UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

ESTABILIDAD Y CONTROLABILIDAD ROBUSTA DE SISTEMAS LINEALES CON INCERTIDUMBRE MULTILINEAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

PRESENTA:

CESAR ELIZONDO GONZALEZ

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. MAYO DE 1998

ESTABILIDAD Y CONTROLABILIDAD ROBUSTA
DE SISTEMAS LINEALES CON INCERTIDUMBRE MULTILINEAL

C.E.G.

TD
QA402
.3
.E45
1999
c.1

1080124474

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

ESTABILIDAD Y CONTROLABILIDAD ROBUSTA DE SISTEMAS LINEALES CON INCERTIDUMBRE MULTILINEAL

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

PRESENTA:
CESAR ELIZONDO GONZALEZ

San Nicolás de los Garza, N. L. Enero de 1999

TD
QA402
.3
.E45
1999

Ángel Frías
UANL
FONDO
TESIS DOCTORADO

Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal

Los miembros del comité aprueban la tesis
de doctorado de César Elizondo González

Dr. Mikhail V. Basin
Asesor

Dr. Jesús de León Morales

Dr. Krishna Kumar Busawon

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo

Dr. Gerardo Romero Galván

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Sección de Control Automático
Apartado Postal 14 -740, 07000 México, D.F., México

To: Ing. Castulo E. Vela Villareal
Director de la FIME, UANL.
Pedro de Alba S/N
Apartado postal 076 Suc. "F"
Ciudad Universitaria
66450 San Nicolas de los Garza, N.L.
Mexico
Telefono conmutador (8)329-4020

Review Comments

to Ph.D. Tesis of Cesar Elizondo Gonzalez titeled

" *Estabilidad y Controbilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal*"

- This thesis deals with the **problem of robust stability** of polynomials which are multilineal with respect to components of a vector parameter belonging to a given uncertainty compact box.
- **The main contribution of this work** consists in the design of a special "*sign- decomposition*" of a continuous function which then has been generalized to the class of determinants.
- This **original idea** has been applied to designing of an effective technique for analysis **of robust stability of polynomials** families as well as for **Robust Controllability and Observability** of a class of linear multidimensional time invariant systems containing a unknown scalar parameter within its (A,B,C) representation.
- The theoretical results, mentioned above, seems to be new (never published before by any other authors) and can be considered as **an original and very useful contribution** in to *Modern Robust Stability Theory* as well as in to *General Control System Theory*.
- **The practical usefulness** of the presented study has been also illustrated by their application to the analysis of the robust stability of a simplified model of the military avia-plan F4-E.

Based on the reviewers comments presented above, we **may conclude that**

- **on our opinion, the results obtained in this thesis undoubtedly present a theoretical and practical interest**
- **and the thesis itself can be estimated as a high-level investigation study with the highest qualification mark.**

Prof. Dr. Alexander S. Poznyak
Phone: (52-5) 747-70-00 ext.3229
Fax: (52-5) 747-70-89, (52-5) 747-70-02
E-mail: APOZNYAK @ CTRL.CINVESTAV.MX

Prof. Dr. Vladimir L. Kharitonov
Phone: (52-5) 747-70-00 ext.3229
Fax: (52-5) 747-70-89, (52-5) 747-70-02
E-mail: KHAR @ CTRL.CINVESTAV.MX

Dedicada a:

A mi padre Matilde Elizondo García y a la memoria de mi madre María Abraham González Garza, quienes me dieron la vida y el apoyo para ser profesionista.

A mi esposa María Cristina Chapa de Elizondo, a mis hijos César Elizondo Chapa y Abraham Elizondo Chapa, quienes me dieron todo su apoyo moral y aportaron una enorme cantidad de tiempo de convivencia familiar desde mi ingreso al programa doctoral hasta la realización de la presente.

Agradecimientos

Dr. Mikhail V. Basin, por la valiosa asesoría que fué de gran ayuda a elevar la formalidad y nivel matemático de la presente tesis, y por todo el apoyo que me brindó para concluir la misma.

A los miembros del jurado. Por sus valiosas recomendaciones para mejorar la calidad de la tesis.

A los profesores de este Programa Doctoral, quienes amablemente me brindaron ayuda y orientación en diferentes aspectos a lo largo de mi estancia.

Al M.C. José Antonio González Treviño, quien siendo Director de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica me dió su apoyo para ingresar al Programa Doctoral y al M.C. Cástulo E. Vela Villarreal, actual Director de la misma, quien igualmente me ha dado todo su apoyo para continuar y finalizar la presente.

Al M.C. Luis Manuel Martínez Villarreal, Ing. Fernando Moreno Barrios y M.C. Luis M. Camacho Velázquez, que siempre agilizaron los trámites necesarios internos de la UANL y con CONACYT.

A los compañeros M.C. José Rivera Martínez, M.C. Leopoldo R. Villarreal Jiménez y M.C. Fernando Estrada Salazar que de alguna manera facilitaron la carga académica para hacer posible la realización de la presente.

A todos los compañeros del Doctorado con quienes siempre mantuve muy buena relación; especialmente a Daniel Olivares Caballero, Martha Aguilera Hernández, Jesús Aureliano Esquivel Cárdenas, Guadalupe Acosta Villarreal, Mario Ariel Villanueva, Gustavo Pérez Hernández y David Alejandro Díaz Romero, quienes siempre mostraron una alta disponibilidad de servicio y un excelente trato.

Al CONACYT y a la Universidad Autónoma de Nuevo León por su apoyo económico.

Notación

$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos
$Cota$ inf	Cota inferior de la función $f(q)$ con descomposición de signo
$Cota$ sup	Cota superior de la función $f(q)$ con descomposición de signo
$\det_\alpha(M_\alpha(q))$	Determinante alfa de la parte alfa de la matriz $M(q)$
$\det_\beta(M_\beta(q))$	Determinante beta de la parte beta de la matriz $M(q) = \det(M(q))$
$f_n(q)$	Componente negativa de una función $f(q)$ con descomposición de signo
$f_p(q)$	Componente positiva de una función $f(q)$ con descomposición de signo
$(f_n,\ f_p)$	Coordenadas negativa, positiva
$f^{\min}$	Parte independiente de la función $f(\mu^{\min} + \delta)$
$f_L(\delta)$	Parte lineal de la función $f(\mu^{\min} + \delta)$
$f_N(\delta)$	Parte no-lineal de la función $f(\mu^{\min} + \delta)$
$\Phi(t, t_0)$	Matriz de transición de estado
$G(t, \tau)$	Matriz de respuesta al impulso
$G(s)$	Matriz de transferencia
H	Matriz de Hurwitz
j	$\sqrt{-1}$ o índice
J	Jacobiano
ℓ	Dimensión del espacio vectorial que contiene a Q
$M_\alpha(q)$	Parte alfa de la matriz $M(q)$
$M_\beta(q)$	Parte beta de la matriz $M(q)$ $(M_\beta(q) = M(q))$
$M^{\min}$	Parte independiente de la matriz M
$M_L(\delta)$	Parte lineal de la matriz M
$M_N(\delta)$	Parte no-lineal de la matriz M
M^*	Transpuesto conjugado de M
M^T	Transpuesto de M
$p(s, q)$	Polinomio con incertidumbre paramétrica
$P(s, Q)$	Familia de polinomios
q_i	Parámetro físico con incertidumbre
q_i^-	Límite inferior del parámetro físico q_i
q_i^+	Límite superior del parámetro físico q_i
q	Vector de parámetros
q^i	Vértice de la caja paramétrica Q, o un cierto vector paramétrico en particular
$q_{i,j,k\cdots}^{\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k\cdots}$	Vector de incertidumbre paramétrica parcialmente determinado
Q	Caja de incertidumbre paramétrica
$\Re$	Conjunto de los números reales

Notación (continuación)

u	Entrada al sistema
U	Matriz de controlabilidad de Kalman
v^i	Vértice de un polítopo
$v^{\min}$	Vértice mínimo Euclideano de Q
$v^{\max}$	Vértice máximo Euclideano de Q
x	Vector de variables de estado
y	Salida del sistema
$\alpha(q)$	Componentes alfa de la función $f(q)$ con descomposición de signo
$\beta(q)$	Componentes beta de la función $f(q)$ con descomposición de signo
(α, β)	Coordenadas alfa, beta con descomposición de signo
$\delta(t-\tau)$	Función de impulso
δ_i	Proyección del parámetro q_i en una caja Γ_i ($\delta_i \in [0,\ \delta_i^{\max}]$)
δ	Proyección del vector q en Γ^i
δ^i	Vértice de la caja Δ
Δ	Caja de incertidumbre paramétrica con vértice mínimo Euclideano $= 0$ y vértice máximo Euclideano $= \delta^{\max}$
Δ_i	Diferencia entre el límite superior e inferior del parámetro físico q_i o uno de los menores principales de la matriz de Hurwitz
$\Phi(t, t_0)$	Matriz de transición de estado
Γ^i	Caja de incertidumbre paramétrica generada por partición de variables
λ	Parámetro empleado en combinación lineal o Valor característico
$\lambda^-_{\Re\min}(M)$	Mínimo valor característico negativo de M
$\lambda^+_{\Re\max}(M)$	Máximo valor característico positivo de M
$\mu^{\min}$	Vértice mínimo Euclideano de Γ^i
$\mu^{\max}$	Vértice máximo Euclideano de Γ^i
$\rho(M)$	Rango de la matriz M
ω	Frecuencia en radianes por segundo

Resumen

Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales Con Incertidumbre Multilineal

Publicación No._____
César Elizondo González
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Profesor Asesor: Dr. Mikhail V. Basin.
Abril, 1998

El contenido de la presente tesis está orientado a analizar y resolver el problema de estabilidad y controlabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo, de múltiple entrada y múltiple salida, que dan lugar a familias de polinomios característicos con incertidumbre paramétrica multilineal o polinómica, se analizan los casos reportados concernientes al área. Se investiga en el espacio de los coeficientes, donde el problema de estabilidad robusta es "mapeado" a un problema de positividad de funciones reales multivariables con términos no decrecientes en un espacio vectorial, para lo cual se desarrolla una herramienta matemática capaz de determinar, en condiciones necesarias y suficientes, la positividad de esta clase de funciones llamándole *Descomposición de Signo*. Esta herramienta no tiene restricciones de aplicación a cualquier caso de estabilidad, controlabilidad u observabilidad robusta paramétrica, pero el tiempo de cómputo crece con la complejidad del sistema como sucede con cualquier algoritmo.

La Descomposición de Signo y su aplicación al control robusto paramétrico, la Tabla Equivalente de Routh y la solución al problema de controlabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo de múltiple entrada múltiple salida con perturbación unidireccional, son las principales aportaciones personales en la tesis. También se aportan algunos hechos, lemas, teoremas y corolarios en diferentes puntos como: propiedades de familias de polinomios con incertidumbre multilineal, así como las condiciones para la convexidad de su imagen. En si todos los hechos, lemas, teoremas y corolarios que no aparezcan con referencia y los que aparecen con referencia [17, 18] son una aportación personal.

Indice

Notación

Resumen

Indice de Figuras

Indice de Tablas

1) Introducción **1**

1.1) Planteamiento del Problema de Estabilidad, Controlabilidad y Observabilidad Robusta 1

1.2) Aportaciones Principales 3

1.3) Organización de la Tesis 4

2) Representación de Sistemas Lineales en Entrada-Salida y Variables de Estado **7**

2.1) Descripción Entrada-Salida 7

2.2) Variables de Estado 8

2.1.1) Ecuaciones de Estado 8

2.3) Estabilidad 10

2.4) Controlabilidad 11

2.5) Observabilidad 13

3) Estabilidad en Sistemas Lineales con Incertidumbre Paramétrica **16**

3.1) Antecedentes de Estabilidad de Polinomios Fijos 16

3.2) Clasificación de Polinomios con Incertidumbre Paramétrica 19

3.3) Polinomios Intervalo 22

3.4) Polinomios con Dependencia Afín 23

3.5) Polinomios con Dependencia Multilineal 25

Indice (continuación)

3.5.1) Polinomios con Dependencia Multilineal e Imagen Convexa 31

3.5.1.1) Condiciones de Convexidad en el Espacio de los Coeficientes 32

3.5.1.2) Condiciones de Convexidad Dependientes de la Frecuencia 36

3.6) El Problema del Caso General de Incertidumbre Multilineal 38

4) Descomposición de Signo 42

4.1) Definición de la Operación 42

4.2) Representación (f_n , f_p) 44

4.2.1) Propiedades en la Representación (f_n , f_p) 46

4.3) Representación (α , β) 56

4.3.1) Propiedades en la Representación (α , β) 57

4.4) Partes Lineal, No-lineal e Independiente 61

4.4.1) Propiedades Básicas de las Partes Lineal y No-lineal 63

4.4.2) Límites de la Función 64

4.5) Descomposición de Signo del Determinante 71

4.5.1) El Determinante en Representación (α, β) 71

4.5.2) Partes Lineal, No-lineal e Independiente del Determinante 73

4.5.3) Determinante de la Matriz de Controlabilidad. 80

5) Estabilidad Robusta de Polinomios en el Espacio de los Coeficientes 85

5.1) Tabla Equivalente de Routh 85

5.2) Estabilidad Robusta mediante la Tabla Equivalente de Routh y Descomposición de Signo 87

5.3) Estabilidad Robusta mediante el Criterio Hurwitz y Descomposición de Signo 88

Indice (continuación)

5.4) Estabilidad Robusta mediante Frazer y Duncan y Descomposición de Signo 90

6) Controlabilidad y Observabilidad Robusta en Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo 93

6.1) Controlabilidad y Observabilidad Robusta en Sistemas Lineales con Perturbación Unidireccional 93

6.1.1) Planteamiento del Problema 93

6.1.2) Polinomio de Matrices del Grammiano de Controlabilidad 95

6.1.3) Controlabilidad Robusta en Perturbación Unidireccional 98

6.1.4) Observabilidad Robusta en Perturbación Unidireccional 101

6.2) Controlabilidad y Observabilidad Robusta en Sistemas Lineales con Matrices Intervalo 102

7) Aplicaciones 106

8.1) Avión Militar F4-E 106

8.2) Máquina Fiat 109

8) Conclusiones 117

Referencias 119

Indice de Figuras

Figura 3.1 "Value set" de familia multilineal. Ejemplo 3.1 29

Figura 3.2 Contraejemplo a la conjetura de Hollot y Xu 31

Figura 3.3 Familia multilineal con simetría y no traslape 35

Figura 4.1 Plano $(f_n,\ f_p)$. Ejemplo (4.2) 45

Figura 4.2 Rectángulo que contiene a la función en el plano $(f_n,\ f_p)$ 50

Figura 4.3 Signo de la función en cajas Γ. Ejemplo (4.3) 54

Figura 4.4 Signo de la función en cajas Γ. Ejemplo (4.3) 55

Figura 4.5 Teorema del rectángulo en cajas Γ. Ejemplo (4.3) 55

Figura 4.6 Rectángulo en el plano $(\alpha,\ \beta)$ 56

Figura 4.7 Corolario del rectángulo en (α, β). Ejemplo (4.3) 61

Figura 4.8 Polígono que contiene a la función en el plano $(f_n,\ f_p)$ 66

Figura 4.9 Teorema (4.14). Ejemplo (4.4) 71

Figura 4.10 Positividad del $\det(M(q))$. Ejemplo (4.5) 80

Figura 5.1 Positividad del $\det(H(q))$. Ejemplo (5.1) 92

Figura 6.1 Positividad del $\det(U(q)U^T(q))$. Ejemplo (6.2) 105

Figura 7.1 Avión militar F4-E 106

Figura 7.2 Positividad del $\det(H(q))$. Avión militar F4-E 109

Figura 7.3 Coeficiente $b_{3,1}(q)$. Máquina Fiat 112

Figura 7.4 Coeficiente $b_{4,1}(q)$. Máquina Fiat 112

Figura 7.5 Coeficiente $b_{5,1}(q)$. Máquina Fiat 113

Figura 7.6 Coeficiente $b_{6,1}(q)$. Máquina Fiat 113

Figura 7.7 Coeficiente $b_{6,2}(q)$. Máquina Fiat 114

Figura 7.8 Coeficiente $b_{7,1}(q)$. Máquina Fiat 114

Indice de Tablas

Tabla 7.1 Condiciones de vuelo. Avión militar F4-E 107

Capítulo 1
Introducción

1.1 Planteamiento del Problema de Estabilidad, Controlabilidad y Observabilidad Robusta

Todo sistema físico tiene un modelo matemático que describe su comportamiento, en muchos casos no es fácil el obtener dicho modelo, y se obtiene un modelo aproximado a la realidad. Dando lugar así a una *incertidumbre*, que puede ser de diferentes tipos:

Incertidumbre paramétrica, es cuando el modelo matemático es correcto, pero se desconoce el valor exacto de los parámetros físicos del sistema. Por ejemplo, en una resistencia eléctrica que circula una corriente eléctrica, se conoce el modelo matemático: el voltaje es igual al producto de la corriente eléctrica por la resistencia, pero de la resistencia sólo se sabe que tiene un valor de 950 a 1050Ω.

Otra incertidumbre puede ser de *retardo*. Por ejemplo, para un termopar se puede obtener la ecuación de la temperatura en función del milivolaje, sin tomar en cuenta el retardo causado por el calor que absorbe su masa. La *incertidumbre de estructura*, es cuando se desconoce parte del modelo, como puede ser el caso de un motor eléctrico, que en su modelo se desprecian algunas inductancias mutuas, por la dificultad para calcularlas.

Cuando un sistema posee incertidumbre de algún tipo, por ejemplo paramétrica, se convierte en una familia de sistemas. El control robusto es el área de la teoría de control, que en el caso de análisis, determina el cumplimiento de cierta propiedad como: estabilidad, controlabilidad, observabilidad; en todos los elementos de la familia. En el caso de síntesis, determina el controlador que garantice el desempeño óptimo de todos los elementos de la familia en algún aspecto particular.

En el área de control robusto, existen varias técnicas para atacar los problemas de incertidumbre, como por ejemplo: H_∞ [19], μ síntesis [15], margen de ganancia k_m [25]. La teoría, H_∞ puede ser utilizada para problemas de: minimizar el efecto de perturbaciones, estabilidad en caso de incertidumbre de estructura o inclusive incertidumbre paramétrica. En H_∞, el problema se trabaja

en el dominio de la frecuencia, y es reducido a un problema de optimización. Las técnicas de μ síntesis y margen de estabilidad k_m, son métodos iterativos, y se emplean para determinar una "medida de robustez", como lo es el margen de estabilidad, de sistemas con perturbación en block diagonal en su retroalimentación. También pueden ser empleadas para determinar el controlador que optimize el desempeño de la familia en algún aspecto específico deseado.

En esta tesis, se ataca el problema de: estabilidad, controlabilidad y observabilidad robusta, de sistemas lineales invariantes en el tiempo con incertidumbre paramétrica. En éste tipo de sistemas, los coeficientes del modelo matemático dependen de *parámetros físicos* q_i, tal que $q_i \in [q_i^- , q_i^+]$. La colección de todos los parámetros q_i, forman un *vector de parámetros* q, que es elemento de una *caja de incertidumbre paramétrica* Q.

La estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, se determina a partir del polinomio característico $p(s,q)$, con coeficientes $c_i(q)$. De acuerdo a la ecuación de los coeficientes, los polinomios característicos se clasifican en general, en los siguientes cuatro tipos que se estudiarán en el capítulo 3. Los polinomios pueden ser de tipo: *intervalo, afín, multilineal* y *polinómico*. La estabilidad robusta de polinomios intervalo, fue resuelta por Kharitonov, en 1978. La estabilidad robusta de los polinomios afín, fue resuelta por A. C. Bartlet, C. V. Hollot, Huang Lin, en 1988, con el teorema de las aristas.

La estabilidad robusta de polinomios multilineales, esta resuelta sólo para algunos casos particulares, pero el caso general sigue siendo un problema abierto sin resolver, al igual que el caso polinómico.

En el área de controlabilidad y observabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo, existen soluciones para casos particulares de controlabilidad, de una entrada-múltiple salida, o de observabilidad para sistemas de múltiple entrada-una salida, o múltiple entrada-múltiple salida con incertidumbre sólo en una de las matrices A o B.

El caso general de controlabilidad y observabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo, de múltiple entrada-múltiple salida, con incertidumbre paramétrica en ambas matrices A o B, no esta resuelto, es un problema más difícil de resolver que el de estabilidad robusta del caso multilineal o polinómico.

El problema de determinar la estabilidad, controlabilidad u observabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo, de múltiple entrada múltiple salida, que dan lugar a polinomios característicos con incertidumbre paramétrica de tipo intervalo, afín, multilineal o polinómica. Realmente es un problema de positividad de una función real multivariable, para lo cual se propone en esta tesis la herramienta matemática *Descomposición de Signo*.

1.2 Aportaciones principales

En esta tesis se aportan resultados en diferentes áreas como: Propiedades de familias de polinomios con incertidumbre multilineal, donde se aportan el teorema de combinación lineal de la imagen de los vértices, y un hecho que explica como varios vértices de una caja pueden ser mapeados a un mismo punto en los complejos. Convexidad de la imagen de familias de polinomios con incertidumbre multilineal. Así también, se aportan resultados en estabilidad y controlabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo, en si todos los hechos, lemas, teoremas y corolarios que no aparezcan con referencia y los que aparecen con referencia [17, 18] son una aportación personal, pero las principales aportaciones son:

La herramienta matemática Descomposición de Signo, aplicable a la estabilidad y controlabilidad robusta, de sistemas lineales invariantes en el tiempo, de múltiple entrada múltiple salida, con incertidumbre paramétrica de cualquier tipo: intervalo, afín, multilineal o polinómica. En esta herramienta matemática, las funciones multivariables son representadas en coordenadas $(f_n,\ f_p)$ o en coordenadas $(\alpha,\ \beta)$, ésta última, con ventajas tanto algebraicas como gráficas. Ordenando de acuerdo a su importancia, los resultados principales de descomposición de signo, tenemos: primeramente el teorema del rectángulo en coordenadas $(f_n,\ f_p)$; este mismo teorema en coordenadas $(\alpha,\ \beta)$, por la disminución de operaciones algebraicas y por la facilidad de interpretación gráfica; el teorema del polígono en coordenadas $(f_n,\ f_p)$, con una notable mejora en las cotas con respecto al teorema del rectángulo; el teorema del polígono en coordenadas $(\alpha,\ \beta)$; el teorema de determinación de signo mediante partición de cajas, con condiciones necesarias y suficientes de positividad de funciones multivariable de tipo polinómica; la descomposición de signo del determinante, así como su aplicación a la matriz de controlabilidad. Cabe mencionar que

el teorema del rectángulo en coordenadas (f_n, f_p), es sólo el inicio de descomposición de signo, pero es un resultado superior a la aritmética de intervalos, dada la complejidad de las operaciones de esta última. Otras principales aportaciones son:

La Tabla Equivalente de Routh, que mediante descomposición de signo, aporta condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta de polinomios con incertidumbre paramétrica de cualquier tipo: intervalo, afín, multilineal, polinómica. La relación entre los elementos de la tabla equivalente de Routh y los menores principales de la matriz de Hurwitz. La solución de controlabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo, con múltiple entrada múltiple salida, tanto en matriz intervalo, así como el caso de perturbación unidireccional.

1.3 Organización de la Tesis

Capítulo 2. *Representación de Sistemas Lineales en Entrada-Salida y Variables de Estado.* En este capítulo se analizan los sistemas lineales en su representación entrada-salida, en el que el comportamiento del sistema queda determinado por la matriz de transferencia, que relaciona algebraicamente la transformada de la salida con la transformada de la entrada. La estabilidad del sistema queda determinada por las raíces del polinomio característico.

Así también se analiza la representación en variables de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo y algunas propiedades como: estabilidad, controlabilidad y observabilidad.

Capítulo 3. *Estabilidad en Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo con Incertidumbre Paramétrica.* En este capítulo se mencionan algunos criterios de estabilidad de polinomios fijos, se describe el concepto de incertidumbre paramétrica, así como la clasificación de los polinomios que la contienen, de acuerdo a la dependencia paramétrica son: Intervalo, Afín, Multilineal y Polinómica. Se analiza la solución al problema de estabilidad robusta de los polinomios intervalo y afín. Así también, se analiza el grado de dificultad de la solución del mismo problema en las familias de polinomios con incertidumbre multilineal, el cual es un problema abierto.

Capítulo 4. *Descomposición de Signo.* Aplicando el concepto no decreciente a funciones reales multivariables, se propone la herramienta matemática Descomposición de Signo, para funciones reales multivariables con dominio en una "caja" contenida en un cono convexo positivo. Así

como una función compleja se descompone en su parte real e imaginaria, en este caso la función multivariable se descompone en sus partes negativa y positiva, con representación gráfica en $\Re^2$. Con sólo evaluar ambas partes en los vértices mínimo y máximo Euclidianos de la caja, nos aportan una cota mínima y una máxima de la función, que son condiciones suficientes de positividad o negatividad de la función evaluada en todo el dominio. La función queda contenida en un rectángulo en $\Re^2$. Mediante división de cada variable, en un número de partes, se genera un conjunto de nuevas cajas, cuya unión es la caja original. La función es positiva (negativa) en todo el dominio original si y sólo si existe un conjunto de cajas para el cual la condición de signo se cumple para cada una de ellas.

Aplicando una transformación lineal, se convierte la representación negativa, positiva (f_n, f_p), en una representación alfa, beta (α, β) con ventajas tanto algebraicas como gráficas. Mediante la descomposición de cada parte de la función en sus partes lineal, no-lineal e independiente, se obtienen mejores cotas de la función evaluando sólo en los puntos extremos del dominio. Con estas cotas la función queda contenida en un polígono, que a su vez es contenido en el rectángulo de las cotas anteriores. Finalmente se analiza la descomposición de signo del determinante, y del determinante de la matriz de controlabilidad.

Capitulo 5. *Estabilidad Robusta de Polinomios en el Espacio de los Coeficientes.* En este capítulo, se analiza el problema de estabilidad robusta de una familia de polinomios con incertidumbre paramétrica multilineal o polinómica. El problema es trasladado a un problema de positividad y así es resuelto por medio de descomposición de signo. La función real representativa de la estabilidad del sistema, debe poseer la propiedad de descomposición de signo en la caja de incertidumbre paramétrica, para lo cual, se propone la Tabla Equivalente de Routh, en la que sus coeficientes poseen la propiedad de descomposición de signo. La estabilidad robusta es estudiada también mediante el teorema de Frazer y Duncan y descomposición de signo del determinante.

Capitulo 6. *Controlabilidad y Observabilidad Robusta en Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo.* En este capítulo se analiza la controlabilidad y observabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo, con perturbación unidireccional, y con matrices intervalo, para múltiple entrada y múltiple salida. En el caso de perturbación unidireccional, se trata de encontrar los límites

mínimo y máximo de un parámetro real que es la perturbación. En el caso de matrices intervalo, se genera la matriz de controlabilidad mediante el teorema correspondiente del capítulo 4, para así analizar la positividad del determinante de la matriz de controlabilidad. La observabilidad es tratada por medio del teorema de dualidad.

Capítulo 7. *Aplicaciones.* En este capítulo se aplica la herramienta de descomposición de signo para determinar la estabilidad robusta de casos reales, como lo son un avión militar F4-E mencionado por Ackermann [2], y la máquina Fiat mencionada por Barmish [5].

Capítulo 8. *Conclusiones.* En este capítulo se analizan los resultados obtenidos en estabilidad, controlabilidad y observabilidad robusta, así como la aplicación de Descomposición de Signo a estos aspectos de la teoría de control robusto paramétrico. Finalmente se incluyen en esta tesis el listado de referencias citadas en la misma, en la que aparecen las publicaciones [17, 18] de algunos resultados de la investigación que fueron presentados en dos congresos internacionales.

Capítulo 2
Representación de Sistemas Lineales en Entrada-Salida y Variables de Estado

Un sistema físico es una colección de dispositivos existentes en el mundo real; un *sistema es* el modelo del sistema físico. Los sistemas pueden ser *lineales* o *no lineales* (los sistemas no lineales no serán considerados en esta tesis). Los sistemas lineales son aquellos en que la ecuación diferencial que los describe es lineal, por ejemplo del tipo (2.1), que consta de dos variables en función del tiempo: una $y(t)$ que se le llama *salida*, que es la respuesta del sistema; y otra $u(t)$ que se le llama *entrada*, que es el estímulo al sistema. El sistema lineal descrito por (2.1), es de *una entrada-una salida* (SISO), pero en general pueden ser de *múltiple entrada-múltiple salida* (MIMO).

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \alpha_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + \alpha_n y(t) = b_0\frac{d^m}{dt^m}u(t) + b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \cdots + b_m u(t) \qquad (2.1)$$

Los coeficientes de la ecuación anterior dependen de parámetros físicos que intervienen en el proceso y pueden ser *fijos* o *funciones del tiempo* (en esta tesis solo se estudiarán los casos de coeficientes fijos). Los sistemas lineales se pueden representar en *entrada-salida* y en *variables de estado*, de acuerdo al caso.

2.1 Descripción Entrada-Salida

La transformada de Laplace del sistema lineal (2.1) con coeficientes fijos y condiciones iniciales cero, permite relacionar algebraicamente la entrada y la salida en la forma $Y(s) = G(s)U(s)$, donde $G(s)$ se le llama *matriz de transferencia* para múltiple entrada múltiple salida, ó *función de transferencia* para una entrada una salida (2.2) y (2.3). En la representación entrada-salida, se obtiene menos información del sistema que en variables de estado; en entrada-salida prácticamente se analiza lo referente a la estabilidad.

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{\beta_1 s^m + \beta_2 s^{m-1} + \cdots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \qquad m < n \tag{2.2}$$

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \cdots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} + d \qquad m = n \tag{2.3}$$

2.2 Variables de Estado

Para todo sistema lineal del tipo (2.1) tal que $n \geq m$, se puede representar la dinámica por un conjunto de n variables $x_i(t)$ llamadas *variables de estado*. Estas se definen de tal manera que la primer derivada con respecto al tiempo de cada una de las $x_i(t)$, es función lineal del conjunto de variables $x_i(t)$ y de la entrada $u(t)$. La salida $y(t)$ es también una función lineal algebraica de las variables de estado y la entrada.

2.2.1 Ecuaciones de Estado

La representación de la dinámica del proceso en variables de estado requiere del *vector de estado* $x(t) = [x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)]^T$. El sistema es definido en variables de estado mediante (2.4), (2.5), y se le llama una *realización* o *representación en variables de estado* (Kalman en 1963). En este caso corresponde a un *sistema lineal invariante en el tiempo* (es el caso que se estudiará en esta tesis), ya que sus matrices, $\{A,\ B,\ C,\ D\}$, están formadas por elementos invariantes en el tiempo, debido a que los parámetros físicos de (2.1) son de esta misma característica. Este sistema de ecuaciones también es conocido como: *ecuación lineal de estado* [38], *ecuación dinámica* [13]. De la representación de un sistema en variables de estado (2.4) y (2.5), es posible obtener propiedades del desempeño del sistema sin resolver las ecuaciones diferenciales.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.4}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.5}$$

En el sistema representado en variables de estado por (2.4) y (2.5), A es una matriz de $(n \times n)$; B es una matriz de $(n \times m)$, donde m es el número de entradas; C es una matriz de $(p \times n)$, donde p es el número de salidas; D es una matriz de $(p \times m)$, $x(t)$ es el vector de estado de $(n \times 1)$, $u(t)$ es el vector de entradas de $(m \times 1)$ y $y(t)$ es el vector de salidas de $(p \times 1)$.

En el caso general, los elementos de las matrices de (2.4) y (2.5) pueden ser *variantes en el tiempo* o *invariantes en el tiempo*. En el caso de invariantes en el tiempo los coeficientes pueden ser *fijos* o con *incertidumbre paramétrica*. Esto último significa que los parámetros físicos que conforman los elementos de las matrices son fijos, pero se desconoce el valor de ellos, sólo se conocen sus límites inferior y superior.

La representación de un sistema en variables de estado no es única, ésta depende de como se definan las variables de estado, además se puede hacer una transformación de similaridad $x = Q\overline{x}$ donde Q es una matriz no singular, substituyendo en (2.4) y (2.5) se obtiene una nueva representación:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}} &= \overline{A}\overline{x} + \overline{B}u \\ y &= \overline{C}\overline{x} + \overline{D}u \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\overline{A} = Q^{-1}AQ, \ \overline{B} = Q^{-1}B, \ \overline{C} = CQ, \ \overline{D} = D$$

De la representación en variables de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo, se puede obtener la matriz de transferencia $G(s)$ que relaciona la entrada con la salida: $Y(s) = G(s)U(s)$. Para el sistema descrito por (2.4) y (2.5), se obtiene: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, siendo ésta, la matriz de transferencia obtenida de un sistema lineal invariante en el tiempo representado en variables de estado.

Por otra parte, si se tiene la función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo como (2.3), se puede obtener su representación en variables de estado (2.4) y (2.5). Unas representaciones muy comunes de la ecuación anterior son la forma *canónica controlable* y la *forma canónica observable*:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \cdots & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix} x + du$$

Forma canónica controlable [13]

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x + du$$

Forma canónica observable [13]

Debe de notarse que las formas canónicas correspondientes a (2.2) son iguales a las anteriores tomando $d = 0$.

2.3 Estabilidad

La estabilidad de un sistema lineal se puede obtener tanto de su representación en entrada-salida o en variables de estado. En la representación entrada salida, la estabilidad se puede tomar de la siguiente manera:

Proposición 2.1 [13] *Un sistema relajado es BIBO Estable ("Bounded Input - Bounded Output") si y sólo si para toda entrada acotada la salida es acotada.*

Lo anterior significa de acuerdo a [38] que el sistema relajado es *entrada acotada - salida acotada* si dado un tiempo t_0 y una entrada $u(t)$ satisfaciendo $\|u(t)\| \leq \delta$ para todo $t \geq t_0$ donde δ es una constante finita positiva, existe una constante finita positiva ε tal que $\|y(t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

En la representación entrada-salida, el denominador de la fracción de la función de transferencia (2.2) o (2.3), o el determinante de $(sI - A)$ de la matriz transferencia se le conoce como *polinomio característico* $s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$, sus raíces son equivalentes a los valores característicos λ_i de la matriz A en la representación de variables de estado.

Dado que la respuesta en el tiempo de la salida $y(t)$ ésta en función de exponenciales $e^{\lambda_i t}$, entonces para estabilidad asintótica es necesario y suficiente que las raíces de su ecuación característica tienen parte real negativa. Esta definición de estabilidad es la que será empleada en esta tesis:

Definición 2.1 *Un sistema lineal es estable si y sólo si las raíces de su polinomio característico o equivalentemente los valores característicos de la matriz A se encuentran en el semiplano izquierdo de los complejos.*

2.4 Controlabilidad

La propiedad de controlabilidad está relacionada con la capacidad que puede tener la entrada $u(t)$ en modificar el estado $x(t)$ del sistema. Sin pérdida de generalidad se puede considerar que dicha modificación será llevarlo al origen en un tiempo finito, como se considera en la siguiente definición.

Definición 2.2 [38] *La ecuación lineal de estado (2.4) se dice ser controlable en $[t_0, t_f]$ si para cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0 \neq 0$ existe una entrada continua $u(t)$ definida en $[t_0, t_f]$ tal que la solución de (2.4) satisface $x(t_f) = 0$ en un tiempo finito.*

Para cualquier sistema lineal en general, la controlabilidad es determinada mediante el *Grammiano de controlabilidad* $W(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)d\tau$, y posteriormente, de condiciones de la matriz de transición $\Phi(t_0, \cdot)$ y la matriz $B(\cdot)$, de acuerdo a los siguientes teoremas:

Teorema 2.1 [38] *La ecuación lineal de estado (2.4) es controlable en t_0 si y sólo si $W(t_0, t_f)$ es no singular en $[t_0, t_f]$.*

Teorema 2.2 [13] *La ecuación lineal de estado (2.4) es controlable a t_0 si y sólo si existe $t_f > t_0$ tal que los renglones de $\Phi(t_0, \cdot)B(\cdot)$ son linealmente independientes en $[t_0, t_f]$.*

Para los sistemas lineales invariantes en el tiempo, la controlabilidad es determinada mediante la *matriz de controlabilidad de Kalman* $[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]$, mediante la cual se obtiene una condición necesaria y suficiente de controlabilidad, independiente de intervalos de tiempo, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3 [13] *La ecuación lineal de estado (2.4) con matrices A y B invariantes en el tiempo es controlable si y sólo si se satisface: $\rho[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B] = n$*

Se puede probar [24] que una matriz M tiene sus renglones linealmente independientes si y sólo si MM^* es no singular, donde M^* es el transpuesto conjugado de M, de tal forma que $U = [B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]$ de dimensión $n \times nm$ tiene sus n renglones independientes si y sólo si UU^* es no singular, obteniendo así el siguiente corolario.

Corolario 2.4 *La ecuación lineal de estado (2.4) con matrices A y B invariantes en el tiempo es controlable si y sólo si UU^* es no singular.*

Otra prueba interesante de controlabilidad es la de *Popov-Belevich-Hautus,* donde se establece que un sistema lineal invariante en el tiempo es controlable si y sólo si no existe un vector característico izquierdo de A que sea ortogonal a todas las columnas de B, dicho de otra manera queda expresado en el siguiente teorema.

Teorema 2.5 [13] *La ecuación lineal de estado (2.4) con matrices A y B invariantes en el tiempo es controlable si y sólo si para todo λ_i de A y consecuentemente para todo λ elemento de los complejos se satisface:*

$$\rho\left[\lambda I - A \vdots B\right] = n$$

La controlabilidad es invariante bajo cambio de coordenadas y a la retroalimentación de estado. De la forma canónica controlable [13] se puede ver que el significado de controlabilidad, esta relacionado con la capacidad de cambiar todos los polos del sistema ya que cada una de las componentes k_i de la retroalimentación de estado K, modifica el valor de los coeficientes α_j del polinomio característico, de tal manera que si el sistema es controlable se puede modificar su dinámica mediante retroalimentación de estado. Cuando un sistema no es controlable, el teorema (2.5) permite determinar los polos no controlables, y por lo tanto no se les puede reasignar su valor mediante retroalimentación de estado.

2.5 Observabilidad

El concepto de observabilidad se refiere a la posibilidad de determinar el vector de estado inicial a partir de la entrada y la salida del sistema en un tiempo posterior al inicial. Sin pérdida de generalidad se puede considerar entrada cero ($u(t) = 0$) ya que la propiedad de observabilidad no depende de un valor específico en la entrada, entonces se puede definir como aparece abajo.

Definición 2.3 [38] *El sistema lineal descrito por las ecuaciones lineales de estado (2.4), (2.5) con entrada cero ($u(t) = 0$) se dice ser observable en $[t_0, t_f]$ si cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0$ es únicamente determinado por la correspondiente salida $y(t)$ para $t \in [t_0, t_f]$.*

La observabilidad para cualquier sistema lineal en general, es determinada mediante el *Grammiano de observabilidad* $V(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$. Así también se puede determinar de la matriz de transición $\Phi(\cdot, t_0)$ y la matriz $C(\cdot)$ del sistema, de acuerdo a los siguientes dos teoremas:

Teorema 2.6 [38] *El sistema lineal descrito por (2.4) y (2.5) es observable en* $[t_0, t_f]$ *si y sólo si* $V(t_0, t_f)$ *es no singular en* $[t_0, t_f]$.

Teorema 2.7 [13] *El sistema lineal descrito por (2.4) y (2.5) es observable si y sólo si las columnas de* $C(\cdot)\Phi(\cdot, t_0)$ *son linealmente independientes en* $[t_0, t_f]$.

Para los sistemas lineales invariantes en el tiempo las condiciones de observabilidad se simplifican de acuerdo al siguiente teorema:

Teorema 2.8 [13] *El sistema lineal descrito por las ecuaciones de estado (2.4), (2.5) con matrices* A *y* C *invariantes en el tiempo, es observable si y sólo si se satisface:*

$$\rho \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Al igual que en controlabilidad existe una prueba donde intervienen los valores característicos de la matriz A. En observabilidad también existe un teorema similar mediante el cual se puede determinar para qué valores característicos de la matriz A se pierde la observabilidad, como lo muestra el teorema siguiente. La propiedad de observabilidad es invariante a cambio de coordenadas y a la retroalimentación de salida.

Teorema 2.9 [13] *El sistema lineal descrito por las ecuaciones de estado (2.4), (2.5) con matrices* A *y* C *invariantes en el tiempo, es observable si y sólo si para todo* λ_i *de* A, *y consecuentemente para todo* λ *elemento de los complejos se satisface:*

$$\rho \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

Un tema interesante en la teoría de sistemas lineales, es el de los sistemas duales, de acuerdo a [13], para todo sistema lineal (2.7) existe su *sistema dual* (2.8) con útiles propiedades en controlabilidad y observabilidad de acuerdo al siguiente teorema.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -A^*(t)x(t) + C^*(t)u(t) \\ y(t) &= B^*(t)x(t) + D^*(t)u(t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Teorema 2.10 [13] *El sistema (2.7) es controlable (observable) a t_0 si y sólo si el sistema (2.8) es observable (controlable) a t_0.*

Este teorema permite aplicar a la observabilidad un resultado de controlabilidad, o viceversa, y será utilizado en el capitulo 6.

Capítulo 3
Estabilidad en Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo conIncertidumbre Paramétrica

En este capítulo se estudiará el problema estabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo con incertidumbre en sus parámetros físicos. La estabilidad de estos sistemas lineales se obtiene mediante sus polinomios característicos. Existen criterios que resuelven la estabilidad robusta de los casos más sencillos, para los casos de mayor complejidad solo existe solución de algunos casos particulares, pero el caso general de ese nivel sigue siendo un problema abierto. Por esta razón la mayor parte de la tesis concierne al estudio de estabilidad de polinomios característicos con incertidumbre paramétrica.

3.1 Antecedentes de Estabilidad de Polinomios Fijos

Resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento de un proceso físico cualquiera, es un problema difícil en el caso general. Dada esta dificultad, uno de los objetivos es determinar si las variables del modelo matemático son estables. La historia de la estabilidad de polinomios nominales puede decirse [2] que inicia con tres criterios algebraicos: *Hermite* en 1856 [2] 1854 [8], *Routh* en 1875 [2] 1877 [24] y *Hurwitz* en 1895 [24].

Para aplicar el criterio de Hermite-Biehler [8], el polinomio se descompone en sus partes par e impar $p(s) = p_p(s) + sp_i(s)$. El criterio establece que un polinomio de coeficientes reales $p(s)$ es estable si y sólo si, las raíces ω_p de la parte par $p_p(j\omega)$ y ω_i de la parte impar $p_i(j\omega)$ satisfacen la propiedad de entrelazamiento: $0 < \omega_{p,1} < \omega_{i,1} < \omega_{p,2} < \omega_{i,2} \cdots$.

Routh mediante índices de Cauchy, cadenas generalizadas de Sturm y el teorema de Sturm [24, 34], demuestra [24] su teorema:

Teorema 3.1 [24] *El número de raíces con parte real positiva del polinomio* $p(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_n s^n$, *es igual al número de variaciones de signo de la primer columna de la tabla de Routh.*

$$\begin{array}{cccc} c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \cdots \\ c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & \\ a_{4,1} & a_{4,2} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \end{array} \tag{3.9}$$

$$a_{i,j} = \frac{(a_{i-1,1}a_{i-2,j+1} - a_{i-2,1}a_{i-1,j+1})}{a_{i-1,1}} \ \forall i \geq 3; \quad a_{i,j} = c_{n+1-i-2(j-1)} \ \forall i \leq 2$$

Otro resultado interesante de Routh [23] es aquel que generando un polinomio $g(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + s^m$ de grado $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ a partir de $p(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + s^n$ demuestra que $p(s)$ es estable si y sólo si los coeficientes de $p(s)$ y $g(s)$ son positivos. El procedimiento para obtener a_i descrito por Fuller [23], no es sencillo y posiblemente requiera más operaciones matemáticas que las empleadas por la tabla clásica de Routh para determinar estabilidad. Existen algunos trabajos relacionados con el de Routh como es el caso de Duffin [16], donde la estabilidad de un polinomio $p(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_n s^n$ se estima mediante un polinomio reducido $p_1(s) = c_1 c_1 + (c_1 c_2 - c_0 c_3)s + c_1 c_3 s^2 + (c_1 c_4 - c_0 c_5)s^3 + \cdots + c_1 c_n s^{n-1}$ de grado $n-1$; el polinomio $p(s)$ tiene sus raíces en el semiplano izquierdo de los complejos si y sólo si: $c_0 c_1 > 0$ y $p_1(s)$ es Hurwitz, esto es, si satisface la condición de Hurwitz de los menores principales, que se establece en el teorema (3.2). Un procedimiento de reducción de polinomio más sencillo que el anterior es propuesto por Meinsma [33] para demostrar la tabla de Routh: el polinomio $p(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_{n-1} s^{n-1} + c_n s^n$ con coeficientes reales y $c_n \neq 0$, es estable si y sólo si c_{n-1} es diferente de cero y tiene el mismo signo que c_n y el polinomio $q(s) = p(s) - \frac{c_n}{c_{n-1}}(c_{n-1}s^n + c_{n-3}s^{n-2} + c_{n-5}s^{n-4} + \cdots)$ de grado $n-1$ es estable. En cualquiera de los polinomios reducidos de Duffin o Meinsma no se ahorra trabajo de cálculo numérico con

respecto a la tabla de Routh al determinar la estabilidad de un polinomio.

