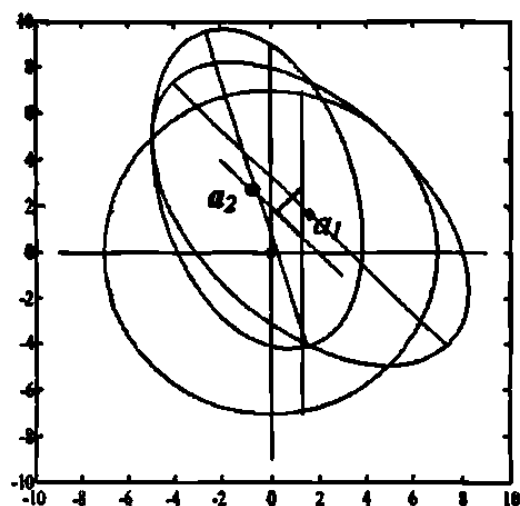


Figura 4.12.

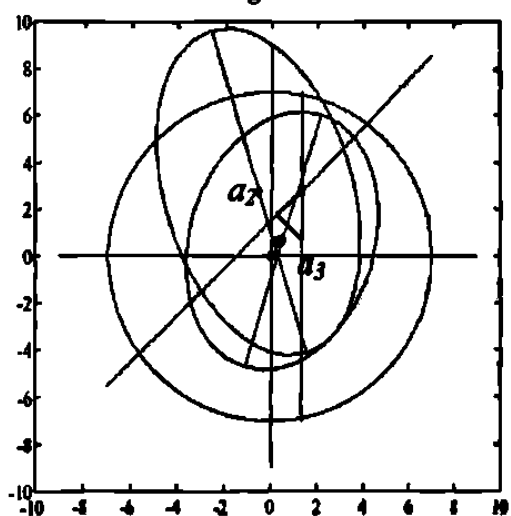


Figura 4.13.

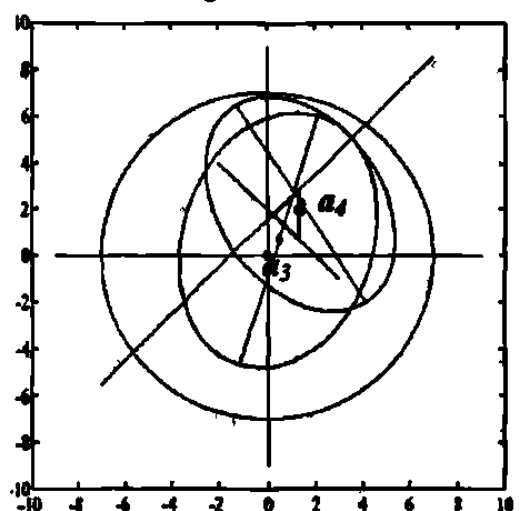


Figura 4.14.

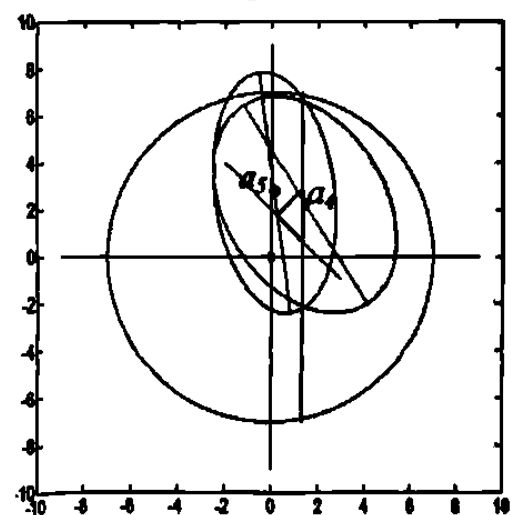


Figura 4.15.

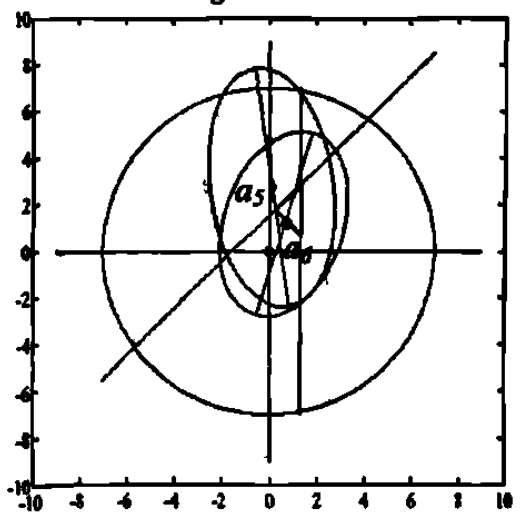


Figura 4.16.

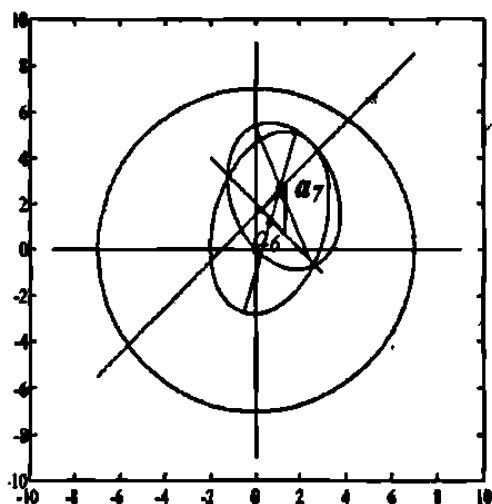


Figura 4.17.

Ahora veamos el mismo ejemplo pero utilizando el algoritmo elipsoidal modificado bajo con corte profundo. De igual manera iniciamos con el elipsoide  $E(A_0, a_0)$  (figura 4.18) donde  $a_0 = (0,0)^T$  y  $A_0 = R^2 I = \text{diag}((49,49)^T)$ . El centro  $a_0 = (0,0)^T$  incumple la desigualdad 1. La primer iteración del algoritmo produce el elipsoide  $E(A_1, a_1)$  (figura 4.19) donde  $a_1$  incumple la desigualdad 2. Actualizamos y continuamos de la misma manera. Finalmente en la 5ta iteración el centro  $a_5 = (0.7028, 2.0064)^T$  del elipsoide  $E(A_5, a_5)$  (figura 4.21) es contenido en  $P$ .

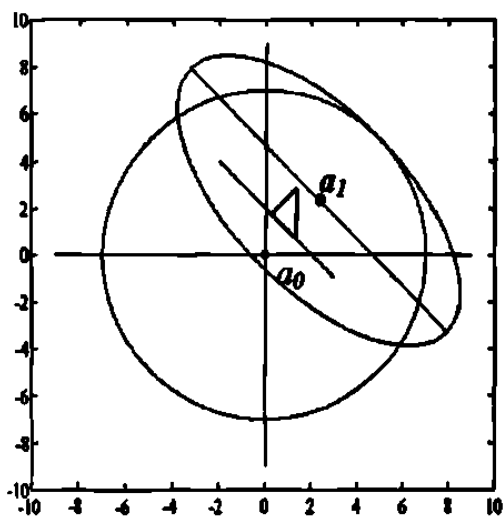


Figura 4.18.

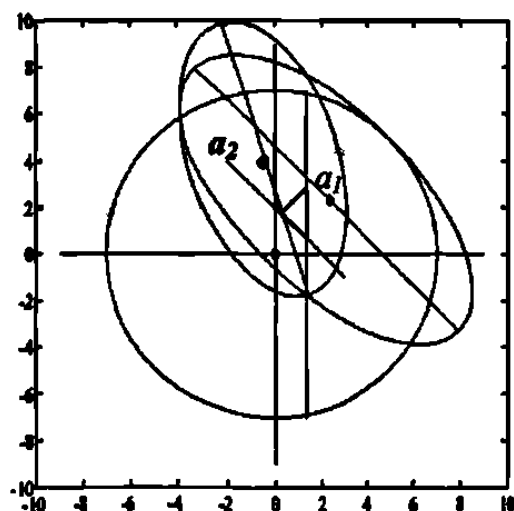


Figura 4.19.



