

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DISEÑO DEL ESPACIO DE PARIDAD PARA SISTEMAS CONTINUOS

POR

ING. JESÚS VÍCTOR MANUEL CID MEDINA

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN
CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

AGOSTO DEL 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DISEÑO DEL ESPACIO DE PARIDAD PARA SISTEMAS CONTINUOS

POR

ING. JESÚS VÍCTOR MANUEL CID MEDINA

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN
CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

AGOSTO DEL 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**DISEÑO DEL ESPACIO DE PARIDAD PARA SISTEMAS CONTINUOS**” realizada por el alumno **ING. Jesús Víctor Manuel Cid Medina**, matrícula 1505403 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis

Asesor
Dr. Efraín Alcorta García

Coasesor:
Dr. César Elizondo González

Coasesor:
Dr. David Lara Alabazares

Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado

*Dedicado a las familias Cid Pérez y Medina Frausto, en especial a
mis padres:*

*Juan Antonio Cid Pérez
y
María de Jesús Medina Frausto.*

*De una forma especial este trabajo lo dedico
a la memoria de mi amigo Gustavo de Haro Trejo que,
seguramente, está en el cielo.*

Agradecimientos

A Dios, primeramente por el regalo maravilloso que es la vida, por haberme dado tantas cosas buenas como: una familia maravillosa, mis amigos, salud y la oportunidad de crecer como profesional en esta gran ciudad Monterrey, Nuevo León.

A mis padres Juan Antonio Cid Pérez y María de Jesús Medina Frausto por su incondicional apoyo durante todos mis estudios, no solo en esta etapa, sino durante toda mi vida. Ellos han sido siempre mi mayor fuente de inspiración.

A mi asesor de tesis, Dr. Efraín Alcorta García, por su incomparable apoyo durante la elaboración de este trabajo y de quien se tiene un gran respeto y admiración.

A mis revisores, Dr. César Elizondo González y Dr. David Lara Alabazares, por realizar las observaciones y correcciones respectivas a mi documento de tesis enriqueciendo de esta forma mi trabajo de investigación.

A todos mis maestros, que sin lugar a dudas fueron parte fundamental en mi formación. y que a continuación menciono: Dr. Efraín Alcorta García, Dr. César Elizondo González, Dr. Alberto Cavazos González, Dr. Marco Tulio Mata Jiménez, Dr. René Galindo Orozco, Dr. Jesús de León Morales, Dr. Ignacio Ayala y Dr. Alejandro Rodríguez

A mis hermanos: José Alejandro, Daniel Antonio, Elias Enrique y Juan, que han sido mis compañeros de toda la vida y de quienes me siento orgulloso por las cosas que con ellos he vivido y aprendido durante 26 años. Se que siempre podré contar con ustedes.

A mis compañeros de generación: Mario Alberto López Vega, Luis Humberto Rodríguez Alfaro, César Paolo Cepeda Velasco, César Xavier Robles Palomares, Juan Luis Martínez cerros, Y Herman Castañeda; por su apoyo, por compartir esta etapa de nuestras vidas y por hacer historia juntos.

A mi tia María de los Angeles Cid Pérez, por su apoyo moral y económico al inicio de este

proceso.

A la señorita María del Pilar Martínez López, por haber estado a mi lado y apoyarme en los momentos más difíciles de este proceso, por haber sido una motivación extra durante mi estancia en esta ciudad y por ser una persona particularmente especial en mi vida.

A todos mis amigos y compañeros, que sin lugar a dudas son muchos y sería injusto dejar de mencionar a alguno de ellos, por formar parte de esta experiencia, su apoyo y las cosas que aprendí de todos ellos.

Al Arquitecto Rafael Trejo, presidente municipal de Morelos, Zacatecas, por su apoyo moral, económico y su compromiso de ayudar.

A la señorita Alejandra Enriquez por su buena voluntad, amistad y apoyo económico.

Al grupo de ARCOIRIS de Morelos, Zacatecas por haber recibido de este tantos beneficios, valores morales y cristianos y en especial por las oraciones en favor de mi durante estos dos años de esfuerzo.

A todas aquellas personas de quienes he recibido, quizás sin merecerlo, cosas buenas que me ayudaron de algún modo a crecer y a ser mejor cada día.

A CONACYT, por su apoyo económico y generación de oportunidades de crecimiento a los estudiantes que como un servidor buscan para ser mejores profesionistas.

A la Universidad Autónoma de Nuevo León (U.A.N.L.) por la oportunidad que en esta institución se me brindó al recibirme con los brazos abiertos.

RESUMEN

Diseño Del Espacio De Paridad Para Sistemas Continuos

Publicación No. _____

Jesús Víctor Manuel cid Medina, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2010

Profesor Asesor: Dr. Efraín Alcorta García

El espacio de paridad es una técnica popular utilizada para el diagnóstico de sistemas en tiempo discreto. Una de las principales virtudes de esta técnica es su simplicidad, sin embargo, debido a que las señales requeridas para el diagnóstico están solo disponibles en forma de muestras en instantes definidos de tiempo, se hace necesaria una representación en tiempo discreto de los sistemas continuos. Con esto, información disponible en el sistema en tiempo continuo para la localización de las fallas se pierde en el proceso de discretización, lo cual propicia que el número de fallas que puede ser localizado en el sistema discretizado se reduzca.

El objetivo de la presente tesis es diseñar el espacio de paridad continuo que permita localizar todas las posibles fallas que se puedan presentar en un sistema. Se pretende que dicho espacio de paridad continuo tenga al menos el mismo desempeño que el que se tiene al usar métodos basados en observadores en tiempo continuo. Se propone el uso de espacio de paridad en tiempo continuo, el cual incluye derivadas de señales entrada-salida. Es importante destacar que las matrices involucradas son idénticas al caso discreto, la única diferencia radica en la definición de las señales.

Una parte indispensable en la propuesta es el uso de un derivador de señales. Para el cálculo de las derivadas se revisaron tres ideas diferentes. Primero se revisó la obtención de derivadas mediante el uso del teorema de Taylor. La sensibilidad al ruido de medición es muy crítica para derivadas de orden mayor a uno. Un segundo procedimiento revisado está basado en modos deslizantes. Este procedimiento mejora la robustez frente al ruido de medición, sin embargo, al

utilizarlo de manera anidada el efecto del ruido se incrementa haciendo muy difícil el cálculo de derivadas de orden superior. Un tercer procedimiento revisado está basado en observadores de alta ganancia. Las derivadas son literalmente obtenidas integrando, lo que hace posible manejar un cierto nivel de ruido sin problemas. Este procedimiento fue el que finalmente se implementó.

En el presente documento está incluido un ejemplo de aplicación (sistema de tres tanques interconectados) así como los resultados obtenidos mediante simulaciones a través de *Matlab Simulink* al considerar diferentes casos de fallas y niveles de ruido.

Índice general

Resumen	vi
Índice general	viii
Índice de figuras	xi
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Planteamiento del problema	1
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo General	2
1.2.2 Objetivos Particulares	3
1.3 Justificación	3
1.4 Motivación	3
1.5 Estructura de la tesis	4
2 ANTECEDENTES	6
2.1 Introducción	6
2.2 Estado del arte	6

2.3	Espacio de paridad	10
3	DERIVACIÓN DE SEÑALES	14
3.1	Introducción	14
3.2	Derivación mediante expansión en series de Taylor	15
3.3	Derivación mediante la técnica de modos deslizantes	20
3.4	Derivación mediante un observador de altas ganancias	22
4	ESPACIO DE PARIDAD CONTINUO	29
4.1	Introducción	29
4.2	Espacio de paridad en tiempo continuo	29
5	EJEMPLO DE APLICACIÓN	34
5.1	Introducción	34
5.2	Sistema de tres tanques	35
5.2.1	Modelo no lineal	35
5.2.2	Modelo lineal	36
5.2.3	Espacio de paridad continuo para el sistema de tres tanques	41
5.2.4	Implementación	45
6	CONCLUSIONES	53
6.1	Conclusiones.	53
6.2	Trabajo a futuro.	54

Bibliografia

Índice de figuras

2.1	Discretización y espacio de paridad	9
3.1	Estimación de derivadas de $f(t) = \text{sen}(t)$ mediante el método de Taylor.	17
3.2	Estimación de las primeras 6 derivadas.	18
3.3	Estimación de las derivadas de una señal con ruido blanco.	19
3.4	Estimación de derivadas $f(t) = \text{sen}(t)$	21
3.5	Estimación de derivadas de una señal ruidosa $f(t) = \text{sen}(t) + \text{wgn}$	23
3.6	Implementación del derivador en simulink.	25
3.7	Estados estimados (derivadas) de un sistema de tercer orden.	26
3.8	Estados estimados (derivadas) de $u(t) + \text{wgn}$	27
3.9	Estados estimados (derivadas) de un sistema de cuarto orden para la señal $f(t) = \text{sen}(t) + \text{wgn}$	28
5.1	Sistema de tres tanques.	35
5.2	Implementación del sistema con controlador.	40

5.3	Nivel de líquido en cada tanque.	40
5.4	Señal de residuo para señal sin falla.	48
5.5	Falla en el sensor1.	48
5.6	Señal de residuo teniendo falla en el sensor1.	49
5.7	Falla en el actuador1.	49
5.8	Señal de residuo teniendo falla en el actuador1.	50
5.9	Ruido en la salida y falla en sensor uno.	51
5.10	Señal de residuo ante la falla en sensor uno.	51
5.11	Ruido en la salida y falla en actuador uno.	52
5.12	Señal de residuo ante la falla en la bomba 1.	52

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Todo sistema físico está expuesto a tener, en determinado momento, alguna falla ya sea en actuadores, sensores o componentes. En el ámbito de diagnóstico y aislamiento de fallas, la detección oportuna de las fallas que aparecen en el sistema es de suma importancia, ya que con esto se puede evitar una avería mayor del sistema.

En la actualidad existen diferentes enfoques para el diagnóstico de sistemas, dentro de los cuales se encuentran aquellos que se basan en el modelo matemático que describe el comportamiento de determinado sistema físico.

El *espacio de paridad* es una técnica popular para diagnóstico de sistemas basada en el modelo, que consiste en encontrar un conjunto de vectores (los cuales forman el espacio de paridad) que satisfacen cierta condición de diseño cuando se utiliza una representación de un sistema físico en espacio de estados. Ésta condición de diseño se satisface si al multiplicar cualquier vector de paridad por una matriz, que es muy similar (o a veces igual) a la matriz de observabilidad del sistema, el resultado es cero. Con esto se logra construir un *generador*

de residuos de donde se obtiene información sobre las posibles fallas que se pudieran presentar en un sistema. Esta técnica de detección se ha usado exitosamente en sistemas discretos y se caracteriza por su simplicidad en el diseño, sin embargo, ésta se encuentra limitada en cuanto a la localizabilidad de las fallas que en un sistema pueden ocurrir, dado que su diseño se basa en muestras de señales en instantes definidos de tiempo, haciendo que información disponible y útil para el diagnóstico del sistema continuo se pierda durante el proceso de discretización.

Lo anterior en realidad representa un problema debido a que, si una falla ocurre en un instante de tiempo que no haya sido considerado en el muestreo, entonces dicha falla no será detectada y el sistema bajo estudio podría ser dañado sin poder tomar acciones correctivas que eviten un mayor daño al sistema.

Ante la necesidad de evitar la pérdida de localizabilidad de fallas en un sistema, en este trabajo se propone, como alternativa de solución, la versión continua de espacio de paridad (que a su vez requiere del uso de derivadores de señales), mediante la cual el número de fallas que se puede localizar no se reduce de manera considerable.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Propuesta y prueba de un espacio de paridad basado en muestras para sistemas en tiempo continuo con al menos el mismo desempeño que otros métodos de diagnóstico de tiempo continuo basados en modelos.

1.2.2 Objetivos Particulares

- Explorar las diferentes técnicas para estimar derivadas de señales.
- Propuesta y desarrollo de una versión de espacio de paridad basada en derivadores para sistemas de tiempo continuo.
- Aplicación y comparación del método propuesto con respecto a métodos basados en observadores en un caso de estudio real.

1.3 Justificación

La justificación de este trabajo radica en la necesidad de innovar y mejorar el diseño de espacio de paridad que hasta la fecha se conoce, el cual se emplea únicamente para sistemas discretos. El desarrollo de un esquema de espacio de paridad para sistemas continuos basado en un derivador, con el fin de que el número de fallas que pudiera ser localizado en un sistema discretizado no se reduzca en forma considerable, es la mejora que se propone en este trabajo.

1.4 Motivación

Una dificultad al utilizar procedimientos basados en muestras de las señales entrada-salida para el diagnóstico de sistemas en tiempo discreto, es que se reduce la cantidad de fallas que pueden ser localizadas con respecto al procedimiento equivalente en tiempo continuo. Considerar un sistema lineal invariante en el tiempo descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_f f(t) \quad (1.4.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado; $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas y $f(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de fallas. Una manera de discretizar la ecuación (1.4.1) que coincide exactamente en los instantes de muestreo está basada en la solución de (1.4.1) y adquiere la siguiente forma:

$$x(k+1) = e^{AT}x(k) + \int_0^T e^{A\eta}Bu(k)d\eta + \int_0^T e^{A\tau}Ef(\tau)d\tau \quad (1.4.2)$$

Los métodos reportados en la literatura para diagnóstico de sistemas continuos a partir de muestras de las señales de entrada y salida están basados en diferentes formas de aproximar la integral que involucra al vector de fallas y es donde ocurre el acoplamiento, sin embargo, debido a la forma de aproximación que se utiliza, los resultados disponibles tienen el problema de que se reduce la localizabilidad de las fallas. Esto motiva a la propuesta de un espacio de paridad continuo como alternativa de solución ante el problema de localizabilidad.

El enfoque considerado en este trabajo para evitar esta desventaja, de pérdida de localizabilidad, consiste en considerar un espacio de paridad en tiempo continuo apoyados en un derivador de señales. Mediante un estimador de las derivadas, de la entrada y la salida hasta de orden n , el esquema propuesto permite la detección y localización de fallas con al menos la mismas posibilidades que cuando se utiliza el método basado en observadores en tiempo continuo.