Hurwitz en 1895 basado en los trabajos de Hermite y sin conocer los trabajos de Routh [24] logra un resultado semejante al de éste último, propone la *Matriz Hurwitz* H creada con los coeficientes del polinomio, existiendo una estrecha relación [24] entre los menores principales de la matriz de Hurwitz H y los elementos $a_{i,1}$ de la primer columna de la tabla de Routh. Hurwitz establece su teorema [24] de la siguiente manera:

Teorema 3.2 [24] *Todo polinomio $p(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_n s^n$ con coeficientes positivos tiene todas sus raíces con parte real negativa si y sólo si todos los menores principales Δ_i de la matriz H son positivos.*

$$H = \begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} & \cdots & & \\ c_n & c_{n-2} & \cdots & & \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-3} & \cdots & \\ 0 & c_n & c_{n-2} & \cdots & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & & \cdots & c_0 \end{bmatrix}^{n\times n}$$

$$\Delta_1 = c^{n-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} \\ c_n & c_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\ c_n & c_{n-2} & c_{n-4} \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix}, \cdots$$

$$\Delta_k = c^{n-1} a_{3,1} a_{4,1} \cdots a_{k+1,1}, \quad a_{k,1} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}}, \; k > 2$$

En 1938 Mikhailov logra probar la estabilidad de un polinomio de coeficientes reales mediante un procedimiento gráfico en el plano de los complejos como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 3.3 [35] *Un polinomio $p(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \cdots + c_n s^n$ de grado n con coeficientes reales positivos, es estable si y sólo si c_0 es positivo y la gráfica del polinomio $p(j\omega)$ en el plano de los complejos rodea al origen en el sentido contrario a las manecillas del reloj, girando un ángulo de $n\frac{\pi}{2}$ cuando la frecuencia se incrementa de cero a infinito.*

3.2 Clasificación de Polinomios con Incertidumbre Paramétrica

Un caso importante de los sistemas lineales es cuando los *parámetros físicos* q_i del sistema son constantes pero se desconocen sus valores precisos, solo se sabe que cada uno de ellos se encuentra dentro de una incertidumbre de la que se conocen sus límites mínimo y máximo q_i^-, q_i^+ respectivamente, tales que $q_i \in [q_i^-, \ q_i^+]$. La colección de todos los ℓ parámetros que intervienen en el proceso, forman un *vector de parámetros* $q = [q_1, \ q_2, \ \cdots, \ q_\ell]^T$ que es elemento de una *caja de incertidumbre paramétrica* Q.

$$Q = \{q = [q_1 \ q_2 \ \ldots \ q_\ell]^T \mid q_i \in [q_i^-, \ q_i^+], \ i = 1, 2, \ldots, \ell\}$$

La mayoría de los casos permiten hacer una transformación de coordenadas de los parámetros físicos sin perder las propiedades originales, dicha transformación puede ser: $\rho_i = [q_i - q_i^-]/[q_i^+ - q_i^-]$, y en este caso $q_i \in [q_i^-, \ q_i^+]$ se transforma en $\rho_i \in [0, \ 1]$ que por simplicidad podemos seguir llamándole q a la nueva coordenada: $q_i \in [0, \ 1]$.

Existen casos particulares donde las propiedades de interés se pierden al aplicar la transformación de coordenadas, como es el caso de polinomios con la propiedad de simetría con una caja de incertidumbre paramétrica con la propiedad de no traslape, que se analizarán más delante. Con excepción de casos particulares, en la mayoría de los casos se puede aplicar una transformación de coordenadas.

Los parámetros físicos q_i con incertidumbre forman parte de los coeficientes $c_i(q)$ del polinomio dando lugar a lo que se le conoce como un *polinomio con incertidumbre paramétrica* $p(s, q)$, en el que se basan las siguientes definiciones..

$$p(s, q) = c_0(q) + c_1(q)s + c_2(q)s^2 + \cdots + c_n(q)s^n$$

Definición 3.1 [5] *Una familia de polinomios $P(s, Q)$, es el conjunto de polinomios $p(s, q)$, tal que q es elemento de Q.*

$$P(s, Q) = \{p(s, q) \mid q \in Q\}$$

Definición 3.2 [5] *Dada una familia de polinomios* $P = \{p(\cdot, q) \mid q \in Q\}$, *el "value set" a frecuencia* $\omega \in \Re$ *es dado por*

$$P(j\omega, Q) = \{p(j\omega, q) \mid q \in Q\}.$$

Equivalentemente: $p(j\omega, q)$ *es la imagen de* Q *en los complejos bajo* $p(j\omega, q)$.

Cuando un sistema tiene incertidumbre paramétrica, entonces existe una familia de sistemas $\mathcal{F}$ [5].

Determinar que cada elemento f de una familia $\mathcal{F}$ posee una propiedad $\mathcal{P}$ en particular, es un problema de un alto grado de dificultad, en el que son útiles las siguientes definiciones.

Definición 3.3 [5] *Dada una familia* $\mathcal{F}$ *y alguna propiedad* $\mathcal{P}$, *se dice que* $\mathcal{F}$ *es robusta si todo elemento de la familia* $f \in \mathcal{F}$ *posee la propiedad* $\mathcal{P}$.

Definición 3.4 [5] *Un subconjunto de prueba, es un subconjunto finito de elementos* $\mathcal{F}^* = \{f_1^* f_2^* \cdots f_p^*\}$, *tal que todo elemento* $f \in \mathcal{F}$ *pose una propiedad* $\mathcal{P}$ *si y sólo si todo elemento* $f^* \in \mathcal{F}^*$ *pose la misma propiedad* $\mathcal{P}$.

En el caso de que la propiedad a analizar sea la estabilidad robusta, entonces se establece la siguiente definición:

Definición 3.5 [5] *Una familia de polinomios* $P(s, Q) = \{p(s, q) \mid q \in Q\}$ *es robustamente estable si para todo* $q \in Q$, $p(s, q)$ *es estable.*

De las definiciones anteriores, se puede decir que, la *estabilidad robusta paramétrica* es el área de la teoría de control que analiza la estabilidad de todos los polinomios elementos de la familia $P(s, Q)$. En el área de estabilidad robusta paramétrica, ha sido de mucha utilidad el concepto de "value set", subconjunto de prueba y el teorema de Exclusión del Cero de Frazer y Duncan de 1929, que se muestra en seguida.

Teorema 3.4 [20] *(Teorema de Exclusión del Cero, Frazer, Duncan) Una familia de polinomios* $P(\cdot, Q)$ *de grado invariante, con coeficientes continuos* $c_i(q)$, *con al menos un elemento estable,*

donde Q es un conjunto arco-conexo. Entonces la familia $P(\cdot, Q)$ es robustamente estable si y sólo si $P(j\omega, Q)$ no contiene al cero para toda ω elemento de los reales.

Nota 3.1 *Un conjunto $Q \subset \Re^{\ell}$ se le llama arco-conexo si para cada par de puntos a, b elementos de Q, existe una función continua $f : [0,1] \to Q$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$*

En el análisis de estabilidad robusta es útil el concepto de convexidad. Se verá más delante que los casos que poseen esta propiedad son los más fáciles de resolver.

Se dice que un conjunto es convexo si para cualquier par de elementos del conjunto p^0, p^1 el punto $p(\lambda) = \lambda p^1 + (1-\lambda)p^0$ pertenece al conjunto para todo valor de λ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$ [32]. Dentro del contexto de convexidad, existen algunas definiciones necesarias como las siguientes.

Definición 3.6 [32] *Dado un arbitrario conjunto P. La evolvente convexa $conv(P)$ es el conjunto más pequeño que contiene a P.*

Definición 3.7 [5] *Un polítopo P en $\Re^k$ es la evolvente convexa de un conjunto finito de elementos $\{p^1, p^2, \ldots, p^{\ell}\}$*

$$P = conv\left\{p^i\right\}$$

Todo elemento de un polítopo se puede expresar como $p = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p^i \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$, y a la colección de elementos $\{p^1, p^2, \ldots, p^{\ell}\}$ se le llama un *conjunto generador*.

Los elementos del conjunto generador que forman parte de la frontera ∂P se les llama *vértices* $\{v^1, v^2, \ldots, v^m\}$ y es el conjunto generador mínimo de P, $\{v^i\} = \{p^i\} \cap \partial P$. Una definición importante en tema de polítopos, es la siguiente:

Definición 3.8 [5] *Dado un polítopo P y un par de vértices v^a, v^b. Al segmento lineal convexo generado por v^a, v^b tal que ningún elemento de él intersecta con otro segmento lineal convexo del polítopo se le llama arista.*

De acuerdo a los conceptos anteriores, la caja de incertidumbre paramétrica $Q \subset \Re^{\ell}$ es un

polítopo con un conjunto generador que es el conjunto de *vértices de la caja* q^i.

$$\{q^1,\ q^2,\ \ldots,\ q^m\} = \left\{q = [q_1\ q_2\ \ldots\ q_\ell]^T \mid q_i \in \{q_i^-,\ q_i^+\},\ i = 1, 2, \ldots, \ell\right\},\ m = 2^\ell.$$

Al evaluar un polinomio $p(s, q)$ tomando un valor complejo fijo de s, y siendo q cualquier vector de la caja $q \in Q \subset \Re^\ell$, entonces se dice que se está mapeando de $\Re^\ell$ a los complejos $p : \Re^\ell \longrightarrow \mathbb{C}$. De esta manera los vértices q^i de la caja Q se mapean en polinomios $\{q^i\} \xrightarrow{p} \{p(q^i)\}$, y el conjunto mínimo generador de ellos son los *polinomios extremos*.

Los polinomios con incertidumbre paramétrica $p(s, q)$ se pueden clasificar en cuatro tipos, de acuerdo a la estructura de los coeficientes $c_i(q)$: Intervalo, Afín, Multilineal y Polinómico.

Los *polinomios intervalo* son aquellos en los que cada coeficiente es una función lineal de un sólo parámetro y cada parámetro se relaciona sólo con un coeficiente. Mediante transformación de coordenadas toma la forma acostumbrada como la que se muestra en el siguiente ejemplo: $p(s, c) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3 + q_4 s^4$.

En los *polinomios afín* los coeficientes dependen linealmente de varios parámetros y cada parámetro se puede relacionar con varios coeficientes. Ejemplo: $p(s, q) = (2q_1 + q_2) + (4q_1 + 5q_2)s + (3q_1 + 2q_2)s^2 + 2(1 + q_1)s^3 + s^4$.

Los *polinomios multilineales* poseen coeficientes que como su nombre lo dice son sumas de productos de parámetros con potencia unitaria. Ejemplo: $p(s, q) = (3q_1 + q_2q_3) + (2q_1q_2 + 5q_2)s + (3q_1q_3)s^2 + (q_1 + q_3)s^3 + s^4$.

En el caso *polinómico* los coeficientes son semejantes a los anteriores pero por lo menos algún parámetro aparece con potencia mayor a la unidad. Ejemplo: $p(s, q) = (2q_2q_3) + (q_1q_2^3 + q_1)s + (q_1 + 2q_1^2q_3)s^2 + (q_1^2q_2 + 4q_3)s^3 + s^4$.

3.3 Polinomios Intervalo

De acuerdo a la descripción de polinomios intervalo, cada coeficiente se puede expresar como $c_i(q) = a_{i,0} + a_{i,1}q_i$, donde $a_{i,j}$ son constantes. Tomando en cuenta que $q_i \in [q_i^-,\ q_i^+]$ entonces $c_i \in [c_i^-,\ c_i^+]$ donde $c_i^- = a_{i,0} + a_{i,1}q_i^-$ y $c_i^+ = a_{i,0} + a_{i,1}q_i^+$ pudiéndose expresar así un polinomio intervalo como $p(s, c) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \cdots + c_n s^n$ donde la incertidumbre paramétrica

está en sus coeficientes $c_i \in [c_i^-,\ c_i^+]$ y por facilidad se acostumbra llamarles $q_i \in [q_i^-,\ q_i^+]$. La estabilidad robusta de las familias de polinomios intervalo es resuelta en 1978 con el teorema de Kharitonov. El teorema se establece mediante cuatro polinomios llamados de Kharitonov:

$$K_1(s) = c_0^- + c_1^- s + c_2^+ s^2 + c_3^+ s^3 + c_4^- s^4 + c_5^- s^5 + c_6^+ s^6 + c_7^+ s^7 + \cdots,$$

$$K_2(s) = c_0^+ + c_1^+ s + c_2^- s^2 + c_3^- s^3 + c_4^+ s^4 + c_5^+ s^5 + c_6^- s^6 + c_7^- s^7 + \cdots,$$

$$K_3(s) = c_0^+ + c_1^- s + c_2^- s^2 + c_3^+ s^3 + c_4^+ s^4 + c_5^- s^5 + c_6^- s^6 + c_7^+ s^7 + \cdots,$$

$$K_4(s) = c_0^- + c_1^+ s + c_2^+ s^2 + c_3^- s^3 + c_4^- s^4 + c_5^+ s^5 + c_6^+ s^6 + c_7^- s^7 + \cdots$$

Teorema 3.5 [29] *(Teorema de Kharitonov) Una familia de polinomios intervalo $P(s,Q)$ es robustamente estable sí y sólo si sus cuatro polinomios de Kharitonov $K_i(s)$ son estables.*

3.4 Polinomios con Dependencia Afín

En este tipo de polinomios los coeficientes son combinaciones lineales de los ℓ parámetros físicos $c_i(q) = c_{i,0} + c_{i,1}q_1 + c_{i,2}q_2 + \cdots + c_{i,\ell}q_\ell$, en el caso general los coeficientes no necesariamente son independientes entre sí. Cada polinomio con incertidumbre paramétrica afín $p(s,q)$ se puede expresar como una combinación lineal de los parámetros $q_i \mid p(s,q) = a_0(s) + a_1(s)q_1 + a_2(s)q_2 + \cdots + a_\ell(s)q_\ell$ donde los coeficientes $a_i(s)$ son complejos.

$$p(s,q) = a_0(s) + A(s)q, \quad A(s) = [a_1(s)\ a_2(s)\ \ldots\ a_\ell(s)]$$

Si la expresión $p(s,q) = a_0(s) + A(s)q$ es evaluada en un vértice q^i de la caja de incertidumbre Q, se obtiene el polinomio $p^i(s)$. Por otra parte, dado que la caja de incertidumbre es un polítopo, entonces para todo vector $q \in Q$ existe un conjunto de valores $\lambda_i \geq 0$ tales que $q = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i q^i$, $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$. Aplicando esto a las ecuaciones anteriores se tiene: $p^i(s) = a_0(s) + A(s)q^i$, $p(s,q) = a_0(s) + A(s)\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i q^i = a_0(s) + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A(s)q^i$, donde toda λ_i es positiva y $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$,

substituyendo $A(s)q^i = p^i(s) - a_0(s)$ se obtiene $p(s,q) = a_0(s) + \sum_{i=1}^{\ell}(p^i(s) - a_0(s))\lambda_i = a_0(s) + \sum_{i=1}^{\ell} p^i(s)\lambda_i - a_0(s)\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i$, para finalmente llegar a:

$$p(s,q) = \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i p^i(s), \quad \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i = 1$$

Con lo anterior se demuestra que todo polinomio afín $p(s,q) \in P(s,Q)$ se puede expresar como una combinación lineal convexa de sus polinomios $\{p^1(s),\ p^2(s),\ \ldots,\ p^m(s)\}$, siendo entonces éste el conjunto generador de un polítopo que es la familia de polinomios con incertidumbre afín. Dicho de otra manera, un polinomio afín mapea el polítopo Q en el polítopo $P(s,Q)$. Debe notarse que todo vértice $p^i(s)$ proviene de un vértice q^i, pero no todo vértice q^i mapea en un vértice de $P(s,Q)$. Así también si el análisis se particulariza al caso $q = q^a(1-\lambda) + q^b\lambda$, se obtiene $p(s,q) = p(s,q^a)(1-\lambda) + p(s,q^b)(\lambda)$, lo que significa que un segmento de línea recta en la caja de incertidumbre paramétrica con extremos en q^a, q^b, es mapeado en un segmento de línea recta en el plano de los complejos con extremos en $p(s,q^a)$, $p(s,q^b)$. Haciendo el análisis anterior en orden inverso se obtiene que todo segmento de línea recta en el plano de los complejos con extremos en $p(s,q^a)$, $p(s,q^b)$ es mapeado de un segmento de línea recta en la caja de incertidumbre paramétrica con extremos en q^a, q^b. Por otra parte dada la definición de arista, entonces cualquier arista de $P(s,Q)$ no intersecta con ningún otro segmento en los complejos, y dado que todo segmento de línea recta contenido en $P(s,Q)$ es mapeado de un segmento de línea recta contenido en Q y todo segmento de línea recta contenido en Q se mapea en un segmento de línea recta contenido en $P(s,Q)$, entonces toda arista de $P(s,Q)$, proviene de una arista de Q, pero no toda arista de Q se mapea en arista de $P(s,Q)$.

La estabilidad robusta de las familias de polinomios con incertidumbre paramétrica de estructura afín queda resuelta en 1988 con el teorema de A. C. Bartlet, C. V. Hollot, Huang Lin (1988), que se describe en seguida.

Teorema 3.6 [6] *(Aristas) La familia de polinomios $P(s,Q)$ con incertidumbre afín es estable si y sólo si el mapeo de las aristas de Q es estable.*

El mapeo de una arista de Q es estable si cumple el teorema (3.4) de Frazer y Duncan. Si se desea hacer un análisis algebraico de la estabilidad de las aristas de Q, se puede hacer mediante un resultado de [21], de donde se obtienen condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de un segmento. Un segmento $[p(s,q^i),\ p(s,q^j)]$ es estable si y sólo si se cumple: (i) Los coeficientes c_n de los polinomios evaluados en los vértices $p(s,q^i)$ deben de tener el mismo signo. (ii) Los polinomios evaluados en los vértices $p(s,q^i)$ deben ser estrictamente Hurwitz. (iii) Tomando H_i como la matriz de Hurwitz correspondiente a $p(s,q^i)$, el producto $H_i^{-1}H_j$ no debe de tener valores característicos puramente reales en $(-\infty,\ 0]$.

La estabilidad de las aristas se pueden analizar también empleando las condiciones de estabilidad de segmento de S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L. H. Keel, [7, 8, 9], en el que un polinomio $p(j\omega) = c_0 + c_1 j\omega + c_2(j\omega)^2 + c_3(j\omega)^3 + c_4(j\omega)^4 + \cdots + c_n(j\omega)^n$ es representado mediante $p(j\omega) = p^o(\omega) + j\omega p^e(\omega)$, donde $p^o(\omega) = c_1\omega - c_3\omega^3 + c_5\omega^5 + \cdots$ y $p^e(\omega) = c_0 - c_2\omega^2 + c_4\omega^4 + \cdots$. La estabilidad del segmento se establece de acuerdo al siguiente lema.

Lema 3.7 [7] *(Segmento). Sean $p_1(s), p_2(s)$ polinomios Hurwitz de grado n con coeficientes principales del mismo signo. Entonces el segmento de polinomios $[p_1(s)\ ,\ p_2(s)]$ es Hurwitz estable si y sólo si no existe $\omega > 0$ tal que:* 1) $p_1^e(\omega)p_2^o(\omega) - p_2^e(\omega)p_1^o(\omega) = 0$, 2) $p_1^e(\omega)p_2^e(\omega) \leq 0$, 3) $p_1^o(\omega)p_2^o(\omega) \leq 0$.

El lema anterior requiere sólo la primer condición y una de las otras dos, como se puede ver en el siguiente análisis: si $p_1^e(\omega)p_2^e(\omega) = 0$, entonces multiplicando 1) por $p_1^e(\omega)p_1^o(\omega) \neq 0$ se obtiene $(p_1^e(\omega))^2\, p_1^o(\omega)p_2^o(\omega) - p_1^e p_2^e(\omega)\,(p_1^o(\omega))^2 = 0$ que implica $p_1^o(\omega)p_2^o(\omega) = 0$. Por otra parte, si $p_1^e(\omega)p_2^e(\omega) < 0$, entonces multiplicando 1) por $p_1^e(\omega)p_2^o(\omega) \neq 0$, se tiene $(p_1^e(\omega))^2\,(p_2^o(\omega))^2 - (p_1^e(\omega)p_2^e(\omega))\,(p_1^o(\omega)p_2^o(\omega)) = 0$ lo cual implica $p_1^o(\omega)p_2^o(\omega) < 0$, con lo cual queda probado que la primera y segunda condición implican la tercera y de manera similar se prueba que la primera y tercera condición implican la segunda.

3.5 Polinomios con Dependencia Multilineal

Un polinomio $p(s,q)$ de dependencia multiafín que comúnmente se le llama multilineal, se puede

definir de la siguiente manera.

Definición 3.9 *Un polinomio con dependencia multilineal $p(s,q)$ tal que $q \in Q \subset \Re^{\ell}$, se puede expresar linealmente en cualquier parámetro q_i mediante las funciones $f_i(s,q)$ y $g_i(s,q)$, siendo ambas dependientes de s y de toda q_k tal que $k \neq i$, $p(s,q) = f_i(s,q) + g_i(s,q)q_i$.*

Dada la naturaleza de los polinomios multilineales, es útil emplear una nomenclatura que permita trabajar un vector paramétrico parcialmente determinado, es decir, que parte de los parámetros físicos q_i que lo componen, estén determinados en uno de los extremos de la incertidumbre q_i^+ o q_i^-. Esto se puede expresar mediante un parámetro $\alpha_i \in \{0,\ 1\} \mid q_i = q_i^-(1-\alpha_i) + q_i^+\alpha_i$, de tal manera que un vector de incertidumbre paramétrica q con algunos de sus parámetros $i, j, k \cdots$ determinados en alguno de sus extremos se puede representar como $q_{i,j,k\cdots}^{\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k\cdots}$, y el parámetro que no se especifique un valor determinado, será elemento de su intervalo de incertidumbre: $q_{i,j,k\cdots}^{\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k\cdots} = \left(q \mid q_i = q_i\ (1-\alpha_i) + q_i^+\alpha_i,\ q_j = q_j^-(1-\alpha_j) + q_j^+\alpha_j,\ q_k = q_k^-(1-\alpha_k) + q_k^1\alpha_k,\ \ldots\right);\ \alpha_i,\ \alpha_j,\ \alpha_k,\ \ldots, \in \{0,\ 1\},\ \left(q_{i,j,k\cdots}^{\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k\cdots}\right)_r \in [q_r^-,\ q_r^+]\ \forall r \neq i,\ j,\ k,\ \cdots$. Así también podemos adoptar la notación de que entre dos vectores paramétricos $q_{i,j,k}^{\alpha_i,\alpha_j,0}$ y $q_{i,j,k}^{\alpha_i,\alpha_j,1}$, la única diferencia que tienen es que $q_k = q_k^-$ en el primero y $q_k = q_k^+$ en el segundo, mientras que todos los demás parámetros tienen el mismo valor en ambos vectores incluyendo todo q_r tal que $r \neq i,\ j,\ k$. En esta notación, un segmento recto en Q paralelo al eje q_i, es expresado por $q = q_i^0\lambda + q_i^1(1-\lambda)$. Las funciones empleadas en la definición (3.9), cumplen las siguientes equivalencias si el vector paramétrico q es elemento del segmento paralelo al eje $q_i \mid f_i(s,q_i^0) = f_i(s,q_i^1) = f_i(s,q)$ y $g_i(s,q_i^0) = g_i(s,q_i^1) = g_i(s,q)$.

Si q es elemento del segmento $[q_i^0,\ q_i^1]$, entonces de acuerdo a la definición (3.9), las funciones $f_i(s,q)$ y $g_i(s,q)$ se pueden obtener valorando el polinomio en q_i^0 y $q_i^1 \mid p(s,q_i^0) = f_i(s,q_i^0) + g_i(s,q_i^0)q_i^-$ y $p(s,q_i^1) = f_i(s,q_i^1) + g_i(s,q_i^1)q_i^+$, y tomando $\Delta_i = q_i^+ - q_i^-$ se obtiene:

$$f_i(s,q) = \frac{p(s,q_i^0)q_i^+ - p(s,q_i^1)q_i^-}{\Delta_i}, \quad g_i(s,q) = \frac{\partial}{\partial q_i}p(s,q) = \frac{p(s,q_i^1) - p(s,q_i^0)}{\Delta_i} \tag{3.10}$$

Substituyendo $f_i(s,q)$ y $g_i(s,q)$ de (3.10) en la ecuación de la definición (3.9), se obtiene una expresión para el polinomio $p(s,q)$ en función de los polinomios $p(s,q_i^0)$ y $p(s,q_i^1)$ para todo vector

paramétrico q elemento del segmento $[q_i^0,\ q_i^1]$, como aparece en seguida:

$$p(s,q) = \frac{p(s,q_i^0)q_i^+ - p(s,q_i^1)q_i^-}{\Delta_i} + \frac{p(s,q_i^1) - p(s,q_i^0)}{\Delta_i}q_i = p(s,q_i^0)\frac{q_i^+ - q_i}{\Delta_i} + p(s,q_i^1)\frac{q_i - q_i^-}{\Delta_i}$$

Esta última expresión se simplifica en una sola sumatoria como aparece en seguida, dando lugar al siguiente hecho:

$$p(s,q) = \sum_{\alpha_i} p(s,q_i^{\alpha_i})\beta_i^{\alpha_i} \mid \ \alpha_i \in \{0,\ 1\},\ \beta_i^{\alpha_i} - \frac{q_i^+ - q_i}{\Delta_i}(1-\alpha_i) + \frac{q_i - q_i^-}{\Delta_i}\alpha_i > 0 \mid \sum_{\alpha_i} \beta_i^{\alpha_i} = 1 \tag{3.11}$$

Hecho 3.1 [5] *Todo segmento en $Q \subset \Re^\ell$ paralelo a un eje q_i en Q se mapea mediante $p(s,q)$ multilineal en el segmento en los complejos* $[q_i^0\ ,\ q_i^1] \xrightarrow{p} [p(s,q_i^0)\ ,\ p(s,q_i^1)]$.

Dado que $p(s,q_i^0)$ y $p(s,q_i^1)$ son funciones de $\ell - 1$ parámetros por que q_i no es variable en ellos, entonces pueden ser expresados en función del resto de los parámetros para ser substituidos en (3.11) obteniendo así (3.12)

$$p(s,q_i^0) = \sum_{\alpha_j} p(s,q_{ij}^{0\alpha_j})\beta_j^{\alpha_j}, \quad p(s,q_i^1) = \sum_{\alpha_j} p(s,q_{ij}^{1\alpha_j})\beta_j^{\alpha_j}$$

$$p(s,q) = \left(\sum_{\alpha_j} p(s,q_{ij}^{0\alpha_j})\beta_j^{\alpha_j}\right)\beta_i^0 + \left(\sum_{\alpha_j} p(s,q_{ij}^{1\alpha_j})\beta_j^{\alpha_j}\right)\beta_i^1$$

$$p(s,q) = \sum_{\alpha_i,\alpha_j} p(s,q_{ij}^{\alpha_i\alpha_j})\beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j} \mid \ \alpha_i,\ \alpha_j \in \{0,\ 1\},\ \beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j} \geq 0,\ \sum_{\alpha_i,\alpha_j} \beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j} = 1 \tag{3.12}$$

El resultado anterior muestra que dejando variables sólo dos parámetros en la caja de incertidumbre el polinomio multilineal $p(s,q)$ es una combinación lineal de los polinomios $p(s,q_{ij}^{\alpha_i\alpha_j})$ con coeficientes $\beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j}$. Aplicando (3.11) en los polinomios $p(s,q_{ij}^{\alpha_i\alpha_j})$ para $\{\alpha_i\alpha_j\} = \{00,\ 01,\ 10,\ 11\}$, se obtendría una función semejante a (3.12) en función de los parámetros i, j, k. Mediante aplicación sucesiva de (3.11) como lo ha sido para obtener (3.12), se obtiene una expresión para cualquier número de parámetros:

$$p(s,q) = \sum_{\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k,\cdots} p(s,q_{ijk\cdots}^{\alpha_i\alpha_j\alpha_k\cdots})(\beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j}\beta_k^{\alpha_k}\cdots) \tag{3.13}$$

$$\beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j}\beta_k^{\alpha_k}\cdots \geq 0, \quad \sum_{\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k,\cdots} \beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j}\beta_k^{\alpha_k}\cdots = 1$$

$$\beta_i^{\alpha_i} = \frac{q_i^+ - q_i}{\Delta_i}(1-\alpha_i) + \frac{q_i - q_i^-}{\Delta_i}\alpha_i \geq 0, \;\; \alpha_i \in \{0,\ 1\}$$

Si el número de parámetros en (3.13) es la dimensión ℓ del espacio donde se encuentra la caja de incertidumbre $Q \subset \Re^\ell$, entonces el conjunto de vectores $\{q_{ijk\cdots\ell}^{\alpha_i\alpha_j\alpha_k\cdots\alpha_\ell}\}$ se convierte en los 2^ℓ vértices de la caja de incertidumbre paramétrica $\{q^i\}$ enumerados por i, siendo éste el valor en decimal del número binario: $\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_\ell \mid \alpha_i \in \{0,\ 1\}$. Así también el conjunto de polinomios $\{p(s, q_{ijk\cdots\ell}^{\alpha_i\alpha_j\alpha_k\cdots\alpha_\ell})\}$ se convierte en los polinomios $\{p^i(s)\}$ que son el conjunto generador de la familia de polinomios $P(s,Q)$. Con lo anterior queda demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.8 *(Teorema de Combinación Lineal de la Imagen de los Vértices) Cualquier polinomio multilineal $p(s,q)$ elemento de una familia $P(s,Q)$ se puede expresar como una combinación lineal de la imagen de los vértices de Q.*

$$p(s,q) = \sum_{\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k,\cdots\alpha\ell} p(s, q_{ijk\cdots\ell}^{\alpha_i\alpha_j\alpha_k\cdots\alpha_\ell})(\beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j}\beta_k^{\alpha_k}\cdots\beta_\ell^{\alpha_\ell}),$$

$$\beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j}\beta_k^{\alpha_k}\cdots\beta_\ell^{\alpha_\ell} \geq 0, \quad \sum_{\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k,\cdots\alpha\ell} \beta_i^{\alpha_i}\beta_j^{\alpha_j}\beta_k^{\alpha_k}\cdots\beta_\ell^{\alpha_\ell} = 1$$

$$\beta_i^{\alpha_i} = \frac{q_i^+ - q_i}{\Delta_i}(1-\alpha_i) + \frac{q_i - q_i^-}{\Delta_i}\alpha_i \geq 0, \quad \alpha_i \in \{0,\ 1\}.$$

Para los casos en que se puede hacer una transformación de parámetros sin perder las propiedades del caso, los nuevos parámetros, que por simplicidad se le seguirán llamando q_i, son normalizados a $q_i \in [0,\ 1]$, y entonces $\beta_i^{\alpha_i} = (1-q_i)(1-\alpha_i) + (q_i)\alpha_i \geq 0$. La idea de expresar un polinomio multilineal $P(s,q)$ con una caja de incertidumbre Q normalizada a $q_i \in [0,\ 1]$, en función de polinomios extremos es mostrada por N. K. Tsing, A. L. Tits [41], pero los detalles de su demostración son omitidos y lo mencionan como una combinación convexa sin realmente

serlo como se verá en seguida; la misma idea es empleada para otros fines en [40].

El contenido del teorema (3.8) no implica que la familia $P(s,Q)$ sea convexa, ya que los coeficientes $\beta_i^{v_i}\beta_j^{v_j}\beta_k^{v_k}\cdots\beta_\ell^{v_\ell}$ de cada polinomio $p(s, q_{ijk\cdots\ell}^{v_i v_j v_k \cdots v_\ell})$ son dependientes entre sí. Para el caso $Q \subset \Re^2$ el polinomio se puede expresar como $p(s,q) = p(s,q_{12}^{00})(1-q_1)(1-q_2) + p(s,q_{12}^{01})(1-q_1)q_2 + p(s,q_{12}^{10})q_1(1-q_2) + p(s,q_{12}^{11})q_1q_2$, pero se puede ver que un segmento que une dos vértices en Q tal que de uno al otro cambien dos parámetros, por ejemplo el segmento $[q_{ij}^{00}, q_{ij}^{11}]$ no es mapeado en una recta en el plano de los complejos uniendo los polinomios $p(s,q_{ij}^{00})$, $p(s,q_{ij}^{11})$, como se muestra en la figura (3.1) del siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1 *Dado el polinomio* [5] : $p(s,q) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + s^4$, $c_0 = 1.853 + 3.773q_1 + 1.985q_2 + 4.032q_1q_2$, $c_1 = 3.164 + 4.841q_1 + 1.561q_2 + 1.06q_1q_2$, $c_2 = 2.871 + 2.06q_1 + 1.561q_2 + q_1q_2$, $c_3 = 2.56 + q_1 + q_2$; *y dada la caja de incertidumbre paramétrica:* $q_1 \in [0,\ 1]$, $q_2 \in [0,\ 3]$. *Graficar en el plano de los complejos, los polinomios* $p(j\omega, q)$ *correspondientes a* 20 *líneas de* q_2 *constante, uniformemente distribuidas en* Q, *a una frecuencia* $\omega = 1.5$

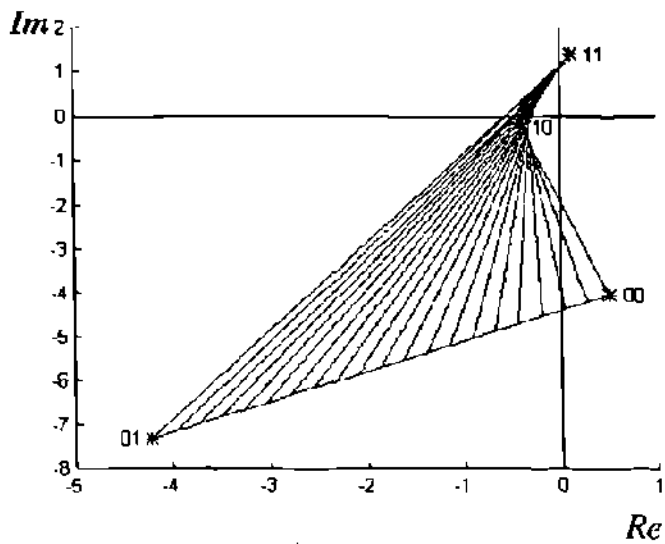

Figura 3.1 "Value set" de familia multilineal. Ejemplo 3.1

Para entender más las propiedades del mapeo multilineal se puede ver que de acuerdo al hecho (3.1) toda arista de Q es mapeada en un segmento recto en los complejos. Por otra parte, dada la definición de arista, ésta no se intersecta con ningún otro segmento del conjunto, así que si $p(s,\hat{q})$

es elemento de una arista entonces $\hat{q}$ no será intersección de dos segmentos en Q y por lo tanto pertenecerá a una arista en Q, implicando que toda arista de $P(s,Q)$ proviene de una arista de Q, pero no necesariamente una arista de Q se mapea en una arista en $P(s,Q)$. De acuerdo a esto último y al teorema (3.8) se puede concluir que: $convP(s,Q) = conv\{p^i(s)\}$ y $P(s,Q) \subset conv\{p^i(s)\}$. En este análisis el polinomio $p(s,q)$ es una función que mapea de $\Re^\ell$ a los complejos, pero se obtienen los mismos resultados si el análisis se hace para una función multilineal que mapee a más de dos dimensiones $f : \Re^\ell \rightarrow \Re^k$ como lo muestra el Teorema de Mapeo de L. Zadeh y C. A. Desoer (1963) [46].

Teorema 3.9 [46] *(Mapeo) Suponga una caja de incertidumbre paramétrica $Q \subset \Re^\ell$ con vértices $\{q^i\}$ y una función multilineal $f : Q \rightarrow \Re^k$. Sea $f(Q) = \{f(q) \mid q \in Q\}$ entonces: $conv f(Q) = conv\ \{f(q^i)\}$*

Si la familia de polinomios multilineales $P(s,Q)$, está contenida en el polítopo generado con sus polinomios extremos, entonces de acuerdo a [21] se puede establecer que una condición suficiente de estabilidad para una familia de polinomios multilineales $P(s,Q)$ de grado n, es que cumpla: (i) Los coeficientes c_n de todos los polinomios evaluados en los vértices $p(s,q^i)$ deben de tener el mismo signo. (ii) Todos los polinomios evaluados en los vértices $p(s,q^i)$ deben ser estrictamente Hurwitz. (iii) Tomando H_i como la matriz de Hurwitz correspondiente a $p(s,q^i)$, el producto $H_i^{-1}H_k$ no debe de tener valores característicos puramente reales en $(-\infty,\ 0]$ para toda $i = 1, 2, \cdots, 2^\ell$; $k = i+1, 2, \cdots, 2^\ell$.

Una familia de polinomios con incertidumbre multilineal $P(s,Q)$ no necesariamente es convexa aún cuando su frontera esté constituida por el mapeo de aristas de Q, como fué planteado por error en la conjetura de Hollot y Xu [27]. Como se muestra en la figura (3.2) del siguiente contraejemplo.

Ejemplo 3.2 *(Contraejemplo a la conjetura de Hollot y Xu)* [3]. *Dada la familia de polinomios multilineales $p(s,q) = (s-q_1)(s-q_2)(s-q_3) + 6(s^2) + 4s + 6$, con una caja de incertidumbre paramétrica Q tal que $|q_i| \leq \sqrt{3}$. Obtener un bosquejo del "value set" para $\omega = 1$, graficando en el plano de los complejos la imagen de lineas paralelas a q_3, correspondientes a cada punto de la cuadricula formada por 15 puntos uniformemente distribuidos en q_1 y q_2.*

La falta de convexidad en el "value set" del caso general de familias de polinomios multilineales, hace difícil el análisis de estabilidad robusta, provocando en los investigadores del área el interés por resolver diversos casos particulares como por ejemplo cuando se tienen productos de polinomios intervalo, si los parámetros de cada polinomio son distintos a los de los demás polinomios, el resultado es un polinomio multilineal; mediante la generalización del teorema de Kharitonov [10] este tipo de caso es estudiado en [9, 11, 12] como estabilizibilidad.

Existen algunos trabajos de investigación para determinar los casos particulares de polinomios con incertidumbre multilineal que su "value set" es un polítopo al cual es aplicable el teorema de las aristas.

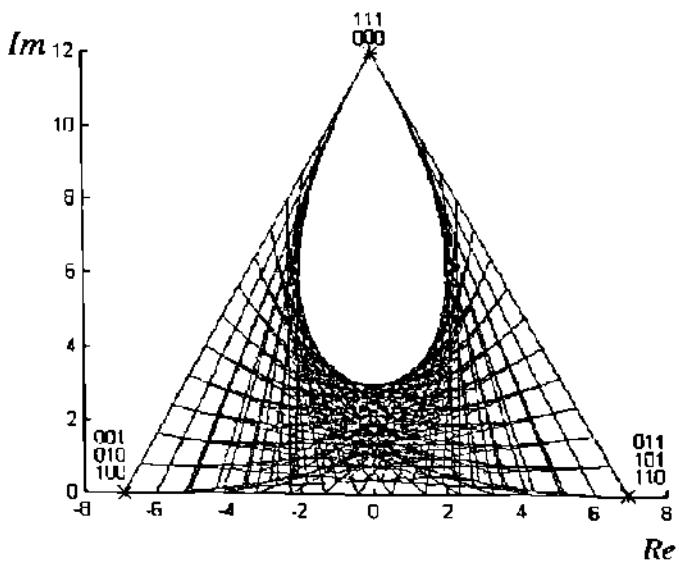

Figura 3.2 Contraejemplo a la conjetura de Hollot y Xu.

3.5.1 Polinomios con Incertidumbre Multilineal e Imagen Convexa

De acuerdo al teorema de mapeo, cuando un polinomio con incertidumbre paramétrica multilineal tiene imagen convexa ésta es un polítopo. Dado esto, existen varios trabajos en los que se investigan estos casos que en general son de condiciones suficientes de convexidad y se pueden clasificar en dos tipos: condiciones de convexidad en el espacio de los coeficientes, y condiciones de convexidad dependientes de la frecuencia.

3.5.1.1 Condiciones de Convexidad en el Espacio de los Coeficientes

En esta clase de casos juega un papel importante los conceptos de: simetría, mencionada por W. Chen, I. R. Petersen [14] y no traslape, B. T. Polyak [14, 37]. Para describir la simetría es necesario emplear dos vectores paramétricos, en uno las componentes q_i y q_j están intercambiadas con respecto al otro: $q = [q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}, \quad q_i, \quad q_{i+1}, \cdots, q_{j-1}, \quad q_j, \quad q_{j+1}, \cdots, q_{\ell-1}, q_\ell]$, $\hat{q} = [q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}, \quad q_j, \quad q_{i+1}, \cdots, q_{j-1}, \quad q_i, \quad q_{j+1}, \cdots, q_{\ell-1}, q_\ell]$.

Definición 3.10 [14] *Un polinomio $p(s,q) = c_0(q) + c_1(q)s + \cdots + c_n(q)s^n$ se dice ser de estructura con incertidumbre simétrica si $c_i(\hat{q}) = c_i(q)$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.*

Un ejemplo de estructura con incertidumbre simétrica para $Q \subset \Re^3$ es el coeficiente $c_i(q) = q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1$.

Definición 3.11 [14] *Una caja de incertidumbre paramétrica cumple la propiedad de no traslape si los límites de los parámetros cumplen: $q_{i+1}^- > q_i^+$.*

Si un polinomio cumple la propiedad de simetría y la caja de incertidumbre paramétrica es tal que $q_i^- = a$ y $q_i^+ = b$ para $i = 1, 2, \cdots, \ell$, entonces un polinomio evaluado en un vértice con m_0 parámetros en valor mínimo a y m_1 parámetros en valor máximo b no altera su valor si se intercambian de lugar dos parámetros cualquiera, dando lugar al siguiente hecho.

Hecho 3.2 *Dado un polinomio multilineal $p(s,q)$ que cumple la propiedad de simetría, con una caja de incertidumbre paramétrica tal que $q_i^- = a$ y $q_i^+ = b$ para $i = 1, 2, \ldots, \ell$, entonces todos los vértices con una cantidad m_0 de parámetros en valor mínimo y una cantidad m_1 de parámetros en valor máximo sin importar su lugar en la notación $q_{i,j,k,\cdots,z_0,r,s,t,\cdots,z_1}^{0,0,0,\cdots,0,1,1,1,\cdots,1}$ son mapeados al mismo punto en los complejos. $p(s, q_{i,j,k,\cdots,z_0,r,s,t,\cdots,z_1}^{0,0,0,\cdots,0,1,1,1,\cdots,1})$.*

El hecho anterior explica el por que varios vértices de la caja Q son mapeados a puntos comunes en los complejos en la figura (3.2) del contraejemplo a la conjetura de Hollot y Xu. Además el contenido de este hecho, sirve de base para demostrar otras propiedades del tipo de polinomios que

se están analizando, para esta finalidad es necesario primeramente establecer el siguiente lema para ser aplicado en la demostración del teorema (3.11).