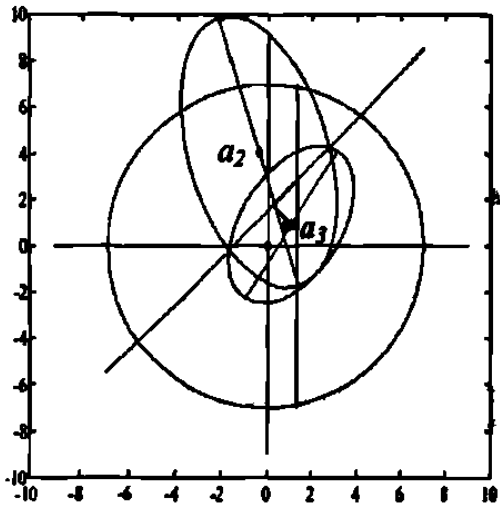


Figura 4.20.

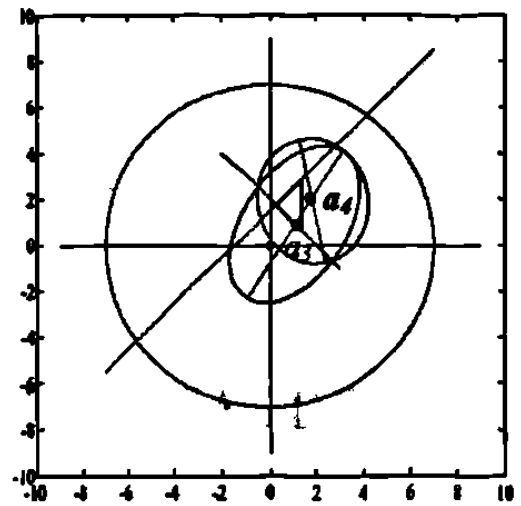


Figura 4.21.

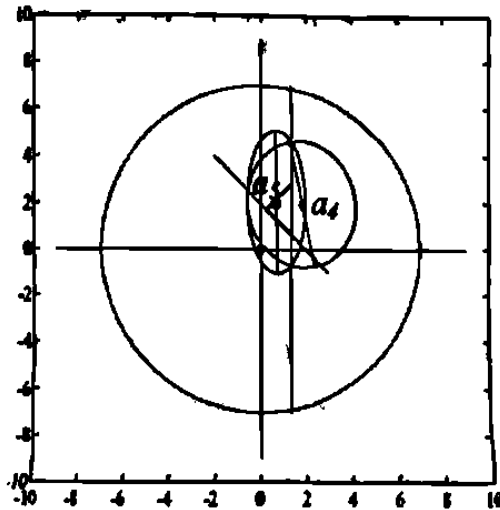


Figura 4.22.

**Nota:** En el ANEXO i se proporciona la programación del algoritmo 4.5.1. en MATLAB Ver. 5.3.0. así como la rutina utilizada para la generación de los gráficos presentados en las figuras 4.6- 4.22.

# CAPITULO 5

## SOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL MEDIANTE EL METODO ELIPSOIDAL MODIFICADO

### 5.1. Introducción.

Dentro del campo de la programación lineal el problema de optimización es realmente lo más interesante a ser resuelto, es por ello que el contenido de este capítulo es sin duda alguna la parte medular de este trabajo, sin restar mérito alguno a los capítulos previos, ya que para llegar hasta éste fue necesario analizar minuciosamente el contenido de ellos. Cabe aclarar que la importancia de éste trabajo radica en la aportación que se realiza en el actual capítulo y en la explicación detallada y sencilla posible sobre el método elipsoidal. Hasta ahora solo hemos considerado la aplicación del método elipsoidal al problema de factibilidad de un sistema de desigualdades lineales formalmente definido como,

Sea  $x \in \mathcal{R}^n$  y  $P = \{x \in \mathcal{R}^n | Cx \leq d\}$  determinar si  $P$  es o no vacío, y (5.1.)

en caso de no serlo encontrar un punto  $x \in P$ .

Durante el desarrollo de este trabajo se buscó el cómo adaptar el algoritmo elipsoidal utilizado para resolver tal problema, con la finalidad de resolver el problema de programación lineal descrito como,

Para  $x \in \mathcal{R}^n$  determinar:

$$x^* = \max_x \{g^T x \mid Bx \leq b, x \geq 0\} \quad (5.2.)$$

donde  $B \in \mathcal{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathcal{R}^m$ ;  $x$  y  $g \in \mathcal{R}^n$ .

En el capítulo 3 se analizan y se describen tanto los elementos como el algoritmo elipsoidal básico mismo. En el capítulo 4 se presentan las modificaciones que se realizan al algoritmo, para solucionar el problema de factibilidad (5.1) en un menor tiempo posible, además de reducir el espacio de búsqueda de algún punto  $x \in P$  en cada iteración.

La propuesta para problemas de programación lineal utiliza el algoritmo elipsoidal modificado bajo corte profundo enunciado en la secc. 4.5.1 como herramienta fundamental para solucionarlos. En la literatura existen adaptaciones del algoritmo elipsoidal básico (ver secc. 3.3.1) para resolver el problema de programación lineal. Por ejemplo en Bland [8] se discuten desde el punto de vista práctico como del teórico, cada una de las aproximaciones siguientes:

- Solución simultánea del primal y el dual en  $\mathcal{R}^{n+m}$  (ver Bland [8], p-1058).
- El método de bisección (ver Bland [8], p-1060),
- El método de deslizamiento de la función objetivo (ver Bland [8], p-1060).

## 5.2. Definición informal del algoritmo utilizado en la propuesta.

En esta sección se describirán de manera informal los elementos y el algoritmo de la propuesta y posteriormente en la sección 5.3. se dará la definición formal de los elementos básicos.

La propuesta aplica el algoritmo elipsoidal modificado bajo corte profundo (ver secc. 4.5.1) para resolver el problema de factibilidad (5.1). El conjunto  $Cx \leq d$  de

restricciones considerado se forma a partir de  $B \cup I_n$  lo que implica que  $x \in B \cup I_n$  si  $x \in B$  ó  $x \in I_n$  ó  $x \in B \cap I_n$  del problema de programación lineal (5.2).

De ser encontrado un  $x \in P$ , es decir, un elipsoide  $E(A, a)$  cuyo centro  $a$  sea contenido por  $P$ , se realiza una optimización lineal sobre dicha elipsoide. La optimización lineal se resuelve de la misma manera como se enuncia en la secc. 3.1.2. considerando a la función  $g^T x$  del problema de programación lineal (5.2) como la función lineal a ser optimizada.

La solución de dicha optimización lineal se considera como la cota superior  $\bar{x}$  de la solución  $x^*$  del problema (5.2) y el centro  $a$  del elipsoide actual como la cota inferior  $\underline{x}$ . De manera similar se establece que el valor de la función objetivo óptima  $\zeta^*$  es acotado por la evaluación de la función objetivo del problema (5.2) tanto en  $\bar{x}$  como en  $\underline{x}$ , que denotamos como  $\bar{\zeta}$  y  $\underline{\zeta}$  respectivamente.

Una vez definidos estos parámetros se realiza lo siguiente:

1. Se genera un nuevo punto denotado como  $x_{nvo}$ ,
2. Se evalúa la función objetivo de (5.2) en  $x_{nvo}$ , lo cual se denota como  $\zeta_{nvo}$ .
3. Se aplica un criterio de terminación considerando tanto  $\bar{\zeta}$  como  $\zeta_{nvo}$ .

Si se satisface el criterio de terminación se declara que la solución óptima  $x^*$  es el valor correspondiente al punto  $x_{nvo}$ ; de no ser así, se forma una restricción del tipo  $c^T x \leq \gamma$  para la cual el vector de coeficientes  $c$  de la restricción es el vector de coeficientes de la función objetivo del problema (5.1) en su dirección contraria, es decir el vector  $-g$  y como valor del lado derecho  $\gamma$ , la evaluación de la función objetivo con signo contrario de  $x_{nvo}$  que denotamos como  $-\zeta_{nvo}$ .

La restricción generada  $-g^T x \leq -\zeta_{nvo}$  se agrega al conjunto  $Cx \leq d$  para formar un nuevo conjunto de restricciones al cual aplicar el algoritmo elipsoidal modificado bajo corte profundo (4.5.1), al cual denotaremos como  $C'x \leq d'$ .

### 5.3. Elementos básicos de la propuesta.

Los elementos básicos de la propuesta son descritos en esta sección con la finalidad de formalizar ciertos aspectos que han sido mencionados ya en la sección 5.2r

#### 5.3.1. Datos.

Los datos del algoritmo de la propuesta consideran las características requeridas para la aplicación del algoritmo básico elipsoidal mencionadas en la sección 3.2.1.1. Para nuestro problema:

Sea  $x \in \mathcal{R}^n$  encontrar:

$$x^* = \max_x \{g^T x \mid Bx \leq b, x \geq 0\} \quad (5.3)$$

donde  $B \in \mathcal{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathcal{R}^m$  y  $g \in \mathcal{R}^n$ .