1.5 Estructura de la tesis

Esta tesis está constituida por un total de *seis* capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el presente capítulo, se presenta una breve introducción del trabajo de tesis realizado, seguida de los objetivos tanto general como particulares. Posteriormente en la sección 1.3, se da a conocer la justificación del trabajo realizado mientras que la motivación se presenta en la sección 1.4. Algunos antecedentes importantes son presentados en el capítulo 2 y también se

aborda el tema de espacio de paridad que tradicionalmente se maneja para sistemas discretizados. El capítulo 3 está dedicado al *derivador*, que en esta tesis es una parte fundamental debido a que el espacio de paridad continuo requiere de las derivadas de las señales de entrada y salidas del sistema. En el capítulo 4 se realiza el desarrollo de una versión de espacio de paridad en tiempo continuo, de donde surge la necesidad de la utilización de derivadores para su diseño. Por otra parte, en el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos mediante un ejemplo de aplicación consistente de un sistema de tres tanques interconectados, donde las fallas pueden presentarse tanto en actuadores o sensores. Finalmente en el capítulo 6 se dan las conclusiones finales del trabajo realizado y se propone también el trabajo a futuro que aún falta realizar.

Capítulo 2

ANTECEDENTES

2.1 Introducción

En este capítulo se menciona, en un primer término, el estado del arte referente al diagnóstico de fallas y la problemática de localizabilidad de estas que se presenta al considerar un sistema discretizado. Posteriormente, en la sección 2.3, se explica detalladamente como se obtiene el espacio de paridad y el generador de residuos para un sistema discreto.

2.2 Estado del arte

De acuerdo con Iserman [1], una *falla* es una desviación del valor aceptable, usual o estándar de al menos una propiedad característica del sistema. Otros autores como Edward Y. Chow y Alan S. Willsky [2] definen una falla como cambios inesperados en el sistema, de componentes o variaciones en las condiciones de operación, que degradan el funcionamiento del mismo. Determinar el tipo, tamaño, localización y el tiempo en que ocurre una falla en un sistema es lo que se conoce como *diagnóstico de falla*. Por lo tanto, la detección y diagnóstico oportuna de una falla en un sistema es de suma importancia, ya que permite realizar acciones correctivas y con ello mantener un alto nivel de funcionamiento, así como prevenir problemas de mayor magnitud,

tales como el deterioro de componentes (sensores y/o actuadores), malfuncionamiento, daños en la maquinaria o incluso pérdida de vidas humanas.

El problema de detección de fallas, no es algo nuevo. Desde hace varias décadas se han hecho numerosas investigaciones en el campo de identificación y detección de fallas (FDI) en sistemas dinámicos. En 1976, un estudio de los métodos para la detección de fallas fue realizado por A. S. Willsky [3], donde algunas técnicas de las más relevantes que se mencionan en su trabajo, tales como filtros de detección en 1971 [4] (los cuales producen señales de error indicando la localización de una falla o un cambio en la dinámica del sistema) y el método del múltiple modelo en 1980 [5], consisten en métodos analíticos, los cuales a su vez requieren que un modelo dinámico de algún tipo sea dado.

En 1990, N. Viswanadham y K. D. Minto propusieron uno de los primeros trabajos a cerca del diagnóstico de sistemas muestreados [6], donde se proponen tres esquemas que están orientados principalmente para la detección de fallas: "multirate parity space", "multirate observer" y "multirate detection filters", los cuales tenían distintas ventajas sobre esquemas convencionales de diagnóstico en términos de velocidad y la clase de sistemas para los cuales era posible dicha detección.

La robustez (ante perturbaciones o entradas desconocidas) y sensibilidad (a posibles fallas), son características esenciales que simultáneamente deben satisfacerse en un sistema de identificación y detección de fallas (FDI). Un método de detección de fallas robusto fue propuesto en 1984 por Edward Y. Chow y Alan S. Willsky basándose en la relación de paridad [2]. En este trabajo se consideró el efecto de algunas perturbaciones e incertidumbre en los parámetros del modelo. La consideración de incertidumbre en el diagnóstico de sistemas muestreados fue también analizado por P. S. Zhang *et al* en el 2002 [7], mientras que en el 2003, M. S. Fadali propuso un esquema robusto a entradas desconocidas basado en observadores para el diagnóstico de fallas utilizando la técnica de "lift" y la combinación de multi-muestreo [8].

En general los métodos de detección de fallas pueden ser divididos en dos grandes grupos: aquellos que utilizan el modelo matemático de la planta y aquellos que no se basan en éste. Estos últimos emplean, entre otras técnicas, lo que se conoce como *redundancia física*, que consiste en instalar múltiples sensores para medir la misma cantidad física y evaluar si existe alguna discrepancia entre ellos, de tal manera que es posible aislar y detectar una falla de una manera altamente confiable. Sin embargo, esto implica un mayor costo y también un mayor peso (que en la industria aeronáutica se convierte en algo crítico [9]) y por lo tanto representa una desventaja respecto a los métodos basados en el modelo, los cuales utilizan *redundancia analítica* para la detección y que a su vez es la base de la *generación residual* [2].

De acuerdo con Ding [10] la técnica de diagnóstico de fallas basado en modelos, originada a inicios de los 70's, es eficiente en la detección de fallas en sistemas y ha demostrado en gran número de aplicaciones, procesos industriales y sistemas de control automático, su efectividad en la localización y detección de fallas. Sin embargo, un procedimiento de identificación y detección de fallas implica la generación y evaluación de un *residual* (indicador de posibles fallas), el cual representa la diferencia entre la salida observada de un sensor y el valor esperado de éste en condiciones normales (sin falla)[9]. En tal caso la salida observada y el valor esperado son iguales y por lo tanto el residual es un valor muy cercano a cero.

Entre los métodos básicos de generación residual, que se mencionan en la literatura [10], se encuentran: el filtro de detección de fallas (FDF), el observador de diagnóstico (DO) y el generador residual basado en la relación de paridad (PRRG). El núcleo de un *FDF*, propuesto por Beard y Jones en los años setenta, es un observador de orden completo. Las ventajas de un filtro de detección de fallas yacen en su fácil construcción pues el diseño de estos es de hecho la selección de la matriz de ganancia del observador. El *DO*, es una de las formas más populares en el diagnóstico de fallas debido a su estructura flexible, ya que su diseño se basa en un observador del tipo de Luenberger, mientras que en la construcción de un *PRRG*

se utiliza un modelo en el espacio de estado en lugar de un observador. Por esta razón se reconoce generalmente al enfoque de espacio de paridad como uno de los más importantes en la generación residual basados en el modelo junto con aquellos basados en el observador y los de estimación de parámetros.

Los mejores resultados obtenidos hasta el momento están limitados, según se menciona en publicaciones recientes Izadi (2007) [11] y Zhang (2008) [12], en el número de fallas que pueden ser aisladas, el cual resulta ser menor en relación a métodos de detección en tiempo continuo. Adicionalmente, debido a los avances de la tecnología, las señales útiles para diagnóstico se encuentran frecuentemente disponibles en forma digital. Es decir, la adquisición de datos incluye un proceso de muestreo. Por esto se requiere de métodos de diagnóstico que tomen en cuenta dicho proceso. Por ejemplo, el método del espacio de paridad implica para su diseño una discretización del sistema continuo tal como se muestra en la figura 2.1.



Figura 2.1: Discretización y espacio de paridad

Por tal motivo es necesaria la búsqueda de un método de diagnóstico basado en modelos que no cuente con la reducción del número de fallas que pueden ser localizadas, es decir, que pueda localizar al menos la misma cantidad de fallas que el que sería posible utilizando un método de diagnóstico en tiempo continuo.

Dado que el presente trabajo se enfoca solamente en el *espacio de paridad* para diagnóstico de sistemas, en la siguiente sección se describe como es que se obtiene el generador de residuos, para sistemas LTI en tiempo discreto, a partir de las relaciones de paridad cuando un modelo de un sistema físico en el espacio de estados ha sido dado.

2.3 Espacio de paridad

El espacio de paridad es una técnica popular utilizada para el diagnóstico de sistemas en tiempo discreto. Una de las primeras referencias con un análisis en el espacio de estado para espacios de paridad fué considerado por Chow y Willsky en 1984 [2]. En este trabajo se utiliza una descripción convencional, la cual puede ser encontrada en los trabajos realizados por Iserman [1] y Ding [10] en 2006 y 2008 respectivamente.

Primeramente se considera un sistema lineal, invariante en el tiempo (LTI) y discreto dado por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + E_d d(k) + E_f f(k) \quad (2.3.1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + F_d d(k) + F_f f(k) \quad (2.3.2)$$

donde $x(k)$ es el estado de dimension n , $u(k)$ es el vector de entradas de dimensión p , $d(k)$ es el vector de perturbaciones y $f(k)$ el vector de fallas. Las matrices A , B , C , D , E_d , E_f , F_d y F_f son constantes, conocidas y de dimensiones apropiadas. también se supone que el par (A, C) es observable y que $\text{rango}(C) = m$.

Con la finalidad de construir el generador de residuos suponemos primero que el efecto de las perturbaciones y las fallas es cero, es decir, $d(k) = 0$ y $f(k) = 0$. Expresando $y(k-s)$, con $s \geq 0$, en términos de $x(k-s)$, $u(k-s)$ y $y(k-s+1)$, en términos de $x(k-s)$, $u(k-s)$, $u(k-s+1)$ resulta:

$$y(k-s) = Cx(k-s) + Du(k-s) \quad (2.3.3)$$

$$y(k-s+1) = Cx(k-s+1) + Du(k-s+1) \quad (2.3.4)$$

$$= CAx(k-s) + CBu(k-s) + Du(k-s+1) \quad (2.3.5)$$

de manera que repitiendo este proceso, ecuaciones redundantes son generadas para diferentes

instantes de tiempo.

$$\begin{aligned}
 y(k-s+2) &= CA^2x(k-s) + CABu(k-s) + \\
 &\quad CBu(k-s+1) + Du(k-s+2) \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

$$\begin{aligned}
 y(k) &= CA^s x(k-s) + CA^{s-1}Bu(k-s) + \\
 &\quad \dots + CBu(k+1) + Du(k)
 \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Considerando la siguiente notación para una ventana de tiempo de tamaño k :

$$\begin{aligned}
 y_s(k) &= \begin{bmatrix} y(k-s) \\ y(k-s+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}; \quad u_s(k) = \begin{bmatrix} u(k-s) \\ u(k-s+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix} \\
 H_{O,s} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^s \end{bmatrix}; \quad H_{u,s} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA^{s-1}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

se puede re-escribir las ecuaciones para $y(k-s)$ hasta $y(k)$ de forma compacta como:

$$y_s(k) = H_{O,s}x(k-s) + H_{u,s}u_s(k) \tag{2.3.8}$$

La ecuación (2.3.8) es conocida como la relación de paridad. Note que los vectores de entradas $u_s(k)$ y de salidas $y_s(k)$ se forman con las mediciones y se suponen conocidas. Las matrices $H_{O,s}$ y $H_{u,s}$ son constantes y formadas con las matrices del sistema, las cuales se suponen conocidas. La única variable desconocida es $x(k-s)$.

La idea básica de la relación de paridad es utilizar el hecho de que si $s \geq n$ entonces $\text{rango}(H_{O,s}) = n < \#$ de renglones de $H_{O,s}$, con lo cual existe al menos un vector renglón $\nu_s \neq 0$ de dimensión $(s+1)m$ tal que

$$\nu_s H_{O,s} = 0 \tag{2.3.9}$$

El generador de residuos basado en relaciones de paridad es construido por:

$$r(k) = \nu_s (y_s(k) - H_{u,s}u_s(k)) = \nu_s H_{O,s}x(k-s) = 0 \quad (2.3.10)$$

Los vectores ν_s que satisfacen (2.3.9) son llamados vectores de paridad y al conjunto de vectores de paridad que satisfacen:

$$P_s = \{\nu_s | \nu_s H_{O,s} = 0\} \quad (2.3.11)$$

es llamado espacio de paridad de orden s

Para ver el efecto de las fallas y perturbaciones en el residuo ahora se remueve la restricción utilizada ($d(k) = 0$ y $f(k) = 0$) y se hace un desarrollo similar al que se hizo para el caso sin falla. De esta forma se obtienen las siguientes matrices:

$$f_s(k) = \begin{bmatrix} f(k-s) \\ f(k-s+1) \\ \vdots \\ f(k) \end{bmatrix}; \quad d_s(k) = \begin{bmatrix} d(k-s) \\ d(k-s+1) \\ \vdots \\ d(k) \end{bmatrix}$$

$$H_{f,s} = \begin{bmatrix} F_f & 0 & \cdot & 0 \\ CE_f & F_f & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA^{s-1}E_f & \cdots & CE_f & F_f \end{bmatrix}; \quad H_{d,s} = \begin{bmatrix} F_d & 0 & \cdot & 0 \\ CE_d & F_d & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA^{s-1}E_d & \cdots & CE_d & F_d \end{bmatrix}$$

y entonces la ecuación para $y_s(k)$ ahora puede escribirse como:

$$y_s(k) = H_{O,s}x(k-s) + H_{u,s}u_s(k) + H_{f,s}f_s(k) + H_{d,s}d_s(k)$$

mientras que el generador de residuos queda como:

$$r_s(k) = \nu_s ((H_{f,s}f_s(k) + H_{d,s}d_s(k))), \quad \nu_s \in P_s. \quad (2.3.12)$$

que como puede verse en la ecuación (2.3.12) ahora está en función de las posibles fallas y perturbaciones del sistema.

Aunque el diseño de un generador residual basado en las ecuaciones de paridad puede construirse de una manera relativamente fácil, la implementación en línea de la ecuación (2.3.10) no es la ideal dado que tanto los valores pasados de entrada como los de salida necesitan ser almacenados en memoria. Esta es una de las razones por las cuales el enfoque de espacio de paridad es aplicado principalmente a sistemas dinámicos discretos.