Lema 3.10 *Un vector $q(\lambda)$ con una componente en combinación lineal con dos elementos $a = q_i^-$ y $b = q_i^+$, $q_i(\lambda) = a(1-\lambda) + b\lambda$ y las demás componentes fijas, es mapeado por una función multilineal $f(q(\lambda))$ en la misma combinación lineal de las funciones en $f(q_i^0)$ y $f(q_i^1)$, para todo valor de λ.*

$$f(q(\lambda)) = f(q_i^0)(1-\lambda) + f(q_i^1)\lambda$$

Prueba. Por simplicidad $q(\lambda)$ será anotada solamente como q, entonces $f(q) = f_i(q) + g_i(q)q_i(\lambda) = f_i(q) + g_i(q)(a(1-\lambda) + b\lambda)$ sumando y restando $f_i(q)\lambda$ en la última expresión se obtiene $f(q) = (f_i(q) + g_i(q)a)(1-\lambda) + (f_i(q) + g_i(q)b)\lambda$, dado que $f_i(q)$ y $g_i(q)$ no dependen de q_i, entonces: $f(q(\lambda)) = f(q_i^0)(1-\lambda) + f(q_i^1)\lambda$ ■

Teorema 3.11 *Sea $p(s,q)$ un polinomio multilineal con $s =$ constante, que cumple la propiedad de simetría. Sea $Q \subset \Re^2$ una caja de incertidumbre paramétrica tal que $q_1^- = q_2^- = a$ y $q_1^+ = q_2^+ = b$, que mapea sus vértices a los complejos en $p^{0,0}$, $p^{1,1}$ y $p^{0,1} = p^{1,0}$. Sea $K \subset \Re^2$ otra caja de incertidumbre paramétrica que cumple la propiedad de no traslape tal que $k_1 \in [a, b]$, $k_2^- = a(1-\alpha)+b\alpha$, $k_2^+ = a(1-\beta)+b\beta$, $\beta > \alpha > 1$, que mapea sus vértices a los complejos en $\hat{p}^{0,0}$, $\hat{p}^{1,1}$, $\hat{p}^{0,1}$ y $\hat{p}^{1,0}$. Entonces los vértices de K son mapeados formando un polítopo en los complejos, con la arista $[\hat{p}^{0,0}, \hat{p}^{0,1}]$ alineada con $[p^{0,0}, p^{0,1}]$ y la arista $[\hat{p}^{1,0}, \hat{p}^{1,1}]$ alineada con la $[p^{1,0}, p^{1,1}]$, teniendo ambas líneas como punto de intersección al vértice $p^{0,1} = p^{1,0}$ como lo muestran el mapeo los vértices de K :*

$$\hat{p}^{0,0} = p^{0,1} + (p^{0,1} - p^{0,0})(\alpha - 1), \quad \hat{p}^{0,1} = p^{0,1} + (p^{0,1} - p^{0,0})(\beta - 1)$$

$$\hat{p}^{1,0} = p^{1,0} + (p^{1,1} - p^{1,0})\alpha, \quad \hat{p}^{1,1} = p^{1,0} + (p^{1,1} - p^{1,0})\beta$$

Prueba. El mapeo del vértice $k^{0,0}$ a los complejos es $\hat{p}^{0,0}$ que se puede expresar como $\hat{p}^{0,0} = f_1(k_2^-) + g_1(k_2^-)k_1^-$, substituyendo k_1^- y k_2^- en función de los parámetros de la caja Q se obtiene $\hat{p}^{0,0} = f_1(a(1-\alpha) + b\alpha) + g_1(a(1-\alpha) + b\alpha)a$. Aplicando el lema (3.10)

resulta $\hat{p}^{0,0} = f_1(a)(1-\alpha) + f_1(b)\alpha + g_1(a)a(1-\alpha) + g_1(b)a\alpha$, reagrupando se obtiene $\hat{p}^{0,0} = (f_1(a) + g_1(a)a)(1-\alpha) + (f_1(b) + g_1(b)a)\alpha$ en donde $f_1(a) + g_1(a)a$ es el polinomio evaluado en el vértice $q^{0,0}$, y $f_1(b) + g_1(b)a$ es el polinomio evaluado en el vértice $q^{0,1}$, logrando así $\hat{p}^{0,0} = p^{0,0}(1-\alpha) + p^{0,1}\alpha$ que es igual a $\hat{p}^{0,0} = p^{0,0} + (p^{0,1} - p^{0,0})\alpha$, que es equivalente a $\hat{p}^{0,0} = p^{0,1} + (p^{0,1} - p^{0,0})(\alpha - 1)$. De manera similar se prueba para los demás, logrando así: $\hat{p}^{0,0} = p^{0,1} + (p^{0,1} - p^{0,0})(\alpha - 1)$, $\hat{p}^{0,1} = p^{0,1} + (p^{0,1} - p^{0,0})(\beta - 1)$, $\hat{p}^{1,0} = p^{1,0} + (p^{1,1} - p^{1,0})\alpha$ y $\hat{p}^{1,1} = p^{1,0} + (p^{1,1} - p^{1,0})\beta$.

De las expresiones anteriores se puede ver que los puntos $\hat{p}^{0,0}$, $\hat{p}^{0,1}$, $p^{0,0}$ y $p^{0,1}$están en una misma línea y $\hat{p}^{1,0}$, $\hat{p}^{1,1}$, $p^{1,0}$ y $p^{1,1}$ están en otra línea y de acuerdo al hecho (3.2) ambas tienen como punto común a $p^{0,1} = p^{1,0}$, entonces la arista $[\hat{p}^{0,0}, \hat{p}^{0,1}]$ está alineada con $[p^{0,0}, p^{0,1}]$ y la arista $[\hat{p}^{1,0}, \hat{p}^{1,1}]$ está alineada con $[p^{1,0}, p^{1,1}]$.

Los puntos $p^{0,0}$, $p^{0,1}$, $p^{1,1}$ pueden formar un triángulo o están en una sola línea. Si forman un triángulo entonces las líneas determinadas por $\hat{p}^{0,0}$, $\hat{p}^{0,1}$, $p^{0,0}$, $p^{0,1}$ y $\hat{p}^{1,0}$, $\hat{p}^{1,1}$, $p^{1,0}$, $p^{1,1}$, tienen ángulos diferentes, de lo contrario estarán en una sola línea, dando lugar a dos casos de análisis.

Caso A: los puntos $p^{0,0}$, $p^{0,1}$, $p^{1,1}$ formaran un triángulo. De las expresiones de $\hat{p}^{i,j}$ y dado que $\beta > \alpha > 1$, entonces $(\beta - 1) > (\alpha - 1) > 0$, se determina que en una línea el punto $\hat{p}^{0,1}$ está más alejado de $p^{0,1}$ que el punto $\hat{p}^{0,0}$. De la misma manera en la otra línea el punto $\hat{p}^{1,1}$ está más alejado de $p^{0,1}$ que el punto $\hat{p}^{1,0}$, de tal forma que la línea que contiene al segmento $[\hat{p}^{0,1}, \hat{p}^{1,1}]$ y la línea que contiene a $[\hat{p}^{0,0}, \hat{p}^{1,0}]$ no intersectan dentro de la evolvente convexa de los puntos $\hat{p}^{0,0}$, $\hat{p}^{1,0}$, $\hat{p}^{0,1}$, $\hat{p}^{1,1}$ al igual que las líneas de los segmentos $[\hat{p}^{1,0}, \hat{p}^{1,1}]$ y $[\hat{p}^{0,0}, \hat{p}^{01}]$. Por lo tanto estos cuatro segmentos en los complejos son aristas de un polítopo $P(K)$ limitado por las aristas: $[\hat{p}^{0,0}, \hat{p}^{1,0}]$, $[\hat{p}^{1,0}, \hat{p}^{1,1}]$, $[\hat{p}^{1,1}, \hat{p}^{0,1}]$ y $[\hat{p}^{01}, \hat{p}^{0,0}]$.

Caso B: los puntos $p^{0,0}$, $p^{0,1}$, $p^{1,1}$ están en una sola línea. De acuerdo a las expresiones del mapeo de los vértices de K, las líneas determinadas por $\hat{p}^{0,0}$, $\hat{p}^{1,0}$, $\hat{p}^{0,1}$, $\hat{p}^{1,1}$, están en una sola línea, habiéndose colapsado entonces el polítopo del caso A en un segmento de recta sin perder su convexidad. ■

El resultado del teorema anterior se puede interpretar fácilmente en las gráficas correspondientes al polinomio $p(s,q) = c_0(q) + c_1(q)s + c_2(q)s^2 + c_3(q)s^3 + c_4(q)s^4$, con coeficientes: $c_0 =$

$(1+q_1)(1+q_2)$, $c_1 = (1.5+q_1)(1.5+q_2)$, $c_2 = (0.3+q_1)(0.3+q_2)$, $c_3 = (0.2+q_1)(0.2+q_2)$, $c_4 = (0.25+q_1)(0.25+q_2)$, con una caja Q tal que $q_i \in [0,\ 1]$, y una caja K tal que $k_1 \in [0,\ 1]$, $k_2 \in [2,\ 3]$. La región de lineas cruzadas corresponde a la imagen de Q y el polítopo corresponde a la imagen de K, como aparece en la figura (3.3).

Una consecuencia inmediata del teorema (3.11), sin necesidad de demostración es el siguiente corolario, este resultado es obtenido en [14] por métodos muy diferentes.

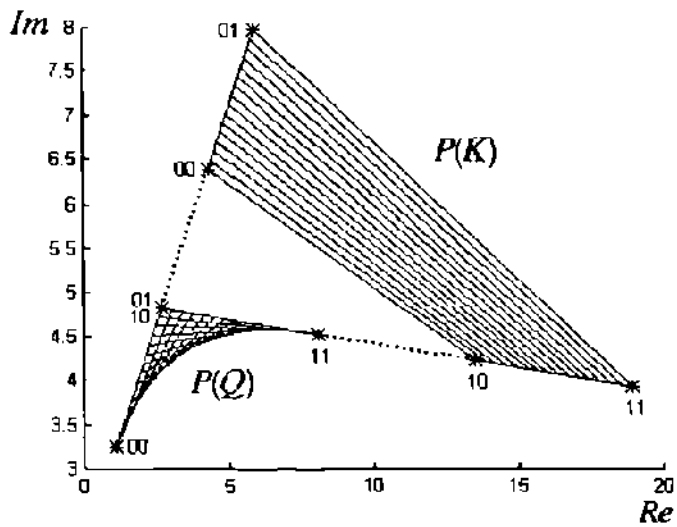

Figura 3.3 Familia multilineal con simetria y no traslape.

Corolario 3.12 [14] *Dado un polinomio multilineal $p(s,q)$ con s = constante, que cumple la propiedad de simetría, con una caja de incertidumbre paramétrica $Q \subset \Re^2$ tal que cumple la propiedad de no-traslape, la familia $P(s,Q)$ es un polítopo.*

Una vez obtenido el resultado del corolario anterior se puede extender a cajas de incertidumbre paramétrica $Q \subset \Re^\ell$ como aparece en [14] y por lo tanto se tiene que para una familia de polinomios con incertidumbre paramétrica multilineal que cumple la propiedad de simetría, con una caja de incertidumbre paramétrica $Q \subset \Re^\ell$ tal que cumple la propiedad de no-traslape, se puede analizar la estabilidad robusta por medio del teorema de las aristas.

3.5.1.2 Condiciones de Convexidad Dependientes de la Frecuencia

Las condiciones de convexidad mencionadas en el punto anterior son condiciones suficientes en el espacio de los coeficientes, existen varios trabajos en los que las condiciones de convexidad son dependientes de la frecuencia.

N. K. Tsing, A. L. Tits [41] establecen para un polinomio multilineal, una trayectoria cerrada $c = [[q^1, q^2], [q^2, q^3], \ldots [q^{k-1}, q^k], [q^k, q^1]]$, $k \geq 2$ en $Q \subset \Re^\ell$ donde cada segmento es arista de Q, y de acuerdo a la posición que guarda el mapeo de los vértices contenidos en la trayectoria $p(s, q^1)$, $p(s, q^2)$, $\ldots$ $p(s, q^k)$ en el $conv\,(p(s, \{q^i\}))$, establece sus teoremas y corolarios de los que podemos citar los siguientes:

Corolario 3.13 [41] *Si existe una curva cerrada* $c = [[q^1, q^2], [q^2, q^3], \ldots [q^{k-1}, q^k], [q^k, q^1]]$, $k \geq 2$ *en* Q *donde cada segmento es arista de* Q *y* $p(s, q^1)$, $p(s, q^2)$, $\ldots$ $p(s, q^k)$ *son vértices sucesivos de* $conv\,(p(s, \{q^i\}))$ *entonces* $P(s, Q)$ *es un polígono igual a* $conv\,(p(s, \{q^i\}))$.

Teorema 3.14 [41] *Si para un polinomio multilineal, cada vértice de* $conv\ (P(s, Q))$ *es mapeado de sólo un vértice de* Q *y ningún otro vértice de* Q *mapea en una arista de* $conv\ (P(s, Q))$, *entonces* $P(s, Q)$ *es un polítopo si y sólo si las aristas de* $conv\ (P(s, Q))$*son mapeadas de aristas de* Q.

El ordenamiento de los vértices mapeados a los complejos y el ángulo entre sus aristas son empleados por B. D. O. Anderson, F. Kraus, M. Mansour y S. Dasgupta [3] para determinar condiciones suficientes en las que el "value set" de una familia de polinomios de incertidumbre multilineal es un polítopo. Para una caja de incertidumbre paramétrica tal que $q_i \in [0, 1]$ y $\Delta_i = 1$, de acuerdo a (3.10) $g_i(j\omega, q) = p(j\omega, q_i^1) - p(j\omega, q_i^0)$ que geométricamente es el "vector" que conecta el polinomio $p(j\omega, q_i^0)$ con $p(j\omega, q_i^1)$ en el plano de los complejos, se puede decir que $g_i(j\omega, q^r)$ apunta hacia donde crece el mapeo de q_i en el punto $p(j\omega, q^r)$ al incrementar q_i de 0 a 1.

Dado que la función $g_i(j\omega, q)$ es un número complejo que se puede expresar en su parte real e imaginaria o en magnitud y ángulo, entonces $g_i(j\omega, q) = g_{iR}(\omega, q) + jg_{iI}(\omega, q) = |g_i(j\omega, q)|\, e^{j\theta_i}$ y $g_{iR}(\omega, q) = |g_i(j\omega, q)| \cos\theta_i$, $g_{iI}(\omega, q) = |g_i(j\omega, q)|\, sen\theta_i$; si se obtiene el Jacobiano de $p(j\omega, q)$ con respecto a los parámetros q_α y q_β, éste quedará en función de la parte real e imaginaria de las

derivadas parciales $\dfrac{\partial p(j\omega, q)}{\partial q_i}$ que a su vez son $g_i(j\omega, q)$ de acuerdo a (3.10), entonces el Jacobiano de $p(s, q)$ con respecto a q_α y q_β, $J_{\alpha\beta}(\omega, q)$, es:

$$J_{\alpha\beta}(\omega, q) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_R(\omega, q)}{\partial q_\alpha} & \dfrac{\partial p_R(\omega, q)}{\partial q_\beta} \\ \dfrac{\partial p_I(\omega, q)}{\partial q_\alpha} & \dfrac{\partial p_I(\omega, q)}{\partial q_\beta} \end{vmatrix}$$

$$J_{\alpha\beta}(\omega, q) = \begin{vmatrix} g_{\alpha R}(\omega, q) & g_{\beta R}(\omega, q) \\ g_{\alpha I}(\omega, q) & g_{\beta I}(\omega, q) \end{vmatrix}$$

$$J_{\alpha\beta}(\omega, q) = |g_\alpha(j\omega, q)|\, |g_\beta(j\omega, q)|\, sen(\theta_\beta - \theta_\alpha)$$

Valorando el Jacobiano en un vértice q^r de Q, entonces el signo de $J_{\alpha\beta}(\omega, q^r)$ determina la relación entre los ángulos de las aristas α y β en los complejos que salen de $p(q^r)$. Si el ángulo entre las aristas α y β es $0 < \theta_\beta - \theta_\alpha < \pi$, dicho de otra manera si el ángulo θ_β es mayor que el ángulo θ_α pero no por más de π, entonces el Jacobiano $J_{\alpha\beta}(\omega, q^r)$ es positivo, de lo contrario es negativo.

La imagen de toda arista correspondiente a un parámetro q_i sale del vértice donde $q_i = 0$ y entra en el vértice donde $q_i = 1$. El ángulo de una arista donde es entrante es el negativo del ángulo donde es saliente. Si se analiza el Jacobiano en un vértice q^r de Q para todo par de parámetros posibles α y β tal que $\alpha < \beta$ y el Jacobiano resulta $J_{\alpha\beta}(\omega, q^r)$ positivo, significa que los ángulos de todas las aristas salientes del vértice q^r están ordenados $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_\ell$ y $0 < \theta_\ell - \theta_1 < \pi$. Si se inicia este análisis en el vértice donde todos los parámetros están en cero y el ordenamiento de ángulos se cumple, significa que la arista de menor ángulo es la que incrementa q_1, y la podríamos identificar por arista 1. Si se recorre en la dirección de esta arista y se analiza este nuevo vértice, el ángulo de la arista 1 cambia de signo porque en ese nuevo vértice es entrante y será entonces la de ángulo mayor. Si el Jacobiano es positivo entonces el ordenamiento de ángulos se sigue cumpliendo y ahora la arista de menor ángulo es la arista 2 que es la que incrementa q_2. Si al continuar el análisis la condición de ordenamiento de ángulos se sigue cumpliendo, se habrá creado en los complejos una trayectoria de aristas cerrada con los vértices ordenados. En [3] utilizan esta propiedad y la aplican

primero a una caja en $\Re^2$ para la cual al cumplirse el orden de los vértices es obvia su convexidad y por inducción matemática llegan a probarlo para $Q \subset \Re^\ell$.

Otro trabajo interesante de polinomios con incertidumbre paramétrica multilineal es el de B. T. Polyak [37], que basa su trabajo en cierta relación de las funciones $g_i(j\omega, q)$ que le llama propiedad D, que de cumplirse es condición suficiente para que la familia de polinomios sea un **polítopo**. Para un vector paramétrico q cualquiera de la caja se analiza la posición relativa que se guarda entre las funciones $g_i(j\omega, q)$, si sus ángulos están ordenados entre cero y π (como las aristas del trabajo de Anderson), lo representa por $g_1(j\omega, q) \prec g_2(j\omega, q) \prec \cdots \prec g_\ell(j\omega, q) \prec -g_1(j\omega, q)$, y si se cumple para todo vector paramétrico de la caja se le llama *propiedad D*; por otra parte establece los segmentos principales, que son el mapeo de aristas de Q que partiendo del origen, incrementa primero q_1 de 0 a 1, posteriormente q_2 de 0 a 1, hasta llegar al vértice máximo donde disminuye primero q_1 de 1 a 0, posteriormente q_2 de 1 a 0, hasta llegar al origen, mediante la propiedad D y los segmentos principales establece varios teoremas, para el caso multilineal podemos tomar el siguiente:

Teorema 3.15 [37] *Si la propiedad D es cumplida por un polinomio multilineal $p(j\omega, q)$ con coeficientes positivos, para toda $0 < \omega < \infty$, entonces la familia $P(s, Q)$ es robustamente estable si y sólo si todos los coeficientes son positivos $\forall q \in Q$ y los 2ℓ segmentos principales son estables.*

3.6 El Problema del Caso General de Incertidumbre Multilineal

La convexidad en las familias de polinomios intervalo y afín es de gran ayuda para lograr criterios sencillos para determinar la estabilidad robusta de la familia, en ambos existe un subconjunto de prueba [1, 5], que es el conjunto mínimo de polinomios tal que la familia es estable si y sólo si el subconjunto de prueba es estable. En los polinomios intervalo el subconjunto de prueba fueron los cuatro polinomios de Kharitonov; en los polinomios afín el subconjunto de prueba fueron las aristas. En las familias de polinomios multilineales no existe subconjunto de prueba, J. E. Ackermann [1, 2] publica un contraejemplo en 1992 que es un polinomio multilineal $p(s, q) =$

$c_0(q) + c_1(q)s + c_2(q)s^2 + s^3$, con coeficientes $c_0(q) = \ell(\ell-1) + r^2 + 2(\ell+1)\sum_{i=1}^{\ell} q_i + 2\sum_{i<j}^{1,\cdots,\ell} q_i q_j$, $c_1(q) = \ell + \sum_{i=1}^{\ell} q_i$, $c_2(q) = c_1(q)$ y $q \in Q = \{q \mid q_i > 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ \ell\}$. Mediante el criterio de Hurwitz, Ackermann determina que para tener estabilidad robusta, deben cumplirse que $c_1(q)c_2(q) - c_0(q) > 0$, que equivalentemente es: $c_1(q)c_2(q) - c_0(q) = \sum_{i=1}^{\ell}(q_i - 1)^2 - r^2$, de donde $\sum_{i=1}^{\ell}(q_i - 1)^2 > r^2$, entonces la familia de polinomios es estable fuera de una bola de radio r centrada en $q_0 = [1,\ 1,\ \cdots,\ 1]$, si se hace que r tienda a cero, el polinomio será estable en toda $q \in Q$ excepto en el punto q_0. Se puede seleccionar arbitrariamente una caja Q tal que satisfaga la positividad de los parámetros y que contenga a q_0. La posición de q_0 en Q puede ser tan arbitraria como se desee, entonces no existe un subconjunto de prueba capaz de contener a q_0.

De lo anterior se puede ver que la solución del problema de estabilidad robusta de familias de polinomios multilineales, no puede estar basada en un subconjunto de prueba y la búsqueda de casos de imagen convexa resuelve solo esos casos particulares pero no el problema general. Existen algunos resultados que pudieran ser útiles al análisis de la estabilidad robusta de polinomios con incertidumbre multilineal. En [26] se prueba que para una función multilineal real, si existe una raíz dentro de Q, ésta está también en las aristas. En [31] demuestra que una familia de polinomios multilineales tienen raíces invariantes si y sólo si éstas lo son también de la imagen de los vértices de la caja, la existencia de tales raíces es función de la independencia lineal de ciertos vectores con un número de elementos que puede ser muy grande y por lo tanto difícil de trabajar. En [30] se resuelve la estabilidad robusta de casos particulares de familias de polinomios "anidados", dada una familia de polinomios con su subconjunto de prueba y dado un polinomio fijo, al substituir un elemento cualquiera de la familia de polinomios como argumento en el polinomio fijo se genera una nueva familia de polinomios, se demuestra que la nueva familia es estable si y sólo si el polinomio fijo es estable cuando el argumento es substituido por cada elemento del subconjunto de prueba.

Dada la falta de convexidad y de subconjunto de prueba del caso multilineal; y dado que no es fácil encontrar la frontera del "value set" para el caso general, puede pensarse en determinar la estabilidad robusta utilizando la metodología de análisis empleada en [25] para determinar márgenes de estabilidad mediante una partición del dominio original en subdominios, e iteraciones

en búsqueda de la intersección con el origen de la imagen de ciertas aristas; el problema es que el procedimiento hay que repetirlo a diferentes frecuencias que puedan asegurar el resultado por lo menos en un ancho de banda. Puede pensarse también que es de utilidad el trabajar en el espacio de los coeficientes. Rantzer define la dirección convexa como sigue: un polinomio mónico $g(s)$ se dice ser de dirección convexa si se cumple la siguiente condición, dado un polinomio $f(s)$ estable de grado n, y $f(s)+g(s)$ estable, $f(s)+\lambda g(s)$ de grado n, entonces el polinomio $p(s,\lambda) = f(s)+\lambda g(s)$ es estable para toda $\lambda \in [0\ ,1]$. Así también demuestra que un polinomio $g(s)$ es de dirección convexa si $\frac{d\measuredangle g(j\omega)}{d\omega} \leq \left|\frac{sen(2\measuredangle g(j\omega))}{2\omega}\right|$ es satisfecho para toda $\omega > 0$ tal que $g(j\omega) \neq 0$, donde $\measuredangle$ significa el argumento de un número complejo.

B. R. Barmish, H. I. Kang [4] demuestran que si un polinomio mónico satisface la condición extendida de los menores alternantes de Hurwitz entonces es una dirección convexa, pero este resultado en el espacio de los coeficientes es menos general que la dirección convexa de Rantzer.

Por otra parte L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya [28] muestran que si un polinomio $p(s) = h(s^2) + sg(s^2)$ es Hurwitz y $X(\omega) = \frac{\omega g(-\omega^2)}{h(-\omega^2)}$, la condición de Rantzer es satisfecha si se cumple $\frac{dX(\omega)}{d\omega} \geq \left|\frac{X(\omega)}{\omega}\right|$.

P. Misra [36]. Aplica aritmética de intervalos para analizar la estabilización de un polinomio intervalo mediante la tabla de Routh. La aritmética de intervalos se fundamenta en las cotas mínima y máxima de las operaciones básicas: "+", "−", "×", "÷"; entre dos variables a, b, tal que $a \in [a_1,\ a_2]$, $b \in [b_1,\ b_2]$, de al manera siguiente: $[a_1,\ a_2] + [b_1,\ b_2] = [a_1 + b_1,\ a_2 + b_2]$, $[a_1,\ a_2] - [b_1,\ b_2] = [a_1 - b_2,\ a_2 - b_1]$, $[a_1,\ a_2][b_1,\ b_2] = [\min(a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2),\ \max(a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)]$, $[a_1,\ a_2]/[b_1,\ b_2] = [a_1,\ a_2][\frac{1}{b_2},\ \frac{1}{b_1}] \mid 0 \notin [b_1,\ b_2]$.

Continuando con la idea de Misra, se puede pensar en determinar la estabilidad robusta de polinomios con incertidumbre paramétrica, de cualquier tipo, mediante la tabla de Routh y aritmética de intervalos. Para esto es necesario determinar la positividad de todos los elementos de la primer columna de la tabla, para todo $q \in Q$.

Los elementos de la primer columna de la tabla de Routh, son funciones polinómicas, en el caso general. Al analizar el signo de una función polinómica $f(q)$ para todo $q \in Q$, mediante aritmética de intervalos, se obtienen cotas de la función, que no son los valores mínimo y máximo de la función.

De tal manera que se obtienen condiciones suficientes de positividad o negatividad de la función en todo su dominio. Para obtener condiciones necesarias y suficientes de signo de una función en su dominio, basta con dividir el dominio en subdominios, y verificar la condición de suficiencia de signo en cada uno de ellos, pero el problema radica en que la multiplicación de intervalos es una operación complicada, haciendo inoperante la idea en los casos de incertidumbre paramétrica multilineal o polinómica, y más aún cuando se trata de resolver la positividad de un determinante, en todo su dominio. Para medir la magnitud de esta dificultad, sólo basta con intentar por medio de aritmética de inervalos, determinar la positividad en toda la caja Q, del coeficiente $c_3(q)$ del polinomio característico de la máquina "Fiat" [5] que aparece en el capítulo de aplicaciones.

Los criterios en el espacio de los coeficientes tienen la ventaja que se hace un sólo análisis y no uno para cada valor de ω como sucede en el dominio de la frecuencia, por está razón, por la falta de convexidad de las familias de polinomios multilineales y por no poder contar para ellos con un subconjunto de prueba, se propone una alternativa en el espacio de los coeficientes para analizar estabilidad robusta de familias multilineales, dicha alternativa se le llama en esta tesis Descomposición de Signo, contenida en el siguiente capítulo.

Capítulo 4
Descomposición de Signo

4.1 Definición de la Operación

Al analizar una función es común la necesidad de descomponer ésta en sus partes que la constituyen de acuerdo al caso, por ejemplo si se está haciendo un análisis de un polinomio $p(s)$, puede ser útil descomponerlo en sus partes par e impar; si se está haciendo el análisis de un polinomio en el dominio de la frecuencia $p(j\omega)$, normalmente es útil descomponerlo en sus partes real e imaginaria, pero si se está haciendo el análisis de la positividad de una función, podemos pensar en descomponerla en sus partes positiva y negativa.

La determinación de la positividad de una función real polinómica multivariable es un problema difícil de resolver, normalmente se le ve a la función real como un todo completo y posiblemente eso aumenta la dificultad del problema, en vez de ver la función descompuesta en sus posibles partes que la constituyen. En este caso se propone descomponer una función multivariable $f : \Re^\ell \to \Re$ en sus partes positiva y negativa $f_p(\cdot)$, $f_n(\cdot)$, para poder definir esta descomposición, es necesario primeramente recordar el concepto de *cono convexo positivo* $P = \{x \in \Re^\ell | x_i \geq 0\}$ [32], así como las siguientes definiciones:

Definición 4.1 [32] *Sea P un cono convexo positivo en un espacio vectorial $\Re^\ell$, para $x,\ y \in \Re^\ell$ se dice que $x \geq y$ ($x > y$) con respecto a P si $x - y \in P$ ($x - y \in P^o$, el interior de P).*

Definición 4.2 *Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua y $Q \subset P \subset \Re^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ es una función no-decreciente en Q si $x \geq y$ implica $f(x) \geq f(y)$, $\forall x,\ y \in Q$.*

Las funciones no-decrecientes presentan algunas propiedades interesantes respecto a las operaciones de suma y multiplicación como se muestran en seguida:

Lema 4.1 *Sean $f,\ g : \Re^\ell \to \Re$ dos funciones no-decrecientes no-negativas en $Q \subset P \subset \Re^\ell$, entonces: $f(q) + g(q)$ y $f(q)g(q)$ son funciones no-decrecientes y no-negativas en Q.*

Prueba. Como $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son funciones no-decrecientes en Q, entonces para q^b, q^a elementos de Q tal que $q^b \geq q^a$ implica que $f(q^b) \geq f(q^a)$ y $g(q^b) > g(q^a)$ de donde es inmediato el resultado: $f(q^b) + g(q^b) \geq f(q^a) + g(q^a)$ y $f(q^b)g(q^b) \geq f(q^a)g(q^a)$ ■

Dado que una función real constante positiva $\alpha > 0$ cumple con la definición de función no-decreciente, entonces una consecuencia inmediata del lema anterior es que dada una función no-decreciente $f(\cdot)$ en $Q \subset P \subset \Re^\ell$ y un real positivo $\alpha > 0$ entonces $\alpha + f(\cdot)$ y $\alpha f(\cdot)$ son funciones no-decrecientes en Q. Una vez definidas las funciones no decrecientes y analizadas sus propiedades podemos entonces tratar la descomposición de signo.

Definición 4.3 *Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua y sea $Q \subset P \subset \Re^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ tiene descomposición de signo en Q si existen dos funciones acotadas no-decrecientes $f_n(\cdot) \geq 0$, $f_p(\cdot) \geq 0$, tales que $f(q) = f_p(q) - f_n(q)$ para toda $q \in Q$. Dichas funciones se llamarán: la parte positiva de la función $f_p(\cdot)$ y la parte negativa de la función $f_n(\cdot)$.*

$$\begin{aligned} f(q) &= f_p(q) - f_n(q) \ \ \forall q \in Q \\ f_p(\cdot) &\triangleq Parte\ Positiva\ de\ f(\cdot) \\ f_n(\cdot) &\triangleq Parte\ Negativa\ de\ f(\cdot) \end{aligned}$$

Nota 4.1 *Los nombres "parte positiva" y "parte negativa", son sólo por facilidad de expresión, realmente deben ser interpretados como: parte no negativa y parte no positiva respectivamente.*

Debe notarse que si una función está definida en $Q' \subset \Re^\ell$ que no está contenida en un cono convexo positivo, entonces se puede hacer una transformación de coordenadas para que la función quede definida en $Q \subset P \subset \Re^\ell$ como se muestra en el siguiente hecho.

Hecho 4.1 [17] *Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua definida en $\hat{Q} \subset \Re^\ell$ que no está contenida en un cono convexo positivo, entonces siempre se puede hacer una transformación de coordenadas $\hat{q}_i = \hat{q}_i^- + (q_i - q_i^-)(\hat{q}_i^+ - \hat{q}_i^-)/(q_i^+ - q_i^-)$ tal que $q_i^+ > q_i^- \geq 0$ para que la función quede definida en $Q \subset P \subset \Re^\ell$.*

Mediante el lema (4.1) y el hecho (4.1) se obtiene una propiedad útil de las funciones polinómicas

como aparece en el siguiente lema.

Lema 4.2 *Sea $f(\hat{q})$ una función polinómica cualquiera tal que $\hat{q} \in \hat{Q} \subset \Re^{\ell}$, entonces mediante la transformación de coordenadas del hecho (4.1) de $\hat{Q} \subset \Re^{\ell}$ a $Q \subset P \subset \Re^{\ell}$ la función polinómica $f(q)$ tiene descomposición de signo.*

Prueba. Del hecho (4.1) se obtiene que la función polinómica $f(\hat{q})$ se transforma en $f(q)$ tal que $q \in Q \subset P \subset \Re^{\ell}$. Reagrupando la función se puede expresar como $f(q) = \sum_i g_i(q) - \sum_j h_j(q)$ tal que $q \in Q$, donde $g_i(q)$ y $h_j(q)$ son productos positivos de q_k elevados cada uno a alguna potencia y multiplicados por alguna constante con resultado no-decreciente, dado que $q \in Q \subset P$ y aplicando el lema (4.1) entonces $\sum_i g_i(q)$ y $\sum_j h_j(q)$ son funciones positivas no-decrecientes en Q y califican como la parte positiva y negativa respectivamente de la función $f(q)$. ■

Ejemplo 4.1 *Dada una función real continua $f(q) = 4+q_1-q_2+8q_1^2q_2-9q_1q_2^2$ tal que $q_i \in [0,\ 1]$, obtener la descomposición de signo en Q de la función $f(q)$.*

El dominio de las variables está formado por $Q = \{q = [q_1\ q_2]^T \mid q_i \in [0,\ 1], i = 1, 2\}$, de donde se puede ver que Q está contenido en un cono convexo positivo. Reagrupando separadamente los términos que aparecen sumando y los que aparecen restando en la función, se obtiene: $f(q) = (4 + q_1 + 8q_1^2q_2) - (q_2 + 9q_1q_2^2)$. Revisando el concepto de no-decreciente obtenemos: $q_i^b \geq q_i^a \Rightarrow \left(4 + q_1^b + 8\left(q_1^b\right)^2 q_2^b\right) \geq \left(4 + q_1^a + 8\left(q_1^a\right)^2 q_2^a\right)$ y $\left(q_2^b + 9q_1^b\left(q_2^b\right)^2\right) \geq \left(q_2^a + 9q_1^a\left(q_2^a\right)^2\right)$ de donde ambas funciones son no decrecientes y por lo tanto $f_p(q) = 4 + q_1 + 8q_1^2q_2$ y $f_n(q) = q_2 + 9q_1q_2^2$.

4.2 Representación $(f_n\ ,\ f_p)$

Cuando una función continua $f : \Re^{\ell} \rightarrow \Re$ se descompone en $Q \subset P \subset \Re^{\ell}$ en sus partes positiva y negativa $f_p(\cdot)$ y $f_n(\cdot)$, realmente se está haciendo una transformación de $\Re^{\ell}$ a $\Re^2$, la representación gráfica de la función en un plano $(f_n,\ f_p)$ es de utilidad para entender más fácilmente las propiedades que poseen las partes positiva y negativa de la función, para lo cual se establece la siguiente proposición.

Proposición 4.1 [17] *Toda función continua $f : \Re^{\ell} \to \Re$ con descomposición de signo en el conjunto convexo $Q \subset P \subset \Re^{\ell}$, se puede expresar como una transformación de $\Re^{\ell}$ a $\Re^2$ mediante sus partes positiva y negativa $f_p(\cdot)$ y $f_n(\cdot)$ con representación gráfica en el plano $(f_n,\ f_p)$.*

$$\Re^{\ell} \xrightarrow{(f_n(\cdot),\ f_p(\cdot))} \Re^2$$

Ejemplo 4.2 *Dada la función real continua $f(q) = 4 + q_1 - q_2 + 8q_1^2q_2 - 9q_1q_2^2$ con descomposición de signo en $Q = \{q = [q_1\ q_2]^T \mid q_i \in [0,\ 1]\}$, tal que $f(q) = f_p(q) - f_n(q)\ \forall q \in Q$ donde $f_p(q) = 4 + q_1 + 8q_1^2q_2$ y $f_n(q) = q_2 + 9q_1q_2^2$, obtener la representación gráfica de la función $f(q)$ en el plano $(f_n,\ f_p)$ para 15 líneas, de $q_1 = cte.$ y $q_2 = cte.$ Uniformemente distribuidas en Q.*

Calculando los valores de las partes positiva y negativa de las funciones $f_p(q) = 4 + q_1 + 8q_1^2q_2$ y $f_n(q) = q_2 + 9q_1q_2^2$ correspondientes a cada punto de las líneas, se hace una transformación de Q a $\Re^2$ en el plano $(f_n,\ f_p)$, de esa manera podemos tomar 15 líneas de $q_2 = cte.$ uniformemente distribuidas en Q que son transformadas en las líneas llenas en el plano $(f_n,\ f_p)$, y de la misma manera se toman 15 líneas de $q_1 = cte.$ uniformemente distribuidas en Q, que se transforman en las líneas punteadas como aparece en la figura (4.1).

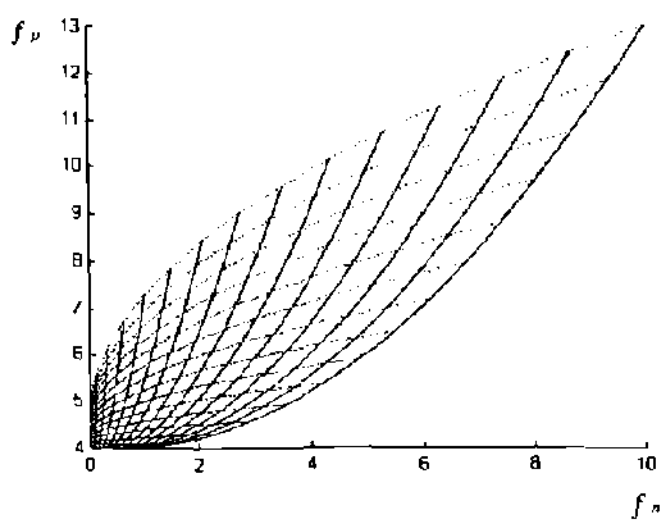

Figura 4.1 Plano $(f_n,\ f_p)$. Ejemplo (4.2)

Cuando una función con descomposición de signo en Q es igual a cero para todo q elemento de Q, implica que $f_p(q) = f_n(q)\ \forall q \in Q$ y su representación gráfica en el plano $(f_n,\ f_p)$ es una línea recta a 45° que contiene al origen, a la cual nos referiremos como *la recta a* 45°, los puntos arriba de ella corresponden a la representación gráfica de funciones con valor positivo y obviamente los de abajo a negativo.

4.2.1 Propiedades en la Representación $(f_n\ ,\ f_p)$

Al expresar una función en sus partes positiva y negativa $f(q) = f_p(q) - f_n(q)$ diremos que está representada en $(f_n,\ f_p)$, es evidente que la función no se altera si se le suma y resta una misma cantidad que puede ser constante o función no-decreciente en cualquier variable inclusive q, pero también es evidente que las partes positiva y negativa ya no conservan su *mínima expresión* dando lugar a la propiedad que se muestra en el siguiente hecho que no requiere demostración.

Hecho 4.2 *Sea $f(\cdot)$ una función con descomposición de signo en Q con partes positiva y negativa $f_p(q)$, $f_n(q)$ respectivamente, y sea $g(q) \geq 0\ \forall q \in Q$ una función no-decreciente en Q, entonces: a) $(f_n(q) + g(q),\ f_p(q) + g(q))$ es también una representación de la función $f(q)\ \forall q \in Q$. b) la representación $(f_n(q) + g(q),\ f_p(q) + g(q))$ de la función $f(\cdot)$ se reduce a su mínima expresión en: $(f_p(q), f_n(q))$*

Las funciones que poseen descomposición de signo presentan la propiedad de conservar la descomposición de signo en las operaciones de suma, resta y multiplicación como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.3 *Sean $f,\ g\ :\ \Re^\ell \longrightarrow \Re$ dos funciones con descomposición de signo en Q; entonces: $f(q) + g(q)$, $f(q) - g(q)$ y $f(q)g(q)$ son funciones que tienen descomposición de signo en Q :*

$$
\begin{aligned}
f(q) + g(q) &= (f(q) + g(q))_p \quad (f(q) + g(q))_n \\
(f(q) + g(q))_n &= (f_n(q) + g_n(q)), \quad (f(q) + g(q))_p = (f_p(q) + g_p(q)) \\
f(q) - g(q) &= (f(q) - g(q))_p - (f(q) - g(q))_n
\end{aligned}
$$

$$(f(q)-g(q))_n = (f_n(q)+g_p(q)), \quad (f(q)-g(q))_p = (f_p(q)+g_n(q))$$

$$\begin{aligned} f(q)g(q) &= (f(q)g(q))_p - (f(q)g(q))_n \\ (f(q)g(q))_n &= (f_p(q)g_n(q)+f_n(q)g_p(q)), \quad (f(q)g(q))_p = (f_p(q)g_p(q)+f_n(q)g_n(q)) \end{aligned}$$

Prueba. Sean $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ funciones con descomposición de signo en Q, entonces $f(q) = f_p(q) - f_n(q)$ y $g(q) = g_p(q) - g_n(q)$, para toda q elemento de Q, donde $f_p(\cdot)$, $f_n(\cdot)$, $g_p(\cdot)$ y $g_n(\cdot)$ son funciones no-negativas y no-decrecientes en Q, de tal manera que la suma de las funciones queda expresada por $f(q)+g(q) = (f_p(q)+g_p(q)) - (f_n(q)+g_n(q))$ y de acuerdo al lema (4.1) la suma de funciones no-decrecientes es no-decreciente, entonces $(f_p(q)+g_p(q))$ y $(f_n(q)+g_n(q))$ son funciones no negativas y no-decrecientes siendo así las partes positiva y negativa de la suma $f(q)+g(q)$. La resta queda expresada por $f(q)-g(q) = (f_p(q)+g_n(q)) - (f_n(q)+g_p(q))$ y por los mismos argumentos que en el caso anterior, $(f_p(q)+g_n(q))$ y $(f_n(q)+g_p(q))$ son las partes positiva y negativa de la resta $f(q)-g(q)$. El producto $f(q)g(q) = (f_p(q)-f_n(q))(g_p(q)-g_n(q))$ que es igual a $f(q)g(q) = (f_p(q)g_p(q)+f_n(q)g_n(q)) - (f_p(q)g_n(q)+f_n(q)g_p(q))$, por la misma argumentación anterior $(f_p(q)g_p(q)+f_n(q)g_n(q))$ y $(f_p(q)g_n(q)+f_n(q)g_p(q))$ son las partes positiva y negativa del producto $f(q)g(q)$. ■

La forma como se obtiene la resta de cualquier par de funciones en el teorema (4.3) asegura que las expresiones de la parte positiva y negativa sean funciones no negativas y no-decrecientes, pero existe el caso particular donde se pueden obtener expresiones más simples como el que se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 4.4 *Sean $f(q), g(q), h(q)$ funciones continuas con descomposición de signo en Q tales que: $f(q) = g(q)+h(q)$, entonces las partes positiva y negativa de la resta $f(q)-g(q)$ se reducen a su mínima expresión de la siguiente manera:*

$$f(q)-g(q) = (f(q)-g(q))_p - (f(q)-g(q))_n$$

$$\begin{aligned} (f(q)-g(q))_n &= f_n(q)-g_n(q) \\ (f(q)-g(q))_p &= f_p(q)-g_p(q) \end{aligned}$$

Prueba. Sean $f(q)$ y $g(q)$ funciones continuas con descomposición de signo en Q, entonces de acuerdo al teorema (4.3) las partes positiva y negativa de la resta $f(q)-g(q)$ son: $(f(q)-g(q))_p = (f_p(q)+g_n(q))$ y $(f(q)-g(q))_n = (f_n(q)+g_p(q))$. Por otra parte dada la condición $f(q) = g(q)+h(q)$ entonces mediante el teorema (4.3) $f_p(q) = g_p(q)+h_p(q)$, $f_n(q) = g_n(q)+h_n(q)$, substituyendo éstas últimas en las partes positiva y negativa de la resta $f(q)-g(q)$ queda: $(f(q)-g(q))_p = (g_p(q)+h_p(q)+g_n(q))$, $(f(q)-g(q))_n = (g_n(q)+h_n(q)+g_p(q))$ y de acuerdo al hecho (4.2) su mínima expresión es: $(f(q)-g(q))_p = (h_p(q))$, $(f(q)-g(q))_n = (h_n(q))$. Tomando nuevamente la condición $f(q) = g(q)+h(q)$ que mediante el teorema (4.3) tenemos $f_p(q) = g_p(q)+h_p(q)$, $f_n(q) = g_n(q)+h_n(q)$, entonces se puede despejar $h_p(q) = f_p(q)-g_p(q)$, $h_n(q) = f_n(q)-g_n(q)$ siendo ambas expresiones no negativas y no-decrecientes pudiendo así calificar como partes positiva y negativa, por lo tanto: $(f(q)-g(q))_p = f_p(q)-g_p(q)$, $(f(q)-g(q))_n = f_n(q)-g_n(q)$ con lo cual queda demostrado. ■

Debe notarse que sólo en condiciones como la del corolario (4.4) se cumple que la resta de $f_p(q)-g_p(q)$ y $f_n(q)-g_n(q)$ son funciones no negativas y no-decrecientes, pero en el caso general no se puede suponer lo mismo y la resta de funciones debe manejarse por el teorema (4.3). Otras propiedades de las funciones que tienen descomposición de signo, son las referentes a las cotas de la función, para lo cual es necesario definir algunos conceptos antes de analizar dichas propiedades.