Aplicamos el algoritmo elipsoidal modificado de la secc. 4.5.1. a un conjunto  $Cx \leq d$  que será formado de la siguiente manera

$$C = \begin{bmatrix} B \\ -I_n \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} b \\ -0_n \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde  $C \in \mathcal{R}^{(m+n) \times n}$  y  $d \in \mathcal{R}^{m+n}$ .

Una vez encontrado el elipsoide  $E(A, a)$  cuyo centro  $a \in P$  es necesario definir los límites superior e inferior tanto para la solución óptima  $x^*$  como para el valor de la función objetivo óptima  $\zeta^*$ .

#### 5.3.2. Definición de cotas inferiores para $x^*$ y $\zeta^*$ .

La definición de una cota inferior para  $x^*$  y  $\zeta^*$  denotadas como  $\underline{x}$  y  $\underline{\zeta}$  respectivamente, resulta bastante sencilla pues una vez alcanzado el punto  $a_k \in P$  se realiza lo siguiente:

$$\underline{x} = a_k \text{ y } \underline{\zeta} = g^T \underline{x}. \quad (5.5)$$

### 5.3.3. Definición de una cota superior para $x^*$ y $\zeta^*$

Para definir la cota superior  $\bar{x}$  de  $x^*$  consideramos el elipsoide  $E(A, a)$  cuyo centro  $a \in P$  y la función objetivo del problema (5.2)  $g^T x$  para resolver el siguiente problema de optimización lineal,

Sea  $x \in \mathcal{R}^n$ , encontrar

$$\bar{x} = \max_x \{g^T x \mid x \in E\}, \quad (5.6)$$

donde  $g \in \mathcal{R}^n$

Este problema se resuelve aplicando la metodología enunciada en la sección 3.1.2.

A partir de lo anterior, la solución al problema es

$$\bar{x} = a_k + \frac{A_k g}{\sqrt{g^T A_k g}}. \quad (5.7)$$

Por otro lado, la definición de la cota superior del valor de la función objetivo óptima  $\bar{\zeta}$  se obtiene al sustituir el valor  $\bar{x}$  en la función objetivo  $g^T x$ , es decir:

$$\bar{\zeta} = g^T \left( a_k + \frac{A_k g}{\sqrt{g^T A_k g}} \right),$$

que es equivalente a

$$\bar{\zeta} = g^T a_k + \frac{g^T A_k g}{\sqrt{g^T A_k g}},$$

racionalizando  $\frac{g^T A_k g}{\sqrt{g^T A_k g}}$ , obtenemos finalmente que:

$$\bar{\zeta} = g^T a_k + \sqrt{g^T A_k g}. \quad (5.8)$$

### 5.3.4. Generación de $x_{nvo}$ y $\zeta_{nvo}$

Una vez definidos las cotas inferior y superior  $\underline{x}$  y  $\bar{x}$  así como sus valores objetivo correspondientes  $\underline{\zeta}$  y  $\bar{\zeta}$  se genera un nuevo punto denotado como  $x_{nvo}$  así como el valor de la función objetivo en dicho punto  $\zeta_{nvo}$ .

El nuevo punto  $x_{nvo} \in (\theta \underline{x} + (1-\theta)\bar{x})$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  aplicando la siguiente relación:

$$x_{nvo} = \underline{x} + \lambda s, \quad (5.9)$$

donde  $\lambda \in \mathcal{R}$  y  $s \in \mathcal{R}^n$ .

El parámetro  $\lambda$  es llamado **paso de factibilidad máximo** y el vector  $s$  la **dirección ascendente** de la búsqueda del nuevo punto. La **dirección ascendente**  $s$  se define de la siguiente manera:

$$s = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{\|\bar{x} - \underline{x}\|}, \quad (5.10)$$

Para el **paso de factibilidad**  $\lambda$  debe considerarse el hecho de que toda solución factible  $x$  al problema (5.2) debe cumplir la condición  $x \in P$  donde  $P = \{x \in \mathcal{R}^n \mid Cx \leq d\}$ .

Por lo anterior, sustituyendo  $x_{nvo} = \underline{x} + \lambda s$  en la desigualdad  $Cx \leq d$ , tenemos que  $C(\underline{x} + \lambda s) \leq d$ , o bien

$$\begin{aligned} C\underline{x} + \lambda Cs &\leq d \\ \lambda Cs &\leq d - C\underline{x} \\ \lambda &\leq \frac{(d - C\underline{x})}{(Cs)} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lambda = \min \left[ \frac{(d - C\bar{x})_i}{(Cs)_i} \right] \text{ para } i=1, \dots, m \quad (5.11)$$

Finalmente

$$x_{nvo} = \underline{x} + \left( \min_{i=1, \dots, m} \left[ \frac{(d - C\bar{x})_i}{(Cs)_i} \right] \right) \left( \frac{\bar{x} - \underline{x}}{\|\bar{x} - \underline{x}\|} \right) \quad (5.12)$$

$$\zeta_{nvo} = g^T x_{nvo}. \quad (5.13)$$

### 5.3.5. Criterio de terminación.

Los cálculos pueden ser concluidos una vez que  $\zeta_{nvo}$  y  $\bar{\zeta}$  son lo suficiente cercanos.

El criterio de terminación del algoritmo propuesto para declarar si  $x_{nvo}$  y  $\zeta_{nvo}$  son la solución  $x^*$  y valor  $\zeta^*$  óptimos, establece como tal que  $\eta \leq \beta$ ,  $\eta$  y  $\beta \in \mathcal{R}$ , donde

$$\eta = \frac{\bar{\zeta} - \zeta_{nvo}}{\bar{\zeta}}, \quad (5.14)$$

y  $\beta$  un parámetro de terminación preestablecido.

Cuando este criterio se cumple podemos afirmar que la solución óptima ha sido encontrada

$$x^* = x_{nvo} \text{ y } \zeta^* = \zeta_{nvo}. \quad (5.15)$$

En caso contrario se utilizará la función objetivo como hiperplano de corte del actual elipsoide.

### 5.3.6. Utilización de la función objetivo $g^T x$ como hiperplano de corte de $E$ .

Una vez revisado que la condición de terminación ha sido incumplida, procedemos a la determinación de un hiperplano de corte  $H = \{x \in \mathcal{R}^n \mid g^T x = \zeta_{nvo}\}$  que seccione al



elipsoide  $E$  para el cual  $a \in P$ , con la finalidad de reducir la región de factibilidad del problema (5.2).

Lo anterior se realiza agregando la desigualdad  $-g^T x \leq -\zeta_{\text{mvo}}$  al conjunto  $Cx \leq d$  formado según la secc 5.4,

Concluimos que la definición del nuevo politopo, al cual se le aplicará el algoritmo elipsoidal modificado bajo corte profundo enunciado en la secc. 4.5.1. es

$$P' = \{x \in \mathcal{R}^n \mid Cx \leq d, -g^T x \leq -\zeta_{\text{mvo}}\}, \quad (5.17)$$

por lo tanto,

$$P' = \{x \in \mathcal{R}^n \mid C'x \leq d'\}, \quad (5.18)$$

es el nuevo politopo al cual se puede aplicar de nueva cuenta el proceso antes mencionado.

#### 5.4. Algoritmo para solucionar problemas de programación lineal mediante el algoritmo elipsoidal modificado.

- ✓ **Los datos de entrada.** Una función lineal  $g^T x$ , donde  $x$  y  $g \in \mathcal{R}^n$  poseen coeficientes enteros, a ser maximizada sujeta a un conjunto de restricciones funcionales y de signo  $Bx \leq b$  y  $x \geq 0$  respectivamente donde  $B \in \mathcal{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathcal{R}^m$ , también de coeficientes enteros, que transformaremos a la forma

$$Cx \leq d \text{ donde } C = \begin{bmatrix} B \\ -I_n \end{bmatrix}; \text{ y } d = \begin{bmatrix} b \\ 0_n \end{bmatrix};$$

para determinar:

$$x^* = \max_x \{g^T x \mid Cx \leq d\}$$

- ✓ **Paso de iniciación**

- i)  $\beta \in \mathcal{R}$ , (parámetro de terminación preestablecido).

$$\text{ii) } C^0 x \leq d^0 \text{ donde } C^0 = \begin{bmatrix} B \\ -I_n \end{bmatrix} \text{ y } d^0 = \begin{bmatrix} b \\ 0_n \end{bmatrix}.$$

✓ **Paso general**

iii) Aplicar algoritmo elipsoidal de la secc. 4.5.1 al sistema de desigualdades  $C^l x \leq d^l$ , donde tanto  $C^l \in \mathcal{R}^{(m+l) \times n}$  como  $d^l \in \mathcal{R}^{m+l}$  poseen coeficientes enteros. Se considera que el poliedro  $P^l = \{x \in \mathcal{R}^n | C^l x \leq d^l\}$  es vacío o acotado y dimensionalmente completo.