Capítulo 3

DERIVACIÓN DE SEÑALES

3.1 Introducción

Tal como se vio en el capítulo anterior, uno de los principales problemas que se tiene al considerar métodos de diagnóstico en tiempo discreto es la pérdida de localizabilidad del número de fallas que se puede presentar en un sistema. Como una alternativa de solución, en el presente trabajo, se propone el diseño de paridad *continuo* cuyo diseño consta de las derivadas de la entrada y de la salida de un sistema dinámico.

En este capítulo se presenta la construcción de un derivador de señales, el cual es la herramienta principal en el diseño del espacio de paridad para tiempo continuo. El objetivo es diseñar un derivador que proporcione buenos resultados aun si la señal a derivar contiene algún tipo de ruido. En la sección 3.2 se presenta un derivador basado en el teorema de Taylor, el cual consta de una serie finita y está dada en términos de las m derivadas de la señal a estimar y de un punto al rededor del cual se realiza la aproximación de dicha serie. En la sección 3.3 se presenta un derivador tomado del trabajo realizado por A. Levant en 1998 [13], el cual utiliza la técnica de modos deslizantes para su construcción. Apoyados en el trabajo realizado por L. K. Vasiljevic y H. K. Khalil en 2008 [14], en la sección 3.6 finalmente se presenta un derivador

basado en un observador de altas ganancias, el cual proporcionó los mejores resultados si se considera una señal con ruido. Las simulaciones para cada uno de los estimadores analizados en este trabajo, pueden ser revisadas directamente en el apéndice de la presente tesis.

3.2 Derivación mediante expansión en series de Taylor

En esencia, la *serie de Taylor* provee un medio para predecir el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto. En particular, el teorema establece que cualquier función suave puede ser aproximada con un polinomio. La serie de Taylor está dada entonces por la ecuación (3.2.1). (Véase [15]).

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x - a)^m + R_n \quad (3.2.1)$$

donde $f(x)$ es la función en el instante x , a es el punto alrededor del cual se hace la aproximación y R_n representa el residuo que se tiene al truncar la serie.

Como se puede observar, la ecuación (3.2.1) está en función de las m derivadas de a . De la serie de Taylor podemos decir que si esta tiende a infinito, entonces el residuo tiende a cero y así el valor estimado de la función converge a la función real $f(x)$. Es claro que para efectos prácticos y con el fin de reducir costo computacional únicamente se toman los primeros términos, que para alguna aplicación sean los más significativos, teniendo siempre un error en la estimación.

Si consideramos ahora diferentes instantes de tiempo para una función $f(t)$ encontramos una relación similar para cada uno de estos instantes de la forma de la ecuación (3.2.1), generándose así una ventana de tiempo desde t_1 hasta t_n , entorno al instante a , como se muestra

a continuación:

$$\begin{aligned}
 f(t_1) &= f(t_a) + f'(t_a)(t_1 - t_a) + \frac{f''(t_a)}{2!}(t_1 - t_a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(t_a)}{m!}(t_1 - t_a)^m + R_n \\
 f(t_2) &= f(t_a) + f'(t_a)(t_2 - t_a) + \frac{f''(t_a)}{2!}(t_2 - t_a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(t_a)}{m!}(t_2 - t_a)^m + R_n \\
 &\vdots = \vdots \\
 f(t_n) &= f(t_a) + f'(t_a)(t_n - t_a) + \frac{f''(t_a)}{2!}(t_n - t_a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(t_a)}{m!}(t_n - t_a)^m + R_n
 \end{aligned}$$

si se trunca la serie hasta el término donde aparece la derivada de orden m , las relaciones anteriores pueden re-escribirse de manera matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_a) \\ f(t_a) \\ \vdots \\ f(t_a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 - t_a & \dots & \frac{(t_1 - t_a)^m}{m!} \\ t_2 - t_a & \dots & \frac{(t_2 - t_a)^m}{m!} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_n - t_a & \dots & \frac{(t_n - t_a)^m}{m!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(t_a) \\ \vdots \\ f^{(m)}(t_a) \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

y de manera compacta como:

$$F = F_a + HF' \quad (3.2.3)$$

donde F es el vector que contiene a la función en los diferentes instantes de tiempo, formando así una ventana temporal con la que podrá obtenerse el valor de las m derivadas en el instante t_a , F_a es el vector de la función en el punto donde se realiza la aproximación, H es una matriz formada por la diferencia entre los instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_n , que conforman la ventana temporal y t_a , y F' es el vector que contiene a las derivadas de la función en el instante t_a .

De la ecuación (3.2.3), es posible entonces encontrar las m derivadas despejando F' como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 H^T H F' &= H^T (F - F_a) \\
 F' &= (H^T H)^{-1} H^T (F - F_a)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4}$$

donde $(H^T H)^{-1}$ se conoce como la *pseudo inversa* de H .

Mediante la implementación computacional de la ecuación (3.2.4) es posible obtener las m derivadas de una señal $f(t)$ continua y diferenciable a partir del instante (t_a) . Para la implementación del derivador se utilizó una señal senoidal, de prueba, dado que tiene derivadas conocidas y es fácil verificar si los resultados que se obtienen son correctos. En este método de *Taylor* se hizo una variación en el número de términos de la serie, el tamaño de la ventana y la frecuencia de muestreo obteniendo diferentes resultados de simulación que a continuación se presentan.

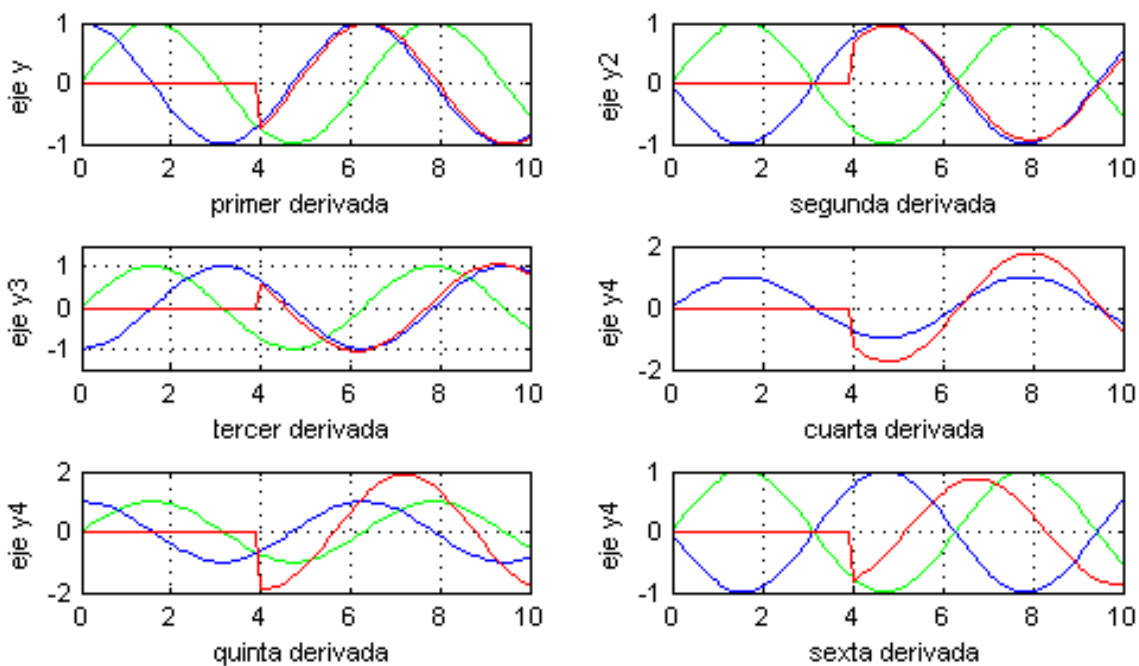


Figura 3.1: Estimación de derivadas de $f(t) = \text{sen}(t)$ mediante el método de Taylor.

En la figura 3.1 se presentan tres señales diferentes. La señal en verde es la función seno, de la cual se obtendrán sus derivadas. El color azul representa la derivada real de la función seno, mientras que el color rojo es la estimación de la derivada que se logra mediante la serie de Taylor. Por lo tanto, la señal en gris oscuro debe converger a la señal dibujada en negro. En este caso se ha considerado 7 términos en la serie de Taylor, una ventana de tiempo de 40, es decir, t_1, t_2, \dots, t_{40} y una frecuencia de muestreo de 0.1 segundos para la construcción de la señal senoidal en un tiempo total de 10 segundos.

En la figura 3.1 se puede apreciar como la estimación diverge del valor esperado conforme aumenta el orden de la derivada. Con el fin de mejorar las estimaciones, se incrementa a 10 el número de términos de la serie de Taylor, a 100 el tamaño de la ventana y a 0.01 segundos la frecuencia de muestreo, dando como resultado las derivadas estimadas mostradas en la figura 3.2.

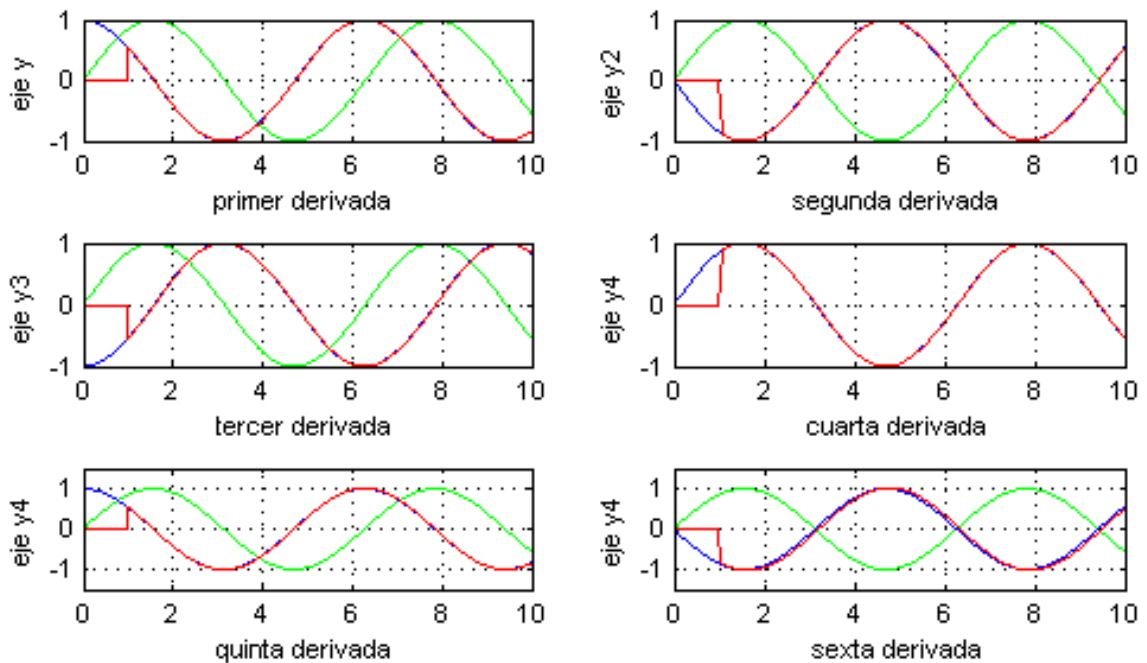


Figura 3.2: Estimación de las primeras 6 derivadas.

Como puede verse en la figura 3.2, la estimación mejoró considerablemente en cada una de las derivadas, sin embargo esto implica más costo computacional y un mayor error de estimación al considerar señales ruidosas como se verá a continuación.

Al considerar una señal $f(t) = \text{sen}(t) + \text{wgn}$, donde wgn es una "pequeña" componente de ruido blanco gaussiano, claramente se aprecia de la figura 3.3, que los resultados en ese caso no son favorables en la estimación de la derivada debido al efecto que produce el ruido a partir de la segunda estimación. Una forma de reducir el efecto del ruido, al utilizar este método, es disminuir la frecuencia de muestreo ya que con esto menos componentes de ruido serán derivadas, mejorando así estimación de la señal ruidosa.

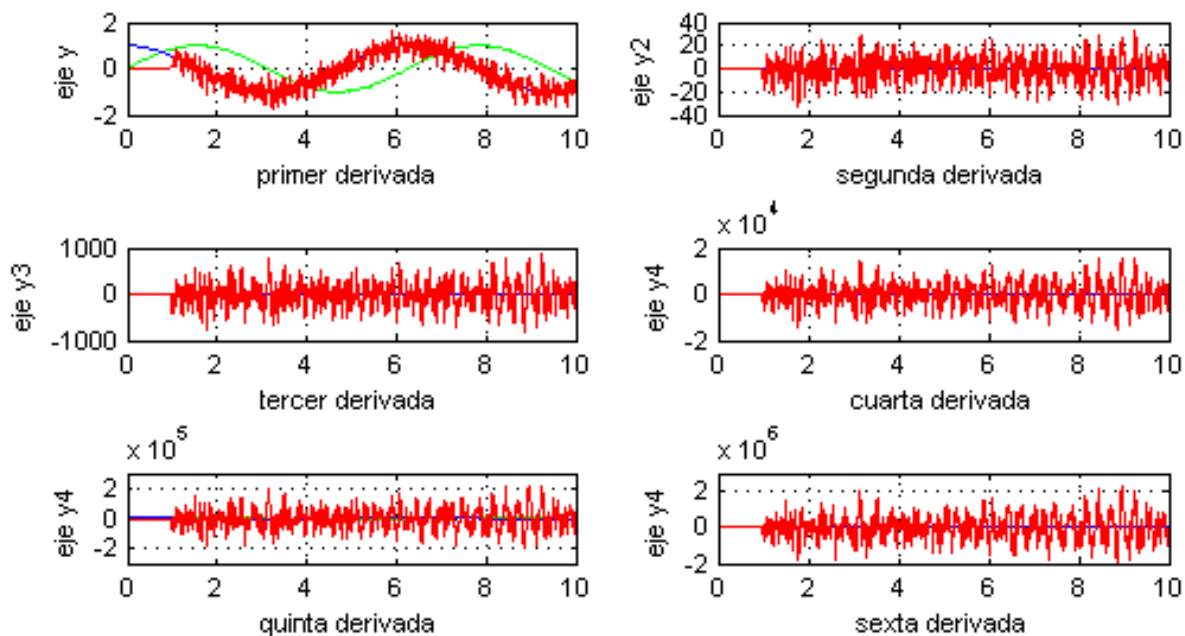


Figura 3.3: Estimación de las derivadas de una señal con ruido blanco.