Definición 4.4 [17] *Se le llamará vértice mínimo y máximo Euclidiano $v^{\min}$, $v^{\max}$ a los vectores elementos de $Q \subset P \subset \Re^{\ell}$ con mínima y máxima norma Euclidiana respectivamente.*

$$\|v^{\min}\|_2 = \min_{q\in Q} \|q\|_2 , \quad \|v^{\max}\|_2 = \max_{q\in Q} \|q\|_2$$

Lema 4.5 [17] *Sea $f : \Re^{\ell} \to \Re$ una función continua no-decreciente y sea $Q \subset P \subset \Re^{\ell}$ una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos $v^{\min}$, $v^{\max}$, entonces:*

$$\min_{q\in Q} f(q) = f(v^{\min}), \quad \max_{q\in Q} f(q) = f(v^{\max})$$

Prueba. Tomando que $q \geq v^{\min}\ \forall q \in Q$ y dado que $f(q)$ es una función no-decreciente, entonces $f(q) \geq f(v^{\min})\ \forall q \in Q$, de donde se concluye $\min_{q\in Q} f(q) = f(v^{\min})$. De la misma manera $v^{\max} \geq q\ \forall q \in Q$ entonces $f(v^{\max}) \geq f(q)\ \forall q \in Q$ de donde se obtiene $\max_{q\in Q} f(q) = f(v^{\max})$. ■

La aplicación del lema anterior a las partes positiva y negativa de una función permite obtener una propiedad del acotamiento de cada una de estas partes como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.6 [17] *Sea $f : \Re^{\ell} \to \Re$ una función con descomposición de signo en Q, sea $Q \subset P \subset \Re^{\ell}$ una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos $v^{\min}$, $v^{\max}$, entonces las partes positiva y negativa de la función están acotadas como se muestra:*

$$f_p(v^{\min}) \leq f_p(q) \leq f_p(v^{\max}) \, \forall q \in Q, \quad f_n(v^{\min}) \leq f_n(q) \leq f_n(v^{\max}) \, \forall q \subset Q$$

Prueba. Las partes positiva y negativa de una función son funciones no-decrecientes, entonces si $\min_{q \in Q} f_p(q) \leq f_p(q) \leq \max_{q \subset Q} f_p(q)$ y de acuerdo al lema (4.5) se obtiene $f_p(v^{\min}) \leq f_p(q) \leq f_p(v^{\max}) \, \forall q \in Q$, de la misma manera se demuestra $f_n(v^{\min}) \leq f_n(q) \leq f_n(v^{\max}) \, \forall q \in Q$. ■

El hecho de que las partes positiva y negativa de una función estén limitadas por sus valores mínimo y máximo da lugar a poder obtener cotas de la función analizando solo sus partes positiva y negativa en los vértices mínimo y máximo Euclidianos como aparece en el siguiente teorema.

Teorema 4.7 [17] *(Teorema del Rectángulo) Sea $f : \Re^{\ell} \to \Re$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \Re^{\ell}$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos $v^{\min}$, $v^{\max}$, entonces: **a)** $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$ y $f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min})$ respectivamente, **b)** la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in Q$ en el plano (f_n, f_p) está contenida en el rectángulo con vértices $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\min}))$, $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\max}))$, $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$ y $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$, **c)** si el vértice inferior derecho $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$ está arriba de la recta de 45° entonces la función $f(q) > 0 \, \forall q \in Q$, **d)** si el vértice superior izquierdo $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$ está abajo de la recta de 45° entonces la función $f(q) < 0 \, \forall q \in Q$.*

Prueba. Del teorema (4.6) tenemos $f_p(v^{\min}) \leq f_p(q) \leq f_p(v^{\max})$ y $f_n(v^{\min}) \leq f_n(q) \leq f_n(v^{\max})$, de esta última desigualdad se tiene $-f_n(v^{\max}) \leq -f_n(q) \leq -f_n(v^{\min})$, sumando la desigualdad de $f_p(q)$ con la de $-f_n(q)$ se obtiene $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max}) \leq f_p(q) - f_n(q) \leq f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min})$. Considerando que la función tiene descomposición de signo entonces $f(q) = f_p(q) - f_n(q)$ y por lo tanto: $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max}) \leq f(q) \leq f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min}) \, \forall q \in Q$.

De acuerdo al teorema (4.6) las partes positiva y negativa de la función $f(q)$ están acotadas: $f_n(v^{\min}) \leq f_n(q) \leq f_n(v^{\max})$, $f_p(v^{\min}) \leq f_p(q) \leq f_p(v^{\max})$, entonces la representación gráfica de $f(q)\ \forall q \in Q$ en el plano (f_n, f_p) está contenida en el rectángulo de la figura (4.2) con vértices $(f_n(v^{\min}),\ f_p(v^{\min}))$, $(f_n(v^{\max}),\ f_p(v^{\max}))$, $(f_n(v^{\min}),\ f_p(v^{\max}))$ y $(f_n(v^{\max}),\ f_p(v^{\min}))\ \forall q \in Q$. Si el vértice inferior derecho $(f_n(v^{\max}),\ f_p(v^{\min}))$ está arriba de la recta a 45° en el plano (f_n, f_p), entonces cualquier punto contenido en el rectángulo está también arriba de la recta de 45° y $f(q) > 0\ \forall q \in Q$. Si el vértice superior izquierdo $(f_n(v^{\min}),\ f_p(v^{\max}))$ está abajo de la recta a 45° en el plano (f_n, f_p) entonces cualquier punto contenido en el rectángulo está también abajo de la recta a 45° y $f(q) < 0\ \forall q \in Q$. ■

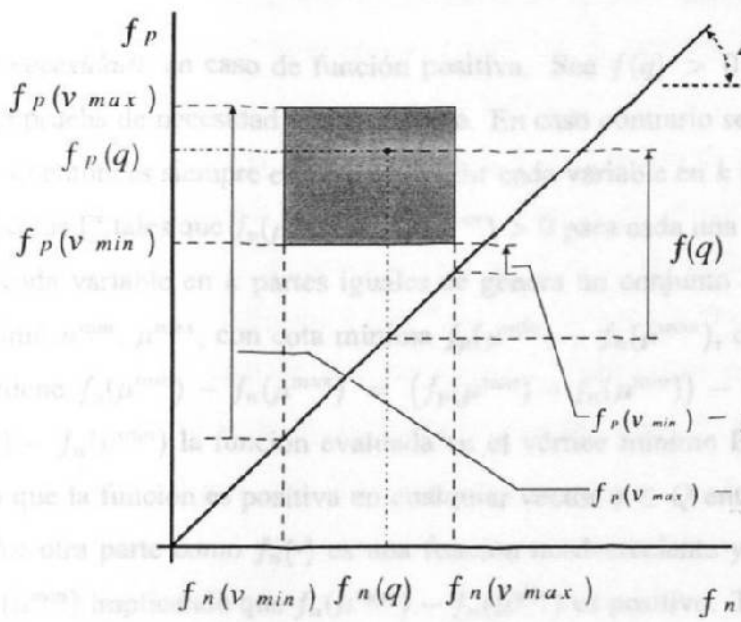

Figura 4.2 Rectángulo que contiene a la función en el plano (f_n, f_p)

La positividad de la cota inferior del teorema anterior, es una condición suficiente de positividad de la función. Así cuando la cota $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$ es negativa no implica que existan vectores q en Q para los cuales la función sea negativa, en este caso es necesario hacer una división de la caja $Q \subset P \subset \Re^\ell$ y definirla como $Q = [q_1^-,\ q_1^+] \times [q_2^-,\ q_2^+] \times \cdots \times [q_\ell^-,\ q_\ell^+]$, podemos dividir el intervalo de cada variable $[q_i^-,\ q_i^+]$ en k partes, generando k nuevos intervalos: $[q_i^-,\ q_i^1], [q_i^1,\ q_i^2], \cdots, [q_i^j,\ q_i^{j+1}], \cdots [q_i^{k-1},\ q_i^+]$, podemos llamarle $[\gamma_i^-,\ \gamma_i^+]$ a uno de los k nuevos

intervalos de una de los ℓ parámetros, dando lugar así a la generación de k^ℓ nuevas cajas Γ, siendo una de ellas: $\Gamma^i = [\gamma_1^-,\ \gamma_1^+] \times [\gamma_2^-,\ \gamma_2^+] \times \cdots \times [\gamma_\ell^-,\ \gamma_\ell^+]$. Con lo anterior la caja original queda expresada como $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y tomando $\mu^{\min}$, $\mu^{\max} \in \Gamma^i$ como los vértices mínimo y máximo Euclidianos de Γ^i se puede establecer el siguiente lema.

Lema 4.8 [17] *Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \Re^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos $v^{\min}$, $v^{\max}$, entonces la función $f(\cdot)$ es positiva (negativa) en Q si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \geq c > 0$ para cada caja Γ^i ($f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) \leq c < 0$ para cada caja Γ^i).*

Prueba *(de necesidad)* en caso de función positiva. Sea $f(q) > 0\ \forall q \in Q$, si $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max}) > 0$ la prueba de necesidad está concluida. En caso contrario se procede a probar que si $f(q) > 0\ \forall q \in Q$ entonces siempre es posible dividir cada variable en k partes iguales generando un conjunto de cajas Γ^i tales que $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) > 0$ para cada una de ellas.

Dividiendo cada variable en k partes iguales se genera un conjunto de cajas Γ^i con vértices mínimo y máximo $\mu^{\min}$, $\mu^{\max}$, con cota mínima $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max})$, que al sumarle y restarle $f_n(\mu^{\min})$ se obtiene $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) = \left(f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\min})\right) - \left(f_n(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})\right)$, siendo $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\min})$ la función evaluada en el vértice mínimo Euclidiano $f(\mu^{\min})$ de la caja Γ^i, y dado que la función es positiva en cualquier vector $q \in Q$ entonces $f(\mu^{\min}) > 0$ para toda caja Γ^i. Por otra parte como $f_n(\cdot)$ es una función no-decreciente y $\mu^{\max} > \mu^{\min}$ entonces $f_n(\mu^{\max}) > f_n(\mu^{\min})$ implicando que $f_n(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$ es positivo. También al ser la función $f_n(\cdot)$ continua no-decreciente y estar acotada de acuerdo al teorema (4.6), entonces la magnitud de $f_n(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$ puede ser tan pequeña como se desee de acuerdo a la selección de k, así que seleccionando en forma adecuada la generación de las cajas Γ siempre se puede lograr que $f(\mu^{\min}) > \left(f_n(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})\right)$ para toda caja Γ^i, y tomando que $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) = f(\mu^{\min}) - \left(f_n(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})\right)$ se tiene que existe k tal que $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \geq c > 0$, entonces si $f(q) > 0\ \forall q \in Q$, implica que siempre se puede generar un conjunto de cajas Γ^i tales que $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \geq c > 0$ para cada una de ellas.

Prueba de suficiencia en caso de función positiva. Esta es muy sencilla ya que si se tiene un conjunto de nuevas cajas Γ^i tales que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \geq c > 0$ para cada una de ellas, entonces de acuerdo al teorema del rectángulo (4.7) implica que $f(q)$ es positiva en cada una de las cajas Γ^i, y dado que Q es la unión de todas las cajas Γ^i, entonces $f(q)$ es positiva en todos los vectores q elementos de Q.

Prueba de necesidad en caso de función negativa. Sea $f(q) < 0 \ \forall q \in Q$, entonces si $f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min}) < 0$ de acuerdo al teorema del rectángulo (4.7) la prueba de necesidad está concluida. En caso contrario siempre se puede dividir cada variable q_i en k partes generando k^ℓ nuevas cajas Γ tales que $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) < 0$ para cada una de las cajas Γ^i, esto se prueba con el mismo procedimiento que en el caso anterior pero sumando y restando $f_n(\mu^{\max})$ a la cota superior $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$ se obtiene $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) = (f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\max})) + (f_n(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}))$, siendo $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\max}) = f(\mu^{\max}) < 0$ y $f_n(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) > 0$ con magnitud tan pequeña como se desee de acuerdo a la selección de k. Así que seleccionando en forma adecuada la generación de las cajas Γ siempre se puede lograr que $f(\mu^{\max}) + (f_n(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})) \leq c < 0$, entonces si $f(q) < 0 \ \forall q \in Q$ implica que siempre se puede generar un conjunto de cajas Γ^i tales que $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) < c < 0$ para cada una de ellas.

Prueba de suficiencia en caso de función negativa. Igual que en el caso de positividad es muy sencilla ya que si se tiene un conjunto de nuevas cajas Γ^i tales que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) \leq c < 0$ para cada una de ellas, entonces de acuerdo al teorema (4.7) implica que $f(q)$ es negativa en cada una de las cajas Γ^i, y dado que Q es la unión de todas las cajas Γ^i entonces $f(q)$ es negativa en todos los vectores q elementos de Q. ■

El determinar la positividad o negatividad de una función en todo su dominio, no es un problema fácil, de tal forma que no es raro que de las cotas obtenidas de la caja original no se pueda determinar el signo de la función en todo su dominio, necesitándose así hacer uso de la división de cada variable q_i en k partes, que puede tomarse como $k = 2$ y dividir en dos partes iguales. De esta manera se generan 2^ℓ nuevas cajas Γ, si en cada una de las nuevas cajas no existe algún valor de $f(\mu^{\min})$ o $f(\mu^{\max})$ que demuestre la pérdida de condición de signo que se está determinando, entonces a la caja Γ^i que no cumpla la condición de positividad $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) > 0$ o de negatividad

$f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) < 0$ si es lo que se está analizando se le vuelve a aplicar el proceso de dividir cada variable q_i en dos partes iguales y verificar la condición de signo que se desea determinar en cada una de las 2^ℓ nuevas cajas de Γ^i.

Para una función con descomposición de signo en Q, se puede determinar el signo en todo su dominio aplicando el teorema anterior, inicialmente con $k = 2$, dividiendo cada variable en dos partes iguales, generando 2^ℓ cajas Γ. Mediante aplicaciones sucesivas del proceso de división en dos partes iguales a cada variable q_i sólo en la caja que así lo requiera se genera el conjunto de cajas Γ, "cerrándose" los puntos de análisis sólo donde se necesita y hasta donde se necesita, ya que la división de variables se aplica sólo en las nuevas cajas que lo requieran. Otra forma de determinar el signo de la función en su dominio, es en forma gráfica, haciendo una división de cada variable en k partes iguales, generando k^ℓ cajas Γ. Se grafican en el plano (f_n, f_p) los vértices inferior izquierdo y superior derecho del rectángulo (ver figura (4.2) página 50) que contiene a la función como "$\times$". Para determinar positividad de la función se grafica el vértice inferior derecho como "$+$", o si se está determinando la negatividad de la función entonces se grafica el vértice superior izquierdo como "$+$"; si todas las marcas "$\times$" y "$+$" cumplen de acuerdo al teorema (4.7) la condición de signo analizada (ya sea de positividad o negatividad de la función), entonces la función cumple la condición de signo en todo su dominio. Si todas las marcas "$\times$" cumplen la condición de signo analizada pero algunas "$+$" no lo cumplen, entonces se aumenta k y obviamente si al menos una marca "$\times$" no cumple la condición, entonces la función es positiva en una región de Q y negativa en otra. Para apreciar lo anterior veamos el siguiente ejemplo que para facilidad tiene $Q \subset \Re^2$, pero el lema (4.8) se cumple en general para cualquier función definida en $Q \subset \Re^\ell$.

Ejemplo 4.3 *Dada la función $f(q) = 4 + q_1 - q_2 + 8q_1^2q_2 - 9q_1q_2^2$ con descomposición de signo en $Q \subset P \subset \Re^2$ tal que $q_i \in [0,\ 1]$, determinar si $f(q) > 0\ \forall q \in Q$, a) mediante la aplicación del lema (4.8), b) en forma gráfica.*

Para el inciso "a", las partes positiva y negativa de la función son $f_p(q) = 4 + q_1 + 8q_1^2q_2$ y $f_n(q) = q_2 + 9q_1q_2^2$. Los vértices mínimo y máximo Euclidianos de Q son $v^{\min} = [0\ 0]^T$ y $v^{\max} = [1\ 1]^T$ con los cuales se calculan las cotas de las partes positiva y negativa $f_p(v^{\min}) = 4$,

$f_p(v^{\max}) = 13$, $f_n(v^{\min}) = 0$, $f_n(v^{\max}) = 10$, de donde obtenemos $f(v^{\min}) = 4$, $f(v^{\max}) = 3$. De acuerdo a estos valores y al teorema del rectángulo (4.7) no cumple la condición de suficiencia de positividad de la función $f(q)$ para todo vector q elemento de Q ya que $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max}) = 4 - 10 = -6 < 0$, pero tampoco se sabe si existan puntos en Q donde la función tenga valor negativo, de tal manera que hay que aplicar la división de cada variable. Aplicando el proceso de división en dos partes iguales de cada variable q_i se generan cuatro nuevas cajas $\{\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \Gamma^4\}$ con el valor de $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max})$ como sigue: 2.375, -1.5, 1.75, -4.5, la ubicación de las cajas Γ dentro de Q y el signo de su cota mínima se muestra en la figura (4.3).

De acuerdo al teorema (4.7) la función es positiva en las cajas Γ^1 y Γ^3, pero no se sabe en las cajas Γ^2 y Γ^4, mediante aplicaciones sucesivas del proceso de división en la caja que así se requiera, se logra finalmente que para un conjunto de 31 cajas Γ tales que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y para cada una de ellas $f_p(\mu^{i(\min)}) - f_n(\mu^{i(\max)}) \geq c > 0$ como aparece en la figura (4.4), por lo tanto se satisface el lema (4.8) y la función es positiva para todo vector q elemento de Q.

$\Gamma = \{\Gamma^1, \Gamma^{2.1}, \Gamma^{2.2}, \Gamma^{2.3}, \Gamma^{2.4.1}, \Gamma^{2.4.2}, \Gamma^{2.4.3}, \Gamma^{2.4.4.1}, \Gamma^{2.4.4.2}, \Gamma^{2.4.4.3}, \Gamma^{2.4.4.4}, \Gamma^3, \Gamma^{4.1}, \Gamma^{4.2.1}, \Gamma^{4.2.2.1}, \Gamma^{4.2.2.2}, \Gamma^{4.2.2.3}, \Gamma^{4.2.2.4}, \Gamma^{4.2.3}, \Gamma^{4.2.4.1}, \Gamma^{4.2.4.2}, \Gamma^{4.2.4.3}, \Gamma^{4.2.4.4}, \Gamma^{4.3}, \Gamma^{4.4.1}, \Gamma^{4.4.2.1}, \Gamma^{4.4.2.2}, \Gamma^{4.4.2.3}, \Gamma^{4.4.2.4}, \Gamma^{4.4.3}, \Gamma^{4.4.4}\}$.

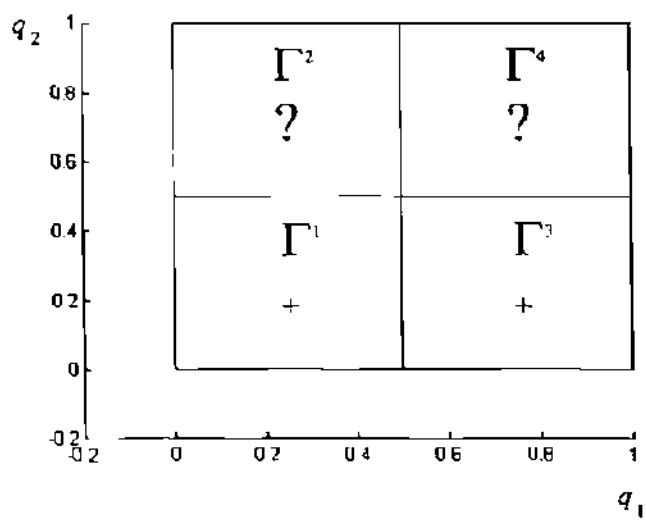

Figura 4.3 Signo de la función en cajas Γ. Ejemplo (4.3)

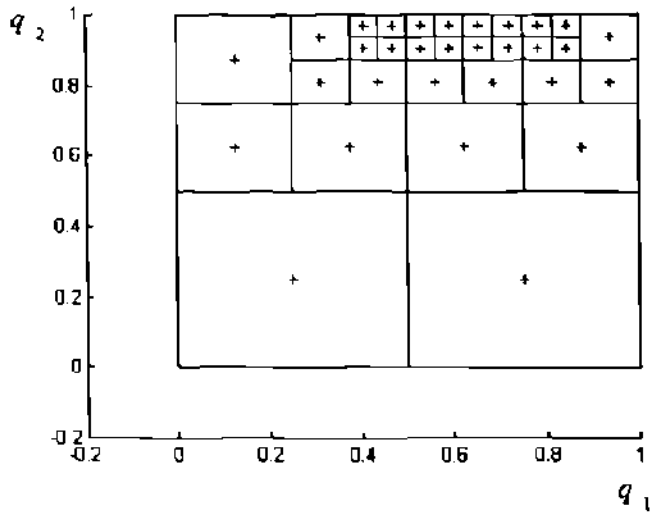

Figura 4.4 Signo de la función en cajas Γ. Ejemplo (4.3)

Para el inciso "b" se dividió cada variable en 14 partes iguales de lo que resulta la gráfica de la figura (4.5), donde se puede apreciar que todos los vértices " × " y las cotas mínimas "+", de cada una de las cajas Γ, se encuentran arriba de la recta de 45°, con lo cual se comprueba que la función es positiva para todo q elemento de Q.

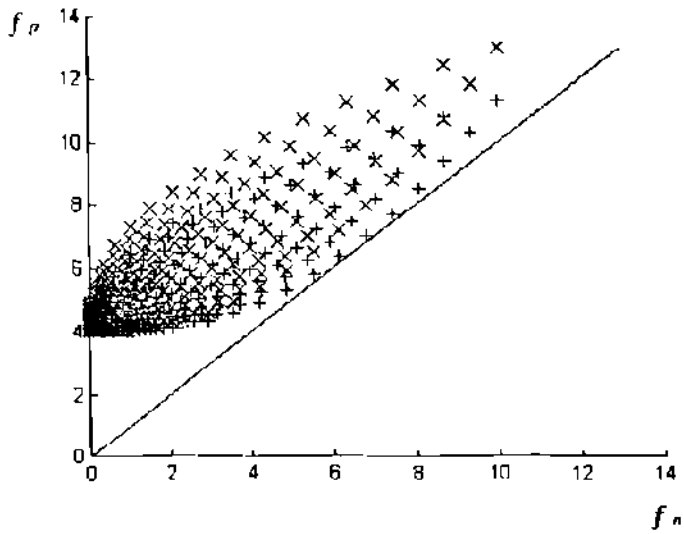

Figura 4.5 Teorema del rectángulo en cajas Γ. Ejemplo (4.3)

4.3 Representación $(\alpha\ ,\ \beta)$

La facilidad para resolver un problema depende de las coordenadas en que se este analizando, existe por lo menos un sistema de coordenadas además de $(f_n,\ f_p)$, que llamaremos $(\alpha,\ \beta)$ y están giradas 45° con respecto a las $(f_n,\ f_p)$, por esa razón el rectángulo que contiene a la función aparece como se observa en la figura (4.6). Estas coordenadas presentan ventajas tanto en algunas operaciones matemáticas como en la interpretación gráfica.

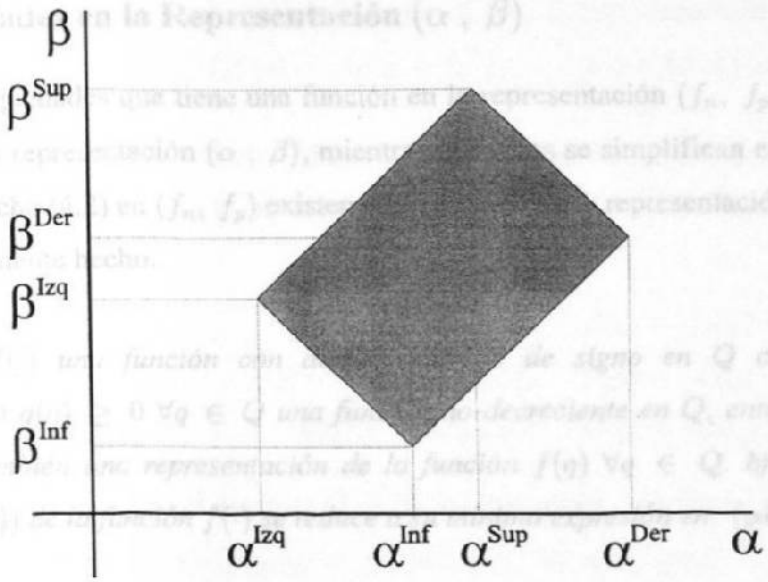

Figura 4.6 Rectángulo en el plano $(\alpha,\ \beta)$

Definición 4.5 *Sean $f_n(q)$ y $f_p(q)$ las componentes de una función $f(q)$ con descomposición de signo en Q. Sea T la transformación lineal descrita tal que existe T^{-1}, entonces se le llamará una representación de la función $f(q)$ en coordenadas $(\alpha,\ \beta)$ a la transformación lineal $(\alpha(q), \beta(q)) = T(f_n(q),\ f_p(q))$ y la transformación lineal inversa de una representación $(\alpha(q), \beta(q))$ será una representación $(f_n(q),\ f_p(q))$ de la función.*

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(q) \\ \beta(q) \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} f_n(q) \\ f_p(q) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_n(q) \\ f_p(q) \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} \alpha(q) \\ \beta(q) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha(q) &= f_p(q) + f_n(q), \qquad f_p(q) = \frac{1}{2}(\alpha(q) + \beta(q)) \\ \beta(q) &= f_p(q) - f_n(q), \qquad f_n(q) = \frac{1}{2}(\alpha(q) - \beta(q))\end{aligned}$$

Debe notarse que como $\alpha(q)$ es una suma de funciones no-decrecientes y no negativas entonces $\alpha(q)$ es no-decreciente; $\beta(q) = f(q)$, y $\alpha(q) \geq \beta(q)$ para toda función $f(q)$ y para todo vector $q \in Q$.

4.3.1 Propiedades en la Representación $(\alpha\ ,\ \beta)$

Algunas de las propiedades que tiene una función en la representación $(f_n,\ f_p)$ se mantienen en forma similar en la representación $(\alpha\ ,\ \beta)$, mientras que otras se simplifican en esta última. Las propiedades del hecho (4.2) en $(f_n,\ f_p)$ existen similarmente en la representación $(\alpha\ ,\ \beta)$ como se muestran en el siguiente hecho.

Hecho 4.3 *Sea $f(\cdot)$ una función con descomposición de signo en Q con representación $(\alpha(q),\ \beta(q))$ y sea $g(q) \geq 0\ \forall q \in Q$ una función no-decreciente en Q, entonces:* ***a)*** *$(\alpha(q) + g(q),\ \beta(q))$ es también una representación de la función $f(q)\ \forall q \in Q$.* ***b)*** *la representación $(\alpha(q) + g(q),\ \beta(q))$ de la función $f(\cdot)$ se reduce a su mínima expresión en: $(\alpha(q),\ \beta(q))$.*

Prueba. mediante la transformación inversa de la definición (4.5), la función $f(q)$ también es representada en $(f_n(q),\ f_p(q))$ y de acuerdo al hecho (4.2) $(f_n(q) + \frac{1}{2}g(q),\ f_p(q) + \frac{1}{2}g(q))$ es también una representación de la función $f(q)$ entonces mediante la transformación de la definición (4.5) obtenemos su representación en $(\alpha,\ \beta)$ con lo cual se termina de probar el inciso "a" como se muestra en seguida: $T(f_n(q) + \frac{1}{2}g(q),\ f_p(q) + \frac{1}{2}g(q)) = T(f_n(q),\ f_p(q)) + T(\frac{1}{2}g(q),\ \frac{1}{2}g(q)) = (\alpha(q),\ \beta(q)) + (g(q),\ 0) = (\alpha(q) + g(q),\ \beta(q))$.

Para demostrar el inciso "b" tomamos la representación $(\alpha(q) + g(q),\ \beta(q))$ que es el lado derecho de la última ecuación y aplicando su transformación inversa en ambos lados se obtiene su representación en $(f_n,\ f_p)$: $(f_n(q) + \frac{1}{2}g(q),\ f_p(q) + \frac{1}{2}g(q))$ y de acuerdo al hecho (4.2) ésta se reduce a su mínima expresión en: $(f_n(q),\ f_p(q))$ cuya transformación a $(\alpha,\ \beta)$ es $(\alpha(q),\ \beta(q))$. ■

Las operaciones de suma, la resta y el producto de funciones que tienen descomposición de

signo, se pueden efectuar en la representación (α , β) y el producto se efectúa con más facilidad que en (f_n, f_p), para obtener estas propiedades son necesarios los siguientes lemas y corolario.

Lema 4.9 *Sea $f(q)$ una función con descomposición de signo en Q representada por $(\alpha(q), \beta(q))$, entonces el negativo de la función está representado en coordenadas α, β por $(\alpha(q), -\beta(q))$.*

Prueba. La función $f(q)$ está representada en coordenadas f_n y f_p por $(f_n(q),\ f_p(q))$, por lo tanto el negativo de la función estará representada por $(f_p(q),\ f_n(q))$ y entonces su transformación a coordenadas α, β será: $T(f_p(q),\ f_n(q)) = (f_p(q) + f_n(q),\ -f_p(q) + f_n(q)) = (\alpha(q),\ -\beta(q))$ ■

Lema 4.10 *Sean f_1, f_2 : $\Re^\ell \rightarrow \Re$ dos funciones con descomposición de signo en Q, entonces la suma, resta y multiplicación de las funciones $f_1(q)$, $f_2(q)$ queda expresada en la representación (α , β) por:*

$$\begin{array}{lll} Suma\ \ f_1(q) + f_2(q) & \alpha(q) = \alpha_1(q) + \alpha_2(q), & \beta(q) = \beta_1(q) + \beta_2(q) \\ Resta\ \ f_1(q) - f_2(q) & \alpha(q) = \alpha_1(q) + \alpha_2(q), & \beta(q) = \beta_1(q) - \beta_2(q) \\ Producto\ \ f_1(q)f_2(q) & \alpha(q) = \alpha_1(q)\alpha_2(q), & \beta(q) = \beta_1(q)\beta_2(q) \end{array}$$

Prueba *(Suma).* De acuerdo al teorema (4.3) las componentes negativa y positiva de la suma de las funciones son: y $f_n(q) = (f_{1,n}(q) + f_{2,n}(q))$ y $f_p(q) = (f_{1,p}(q) + f_{2,p}(q))$, utilizando la transformación lineal de la definición (4.5), la representación (α , β) de la suma de las funciones será: $(\alpha(q),\ \beta(q)) = T(f_{1,n}(q) + f_{2,n}(q),\ f_{1,p}(q) + f_{2,p}(q)) = T(f_{1,n}(q),\ f_{1,p}(q)) + T(f_{2,n}(q),\ f_{2,p}(q)) = (\alpha_1(q),\ \beta_1(q)) + (\alpha_2(q),\ \beta_2(q)) = (\alpha_1(q) + \alpha_2(q),\ \beta_1(q) + \beta_2(q))$.

(Resta). De acuerdo al teorema (4.3) las componentes negativa y positiva de la resta de las funciones son: y $f_n(q) = (f_{1,n}(q) + f_{2,p}(q))$ y $f_p(q) = (f_{1,p}(q) + f_{2,n}(q))$, aplicando la transformación lineal de la definición (4.5), la representación (α , β) de la resta de las funciones será: $(\alpha(q),\ \beta(q)) = T(f_{1,n}(q) + f_{2,p}(q),\ f_{1,p}(q) + f_{2,n}(q)) = T(f_{1,n}(q),\ f_{1,p}(q)) + T(f_{2,p}(q),\ f_{2,n}(q))$. De acuerdo al lema (4.9) el último término de la expresión anterior es la representación (α , β) del negativo de la función $f_2(q)$, quedando la resta expresada por: $(\alpha(q),\ \beta(q)) = (\alpha_1(q),\ \beta_1(q)) + (\alpha_2(q),\ -\beta_2(q)) = (\alpha_1(q) + \alpha_2(q),\ \beta_1(q) - \beta_2(q))$.

(Producto). De acuerdo al teorema (4.3) las componentes negativa y positiva del producto de las

funciones son: $(f_p(q)g_n(q) + f_n(q)g_p(q))$ y $(f_p(q)g_p(q) + f_n(q)g_n(q))$, mediante la transformación lineal de la definición (4.5), la representación $(\alpha\ ,\ \beta)$ del producto de las funciones será: $(\alpha(q),\ \beta(q)) = T(f_{1,p}(q)\cdot f_{2,n}(q) + f_{1,n}(q)\cdot f_{2,p}(q),\ f_{1,p}(q)\cdot f_{2,p}(q) + f_{1,n}(q)\cdot f_{2,n}(q)) = T(f_{1,p}(q)\cdot f_{2,n}(q),\ f_{1,p}(q)\cdot f_{2,p}(q)) + T(f_{1,n}(q)\cdot f_{2,p}(q),\ f_{1,n}(q)\cdot f_{2,n}(q)) = f_{1,p}(q)T(f_{2,n}(q),\ f_{2,p}(q)) + f_{1,n}(q)T(f_{2,p}(q),\ f_{2,n}(q)) = f_{1,p}(q)[(\alpha_2(q),\ \beta_2(q))] + f_{1,n}(q)[(\alpha_2(q),\ -\beta_2(q))] = ((f_{1,p}(q) + f_{1,n}(q))\alpha_2(q),\ (f_{1,p}(q) - f_{1,n}(q))\beta_2(q))$. De acuerdo a la definición (4.5): $(f_{1,p}(q) + f_{1,n}(q)) = \alpha_1(q)$ y $(f_{1,p}(q) - f_{1,n}(q)) = \beta_1(q)$, quedando $\alpha(q)$ y $\beta(q)$ del producto expresados como sigue: $(\alpha(q),\ \beta(q)) = (\alpha_1(q)\alpha_2(q),\ \beta_1(q)\beta_2(q))$ ■

Al igual como sucede con la resta en la representación $(f_n,\ f_p)$ en el corolario (4.4) donde las partes positiva y negativa se reducen a la mínima expresión, en la representación $(\alpha,\ \beta)$ sucede lo mismo como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 4.11 *Sean $f(q), g(q), h(q)$ funciones continuas con descomposición de signo en Q tales que: $f(q) = g(q) + h(q)$, entonces las partes α y β de la resta $f(q) - g(q)$ se reducen a su mínima expresión de la siguiente manera:*

$$\alpha(q) = \alpha_f(q) - \alpha_g(q), \quad \beta(q) = \beta_f(q) - \beta_g(q)$$

Prueba. Sean $f(q)$, $g(q)$ y $h(q)$ funciones continuas con descomposición de signo en Q, entonces de acuerdo al lema (4.10) la resta $f(q) - g(q)$ está representada por $\alpha(q) = \alpha_f(q) + \alpha_g(q)$ y $\beta(q) = \beta_f(q) - \beta_g(q)$, por otra parte de la condición $f(q) = g(q) + h(q)$ y el lema (4.10) obtenemos: $\alpha_f(q) = \alpha_g(q) + \alpha_h(q)$, $\beta_f(q) = \beta_g(q) + \beta_h(q)$, substituyendo estas últimas en las anteriores se obtiene $\alpha(q) = \alpha_g(q) + \alpha_h(q) + \alpha_g(q)$, $\beta(q) = \beta_g(q) + \beta_h(q) \quad \beta_g(q)$, simplificándose en $\alpha(q) = \alpha_h(q) + 2\alpha_g(q)$, $\beta(q) = \beta_h(q)$, y de acuerdo al inciso "b" del hecho (4.3) esta representación se reduce a su mínima expresión: $\alpha(q) = \alpha_h(q)$ y $\beta(q) = \beta_h(q)$. Dado que de la condición $f(q) = g(q) + h(q)$ y el lema (4.10) se obtuvo: $\alpha_f(q) = \alpha_g(q) + \alpha_h(q)$, $\beta_f(q) = \beta_g(q) + \beta_h(q)$, entonces $\alpha_h(q) = \alpha_f(q) - \alpha_g(q)$, $\beta_h(q) = \beta_f(q) - \beta_g(q)$, de donde se obtiene la representación de la resta $f(q) - g(q)$ en su mínima expresión: $\alpha(q) = \alpha_f(q) - \alpha_g(q)$, $\beta(q) = \beta_f(q) - \beta_g(q)$. ■

Las transformaciones de la definición (4.5) permiten trasladar los resultados del teorema del rectángulo (4.7) de $(f_n(q),\ f_p(q))$ a $(\alpha(q),\ \beta(q))$ como se expresa en el corolario siguiente, de

acuerdo a la figura (4.6).

Corolario 4.12 *(Corolario del Rectángulo) Sea $f : \Re^{\ell} \rightarrow \Re$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \Re^{\ell}$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos $v^{\min}$, $v^{\max}$, entonces: a) $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por $\frac{1}{2}(\alpha(v^{\min}) + \beta(v^{\min}) - \alpha(v^{\max}) + \beta(v^{\max}))$ y $\frac{1}{2}(\alpha(v^{\max}) + \beta(v^{\max}) - \alpha(v^{\min}) + \beta(v^{\min}))$ respectivamente, b) la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in Q$ en el plano (α, β) está contenida en el rectángulo con vértices: $\alpha^{izq} = \alpha(v^{\min})$, $\beta^{izq} = \beta(v^{\min})$; $\alpha^{der} = \alpha(v^{\max})$, $\beta^{der} = \beta(v^{\max})$; $\alpha^{\inf} = \frac{1}{2}(\alpha(v^{\min})+\alpha(v^{\max}))-\frac{1}{2}(\beta(v^{\max})-\beta(v^{\min}))$, $\beta^{\inf} = \frac{1}{2}(\beta(v^{\min})+\beta(v^{\max}))-\frac{1}{2}(\alpha(v^{\max})-\alpha(v^{\min}))$; $\alpha^{\sup} = \frac{1}{2}(\alpha(v^{\min})+\alpha(v^{\max}))+\frac{1}{2}(\beta(v^{\max})-\beta(v^{\min}))$, $\beta^{\sup} = \frac{1}{2}(\beta(v^{\min})+\beta(v^{\max}))+\frac{1}{2}(\alpha(v^{\max})-\alpha(v^{\min}))$; c) si el vértice inferior $(\alpha^{\inf}, \beta^{\inf})$ está arriba del eje α en el plano (α, β) entonces la función $f(q) > 0\ \forall q \in Q$, d) si el vértice superior $(\alpha^{\sup}, \beta^{\sup})$ está abajo del eje α en el plano (α, β) entonces la función $f(q) < 0\ \forall q \in Q$.*

Prueba. Al Aplicar las transformaciones inversas de la definición (4.5) $f_n(q) = \frac{1}{2}(\alpha(q) - \beta(q))$ y $f_p(q) = \frac{1}{2}(\alpha(q) + \beta(q))$ en las cotas inferior y superior el inciso "a" del teorema del rectángulo (4.7) se obtiene: $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max}) = \frac{1}{2}(\alpha(v^{\min}) + \beta(v^{\min})) - \frac{1}{2}(\alpha(v^{\max}) - \beta(v^{\max}))$ y $f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min}) = \frac{1}{2}(\alpha(v^{\max})+\beta(v^{\max})) - \frac{1}{2}(\alpha(v^{\min}) - \beta(v^{\min}))$, con lo cual queda demostrado el inciso "a". Tomando nuevamente $f_n(q) = \frac{1}{2}(\alpha(q) - \beta(q))$ y $f_p(q) = \frac{1}{2}(\alpha(q) + \beta(q))$ de la definición (4.5), y dado que los ejes α, β están girados 45° con respecto a los ejes f_n, f_p, entonces los vértices del rectángulo en el plano (α, β) son: $(\alpha^{izq}, \beta^{izq}) = T(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\min}))$, $(\alpha^{der}, \beta^{der}) = T(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\max}))$, $(\alpha^{\inf}, \beta^{\inf}) = T(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$, $(\alpha^{\sup}, \beta^{\sup}) = T(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$, de donde se demuestra el inciso "b". Dado que $\beta(q) = f(q)$, entonces $\beta^{\inf}$ y $\beta^{\sup}$ son las cotas mínima y máxima de la función, por lo tanto si el vértice $(\alpha^{\inf}, \beta^{\inf})$ está arriba del eje α en el plano (α, β) entonces la función $f(q) > 0\ \forall q \in Q$ y si el vértice $(\alpha^{\sup}, \beta^{\sup})$ está abajo del eje α en el plano (α, β) entonces la función $f(q) < 0\ \forall q \in Q$, quedando demostrados los incisos "c" y "d". ■

En la representación gráfica (α, β) de una función, la escala de β cubre sólo el espacio donde se encuentra la función, mientras que en la representación (f_n, f_p) el valor de la función en un punto

es sólo la altura que éste sobresale a la recta de 45°, disminuyendo su apreciación gráfica , como se puede ver comparando la figura (4.7) en el plano (α, β), que corresponde a la misma información de la figura (4.5) en el plano (f_n, f_p).

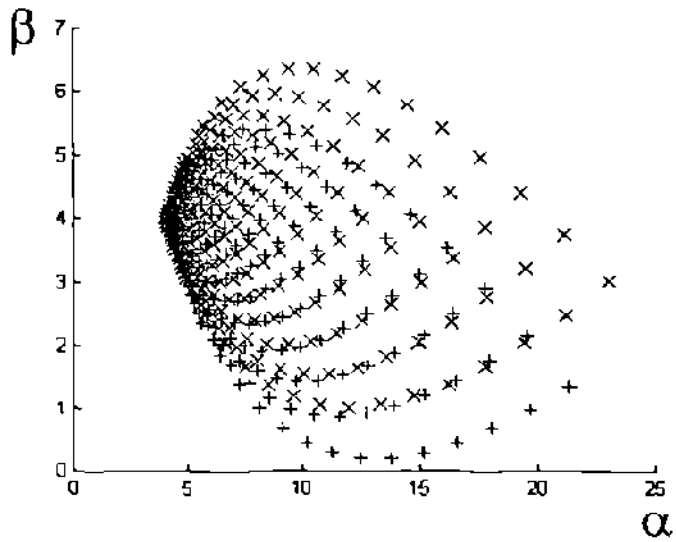

Figura 4.7 Corolario del rectángulo en (α, β). Ejemplo (4.3)

4.4 Partes Lineal, No-lineal e Independiente

Al analizar la positividad de una función $f(q)$ con descomposición de signo en Q con $q_j \in [q_j^-, q_j^+]$ para todo $q \in Q$, es muy común la necesidad de hacer dicho análisis en un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_j \Gamma^j$. En cada una de las cajas Γ^j con vértices mínimo y máximo Euclidianos $\mu^{\min}$, $\mu^{\max}$, cada componente de q se puede expresar como $q_i = \mu_i^{\min} + \delta_i$ donde $\delta_i \in [0, \delta_i^{\max}] \mid \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}$, entonces se puede considerar la existencia de una caja Δ con vértices mínimo y máximo Euclidianos: $\mathbf{0}$ y $\delta^{\max}$ donde éste último es $\delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$ y $\Delta = \{\delta \mid \delta_i \in [0, \delta_i^{\max}], \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}\} \subset P \subset \Re^\ell$; de esta manera se puede expresar $q = \mu^{\min} + \delta \; \forall \delta \in \Delta, \forall q \in \Gamma$.

Es muy conocido que una función puede tener una parte lineal y otra no-lineal, entonces la función $f(q)|_{q\in\Gamma} = f(\mu^{\min} + \delta)$ debe contener estas partes que deben ser función de δ ya que $\mu^{\min}$

es una constante en la caja Γ^j.

Una manera fácil de encontrar la parte lineal y otra no-lineal es considerando que ellas no contienen términos independientes de δ, y por lo tanto son nulas al evaluarlas en $\delta = 0$, de tal forma que si se evalúa la función en $\delta = 0$ se obtiene $f(\mu^{\min} + 0) = f(\mu^{\min})$, siendo también esta última una parte de la función $f(q)$ que es la parte independiente de δ. Esto concuerda con la serie de Taylor de $f(q)$ donde $q = \mu^{\min} + \delta$:

$$f(q) = f(\mu^{\min}) + \sum_{i=1}^{\ell} \left.\frac{\partial f(q)}{\partial q_i}\right|_{\mu_i} \delta_i + \Phi(\delta)$$

Se puede ver que la función está compuesta de tres partes: un término independiente de δ que es $f(\mu^{\min})$, otra parte lineal que es el gradiente de la función $f(q)$ evaluado en $\mu^{\min}$ y multiplicado por el vector δ y la función $\Phi(\delta)$ que representa los términos de orden superior en δ. La parte no-lineal $\Phi(\delta)$ puede ser difícil de obtener y se puede despejar restando de $f(q)|_{q\in\Gamma} = f(\mu^{\min} + \delta)$ la parte $f(\mu^{\min})$ y la parte lineal, dando lugar así a la siguiente proposición.