➤ *Paso de iniciación,*

a)  $k = 0$ ,

b)  $N = 2n((2n+1)\langle C^0 \rangle + n\langle d^0 \rangle) - n^3$ ,

c)  $a_0 = 0$  y  $A_0 = R^2 I$  con  $R = \sqrt{n} 2^{\langle C^0 d^0 \rangle - n^2}$  (o cualquier  $R$  que contenga a  $P$ ), de manera que  $E_0 = E(A_0, a_0)$  es el elipsoide inicial.

➤ *Paso general,*

d) Sí  $k = N \Rightarrow$  ¡el algoritmo para!, y se declara que  $P$  es vacío,

e) Sí  $a_k \in P \Rightarrow$  ¡el algoritmo para!,  $a_k$  es la solución factible buscada ir al inciso o).

f) Sí  $a_k \notin P \Rightarrow$  esto implica que al menos una desigualdad lineal a sido violada por el actual centro  $a_k$ , digamos  $c^T x \leq \gamma$  del sistema  $C^l x \leq d^l$ , es decir,  $c^T a_k > \gamma$ , entonces determinar:

g) El conjunto de desigualdades incumplidas (si más de una desigualdad es incumplida).

h) Cuantificar el incumplimiento a cada desigualdad por centro actual  $a_k$  a través de,

$$\alpha = \frac{c^T a_k - \gamma}{\sqrt{c^T A_k c}}.$$

i) Sí  $\alpha \geq 1 \rightarrow$  ¡el algoritmo para!, y se declara que  $P$  es vacío.

j) Si  $\alpha \in (0,1) \rightarrow$  Seleccionar el vector de coeficientes  $c$  y el  $\alpha$  resultante de la desigualdad mayormente incumplida, y establecer

$$k) \quad b = \frac{A_k c}{\sqrt{c^T A_k c}}$$

$$l) \quad a_{k+1} = a_k - \left( \frac{1+n\alpha}{n+1} \right) b,$$

$$m) \quad A_{k+1} = \left( \frac{n^2(1-\alpha^2)}{n^2-1} \right) \left( A_k - \left( \frac{2(1+n\alpha)}{(n+1)(1+\alpha)} \right) b b^T \right),$$

Establecer:

$$o) \quad \text{Cotas inferiores para } x^* \text{ y } \zeta^* \Rightarrow \underline{x} = a_k; \quad \underline{\zeta} = g^T a_k.$$

$$p) \quad \text{Cotas superiores para } x^* \text{ y } \zeta^* \Rightarrow \bar{x} = a_k + \frac{A_k g}{\sqrt{g^T A_k g}}; \quad \bar{\zeta} = g^T \bar{x}.$$

q) Nuevo punto  $x_{nvo} = \underline{x} + \lambda s$ , donde  $\lambda \in \mathcal{R}$  y  $s \in \mathcal{R}^n$ . Tal que

$$s = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{\|\bar{x} - \underline{x}\|}, \quad \lambda = \min \left[ \frac{(d - C\underline{x})_i}{(Cs)_i} \right] \text{ para } i=1, \dots, m$$

$$\text{y } \zeta_{nvo} = g^T x_{nvo}.$$

$$r) \quad \eta = \frac{\bar{\zeta} - \zeta_{nvo}}{\bar{\zeta}}, \text{ donde } \eta \in \mathcal{R}$$

s) ir a v.

iv) Si  $\eta \leq \beta \Rightarrow$  ¡el algoritmo para! y declara solución óptima encontrada, la cual se define como

$$x^* = x_{nvo} \quad \text{y} \quad \zeta^* = \zeta_{nvo}.$$

v) Si  $\eta > \beta \Rightarrow$  realizar

$$P^{l+1} = \{x \in \mathcal{R}^n \mid C^l x \leq d^l, -g^T x \leq -\zeta_{nvo}\} = \{x \in \mathcal{R}^n \mid C^{l+1} x \leq d^{l+1}\}$$

y volver al inciso iii).

**Nota:** En el ANEXO i se proporciona la programación del algoritmo 5.4 en MATLAB Ver. 5.3.0.

## CAPITULO 6

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 6.1. Conclusiones.

La interrogante con la cuál se inició este estudio sobre la posibilidad de resolver problemas de Programación Lineal aplicando el método elipsoidal quedó contestada con el método propuesto en el capítulo 5, por lo que podemos concluir que propósito se cumplió. Enlistando los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo tenemos que:

1. La principal contribución es la propuesta del método elipsoidal modificado (ver capítulo 4, secc. 4.5.1) para la solución de problemas de Programación Lineal (capítulo 5) con la particularidad de ser una variante del método de corte profundo que toma en consideración los gradientes de la función objetivo y de las restricciones del problema, para establecer, en cada etapa del proceso iterativo, el paso máximo de búsqueda del óptimo con factibilidad.

2. Se comprobó que el AE resulta ser de alto contenido teórico (ver capítulo 1) lo que se impone a su deficiencia desde el punto de vista práctico, pues ciertamente es un algoritmo de lenta convergencia (ver sección 4.7).
3. Quedó claro el fundamento ideológico implícito en el algoritmo elipsoidal básico (ver capítulo 2).
4. Se demostró que el AE bajo corte profundo es mejor que bajo corte central desde el punto de vista práctico (capítulo 4), pues la reducción de la región de búsqueda en cada iteración es bastante considerable en comparación con la siempre constante que marca el AE (ver secc. 3.2.1.3., (3.19)) bajo los parámetros utilizados en el corte central.
5. Desafortunadamente no fué posible obtener información suficiente para modificar los parámetros de dilatación, compresión y expansión considerados en el AE bajo corte profundo (ver sección 4.4., (4.6)) para mejorar la convergencia del algoritmo.
6. Durante la aplicación del AE pudo observarse que es de fácil programación computacional (ver ANEXO i).
7. Otro de los aspectos interesantes que se encontraron durante el desarrollo del presente trabajo fué la motivación al estudio, análisis y mejoramiento (desde el punto de vista algorítmico) de los problemas de membresía, separación y validación implícitos en la estructura del AE.

## **6.2. Límites del estudio.**

Las principales limitantes del estudio se presentaron en virtud a la complejidad del método. Tal como se mencionó en el capítulo 0, para realizar el trabajo fue necesario el conocimiento de conceptos básicos de diversas disciplinas, tales como: la Programación

Lineal, el Algebra Lineal y la Complejidad Computacional así como el discernimiento de los elementos del AE. Siendo está última la de mayor grado de dificultad.

Sin duda alguna como todo principiante en la aplicación de cualquier técnica la carencia de destreza en el manejo de la misma no permitió la agilización del estudio.

### **6.3. Recomendaciones.**

Guardando las debidas proporciones creemos que sería benéfico en pro del desarrollo de tecnologías en la optimización sugerir las siguientes recomendaciones:

1. Determinación del elipsoide de volumen mínimo con respecto al politopo inicial con el cuál se incia la aplicación del método propuesto (ver secc. 5.4), así como el analisis y mejoramiento del paso de factibilidad (ver (5.11)) enunciado en la secc. 5.3.
2. Sugerimos que el método propuesto en el capítulo 5 sea analizando y mejorando, para posteriormente aplicarlo en la solución de problemas con la estructura especial mencionados en la Introducción de este trabajo, o bien para solucionar la Función Dual Lagrangeana realizando opcionalmente la aproximación de cualquiera de los siguientes conjuntos:
  - a) El conjunto de restricciones de acoplamiento.
  - b) El conjunto de restricciones con estructura de bloque
  - c) El conjunto generado con la unión de los conjuntos anteriores.
 por el elipsoide Löwner John generado bajo corte profundo obtenido a través del algoritmo enunciado en la secc. 5.4 de este trabajo.
3. Realizar comparaciones entre el método de deslizamiento de la función objetivo (ver [8], p-1060) y el método propuesto en este trabajo (ver capítulo 5).