3.3 Derivación mediante la técnica de modos deslizantes

Un segundo método de estimación de derivadas de señales estudiado en este trabajo fue el propuesto por Arie Levant en 1998 [13], el cual consta de dos algoritmos deslizantes formando un control continuo tal que las siguientes igualdades se mantienen después de un tiempo transitorio finito:

$$\sigma = x - f(t) = 0, \dot{\sigma} = u - \dot{f}(t) = 0$$

El derivador que se propone en [13] es un derivador de primer orden, es decir, su diseño está hecho para calcular sólo la primer derivada de una señal que cumpla con los requisitos de continuidad y diferenciabilidad, sin embargo, mediante una conexión en cascada es posible obtener las derivadas sucesivas de la señal $f(t)$, con la limitación de que estas últimas tienen una menor calidad en la estimación. En este trabajo solamente se presentan las primeras cuatro derivadas de una función senoidal que se obtienen de la conexión en cascada del diferenciador de primer orden propuesto en [13].

Con la finalidad de obtener la derivada de una señal continua y diferenciable, primero se considera la siguiente ecuación auxiliar:

$$\dot{x} = u \tag{3.3.1}$$

donde el control u es utilizado para la evaluación de $\dot{f}(t)$, es decir, la salida del diferenciador será u . Las ecuaciones del diferenciador son entonces las que se presentan a continuación:

$$u = u_1 - \lambda |x - f(t)|^{1/2} \text{sign}(x - f(t)) \tag{3.3.2}$$

$$\dot{u} = -\alpha \text{sign}(x - f(t)) \tag{3.3.3}$$

donde las constantes $\alpha > C > 0$, $\lambda > 0$, satisfacen el criterio de convergencia (de $u(t)$ a $\dot{f}(t)$) mencionado en [13], siendo C la constante de Lipschitz de la derivada de $f(t)$.

Las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3) son implementadas en *Matlab simulink* obteniendo diferentes resultados de simulación tanto para señales libres de ruido como para señales ruidosas. A continuación se presentan las primeras cuatro derivadas que se obtienen como resultado para el caso en que la señal senoidal está libre de ruido.

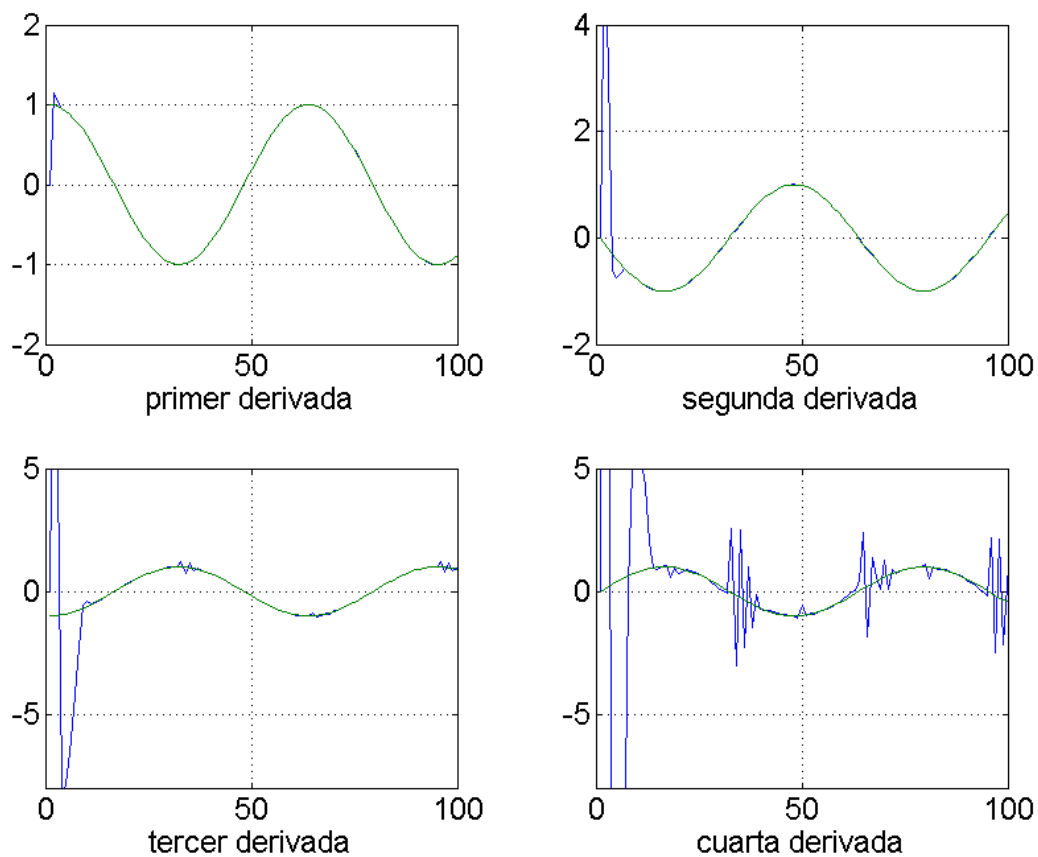


Figura 3.4: Estimación de derivadas $f(t) = \text{sen}(t)$.

En la figura 3.4, se aprecian las primeras cuatro derivadas de la señal $f(t) = \text{sen}(t)$. En este caso, la señal que resulta de la estimación (azul) se distingue por presentar un corto tiempo transitorio antes de converger al valor esperado (verde). Como puede verse, la primer derivada

converge a su respectivo valor esperado en un tiempo relativamente corto, siendo así una muy buena estimación. A su vez se observa que la segunda y tercer derivada tienen también una buena aproximación al valor esperado pues aunque comienza aparecer un poco de error de estimación en el cálculo, no es tan significativo como el que se presenta a partir de la cuarta derivada.

Ahora se considera la señal $f(t) = \text{sen}(t) + \text{wgn}$, donde wgn representa una pequeña componente de ruido blanco gaussiano. Para efectos de comparación entre un método de estimación y otro, el nivel de ruido que se maneja en las simulaciones es el mismo para cada uno de los diferentes métodos de estimación de derivadas de señales que en el presente trabajo se mencionan.

En la figura 3.5, se aprecia que la estimación de la derivada únicamente es aceptable en el primer cálculo (recuérdese que se trata de un derivador de primer orden) ya que el efecto del ruido de la señal provoca desviaciones considerables en las derivadas sucesivas de $f(t)$ de tal manera que el método es, al igual que el método de Taylor, inapropiado para la aplicación específica que es la construcción del espacio de paridad para tiempo continuo.

3.4 Derivación mediante un observador de altas ganancias

En este apartado se presenta un derivador extraído del trabajo realizado por L. K. Vasiljevic y H. K. Khalil en el 2008 [14]. La principal herramienta que se utiliza para el diseño de este derivador es un *observador de alta ganancia*. Idealmente, cuando el ruido no está presente en una señal $u(t)$, el error en la estimación de la derivada tiende a cero si la ganancia del observador crece hacia infinito. Sin embargo, grandes ganancias indeseablemente amplifican la medición del ruido, por lo que existe un compromiso entre el estimado de la derivada real en ausencia de ruido y la amplificación del efecto de este, en las derivadas, si se considera una señal ruidosa.

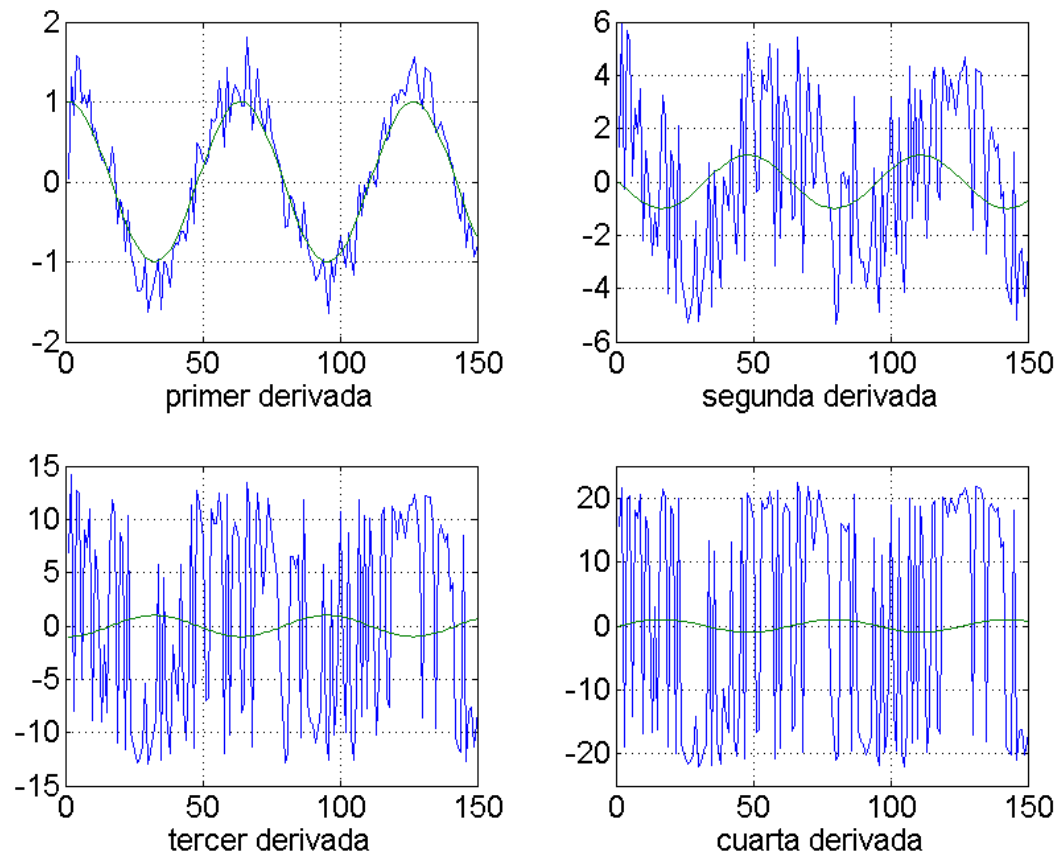


Figura 3.5: Estimación de derivadas de una señal ruidosa $f(t) = \text{sen}(t) + \text{wgn}$.

La relación que describe al observador de alta ganancia está dada entonces por la ecuación (3.4.1) como se muestra a continuación:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (3.4.1)$$

con

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1/\varepsilon & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha_2/\varepsilon^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n-1}/\varepsilon^{n-1} & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n/\varepsilon^n & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} \alpha_1/\varepsilon \\ \alpha_2/\varepsilon^2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}/\varepsilon^{n-1} \\ \alpha_n/\varepsilon^n \end{bmatrix}$$

donde el polinomio $s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$ es Hurwitz y $\varepsilon < 0$

La función de transferencia de $u(t)$ a $\hat{x}(t)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ está dada por:

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & \cdots & s^{n-2} & s^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

de manera que asintóticamente conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, el sistema descrito anteriormente actúa como diferenciador bajo la consideración de que la entrada u es continua y diferenciable. En este caso las $n - 1$ derivadas que es posible estimar son obtenidas directamente del vector de estados $\hat{x}(t)$, siendo n el orden del sistema.

Por otro lado, la selección de la variable ε es de suma importancia en el diseño del derivador sobre todo en señales con ruido. De manera experimental se sabe que al elegir un valor muy pequeño de ε para una entrada libre de ruido mejora de manera significativa la estimación de la derivada, sin embargo, si la señal de entrada está sujeta a algún tipo de ruido la estimación no será tan buena como en el caso anterior debido al efecto que el derivador tendrá sobre el ruido de la señal $u(t)$. En este caso la selección de ε se vuelve crítica y entonces se busca un valor de ε que proporcione una buena estimación aún si la señal no está libre de ruido. En los resultados que se presentan a continuación se utilizó un valor de $\varepsilon = 0.3$

La implementación del derivador es llevada a cabo fácilmente mediante *Matlab Simulink* tal como se muestra en la figura 3.6.

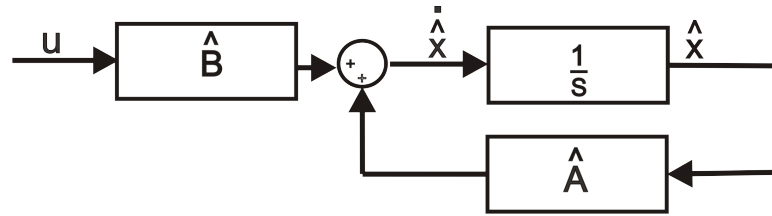


Figura 3.6: Implementación del derivador en simulink.

Considerando una señal libre de ruido, continua y diferenciable $u(t)$ y además un sistema de tercer orden descrito por la ecuación (3.4.1) cuyas matrices de distribución son las siguientes:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -6/\varepsilon & 1 & 0 \\ -11/\varepsilon^2 & 0 & 1 \\ -6/\varepsilon^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 6/\varepsilon \\ 11/\varepsilon^2 \\ 6/\varepsilon^3 \end{bmatrix}$$

donde valores singulares de \hat{A} son $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -6.66$ y $\lambda_3 = -3.33$ (siendo así un sistema estable con $\varepsilon = 0.3$.) se obtienen los siguientes resultados:

En la figura 3.7 se observa el valor de los estados estimados (las derivadas) que se obtienen de la implementación de la ecuación (3.4.1). Nótese que el estado uno es el valor de la entrada $u(t) = \text{sen}(t)$, mientras que los estados dos y tres corresponden a la primera y segunda derivada de $u(t)$ respectivamente. En este caso el valor estimado de la derivada también presenta un corto tiempo transitorio y en la figura 3.7 se aprecia en color azul y el valor esperado en verde. Como puede verse, en este derivador también existe una desviación del valor esperado y el estimado conforme aumenta el orden en la estimación, sin embargo, el método empleado tiene ventajas significativas respecto los dos anteriores al considerar una señal ruidosa $u(t) + wgn$ como se muestra a continuación.