Proposición 4.2 *Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua en $Q \subset P \subset \Re^\ell$, sea Γ una caja contenida en Q con un conjunto de vértices $\{\mu^i\}$ con vértices mínimo y máximo Euclidianos $\mu^{\min}$, $\mu^{\max}$, sea $\Delta = \{\delta \mid \delta_i \in [0,\ \delta_i^{\max}],\ \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}\} \subset P \subset \Re^\ell$ con un conjunto de vértices $\{\delta^i\}$ con vértices mínimo y máximo Euclidianos 0 y $\delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$, y sea $q \in \Gamma$ tal que $q = \mu^{\min} + \delta$ donde $\delta \in \Delta$, entonces la función $f(q)$ se puede expresar mediante sus partes lineal, no-lineal e independiente en su mínima expresión, para toda $q \in \Gamma$.*

$$f(q) = f^{\min} + f_L(\delta) + f_N(\delta) \mid \delta \in \Delta \quad \forall q \in \Gamma$$

$$f^{\min} \equiv Parte\ Independiente = f(\mu^{\min})$$

$$f_L(\delta) \equiv Parte\ Lineal = \nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta \quad \forall \delta \in \Delta$$

$$f_N(\delta) \equiv Parte\ No-lineal = f(\mu^{\min} + \delta) - f^{\min} - f_L(\delta) \quad \forall \delta \in \Delta$$

La expresión de la parte no lineal se puede lograr desarrollando $f(\mu^{\min} + \delta)$, obteniendo así una expresión algebraica de $f_N(\delta)$, si esto resulta muy complicado para alguna función en particular

entonces la aplicación es sólo numérica obteniendo así sólo el valor de la parte no-lineal en el punto deseado. Como un ejemplo mucho muy simple de esta descomposición, podemos tomar la función $f(q) = 3+2q_1-4q_2+q_1^2$, entonces $f^{\min} = 3+2\mu_1^{\min}-4\mu_2^{\min}+\mu_1^{\min\,2}$, $f_L(\delta) = 2\delta_1-4\delta_2+2\mu_1^{\min}\delta_1$ y $f_N(\delta) = \delta_1^2$.

4.4.1 Propiedades Básicas de las Partes Lineal y No-lineal

De acuerdo a la proposición (4.2), las partes: negativa, positiva, alfa y beta de una función se pueden descomponer en sus partes lineal, no-lineal e independiente, así también las partes lineal, no-lineal e independiente de una función, se pueden descomponer en sus partes negativa, positiva, alfa y beta.

Al hacer un análisis de positividad de una función que es resultado de la operación matemática de otras funciones, entonces se presenta la necesidad de obtener las partes lineal, no-lineal e independiente de la suma, resta o producto de funciones, que se pueden obtener mediante el siguiente hecho.

Hecho 4.4 *Sean $f_1(q)$ y $f_2(q)$ dos funciones con descomposición de signo en Q, sea $\Gamma \subseteq Q$ una caja para el cual $f_1(q) = f_1^{\min}+f_{1L}(\delta)+f_{1N}(\delta)$ y $f_2(q) = f_2^{\min}+f_{2L}(\delta)+f_{2N}(\delta)\ \forall q \in \Gamma$, entonces la representación alfa, beta de la suma $f_1(q) + f_2(q)$, resta $f_1(q) - f_2(q)$ y producto $f_1(q)f_2(q)$ $\forall q \in \Gamma$ de las funciones está dado por $\alpha = \alpha^{\min} + \alpha_L(\delta) + \alpha_N(\delta)$, $\beta = \beta^{\min} + \beta_L(\delta) + \beta_N(\delta)$ de acuerdo a lo siguiente:*

Suma

$$\alpha^{\min} = \alpha_1^{\min} + \alpha_2^{\min}, \qquad \beta^{\min} = \beta_1^{\min} + \beta_2^{\min}$$
$$\alpha_L(\delta) = \alpha_{1L}(\delta) + \alpha_{2L}(\delta), \quad \beta_L(\delta) = \beta_{1L}(\delta) + \beta_{2L}(\delta)$$
$$\alpha_N(\delta) = \alpha_{1N}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta), \quad \beta_N(\delta) = \beta_{1N}(\delta) + \beta_{2N}(\delta)$$

Resta

$$\alpha^{\min} = \alpha_1^{\min} + \alpha_2^{\min}, \qquad \beta^{\min} = \beta_1^{\min} - \beta_2^{\min}$$
$$\alpha_L(\delta) = \alpha_{1L}(\delta) + \alpha_{2L}(\delta), \quad \beta_L(\delta) = \beta_{1L}(\delta) - \beta_{2L}(\delta)$$
$$\alpha_N(\delta) = \alpha_{1N}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta), \quad \beta_N(\delta) = \beta_{1N}(\delta) - \beta_{2N}(\delta)$$

$$Producto$$

$$\alpha^{\min} = \alpha_1^{\min}\alpha_2^{\min}$$

$$\alpha_L(\delta) = \alpha_1^{\min}\alpha_{2L}(\delta) + \alpha_2^{\min}\alpha_{1L}(\delta)$$

$$\alpha_N(\delta) = \alpha_1^{\min}\alpha_{2N}(\delta) + \alpha_{1L}(\delta)(\alpha_{2L}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta)) + \alpha_{1N}(\delta)(\alpha_2^{\min} + \alpha_{2L}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta))$$

$$\beta^{\min} = \beta_1^{\min}\beta_2^{\min}$$

$$\beta_L(\delta) = \beta_1^{\min}\beta_{2L}(\delta) + \beta_2^{\min}\beta_{1L}(\delta)$$

$$\beta_N(\delta) = \beta_1^{\min}\beta_{2N}(\delta) + \beta_{1L}(\delta)(\beta_{2L}(\delta) + \beta_{2N}(\delta)) + \beta_{1N}(\delta)(\beta_2^{\min} + \beta_{2L}(\delta) + \beta_{2N}(\delta))$$

Prueba. Descomponiendo $\alpha_i(q)$, $\beta_i(q)$ en sus partes lineal, no-lineal e independiente en el lema (4.10) y agrupando cada término con su semejante, se obtienen los resultados de cada una de las operaciones. ■

4.4.2 Límites de la Función

En la proposición (4.2), la función se expresa como $f(q) = f^{\min} + f_L(\delta) + f_N(\delta)$ para toda $q \in \Gamma$ y para toda $\delta \in \Delta$, donde $f^{\min}$ es el valor constante de la función evaluada en el vértice mínimo de Γ, $f_L(\delta)$ es la parte lineal de la función $f(q)$ que tiene su máximo y mínimo en los puntos extremos de Δ y $f_N(\delta)$ es la parte no-lineal de la función, dado que $\Delta \subset P \subset \Re^\ell$, se le puede aplicar descomposición de signo obteniendo sus cotas de valor máximo y mínimo, dando lugar así al siguiente resultado.

Teorema 4.13 *(Teorema del Polígono) Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función con descomposición de signo en Q, sean: q, δ, Γ y Δ de acuerdo a la proposición (4.2). Entonces, a) la función $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por: $Cota\ \inf = f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$ y $Cota\ \sup = f^{\min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max})$ $\forall q \in Q$, b) las cotas del inciso "a" están contenidas en el intervalo que definen las cotas del teorema del rectángulo (4.7) $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \leq Cota\ \inf \leq Cota\ \sup \leq f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$, c) la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in \Gamma$ en el plano (f_n, f_p), está dentro del polígono que se define intersectando el rectángulo del teorema (4.7) con el espacio entre las rectas a 45° separadas del origen la cota mínima $f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$, y la cota máxima $f^{\min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max})$.*

Prueba. a) Primeramente tenemos que $f^{\min} = f(\mu^{\min})$ es un valor constante independiente de δ. Por otra parte se sabe que una función lineal $f_L(\delta) \mid \delta \in \Delta$ tiene su mínimo y máximo $f_{L\min}$, $f_{L\max}$ en los vértices $\{\delta^i\}$ de la caja Δ entonces $f_{L\min} = \min_{\delta\in\Delta} f_L(\delta) = \min_i f_L(\delta^i)$ y $f_{L\max} = \max_{\delta\in\Delta} f_L(\delta) = \max_i f_L(\delta^i)$. La parte no-lineal depende de δ y tiene descomposición de signo en Δ, aplicando el inciso "a" del teorema del rectángulo (4.7) (página 49) en la forma adecuada a la caja Δ a la parte no-lineal se tiene que $f_{Np}(0) - f_{Nn}(\delta^{\max}) \leq f_N(\delta) \leq f_{Np}(\delta^{\max}) - f_{Nn}(0)\ \forall\delta \in \Delta$, dado que la parte no-lineal no posee términos independientes, entonces equivalentemente es $-f_{Nn}(\delta^{\max}) \leq f_N(\delta) \leq f_{Np}(\delta^{\max})\ \forall\delta \in \Delta$.

Dado que $g(\cdot) = g_1(\cdot) + g_2(\cdot)$ implica $g_{1\min} + g_{2\min} \leq g_{\min}$, entonces $f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max}) \leq \min_{q\in\Gamma} (f(q))$, $\forall q \in \Gamma$, y de manera semejante, si $g(\cdot) = g_1(\cdot) + g_2(\cdot)$ implica $g_{\max} \leq g_{1\max} + g_{2\max}$, entonces $\max_{q\in\Gamma} (f(q)) \leq f^{\min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max})\ \forall q \in \Gamma$, obteniendo así $f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max}) \leq f(q) \leq f^{\min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max})\ \forall q \in \Gamma$. **b)** Considerando que los vértices mínimo y máximo de Δ son 0 y $\delta^{\max}$ y mediante el teorema (4.7) se obtiene: $f_{Lp}(0) - f_{Ln}(\delta^{\max}) \leq f_L(\delta)$, dado que $f_{Lp}(0) = 0$, entonces $-f_{Ln}(\delta^{\max}) \leq f_{L\min}$, sumando en ambos lados de la desigualdad $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\min}) = f(\mu^{\min}) = f^{\min}$ y $-f_{Nn}(\delta^{\max})$ se obtiene: $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\min}) - f_{Ln}(\delta^{\max}) - f_{Nn}(\delta^{\max}) \leq f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\min}) + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$, de acuerdo a la proposición (4.2) $f_n(\mu^{\max}) = f_n(\mu^{\min}) + f_{Ln}(\delta^{\max}) + f_{Nn}(\delta^{\max})$ con lo que se demuestra: $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \leq f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$. Por otra parte, del teorema (4.7) se tiene: $f_L(\delta) \leq f_{Lp}(\delta^{\max}) - f_{Ln}(0)$ que es equivalente a $f_L(\delta) \leq f_{Lp}(\delta^{\max})$ de donde se obtiene $f_{L\max} \leq f_{Lp}(\delta^{\max})$ sumando en ambos lados de la desigualdad $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\min}) = f(\mu^{\min}) = f^{\min}$ y $f_{Np}(\delta^{\max})$ se obtiene: $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\min}) + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max}) \leq f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\min}) + f_{Lp}(\delta^{\max}) + f_{Np}(\delta^{\max})$, pero de acuerdo a la proposición (4.2) $f_p(\mu^{\min}) + f_{Lp}(\delta^{\max}) + f_{Np}(\delta^{\max}) = f_p(\mu^{\max})$ con lo que se obtiene: $f^{\min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max}) \leq f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$. **c)** De acuerdo al teorema (4.7), la representación gráfica de la función $f(q)\ \forall q \in \Gamma$ en el plano $(f_n,\ f_p)$ está contenida dentro del rectángulo, de lados paralelos a los ejes, definido por $(f_n(\mu^{\min}),\ f_p(\mu^{\min}))$, $(f_n(\mu^{\max}),\ f_p(\mu^{\max}))$. Por otra parte de acuerdo al inciso "a" de este teorema, se tiene que la función está acotada: $Cota\ \inf \leq f(q) \leq Cota\ \sup$ y de acuerdo al inciso "b" de este teorema, estas últimas cotas están contenidas en las del rectángulo. Entonces la representación gráfica de la

función $f(q)$ $\forall q \in \Gamma$ en el plano $(f_n,\ f_p)$, está contenida dentro del rectángulo y entre las rectas a 45° separadas del origen por las distancias: $Cota$ inf y $Cota$ sup, por lo tanto la representación gráfica de $f(q)$ $\forall q \in \Gamma$ está dentro del polígono de la figura (4.8) ■

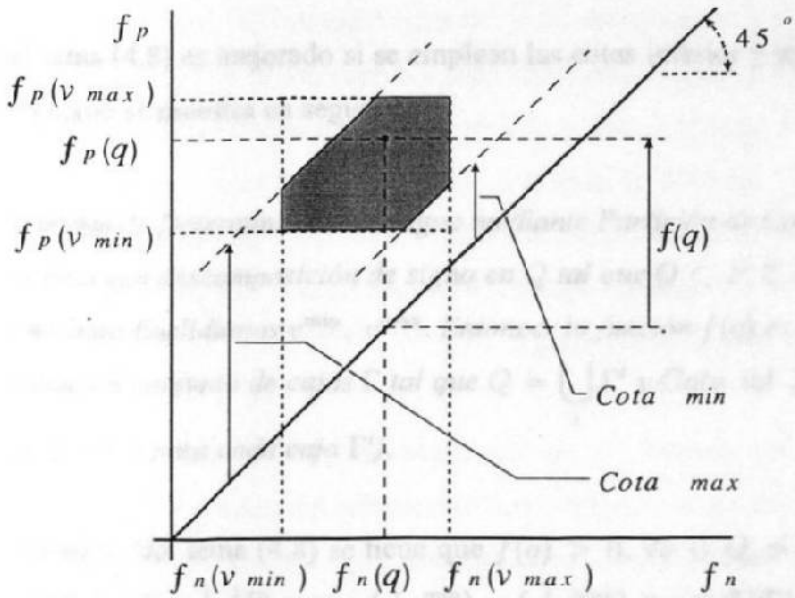

Figura 4.8 Polígono que contiene a la función en el plano $(f_n,\ f_p)$

La serie de Taylor de $f(q)$ donde $q = \mu^{\min} + \delta$, que fundamenta a la proposición (4.2) es la suma de: una parte independiente de δ que es $f(\mu^{\min})$, otra lineal $\nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta$ y la función $\Phi(\delta)$ que contiene los términos de orden superior en δ. Es fácil ver que si δ tiende a cero, entonces $\Phi(\delta)$ tiende a cero, y la parte lineal $\nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta$. es mucho mayor que $\Phi(\delta)$. Por otra parte, cuando se aplica la división de variables en k partes iguales, cada componente del vector δ se obtiene mediante $\delta_i \in [0,\ \frac{q_i^+ - q_i^-}{k}]$, de tal manera que $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_i = 0$, implicando, así que $\lim\limits_{k\to\infty} f(q) = f^{\min} + f_L(\delta)$. Descomponiendo $f(q)$, $f^{\min}$ y $f_L(\delta)$ en sus partes negativa y positiva, y reagrupando cada una con su semejante se concluye: $\lim\limits_{k\to\infty} f_n(q) = f_n^{\min} + f_{Ln}(\delta)$ y $\lim\limits_{k\to\infty} f_p(q) = f_p^{\min} + f_{Lp}(\delta)$ $\forall q \in \Gamma,\ \forall \Gamma \subset Q$ quedando demostrado el siguiente hecho.

Hecho 4.5 *Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función con descomposición de signo en Q. Sean: q, δ, Γ de acuerdo a la proposición (4.2), donde Γ es generado por división de cada variable en k partes iguales. Entonces:* $\lim_{k\to\infty} f(q) = f^{\min} + f_L(\delta)$, $\lim_{k\to\infty} f_n(q) = f_n^{\min} + f_{Ln}(\delta)$ *y* $\lim_{k\to\infty} f_p(q) = f_p^{\min} + f_{Lp}(\delta)$, $\forall q \in \Gamma, \forall \Gamma \subset Q$.

El resultado del lema (4.8) es mejorado si se emplean las cotas inferior y superior del teorema del polígono (4.13) como se muestra en seguida:

Teorema 4.14 *(Teorema de Determinación de Signo mediante Partición de Cajas). Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \Re^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos $v^{\min}$, $v^{\max}$. Entonces la función $f(q)$ es positiva (negativa) en Q si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y $Cota$ inf $\geq c > 0$ para cada caja Γ^i ($Cota$ sup $\leq c < 0$ para cada caja Γ^i).*

Prueba (*necesidad*). Del lema (4.8) se tiene que $f(q) > 0$, $\forall q \in Q$, si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$, y que $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \geq c > 0\ \forall \Gamma^i$; $f(q) < 0\ \forall q \in Q$, si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$, y que $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) \leq c < 0$ $\forall \Gamma^i$. Del teorema del polígono (4.13), se tiene que $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \leq Cota$ inf $\leq Cota$ sup $\leq f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$, de tal manera que si $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \geq c > 0$, entonces $Cota$ inf $\geq c > 0$ y si $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) \leq c < 0$, entonces $Cota$ sup $\leq c < 0$.

Entonces, si $f(q) > 0\ \forall q \in Q$ existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y $Cota$ inf $\geq c > 0$ para toda Γ^i, y si $f(q) < 0\ \forall q \in Q$ existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y que $Cota$ sup $\leq c < 0$ para toda Γ^i.

(Suficiencia). Si existe un conjunto de cajas Γ^i tales que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y $Cota$ inf $> c > 0$ para cada una de ellas, entonces de acuerdo al teorema del polígono (4.13), implica que $f(q)$ es positiva para toda $q \in \Gamma^i$ y para toda Γ^i. Dado que Q es la unión de todas las cajas Γ^i, entonces $f(q)$ es positiva en todos los vectores q elementos de Q. Por otra parte, si existe un conjunto de cajas Γ^i

tales que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y $Cota\ \sup \leq c < 0$ para cada una de ellas, entonces de acuerdo al teorema del polígono (4.13), implica que $f(q)$ es negativa para toda $q \in \Gamma^i$ y para toda Γ^i. Dado que Q es la unión de todas las cajas Γ^i, entonces $f(q)$ es negativa en todos los vectores q elementos de Q. ■

La tendencia de la función $f(q)$ a una función lineal al aumentar k como se muestra en el hecho (4.5), explica por qué el teorema de determinación de signo mediante partición de Cajas (4.14), tiene ventaja sobre el lema (4.8) en la determinación de signo de una función; ya que las cotas del teorema (4.14) están más cercanas del mínimo y máximo de la función, permitiendo así obtener un resultado con un número menor de cajas Γ que el necesario en el lema (4.8).

El ejemplo (4.3) fue resuelto por medio del lema (4.8), requiriendo 31 cajas para probar su positividad; si se resuelve mediante el teorema (4.14), sólo se requiere un conjunto de 10 cajas $\Gamma = \{\Gamma^1, \Gamma^{2,1}, \Gamma^{2,2}, \Gamma^{2,3}, \Gamma^{2,4}, \Gamma^3, \Gamma^{4,1}, \Gamma^{4,2}, \Gamma^{4,3}, \Gamma^{4,4}, \}$ para probar la positividad de la función para todo q elemento de Q.

Dada la conveniencia de trabajar en la representación en (α, β), entonces es de utilidad expresar las cotas mínima y máxima del teorema del polígono (4.13) y del teorema de determinación de signo mediante partición de cajas (4.14) en esta representación como se muestra en el siguiente hecho.

Hecho 4.6 *La representación en (α, β) de las cotas mínima y máxima del teorema del polígono (4.13) están dadas por:*

$$\alpha_{cota\ \min} = \alpha^{\min} + \alpha_{L\min} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) - \beta_N(\delta^{\max}))$$

$$\beta_{cota\ \min} = \beta^{\min} + \beta_{L\min} - \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) - \beta_N(\delta^{\max}))$$

$$\alpha_{cota\ \max} = \alpha^{\min} + \alpha_{L\max} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) + \beta_N(\delta^{\max}))$$

$$\beta_{cota\ \max} = \beta^{\min} + \beta_{L\max} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) + \beta_N(\delta^{\max}))$$

Prueba. *(Cota mínima).* La cota mínima del teorema (4.13) es $f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$, de acuerdo a la demostración del teorema (4.13) la parte de la cota mínima $-f_{Nn}(\delta^{\max})$, es un valor en (f_n, f_p) con $f_p = 0$, por eso la cota mínima es $f^{\min} + f_{L\min} + (0 - f_{Nn}(\delta^{\max}))$. De acuerdo a la

definición (4.5), $f_{Nn}(\delta^{\max}) = \frac{1}{2}(\alpha_{Nn}(\delta^{\max}) - \beta_{Nn}(\delta^{\max}))$, y de acuerdo a la misma definición la representación $(\alpha,\ \beta)$ de $(f_{Nn}(\delta^{\max}),\ 0)$ es $(0+f_{Nn}(\delta^{\max}),\ 0-f_{Nn}(\delta^{\max}))$, que equivalentemente es $(\frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) - \beta_N(\delta^{\max})),\ -\frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) - \beta_N(\delta^{\max})))$. Dado que la representación $(\alpha,\ \beta)$ de $f^{\min}$ y $f_{L\min}$ es $(\alpha^{\min},\ \beta^{\min})$ y $(\alpha_{L\min},\ \beta_{L\min})$ respectivamente. Entonces $\alpha_{cota\ \min} = \alpha^{\min} + \alpha_{L\min} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) - \beta_N(\delta^{\max}))$, $\beta_{cota\ \min} = \beta^{\min} + \beta_{L\min} - \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) - \beta_N(\delta^{\max}))$.

(Cota máxima). La cota máxima del teorema (4.13) y (4.14) es $f^{\min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max})$, y de la demostración del teorema (4.13) la parte de la cota máxima $+f_{Np}(\delta^{\max})$, es un valor, que representado en $(f_n,\ f_p)$ tiene $f_n = 0$, por lo cual la cota máxima es $f^{\min} + f_{L\max} + (f_{Np}(\delta^{\max}) - 0)$. Según la definición (4.5) $f_{Np}(\delta^{\max}) = \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) + \beta_N(\delta^{\max}))$, mediante esta misma definición la representación $(\alpha,\ \beta)$ de $(0,\ f_{Np(\delta^{\max})})$ es $(f_{Np(\delta^{\max})} + 0,\ f_{Np(\delta^{\max})} - 0)$, que equivale a $(\frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) + \beta_N(\delta^{\max})),\ \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) + \beta_N(\delta^{\max})))$. Dado que la representación $(\alpha,\ \beta)$ de $f^{\min}$ y $f_{L\max}$ es $(\alpha^{\min},\ \beta^{\min})$ y $(\alpha_{L\max},\ \beta_{L\max})$ respectivamente. Entonces $\alpha_{cota\ \max} = \alpha^{\min} + \alpha_{L\max} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) + \beta_N(\delta^{\max}))$, $\beta_{cota\ \max} = \beta^{\min} + \beta_{L\max} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\max}) + \beta_N(\delta^{\max}))$. ■

La aplicación del teorema de determinación de signo mediante partición de cajas (4.14) aplicando el hecho (4.6) para determinar ya sea la positividad o negatividad de una función en todo su dominio se puede hacer de acuerdo al el siguiente procedimiento.

Procedimiento (4.1). *Dada una función $f(q)$ con descomposición de signo en $Q \subset \Re^{\ell}$ y un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$. Tomando para cada caja Γ como " $\times$ " la representación gráfica de la función $f(q)$ en los vértices mínimo y máximo $\mu^{\min}$, $\mu^{\max}$ en el plano $(\alpha,\ \beta)$, y como "+ " la representación gráfica de la cota mínima en caso de analizar positividad o cota máxima en caso de negatividad, de acuerdo al teorema del polígono (4.13) inciso "a" y al hecho (4.6). Entonces la positividad o negatividad de la función se determina como sigue:*

a) *Si por lo menos un punto " $\times$ " aparece abajo del eje α en representación $(\alpha,\ \beta)$, entonces la función no es positiva, para todo q elemento de Q. O si al menos un punto " $\times$" aparece arriba del eje α entonces la función no es negativa, para todo q elemento de Q.*

b) *En el análisis de positividad si todos los puntos " $\times$ " aparecen arriba del eje α en representación $(\alpha,\ \beta)$, pero existe al menos un punto "+ " abajo del eje α; o para el análisis de negatividad si todos los puntos " $\times$ " aparecen abajo del eje α, pero existe al menos un punto "+ "*

arriba del eje α, *entonces la división de cada variable es insuficiente y hay que aumentar* k.

c) *La función* $f(q)$ *es positiva para todo* q *elemento de* Q *si y solo si todos los puntos "+" aparecen arriba del eje* α *en representación* $(\alpha,\ \beta)$, *o la función* $f(q)$ *es negativa para todo* q *elemento de* Q *si y sólo si todos los puntos "+" aparecen abajo del eje* α.

Ejemplo 4.4 *Determinar en forma gráfica si el producto de las funciones* $f_1(q)f_2(q)$ *con descomposición de signo en* $Q \subset \Re^2$ *es positivo para toda* $q \in Q \mid q_i \in [0,\ 1]$, *siendo las funciones:* $f_1(q) = 4 + q_1 - q_2 + 8q_1^2q_2 - 9q_1q_2^2$, $f_2(q) = 20 + 2q_1 + 7q_1^2q_2 - q_2 - 6q_1q_2^2$.

Solución. Las partes negativa y positiva de cada función son: $f_{1n}(q) = q_2 + 9q_1q_2^2$, $f_{1p}(q) = 4 + q_1 + 8q_1^2q_2$, $f_{2n}(q) = q_2 + 6q_1q_2^2$, $f_{2p}(q) = 20 + 2q_1 + 7q_1^2q_2$, de ellas se obtienen las partes lineal, no-lineal e independiente de $f_1(q)$ y $f_2(q)$:

$$f_{1p}^{\min} = 4 + \mu_1^{\min} + 8(\mu_1^{\min})^2\mu_2^{\min},\ f_{1n}^{\min} = \mu_2^{\min} + 9\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^2,$$

$$f_{1Lp}(\delta) = (1 + 16\mu_1^{\min}\mu_2^{\min})\delta_1 + 8(\mu_1^{\min})^2\delta_2,\ f_{1Ln}(\delta) = 9(\mu_2^{\min})^2\delta_1 + (1 + 18\mu_1^{\min}\mu_2^{\min})\delta_2,$$

$$f_{1Np}(\delta) = 16\mu_1^{\min}\delta_1\delta_2 + 8\delta_1^2(\mu_2^{\min} + \delta_2),\ f_{1Nn}(\delta) = 18\mu_2^{\min}\delta_1\delta_2 + 9(\mu_1^{\min} + \delta_1)\delta_2^2,$$

$$f_{2p}^{\min} = 20 + 2\mu_1^{\min} + 7(\mu_1^{\min})^2(\mu^{\min})^2,\ f_{2n}^{\min} = \mu_2^{\min} + 6\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^2,$$

$$f_{2Lp} = (2 + 14\mu_1^{\min}\mu_2^{\min})\delta_1 + 7(\mu_1^{\min})^2\delta_2,\ f_{2Ln} = 6(\mu_2^{\min})^2\delta_1 + (1 + 12\mu_1^{\min}\mu_2^{\min})\delta_2,$$

$$f_{2Nn} = 6\mu_1^{\min}\delta_2^2 + 12\mu_2^{\min}\delta_1\delta_2 + 6\delta_1\delta_2^2,\ f_{2Np} = 14\mu_1^{\min}\delta_1\delta_2 + 7\mu_2^{\min}\delta_1^2 + 7\delta_1^2\delta_2.$$

Mediante la definición (4.5), todas las expresiones anteriores son transformadas a la representación $(\alpha,\ \beta)$, y mediante el hecho (4.4), se obtiene la representación $(\alpha,\ \beta)$ del producto de las funciones, de donde se logra la cota mínima del teorema del polígono (4.13).

Debe de notarse que en la cota mínima del teorema del polígono en su representación $(\alpha,\ \beta)$ sólo se necesita para cada caja Γ : calcular en el vértice mínimo el valor de la función $(\alpha^{\min},\ \beta^{\min})$, la parte lineal mínima $(\alpha_{L\min},\ \beta_{L\min})$ que se encuentra en algunos de los vértices de Γ y calcular la parte no lineal en el vértice máximo $(\alpha_N(\delta^{\max}),\ \beta_N(\delta^{\max}))$, su fundamento matemático está en el teorema del polígono (4.13) y el hecho (4.6).

Dividiendo cada variable en 8 partes iguales, se genera un conjunto de cajas Γ que satisface el teorema de determinación de signo mediante partición de cajas (4.14), ya que todas las cotas mínimas $(\alpha,\ \beta)$ son positivas, como se puede ver en la figura (4.9). Debe de notarse que este caso es mas complicado que el del ejemplo (4.3), sin embargo, se requiere una división de cada variable en partes iguales, notablemente menor.

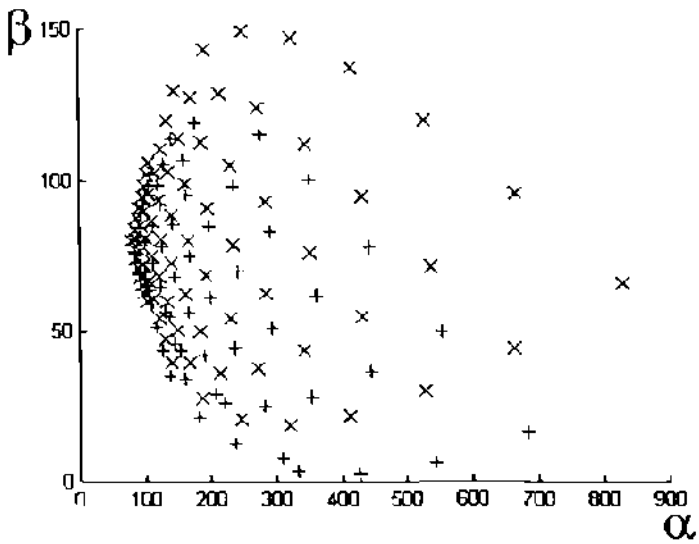

Figura 4.9 Teorema (4.14). Ejemplo (4.4)

4.5 Descomposición de Signo del Determinante

El determinante de una matriz M está compuesto de sumas y restas de productos de los elementos de la matriz, y si estos son de tipo polinómico, el determinante $\det(M)$ tiene descomposición de signo. El desarrollo de la programación para obtener la descomposición de signo del determinante en la representación $(f_n,\ f_p)$ puede ser algo complicado, pero en la representación $(\alpha,\ \beta)$ existe por lo menos una forma menos complicada de lograrlo.

4.5.1 El Determinante en Representación $(\alpha,\ \beta)$

Primeramente tenemos que para una matriz M de (2×2) con elementos $m_{i,j}$ con representación $(\alpha_{i,j},\ \beta_{i,j})$, el determinante de la matriz es $\det(M) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{2,1}m_{1,2}$, y de acuerdo al lema

(4.10), la representación $(\alpha,\ \beta)$ del determinante $\det(M)$ es $((\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} + \alpha_{2,1}\alpha_{1,2}),\ (\beta_{1,1}\beta_{2,2} - \beta_{2,1}\beta_{1,2}))$. Dado que de la definición (4.6) se tiene que $\beta_{i,j}(q) = m_{i,j}(q)$, entonces la parte beta del determinante de una matriz M de (2×2) es el determinante mismo $\det(M)$, y la parte alfa es semejante al determinante de una matriz formada con los elementos $\alpha_{i,j}$ pero sin usar la regla del signo $(-1)^{i+j}$, dando lugar a la siguiente proposición.

Definición 4.6 *Sea $M(q)$ una matriz cuadrada con elementos $m_{i,j}(q)$ con descomposición de signo en Q con representación $(\alpha_{i,j}(q),\ \beta_{i,j}(q))$, entonces se le llamará $M_\alpha(q)$ a la matriz formada con los elementos $\alpha_{i,j}(q)$ y se le llamará $\det_\alpha(M_\alpha(q)) = |M_\alpha(q)|_\alpha$ a la función similar al determinante de la matriz $M_\alpha(q)$ pero sin aplicar la regla del signo $(-1)^{i+j}$; será $M_\beta(q) = M(q)$ y $\det_\beta(M_\beta(q)) = \det(M(q))$.*

Mediante la definición anterior se puede obtener la representación $(\alpha,\ \beta)$ del determinante de una matriz que sus elementos tienen descomposición de signo como se expresa en el lema siguiente.

Lema 4.15 *Sea $M(q)$ una matriz cuadrada $(n \times n)$ con elementos $m_{i,j}(q)$ con descomposición de signo en Q con representación $(\alpha_{i,j}(q),\ \beta_{i,j}(q))$. Sea $M_\alpha(q)$ la matriz cuadrada $(n \times n)$ formada con los elementos $\alpha_{i,j}(q)$, entonces la representación $(\alpha,\ \beta)$ del determinante de la matriz $M(q)$ esta dada por:*

$$\alpha(q) = det_\alpha(M_\alpha(q)),\ \beta(q) = \det(M(q))$$

Prueba. Sea $M(q)$ una matriz cuadrada de dimensión 2×2 con elementos $m_{i,j}(q)$ con representación $(\alpha_{i,j}(q),\ \beta_{i,j}(q))$, entonces de acuerdo al lema (4.10) la representación $(\alpha,\ \beta)$ del determinante $\det(M(q))$ es $((\alpha_{1,1}(q)\alpha_{2,2}(q) + \alpha_{2,1}(q)\alpha_{1,2}(q)),\ (\beta_{1,1}(q)\beta_{2,2}(q) - \beta_{2,1}(q)\beta_{1,2}(q)))$. De la definición (4.6) se ve que la parte alfa del determinante de la matriz $M(q)$ es $\alpha(q) = \det_\alpha(M_\alpha(q))$, y de acuerdo a la definición (4.6) se tiene que la parte beta del determinante $M(q)$ es $\beta(q) = \det(M(q))$.

Supóngase que la regla se cumple para una matriz $M(q)$ de dimensión $(k \times k)$, entonces la representación $(\alpha,\ \beta)$ del determinante $\det(M(q))$ es $\alpha(q) = \det_\alpha(M_\alpha(q))$ y $\beta(q) = \det(M(q))$. El determinante de una matriz $M(q)$ de dimensión $(k+1) \times (k+1)$ es la suma de productos de

elementos $m_{1,j}$ por el cofactor correspondiente: $m_{1,j}(q)(-1)^{1+j}\det(M_{1,j})$ desde $j = 1$ hasta $k+1$, en la representación $(\alpha,\ \beta)$ es $\sum_{j=1}^{k+1}(\alpha_{1,j}(q),\ \beta_{1,j}(q))(-1)^{1+j}(\det_\alpha(M_{\alpha,1,j}(q)),\ \det(M_{1,j}(q))$, de acuerdo al lema (4.10) se tiene que la componente alfa del determinante de la matriz $M(q)$ es $\sum_{j=1}^{k+1}\alpha_{1,j}(q)\det_\alpha(M_{\alpha,1,j}(q))$, y de la definición (4.6) $\beta_{i,j}(q) = m_{i,j}$, por lo tanto la componente beta es $\sum_{j=1}^{k+1} m_{1,j}(q)(-1)^{1+j}\det(M_{1,j}(q))$, concluyendo así que para la matriz $M(q)$ de dimensión $(k+1)\times(k+1)$ la representación $(\alpha,\ \beta)$ del determinante $\det(M(q))$ es $\alpha(q) = \det_\alpha(M_\alpha(q))$ y $\beta(q) = \det(M(q))$. Dado que la regla del determinante supuesta para una matriz de dimensión $k\times k$ se cumplió para dimensión $(k+1)\times(k+1)$, entonces por inducción matemática la regla es correcta. ■

4.5.2 Partes Lineal, No-lineal e Independiente del Determinante

Al analizar la positividad del determinante de una matriz es común la necesidad de recurrir a la división de variables en donde se generan cajas Γ donde los elementos $m_{i,j}(q)$ de la matriz se pueden expresar en función de sus partes lineal, no-lineal e independiente como aparece en el siguiente teorema.

Teorema 4.16 *(Teorema de Descomposición de Signo del Determinante) Sea $q \in \Gamma \subseteq Q \mid q = \mu^{\min} + \delta$ de acuerdo a la proposición (4.2). Sea la matriz $M(q) \in \Re^{n\times n}$ con elementos $m_{i,j}(q)$ con descomposición de signo en Q con representación $(\alpha^{\min}_{i,j} + \alpha_{i,j,L}(\delta) + \alpha_{i,j,N}(\delta),\ \beta^{\min}_{i,j} + \beta_{i,j,L}(\delta) + \beta_{i,j,N}(\delta))$, entonces la representación $(\alpha,\ \beta)$ del determinante de la matriz $M(q)$ esta dada por:*

$$\alpha(q) = \alpha^{\min} + \alpha_L(\delta) + \alpha_N(\delta),\ \ \beta(q) = \beta^{\min} + \beta_L(\delta) + \beta_N(\delta)$$

$$\alpha^{\min} = det_\alpha\left(\left[\alpha^{\min}_{i,j}\right]\right),\ \ \beta^{\min} = det\left(\left[\beta^{\min}_{i,j}\right]\right)$$

$$\alpha_L(q) = \sum_{k=1}^{k=n} det_\alpha\left(\Phi(k)\left[\alpha^{\min}_{i,j}\right] + \left[I - \Phi(k)\right]\left[\alpha_{i,j,L}(\delta)\right]\right)$$

$$\beta_L(q) = \sum_{k=1}^{k=n} det\left(\Phi(k)\left[\beta^{\min}_{i,j}\right] + \left[I - \Phi(k)\right]\left[\beta_{i,j,L}(\delta)\right]\right)$$

$$\Phi(k) = \left[\varphi_{i,j}(k)\right] \mid$$

$$\varphi_{1,1}(k) = |sign(1-k)|$$

$$\varphi_{2,2}(k) = |sign(2-k)|$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{n,n}(k) = |sign(n-k)|$$

$$\varphi_{i,j}(k) = 0 \; \forall i \neq j$$

$$\alpha_N(\delta) = \alpha(q) - \alpha^{\min} - \alpha_L(\delta), \;\; \beta_N(\delta) = \beta(q) - \beta^{\min} - \beta_L(\delta)$$

Prueba. *(Parte independiente).* Sea $M(q)$ una matriz cuadrada de dimensión 2×2 con elementos $m_{i,j}(q)$ con representación en $(\alpha,\ \beta) \mid \alpha_{i,j}(q) = \alpha_{i,j}^{\min} + \alpha_{i,j,L}(\delta) + \alpha_{i,j,N}(\delta)$, $\beta_{i,j}(q) = \beta_{i,j}^{\min} + \beta_{i,j,L}(\delta) + \beta_{i,j,N}(\delta)$, de acuerdo al lema (4.15) la representación $(\alpha,\ \beta)$ del determinante de la matriz $M(q)$ es:

$$\alpha(q) = det_\alpha(M_\alpha(q)) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}^{\min} + \alpha_{1,1,L}(\delta) + \alpha_{1,1,N}(\delta) & \alpha_{1,2}^{\min} + \alpha_{1,2,L}(\delta) + \alpha_{1,2,N}(\delta) \\ \alpha_{2,1}^{\min} + \alpha_{2,1,L}(\delta) + \alpha_{2,1,N}(\delta) & \alpha_{2,2}^{\min} + \alpha_{2,2,L}(\delta) + \alpha_{2,2,N}(\delta) \end{vmatrix}_\alpha$$

$$\beta(q) = \det(M(q)) = \begin{vmatrix} \beta_{1,1}^{\min} + \beta_{1,1,L}(\delta) + \beta_{1,1,N}(\delta) & \beta_{1,2}^{\min} + \beta_{1,2,L}(\delta) + \beta_{1,2,N}(\delta) \\ \beta_{2,1}^{\min} + \beta_{2,1,L}(\delta) + \beta_{2,1,N}(\delta) & \beta_{2,2}^{\min} + \beta_{2,2,L}(\delta) + \beta_{2,2,N}(\delta) \end{vmatrix}$$

Mediante las operaciones básicas del hecho (4.4) se obtiene la componente independiente del determinante de $M(q)$. La parte independiente de un producto $\alpha_{i,j}(q)\alpha_{r,s}(q)$ o $\beta_{i,j}(q)\beta_{r,s}(q)$ es solo el producto de las partes independientes de cada una, obteniendo así:

$$\alpha^{\min} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}^{\min} & \alpha_{1,2}^{\min} \\ \alpha_{2,1}^{\min} & \alpha_{2,2}^{\min} \end{vmatrix}_\alpha, \;\; \beta^{\min} = \begin{vmatrix} \beta_{1,1}^{\min} & \beta_{1,2}^{\min} \\ \beta_{2,1}^{\min} & \beta_{2,2}^{\min} \end{vmatrix}$$

Es fácil de ver que si la matriz es de dimensión superior la regla para obtener la parte mínima es la misma:

$$\alpha^{\min} = det_\alpha\left(\left[\alpha_{i,j}^{\min}\right]\right), \;\; \beta^{\min} = det\left(\left[\beta_{i,j}^{\min}\right]\right)$$

(Parte Lineal). La parte lineal de un producto $\alpha_{i,j}(q)\alpha_{r,s}(q)$ o $\beta_{i,j}(q)\beta_{r,s}(q)$ es la suma de todos los productos de las combinaciones de elementos donde uno es independiente y el otro lineal, en este caso sólo son dos: el primero lineal y el segundo independiente, y el primero independiente y

el segundo lineal. Como los productos son entre un elemento de un renglón y una columna por un elemento del renglón "opuesto" y de la columna "opuesta" entonces se puede expresar el resultado de la siguiente manera:

$$\alpha_L(q) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1,L}(\delta) & \alpha_{1,2,L}(\delta) \\ \alpha_{2,1}^{\min} & \alpha_{2,2}^{\min} \end{vmatrix}_\alpha + \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}^{\min} & \alpha_{1,2}^{\min} \\ \alpha_{2,1,L}(\delta) & \alpha_{2,2,L}(\delta) \end{vmatrix}_\alpha$$

$$\beta_L(q) = \begin{vmatrix} \beta_{1,1,L}(\delta) & \beta_{1,2,L}(\delta) \\ \beta_{2,1}^{\min} & \beta_{2,2}^{\min} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{1,1}^{\min} & \beta_{1,2}^{\min} \\ \beta_{2,1,L}(\delta) & \beta_{2,2,L}(\delta) \end{vmatrix}$$

La regla que se puede suponer hasta aquí es que la parte lineal alfa o beta del determinante de una matriz es la suma de los determinantes que se pueden obtener de acuerdo al caso de una matriz con sólo un renglón con términos lineales y los demás renglones con términos independientes: $\alpha_L(\delta) = \sum_{m=1}^{k} \det_\alpha \left(\hat{M}_\alpha(\varphi(m),\delta)\right)$, $\beta_L(\delta) = \sum_{m=1}^{k} \det \left(\hat{M}(\varphi(m),\delta)\right)$, donde las matrices $\hat{M}_\alpha(\varphi(m),\delta)$ y $\hat{M}(\varphi(m),\delta)$ son matrices que tienen un sólo renglón con elementos lineales de acuerdo a $\varphi(m)$ y los demás están formados por elementos independientes. Supóngase que ésta regla es válida para matrices de dimensión $k \times k$, y que se trata de obtener el determinante de una matriz $M(q)$ de dimensión $(k+1)\times(k+1)$. De acuerdo al lema (4.15) se tiene que la representación $(\alpha,\ \beta)$ del determinante de la matriz $\det(M(q))$ es: $\alpha(q) = det_\alpha(M_\alpha(q))$ y $\beta(q) = \det(M(q))$.