# **ANEXO i**

**BASE DE DATOS**

```
%ARCHIVO datos
k=0; d=[4;1];
```

```
%DATOS PARA EL EJEMPLO
%DE LAS SECC'S. 3.3 Y 4.6
```

```
%-BOLA INICIAL a, A'
%a=2; %R=1; %a=[0;0];
%Ac=[R^2 0;0 R^2];
%-SISTEMA DE DESIGUALDADES
%C=[1 0;-1 -1;0 1]; %dr=[.8;-1;5];
%-Criterio de parada/propuesta
%error=0.01;
```

```
%PROBLEMA DE LA SECCA.7
```

```
k=0;
%-BOLA INICIAL a, A'
n=2; R=7; a=[0;0]; Ac=[R^2 0;0 R^2];
%-SISTEMA DE DESIGUALDADES
C=[-1 -1;3 0;-2 2]; dr=[-2;4;3];d=[4;1];
%-Criterio de parada/propuesta
error=0.01;
```

**RUTINA PARA PROBAR CENTRAL-DEEP.  
GRAFICAMENTE.**

```
datos; maxiter=0; zmax=[]; vnew=0; xnew=[];
for y=0:1:maxiter
%CENTRAL
```

```
[%Z,a,R,viola,C,dr,d,Ae,a,vnew,error,b]=PFccs02(n,R,a,
Ae,C,dr,d,vnew,error)
```

```
[%n,C,dr,a,Ae,d,vlast,xnew,vnew,zmax,vmax,error]=gra
felipse02(Z,a,R,viola,C,dr,d,Ae,vnew,b)
%figure
```

```
[%n,C,dr,a,Ae,d,vlast,xnew,vnew,zmax,vmax,error]=gra
felipse02(Z,a,R,viola,C,dr,d,Ae,vnew,b)
%CENTRAL
%DEEP
```

```
[Z,a,R,viola,C,dr,d,Ae,a,vnew,error,b]=PFdeep02(n,R,a,
Ae,C,dr,d,vnew,error)
```

```
[n,C,dr,a,Ae,d,vlast,xnew,vnew,zmax,vmax,error]=grafel
ipse02(Z,a,R,viola,C,dr,d,Ae,vnew,b)
figure
```

```
[n,C,dr,a,Ae,d,vlast,xnew,vnew,zmax,vmax,error]=grafel
ipse02(Z,a,R,viola,C,dr,d,Ae,vnew,b)
figure
```

```
%DEEP
```

```
%cuando encuentra el punto factible
```

```
%if viola==0
% a
% y
%break
```

```
% else
% y=y+1;
%end
```

```
%end
```

```
%Criterio de terminación según secc.5.4
```

```
%
```

```
if error<=0.01
```

```
'ya termine con xnew'
```

```
xnew
y
break
```

```
else
y=y+1;
end
end
%
```

**LAS FUNCIONES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA  
ANTERIOR**

(Algoritmos de la secciones 3.2.1)

```
function
[Z,a,R,viola,C,dr,d,Ae,a,vnew,error,b]=PFccs02(n,R,a,
Ae,C,dr,d,vnew,error)
```

```
%Algoritmo Método Elipsoidal bajo central cut
```

```
%M='pto-fact', si existe restriccion violada
```

```
%M='pto-optimo', si no-existe restriccion violada
```

```
%MEMBRESIA
```

```
[m,n]=size(C);
```

```
%CUANDO a, SATISFACE  $Cx \leq dr$ 
```

```
if  $C'a \leq dr$ 
```

```
a; Ae; Z=inv(Ae); l=0; viola=0;
```

```
%CUANDO a, NO-SATISFACE  $Cx \leq dr$ 
```

```
%RUTINA PARA EL CENTRAL CUT
```

```
else
```

```
for i=1:1:m
```

```
if  $C(i,:)*a > dr(i)$ 
```

```
c=C(i,:);
```

```
viola=i;
```

```
end
```

```
l=i;
```

```
end
```

```
end
```

```
%RUTINA PARA EL CENTRAL CUT
```

```
switch l
```

```
%Paso iterativo General
```

```
case 1,
```

```
%CENTRAL
```

```
%Parámetros de paso, dilatación y expansión
```

```
tas=1/(n+1); sigma=2/(n+1); delta=n^2/(n^2-
```

```
1);
```

```
%CENTRAL
```

```
%ACTUALIZACION DE LOS PARAMETROS
```

```
b,a,Ae
```

```
b=(1/sqrt(c'*Ae*c))*[Ae*c]; a=n-tas*b;
```

```
Ae=delta*(Ae-sigma*(b*b'));
```

```
Z=inv(Ae); l=0;
```

```
%CENTRAL
```

```
%
```

```
case 0,
```

```
end %del SWITCH
```

```
end %del FOR
```

(Algoritmos de las secciones 4.5.1 y 5.4)

```
function
```

```
[Z,a,R,viola,C,dr,d,Ae,a,vnew,error,b]=PFdeep02(n,R,a,
Ae,C,dr,d,vnew,error)
```

```
%Algoritmo Método Elipsoidal, CON PROPUESTA
```

```
%M='pto-fact', si existe restriccion violada
```

```
%M='pto-optimo', si no-existe restriccion violada
```

```
n=2;
```

```
%
```

```
%PROCESO ITERATIVO
```

```
%k INDICA LA ELIPSOIDE A OBTENER A PARTIR  
DE
```

```
%LOS ULTIMOS DATOS a,Ae,C y dr, se aplica
```

```
%lo siguiente para modificar el valor de k.
```

```
%if M='pto-fact',
```

```
% k=k+1
```

```
%else
```

```
% k=0
```

```
%end
```



```

%%NOTA: Esta condición se evalúa en la otra rutina
%M='pto-fact' si existe restricción violada
%M='pto-optimo', si no existe restricción violada
%for j=0:1:k
%MEMBRESIA
D=[]; [m,n]=size(C);
%CUANDO a, SATISFACE Cr<=dr
if C*a<=dr
    a; Ac; Z=inv(Ac); i=0;
    viola=0
%CUANDO a, NO-SATISFACE Cr<=dr
%
%RUTINA PARA EL DEEP-CUT
else
%ENFOQUE SOLO AREST'S QUE NO-
SATISFECHAS: -> C(i,:)*a>dr(i)
D=[];
for i=1:1:m
    if C(i,:)*a>dr(i)
        c=C(i,:);
        viola=i;
        rh=dr(i);
        alfa1=((c*a)-rh)/sqrt(c'*Ac*c);
        D=[D;alfa1 i]
    end
end
i=1;
end
end
%RUTINA PARA EL DEEP-CUT
%
switch i
%Paso iterativo General
case 1,
%
%DEEP
alfas=D(:,1)
[alfa,i]=max(alfas);
alfa; viola=D(i,2);
%Parámetros de paso, dilatación y expansión
tao=(1+n*alfa)/(n+1);
sigma=2*(1+n*alfa)/(n+1)*(1+alfa);
delta=(n^2*(1-alfa^2))/(n^2-1);
%DEEP
%
%ACTUALIZACION DE LOS PARAMETROS
b,a,Ac
Ac;
b=(1/sqrt(c'*Ac*c))*[Ac*c];
a=a-tao*b;
Ac=delta*(Ac-sigma*(b*b));
Z=inv(Ac);
i=0;
case 0,
'PUNTO FACTIBLE HA SIDO ENCONTRADO'
end %del SWITCH
end %del FOR

```

```

PARA GRAFICAR
%Rutina para graficar
function
[n,C,dr,a,Ac,d,vlast,xnew,vacw,zmax,vmax,error]=grafel
ipse02(Z,a,R,viola,C,dr,d,Ac,vnew,b)
%PRIMERA PARTE, SOLO GRAFICAS, NO
OPERACIONES
%GRAFICA bola inicial a partir de R
x1=R:0.01:R; x2=sqrt(R^2-x1.^2);
plot(x1,x2,'r',x1,x2,'r')
hold on
%GRAFICA-ellipse (Z,a)
[U,S,V]=svd(Z);