El nivel de ruido considerado en este caso es el mismo que se utilizó en los métodos de estimación anteriores. Como puede verse en la figura 3.8, el efecto del ruido en el cálculo de las primeras dos derivadas es relativamente pequeño, por lo que ahora se realiza la estimación

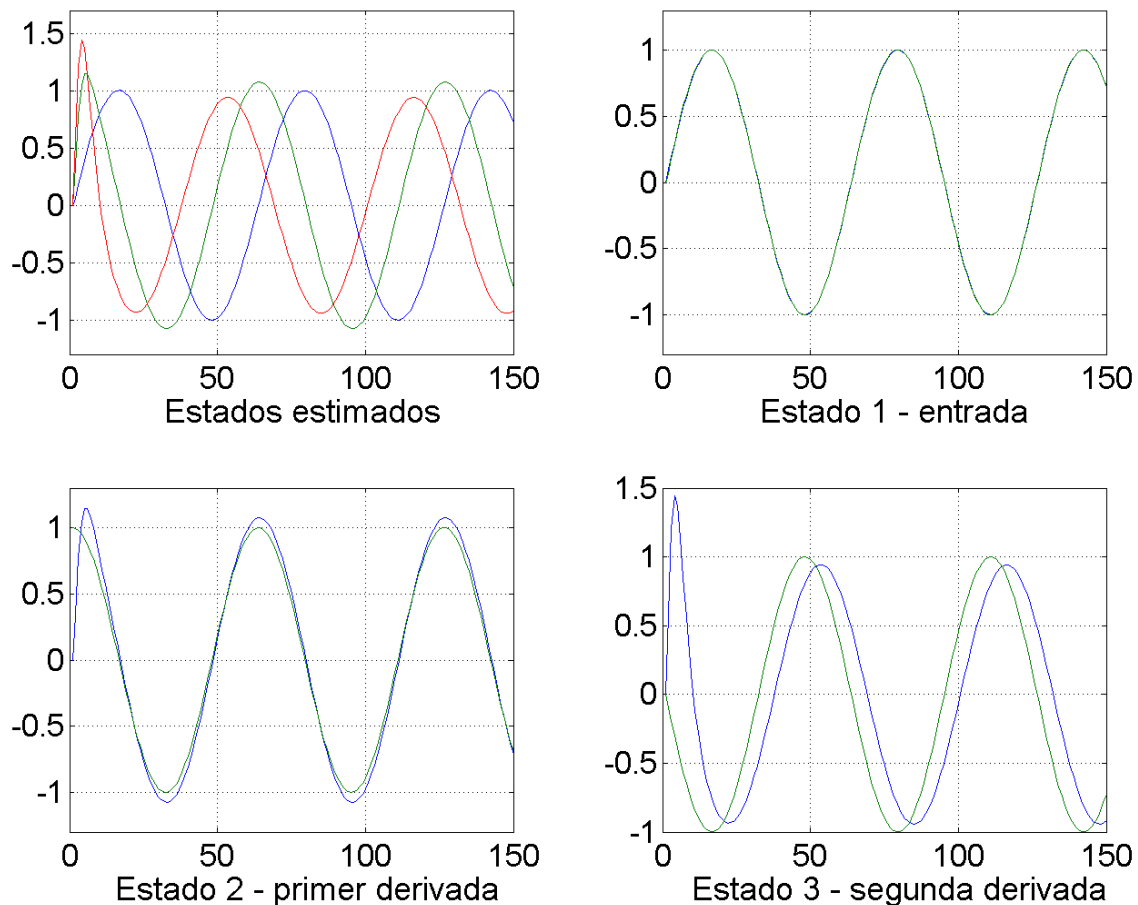


Figura 3.7: Estados estimados (derivadas) de un sistema de tercer orden.

para un sistema de cuarto orden donde las matrices de distribución son como se muestran en seguida:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -10/\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ -35/\varepsilon^2 & 0 & 1 & 0 \\ -50/\varepsilon^3 & 0 & 0 & 1 \\ -24/\varepsilon^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 10/\varepsilon \\ 35/\varepsilon^2 \\ 50/\varepsilon^3 \\ 24/\varepsilon^4 \end{bmatrix}$$

Dado que se trata de un sistema de cuarto orden, será posible obtener hasta un máximo de

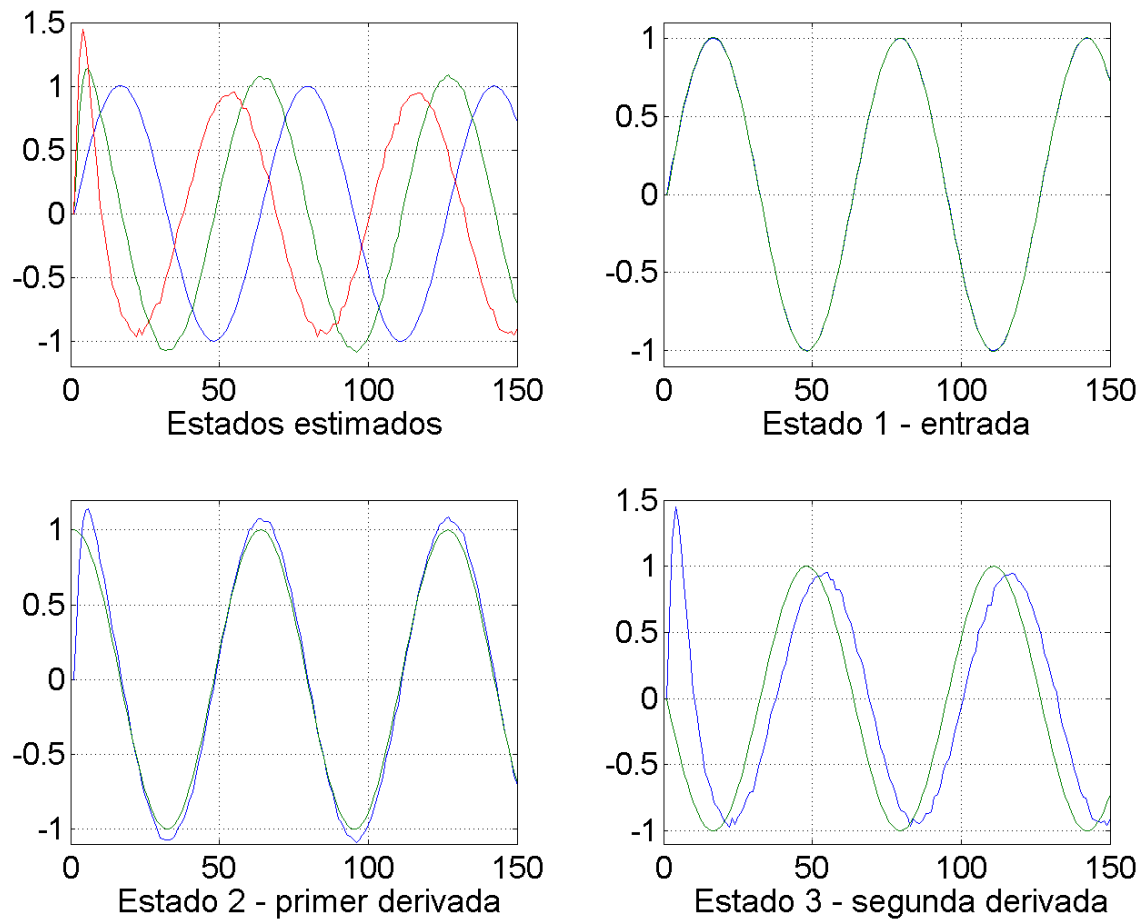


Figura 3.8: Estados estimados (derivadas) de $u(t) + wgn$.

tres derivadas. En este caso los valores singulares de \hat{A} son $\lambda_1 = -13.3$, $\lambda_2 = -10$, $\lambda_3 = -6.6$ y $\lambda_4 = -3.3$ con $\varepsilon = 0.3$.

Considerando que la señal $u(t)$ está sujeta a ruido, los resultados obtenidos son una buena estimación de la derivada de acuerdo a la figura 3.9. Lo anterior hace a este método apropiado para el diseño del espacio de paridad continuo.

En general, los resultados presentados en este capítulo son favorables con cada uno de los métodos al considerar señales libres de ruido. Sin embargo, al considerar señales ruidosas

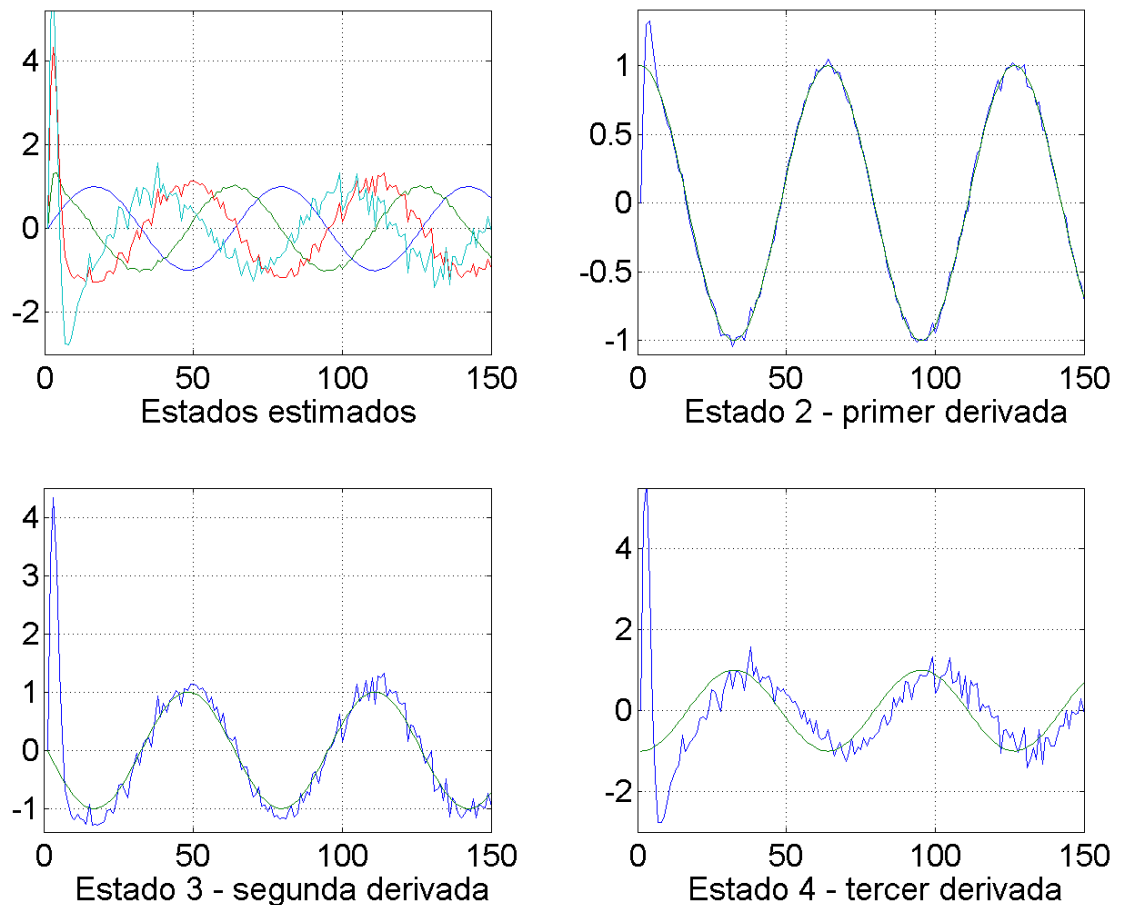


Figura 3.9: Estados estimados (derivadas) de un sistema de cuarto orden para la señal $f(t) = \text{sen}(t) + \text{wgn}$.

algunos métodos se vuelven inapropiados en la estimación de la derivada. El derivador que se obtiene utilizando la serie de Taylor resulta ser ineficiente y tiene demasiadas restricciones si se quiere atenuar el efecto del ruido en las derivadas. Por otro lado el método de modos deslizantes es un poco más robusto a este tipo de señales ruidosas, sin embargo, para la aplicación que se requiere en este trabajo los resultados obtenidos no son satisfactorios. El derivador basado en un observador de alta ganancia ofrece los mejores resultados de simulación en lo que respecta a señales con ruido y por consiguiente es el que se utiliza para la implementación en el diseño del espacio de paridad para tiempo continuo que se presenta en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

ESPACIO DE PARIDAD CONTINUO

4.1 Introducción

En este capítulo se realiza el espacio de paridad para tiempo continuo. Como podrá verse durante el desarrollo del capítulo, se sigue un procedimiento similar al que se realizó para el diseño del espacio de paridad en tiempo discreto presentado en el capítulo 2, obteniendo las mismas matrices constantes y un generador de residuo similar, siendo la única diferencia la implementación entre un caso y otro (continuo y discreto).

4.2 Espacio de paridad en tiempo continuo

De manera similar a como se realizó el espacio de paridad para sistemas discretos es posible el diseño del espacio de paridad para sistemas continuos. Primeramente, se considera el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo dado por las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_d d(t) + E_f f(t) \quad (4.2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + F_d d(t) + F_f f(t) \quad (4.2.2)$$

al igual que para el caso discreto, $x(t)$ es el vector de estado de orden n , $u(t)$ es el vector de entradas de dimensión p , $d(t)$ es el vector de perturbaciones, $f(t)$ el vector de fallas y las matrices $A, B, C, D, E_d, E_f, F_d, F_f$ son constantes, conocidas y de dimensiones apropiadas, el par (A, C) es observable y $\text{rango}(C) = m$.