La parte lineal de la parte alfa del determinante es la parte lineal de $\alpha_L(q) = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{1,j}(q) \det_\alpha(M_{\alpha,1,j}^{k\times k}(q))$, y de acuerdo al hecho (4.4) la parte lineal del producto $(\alpha_{1,j}(q))\left(\det_\alpha(M_{\alpha,1,j}^{k\times k}(q))\right)$ es la suma de dos productos de dos elementos, donde uno es lineal y el otro independiente: $(\alpha_{1,j,L}(\delta))\left(\det_\alpha\left(\left[\alpha_{r,s}^{\min}\right]_{1,j}^{k\times k}\right)\right) + \left(\alpha_{1,j}^{\min}\right)\left(\sum_{m=1}^{k} \det_\alpha\left(M_{\alpha,1,j}^{-}(\varphi(m),\delta)\right)\right)$, donde $\left[\alpha_{r,s}^{\min}\right]_{1,j}^{k\times k}$ es una matriz formada de la matriz $\left[\alpha_{r,s}^{\min}\right]^{(k+1)\times(k+1)}$ pero sin contener el primer renglón ni la j-ésima columna, y la matriz $M_{\alpha,1,j}^{-}(\varphi(m),\delta)$ es una matriz de dimensión $k \times k$ formada de elementos de la matriz $M_\alpha(q)$ pero sin contener el primer renglón ni la j-ésima columna. De acuerdo a la regla supuesta sólo un renglón, de acuerdo a $\varphi(m)$, es lineal y los otros independientes. Con todo lo anterior tenemos que la parte lineal de la parte alfa del determinante está compuesta de dos partes $\alpha_L(q) = \sum_{j=1}^{k+1}\left((\alpha_{1,j,L}(\delta))\left(\det_\alpha\left(\left[\alpha_{r,s}^{\min}\right]_{1,j}^{k\times k}\right)\right)\right) + \sum_{j=1}^{k+1}\left(\left(\alpha_{1,j}^{\min}\right)\left(\sum_{m=1}^{k} \det_\alpha\left(M_{\alpha,1,j}^{-}(\varphi(m),\delta)\right)\right)\right)$, la primera es el determinante (α) de una matriz

de dimensión $(k+1) \times (k+1)$, donde el primer renglón está formado por elementos lineales y los demás renglones por elementos independientes. La segunda parte es una sumatoria del determinante (α) de cada una de las matrices de dimensión $(k+1) \times (k+1)$ que se pueden formar, donde el primer renglón es de elementos independientes y de los demás renglones sólo uno está formado por elementos lineales y el resto por elementos independientes. Por lo tanto, la parte lineal del determinante de una matriz $M_\alpha(q)$ de dimensión $(k+1) \times (k+1)$ es la suma del determinante (α) de cada una de las matrices de dimensión $(k+1) \times (k+1)$ con sólo un renglón con términos lineales y los demás renglones con términos independientes. Dado que la regla supuesta para una matriz de dimensión $k \times k$ se cumple también para dimensión $(k+1) \times (k+1)$ entonces por inducción matemática la regla es correcta. La parte lineal $\beta_L(q)$ del determinante de la matriz $M(q)$ se demuestra por el mismo procedimiento que se demostró $\alpha_L(q)$, quedando ambos resultados expresados como sigue:

$$\begin{aligned}
\alpha_L(q) &= \sum_{k=1}^{k=n} det_\alpha \left(\Phi(k) \left[\alpha_{i,j}^{\min}\right] + \left[I - \Phi(k)\right] \left[\alpha_{i,j,L}(\delta)\right]\right) \\
\beta_L(q) &= \sum_{k=1}^{k=n} det \left(\Phi(k) \left[\beta_{i,j}^{\min}\right] + \left[I - \Phi(k)\right] \left[\beta_{i,j,L}(\delta)\right]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(k) &= \left[\varphi_{i,j}(k)\right] \mid \\
\varphi_{1,1}(k) &= \left|sign(1-k)\right|, \;\; \varphi_{2,2}(k) = \left|sign(2-k)\right|, \; \ldots \\
\varphi_{n,n}(k) &= \left|sign(n-k)\right|, \;\; \varphi_{i,j}(k) = 0 \; \forall i \neq j
\end{aligned}$$

(Parte No-lineal). La parte alfa del determinante de la matriz $M(q)$ está expresada por $\alpha(q) = \alpha^{\min} + \alpha_L(\delta) + \alpha_N(\delta)$, puede considerarse como $\alpha(q) = g_1(q) + h_1(q)$, donde $g_1(q) = \alpha^{\min}$ y $h_1(q) = \alpha_L(\delta) + \alpha_N(\delta)$. Por medio del corolario (4.4) se puede obtener $h_1(q) = \alpha(q) - g_1(q)$ de donde $h_1(q) = \alpha(q) - \alpha^{\min}$. Tomando $h_1(q) = \alpha_L(\delta) + \alpha_N(\delta)$ y aplicando nuevamente el corolario (4.4) se obtiene $\alpha_N(\delta) = h_1(q) - \alpha_L(\delta)$ de donde llegamos a: $\alpha_N(\delta) = \alpha(q) - \alpha^{\min} - \alpha_L(\delta)$ reducida a su mínima expresión. De la misma manera se demuestra $\beta_N(\delta) = \beta(q) - \beta^{\min} - \beta_L(\delta)$ con lo cual queda demostrado. ■

Ejemplo 4.5 *Dada la matriz $M(q)$ descrita abajo en la que todos sus elementos tienen descomposición de signo en $Q = \{[q_1,\ q_2]^T \mid q_i \in [0,\ 1]\}$ a) obtener: $M_\alpha(q)$, las expresiones de las partes alfa y beta del determinante* $\det(M(q))$ *y las partes: $\alpha^{\min}$, $\beta^{\min}$, $\alpha_L(\delta)$ y $\beta_L(\delta)$ que son empleadas en el análisis de positividad en cada caja Γ generada por partición de variables; b) obtener las ecuaciones de: $\alpha_N(\delta)$ y $\beta_N(\delta)$; c) probar si el determinante de la matriz $M(q)$ es positivo para todo $q \in Q$.*

$$M(q) = \begin{bmatrix} -7q_1 & 2q_1q_2^3 - q_1^2 & 5 \\ -2 \quad q_1^2q_2 & 3q_1 + q_2 & 5q_1^2 - q_1q_2 \\ q_1 + 6q_1^2q_2^2 & -8 & -12 + q_1q_2^3 + q_1^2 \end{bmatrix}$$

a) La expresión de la matriz $M_\alpha(q)$ se obtiene de acuerdo a la definición (4.6) tomando de la matriz $M(q)$ sólo las partes alfa de cada elemento.

$$M_\alpha(q) = \begin{bmatrix} 7q_1 & 2q_1q_2^3 + q_1^2 & 5 \\ 2 + q_1^2q_2 & 3q_1 + q_2 & 5q_1^2 + q_1q_2 \\ q_1 + 6q_1^2q_2^2 & 8 & 12 + q_1q_2^3 + q_1^2 \end{bmatrix}$$

Las partes del determinante de la matriz $M(q)$ en la representación $(\alpha,\ \beta)$ se obtienen mediante el lema (4.15): $\alpha(q) = det_\alpha(M_\alpha(q)), \beta(q) = \det(M(q))$:

$$\alpha(q) = \begin{vmatrix} 7q_1 & 2q_1q_2^3 + q_1^2 & 5 \\ 2 + q_1^2q_2 & 3q_1 + q_2 & 5q_1^2 + q_1q_2 \\ q_1 + 6q_1^2q_2^2 & 8 & 12 + q_1q_2^3 + q_1^2 \end{vmatrix}_\alpha$$

$$\beta(q) = \begin{vmatrix} -7q_1 & 2q_1q_2^3 - q_1^2 & 5 \\ -2 - q_1^2q_2 & 3q_1 + q_2 & 5q_1^2 - q_1q_2 \\ q_1 + 6q_1^2q_2^2 & -8 & -12 + q_1q_2^3 + q_1^2 \end{vmatrix}$$

Las expresiones $\alpha^{\min}$, $\beta^{\min}$, $\alpha_L(\delta)$ y $\beta_L(\delta)$ se obtienen del teorema de descomposición de signo del determinante (4.16) como se muestran en seguida.

$$\alpha^{\min} = \begin{vmatrix} 7\mu_1^{\min} & 2\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min})^2 & 5 \\ 2 + (\mu_1^{\min})^2\mu_2^{\min} & 3\mu_1^{\min} + \mu_2^{\min} & 5(\mu_1^{\min})^2 + \mu_1^{\min}\mu_2^{\min} \\ \mu_1^{\min} + 6(\mu_1^{\min})^2(\mu_2^{\min})^2 & 8 & 12 + \mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min})^2 \end{vmatrix}_\alpha$$

$$\beta^{\min} = \begin{vmatrix} -7\mu_1^{\min} & 2\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 - (\mu_1^{\min})^2 & 5 \\ -2 - (\mu_1^{\min})^2\mu_2^{\min} & 3\mu_1^{\min} + \mu_2^{\min} & 5(\mu_1^{\min})^2 - \mu_1^{\min}\mu_2^{\min} \\ \mu_1^{\min} + 6(\mu_1^{\min})^2(\mu_2^{\min})^2 & -8 & -12 + \mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min})^2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_L(\delta) = \begin{vmatrix} 7\delta_1 & \begin{matrix} 2((\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min}))\delta_1 + \\ 6\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^2\delta_2 \end{matrix} & 0 \\ 2 + (\mu_1^{\min})^2\mu_2^{\min} & 3\mu_1^{\min} + \mu_2^{\min} & 5(\mu_1^{\min})^2 + \mu_1^{\min}\mu_2^{\min} \\ \mu_1^{\min} + 6(\mu_1^{\min})^2(\mu_2^{\min})^2 & 8 & 12 + \mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min})^2 \end{vmatrix}_\alpha$$

$$+ \begin{vmatrix} 7\mu_1^{\min} & 2\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min})^2 & 5 \\ \begin{matrix} 2\mu_1^{\min}\mu_2^{\min}\delta_1 + \\ (\mu_1^{\min})^2\delta_2 \end{matrix} & 3\delta_1 + \delta_2 & \begin{matrix} (10\mu_1^{\min} + \mu_2^{\min})\delta_1 + \\ \mu_1^{\min}\delta_2 \end{matrix} \\ \mu_1^{\min} + 6(\mu_1^{\min})^2(\mu_2^{\min})^2 & 8 & 12 + \mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min})^2 \end{vmatrix}_\alpha$$

$$+ \begin{vmatrix} 7\mu_1^{\min} & 2\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min})^2 & 5 \\ 2 + (\mu_1^{\min})^2\mu_2^{\min} & 3\mu_1^{\min} + \mu_2^{\min} & 5(\mu_1^{\min})^2 + \mu_1^{\min}\mu_2^{\min} \\ \begin{matrix} (1 + 12\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^2)\delta_1 \\ 12(\mu_1^{\min})^2(\mu_2^{\min})\delta_2 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} ((\mu_2^{\min})^3 + 2(\mu_1^{\min}))\delta_1 + \\ 3\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^2\delta_2 \end{matrix} \end{vmatrix}_\alpha$$

$$\beta_L(\delta) = \begin{vmatrix} -7\delta_1 & 2((\mu_2^{\min})^3 - (\mu_1^{\min}))\delta_1 + 6\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^2\delta_2 & 0 \\ -2 - (\mu_1^{\min})^2\mu_2^{\min} & 3\mu_1^{\min} + \mu_2^{\min} & 5(\mu_1^{\min})^2 - \mu_1^{\min}\mu_2^{\min} \\ \mu_1^{\min} + 6(\mu_1^{\min})^2(\mu_2^{\min})^2 & -8 & -12 + \mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min})^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -7\mu_1^{\min} & 2\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 - (\mu_1^{\min})^2 & 5 \\ -2\mu_1^{\min}\mu_2^{\min}\delta_1 - (\mu_1^{\min})^2\delta_2 & 3\delta_1 + \delta_2 & (10\mu_1^{\min} - \mu_2^{\min})\delta_1 - \mu_1^{\min}\delta_2 \\ \mu_1^{\min} + 6(\mu_1^{\min})^2(\mu_2^{\min})^2 & -8 & -12 + \mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 + (\mu_1^{\min})^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -7\mu_1^{\min} & 2\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^3 - (\mu_1^{\min})^2 & 5 \\ -2 - (\mu_1^{\min})^2\mu_2^{\min} & 3\mu_1^{\min} + \mu_2^{\min} & 5(\mu_1^{\min})^2 - \mu_1^{\min}\mu_2^{\min} \\ (1 + 12\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^2)\delta_1 & 0 & ((\mu_2^{\min})^3 + 2(\mu_1^{\min}))\delta_1 + 3\mu_1^{\min}(\mu_2^{\min})^2\delta_2 \\ 12(\mu_1^{\min})^2(\mu_2^{\min})\delta_2 & & \end{vmatrix}$$

b) Las expresiones de: $\alpha_N(\delta)$ y $\beta_N(\delta)$ se obtienen en su mínima expresión de acuerdo al teorema de descomposición de signo del determinante (4.16), empleando las expresiones desarrolladas en el inciso "a" de la siguiente manera $\alpha_N(\delta) = \alpha(q) - \alpha^{\min} - \alpha_L(\delta)$, $\beta_N(\delta) = \beta(q) - \beta^{\min} - \beta_L(\delta)$.

c) Con las expresiones desarrolladas en los incisos "a" y "b" se hace un programa de cálculo numérico para aplicar en forma gráfica el teorema de determinación de signo mediante partición de cajas (4.14). Haciendo una partición de $k = 10$ se encuentra que para todas las cajas Γ su cota mínima "+" y sus vértices "×" son positivos como se ve en la figura (4.10), por lo tanto el

determinante $\det(M(q))$ es positivo para toda $q \in Q$.

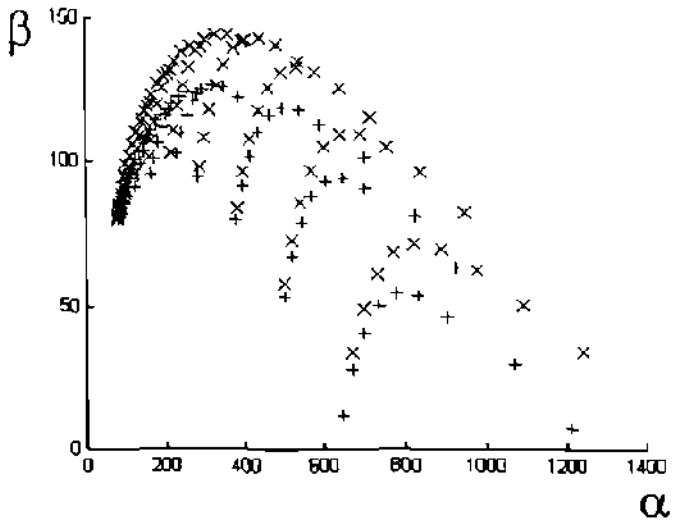

Figura 4.10 Positividad del $\det(M(q))$. Ejemplo (4.5)

4.5.3 Determinante de la Matriz de Controlabilidad.

Los conceptos de los puntos anteriores son empleadas para analizar el signo del determinante de la matriz de controlabilidad $U(q)U^T(q)$, donde $U(q)$ es la matriz de controlabilidad de Kalman. Dada la naturaleza de la matriz de controlabilidad, es conveniente analizar primeramente algunas propiedades de las componentes lineal e independiente de la suma y producto de matrices, empleando la siguiente notación.

Definición 4.7 *Sea la matriz $M(q) \in \Re^{m\times n}$ con elementos $m_{i,j}(q)$ con descomposición de signo en Q con parte lineal, no-lineal e independiente: $m_{i,j}(q) = m_{i,j}^{\min} + m_{Li,j}(\delta) + m_{Ni,j}(\delta)$, de acuerdo a la proposición (4.2), entonces se les llamará: parte independiente, parte lineal y parte no-lineal de la matriz M a las siguientes matrices:*

$$M^{\min} \equiv Parte\ Independiente\ de\ M = [m_{i,j}^{\min}]$$

$$M_L(\delta) \equiv Parte\ Lineal\ de\ M = [m_{Li,j}(\delta)]$$

$$M_N(\delta) \equiv Parte\ No-lineal\ de\ M = [m_{Ni,j}(\delta)]$$

Hecho 4.7 *Sean las matrices $F(q)$ y $G(q)$ con elementos $f_{i,j}(q)$ y $g_{i,j}(q)$ con descomposición de signo en Q con parte lineal, no-lineal e independiente, entonces las partes lineal e independiente de la suma y producto de las matrices se determinan como sigue:*

$$
\begin{aligned}
H(q) = F(q) + G(q): \quad & H_\alpha^{\min} = F_\alpha^{\min} + G_\alpha^{\min} \\
& H_\beta^{\min} = F_\beta^{\min} + G_\beta^{\min} \\
& H_{\alpha L}(\delta) = F_{\alpha L}(\delta) + G_{\alpha L}(\delta) \\
& H_{\beta L}(\delta) = F_{\beta L}(\delta) + G_{\beta L}(\delta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(q) = F(q)G(q): \quad & H_\alpha^{\min} = F_\alpha^{\min} G_\alpha^{\min} \\
& H_\beta^{\min} = F_\beta^{\min} G_\beta^{\min} \\
& H_{\alpha L}(\delta) = F_\alpha^{\min} G_{\alpha L}(\delta) + F_{\alpha L}(\delta) G_\alpha^{\min} \\
& H_{\beta L}(\delta) = F_\beta^{\min} G_{\beta L}(\delta) + F_{\beta L}(\delta) G_\beta^{\min}
\end{aligned}
$$

Prueba. *Suma.* Sea $h_{i,j}(q)$ un elemento de la matriz $F(q) + G(q)$, $h_{i,j}(q) = f_{i,j}(q) + g_{i,j}(q)$, de acuerdo al hecho (4.4) $(h_{i,j})^{\min} = (f_{i,k} + g_{k,j})^{\min} = (f_{i,k})^{\min} + (g_{k,j})^{\min}$ que equivale a $H_\alpha^{\min} = F_\alpha^{\min} + G_\alpha^{\min}$, $H_\beta^{\min} = F_\beta^{\min} + G_\beta^{\min}$ y $(h_{i,j})_L = (f_{i,k} + g_{k,j})_L = (f_{i,k})_L + (g_{k,j})_L$ de donde $H_{\alpha L}(\delta) = F_{\alpha L}(\delta) + G_{\alpha L}(\delta)$ y $H_{\beta L}(\delta) = F_{\beta L}(\delta) + G_{\beta L}(\delta)$.

Producto. La parte independiente del producto es $(h_{i,j})^{\min} = \sum_{k=1}^{n} (f_{i,k} g_{k,j})^{\min}$ que mediante el hecho (4.4) se obtiene $(h_{i,j})^{\min} = \sum_{k=1}^{n} (f_{i,k})^{\min} (g_{k,j})^{\min}$, que equivale a $H_\alpha^{\min} = F_\alpha^{\min} G_\alpha^{\min}$ y $H_\beta^{\min} = F_\beta^{\min} G_\beta^{\min}$. Así también $(h_{i,j})_L = \sum_{k=1}^{n} (f_{i,k} g_{k,j})_L$ que de acuerdo al mismo hecho (4.4) resulta $(h_{i,j})_L = \sum_{k=1}^{n} \left((f_{i,k})^{\min} (g_{k,j})_L + (f_{i,k})_L (g_{k,j})^{\min} \right) = \sum_{k=1}^{n} (f_{i,k})^{\min} (g_{k,j})_L + \sum_{k=1}^{n} (f_{i,k})_L (g_{k,j})^{\min}$ que equivalentemente es $H_{\alpha L} = F_\alpha^{\min} G_{\alpha L} + F_{\alpha L} G_\alpha^{\min}$, $H_{\beta L} = F_\beta^{\min} G_{\beta L} + F_{\beta L} G_\beta^{\min}$. ■

Las propiedades elementales del hecho anterior pueden ser utilizadas para analizar la descomposición de signo de funciones complicadas de matrices. Una función de matrices útil para analizar la descomposición de signo de su determinante en representación alfa, beta con partes lineal, no-lineal e independiente, es el caso de la matriz de controlabilidad, como se muestra en el siguiente.

Teorema 4.17 *(Teorema de Descomposición de Signo de la matriz de Controlabilidad) Sean las matrices $A(q) \in \Re^{n\times n}$, $B(q) \in \Re^{n\times m}$, con elementos $a_{i,j}(q)$, $b_{i,j}(q)$, con descomposición de signo en Q; sea la matriz $U(q) = [U_1(q),\ U_2(q),\ \cdots\ ,\ U_n(q)]$, donde $U_i(q) = A^{i-1}(q)B(q)$, entonces las partes lineal, no-lineal e independiente de las partes alfa y beta del producto $U(q)U^T(q)$ se obtienen de la siguiente manera.*

$$\left(U(q)U^T(q)\right)_\alpha = \left(UU^T\right)_\alpha^{\min} + \left(U(q)U^T(q)\right)_{\alpha L} + \left(U(q)U^T(q)\right)_{\alpha N}$$
$$\left(U(q)U^T(q)\right)_\beta = \left(UU^T\right)_\beta^{\min} + \left(U(q)U^T(q)\right)_{\beta L} + \left(U(q)U^T(q)\right)_{\beta N}$$

$$\left(UU^T\right)_\alpha^{\min} = U_\alpha^{\min}\left(U_\alpha^{\min}\right)^T,\ \ \left(UU^T\right)_\beta^{\min} = U_\beta^{\min}\left(U_\beta^{\min}\right)^T$$

$$\left(U(q)U^T(q)\right)_{\alpha L} = U_\alpha^{\min}\left(U_{\alpha L}(\delta)\right)^T + U_{\alpha L}(\delta)\left(U_\alpha^{\min}\right)^T$$
$$\left(U(q)U^T(q)\right)_{\beta L} = U_\beta^{\min}\left(U_{\beta L}(\delta)\right)^T + U_{\beta L}(\delta)\left(U_\beta^{\min}\right)^T$$

$$\left(U(q)U^T(q)\right)_{\alpha N} = \left(U(q)U^T(q)\right)_\alpha - \left(UU^T\right)_\alpha^{\min} - \left(U(q)U^T(q)\right)_{\alpha L}$$
$$\left(U(q)U^T(q)\right)_{\beta N} = \left(U(q)U^T(q)\right)_\beta - \left(UU^T\right)_\beta^{\min} - \left(U(q)U^T(q)\right)_{\beta L}$$

$$U_\alpha^{\min} = [U_{1\alpha}^{\min},\ U_{2\alpha}^{\min},\ \cdots\ ,\ U_{n\alpha}^{\min}],\ \ U_\beta^{\min} = [U_{1\beta}^{\min},\ U_{2\beta}^{\min},\ \cdots\ ,\ U_{n\beta}^{\min}]$$

$$U_{i\alpha}^{\min} = \left(A_\alpha^{\min}\right)^{i-1} B_\alpha^{\min},\ \ U_{i\beta}^{\min} = \left(A_\beta^{\min}\right)^{i-1} B_\beta^{\min}\ \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

$$U_{\alpha L} = [U_{1\alpha L},\ U_{2\alpha L},\ \cdots\ ,\ U_{n\alpha L}],\ \ U_{\beta L} = [U_{1\beta L},\ U_{2\beta L},\ \cdots\ ,\ U_{n\beta L}]$$

$$U_{1\alpha L} = B_{\alpha L},\ \ U_{1\beta L} = B_{\beta L}$$

$$\begin{aligned} U_{i\alpha L} &= \left(A_\alpha^{\min}\right)^{i-1} B_{\alpha L} + \left(A_\alpha^{i-1}\right)_L B_\alpha^{\min}\ \forall i = 2, 3, \cdots, n \\ U_{i\beta L} &= \left(A_\beta^{\min}\right)^{i-1} B_{\beta L} + \left(A_\beta^{i-1}\right)_L B_\beta^{\min}\ \forall i = 2, 3, \cdots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(A^k\right)_{\alpha L} &= A_\alpha^{\min}\left(A^{k-1}\right)_{\alpha L} + A_{\alpha L}\left(A_\alpha^{\min}\right)^{k-1}\ \forall k = 2, 3, \cdots, n-1 \\ \left(A^k\right)_{\beta L} &= A_\beta^{\min}\left(A^{k-1}\right)_{\beta L} + A_{\beta L}\left(A_\beta^{\min}\right)^{k-1}\ \forall k = 2, 3, \cdots, n-1 \end{aligned}$$

Prueba. Sean las matrices $A(q)$, $B(q)$, y $U(q) = [U_1(q),\ U_2(q),\ \cdots,\ U_n(q)]$ así descritas en el enunciado. Todas las aseveraciones de esta prueba están sustentadas en las propiedades del hecho (4.4), de acuerdo a la definición (4.7) y en inducción matemática. Por simplicidad se omiten los argumentos. Primeramente se demuestra que $\left(A^k\right)_L = A^{\min}\left(A^{k-1}\right)_L + A_L\left(A^{\min}\right)^{k-1}$: la parte lineal de A^2 es $A^{\min}A_L + A_L A^{\min}$, entonces $\left(A^3\right)_L = A^{\min}\left(A^2\right)_L + A_L\left(A^{\min}\right)^2$ y de la misma manera se llega a $\left(A^k\right)_L = A^{\min}\left(A^{k-1}\right)_L + A_L\left(A^{\min}\right)^{k-1}$, implicando que $A^k_{\alpha L} = A^{\min}_\alpha A^{k-1}_{\alpha L} + A_{\alpha L}\left(A^{\min}_\alpha\right)^{k-1}$ y $A^k_{\beta L} = A^{\min}_\beta A^{k-1}_{\beta L} + A_{\beta L}\left(A^{\min}_\beta\right)^{k-1}$, esto es para toda $k \geq 2$ entera, aunque realmente sólo se usara para $k = 2, 3, \cdots, n-1$.

Si $U_i = A^{i-1}B$, para $i = 1 : U_{1\alpha L} = B_{\alpha L},\ U_{1\beta L} = B_{\beta L}$. Para $i = 2, 3, \cdots, n$ se tiene

$U_{iL} = \left(A^{i-1}\right)^{\min} B_L + \left(A^{i-1}\right)_L B^{\min} = \left(A^{\min}\right)^{i-1} B_L + A^{i-1}_L B^{\min}$ de donde se obtiene $U_{i\alpha L} = \left(A^{\min}_\alpha\right)^{i-1} B_{\alpha L} + A^{i-1}_{\alpha L} B^{\min}_\alpha$ y $U_{i\beta L} = \left(A^{\min}_\beta\right)^{i-1} B_{\beta L} + A^{i-1}_{\beta L} B^{\min}_\beta$.

Dado que $U = [U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_n]$ y que la parte lineal de U tiene todos sus elementos lineales, $U_L = [U_{1L},\ U_{2L},\ \cdots,\ U_{nL}]$ de donde se obtiene $U_{\alpha L} = [U_{1\alpha L},\ U_{2\alpha L},\ \cdots,\ U_{n\alpha L}]$ y $U_{\beta L} = [U_{1\beta L},\ U_{2\beta L},\ \cdots,\ U_{n\beta L}]$.

Tomando nuevamente el bloque $U_i = A^{i-1}B$ entonces $U^{\min}_i = \left(A^{i-1}B\right)^{\min} = \left(A^{i-1}\right)^{\min} B^{\min} = \left(A^{\min}\right)^{i-1} B^{\min}$, obteniendo así $U^{\min}_{i\alpha} = \left(A^{\min}_\alpha\right)^{i-1} B^{\min}_\alpha$ y $U^{\min}_{i\beta} = \left(A^{\min}_\beta\right)^{i-1} B^{\min}_\beta \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$.

Regresando a la matriz $U = [U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_n]$ y tomando en cuenta que la parte independiente de U tiene todos sus elementos independientes, $U^{\min} = [U^{\min}_1,\ U^{\min}_2,\ \cdots,\ U^{\min}_n]$, entonces $U^{\min}_\alpha = [U^{\min}_{1\alpha},\ U^{\min}_{2\alpha},\ \cdots,\ U^{\min}_{n\alpha}]$ y $U^{\min}_\beta = [U^{\min}_{1\beta},\ U^{\min}_{2\beta},\ \cdots,\ U^{\min}_{n\beta}]$.

Dado que la parte independiente de UU^T es $\left(UU^T\right)^{\min} = (U)^{\min}\left(U^T\right)^{\min} = \left(U^{\min}\right)\left(U^{\min}\right)^T$, de donde se obtiene $\left(UU^T\right)^{\min}_\alpha = U^{\min}_\alpha\left(U^{\min}_\alpha\right)^T$ y $\left(UU^T\right)^{\min}_\beta = U^{\min}_\beta\left(U^{\min}_\beta\right)^T$.

Teniendo determinadas todas las partes de U entonces se puede descomponer UU^T, $\left(UU^T\right)_L = U^{\min}\left(U^T\right)_L + U_L\left(U^T\right)^{\min} = U^{\min}(U_L)^T + U_L\left(U^{\min}\right)^T$ de donde se obtiene $\left(UU^T\right)_{\alpha L} = U^{\min}_\alpha(U_{\alpha L})^T + U_{\alpha L}\left(U^{\min}_\alpha\right)^T$ y $\left(UU^T\right)_{\beta L} = U^{\min}_\beta(U_{\beta L})^T + U_{\beta L}\left(U^{\min}_\beta\right)^T$.

De acuerdo a la proposición (4.2), la parte no lineal se puede obtener de la siguiente manera: $\left(U(q)U^T(q)\right)_N = \left(U(q)U^T(q)\right) - \left(U(q)U^T(q)\right)^{\min} - \left(U(q)U^T(q)\right)_L$, de donde se obtiene: $\left(U(q)U^T(q)\right)_{\alpha N} = \left(U(q)U^T(q)\right)_\alpha - \left(UU^T\right)^{\min}_\alpha - \left(U(q)U^T(q)\right)_{\alpha L}$ y $\left(U(q)U^T(q)\right)_{\beta N} =$

$\left(U(q)U^T(q)\right)_\beta - \left(UU^T\right)_\beta^{\min} - \left(U(q)U^T(q)\right)_{\beta L}$. ■

Una vez teniendo las partes lineal , no-lineal e independiente del producto UU^T, entonces se puede aplicar el teorema (4.16) para asi obtener la descomposición de signo del determinante de la matriz de controlabilidad.

Capítulo 5
Estabilidad Robusta de Polinomios en el Espacio de los Coeficientes

La estabilidad robusta de sistemas lineales se resuelve en el espacio de los coeficientes, mapeando el problema de estabilidad robusta a un problema de positividad, para lo cual se propone la Tabla Equivalente de Routh, a la que es aplicable la descomposición de signo.

5.1 Tabla Equivalente de Routh

La tabla de Routh [24] fué creada para determinar el número de raíces con parte real positiva de un polinomio $p(s)$, de acuerdo a Routh éstas son igual al número de cambios de signo en los coeficientes de la primer columna de su tabla, pero si el interés es el determinar sólo la estabilidad del polinomio, entonces sólo es necesario saber que todos los coeficientes de la primer columna son positivos. Cuando los coeficientes del polinomio tienen dependencia paramétrica, los coeficientes de la tabla de Routh no tienen descomposición de signo debido a la división con que son obtenidos, sin embargo, la división puede eliminarse formando así una tabla equivalente de Routh.

Meinsma [33] demuestra la tabla de Routh probando que un polinomio $p(s) = c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + c_{n-3}s^{n-3} + \cdots + c_0$ con coeficientes reales y $c_n \neq 0$, es estable si y sólo si c_{n-1} es diferente de cero y tiene el mismo signo que c_n y el polinomio reducido $q(s) = p(s) - \frac{c_n}{c_{n-1}}(c_{n-1}s^n + c_{n-3}s^{n-2} + c_{n-5}s^{n-4} + \cdots)$ de grado $n-1$ es estable. De esta manera el polinomio reducido es $q(s) = (c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-3}s^{n-3} + c_{n-5}s^{n-5} + \cdots) + (\frac{c_{n-1}c_{n-2} - c_n c_{n-3}}{c_{n-1}}s^{n-2} + \frac{c_{n-1}c_{n-4} - c_n c_{n-5}}{c_{n-1}}s^{n-4} + \frac{c_{n-1}c_{n-6} - c_n c_{n-7}}{c_{n-1}}s^{n-6} + \cdots)$ que equivale al segundo y tercer renglón de la tabla de Routh. Por otra parte de acuerdo al teorema de Hermite-Bichler un polinomio es estable si y sólo si sus partes par e impar $p_p(j\omega)$ y $p_i(j\omega)$ satisfacen la propiedad de entrelazamiento y por ende la cumplen $k_p p_p(j\omega)$ y $k_i p_i(j\omega)$ para toda k_p y k_i del mismo signo, de tal manera que un polinomio $p(s) = p_p(s) + sp_i(s)$ es estable si y sólo si $\hat{p}(s) = k_p p_p(s) + k_i s p_i(s)$ es estable. Por lo tanto, cada renglón de la tabla de Routh puede ser multiplicado por una cantidad de un mismo

signo sin alterar la estabilidad que de ella se infiere.

Cada coeficiente $a_{i,j}$ de la tabla de Routh se puede expresar como una fracción $\frac{b_{i,j}}{d_i}$ donde el numerador $b_{i,j}$ está formado por la resta de productos de elementos no fraccionarios de los dos renglones inmediato superiores, y el denominador común a todo el renglón d_i está formado de producto de la función $b_{i-1,1}$ del renglón superior y el denominador d_{i-2}. De esta forma $a_{1,1} = b_{1,1} = c_n$ y $a_{2,1} = b_{2,1} = c_{n-1}$ $d_1 = d_2 = 1$, mientras que el caso general es como aparece en seguida mediante los cuales se hace la siguiente proposición y se establece el siguiente teorema. De esta forma $a_{1,1} = b_{1,1} = c_n$ y $a_{2,1} = b_{2,1} = c_{n-1}$, $d_1 = d_2 = 1$ y el caso general es como aparece en seguida mediante los cuales se hace la siguiente proposición y se establece el siguiente teorema.

$$
\begin{aligned}
a_{i,j} &= \frac{\left(\frac{b_{i-1,1}}{d_{i-1}}\frac{b_{i-2,j+1}}{d_{i-2}} - \frac{b_{i-2,1}}{d_{i-2}}\frac{b_{i-1,j+1}}{d_{i-1}}\right)}{\frac{b_{i-1,1}}{d_{i-1}}} = \frac{(b_{i-1,1}b_{i-2,j+1} - b_{i-2,1}b_{i-1,j+1})}{d_{i-2}b_{i-1,1}} = \frac{b_{i,j}}{d_i} \quad (5.14)\\
b_{i,j} &= (b_{i-1,1}b_{i-2,j+1} - b_{i-2,1}b_{i-1,j+1})\ \forall i \geq 3, \quad b_{i,j} = c_{n+3-i-2j}\ \forall i \leq 2\\
d_i &= d_{i-2}b_{i-1,1}
\end{aligned}
$$

Proposición 5.1 [17] *Sea $p(s) = c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + c_3 s^{n-3} + \cdots + c_0$ un polinomio con coeficientes reales y c_n, c_{n-1} positivos, entonces se le llamará Tabla Equivalente de Routh al acomodo matricial de elementos $b_{i,j}$ descrito en (5.14).*

Tabla Equivalente de Routh

$$
\begin{array}{cccc}
c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \cdots\\
c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots\\
b_{3,1} & b_{3,2} & \cdots & \\
b_{4,1} & b_{4,2} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & &
\end{array}
$$

Teorema 5.1 [17] *Sea $p(s) = c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + c_{n-3}s^{n-3} + \cdots + c_0$ un polinomio con coeficientes reales y c_n, c_{n-1} positivos. Entonces la tabla de Routh es estable si y sólo si la*

tabla equivalente de Routh es estable.

Prueba. Supongamos que la tabla de Routh correspondiente tiene positivos los primeros k coeficientes c_n, c_{n-1}, $a_{3,1}$, $\cdots$ $a_{k,1}$ de la primer columna, entonces de (5.14) $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $b_{1,1} = c_n$, $b_{2,1} = c_{n-1}$, son positivos y $d_3 = d_1 b_{2,1}$ es positivo implicando que $b_{3,1} = d_3 a_{3,1}$ es positivo. De la misma manera se obtiene que d_i y $b_{i,1}$ son positivos hasta llegar al renglón k, el denominador $d_{k+1} = d_{k-1} b_{k,1}$ es positivo y el signo de $b_{k+1,1}$ es el de $a_{k+1,1}$, de tal manera que si los primeros $k+1$ coeficientes c_n, c_{n-1}, $a_{3,1}$, $\cdots$ $a_{k+1,1}$ son positivos, implica que los primeros $k+1$ coeficientes $b_{i,1}$ de la tabla equivalente de Routh son positivos, y por inducción matemática se deduce que si todos los coeficientes $a_{i,j}$ son positivos, entonces todos los coeficientes $b_{i,j}$ son positivos.

Ahora supongamos que los primeros k coeficientes c_n, c_{n-1}, $b_{3,1}$, $\ldots$ $b_{k,1}$ de la tabla equivalente de Routh son positivos entonces $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $a_{1,1} = c_n$, $a_{2,1} = c_{n-1}$, son positivos y $d_3 = d_1 b_{2,1}$ es positivo implicando que $a_{3,1} = \dfrac{b_{3,1}}{d_3}$ es positivo, de la misma manera se obtiene que d_i y $a_{i,1}$ son positivos hasta llegar al renglón k; el denominador $d_{k+1} = d_{k-1} b_{k,1}$ es positivo, por lo tanto el signo de $a_{k+1,1}$ es el de $b_{k+1,1}$, de tal manera que si los primeros $k+1$ coeficientes c_n, c_{n-1}, $b_{3,1}$, $\cdots$ $b_{k+1,1}$ son positivos implica que los primeros $k+1$ coeficientes $a_{i,1}$ son positivos y por inducción matemática se obtiene que si todos los coeficientes $b_{i,j}$ son positivos entonces todos los coeficientes $a_{i,j}$ son positivos. ■

El aplicar la tabla de Routh en forma distinta a la original es tratado también por Misra [36]. En este caso la tabla de Routh es empleada con el fin de estabilizar polinomios intervalo desarrollando la tabla mediante aritmética de intervalos. La característica más importante de la Tabla Equivalente de Routh es que sus coeficientes tienen descomposición de signo en la caja de incertidumbre paramétrica. Esta propiedad es utilizada en la siguiente sección.

5.2 Estabilidad Robusta mediante la Tabla Equivalente de Routh y Descomposición de Signo

La estabilidad robusta de familias de polinomios con incertidumbre paramétrica multilineal o

polinómica, se puede analizar por medio de la tabla equivalente de Routh y descomposición de signo.

Teorema 5.2 [17] *Sea $P(s,Q) = \{p(\cdot,q) \mid q \in Q \subset P \subset \Re^{\ell}\}$ una familia de polinomios con incertidumbre paramétrica polinómica, entonces la estabilidad robusta de la familia $P(s,Q)$ se determina de la tabla equivalente de Routh analizando la positividad de los coeficientes de la primer columna mediante descomposición de signo.*

Prueba. Dado que $q \in Q \subset P \subset \Re^{\ell}$ y de acuerdo al lema (4.2) cada coeficiente $c_i(q)$ del polinomio $p(s,q)$ tiene descomposición de signo en Q. Todos los coeficientes a partir del tercer renglón de la tabla equivalente de Routh están formados por la resta de productos de coeficientes de los dos renglones anteriores, de acuerdo al teorema (4.3): en la suma, resta o producto de funciones con descomposición de signo el resultado tiene descomposición de signo. ■

La manera más fácil de determinar la positividad de un coeficiente de la tabla equivalente de Routh es aplicando el teorema de determinación de signo mediante partición de cajas (4.14) en forma gráfica, mediante la división de cada variable en k partes iguales, generando así un conjunto de cajas Γ con una caja Δ en común y graficando en $(\alpha,\ \beta)$ de acuerdo al hecho (4.6) la cota mínima $f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$ y los vértices de cada caja Γ. Para estos fines, cada elemento de la tabla se genera en representación $(\alpha,\ \beta)$ expresando cada una de éstas en sus partes lineal, no lineal e independiente $\alpha_{r,s}(q) = (\alpha^{\min}_{r,s}, \alpha_{(r,s)L}(\delta), \alpha_{(r,s)N}(\delta))$, $\beta_{r,s}(q) = (\beta^{\min}_{r,s}, \beta_{(r,s)L}(\delta), \beta_{(r,s)N}(\delta))$.

5.3 Estabilidad Robusta mediante el Criterio Hurwitz y Descomposición de Signo

El criterio de Hurwitz (sección 4.1) establece que un polinomio es estable si y sólo si todos los menores principales $\Delta_i(q)$ de la matriz de Hurwitz $H(q)$ son positivos $\forall q \in Q$. Por otra parte existe una relación entre los menores principales $\Delta_i(q)$ y los coeficientes $a_{i,1}$ de la de la primer columna de la tabla de Routh: $\Delta_k(q) = c_{n-1}(q)a_{3,1}(q)a_{4,1}(q)\cdots a_{k+1,1}(q)$, $\Delta_k(q) = \Delta_{k-1}(q)a_{k+1,1}(q)$, de donde se puede obtener una relación entre los menores principales $\Delta_i(q)$ y los coeficientes $b_{i,1}$ de la primer columna de la tabla equivalente de Routh como se muestra en el siguiente lema.

Lema 5.3 *Sea* $p(s) = c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + c_{n-3}s^{n-3} + \cdots + c_0$ *un polinomio con coeficientes reales y* c_n, c_{n-1} *positivos; sea* Δ_i *un menor principal de Hurwitz tal que* $\Delta_{-|i|} = 0$, *sean* $a_{i,j}$ *y* $b_{i,j}$ *como fueron descritas en (5.14); sean* $d_i = d_{i-2}b_{i-1,1}$ *y* $b_{i,j} = d_i a_{i,j}$ *tal que* $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $b_{1,1} = c_n$, $b_{2,1} = c_{n-1} = \Delta_1$; *sea* $C_F = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots \mid C_{F(i)} = C_{F(i-1)} + C_{F(i-2)}\}$ *conocida como serie de Fibonacci (Leonardo de Pisa), entonces los coeficientes de la tabla equivalente de Routh y los menores principales de Hurwitz se relacionan de la siguiente manera:*

$$b_{k,1} = \Delta_1^{C_F(k-4)}\Delta_2^{C_F(k-5)}\Delta_3^{C_F(k-6)}\cdots\Delta_{k-6}^{C_F(3)}\Delta_{k-5}^{C_F(2)}\Delta_{k-4}^{C_F(1)}\Delta_{k-1}$$

Prueba. Dado que $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $b_{2,1} = c_{n-1} = \Delta_1$ y de (5.1) tenemos $d_i = d_{i-2}b_{i-1,1}$, $b_{i,1} = d_i a_{i,1}$ que se puede simplificar empleando $\Delta_{k-1}(q)a_{k+1,1}(q) = \Delta_k(q)$, entonces se pueden obtener los primeros elementos $b_{i,1}$ para tratar de entender el comportamiento de ellos: $d_3 = d_1 b_{2,1} = \Delta_1$, $b_{3,1} = d_3 a_{3,1} = \Delta_1 a_{3,1} = \Delta_2$, $d_4 = d_2 b_{3,1} = \Delta_2$, $b_{4,1} = d_4 a_{4,1} = \Delta_2 a_{4,1} = \Delta_3$, $d_5 = d_3 b_{4,1} = \Delta_1\Delta_3$, $b_{5,1} = d_5 a_{5,1} = \Delta_1\Delta_3 a_{5,1} = \Delta_1\Delta_4$. Continuando de esta manera se obtiene por ejemplo: $d_9 = d_7 b_{8,1} = \Delta_1^5\Delta_2^3\Delta_3^2\Delta_4\Delta_5\Delta_7$, y $b_{9,1} = d_9 a_{9,1} = \Delta_1^5\Delta_2^3\Delta_3^2\Delta_4\Delta_5\Delta_7 a_{9,1} = \Delta_1^5\Delta_2^3\Delta_3^2\Delta_4\Delta_5\Delta_8$. Por inspección se puede suponer que $d_k = \Delta_1^{C_F(k-4)}\Delta_2^{C_F(k-5)}\Delta_3^{C_F(k-6)}\cdots\Delta_{k-6}^{C_F(3)}\Delta_{k-5}^{C_F(2)}\Delta_{k-4}^{C_F(1)}\Delta_{k-2}$ y $b_{k,1} = \Delta_1^{C_F(k-4)}\Delta_2^{C_F(k-5)}\Delta_3^{C_F(k-6)}\cdots\Delta_{k-6}^{C_F(3)}\Delta_{k-5}^{C_F(2)}\Delta_{k-4}^{C_F(1)}\Delta_{k-1}$, tomándolas como verdaderas entonces $d_{k-1} = \Delta_1^{C_F(k-5)}\Delta_2^{C_F(k-6)}\Delta_3^{C_F(k-7)}\cdots\Delta_{k-7}^{C_F(3)}\Delta_{k-6}^{C_F(2)}\Delta_{k-5}^{C_F(1)}\Delta_{k-3}$ y dado que $b_{k+1,1} = d_{k+1}a_{k+1,1}$, $d_{k-1} = d_{k-1}b_{k,1}$, $a_{k,1} = \dfrac{\Delta k-1}{\Delta_{k-2}}$ y $C_{F(i)} = C_{F(i-1)} + C_{F(i-2)}$ se obtiene $b_{k+1,1} = \Delta_1^{C_F(k-3)}\Delta_2^{C_F(k-4)}\Delta_3^{C_F(k-5)}\cdots\Delta_{k-6}^{C_F(4)}\Delta_{k-5}^{C_F(3)}\Delta_{k-4}^{C_F(1)}\Delta_{k-3}\Delta_k$. Tomando en cuenta que $C_{F(1)} = C_{F(2)} = 1$ se obtiene: $b_{k+1,1} = \Delta_1^{C_F(k-3)}\Delta_2^{C_F(k-4)}\Delta_3^{C_F(k-5)}\cdots\Delta_{k-6}^{C_F(4)}\Delta_{k-5}^{C_F(3)}\Delta_{k-4}^{C_F(2)}\Delta_{k-3}^{C_F(1)}\Delta_k$.