```

```

bins=diag(S);
%Eigenvalores
e=1/sqrt(bins);
%
alfa1=zeros(2,101);
alfa1(2,:)=e(2):2*e(2)/100:e(2);
k11=ones(size(alfa1(2,:)))
k12=bins(2)*alfa1(2,:).^2;
alfa1(1,:)=e(1)*sqrt(k11-k12);
X1=diag(a)*ones(size(alfa1))+V*alfa1;
%
alfa2=zeros(2,101);
alfa2(2,:)=e(2):2*e(2)/100:e(2);
k21=ones(size(alfa2(2,:)))
k22=bins(2)*alfa2(2,:).^2;
alfa2(1,:)=e(1)*sqrt(k21-k22);
X2=diag(a)*ones(size(alfa2))+V*alfa2;
X=[X1 X2];
%GRAFICA-ellipse
plot(X(1,:),X(2,:),'k','linewidth',1)
%grid
%GRAFICA-Centro de la ellipse
plot(a(1),a(2),'kdiamond')
hold on
%CUANDO NECESARIO GRAFICAR EL MAXIMO
PUNTO
%QUE DEBE SER CONTENIDO POR EL
ELIPSOIDE Löwner John
%grafica de b (min-max), La minimización interna.
%b %plot(-b(1),-b(2),'go') %hold on
%plot(b(1),b(2),'mo') %x1=-b(1) 0];
%x2=-b(2) 0]; %plot(x1,x2,'g')
%hold on %GRAFICA-ejes
axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2])
hold on
%centro inicial
x1=[0]; x2=[0]; plot(x1,x2,'ro')
hold on
%ejes x
x1=-1.2 1.2]; x2=[0 0]; plot(x1,x2,'k-')
hold on
%ejes y
x1=[0 0]; x2=-1.2 1.2]; plot(x1,x2,'k-')
hold on
%GRAFICA DE LAS RESTRICCIONES
%-POLITOPO-INICIAL
%-Restricción 1) x1<=0.8
x1=[.8 .8]; x2=[0.2 .5];
plot(x1,x2,'b','linewidth',2)
hold on
%-Restricción 2) -x1-x2<=-1
x1=[.5 0.8]; x2=[0.5 .2];
plot(x1,x2,'b','linewidth',2)
hold on
%-Restricción 3) x2<=0.5
x1=[.5 .8]; x2=[.5 .5];
plot(x1,x2,'b','linewidth',2)
hold on
%RESTRICCIÓN ADICIONAL
if vacw~=0
x1=[(-vacw/-d(1)) 0];
x2=[0 (-vnew/-d(2))];
plot(x1,x2,'k-')
hold on
end
%RESTRICCIÓN ADICIONAL
%-SEGUNDA PARTE, GRAFICAS-OPERACIONES
switch viola

```

```

%IDEA, viola=1,2,3,Rest-originales
case 1,
  %-Restricción 1  $x_1 \leq 0.8$ 
  x1=[.8 .8]; x2=[-1 1];
  plot(x1,x2,'y-','linewidth',5)
  hold on
  n=2;M=1;
case 2,
  %-Restricción 2  $-x_1 - x_2 \leq -1$ 
  x1=[-.4 1.4]; x2=[1.4 -4];
  plot(x1,x2,'m-')
  hold on
  n=2; M=1;
case 3,
  %-Restricción 3  $x_2 \geq 0.5$ 
  x1=[-1 1]; x2=[.5 5];
  plot(x1,x2,'c-','linewidth',5)
  hold on
  n=2;M=1;
%IDEA, viola=0 a fact, calcular xnew
case 0,
  %SOLO CUANDO a FACTIBLE!!
  axis([-2 1.4 -2 1.2])
  %GRAFICA-dir (zmax-a)
  b1=(1/sqrt(d'*Ae*d))*|Ae*d|
  zmax=a+b1; vnew=d'*zmax;
  x1=[a(1) zmax(1)]; x2=[a(2) zmax(2)];
  plot(x1,x2,'k-')
  hold on
  %gráfica de zmax
  x1=[zmax(1)]; x2=[zmax(2)];
  plot(x1,x2,'rh','markersize',8)
  hold on
  %Grafica de la Fun-Obj  $4x_1 + x_2 = v_{max}$ 
  x1=[0 2]; x2=[vmax (vmax-8)];
  plot(x1,x2,'m-^')
  hold on
  %xnew=a+(lambda*dir)
  %dirección=dir, normalizada
  dir=(zmax-a)/norm(zmax-a);
  %Paso=lambda, depende de
  %Cxnew<=dr, C(a+(lambda*dir))<=dr
  %Ca+C(lambda*dir)<=dr
  %lambda(C*dir)<=dr-Ca, por lo
  %tanto lambda<=(dr-Ca)/(C*dir)
  %de los casos posibles
  %1) lambda<=(N-)/(N+), lambda=libre
  %2) lambda<=(N-)/(+), lambda=min
  G=C*dir; H=(dr-C*a);
  [m,n]=size(H);
  %para la selección de lambda CHECAR
  %(C*dir)>=0->lambda<=(dr-C*a)/(C*dir)
  J=[];
  for i=1:1:m
    if G(i)>=0
      J=[J;H(i)/G(i)];
      lambda=min(J);
    end
  end
  % 'chechar que se cumpla lambda*(C*dir)<=(dr-C*a)'
  % lambda*G<=H
  %Con esa lambda, encontrar el xnew y
  %graficario
  xnew=a+(lambda*dir);
  x1=xnew(1); x2=xnew(2);
  plot(x1,x2,'kp','markersize',6)
  hold on
  'Hay alguna restricción activa :)?'
  R1=C*xnew==dr
  [m,n]=size(R1);
  for i=1:1:m
    if R1(i)==1
      i; Act={C(i,:)} dr(i);
    end
  end
  dir;
  'PUNTOS PRINCIPALES Y VALOR FUN-OBJ'
  a
  vnew=d'*a
  xnew
  vnew=d'*xnew
  zmax
  vnew=d'*zmax
  %Siempre cumplir esto cuando maximización
  'siempre cumplir vnew>=vlast'
  vnew>=vlast
  'también checar vnew>=vlast'
  vnew>=vlast
  %para agregar la nueva restricción
  C=[C;d']
  dr=[dr;-vnew]
  Ae; a; d; n=2; M=2;
  %Checando la diferencia entre vnew y vnew
  error=(vmax-vnew)/vmax
  %con una aprox del 1% es suficiente
  %if error<=0.01
  % 'ya termine con xnew'
  % xnew
  %end
  %nueva restricción, grafica d'*xnew=vnew
  %-4x1-x2<=vmax
  %gráfica de zmax
  x1=[(-vnew/d(1)) 0];
  x2=[0 (-vnew/d(2))];
  plot(x1,x2,'k-')
  hold on
  %IDEA, viola=0,1,2,3, quiere decir
  %que se esta violando la restricción que
  %pasa por xnew!
  otherwise,
  %nueva restricción, grafica d'*xnew=vnew
  %-4x1-x2<=vmax
  %gráfica de zmax
  x1=[(-vnew/d(1)) 0];
  x2=[0 (-vnew/d(2))];
  plot(x1,x2,'k-')
  hold on
  M=1;
  n=2;
end %del switch

```

# **ANEXO ii**

## **a. Complejidad Computacional.**

Con el progreso en la programación combinatoria, autómatas y en las funciones recurrentes llegó a ser necesario el estudio de la eficacia de los algoritmos. El término **complejidad computacional de algoritmos** apareció por primera vez en 1963 en el contexto de las secuencias recursivas.

Para saber la clase a la cual pertenece un algoritmo, existen dos posibles criterios para su clasificación: **su tiempo de ejecución y el espacio utilizado durante la aplicación del mismo**. Es importante saber que el tiempo de ejecución de un algoritmo para resolver algún problema depende precisamente de su tamaño.

Existen dos formas para definir el concepto de **tiempo de ejecución** con el fin de indicar el número de operaciones bit elementales necesarias en la ejecución de un algoritmo por computadora: **el peor caso y el llamado caso promedio**.

Por la cantidad de dígitos disponibles en las computadoras y los lenguajes de programación, los algoritmos varían considerablemente en su desempeño, por lo tanto uno debe modelar los cálculos de la complejidad computacional bajo métodos universales; por ejemplo, el modelo "Máquina de Turing" (ver [2], p-22).

La aplicación de un algoritmo para la solución de un problema  $\Pi \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  a una lista de datos de entrada  $z \in \Sigma^*$ , determina un resultado  $y$  tal que  $(z,y)$  estén en  $\Pi$ , o termina sin enviar tal resultado  $y$ , cuando no existe tal resultado.