Para obtener el generador de residuos para el sistema continuo se asume $d(t) = 0$ y $f(t) = 0$ y se realiza un desarrollo similar que para el caso discreto como sigue:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) \quad (4.2.3)$$

$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t) \quad (4.2.4)$$

$$\ddot{y}(t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t) \quad (4.2.5)$$

y siguiendo el procedimiento se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= CA^3x(t) + CA^2Bu + CAB\dot{u}(t) + \\ &CB\ddot{u}(t) + D\ddot{u}(t) \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

\vdots

$$\begin{aligned} y^{(s)} &= CA^s x(t) + CA^{s-1}Bu + \dots + \\ &CBu^{(s-1)}(t) + Du^{(s)}(t) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

donde s es la s -ésima derivada que se toma en el diseño del espacio de paridad continuo.

Introduciendo la siguiente notación:

$$y_s(t) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(s)} \end{bmatrix}; \quad u_s(t) = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \vdots \\ u^{(s)} \end{bmatrix}; \quad H_{O,s} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^s \end{bmatrix}; \quad H_{u,s} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-1} & \dots & CB & D \end{bmatrix}$$

se puede notar la semejanza que existe con respecto a las matrices que se forman al realizar el espacio de paridad discreto de la sección 2.2. Dichas ecuaciones pueden ser también re-escritas de manera compacta como:

$$y_s(t) = H_{O,s}x(t) + H_{u,s}u_s(t) \quad (4.2.8)$$

La ecuación (4.2.8) representa la relación de paridad para un sistema continuo. La diferencia entre esta última y su contraparte discreta es que ahora los vectores de entrada y salida se encuentran en función de las derivadas de las entradas y salidas del sistema respectivamente. Nótese que las matrices $H_{O,s}$ y $H_{u,s}$ son idénticas a las obtenidas para el caso discreto y la única variable desconocida es de igual forma $x(t)$.

Tomando en cuenta las consideraciones del caso discreto, es decir, utilizando el hecho de que si $s \geq n$ entonces $\text{rango}(H_{O,s}) = n < \#$ de renglones de $H_{O,s}$, entonces existe al menos un vector renglón $\nu_s \neq 0$ que para el caso continuo también satisface la siguiente ecuación:

$$\nu_s H_{O,s} = 0 \quad (4.2.9)$$

asi, el generador de residuos basado en relaciones de paridad para el caso continuo está dado por:

$$r(t) = \nu_s (y_s(t) - H_{u,s}u_s(t)) = 0 \quad (4.2.10)$$

de este modo los vectores ν_s que satisfacen (4.2.10) son llamados vectores de paridad. El conjunto de vectores para los cuales se satisface

$$P_s = \{\nu_s | \nu_s H_{O,s} = 0\} \quad (4.2.11)$$

forma el espacio de paridad continuo. Considerando ahora el efecto de las fallas en el sistema ($f(t) \neq 0$ y $d(t) \neq 0$) y realizando el procedimiento para encontrar la relación de paridad, se obtiene la siguientes matrices:

$$H_{f,s} = \begin{bmatrix} F_f & 0 & \cdots & 0 \\ CE_f & F_f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-1}E_f & \cdots & CE_f & F_f \end{bmatrix}; f(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \\ \ddot{f}(t) \\ \vdots \\ f^{(s)}(t) \end{bmatrix}$$

$$H_{d,s} = \begin{bmatrix} F_d & 0 & \cdots & 0 \\ CE_d & F_d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-1}E_d & \cdots & CE_d & F_d \end{bmatrix}; d(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ \ddot{d}(t) \\ \vdots \\ d^{(s)}(t) \end{bmatrix}$$

de este modo la ecuación (4.2.8) ahora queda de la siguiente forma:

$$y_s(t) = H_{O,s}x(t) + H_{u,s}u_s(t) + H_{f,s}f(t) + H_{d,s}d(t) \quad (4.2.12)$$

multiplicando la ecuación (4.2.12) por un vector ν_s tal que la ecuación (4.2.9) se satisfaga se obtiene:

$$\nu_s(y_s(t) - H_{u,s}u_s(t)) = \nu_s(H_{f,s}f(t) + H_{d,s}d(t)) \quad (4.2.13)$$

y finalmente el generador de residuos queda como:

$$r_s(t) = \nu_s(H_{f,s}f(t) + H_{d,s}d(t)) \neq 0, \nu_s \in P_s. \quad (4.2.14)$$

Así y mediante el uso del derivador basado en un observador de alta ganancia propuesto en el capítulo 3, la construcción del espacio de paridad para tiempo continuo y el generador residual es llevada a cabo siguiendo el mismo procedimiento que se emplea para tiempo discreto. De esta manera se tiene una gran semejanza entre las matrices que se generan en el diseño de

ambos casos (continuo y discreto). Sin embargo, es claro que la principal diferencia entre el espacio de paridad continuo y su contraparte discreta está en la implementación.

Para la implementación del generador de residuo descrito por la ecuación (4.2.14) se utiliza el miembro izquierdo de la ecuación (4.2.13), mientras que el miembro derecho es útil para diseño, que implica hacer que el residual sea sensible o robusto a una falla determinada.

En el siguiente capítulo se presenta un ejemplo de aplicación del espacio de paridad para tiempo continuo obtenido en este capítulo, en el cual se evalúa el funcionamiento del generador residual para diferentes escenarios en que una falla puede ocurrir.

Capítulo 5

EJEMPLO DE APLICACIÓN

5.1 Introducción

Con la finalidad de poner a prueba al generador residual obtenido en el capítulo 4, en este capítulo se presenta un ejemplo de aplicación que consiste de un sistema de tres tanques interconectados como el que se muestra en la figura 5.1. En una primera fase, se obtiene el espacio de paridad para el sistema linealizado en determinado punto de operación y se considera que durante el proceso no ocurre alguna falla, esperando que la señal de residuo tenga un valor cercano a cero. Posteriormente se considera el caso donde alguna falla puede ocurrir durante el proceso ya sea en los actuadores o sensores de cualquiera de los tanques, bajo estas condiciones el valor esperado del generador residual es diferente de cero. Finalmente, se considera el caso donde puede ocurrir cualquiera de las fallas anteriormente mencionadas y adicionalmente una pequeña componente de ruido blanco afectando a la señal de salida, que es como ocurre en un caso real. En este capítulo solo se presentan los resultados principales del ejemplo de aplicación, sin embargo en el apéndice de esta tesis, la simulación correspondiente puede ser revisada con mayor detalle.

5.2 Sistema de tres tanques

Para la construcción de un espacio de paridad continuo se considera un sistema de tres tanques como el que se muestra en la figura 5.1. Este sistema puede ser encontrado en el trabajo realizado por Ding en 2008 [10].

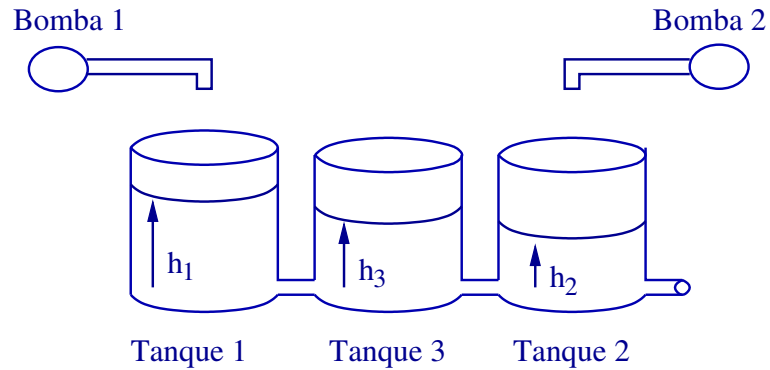


Figura 5.1: Sistema de tres tanques.

El sistema consta de tres tanques idénticos interconectados entre sí, las entradas son las bombas 1 y 2 en tanto que las salidas son los niveles de cada tanque descritos por las variables h_1 , h_2 y h_3 . Nótese que los tanques uno y dos son los que se localizan en los extremos y que el tanque tres está entre estos dos.

5.2.1 Modelo no lineal

El modelo no lineal del sistema de tres tanques mostrado en la figura 5.1 se obtiene aplicando las leyes de Torricelli tomando en cuenta los flujos de entrada y de salida del sistema. De este modo, la dinámica del modelo no lineal queda representada como:

$$A\dot{h}_1 = Q_1 - Q_{13} \quad (5.2.1)$$

$$A\dot{h}_2 = Q_2 + Q_{32} - Q_{20} \quad (5.2.2)$$

$$A\dot{h}_3 = Q_{13} - Q_{32} \quad (5.2.3)$$

con

$$Q_{13} = a_1 s_{13} \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g|h_1 - h_3|}$$

$$Q_{32} = a_3 s_{23} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|}$$

$$Q_{20} = a_2 s_0 \sqrt{2gh_2}$$

Donde los parámetros Q_1, Q_2 son los flujos de entrada; Q_{ij} es el flujo del i -ésimo al j -ésimo tanque; $h_i(t)$, $i=1, 2, 3$ son los niveles de cada tanque; A es el área de la sección transversal de cada tanque; a_i , $i=1, 2, 3$ son los coeficientes de flujo de los conductos (que permiten la interconexión entre los tanques) 1, 2, y 3 respectivamente y s_{12}, s_{23}, s_0 es el área de la sección transversal de cada uno de estos conductos.

5.2.2 Modelo lineal

El modelo lineal se obtiene del modelo no lineal descrito por las ecuaciones (5.2.1)-(5.2.3) mediante una linealización en un punto de operación. En este ejemplo de aplicación, el punto de operación que se consideró está en $h_1 = 45\text{cm}$, $h_2 = 15\text{cm}$, y $h_3 = 30\text{cm}$, de este modo el modelo lineal está dado entonces por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.2.4)$$

$$y = Cx \quad (5.2.5)$$

donde

$$x = y = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.0085 & 0 & 0.0085 \\ 0 & -0.00195 & 0.0084 \\ 0.0085 & 0.0084 & -0.0169 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0065 & 0 \\ 0 & 0.0065 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Antes de comenzar propiamente con el diseño del espacio de paridad continuo, se determina la estabilidad, controlabilidad y observabilidad del sistema de tres tanques.

Estabilidad

De acuerdo a la definición 2.1 dada en [16],

"Un sistema lineal es estable si y solo si las raíces del polinomio característico de la matriz A se localizan en el semiplano izquierdo del plano complejo."

Los valores característicos se obtienen al evaluar el polinomio característico que resulta de calcular el determinante de la matriz $(\lambda I - A)$ ó bien mediante el comando $eig(A)$ de *Matlab*. Para efectos prácticos se utiliza el comando $eig(A)$ obteniendo así los valores característicos de A que son:

$$\lambda_1 = -0.0245, \lambda_2 = -0.0060, \lambda_3 = 0.0031$$

Puesto que uno de los tres valores singulares de A , $\lambda_3 = 0.0031$, está en el semiplano derecho del plano complejo, entonces el sistema lineal es inestable, lo cual significa que el sistema por si solo no podrá llevar a los estados a su valor deseado o dicho en otras palabras, el sistema no

podrá mantenerse funcionando en el punto de operación donde ha sido linealizado. Sin embargo, mediante una retroalimentación de estado de la forma $u = -kx$, donde k es un control que se obtiene del comando *place* de matlab, es posible llevar a los estados del sistema hacia la estabilidad, lo cual es posible si el sistema bajo consideración es controlable.

Controlabilidad

La propiedad de controlabilidad de un sistema puede ser entendida, según [16], como:

"La capacidad que puede tener la entrada $u(t)$ en modificar el estado $x(t)$ en un tiempo finito."

Para los sistemas LTI, la controlabilidad es determinada mediante la matriz de controlabilidad de kalman $U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$, mediante la cual se obtiene una condición necesaria y suficiente de controlabilidad, independiente de intervalos de tiempo. De acuerdo al teorema 2.3 dado en [16], el sistema de ecuaciones lineales de estado descrito por (5.2.4) y (5.2.5) es controlable si y solo si se satisface:

$$\text{rango}(U) = \text{rango} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \quad (5.2.6)$$

donde n es el orden del sistema.

El sistema bajo consideración es de tercer orden, o sea $n = 3$, así la controlabilidad del sistema de tres tanques está dada por:

$$\text{rango}(U) = \text{rango} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} =$$

$$\text{rango}(U) = \text{rango} \begin{bmatrix} 0.0065 & 0 & -5.5 \times 10^{-5} & 0 & 9.3 \times 10^{-7} & 4.6 \times 10^{-7} \\ 0 & 0.0065 & 0 & -1.2 \times 10^{-5} & 4.6 \times 10^{-7} & 4.8 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 5.5 \times 10^{-5} & 5.4 \times 10^{-5} & -1.4 \times 10^{-6} & -1.0 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(U) = 3$$

Puesto que la matriz U es de rango completo, el sistema es controlable y por lo tanto es posible obtener un controlador k que estabilice al sistema.

Tomando en cuenta la entrada $u = -kx$ y sustituyendo en la ecuación (5.2.4) se tiene que:

$$\dot{x} = (A - Bk)x \quad (5.2.7)$$

teniendo ahora que calcular los valores propios de lazo cerrado de $(A - Bk)$ de la misma forma que como se hizo para la matriz A , donde la matriz de ganancia del controlador k es obtenida mediante el comando *place* como se muestra continuación:

$$k = \text{place}(A, B, [-1 - 2 - 3])$$

$$k = \begin{bmatrix} 448 & 147 & 25000 \\ 158 & 470 & 27874 \end{bmatrix}$$

De esta forma los valores característicos de $(A - Bk)$, que se obtienen mediante $\text{eig}(A - Bk)$, se encuentran en:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

dándole estabilidad al sistema.