Por otra parte $d_{k+1} = d_{k-1}\cdot b_{k,1}$, $C_F(1) = C_F(2) = 1$ y $d_{k+1} = \Delta_1^{C_F(k-5)}\Delta_2^{C_F(k-6)}\Delta_3^{C_F(k-7)}\cdots\Delta_{k-7}^{C_F(3)}\Delta_{k-6}^{C_F(2)}\Delta_{k-5}^{C_F(1)}\Delta_{k-3}\cdot\Delta_1^{C_F(k-4)}\Delta_2^{C_F(k-5)}\Delta_3^{C_F(k-6)}\cdots\Delta_{k-6}^{C_F(3)}\Delta_{k-5}^{C_F(2)}\Delta_{k-4}^{C_F(1)}\Delta_{k-1}$, de donde $d_{k+1} = \Delta_1^{C_F(k-3)}\Delta_2^{C_F(k-4)}\Delta_3^{C_F(k-5)}\cdots\Delta_{k-7}^{C_F(5)}\Delta_{k-6}^{C_F(4)}\Delta_{k-5}^{C_F(3)}\Delta_{k-4}^{C_F(2)}\Delta_{k-3}^{C_F(1)}\Delta_{k-1}$.

Como la expresión de $b_{k,1}$ y d_k se satisfacen para $k+1$ entonces queda probado por inducción matemática. ■

El teorema (5.1) se puede demostrar también a partir del lema (5.3) ya que se puede probar fácilmente que todos los coeficientes $b_{i,1}$ de la tabla equivalente de Routh son positivos si y sólo si

todos los menores principales Δ_i de la matriz de Hurwitz son positivos.

Del lema (5.3) se puede ver que en general, los menores principales Δ_i son sólo una parte multiplicativa de un elemento $b_{i+1,1}$, siendo así los menores principales expresiones más simples que los elementos de la tabla equivalente de Routh. Por la naturaleza propia de un determinante, los menores principales correspondientes a polinomios con incertidumbre paramétrica tienen descomposición de signo, por lo tanto el teorema de Hurwitz es una opción para determinar la estabilidad robusta de familias de polinomios con incertidumbre paramétrica. Mediante el criterio de Hurwitz (sección 4.1) se puede establecer que una familia de polinomios $P(s,Q) = \{p(s,q) \mid q \in Q \subset P \subset \Re^{\ell}\}$ con incertidumbre paramétrica polinómica, es robustamente estable si y sólo si todos los menores principales $\Delta_i(q)$ de la matriz de Hurwitz $H(q)$ son positivos $\forall q \in Q$, pero una mejor opción es la que se presenta en la siguiente sección.

5.4 Estabilidad Robusta mediante Frazer y Duncan y Descomposición de Signo

La determinación de la positividad de un determinante para un rango específico de valores en los parámetros no es un problema fácil, según lo menciona Ackermann [2], para lo cual muestra una alternativa del teorema de Frazer y Duncan en la versión "teorema cruce de frontera", empleando sólo un menor principal de la matriz de Hurwitz.

Teorema 5.4 [20] *(Frazer y Duncan, Teorema de Cruce de Frontera). Sea $P(s,Q) = \{p(s,q) \mid q \in Q \subset P \subset \Re^{\ell}\}$ una familia de polinomios de grado invariante con incertidumbre paramétrica con coeficientes continuos reales, entonces la familia $P(s,Q)$ es robustamente estable si y sólo si: 1) existe un polinomio estable $p(s,\hat{q}) \in P(s,Q)$, 2) $j\omega \notin$ Raíces$[P(s,Q)]$ para toda $\omega \geq 0$.*

El concepto básico de este teorema es que si un polinomio con incertidumbre paramétrica es estable para un cierto valor de parámetros, entonces sus raíces estarán en el lado izquierdo en el plano de los complejos, si al cambiar en forma continua el valor de los parámetros, el polinomio se hace inestable entonces sus raíces cruzaron el eje $j\omega$. Frazer y Duncan muestran una forma de detectarlo mediante la matriz de Hurwitz como aparece en el siguiente teorema.

Teorema 5.5 [20] *(Frazer y Duncan). Sea* $P(s,Q) = \{p(s,q) \mid q \in Q \subset P \subset \Re^{\ell}\}$ *una familia de polinomios de grado invariante con incertidumbre paramétrica con coeficientes continuos reales, entonces la familia* $P(s,Q)$ *es robustamente estable si y sólo si: 1) existe un polinomio estable* $p(s,\hat{q}) \in P(s,Q)$, *2)* $\det(H(q)) \neq 0$ *para toda* $q \in Q$.

Ejemplo 5.1 [2] *Dada la familia de polinomios con incertidumbre paramétrica multilineal descrita por:* $p(s,q) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + c_4 s^4$, *con coeficientes:* $c_0(q) = 3$, $c_1(q) = 2$, $c_2(q) = 0.25 + 2q_1 + 2q_2$, $c_3(q) = 0.5(q_1 + q_2)$, $c_4(q) = q_1 q_2$, *tal que* $q_i \in [1,\ 5]$. *Determinar la estabilidad robusta de la familia de polinomios mediante el teorema Frazer y Duncan (5.5), aplicando en forma gráfica el teorema de descomposición de signo del determinante (4.16).*

Primeramente hay que probar que existe un elemento estable. Tomando $\hat{q} = [1\ 1]^T$ se obtiene el polinomio que se muestra abajo junto con su correspondiente tabla equivalente de Routh, de la que se encuentra que el polinomio $p(s,\hat{q})$ es estable ya que todos los elementos de la primer columna de esta tabla son positivos.

$$p(s,\hat{q}) = s^4 + s^3 + 4.25s^2 + 2s + 3$$

Tabla Equivalente de Routh					
	s^4	1	4.25	3	
	s^3	1	2		
	s^2	2.25	3		
	s^1	1.5			
	s^0	4.5			

Ahora hay que tratar de probar que la matriz de Hurwitz (sección 4.1) es robustamente no singular. La matriz de Hurwitz $H(q)$ correspondiente al polinomio $p(s,q)$ es la que se muestra abajo. Las bases de la programación para hacer la gráfica necesaria en la aplicación del teorema (4.16) fueron descritas en capitulo anterior sección (4.5), analizando 9 puntos por variable y auxiliándose del procedimiento (4.1) de la página 69 se prueba que el determinante de la matriz de Hurwitz es positivo para todo q elemento de Q como se muestra en la figura (5.1), ya que todos los vértices

"$\times$" y las cotas mínimas "$+$" son positivos, por lo tanto la matriz de Hurwitz es robustamente no singular.

$$H(q) = \begin{bmatrix} c_3(q) & c_1(q) & 0 & 0 \\ c_4(q) & c_2(q) & c_0(q) & 0 \\ 0 & c_3(q) & c_1(q) & 0 \\ 0 & c_4(q) & c_2(q) & c_0(q) \end{bmatrix}$$

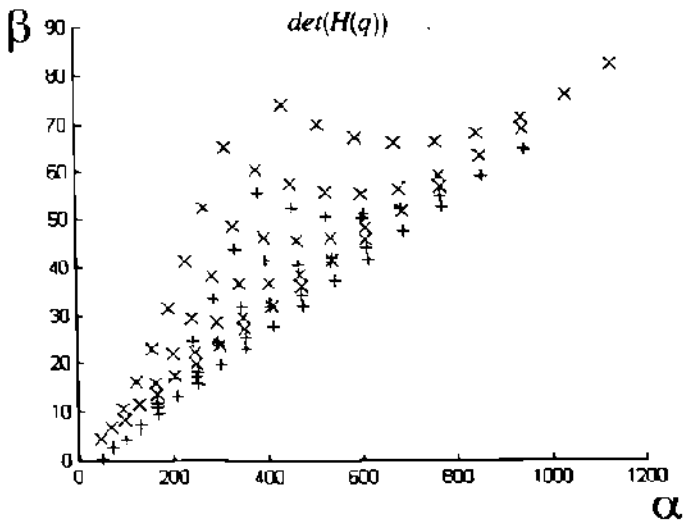

Figura 5.1 Positividad del $\det(H(q))$. Ejemplo (5.1)

Dado que existe un polinomio $p(s, \bar{q})$ estable y la matriz de Hurwitz es robustamente no singular, entonces la familia de polinomios es robustamente estable.

Capítulo 6
Controlabilidad y Observabilidad Robusta en Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo

El estudio de la controlabilidad y observabilidad robusta de sistemas lineales no ha sido de mucho interés para la mayoría de los autores. Estas observaciones son mencionadas en [43], donde se proponen condiciones necesarias y suficientes de controlabilidad para sistemas de una entrada/múltiple salida, y de observabilidad para sistemas de múltiple entrada/una salida, en cualquiera de los casos la única matriz del sistema lineal que tiene incertidumbre es la matriz A. En [42], se presenta una condición necesaria y suficiente entre la controlabilidad y la estabilizibilidad de sistemas de una entrada con incertidumbre paramétrica tales que su "matriz asociada" cumple cierta condición. En [45], se proponen algoritmos que por medio de la norma Frobenius se calcula la "distancia " a un sistema de múltiple entrada no controlable, esto es aplicando la prueba PBH.

En este capítulo se estudia la controlabilidad y observabilidad robusta en sistemas lineales invariantes en el tiempo de múltiple entrada múltiple salida con incertidumbre paramétrica. Primeramente se estudiará el caso que se le puede llamar de perturbación unidireccional, y posteriormente el de matrices intervalo.

6.1 Controlabilidad y Observabilidad Robusta en Sistemas Lineales con Perturbación Unidireccional

6.1.1 Planteamiento del Problema

Un sistema lineal invariante del tiempo (6.15) tiene incertidumbre paramétrica de tipo *perturbación unidireccional* cuando sus matrices A, B y C dependen linealmente de un parámetro real r y de matrices fijas.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \mid A = A_0 + rA_1 \in \Re^{n\times n},\ B = B_0 + rB_1 \in \Re^{n\times m} \\ y &= Cx \mid C = C_0 + rC_1 \in \Re^{p\times n},\ r \in \Re \end{aligned} \tag{6.15}$$

Dado un sistema lineal (6.15) con perturbación unidireccional teniendo fijas las matrices A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, y C_1 tales que el par $(A_0,\ B_0)$ es controlable y el par $(A_0,\ C_0)$ es observable, entonces el sistema (6.15) es controlable y observable para $r = 0$. El problema es encontrar el intervalo abierto $r \in (r_{\min},\ r_{\max})$, que contenga $r = 0$ para el cual la propiedad que se está estudiando es conservada. Del corolario (2.4) se tiene que un sistema lineal invariante en el tiempo es controlable si y sólo si UU^* es no singular. Determinar la no singularidad de este producto no es muy fácil ya que la matriz de controlabilidad de Kalman $U = [B\ AB\ A^2B\ \cdots A^{n-1}B]$ depende de A y B y éstas dependen de r, quedando entonces: $U = [(B_0 + rB_1)\ (A_0 + rA_1)\,(B_0 + rB_1)\ (A_0 + rA_1)^2\,(B_0 + rB_1)\cdots (A_0 + rA_1)^{n-1}\,(B_0 + rB_1)]$.

La matriz U depende de r, r^2, ..., r^n, entonces UU^* depende de r, r^2, ..., r^{2n} y puede ser expresado como un polinomio matricial en r de grado $2n$ y orden n como aparece en la siguiente proposición.

Proposición 6.1 [18] *Sea:* $A_0,\ A_1 \in \Re^{n\times n}$, $B_0,\ B_1 \in \Re^{n\times m}$; $A = A_0 + rA_1$, $B = B_0 + rB_1$, $r \in \Re$. *Sea* $U \in \Re^{n\times nm}$ *la matriz de controlabilidad de Kalman correspondiente al par* (A, B). *Entonces la matriz de controlabilidad* UU^* *puede ser expresada por un polinomio matricial de grado* $2n$ *y orden* n : $UU^* = M_0 + rM_1 + r^2M_2 + \cdots + r^{2n}M_{2n}$, $\quad M_i \in \Re^{n\times n}$.

Prueba. Sea: $A_0,\ A_1 \in \Re^{n\times n}$; $B_0,\ B_1 \in \Re^{n\times m}$, $A = A_0 + rA_1$, $B = B_0 + rB_1$, $r \in \Re$. Sea $U \in \Re^{n\times nm}$ la matriz de controlabilidad de Kalman $U = [U_1,\ U_2, \cdots, U_n]$ donde $U_i = (A_0 + rA_1)^{i-1}(B_0 + rB_1)$, por simple multiplicación de las matrices se obtiene que una matriz $(A_0 + rA_1)^{i-1}$ es un polinomio matricial dependiente de r de grado $i - 1$ y orden n. De la misma manera el producto $(A_0 + rA_1)^{i-1}(B_0 + rB_1)$ es un polinomio matricial dependiente de r de grado i y orden n, de aquí es obvio que el producto UU^* es un polinomio matricial dependiente de r de grado $2n$ y orden n. ■

Se tiene que el par $(A_0,\ B_0)$ es controlable, por lo tanto la matriz de controlabilidad UU^* es no singular para $r = 0$ y entonces M_0 es no singular, pero quedan dos problemas por resolver: el primero es cómo determinar los límites de r en los que UU^* pierde no singularidad, y el segundo cómo determinar los coeficientes matriciales M_k por un método más fácil que multiplicación y

factorización. Para la solución al primer problema, es necesario hacer uso de la siguiente propiedad de la matriz compañía.

Proposición 6.2 [5, 22, 39] *(Polinomio Caracteristico de la Matriz Compañía a Bloques). Sea $M \in \Re^{Nn \times Nn}$ una Matriz Compañía a Bloques:*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & I & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & I \\ -F_N & -F_{N-1} & -F_{N-2} & \cdots & -F_1 \end{bmatrix}$$

Donde F_i, $I \in \Re^{n \times n}$, entonces: $\det(\lambda I - M) = \det\left(I\lambda^N + F_1\lambda^{N-1} + F_2\lambda^{N-2} + \cdots + F_N\right)$

Debe notarse que el determinante de $UU^* = M_0 + rM_1 + r^2M_2 + \cdots + r^{2n}M_{2n}$, tiene la misma forma del determinante del polinomio característico de la matriz compañía, para poder utilizar esta propiedad es necesario obtener las expresiones de las matrices M_k.

6.1.2 Polinomio de Matricial de la matriz de Controlabilidad

El cálculo de las matrices M_k del polinomio matricial $UU^* = M_0 + rM_1 + r^2M_2 + \cdots + r^{2n}M_{2n}$, es demasiado tedioso si se tratan de obtener por simple multiplicación y factorización de UU^*, para resolver este obstáculo se propone el siguiente teorema.

Teorema 6.1 [18] *Sea UU^* el polinomio matricial de acuerdo a la proposición (6.1). Las matrices M_k son obtenidos por procedimientos derivativos como sigue:*

$$M_k = \frac{1}{k!} P_k Q_k^* \Big|_{r=0}, \quad P_k = \left[U \;\; \frac{\partial U}{\partial r} \;\; \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \;\; \cdots \;\; \frac{\partial^{\alpha-1} U}{\partial r^{\alpha-1}} \;\; \cdots \;\; \frac{\partial^k U}{\partial r^k}\right]$$

$$Q_k = \left[c_1 \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \;\; c_2 \frac{\partial^{k-1} U}{\partial r^{k-1}} \;\; \cdots \;\; c_\alpha \frac{\partial^{k+1-\alpha} U}{\partial r^{k+1-\alpha}} \;\; \cdots \;\; c_{k+1} U\right], \quad c_\alpha = \frac{k!}{(\alpha-1)!\,(k+1-\alpha)!}$$

Donde:

$$U = [U_1 \; U_2 \; \cdots \; U_n] \in \Re^{n \times nm}, \quad \frac{\partial^k U}{\partial r^k} = \left[\frac{\partial^k U_1}{\partial r^k} \; \frac{\partial^k U_2}{\partial r^k} \; \cdots \; \frac{\partial^k U_n}{\partial r^k}\right], \quad U_i = A^{i-1}B \in \Re^{n \times m}$$

$$\frac{\partial^k U_i}{\partial r^k} = \frac{\partial^k A^{i-1}}{\partial r^k} B + k \frac{\partial^{k-1} A^{i-1}}{\partial r^{k-1}} B_1, \quad \frac{\partial^k A^i}{\partial r^k} = \frac{\partial^k A^{i-1}}{\partial r^k} A + k \frac{\partial^{k-1} A^{i-1}}{\partial r^{k-1}} A_1$$

Prueba. Dada la expresión de UU^* de la proposición (6.1), $UU^* = M_0 + rM_1 + r^2 M_2 + \cdots + r^{2n} M_{2n}$, $M_i \in \Re^{n \times n}$, es obvio que cualquier matriz M_k se obtiene por medio de $M_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k (UU^*)}{\partial r^k}\Big|_{r=0}$. Para obtener las derivadas parciales de UU^* con respecto a r es necesario obtener las siguientes derivadas. Dado que $A = A_0 + rA_1$, entonces $\frac{\partial A}{\partial r} = A_1$, $\frac{\partial A^2}{\partial r} = \frac{\partial (AA)}{\partial r} = A_1 A + A A_1$, $\frac{\partial A^3}{\partial r} = \frac{\partial (A^2 A)}{\partial r} = \frac{\partial A^2}{\partial r} A + A^2 A_1$, de donde se obtiene:

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial r} = \frac{\partial A^{\beta-1}}{\partial r} A + A^{\beta-1} A_1 \tag{6.16}$$

Esta última derivada sirve de base para obtener: $\frac{\partial^2 A^\beta}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 A^{\beta-1}}{\partial r^2} A + 2 \frac{\partial A^{\beta-1}}{\partial r} A_1$, $\frac{\partial^3 A^\beta}{\partial r^3} = \frac{\partial^3 A^{\beta-1}}{\partial r^3} A + 3 \frac{\partial^2 A^{\beta-1}}{\partial r^2} A_1$, de donde se llega a:

$$\frac{\partial^k A^\beta}{\partial r^k} = \frac{\partial^k A^{\beta-1}}{\partial r^k} A + k \frac{\partial^{k-1} A^{\beta-1}}{\partial r^{k-1}} A_1 \tag{6.17}$$

Dado que $U_i = A^{i-1} B$, $A = A_0 + rA_1$ y $B = B_0 + rB_1$, entonces $\frac{\partial U_i}{\partial r} = \frac{\partial A^{i-1}}{\partial r} B + A^{i-1} B_1$, $\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 A^{i-1}}{\partial r^2} B + 2 \frac{\partial A^{i-1}}{\partial r} B_1$, de donde se obtiene:

$$\frac{\partial^k U_i}{\partial r^k} = \frac{\partial^k A^{i-1}}{\partial r^k} B + k \frac{\partial^{k-1} A^{i-1}}{\partial r^{k-1}} B_1 \tag{6.18}$$

La derivada parcial con respecto a r del producto UU^* es $\frac{\partial (UU^*)}{\partial r} = U \frac{\partial U^*}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} U^*$ que se puede expresar como el producto de dos matrices $P_1 = \begin{bmatrix} U & \frac{\partial U}{\partial r} \end{bmatrix}$, $Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} & U \end{bmatrix}$ tales que $\frac{\partial (UU^*)}{\partial r} = P_1 Q_1^*$. La segunda derivada parcial del producto UU^* es la primer derivada parcial del producto $P_1 Q_1^*$, $\frac{\partial^2 (UU^*)}{\partial r^2} = P_1 \frac{\partial Q_1^*}{\partial r} + \frac{\partial P_1}{\partial r} Q_1^*$. Al substituir P_1 y Q_1 en función de U resulta $\frac{\partial^2 (UU^*)}{\partial r^2} = U \frac{\partial^2 U^*}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial U^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} U^*$, que se puede expresar como el producto de dos matrices $P_2 = \begin{bmatrix} U & \frac{\partial U}{\partial r} & \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \end{bmatrix}$, $Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} & 2 \frac{\partial U}{\partial r} & U \end{bmatrix}$, tales que $\frac{\partial^2 (UU^*)}{\partial r^2} = P_2 Q_2^*$. De la misma manera se obtiene la tercer derivada en donde resulta $P_3 = \begin{bmatrix} U & \frac{\partial U}{\partial r} & \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} & \frac{\partial^3 U}{\partial r^3} \end{bmatrix}$,

$Q_3 = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial r^3} \;\; 3\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \;\; 3\frac{\partial U}{\partial r} \;\; U\right]$, $\frac{\partial^3 (UU^*)}{\partial r^3} = P_3 Q_3^*$. De las operaciones hechas hasta aquí se puede suponer:

$$\frac{\partial^k (UU^*)}{\partial r^k} = P_k Q_k^* \tag{6.19}$$

$$P_k = \left[U \;\; \frac{\partial U}{\partial r} \;\; \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \;\; \cdots \;\; \frac{\partial^{\alpha-1} U}{\partial r^{\alpha-1}} \;\; \cdots \;\; \frac{\partial^{k-1} U}{\partial r^{k-1}} \;\; \frac{\partial^k U}{\partial r^k}\right]$$

$$Q_k = \left[c_1^k \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \;\; c_2^k \frac{\partial^{k-1} U}{\partial r^{k-1}} \;\; \cdots \;\; c_\alpha^k \frac{\partial^{k+1-\alpha} U}{\partial r^{k+1-\alpha}} \;\; \cdots \;\; c_k^k \frac{\partial U}{\partial r} \;\; U\right], \quad c_\alpha^k = \frac{k!}{(\alpha-1)!\,(k+1-\alpha)!}$$

Tomando como verdadera (6.19), se obtiene $\frac{\partial^{k+1}(UU^*)}{\partial r^{k+1}} = P_k \frac{\partial Q_k^*}{\partial r} + \frac{\partial P_k}{\partial r} Q_k^*$, $\frac{\partial Q_k}{\partial r} = \left[c_1^k \frac{\partial^{k+1} U}{\partial r^{k+1}} \;\; c_2^k \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \;\; c_3^k \frac{\partial^{k-1} U}{\partial r^{k-1}} \cdots c_\alpha^k \frac{\partial^{k+2-\alpha} U}{\partial r^{k+2-\alpha}} \cdots c_k^k \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{\partial U}{\partial r}\right]$, $\frac{\partial P_k}{\partial r} = \left[\frac{\partial U}{\partial r} \;\; \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \;\; \frac{\partial^3 U}{\partial r^3} \cdots \frac{\partial^\alpha U}{\partial r^\alpha} \cdots \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \;\; \frac{\partial^{k+1} U}{\partial r^{k+1}}\right]$, de donde se obtienen los siguientes productos: $P_k \frac{\partial Q_k^*}{\partial r} = \left[c_1^k U \;\; \frac{\partial^{k+1} U^*}{\partial r^{k+1}} \;\; c_2^k \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^k U^*}{\partial r^k} \;\; c_3^k \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{\partial^{k-1} U^*}{\partial r^{k-1}} \cdots c_\alpha^k \frac{\partial^{\alpha-1} U}{\partial r^{\alpha-1}} \frac{\partial^{k+2-\alpha} U^*}{\partial r^{k+2-\alpha}} \cdots \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \frac{\partial U^*}{\partial r}\right]$, $\frac{\partial P_k}{\partial r} Q_k^* = \left[c_1^k \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^k U^*}{\partial r^{ki}} \;\; c_2^k \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{\partial^{k-1} U^*}{\partial r^{k-1}} \;\; c_3^k \frac{\partial^3 U}{\partial r^3} \frac{\partial^{k-2} U^*}{\partial r^{k-2}} \cdots c_\alpha^k \frac{\partial^\alpha U}{\partial r^\alpha} \frac{\partial^{k+1-\alpha} U^*}{\partial r^{k+1-\alpha}} \cdots c_k^k \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \frac{\partial U^*}{\partial r} \;\; \frac{\partial^{k+1} U}{\partial r^{k+1}} U^*\right]$. Finalmente se obtiene la derivada $\frac{\partial^{k+1}(UU^*)}{\partial r^{k+1}} = \left[c_1^k U \frac{\partial^{k+1} U^*}{\partial r^{k+1}} \;\; (c_1^k + c_2^k) \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^k U^*}{\partial r^k} \;\; (c_2^k + c_3^k) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{\partial^{k-1} U^*}{\partial r^{k-1}} \cdots (c_{\alpha-1}^k + c_\alpha^k) \frac{\partial^{\alpha-1} U}{\partial r^{\alpha-1}} \frac{\partial^{k+2-\alpha} U^*}{\partial r^{k+2-\alpha}} \;\; (c_\alpha^k + c_{\alpha+1}^k) \frac{\partial^\alpha U}{\partial r^\alpha} \frac{\partial^{k+1-\alpha} U^*}{\partial r^{k+1-\alpha}} \cdots (1 + c_k^k) \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \frac{\partial U^*}{\partial r} \;\; \frac{\partial^{k+1} U}{\partial r^{k+1}} U^*\right]$, la expresión correspondiente a la derivada $\frac{\partial^{k+1}(UU^*)}{\partial r^{k+1}}$ es:

$$\frac{\partial^{k+1}(UU^*)}{\partial r^{k+1}} = \left[\begin{array}{c} c_1^{k+1} U \frac{\partial^{k+1} U^*}{\partial r^{k+1}} \;\; c_2^{k+1} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^k U^*}{\partial r^k} \;\; c_3^{k+1} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{\partial^{k-1} U^*}{\partial r^{k-1}} \;\; \cdots \\ c_\alpha^{k+1} \frac{\partial^{\alpha-1} U}{\partial r^{\alpha-1}} \frac{\partial^{k+2-\alpha} U^*}{\partial r^{k+2-\alpha}} \;\; c_{\alpha+1}^{k+1} \frac{\partial^\alpha U}{\partial r^\alpha} \frac{\partial^{k+1-\alpha} U^*}{\partial r^{k+1-\alpha}} \;\; \cdots \;\; c_{k+1}^{k+1} \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \frac{\partial U^*}{\partial r} \;\; \frac{\partial^{k+1} U}{\partial r^{k+1}} U^* \end{array}\right]$$

Se puede ver de la expresión de $\frac{\partial^{k+1}(UU^*)}{\partial r^{k+1}}$ que los coeficientes que intervienen en esta derivada se obtienen de la derivada anterior de la siguiente manera: $c_\alpha^{k+1} = c_{\alpha-1}^k + c_\alpha^k = \frac{k!}{(\alpha-2)!\,(k+2-\alpha)!} + \frac{k!}{(\alpha-1)!\,(k+1-\alpha)!}$, de donde resulta: $c_\alpha^{k+1} = \frac{(k+1)!}{(\alpha-1)!\,(k+2-\alpha)!}$.

Dado que las ecuaciones (6.19) tomadas como verdaderas, correspondientes a la derivada $\frac{\partial^k (UU^*)}{\partial r^k}$

se cumplen para la derivada $\dfrac{\partial^{k+1}(UU^*)}{\partial r^{k+1}}$, entonces por inducción matemática las ecuaciones (6.19) son verdaderas. ■

Debe notarse que la ecuación (6.17) de $\dfrac{\partial^k A^\beta}{\partial r^k}$ es recurrente y su resultado se obtiene por operaciones solamente algebraicas. Así también para A^β la derivada más alta que se obtiene es $\dfrac{\partial^\beta A^\beta}{\partial r^\beta}$ y la β más grande es n. Por otra parte la derivada más alta que se obtiene de U_i es $\dfrac{\partial^i U_i}{\partial r^i}$, y la i más grande es n. Una vez obtenidas todas las derivadas $\dfrac{\partial^k A^\beta}{\partial r^k}$ desde $\beta = 1$ hasta n, se obtienen las derivadas $\dfrac{\partial^k U_i}{\partial r^k}$ y $\dfrac{\partial^k U}{\partial r^k}$, que son empleadas en P_k y Q_k de donde finalmente se obtiene la matriz M_k.

6.1.3 Controlabilidad Robusta en Perturbación Unidireccional

El sistema lineal con perturbación unidireccional descrito en (6.15) es controlable para $r = 0$, y al incrementar o disminuir r la controlabilidad se puede perder. El problema es encontrar los límites del intervalo abierto que contiene a $r = 0$: $r_{\min} < r < r_{\max}$ donde la controlabilidad se pierde, lo cual se determina mediante el siguiente teorema.

Teorema 6.2 [18] *Sean A, B matrices de un sistema lineal con perturbación unidireccional, $A = A_0 + rA_1$, $B = B_0 + rB_1$ tales que A_0, $A_1 \in \Re^{n\times n}$ y B_0, $B_1 \in \Re^{n\times m}$, y el par $(A_0,\ B_0)$ es controlable. Sea U la matriz de controlabilidad de Kalman, entonces el par $(A,\ B)$ es controlable en el intervalo abierto de r que contiene a $r = 0$:*

$$r_{\min} < r < r_{\max}$$

$$r_{\min} = \frac{1}{\lambda^-_{\Re\min}(M)}, \quad r_{\max} = \frac{1}{\lambda^+_{\Re\max}(M)}$$

Donde M es la matriz compañía de la proposición (6.2) generada tomando $F_i = M_0^{-1}M_i$, $\lambda^-_{\Re\min}(M)$ es el mínimo valor característico real negativo de M y $\lambda^+_{\Re\max}(M)$ es el máximo valor característico real positivo de M.

Prueba. Sean $A \in \Re^{n\times n}$ y $B \in \Re^{n\times m}$ las matrices descritas en el enunciado y sea U la matriz de controlabilidad de Kalman, el par $(A,\ B)$ es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad

de Kalman U tiene rango n o equivalentemente UU^* es no singular.

Dado que $(A_0,\ B_0)$ es controlable, entonces la matriz $U|_{\tau=0} = U_0$ tiene rango n y $U_0U_0^* = M_0$ es no singular, por lo tanto se puede factorizar en el polinomio matricial del producto: $UU^* = M_0\left(I + M_0^{-1}M_1\tau + M_0^{-1}M_2\tau^2 + \cdots + M_0^{-1}M_{2n}\tau^{2n}\right)$.

Dado que el par $(A,\ B)$ es controlable a $\tau = 0$, no hay necesidad de analizar la ecuación anterior en $\tau = 0$. Entonces podemos emplear la variable $1/\tau$ para factorizar τ^{2n} en la ecuación anterior y darle la misma forma del polinomio característico de la matriz compañía de la proposición (6.2) como se muestra en seguida:

$$UU^* = \tau^{2n}M_0\left(I\,(1/\tau)^{2n} + M_0^{-1}M_1\,(1/\tau)^{2n-1} + \cdots + M_0^{-1}M_{2n}\right) \tag{6.20}$$

El objetivo es determinar los límites de τ : $\tau_{\min}$ y $\tau_{\max}$ en los cuales el par $(A,\ B)$ pierde controlabilidad y esto sucede cuando $\det(UU^*) = 0$, tomando en cuenta que el análisis se está haciendo para $\tau \neq 0$ y que M_0 es no singular, entonces el par $(A,\ B)$ es controlable si y sólo si se satisface:

$$\det\left(I\,(1/\tau)^{2n} + M_0^{-1}M_1\,(1/\tau)^{2n-1} + \cdots + M_0^{-1}M_{2n}\right) \neq 0 \tag{6.21}$$

De la proposición (6.2) se puede ver que si formamos la matriz compañía tomando $F_i = M_0^{-1}M_i$ desde i igual a 1 hasta $2n$ de tal forma que N de la proposición (6.2) es $N = 2n$, entonces el polinomio característico de la matriz M, $\det(\lambda I - M)$, es igual al determinante(6.21) si $\lambda = 1/\tau$.

$$M(F) \mid F_i = M_0^{-1}M_i$$

$$\det(\lambda I - M) = \det\left(I\lambda^{2n} + M_0^{-1}M_1\lambda^{2n-1} + \cdots + M_0^{-1}M_{2n}\right) \tag{6.22}$$

El determinante del lado derecho toma el valor de cero cuando λ toma un valor característico de M; dado que τ es un real, entonces el determinante (6.21) es diferente de cero si y sólo si $1/\tau$ es diferente de cualquier valor característico real de M.

Si hacemos $\tau = \varepsilon > 0$, donde ε es un valor positivo arbitrariamente pequeño, $1/\tau$ será arbitrariamente grande y si $\lambda^+_{\Re\max}(M)$ es un valor finito, entonces $\lambda^+_{\Re\max}(M) < 1/\tau$, y así el determinante (6.21) es diferente de cero y el par $(A,\ B)$ es controlable. Si τ aumenta de valor, $1/\tau$ disminuye, de tal manera que el máximo valor de τ posible es cuando $1/\tau_{\max} = \lambda^+_{\Re\max}(M)$.

Si hacemos $r = \varepsilon < 0$, donde ε es un valor negativo con magnitud arbitrariamente pequeña, $1/r$ será arbitrariamente grande en magnitud con signo negativo y si $\lambda^{-}_{\Re\min}(M)$ es diferente de menos infinito, entonces $1/r < \lambda^{-}_{\Re\min}(M)$ y así el determinante (6.21) es diferente de cero y el par $(A,\ B)$ es controlable. Si r aumenta de magnitud pero continua negativa, $1/r$ disminuye de magnitud pero continua negativa, de tal manera que el mínimo valor de r posible es cuando $1/r_{\min} = \lambda^{-}_{\Re\min}(M)$, concluyendo así que el par $(A,\ B)$ es controlable si y sólo si:

$$r_{\min} < r < r_{\max}$$

$$r_{\min} = \frac{1}{\lambda^{-}_{\Re\min}(M)}; \quad r_{\max} = \frac{1}{\lambda^{+}_{\Re\max}(M)} \blacksquare$$

Debe de notarse que cuando no existe valor característico real positivo de la matriz M, entonces r puede tomar cualquier valor real positivo. Ya que $1/r$ nunca será un valor característico real positivo de la matriz M, el determinante (6.21) nunca tomará el valor de cero y el par $(A,\ B)$ no perderá controlabilidad, concluyendo así que cuando no existe valor característico real positivo de la matriz M, se tomará $\lambda^{+}_{\Re\max}(M) = 0_{+}$ y $r_{\max} = \infty$.

Cuando la matriz M no posee valor característico real negativo, entonces r puede tomar cualquier valor real negativo, ya que $1/r$ nunca será un valor característico real negativo de la matriz M, el determinante (6.21) nunca tomará el valor de cero y el par $(A,\ B)$ no perderá controlabilidad, entonces cuando no existe valor característico real negativo de la matriz M, se tomará $\lambda^{-}_{\Re\min}(M) = 0_{-}$ y $r_{\min} = -\infty$.

Ejemplo 6.1 *Dadas las matrices A_0, A_1, B_0, B_1 con el par $(A_0,\ B_0)$ controlable, determinar el intervalo abierto de r en el cual se preserva la controlabilidad del par $(A,\ B)$, donde $A = A_0 + rA_1$ y $B = B_0 + rB_1$.*

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Mediante un programa de cálculo numérico se obtienen las matrices M_k de acuerdo al teorema (6.1), se forma con ellas la matriz M de acuerdo al teorema (6.2). Una vez obtenida la matriz M se obtienen los valores caracteristicos y se obtiene el máximo y minimo de los valores caracteristicos reales. Los valores característicos más cercanos a los números reales son:

$$\begin{aligned} \lambda_{21} &= -1.0000 \times 10^0 + 1.4414 \times 10^{-6}i & \lambda_{22} &= -1.0000 \times 10^0 - 1.4414 \times 10^{-6}i \\ \lambda_{29} &= \ \ 7.2615 \times 10^{-14} + 3.7177 \times 10^{-7}i & \lambda_{30} &= -7.2615 \times 10^{-14} - 3.7177 \times 10^{-7}i \\ \lambda_{31} &= 3.9423 \times 10^{-13} + 2.2123 \times 10^{-7}i & \lambda_{32} &= 3.9423 \times 10^{-13} - 2.2123 \times 10^{-7}i \end{aligned}$$

Se puede ver que por errores de cálculo numérico no hay ni un solo valor caracteristico con valor real puro, por lo cual hay que despreciar la parte imaginaria cuando ésta es demasiado pequeña. Considerando así: $\lambda^-_{\min} = -1$ y $\lambda^+_{\max} = 0$, de donde se obtiene $\lambda^-_{\Re\min} = -1$ y $\lambda^+_{\Re\max} = 0$ de donde obtenemos $r_{\min} = -1$ y $r_{\max} = \infty$, resultando así:

$$-1 < r < \infty.$$

En el caso particular que $A_1 = A_0$, $B_1 = B_0$ y el par (A_0, B_0) es controlable, entonces $A = (1+r)A_0$, $B = (1+r)B_0$ y la matriz de controlabilidad de Kalman $U = [(1+r)B_0 \ (1+r)^2 A_0 B_0 \ (1+r)^3 A_0^2 B_0 \ \cdots (1+r)^n A_0^{n-1} B_0]$. Dado que el par (A_0, B_0) es controlable y que el rango de $[(1+r)B_0 \ (1+r)^2 A_0 B_0 \ (1+r)^3 A_0^2 B_0 \ \cdots (1+r)^n A_0^{n-1} B_0]$ es igual al de $[B_0 \ A_0 B_0 \ A_0^2 B_0 \ \cdots A_0^{n-1} B_0]$, entonces el par (A, B) es controlable en el intervalo abierto: $-1 < r < \infty$.

6.1.4 Observabilidad Robusta en Perturbación Unidireccional

Se tiene un sistema lineal invariante en el tiempo con perturbación unidireccional (6.15) y el par (A_0, C_0) observable, entonces (A, C) es observable para $r = 0$. Se trata de determinar el intervalo abierto $r \in (r_{\min}, r_{\max})$ para el cual la observabilidad del par (A, C) es conservada, por otra

parte por el teorema de dualidad [13] se tiene que un sistema lineal E es observable si y sólo si el sistema lineal dual E^* es controlable, entonces el problema de observabilidad se resuelve mediante el teorema de dualidad, y el teorema (6.2) de controlabilidad robusta en perturbación unidireccional. Tomando en consideración que la independencia lineal de los renglones de la matriz de controlabilidad U no se afecta si se cambia A por $-A$, entonces la observabilidad robusta en perturbación unidireccional se determina de acuerdo al siguiente corolario que no requiere más demostración.

Corolario 6.3 [18] *Sean A^*, B^*, C^*, D^* el complejo conjugado de las matrices A, B, C, D, del sistema lineal con perturbación unidireccional (6.15) con el par (A_0, C_0) observable, sea U la matriz de controlabilidad de Kalman, sea UU^* el polinomio matricial construido con A^* en vez de A, y C^* en lugar de B. Sea M la matriz compañía construida con las matrices M_k del polinomio matricial UU^*, entonces el intervalo abierto en τ para conservar la observabilidad del par (A, C) esta definido por: $\tau_{\min} < \tau < \tau_{\max}$ donde $\tau_{\min} = \dfrac{1}{\lambda^-_{\Re\min}(M)}$ y $\tau_{\max} = \dfrac{1}{\lambda^+_{\Re\max}(M)}$*

Es obvio que en la aplicación de este corolario se hacen las mismas consideraciones que en el teorema (6.2) acerca de los casos cuando no existe valor característico real positivo o negativo.

6.2 Controlabilidad y Observabilidad Robusta en Sistemas Lineales con Matrices Intervalo

Dado un sistema lineal invariante en el tiempo con dependencia paramétrica en sus matrices (6.23), diremos que el par $(A(q),\ B(q))$ es *robustamente controlable* si y sólo si la controlabilidad del par se mantiene para todo q elemento de Q. De la misma manera se dirá que el par $(A(q),\ C(q))$ es *robustamente observable* si y sólo si la observabilidad del par se mantiene para todo q elemento de Q, de acuerdo al corolario (2.4) se puede establecer el siguiente hecho.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(q)x + B(q)u \mid A(q) \in \Re^{n\times n},\ B(q) \in \Re^{n\times m},\ Q \subset P \subset \Re^{\ell} \\ y &= C(q)x \mid C(q) \in \Re^{p\times n} \end{aligned} \tag{6.23}$$

Hecho 6.1 *El par $(A(q),\ B(q))$ es robustamente controlable si y sólo si el determinante de $U(q)U^T(q)$ es diferente de cero para todo q elemento de Q.*

Dada la dependencia paramétrica de las matrices y de acuerdo al hecho anterior, el problema de controlabilidad robusta se mapeó a un problema de positividad de una función polinómica que se puede resolver por medio del teorema de descomposición de signo de la matriz de controlabilidad (4.17), y aplicando en forma gráfica el teorema de determinación de signo mediante partición de cajas (4.14), como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.2 *Dado el sistema lineal invariante en el tiempo $\dot{x} = A(q)x + B(q)u$, con incertidumbre paramétrica en sus matrices, con una caja de incertidumbre paramétrica $Q \subset \Re^2$ tal que $q_i \in [0,\ 1]$, determinar si el par $(A(q),\ B(q))$ es robustamente controlable.*

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ q_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & q_3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para generar las ecuaciones del teorema (4.17), primeramente se obtienen las matrices $A(q)$ y $B(q)$ en su representación $(\alpha,\ \beta)$, que en este caso son iguales dado que los elementos no poseen parte negativa:

$$A(q)_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ q_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(q)_\beta = \begin{bmatrix} 0 & q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ q_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(q)_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & q_3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(q)_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & q_3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez teniendo $A(q)$ y $B(q)$ en su representación $(\alpha,\ \beta)$, se genera un programa de cálculo numérico para obtener las partes independiente, lineal y no-lineal de cada parte α y β de la matriz de controlabilidad. Las ecuaciones de cada parte se generan para una caja Γ tal que $q = \mu^{\min} + \delta$, en el siguiente orden:

$$A_\alpha^{\min} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \mu_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_\beta^{\min} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \mu_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_\alpha^{\min} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mu_3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \; B_\beta^{\min} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mu_3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(q)_{\alpha L} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A(q)_{\beta L} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(q)_{\alpha L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \delta_3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B(q)_{\beta L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \delta_3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Parte lineal de la matriz de controlabilidad: $(A^2)_{\alpha L} = A_\alpha^{\min} A_{\alpha L} + A_{\alpha L}\left(A_\alpha^{\min}\right)$, $(A^2)_{\beta L} = A_\beta^{\min} A_{\beta L} + A_{\beta L} A_\beta^{\min}$, $U_{1\alpha L} = B_{\alpha L}$, $U_{1\beta L} = B_{\beta L}$, $U_{2\alpha L} = A_\alpha^{\min} B_{\alpha L} + A_{\alpha L} B_\alpha^{\min}$, $U_{2\beta L} = A_\beta^{\min} B_{\beta L} + A_{\beta L} B_\beta^{\min}$, $U_{3\alpha L} = \left(A_\alpha^{\min}\right)^2 B_{\alpha L} + \left(A_\alpha^2\right)_L B_\alpha^{\min}$, $U_{3\beta L} = \left(A_\beta^{\min}\right)^2 B_{\beta L} + \left(A_\beta^2\right)_L B_\beta^{\min}$.

$U_{\alpha L} = [U_{1\alpha L}, \; U_{2\alpha L}, \; U_{3\alpha L}]$, $U_{\beta L} = [U_{1\beta L}, \; U_{2\beta L}, \; U_{3\beta L}]$.

Parte independiente de la matriz de controlabilidad: $U_{1\alpha}^{\min} = B_\alpha^{\min}$, $U_{1\beta}^{\min} = B_\beta^{\min}$, $U_{2\alpha}^{\min} = A_\alpha^{\min} B_\alpha^{\min}$, $U_{2\beta}^{\min} = A_\beta^{\min} B_\beta^{\min}$, $U_{3\alpha}^{\min} = \left(A_\alpha^{\min}\right)^2 B_\alpha^{\min}$, $U_{3\beta}^{\min} = \left(A_\beta^{\min}\right)^2 B_\beta^{\min}$, $U_\alpha^{\min} = [U_{1\alpha}^{\min}, \; U_{2\alpha}^{\min}, \; U_{3\alpha}^{\min}]$, $U_\beta^{\min} = [U_{1\beta}^{\min}, \; U_{2\beta}^{\min}, \; U_{3\beta}^{\min}]$.

$\left(UU^T\right)_\alpha^{\min} = U_\alpha^{\min}\left(U_\alpha^{\min}\right)^T$, $\left(UU^T\right)_\beta^{\min} = U_\beta^{\min}\left(U_\beta^{\min}\right)^T$.