Un algoritmo puede tener la forma de un programa computacional, el cual formalmente se ajusta a una cadena de símbolos tomados de un alfabeto finito. Matemáticamente un algoritmo puede ser definido como una cadena finita  $A$  de 0's y 1's. Se dice que un  $A$  resuelve el problema  $\Pi$  o  $A$  es un algoritmo de éste, si para cualquier instancia  $z$  de  $\Pi$ , cuando se proporciona la cadena  $(A,z)$  a una máquina

universal *Turing*, la máquina para después de un número finito de pasos hasta proporcionar una cadena  $y$  con  $(z,y) \in \Pi$ , o no envía nada en caso de no existir tal cadena  $y$ .

En la práctica, el tiempo de ejecución de un algoritmo depende de la implementación eventual del algoritmo. Definimos la función de tiempo de ejecución de un algoritmo  $A$  como la función  $f: Z_+ \rightarrow Z_+$ , tal que,

$$f(\sigma) = \max_{z, \text{ tamaño}(z) \leq \sigma} (\text{tiempo de ejecución de } A \text{ para los datos } z),$$

donde  $\sigma \in Z_+$ .

Si  $f, g_1, \dots, g_m$  son funciones de valor real (posiblemente multivariadas), entonces  $f$  se dice que es polinomialmente acotada por  $g_1, \dots, g_m$ , si existe una función  $\phi$  tal que  $\phi \geq f$ , y tal que  $\phi$  surja como consecuencia de la composición de  $g_1, \dots, g_m$ , y de algunos polinomios.

En el caso particular en el cual  $g_1, \dots, g_m$  son polinomios, esto da como resultado que  $f$  sea polinomialmente acotado por  $g_1, \dots, g_m$ , por lo tanto, la cota superior de  $f$  es un polinomio. Cuando ocurre lo anterior se dice que  $f$  es una función polinomialmente acotada (ver [31], p-17).

Un algoritmo de tiempo polinomial o polinomial, es aquel cuya función de tiempo de ejecución es polinomialmente acotada. Se dice que un problema posee un tiempo de solución polinomial o es polinomialmente resuelto, si existe un algoritmo de tiempo polinomial que lo resuelva. El principal interés que existe sobre el tiempo de ejecución de un algoritmo es su comportamiento asintótico. A menudo se dice que el tiempo de ejecución es  $O(g(\sigma))$ , para alguna función  $g(\sigma)$ , es decir

$$f(\sigma) = O(g(\sigma)),$$

si existe una constante  $c > 0$  tal que  $f(\sigma) \leq cg(\sigma)$  para  $\sigma \geq \sigma_0$  para algún  $\sigma_0$  (ver [31], p-17), lo que significa que existe una constante  $c$  tal que la cota superior del tiempo de ejecución es  $cg(\sigma)$ .

Las operaciones aritméticas elementales que realiza todo algoritmo son: suma, resta, multiplicación, división, y comparación de números. Es fácil ver que en aritmética racional estas pueden ser realizadas por algoritmos de tiempo polinomial. Por lo tanto, para derivar la polinomialidad de un algoritmo el cual desempeña una secuencia de operaciones aritméticas elementales, es suficiente mostrar que el número total de estas operaciones es polinomialmente acotado por el tamaño de los datos de entrada, y que el tamaño de los números intermedios para los cuales estas operaciones aritméticas elementales son aplicadas, está polinomialmente acotado por el tamaño de los datos de entrada (ver [10], p-17).

El concepto tamaño de los datos de entrada puede ser formalizado si consideramos un esquema de codificación que mapee el problema en particular a una cadena de símbolos que los describa. La longitud de codificación o tamaño de los datos de entrada de un problema se define como la longitud de esta cadena de símbolos (ver [2], p-23). Existen diferentes esquemas de codificación que pueden proporcionar diferentes longitudes de codificación. Para números enteros la codificación más utilizada es la representación binaria.

Cuando un número real  $\alpha$  es denotado por el símbolo  $\lfloor \alpha \rfloor$  (el piso o la parte entera inferior de  $\alpha$ ) se está indicando que debemos tomar el entero más grande que no sea mayor que  $\alpha$ , mientras que el símbolo  $\lceil \alpha \rceil$  (el techo o la parte entera superior de  $\alpha$ ) denota el entero más pequeño no menor que  $\alpha$ , entonces, para la codificación o representación binaria de un número entero  $n \neq 0$  necesitamos un bit para el signo y  $\lceil \log_2 |n| + 1 \rceil$  bits para la cadena de 0's y 1's de la representación binaria de su valor absoluto. Para el cero, solo necesitamos un bit. Por lo tanto el espacio necesario para codificar un entero es:

$$\langle n \rangle = 1 + \lceil \log_2 |n| + 1 \rceil \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

donde  $\langle n \rangle$ , denota la longitud de codificación de  $n$ .

De manera similar si  $x$  es un vector o una matriz en el cual cada uno de sus componentes es un número entero,  $\langle x \rangle$  se define como la suma de la longitud de codificación de sus entradas. Si  $a^T x \leq b$  es una desigualdad con  $a$  y  $b \in \mathcal{R}^n$ , entonces decimos que  $\langle a \rangle + \langle b \rangle$  es la longitud de la desigualdad; y para obtener la longitud de un sistema de desigualdades solo se requiere sumar la longitud de codificación de sus desigualdades (ver [2], p-28).

Es importante mencionar que la publicación del método elipsoidal puso en controversia qué parámetros debían ser considerados en la longitud de código del problema. Por ejemplo, para un problema de programación lineal dado por una matriz  $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$  y los vectores  $b$  y  $c \in \mathcal{R}^n$ , una de las preguntas iniciales fué saber si el número  $nm$  ( $n$ =variables por  $m$ =restricciones) debía ser considerado como el tamaño del problema, o si además debía ser contabilizado el espacio necesario para codificar  $A$ ,  $b$  y  $c$ . Ambos puntos de vista tienen su propio mérito. Cada uno de ellos llevan, sin embargo, hacia diferentes notaciones de complejidad (ver [2], p-23).

### a.1. Las clases $\mathcal{P}$ , $\mathcal{NP}$ , y co- $\mathcal{NP}$ .

Edmonds [32] clarificó el término tamaño de los datos de entrada para incluir la medida de tamaño del elemento mayor y/o sus dígitos significativos. Hoy en día el tamaño de los datos de entrada de un problema  $P$  es el total de espacio necesario para escribir las características del problema en codificación binaria, con la adición de la dimensión, del número de vértices, etc., como parámetros adicionales (ver [11], p-6). Si denotamos por:

- ✓  $l(P)$ , ( $l$ , abreviando) el tamaño del problema y,
- ✓  $\sigma = \sigma(P)$ , al mayor elemento en valor absoluto de la representación de  $P$ ; por ejemplo, en el caso de la programación lineal  $\sigma$  es el elemento mayor en  $A$ ,  $b$ ,  $c$ .

Claramente  $l(P) \leq f(\log \sigma)$  donde  $f(\cdot)$  es un polinomial en  $\log \sigma, n$ , etc.

Por otro lado, se dice que un algoritmo para un problema  $P$  es de complejidad de tiempo:

- A) **Polinomial** (*polinomial, abreviando*): si el peor caso del tiempo de ejecución es acotado por  $f(l)$ , para algún polinomial en  $l$ ,  $n$ , etc, esto es, para todas las instancias de  $P$  con los mismos parámetros,  $f(l)$  es una cota superior de su complejidad de tiempo.
- B) **Pseudo-polinomial**: si  $f$  es un polinomial en  $\sigma$  en lugar de  $\log \sigma$ .
- C) **Exponencial**: si existe una instancia para tal problema cuyo tiempo de ejecución  $\geq a^{f(l)}$ , para algún  $a > 1$ .

Por lo tanto se define  $\mathcal{P}$  como la colección de los problemas para los cuales existe un algoritmo de tiempo polinomial para su solución. La definición equivalente, en el lenguaje de la teoría autómatas, es la siguiente:

*Un lenguaje  $L \in \mathcal{P}$ , si puede ser reconocido por una máquina determinística de Turing en tiempo polinomial.*

Existe otra clase muy conocida en la teoría de complejidad,  $\mathcal{NP}$ . Se dice que  $P \in \mathcal{NP}$  si dada una descripción de  $P$  y como información adicional una solución candidata, puede decidirse con esfuerzo polinomial en el tamaño de la descripción; por ejemplo  $l(P)$  y cierta información adicional, si la solución candidata es en efecto una solución de  $P$ . La definición equivalente, en el lenguaje de la teoría autómatas, es la siguiente:

*Un lenguaje  $L \in \mathcal{NP}$ , si puede ser reconocido por una máquina no determinística de Turing en tiempo polinomial.*

De hecho si  $P$  tiene una buena caracterización, entonces,  $P \in \mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$ , donde  $\text{co-}\mathcal{NP}$  es el complemento de  $\mathcal{NP}$ .