La implementación del sistema descrito por la ecuación (5.2.7) es llevada cabo como se muestra en la figura 5.2

Una vez aplicado el control k y dado que la salida $y(t)$ del modelo lineal son los estados $x(t)$ del sistema, entonces se tiene que la respuesta del sistema descrito por las ecuaciones (5.2.4) y (5.2.5) linealizado en $h_1 = 45\text{cm}$, $h_2 = 15\text{cm}$, y $h_3 = 30\text{cm}$ es como se muestra en la figura 5.3, de donde puede apreciarse que los niveles de cada tanque se localizan perfectamente en los niveles deseados según el punto de operación especificado anteriormente.

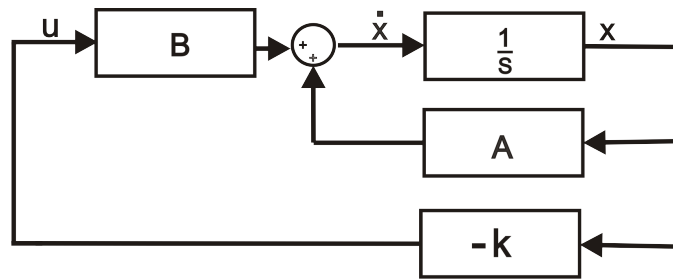


Figura 5.2: Implementación del sistema con controlador.

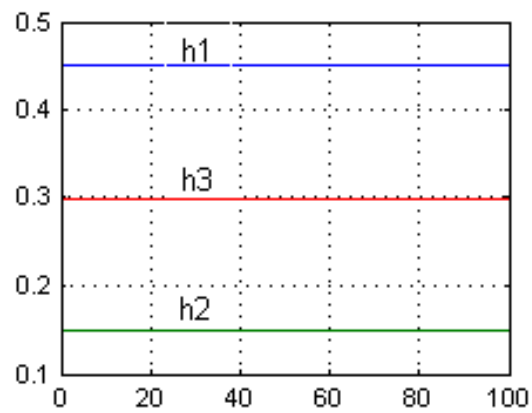


Figura 5.3: Nivel de líquido en cada tanque.

Observabilidad

Según [16], la observabilidad de un sistema se define como:

"La posibilidad de determinar el vector de estado inicial a partir de la entrada y la salida del sistema en un tiempo posterior al inicial."

De acuerdo al teorema 2.8 presentado en [16], un sistema lineal con matrices A y C invariantes en el tiempo es observable si y solo si se satisface:

$$\text{rango}(V) = \text{rango} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (5.2.8)$$

En este caso particular y dado que el orden del sistema es $n = 3$, la matriz de observabilidad V está dada por:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.0085 & 0 & 0.0085 \\ 0 & -0.00195 & 0.0084 \\ 0.0085 & 0.0084 & -0.0169 \\ 1.445 \times 10^{-4} & 7.14 \times 10^{-5} & -2.159 \times 10^{-4} \\ 7.14 \times 10^{-5} & 7.4363 \times 10^{-5} & -1.5834 \times 10^{-4} \\ -2.159 \times 10^{-4} & -1.5834 \times 10^{-4} & 4.2842 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

donde, se tiene que el sistema descrito por (5.2.4) y (5.2.5) es observable ya que:

$$\text{rango}(V) = 3$$

5.2.3 Espacio de paridad continuo para el sistema de tres tanques

A continuación se realiza el espacio de paridad continuo para el sistema de tres tanques descrito por el modelo lineal dado por (5.2.4) y (5.2.5). Se asume, en un primer término, que no ocurre alguna falla durante el proceso así como señales de entrada y salida ideales, es decir, sin ruido.

Para el diseño del generador residual se toman en cuenta solo las primeras dos derivadas de la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$.

Sistema sin falla

Se considera el sistema dado por las ecuaciones (5.2.4) y (5.2.5). Puesto que el sistema es observable y además $\text{rango}(C) = m = 3$, entonces se tiene que la salida y las primeras dos derivadas de $y(t)$ están dadas por:

$$\begin{aligned} y &= Cx(t) \\ \dot{y} &= CAx(t) + CBu(t) \\ \ddot{y} &= CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t) \end{aligned}$$

introduciendo la misma notación que en el capítulo 4:

$$y_s(t) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}; \quad u_s(t) = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix}; \quad H_{O,s} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}; \quad H_{u,s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ CB & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que la matriz $H_{O,s}$ concide con la matriz de observabilidad, sin embargo no necesariamente tiene esto que cumplirse, en el diseño se pudieron haber tomado más derivadas de la salida y la entrada generándose así una matriz a la que le pudieramos llamar *matriz de observabilidad extendida*, o de cualquier otro modo, por su gran semejanza con la matriz de observabilidad. Las relaciones anteriores pueden ser re-escritas de forma compacta como:

$$y_s(t) = H_{O,s}x(t) + H_{u,s}u_s(t) \tag{5.2.9}$$

donde $y_s(t) \in \mathbb{R}^{9 \times 1}$, $u_s(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$, $x(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $H_{O,s} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$ y $H_{u,s} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$. Tomando en cuenta las dimensiones de estas matrices es claro que el vector $\nu \in \mathbb{R}^{1 \times 9}$, satisfaciendo la ecuación dada por (4.2.9). Para conocer el orden del espacio de paridad es necesario determinar el conjunto de vectores que satisfacen la ecuación (4.2.9), para ello se utiliza una descomposición en valores singulares de la matriz $H_{O,s}$, que también puede ser vista en [17], como sigue:

$$[u, s, v] = svd(H_{O,s}) \quad (5.2.10)$$

donde el espacio nulo de la matriz $H_{O,s}$ se obtiene mediante el siguiente procedimiento: primeramente se tiene que:

$$l = u^T H_{O,s} = \begin{bmatrix} -0.44516 & -0.31232 & 0.83959 \\ -0.82257 & 0.51309 & -0.24527 \\ -0.35406 & -0.79955 & -0.48514 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

posteriormente se obtiene el rango de la matriz anterior mediante $h = rango(l) = 3$ y en base a este resultado se genera la siguiente matriz:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & I_{(j-h) \times (j-h)} \end{bmatrix} u^T$$

donde j es el número de renglones de la matriz l . De este modo la matriz $W \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$. Así, $W \in P_s$ define el orden del espacio de paridad y el generador de residuos resulta en la siguiente ecuación:

$$r(t) = W (y_s(t) - H_{u,s} u_s(t)) = 0 \quad (5.2.11)$$

Sistema con fallas

Para evaluar las posibles fallas en el sistema, es necesario tomar en cuenta el efecto que estas tendrían si se llegaran a presentar ya sea en actuadores, sensores o fugas en cada uno de los tanques. Teniendo en cuenta esta consideración el sistema lineal es ahora descrito por el siguiente par de ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A_F)x(t) + Bu(t) + E_f f(t) \quad (5.2.12)$$

$$y(t) = Cx(t) + F_f f(t) \quad (5.2.13)$$

donde

$$\Delta A_F = \sum_{i=1}^3 A_i \theta_{A_i}$$

con

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0214 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0371 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0262 \end{bmatrix}$$

$$E_f = \begin{bmatrix} 0 & B \end{bmatrix} \in R^{3 \times 5}, F_f = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \in R^{3 \times 5}, f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_5(t) \end{bmatrix}$$

Las variables θ_{A_1} , θ_{A_2} y θ_{A_3} son desconocidas y su valor depende del tamaño de la fuga que pudiera presentarse en cualquiera de los tanques. f_1 , f_2 , y f_3 representan las posibles fallas en los sensores uno, dos y tres respectivamente y así mismo las fallas en los actuadores uno y dos son representadas mediante f_4 y f_5 .

Ahora se obtiene el espacio de paridad para el sistema descrito por (5.2.12) y (5.2.13) tal como se hizo para el caso sin falla. Las matrices que se obtienen para este caso son exactamente las mismas que las que se obtuvieron para el caso sin falla, y adicionalmente también se obtiene el siguiente par de matrices que denotan el efecto de las fallas sobre el sistema:

$$f(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \\ \ddot{f}(t) \end{bmatrix}; H_{f,s} = \begin{bmatrix} F_f & 0 & 0 \\ CE_f & F_f & 0 \\ CAE_f & CE_f & F_f \end{bmatrix}$$

con $H_{f,s} \in \mathbb{R}^{9 \times 15}$, de tal manera que la ecuación para la salida y sus derivadas está dada en la forma de la ecuación (4.2.12) como:

$$y_s(t) = H_{O,s}x(t) + H_{u,s}u_s(t) + H_{f,s}f(t)$$

de este modo el generador de residuo es:

$$r(t) = \nu_s (y_s(t) - H_{u,s}u_s(t)) = \nu_s (H_{f,s}f(t)) \neq 0 \quad (5.2.14)$$

5.2.4 Implementación

A continuación se presentan los resultados obtenidos mediante la implementación de los generadores de residuo descritos por las ecuaciones (5.2.11) y (5.2.14) de la subsección anterior.

La implementación del generador residual descrito por la ecuación (5.2.14) es realizada mediante *MatlabSimulink*. El diseño del vector ν_s que se utilizó además de satisfacer la ecuación (4.2.9) también es rubusto f_3 , es decir, si ocurre una falla en el sensor del tanque tres no será detectada.

Sin pérdida de generalidad y de acuerdo a la forma que presentan las matrices $E_f f$ y $F_f f$, la ecuación (5.2.14) puede escribirse de la siguiente manera:

$$r(t) = \nu_s (H_{1,f,s}f(t) + H_{2,f,s}f(t) + H_{3,f,s}f(t) + H_{4,f,s}f(t) + H_{5,f,s}f(t)) \neq 0 \quad (5.2.15)$$

donde $H_{1,f,s}$, $H_{2,f,s}$ y $H_{3,f,s}$, contienen las fallas en los sensores 1, 2 y 3 respectivamente y $H_{4,f,s}$ y $H_{5,f,s}$ contienen las fallas en los actuadores 1 y 2.

Cabe mencionar que, el generador de residuos puede ser diseñado de tal forma que éste sea robusto o sensible a determinadas fallas, es decir, siendo robusto a la falla 1 no será alterado el valor del generador de residuo aunque se presente una falla en el sensor 1, sin embargo, el resto de las otras posibles fallas si serán detectadas. El diseño del generador residual, utilizado en este ejemplo, es robusto solamente a f_3 , o en otras palabras, si existe una falla en el sensor 3 no será posible su detección.

Para lograr que el generador de residuo sea robusto a la falla en el sensor 3, el vector ν_s debe satisfacer ahora las siguientes condiciones:

$$\nu_s \begin{bmatrix} H_{O,s} & H_{3,f,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\nu_s \begin{bmatrix} H_{1,f,s} & H_{2,f,s} & H_{4,f,s} & H_{5,f,s} \end{bmatrix} \neq 0$$

por lo que se construye una matriz $M \in \mathbb{R}^{6 \times 15}$ de la cual se obtiene el espacio nulo realizando primeramente una descomposición en valores singulares, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} M &= WH_{3,f,s} \\ [u_3, s_3, v_3] &= svd(M) \end{aligned}$$

posteriormente se hace el calculo de una matriz l_3 y se obtiene el rango de ésta como sigue:

$$\begin{aligned} l_3 &= u_3^T M \\ h_3 &= rango(l_3) = 3 \end{aligned}$$

de acuerdo al valor de h_3 se obtiene una nueva matriz W_3 de la siguiente manera:

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & I_{(j_3-h_3) \times (j_3-h_3)} \end{bmatrix} u_3^T$$

donde j_3 es el número de renglones de la matriz l_3 y $W_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ es el espacio nulo de M . El conjunto de vectores de paridad ν_s , que es robusto a la falla en el sensor tres, está dado entonces

por la siguiente relación:

$$\nu_s = W_3 W$$

de esta manera $\nu_s \in \mathbb{R}^{3 \times 9}$. El vector ν_s utilizado en la implementación es la suma de estos tres vectores de paridad, dando como resultado:

$$\nu_s = \begin{bmatrix} -0.0059 & 0.0015 & 0 & -0.7122 & 0.6865 & 0 & -0.3112 & -1.3873 & 0 \end{bmatrix}$$

Con la finalidad de obtener las derivadas que requiere el diseño, fue necesario la utilización de un total de cinco derivadores basados en un observador de altas ganancias, como el que se presentó en el capítulo 3, uno para cada señal de salida y de entrada (el sistema consta de tres salidas y dos entradas como anteriormente se explicó).

Caso sin falla

Dado que no se han considerado fallas en el sistema, entonces las salidas son como se muestran en la figura 5.3, que como puede verse no presentan ningún cambio durante el proceso. Los resultados al realizar la implementación de la ecuación (5.2.11) son presentados mediante la figura 5.4, donde puede apreciarse que después de un tiempo transitorio la variable de residuo tiende a un valor muy cercano a cero, lo cual significa que el generador de residuo obtenido tiene un buen funcionamiento cuando se considera un sistema sin fallas.

Caso con falla

La implementación del generador de residuo es descrito por la ecuación (5.2.14) se hace de la misma manera que para el caso sin falla, sin embargo el resultado que se esperan tener en el generador de residuo debe ser diferente de cero al momento de ocurrir una falla. Los resultados para este caso se presentan a continuación.

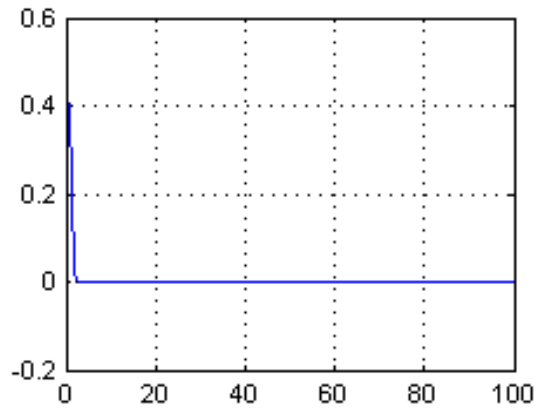


Figura 5.4: Señal de residuo para señal sin falla.

En primer lugar se considera que el sistema es afectado por una falla en el sensor 1. En este caso puede verse en la figura 5.5 que la salida h_1 tiene un cambio abrupto, que también puede ser vista como una saturación de los niveles de líquido en el tanque, a los 10 segundos de transcurrido el proceso.