Partes lineal y no-lineal de la matriz de controlabilidad: $\left(U(\delta)U^T(\delta)\right)_{\alpha L} = U_\alpha^{\min}\left(U_{\alpha L}(\delta)\right)^T + U_{\alpha L}(\delta)\left(U_\alpha^{\min}\right)^T$, $\left(U(\delta)U^T(\delta)\right)_{\beta L} = U_\beta^{\min}\left(U_{\beta L}(\delta)\right)^T + U_{\beta L}(\delta)\left(U_\beta^{\min}\right)^T$.

$\left(U(\delta)U^T(\delta)\right)_{\alpha N} = \left(U(q)U^T(q)\right)_\alpha - \left(UU^T\right)_\alpha^{\min} - \left(U(\delta)U^T(\delta)\right)_{\alpha L}$

$\left(U(\delta)U^T(\delta)\right)_{\beta N} = \left(U(q)U^T(q)\right)_\beta - \left(UU^T\right)_\beta^{\min} - \left(U(\delta)U^T(\delta)\right)_{\beta L}$.

Con las ecuaciones de la parte lineal de las partes α y β de la matriz de controlabilidad, se obtiene el determinante en los 8 vértices de la caja Γ para obtener el valor lineal mínimo: $det_\alpha\left(UU^T\right)_{\alpha L\min}$, $det_\alpha\left(UU^T\right)_{\beta L\min}$.

Con las ecuaciones de las partes lineal e independiente de cada parte α y β de la matriz de controlabilidad, se obtienen las partes α y β de la parte no lineal en

$\delta^{\max}$: $\left(U(\delta^{\max})U^T(\delta^{\max})\right)_{\alpha N} = (U(\mu^{\min} + \delta^{\max})U^T(\mu^{\min} + \delta^{\max}))_\alpha - \left(UU^T\right)_\alpha^{\min} - \left(U(\delta^{\max})U^T(\delta^{\max})\right)_{\alpha L}$, $\left(U(\delta^{\max})U^T(\delta^{\max})\right)_{\beta N} = (U(\mu^{\min} + \delta^{\max})U^T(\mu^{\min} + \delta^{\max}))_\beta - \left(UU^T\right)_\beta^{\min} - \left(U(\delta^{\max})U^T(\delta^{\max})\right)_{\beta L}$.

Con los valores anteriores se procede a calcular la cota mínima del inciso "a" del teorema del polígono (4.13) $f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max}) \leq f(q)$, que en representación $(\alpha,\ \beta)$ de acuerdo al hecho (4.6) es: $\left(det_\alpha\left(U(q)U^T(q)\right)\right)_{\alpha\ \cot a\ \min} = det_\alpha\left(\left(UU^T\right)_\alpha^{\min}\right) + det_\alpha\left(UU^T\right)_{\alpha L\min} + \frac{1}{2}\left(\left(U(\delta^{\max})U^T(\delta^{\max})\right)_{\alpha N} - \left(U(\delta^{\max})U^T(\delta^{\max})\right)_{\beta N}\right)$, $\left(\det\left(U(q)U^T(q)\right)\right)_{\beta\ \cot a\ \min} = det_\alpha\left(\left(UU^T\right)_\alpha^{\min}\right) + det_\alpha\left(UU^T\right)_{\alpha L\min} - \frac{1}{2}\left(\left(U(\delta^{\max})U^T(\delta^{\max})\right)_{\alpha N} - \left(U(\delta^{\max})U^T(\delta^{\max})\right)_{\beta N}\right)$.

Con el programa de cálculo numérico descrito se obtiene la cota mínima del determinante de controlabilidad, con una división de variable de 35 partes iguales, resulta la gráfica de la figura (6.1) de donde se puede ver que el determinante es positivo para todo valor de q elemento de Q, ya que se satisface el teorema (4.14), por lo tanto el $(A(q),\ B(q))$ es robustamente controlable.

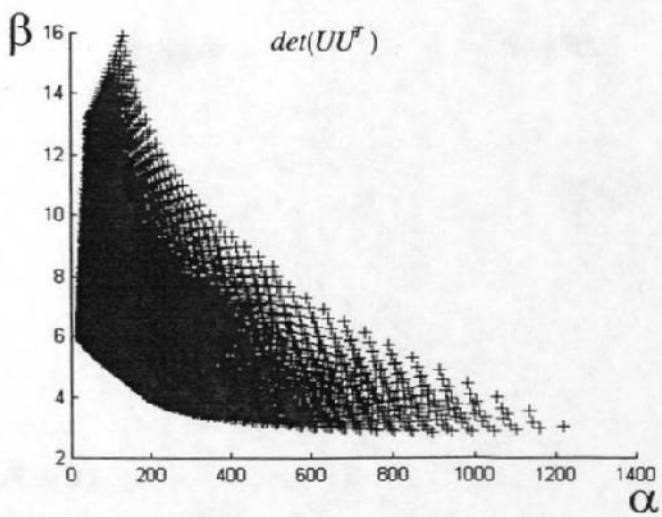

Figura 6.1 Positividad del $\det(U(q)U^T(q))$. Ejemplo (6.2)

El problema de observabilidad robusta, mediante el teorema de dualidad se convierte en un problema de controlabilidad robusta. Debe notarse que los teoremas empleados en el ejemplo anterior, son válidos para cualquier dimensión de las matrices, y para cualquier número de parámetros, pero el trabajo de cómputo y el tiempo de solución se incrementa al aumentar ambos como sucede en cualquier otro algoritmo.

Capítulo 7
Aplicaciones

En este capítulo se analizan dos aplicaciones de descomposición de signo a la estabilidad robusta de casos reales, uno de ellos es un avión militar F4-E descrito por Ackermann [2], y el otro caso es la máquina Fiat descrita por Barmish [5].

7.1 Avión Militar F4-E

El modelo simplificado del avión militar F4-E, figura (7.1) [2], es descrito por J. Ackermann [2], este avión es una modificación en la que agregaron unos alerones delanteros ("canards") con los que se gano maniobrabilidad pero se perdió estabilidad, sobre todo en baja velocidad y baja altitud.

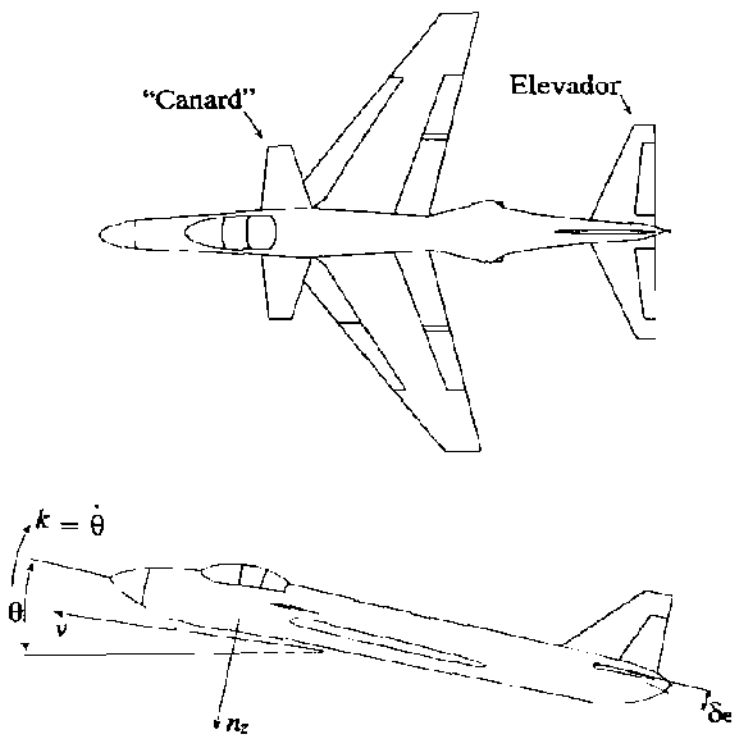

Figura 7.1 Avión militar F4-E

El modelo simplificado y linealizado es $\dot{x} = Ax + Bu$, el estado es $x = [n_z \; k \; \delta_e]^T$, donde n_z es la aceleración normal, $k = \dot{\theta}$ es la velocidad de pendiente θ, y δ_e es el ángulo del elevador (alerones

traseros), la señal de entrada al elevador δ_{ecom} y la señal de entrada a los "canards" δ_{ccom} dependen de una única entrada u, $\delta_{ecom} = u$ y $\delta_{ccom} = -0.7u$. La matriz A está en función de seis parámetros físicos a_{ij}, pero en el polinomio característico sólo intervienen cuatro parámetros físicos que son: a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

Ackermann muestra los valores de los parámetros físicos a_{ij} a diferentes condiciones de vuelo, de las cuales tomamos dos puntos de operación: I y II que aparecen en la tabla (7.1), se sabe que el modelo es estable en las condiciones II con los siguientes valores característicos: $\lambda_1 = -14.0$, $\lambda_2 = -0.8706 - 4.2973j$ y $\lambda_3 = -0.8706 + 4.2973j$ y que no es estable en las condiciones I.

	I	II
$Mach$	0.9	1.5
$Altitud$	35000	35000
a_{11}	-0.667	-0.5162
a_{12}	18.11	26.96
a_{21}	0.08201	-0.6896
a_{22}	-0.6587	-1.225

Tabla (7.1) Condiciones de vuelo. Avión militar F4-E

Para aplicar la descomposición de signo en el análisis de la estabilidad robusta del sistema, es necesario primeramente hacer una transformación de coordenadas $a_{ij} = a_{ijII} + (a_{ijI} - a_{ijII})q_k$ para llevar la caja de incertidumbre paramétrica a un cono convexo positivo, en este caso se convierte cada parámetro a_{ij} en una función de un parámetro $q_k \in [0,\ 1]$ tal que $Q \subset P$, como aparece en seguida:

$$\begin{aligned} a_{11}(q) &= -0.5162 - 0.1508q_1 \\ a_{12}(q) &= 26.96 - 8.8500q_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{21}(q) &= -0.6896 + 0.7716q_3 \\
a_{22}(q) &= -1.225 + 0.5663q_4
\end{aligned}
$$

Debe notarse que cuando el parámetro $q_k = 0$, la $a_{ij} = a_{ijII}$ y cuando $q_k = 1$, la $a_{ij} = a_{ijI}$, mediante esta transformación de coordenadas se obtiene la matriz $A(q)$ de donde se obtiene el polinomio característico $p(s,q)$ con coeficientes $c_i(q)$ con dependencia multilineal como aparecen abajo.

$$
p(s,q) = c_0(q) + c_1(q)s + c_2(q)s^2 + c_3(q)s^3
$$

$$
\begin{aligned}
c_0(q) &= 269.14 - 85.441q_2 - 291.23q_3 + 95.601q_3q_2 - 4.0925q_4 + 2.5862q_1 - 1.1956q_1q_4 \\
c_1(q) &= 43.601 - 6.103q_2 - 20.802q_3 + 6.8287q_3q_2 - 8.2205q_4 + 2.2959q_1 \\
&\quad -8.5398 \times 10^{-2}q_1q_4 \\
c_2(q) &= 15.741 + .1508q_1 - .5663q_4 \\
c_3(q) &= 1
\end{aligned}
$$

Como muestra de la aplicación de descomposición de signo en el análisis de la estabilidad robusta de la familia de polinomios, se analiza en el sector de dominio de los parámetros físicos $q_i \in [0,\ 0.75]$, entonces se toma $Q = \{q \mid q_i \in [0,\ 0.75],\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ La estabilidad robusta de la familia de polinomios es analizada por el teorema (5.5) de Frazer y Duncan que dice que una familia de polinomios es robustamente estable si y sólo si existe al menos un elemento estable y el determinante de la matriz de Hurwitz es diferente de cero para toda q elemento de Q. Se sabe que el sistema es estable en el punto II que es $q_i = 0$ y el determinante de la matriz de Hurwitz es analizado dividiendo cada parámetro q_i en 8 partes iguales, se puede ver en la figura (7,2) que aparecen positivos todos los vértices mínimo y máximo " $\times$ " de cada una de las cajas Γ, así como la cota mínima "+" de cada caja también es positiva, entonces de acuerdo al teorema de determinación de signo mediante partición de cajas (4.14), el determinante de $H(q)$ es positivo para toda $q \in Q$ y dado que el sistema es estable en el punto II, entonces de acuerdo al teorema (5.5) la familia de polinomios $P(s,q)$ es robustamente estable.

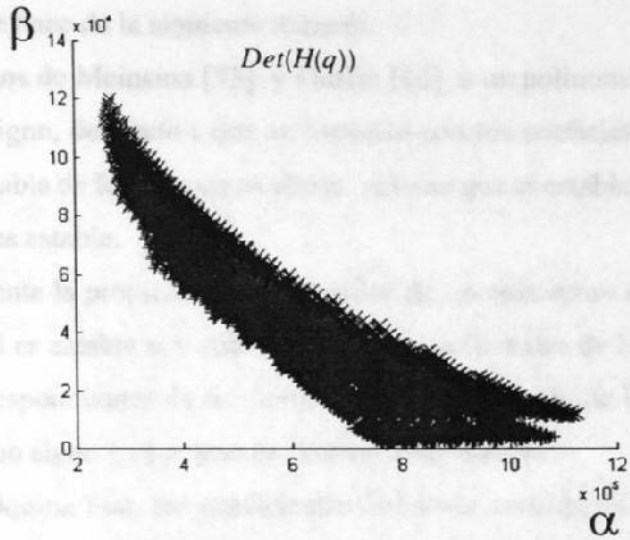

Figura 7.2 Positividad del $\det(H(q))$. Avión militar F4-E

7.2 Máquina Fiat

El modelo de la máquina Fiat es tomado de Barmish [5] donde presenta un modelo simplificado a dos entradas y dos salidas. Las entradas son el avance de chispa y la apertura de la válvula de estrangulamiento. Las salidas que son la presión del motor en el "manifold" y la velocidad del motor. Finalmente Barmish muestra el polinomio característico $p(s,q)$ de la máquina controlada en lazo cerrado, los parámetros q son ganancias del controlador y parámetros físicos de la máquina. El polinomio característico es de séptimo grado, con incertidumbre paramétrica de estructura polinómica, los coeficientes $c_i(q)$ del polinomio aparecen al final del capítulo.

$$p(s,q) = c_0(q) + c_1(q)s + c_2(q)s^2 + c_3(q)s^3 + c_4(q)s^4 + c_5(q)s^5 + c_6(q)s^6 + c_7(q)s^7$$

La estabilidad robusta del sistema se analiza por medio de la tabla equivalente de Routh y descomposición de signo, esto fue para evadir el problema de trabajar la descomposición de signo de determinantes grandes que consumen mucho tiempo de cómputo como lo hubiera sido si se analiza mediante la matriz de Hurwitz. Además en la tabla equivalente de Routh no se analiza la positividad del octavo (último) coeficiente de la primer columna ya que consume mucho más tiempo de análisis que cualquier otro coeficiente de la misma tabla, en lugar de la aplicación tradicional de la tabla de

Routh o la equivalente, se hace de la siguiente manera.

Aplicando los conceptos de Meinsma [33] y Duffin [16] a un polinomio con sus primeros dos coeficientes del mismo signo, de grado i que es formado con los coeficientes de cualquier par de renglones seguidos de la tabla de Routh o equivalente, se tiene que es estable si y sólo si el polinomio reducido de grado $i-1$ es estable.

Aplicando sucesivamente la propiedad de estabilidad de un polinomio con su reducido se tiene que el polinomio original es estable si y sólo si todos los coeficientes de la primer columna desde el primero hasta los correspondientes de un cierto polinomio reducido de la tabla de Routh o de la equivalente son del mismo signo y el polinomio reducido es estable.

En este caso de la máquina Fiat, los coeficientes del sexto renglón de la tabla Equivalente de Routh $b_{6,1}(q)$ y $b_{6,2}(q)$ y el único del séptimo renglón $b_{7,1}(q)$ forman un polinomio reducido de segundo grado, de tal forma que el polinomio $p(s,q)$ es robustamente estable si y sólo si los coeficientes: $b_{1,1}(q)$, $b_{2,1}(q)$, $b_{3,1}(q)$, $b_{4,1}(q)$, $b_{5,1}(q)$, $b_{6,1}(q)$, $b_{6,2}(q)$ y $b_{7,1}(q)$ son positivos para todo vector paramétrico q elemento de Q.

De acuerdo a Barmish, un punto interesante para analizar es el vector siguiente:

$$q^a = [2.1608\ 0.1027\ 0.0357\ 0.5607\ 0.01\ 4.4962\ 1]^T$$

Dadas las posibilidades de equipo de cómputo con que se cuenta y la magnitud de este problema, se analizó la estabilidad robusta del polinomio en una caja de incertidumbre que tiene como vértice mínimo Euclidiano q^a y el vértice máximo Euclidiano aumenta al mínimo en un 1.5 por ciento sus componentes como se muestra en seguida:

$$Q = \{q = [q_1\ q_2\ \ldots\ q_7] \mid q_i \in [q_i^-\ ;q_i^+],\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7\}$$

$$\begin{aligned} q_1 &\in [2.1608,\ 2.193212] \\ q_2 &\in [0.1027,\ 0.104241] \\ q_3 &\in [0.0357,\ 0.036236] \\ q_4 &\in [0.5607,\ 0.569111] \end{aligned}$$

$$q_5 \in [0.0100,\ 0.010250]$$

$$q_6 \in [4.4962,\ 4.563643]$$

$$q_7 \in [1.0000,\ 1.015000]$$

Los primeros dos coeficientes de la primer columna de la tabla equivalente de Routh, son los coeficientes del polinomio $c_7(q)$ y $c_6(q)$, que por simple inspección se puede ver que son positivos para todo vector q elemento de Q, el coeficiente $b_{3,1}(q)$ es analizado dividiendo cada parámetro en dos partes iguales y es positivo para todo vector q elemento de Q como se puede ver en la figura (7.3), en donde se aprecia que el coeficiente,es positivo, en todos los vértices mínimo y máximo " $\times$ " de cada una de las 128 cajas Γ, así como la cota mínima "$+$" de cada caja también es positiva, por lo tanto de acuerdo al teorema de determinación de signo mediante partición de cajas (4.14), el coeficiente $b_{3,1}(q)$ es positivo para todo vector q elemento de Q. De la misma manera los demás coeficientes son positivos para todo vector q elemento de Q, como se puede apreciar en cada una de sus correspondientes figuras que aparecen abajo, los coeficientes $b_{4,1}(q)$, $b_{5,1}(q)$, $b_{6,1}(q)$ y $b_{6,2}(q)$ son analizados partiendo cada parámetro en dos partes y en el coeficiente $b_{7,1}(q)$ hubo necesidad de partir cada parámetro en cuatro partes iguales para poder probar su positividad.

En las gráficas de los coeficientes de la tabla equivalente de Routh, el grupo de las marcas " $\times$ " correspondientes a los vértices $\mu^{\min}$ y $\mu^{\max}$ y el grupo de marcas "+" correspondientes a la cota mínima de cada una de las cajas Γ, aparecen traslapados en los coeficientes $b_{3,1}(q)$, $b_{4,1}(q)$, mientras que en los coeficientes $b_{5,1}(q)$, $b_{6,1}(q)$, $b_{6,2}(q)$ y $b_{7,1}(q)$, aparecen separados, pero en ambos casos los grupos de marcas " $\times$ " y "$+$" se encuentran arriba del eje α satisfaciendo así el teorema de determinación de signo mediante partición de cajas (4.14) que determina la positividad de los coeficientes.

Por lo anterior los coeficientes $b_{1,1}(q)$, $b_{2,1}(q)$, $b_{3,1}(q)$, $b_{4,1}(q)$, $b_{5,1}(q)$, $b_{6,1}(q)$, $b_{6,2}(q)$ y $b_{7,1}(q)$ son positivos para todo vector paramétrico q elemento de Q, entonces la familia $P(s, Q)$ es robustamente estable.

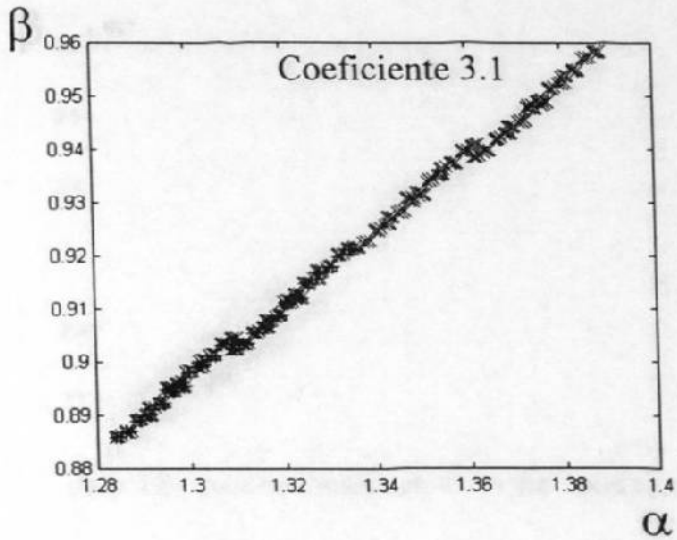

Figura 7.3 Coeficiente $b_{3,1}(q)$. Máquina Fiat

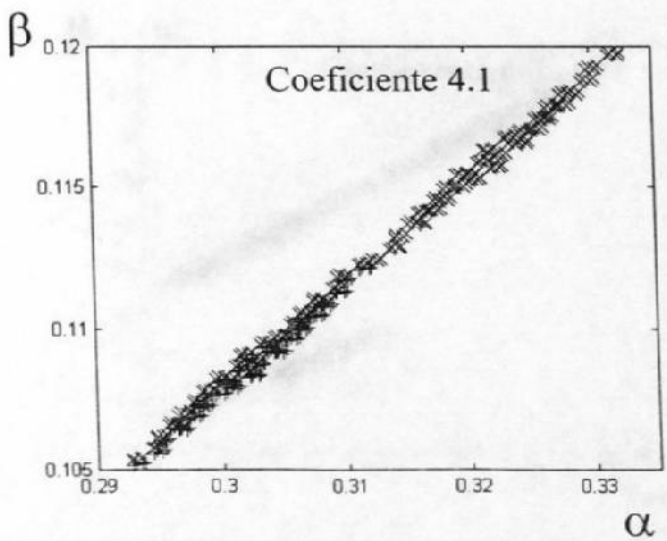

Figura 7.4 Coeficiente $b_{4,1}(q)$. Máquina Fiat

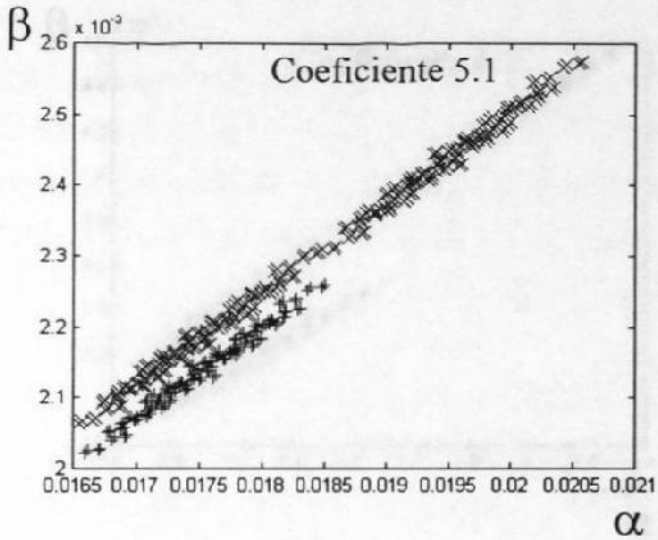

Figura 7.5 Coeficiente $b_{5,1}(q)$. Máquina Fiat

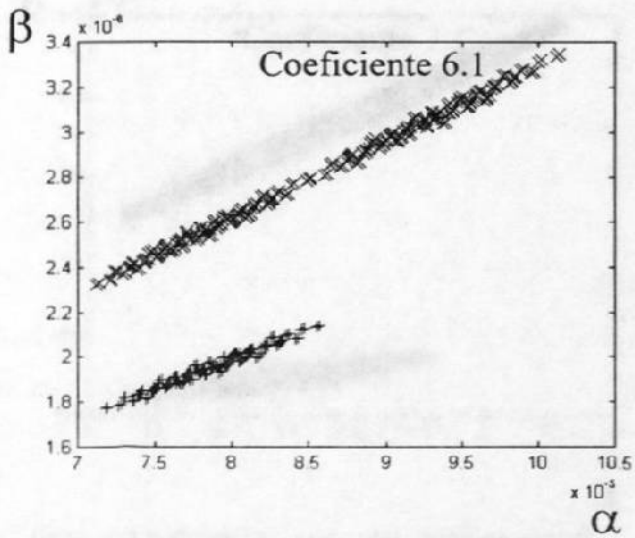

Figura 7.6 Coeficiente $b_{6,1}(q)$. Máquina Fiat

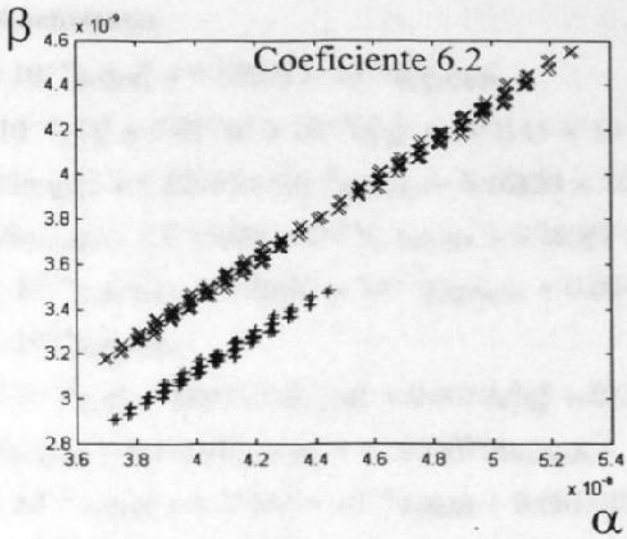

Fig. 7.7 Coeficiente $b_{6,2}(q)$. Máquina Fiat

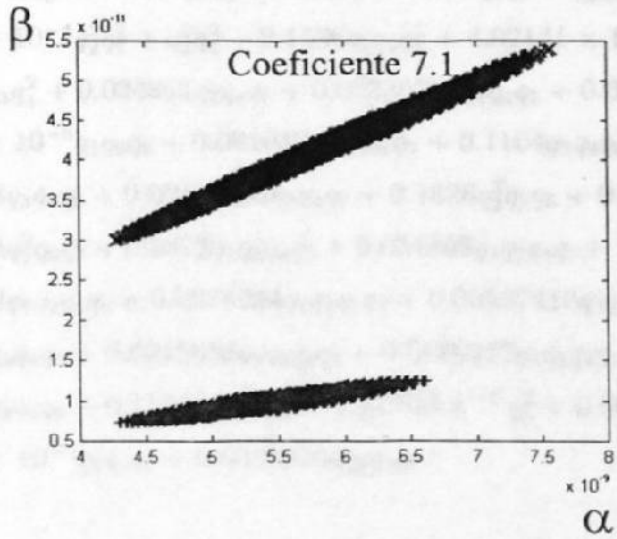

Figura 7.8 Coeficiente $b_{7,1}(q)$. Máquina Fiat

Parte Positiva de los Coeficientes

$$c_{0p}(q) = 6.82079 \times 10^{-5} q_1 q_3 q_4^2 + 6.82079 \times 10^{-5} q_1 q_2 q_4 q_5$$

$$\begin{aligned} c_{1p}(q) = {} & 7.6176 \times 10^{-4} q_2^2 q_5^2 + 7.61760 \times 10^{-4} q_3^2 q_4^2 + 4.02141 \times 10^{-4} q_1 q_2 q_5^2 + \\ & 0.00336706 q_1 q_3 q_4^2 + 6.82079 \times 10^{-5} q_1 q_4 q_5 + 5.16120 \times 10^{-4} q_2^2 q_5 q_6 + \\ & 0.00336706 q_1 q_2 q_4 q_5 + 6.82079 \times 10^{-5} q_1 q_2 q_4 q_7 + 6.28987 \times 10^{-5} q_1 q_2 q_5 q_6 + \\ & 4.02141 \times 10^{-4} q_1 q_3 q_4 q_5 + 6.28987 \times 10^{-5} q_1 q_3 q_4 q_6 + 0.00152352 q_2 q_3 q_4 q_5 + \\ & 5.16120 \times 10^{-4} q_2 q_3 q_4 q_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{2p}(q) = {} & 4.02141 \times 10^{-4} q_1 q_5^2 + 0.00152352 q_2 q_5^2 + 0.0552 q_2^2 q_5^2 + 0.0552 q_3^2 q_4^2 + \\ & 0.0189477 q_1 q_2 q_5^2 + 0.034862 q_1 q_3 q_4^2 + 0.00336706 q_1 q_4 q_5 + \\ & 6.82079 \times 10^{-5} q_1 q_4 q_7 + 6.28987 \times 10^{-5} q_1 q_5 q_6 + 0.00152352 q_3 q_4 q_5 + \\ & 5.16120 \times 10^{-4} q_3 q_4 q_6 + 0.034862 q_1 q_2 q_4 q_5 + 0.0237398 q_2^2 q_5 q_6 + \\ & 0.00152352 q_2^2 q_5 q_7 + 5.16120 \times 10^{-4} q_2^2 q_6 q_7 + 0.00336706 q_1 q_2 q_4 q_7 + \\ & 0.00287416 q_1 q_2 q_5 q_6 + 8.04282 \times 10^{-4} q_1 q_2 q_5 q_7 + 6.28987 \times 10^{-5} q_1 q_2 q_6 q_7 + \\ & 0.0189477 q_1 q_3 q_4 q_5 + 0.00287416 q_1 q_3 q_4 q_6 + 4.02141 \times 10^{-4} q1 q_3 q_4 q_7 + \\ & 0.1104 q_2 q_3 q_4 q_5 + 0.0237398 q_2 q_3 q_4 q_6 + 0.00152352 q_2 q_3 q_4 q_7 + \\ & 0.00103224 q_2 q_5 q_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{3p}(q) = {} & 0.0189477 q_1 q_5^2 + 0.1104 q_2 q_5^2 + 5.16120 \times 10^{-4} q_5 q_6 + q_2^2 q_5^2 + \\ & 7.61760 \times 10^{-4} q_2^2 q_7^2 + q_3^2 q_4^2 + 0.1586 q_1 q_2 q_5^2 + 4.02141 \times 10^{-4} q_1 q_2 q_7^2 + \\ & 0.0872 q_1 q_3 q_4^2 + 0.034862 q_1 q_4 q_5 + 0.00336706 q_1 q_4 q_7 + 0.00287416 q_1 q_5 q_6 + \\ & 6.28987 \times 10^{-5} q_1 q_6 q_7 + 0.00103224 q_2 q_6 q_7 + 0.1104 q_3 q_4 q_5 + \\ & 0.0237398 q_3 q_4 q_6 + 0.00152352 q_3 q_4 q_7 + 0.1826 q_2^2 q_5 q_6 + 0.1104 q_2^2 q_5 q_7 + \\ & 0.0237398 q_2^2 q_6 q_7 + 0.0872 q_1 q_2 q_4 q_5 + 0.034862 q_1 q_2 q_4 q_7 + \\ & 0.0215658 q_1 q_2 q_5 q_6 + 0.0378954 q_1 q_2 q_5 q_7 + 0.00287416 q_1 q_2 q_6 q_7 + \\ & 0.1586 q_1 q_3 q_4 q_5 + 0.0215658 q_1 q_3 q_4 q_6 + 0.0189477 q_1 q_3 q_4 q_7 + 2 q_2 q_3 q_4 q_5 + \\ & 0.1826 q_2 q_3 q_4 q_6 + 0.1104 q_2 q_3 q_4 q_7 + 7.61760 \times^{-4} q_5^2 + 0.0474795 q_2 q_5 q_6 + \\ & 8.04282 \times 10^{\ -4} q_1 q_5 q_7 + 0.00304704 q_2 q_5 q_7 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_{4p}(q) = \; & 0.1586q_1q_5^2 + 4.02141 \times 10^{-4}q_1q_7^2 + 2q_2q_5^2 + 0.00152352q_2q_7^2 + \\
& 0.0237398q_5q_6 + 0.00152352q_5q_7 + 5.16120 \times^{-4} q_6q_7 + \\
& 0.0552q_2^2q_7^2 + 0.0189477q_1q_2q_7^2 + 0.0872q_1q_4q_5 + 0.034862q_1q_4q_7 + \\
& 0.0215658q_1q_5q_6 + 0.00287416q_1q_6q_7 + 0.0474795q_2q_6q_7 + 2q_3q_4q_5 + \\
& 0.1826q_3q_4q_6 + 0.1104q_3q_4q_7 + 2q_2^2q_5q_7 + 0.1826q_2^2q_6q_7 + 0.0872q_1q_2q_4q_7 + \\
& 0.3172q_1q_2q_5q_7 + 0.0215658q_1q_2q_6q_7 + 0.1586q_1q_3q_4q_7 + 2q_2q_3q_4q_7 + \\
& 0.0552q_5^2 + 0.3652q_2q_5q_6 + 0.0378954q_1q_5q_7 + 0.2208q_2q_5q_7 \\
c_{5p}(q) = \; & 0.0189477q_1q_7^2 + 0.1104q_2q_7^2 + 0.1826q_5q_6 + 0.1104q_5q_7 + 0.0237398q_6q_7 + \\
& q_2^2q_7^2 + 0.1586q_1q_2q_7^2 + 0.0872q_1q_4q_7 + 0.0215658q_1q_6q_7 + 0.3652q_2q_6q_7 + \\
& 2q_3q_4q_7 + q_5^2 + 7.61760 \times 10^{-4}q_7^2 + 0.3172q_1q_5q_7 + 4q_2q_5q_7 \\
c_{6p}(q) = \; & 0.1586q_1q_7^2 + 2q_2q_7^2 + 2q_5q_7 + 0.1826q_6q_7 + 0.0552q_7^2 \\
c_{7p}(q) = \; & q_7^2
\end{aligned}
$$

Parte Negativa de los coeficientes

$$
\begin{aligned}
c_{0n}(q) = \; & 0 \\
c_{1n}(q) = \; & 0 \\
c_{2n}(q) = \; & 0.00234048q_3^2q_4q_6 + 0.00234048q_2q_3q_5q_6 \\
c_{3n}(q) = \; & 0.00234048q_3q_5q_6 + 0.0848q_3^2q_4q_6 + 0.0848q_2q_3q_5q_6 + 0.00234084q_2q_3q_6q_7 \\
c_{4n}(q) = \; & 0.0848q_3q_5q_6 + 0.00234048q_3q_6q_7 + 0.0848q_2q_3q_6q_7 \\
c_{5n}(q) = \; & 0.0848q_3q_6q_7 \\
c_{6n}(q) = \; & 0 \\
c_{7n}(q) = \; & 0
\end{aligned}
$$

Capítulo 8
Conclusiones

La estabilidad y controlabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo, de múltiple entrada y múltiple salida, que dan lugar a familias de polinomios característicos con incertidumbre paramétrica multilineal o polinómica, fue investigada en el espacio de los coeficientes.

Para el problema de estabilidad robusta, se desarrolla la tabla equivalente de Routh, con lo cual, el problema es mapeado a un problema de positividad de una función multivariable, con términos no decrecientes en un espacio vectorial. Para la solución de este problema se desarrolla la herramienta matemática descomposición de signo, logrando así condiciones necesarias y suficientes para el caso multilineal o incluso el polinómico. Estos resultados son empleados en los casos del avión militar F4-E [2], y la máquina "Fiat" [5] con polinomio característico de séptimo grado de estructura polinómica con 7 parámetros, que aparecen en el capítulo de aplicaciones. También se aportan resultados sobre las propiedades de familias de polinomios con incertidumbre multilineal, que además ayudan a relacionar resultados ya existentes.

El problema de controlabilidad y observabilidad robusta de sistemas lineales, invariantes en el tiempo, de múltiple entrada y múltiple salida, es resuelto para matrices intervalo, mediante descomposición de signo. Así también, mediante valores característicos, se presenta solución del mismo problema, al caso de perturbación unidireccional.

La descomposición de signo es aplicable a la solución de problemas de estabilidad y controlabilidad robusta, arriba mencionados, No existen limitaciones teóricas para su aplicación a estos casos, el problema de controlabilidad robusta es más complicado que el de estabilidad robusta. La carga de cálculo numérico crece con la dimensión del sistema y con el número de parámetros, creciendo así el tiempo necesario para su solución como sucede en cualquier algoritmo. La herramienta matemática descomposición de signo aporta condiciones necesarias y suficientes de positividad o negatividad de una función multivariable en todo su dominio, mediante el análisis de puntos extremos de subdominios, se puede utilizar en forma algebraica o gráfica, y su aplicación no esta restringida al área de control, es aplicable a cualquier otra disciplina científica donde existan

problemas de positividad de funciones.

Como trabajo futuro, basado en los resultados presentados en esta tesis, se propone lo siguiente: continuar con la línea de investigación que dio lugar al teorema de combinación lineal de la imagen de los vértices, y obtener más propiedades de familias de polinomios con incertidumbre multilineal, a partir de este resultado; investigar sobre representación de funciones con descomposición de signo, buscando alguna representación que mejore las propiedades de la representación (α, β); lograr algún resultado que mejore las cotas del teorema del polígono; investigar más la descomposición de signo del determinante y mejorar el algoritmo de la representación α del mismo; investigar en búsqueda de la solución al problema de controlabilidad y observabilidad robusta de sistemas lineales, invariantes en el tiempo, de múltiple entrada y múltiple salida, con perturbación multidireccional.

Referencias

[1] J. E. Ackermann, Does it Suffice to Check a Subset of Multilinear Parameters in Robustness Analysis, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 4, pp. 487-488, April 1992.

[2] J. Ackermann, Robust Control Systems with Uncertain Physical Parameters, Springer Verlag 1993.

[3] B. D. O. Anderson, F. Kraus, M. Mansour, S. Dasgupta, Easily Testable Sufficient Conditions for the Robust Stability of Systems with Multilinear Parameter Dependence, Automatica Vol. 31, No. 1, pp. 25-40, 1995.

[4] B. R. Barmish, H. I. Kang, New Extreme Point Results for Robust Stability, Control of Uncertain Dynamic Systems, International Workshop on Robust Control, pp. 461-469, March 1991.

[5] B. R. Barmish, New Tools for Robustness of Linear Systems, Macmillan, 1994.

[6] A. C. Bartlet, C. V. Hollot, Huang Lin, Root Locations of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges, Mathematics of Control, Signals, and Systems, 1, pp. 61-71, 1988.

[7] S. P. Bhattacharyya, Robust Parametric Stability: The Role of the CB Segments, Control of Uncertain Dynamic Systems, International in Workshop on Robust Control, pp. 381-400, March 1991.

[8] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L. H. Keel, Robust Control the Parametric Approach, Prentice Hall, 1995.

[9] S. P. Bhattacharyya, L. H. Keel, Robust Stability and Control of Linear and Multilinear Interval Systems, Control and Dynamics Systems Vol. 51, pp. 30-77, 1992.

[10] H. Chapellat, S. P. Bhattacharyya, A Generalization of Kharitonov's Theorem: Robust Stability of Interval Plants, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, No. 3, pp. 306-311, March 1989.

[11] H. Chapellat, L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, Robustness Properties of Multilinear Interval Systems, Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties, Birkhauser Verlag Basel, pp. 73-80, 1992.

[12] H. Chapellat, M. Dahleh, S. P. Bhattacharyya, Robust Stability Manifolds for Multilinear Interval System, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 2, pp. 314-318, February 1993.

[13] C. T. Chen, Linear System Theory and Design, Harcourt Brace Javanovich, 1984.

[14] W. Chen, I. R. Petersen, A Class of Multilinear Uncertain Polynomials to Which the Edge Theorem is Applicable, IEEE Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, pp. 579-584, 1994.

[15] J. C. Doyle, "Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties", IEEE Proceedings, Vol 129, Pt D, No. 6, pp 242-250, 1982.

[16] R. J. Duffin, Algorithms for Classical Stability Problems, SIAM, Vol. 11, No 2, pp. 196-213, 1969.

[17] C. Elizondo, et al. Robust Stability for Multilinear and Polynomic Structures in Space Coefficients by Sign-decomposition, IASTED 97, Cancún, pp. 11-14, May 1997.

[18] C. Elizondo, et al. Robust Controllability and Observability for MIMO in LTI Systems With Unidirectional Perturbation, Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control, San Diego, California USA, pp. 4369-4370, December 1997.

[19] B. A. Francis, "A Course in H_∞ Control Theory", in Lecture Notes and Information Sciences, Vol. 88, New York, Springer Verlag, 1985.

[20] R. Frazer, W. Duncan, On the Criteria of Stability of Small Motions, Porc. Royal Society A, Vol. 124, pp. 642-654, 1929.

[21] M. Fu, B. R. Barmish, A Generalization of Kharitonov's Interval Polynomial Framework to Handle Linearly Dependent Uncertainty, Department of Electrical and Computer Engineering University of Wisconsin-Madison, Madison, WI 53706.

[22] M. Fu, B. R. Barmish, Maximal Unidirectional Perturbation Bounds for Stability of Polynomials and Matrices, Systems and Control Letters, Vol. 11, pp. 173-178, 1988.

[23] A. T. Fuller, On Redundance in Stability Criteria, Int. J. Control, Vol 26, No 2, pp. 207-224, 1977.

[24] F. R. Gantmacher, The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, 1990.

[25] R. R. E. de Gaston, M. G. Safonov, Exact Calculation of the Multiloop Stability Margin, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, No. 2, pp. 156-171, February 1988.

[26] A. M. Holohan, M. G. Safonov, Some Counterexamples in Robust Stability Theory, Systems & Control Letters, 21, pp. 95-102, 1993.

[27] C. V. Hollot, Z. L. Xu, When is the Image of a Multilinear Function a Polytope? - a Conjecture, Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, pp. 1890-1891, December 1989.

[28] L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, Phase Properties of Hurwitz Polynomials, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No. 5, pp. 733-734, May 1996.

[29] V. Kharitonov, On a Generalization of a Stability Criterion, Seria Fizico-matematicheskaia, Vol 1, pp. 53-57, Izvestiia Akademii Nauk Kazakhskoi SSR, 1978.

[30] V. Kharitonov, Robust Stability of Nested Polynomial Families, Automatica, Vol 32, No. 3, pp. 365-367, 1996.

[31] F. Kraus, L. Guzzella, A. Astolfi, R Tempo, Invariant Roots of Polynomials with Uncertain Coefficients, Proceedings of the 32th Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, December, pp. 498-499, 1989.

[32] D. G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, John Wiley & Sons, Inc. 1969.

[33] G. Meinsma, Elementary Proof of the Routh-Hurwitz Test, Systems & Control Letters 25, pp. 237-242, 1995.

[34] M. Marden, The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable, American Mathematical Society, 1949.

[35] A. Mikhailov, Method of Harmonic Analysis in Control Theory, Automatika i Telemekhanika, Vol. 3, pp. 27-81, 1938.

[36] P. Misra, On Stabilization of System with Uncertain Parameters: an Interval Arithmetic Approach, American Control Conference, pp. 170-171, June 1989.

[37] B. T. Polyak, Robustness Analysis for Multilinear Perturbations, Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties, Birkhauser Verlag Basel, pp. 93-103, 1992.

[38] W. J. Rugh, Linear System Theory, second edition, Prentice Hall, 1996.

[39] L. Saydy, A. L. Tits, E. H. Abded, Guardian Maps and the Generalized Stability of Parametrized Families of Matrices and Polynomials, Mathematics of Control, Signals, and Systems, pp. 345-371, 1990, 3.

[40] C. B. Soh, A Simple Geometrical Proof of the Box Theorem, IMA Journal of Mathematical Control & Information, pp. 235-248, 1990.

[41] N. K. Tsing, A. L. Tits, When is the Multiaffine Image of a Cube a Convex Polygon?, Systems and Control Letters 20, 1993.

[42] T. Tsujino, T. Fujii, K. Wei, On the Connection Between Controllability and Stabilizability of Linear Systems with Structural Uncertain Parameters, Automatica, Vol 29, No. 1, pp. 7-12, 1993.
[43] K. Wang, A. Michel, Necessary and Sufficient Conditions for the Controllability and Observability of a Class of Linear Time-Invariant Systems with Interval Plant, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 7, pp. 1443-1447, July 1994.
[44] A. Weinmann, Uncertain Models and Robust Control, Springer Verlag, 1991.
[45] M. Wicks, R. A. DeCarlo, Computing the Distance to an Uncontrollable System, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 1, pp. 39-47, January 1991.
[46] L. Zadeh, C. Desoer, Linear System Theory: the State Space Approach, New York, Mc Graw Hill, 1963.

TIPO DE ADQUISICION
DONATIVO