Finalmente se dice que un problema es  $\mathcal{NP}$  completo, si:

i)  $P \in \mathcal{NP}$ ,

ii) para otro problema  $Q$  en  $\mathcal{NP}$  puede ser transformado a una instancia de  $P$ .

## **b. Optimización Combinatoria.**

El concepto **combinatoria** se refiere al estudio de estructuras discretas y sus propiedades.

La **optimización combinatoria** (ver [33], p-3), incluye conceptos de teoría de codificación, diseño combinatorio, teoría de enumeración, teoría de grafos y teoría de poliedros. Su objetivo es buscar métodos eficientes para la construcción de buenas soluciones y al mismo tiempo métodos que midan la calidad de las soluciones; es decir, producir cotas sobre las soluciones óptimas que nos permitan trabajar con mínimo error. La optimización combinatoria, es un área de combinatoria que interfiere con la programación lineal, teoría de grafos, investigación de operaciones, teoría de algoritmos y complejidad computacional.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1 **Kipp Richard Martin.** "Large scale linear and integer optimization". A Unified Approach. Ed. Kluwer Academic Publishers. (1999)
- 2 **Grötschel Martin, Lovász László and Schrijver Alexander.** "Geometric algorithms and combinatorial optimization". Algorithms and Combinatorics 2. Ed. Springer 2nd edition (1993).
- 3 **Grossman Stanley I.** "Algebra lineal". Ed. Mc Graw Hill 5ta Edición. (1996).
- 4 **Meyer Carl D.** "Matrix Analysis and Applied Linear Algebra". Ed. SIAM (2000).
- 5 **Fang Shu-Cherng and Pathenpura Sarat.** "Linear Optimization and Extensions". Theory and algorithms. AT& T. Ed. Prentice Hall (1993).
- 6 **Nemhauser George L., Wolsey Laurence A.** "Integer and Combinatorial Optimization". Ed. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization (1999).
- 7 **Khachiyan L. G. (1979).** " A polynomial algorithm in lineal programming" (in Russian), Doklady Akademii Nauk SSSR 244 (1979) 1093-1096 (English translation: Soviet Mathematics Doklady 20 (1979) 191-194).
- 8 **Bland R. G., Goldfarb Donald and Todd Michael J. (1981).** "The ellipsoid method: a survey", Operations Research 29 (1981) 1039-1091.
- 9 **Agmon, S (1954).** "The relaxation Method for Linear Inequalities", Can. J. Math 6 (1954) 382-392. Borwardt H. S (1982), "Some distribution-independent results about the asymptotic order of the average number of pivot steps of the simplex method", Mathematics of Operations Research 7 (1982) 441-462.
- 10 **Motzkin T., and Schoenberg L. J. (1954).** "The relaxation Method for Linear Inequalities", Can. J. Math 6 (1954) 393-404.
- 11 **Akhtal M.** "Topics in relaxation and ellipsoidasl methods". Research notes in mathematics. Pitman Advanced Publishing Program BOSTON-LONDON-MELBURNE (1984).
- 12 **Shor, N. Z. (1964),** "On the Structure of Algorithms for the Numerical Solution of Optimal Planning and Design Problems", dissertation, Cybernetics Institute, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev.

- 13 Polyak, B. T. (1969), "Minimization of Unsmooth Functionals", *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* 9, 509-521 (translated in *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 9,14-29, 1969).
- 14 Shor, N. Z. (1968), "The Rate of Convergence of the Generalized Gradient Descent Method", *Kivernetica* 4(3), 98-99 (translated in *Cybernetics* 4(3), 79-80, 1968).
- 15 Shor, N. Z. (1970a), "Utilization of the Operation of Space Dilatation in the Minimization of Convex Functions". *Kivernetica* 6(1), 6-12 (translated in *Cybernetics* 6(1), 7-15, 1970).
- 16 Shor, N. Z. (1970b), "Convergence Rate of the Gradient Descent Method with Dilation of the Space". *Kivernetica* 6(2), 80-85 (translated in *Cybernetics* 6(2), 102-108, 1970).
- 17 Snapper Ernest and Troyer Robert J.. "Metric Affine Geometry". Ed. Dover (1971).
- 18 Shor N. Z. and Zhurbenko G. (1971), "A Minimization Method Utilizing the Operation of Space Expansion in the Direction of the Difference of Two Successive Gradients ". *Kivernetica* 7(3), 51-59 (translated in *Cybernetics* 7(3), 1971).
- 19 Bazaraa Mokhtar S., Sherali Hanif D., Shetty C. M. "Nonlinear Programming". Theory and algorithms. Wiley, 2nd edition (1993).
- 20 Levin A. Iu. (1965), "On an Algorithm for the Minimization of Convex Functions", *Doklady Akademii Nauk SSSR* 160, 1244-1247 (translated in *Sovietic Mathematics Doklady* 6,286-290, 1965).
- 21 Newman D. J. (1965), "Location of the Maximum on Unimodal Surfaces", *J. Assoc. Comput. Mach.* 12, 395-398.
- 22 Iudin D. B. and Nemirovskii A. S. (1976a), "Evaluation of the Informational Complexity of Mathematical Programming Problems", *Ekonomika i Matematicheski Metody* 12, 128-142 (translated in *Matekon: Translations of Russian and East European Math. Economics* 13,3-25. Winter 1976-1977).
- 23 Iudin D. B. and Nemirovskii A.S. (1976b), "Informational Complexity and Effective Methods of Solution for Convex Extremal Problems", *Ekonomika i Matematicheski Metody* 12, 357-369 (translated in *Matekon: Translations of Russian and East European Math. Economics* 13,3-25. Spring 1977).
- 24 Shor N. Z. and Zhurbenko G. (1977), "Cut-of method with space extension in convex programming problems".(in Russian), *Kivernetica (Kiev)* 1977 (1) (1977) 94-95 (English translation: *Cybernetics* 13 (1977) 94-96).
- 25 Klee V. and Minty G. J. (1972), "How good is the simplex algorithm", in: O. Shisha (ed.), *Inequalities III*, Academic Press, New York, (1972) 159-175.
- 26 Shrader R. (1982), "Ellipsoid methods", in: B.Korte (ed), *Modern Applied Mathematics Optimization and Operations Research*, North-Holland, Amsterdam, 1982, 265-311.
- 27 Padberg M. "Linear Optimizations and extensions". Algorithms and combinatorics. Ed. Springer, 2nd edition (1999).
- 28 Golfin J. L. (1984), "Variable metric relaxation methods, Part II: The ellipsoid method", *Mathematical Programming* 30 (1984) 147-162.

- 29 Karp R. M. and Papadimitriou (1980), "On linear characterization of combinatorial optimization problem", in 21th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Syracuse, New York, 1980), IEEE, New York, 1980, 1-9 (final publication: SIAM Journal on Computing 11 (1982) 620-632).
- 30 Padberg M. W. and Rao M. R. (1981), "The russian method for linear programming III: bounded integer programming", Research Report 81-39, New York University, Graduate School of Business Administration, New York, 1981.
- 31 Schrijver Alexander. "Theory of Linear and Integer Programming". Ed. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization (1986).
- 32 Edmonds J. (1965a), "Paths, trees and flowers", Canadian Journal of Mathematics 17 (19654) 449-467.
- 33 Papadimitriou Christos H., Steiglitz Kenneth. "Combinatorial optimization". Algorithms and Complexity". Ed. Dover. 2nd edition (1998).

# **RESUMEN AUTOBIOGRAFICO**

**YEZMIN CORONADO PÉREZ**

**Candidato para el grado de Maestro en  
Ciencias en Ingeniería de Sistemas**

**TESIS:**

**SOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL MEDIANTE  
EL METODO ELIPSOIDAL MODIFICADO.**

**CAMPO DE ESTUDIO:**

**Análisis de métodos matemáticos y algoritmos de programación lineal.**

**BIOGRAFIA:**

**Nacida en Lázaro Cárdenas, Michoacán el 6 de abril de 1976, hija de Armando Coronado Jiménez y Graciela Pérez Chagal.**

**EDUCACION:**

**Egresada de la Universidad Autónoma de Nuevo León, grado obtenido Ingeniero Mecánico Administrador en el 2000 con mención honorífica, segundo lugar de generación.**