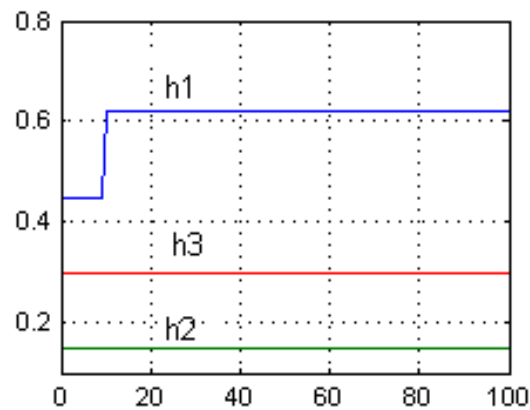


Figura 5.5: Falla en el sensor1.

Este cambio de la dinámica en el nivel 1 hace que el sistema no se mantenga en su punto de operación. De este modo, el generador residual tendrá un valor diferente de cero justamente en el segundo en que ocurre la falla tal como se muestra en la figura 5.6, de donde puede verse que el resultado es satisfactorio dado que la falla ha sido detectada.

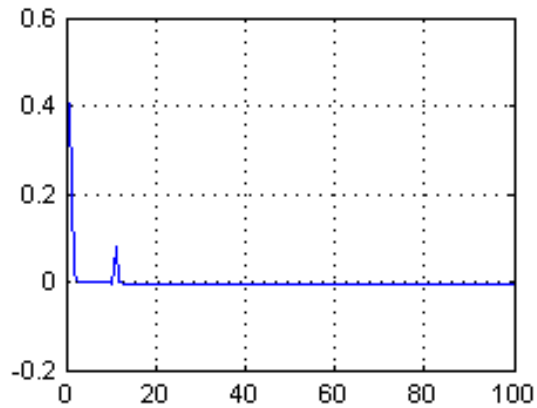


Figura 5.6: Señal de residuo teniendo falla en el sensor1.

Cuando la falla ocurre en una de las bombas, el generador de residuo responde ante la misma en el instante en que dicha falla se presenta. Una falla en la bomba 1 ocurre en el segundo 40 apareciendo inmediatamente en la salida como se ve en la figura 5.7.

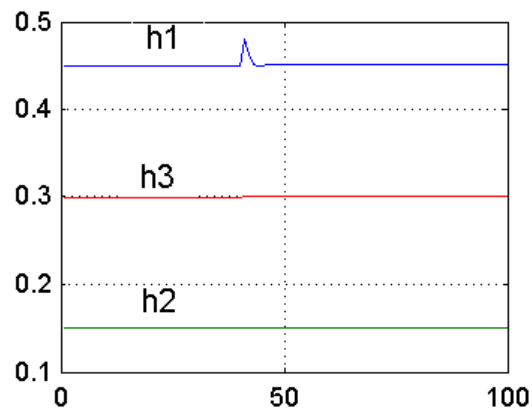


Figura 5.7: Falla en el actuador1.

El generador de residuo que se aprecia en la figura 5.8 refleja el efecto de la falla sobre el sistema, teniendo una variación precisamente en el segundo 40 que es el instante en que la falla ocurre.

El caso de fuga en los tanques no ha sido considerado en este trabajo debido a que es muy similar al caso de falla en actuador.

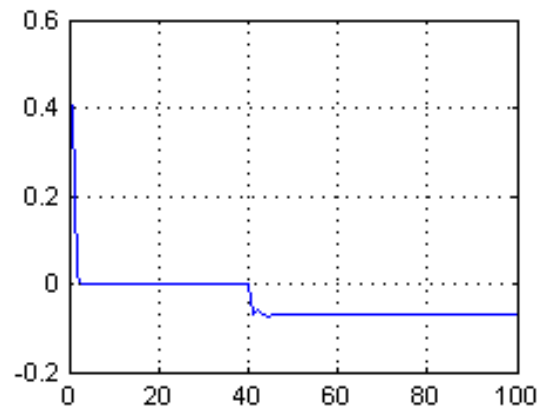


Figura 5.8: Señal de residuo teniendo falla en el actuador1.

Los resultados presentados anteriormente están sujetos a la consideración de que las salidas son ideales o están libres de ruido, lo cual en un caso real no es verdad, por lo que a continuación se toma en cuenta que una pequeña componente de ruido blanco afecta a la señal de salida simulando el efecto que se presentaría en los niveles de los tanques al momento de ser llenados por las bombas 1 y 2 en un caso real.

Señal con ruido

Para ver como es que se afecta la señal de residuo cuando una componente de ruido se presenta en la salida del sistema, se considera los ejemplos anteriores donde una falla ocurre en sensor 1 y actuador 1 a manera de comparación.

En la figura 5.9 puede verse como el nivel del tanque 1 se ve ligeramente afectado por un poco de ruido. En la misma figura también se aprecia que ocurre incremento de nivel en el segundo 10, que se traduce en una falla en este instante de tiempo. La figura 5.10 por su parte muestra la señal de residuo para el caso mencionado anteriormente, donde a pesar de que el ruido lo afectó bastante, es apreciable un cambio en el segundo 10 que es precisamente el instante en que ocurre la falla.

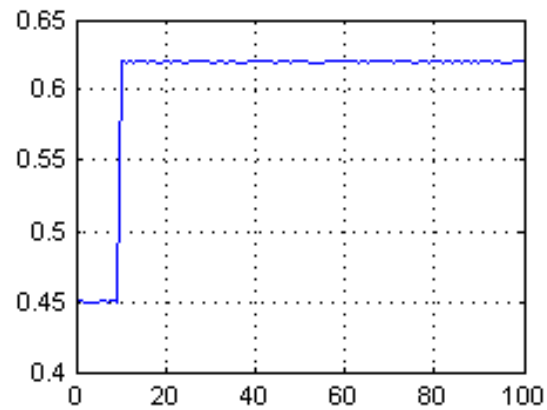


Figura 5.9: Ruido en la salida y falla en sensor uno.

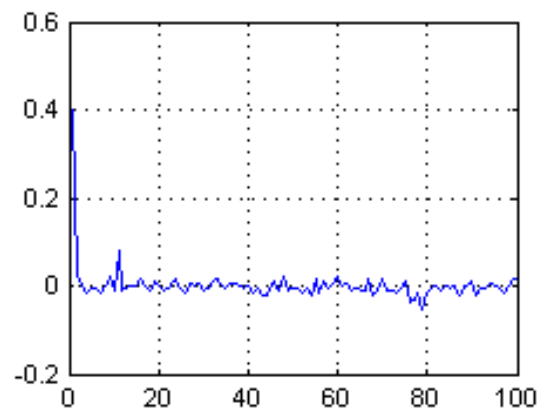


Figura 5.10: Señal de residuo ante la falla en sensor uno.

De igual manera, en la figura 5.11 se aprecia la salida del tanque 1 siendo afectada por una falla en el actuador 1.

Finalmente, en la figura 5.12 la señal de residuo ante la falla en el actuador 1 es presentada. Como puede verse el generador residual obtenido tiene una buena respuesta aún si las señales de salida tienen un poco de ruido.

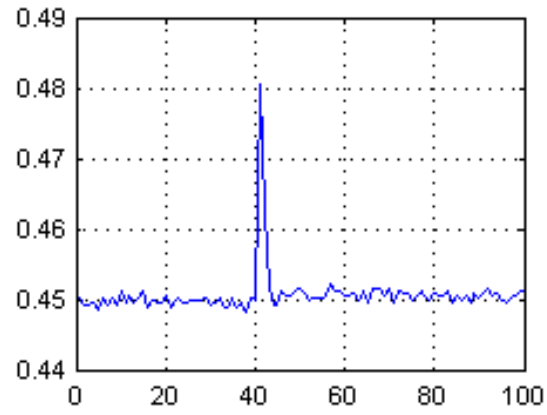


Figura 5.11: Ruido en la salida y falla en actuador uno.

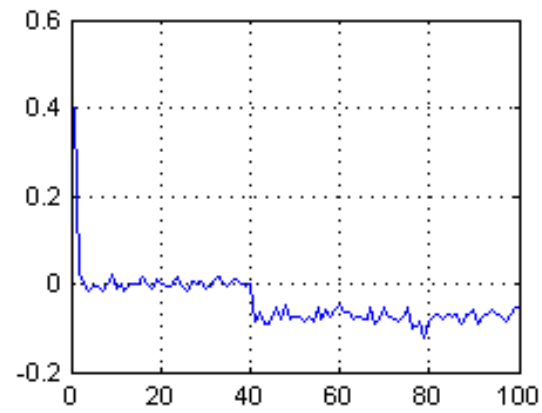


Figura 5.12: Señal de residuo ante la falla en la bomba 1.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

6.1 Conclusiones.

- En cuanto al estudio de los derivadores propuestos, se obtuvo un buen funcionamiento del derivador basado en un observador de altas ganancias tanto para para señales diferenciables ideales (sin ruido) como para señales con un poco de ruido blanco.
- El espacio de paridad continuo está limitado en cuanto a la detección de fallas, si las señales tanto de entrada como de salida están sujetas a componentes de ruido "grandes", esto debido a que el ruido también es derivado y en ocasiones puede tener grandes valores, haciendo que las derivadas de las señales de interés se pierdan.
- El diseño de espacio de paridad para sistemas continuos es semejante al que se realiza en el caso discreto, siendo la única diferencia la implementación entre uno caso y otro.
- Mediante el diseño del espacio de paridad continuo se logran los resultados de la localización sin las limitaciones que se tiene cuando se discretiza las ecuaciones continuas.

6.2 Trabajo a futuro.

- Debido a que el generador de residuo ya es capaz de detectar una falla en el sistema, el trabajo que habría que realizar ahora es mejorar el diseño mediante el uso de lo que se conoce como *umbral*, que sirve para evitar falsas alarmas cuando el residuo no es cero y hay ausencia de fallas, lo cual puede ocurrir cuando existen dinámicas no modeladas o perturbaciones.
- Ampliar los conceptos de *robustez*, ante perturbaciones o entradas desconocidas, y *sensibilidad*, ante las posibles fallas, con la finalidad de eficientar el diseño que se tiene hasta el momento.
- Un análisis comparativo del método de detección de fallas propuesto con respecto a otros métodos, que también se basan en el modelo tales como *filtros de detección de fallas* u *observadores de Luenberger*, resulta necesario para conocer si el desempeño logrado es semejante o mejor que los que se obtienen con los métodos existentes.
- Puesto que los resultados obtenidos y mostrados en este trabajo solamente abarcan las etapas de diseño e implementación a nivel de simulación, es claro que lo que aún queda por hacer es llevar a cabo la implementación en el sistema real, además que sería muy interesante ver cuales son los alcances y limitaciones que realmente el diseño ofrece al implementarlo en un sistema físico.

Apéndice

En este apéndice, se incluye todas las simulaciones de los diferentes derivadores que se estudiaron a lo largo de la elaboración de este trabajo: estimación mediante la serie de Taylor, modos deslizantes y observador de alta ganancia. La información se ha almacenado en un CD, donde además se incluye la simulación del ejemplo de aplicación presentado en el capítulo 5 y la tesis en su formato pdf. Para la ejecución de los archivos contenidos en el CD, es necesario contar con el paquete computacional *Matlab*, de preferencia de versión reciente.

Bibliografía

- [1] Iserman R. (2006). *Fault-diagnosis systems*. Springer.
- [2] Chow E. Y. and A. S. Willsky. (1984). *Analytical redundancy and the design of robust failure detection system*. IEEE Trans. On. Autom. Control **AC-29**(7), 603-614.
- [3] A. S. Willsky. (1976). *A survey of design methods for failure detection in dynamic systems*, Automatica, vol. 12, pp. 601-611.
- [4] R.V. Beard. **Feb. 1971**. *Failure Accommodation in Linear System Through Reorganization*. Man Vehicle Lab., Mass. Inst. Technol., Cambridge, MA, Rep. MVT-71-1.
- [5] A. S. Willsky, E. Y. Chow, S. B. Gershwin, C. S. Greene. P. K.Houpt, and A. L. Kurkjian. **June 1980**. *Dynamic model-based techniques for the detection of incidents on freeways* , IEEE Truns. .AutOnUt. Contr., vol. AC-25, pp. 347-360.
- [6] Viswanadham N. and K. D. Minto. (1990). *Fault diagnosis in multirate sampled data systems*. En: 29th IEEE Conference on Desicion and Control. Honolulu, Hawaii. pp. 3666-3671.
- [7] Zhang P., S. X. Ding., G. Z. Wang and D. H. Zhou. (2002). *Fault detection for uncertain sampled-data systems*. En: Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shangai, P. R. China. pp. 2728-2732.
- [8] Fadali M. S. (2003). *Observer-based robust fault detection of multirate linear system using a lift reformulation*. Computers and Electrical Engineering 29, 235-243.
- [9] Gertler J. (1998). *Fault detection and diagnosis in engineering systems*. Marcel Dekker. New York.
- [10] Ding S.X.(2008). *Model-based fault diagnosis techniques*. Springer.
- [11] Izadi I., Q. Zhao and T. Chen. (2007). *Analysis of performance criteria in sampled-data fault detection*. Systems & Control letters **56**, 320-325.
- [12] Zhang P., S.X. Ding. (2008). *On fault detection in linear discrete-time, periodic, and sampled-data systems*. Journal of control Science and Engineering.

- [13] Levant A. (1998). *Robust Exact Differentiation via sliding mode technique*. Automática **34**, 379-384.
- [14] Vasiljevic L. K. and H. K. Khalil. (2008). *Error bounds in differentiation of noisy signals by high-gain observers*. systems & Control Letters **57**, 856-862.
- [15] Steven C. Chapra Raymond P. Canale. (1999). *Métodos numéricos para ingenieros*, 3rd ed., Mc Graw-Hill.
- [16] Elizondo G. César. (1998), *Estabilidad y Controlabilidad robusta de sistemas lineales con incertidumbre multilineal*, pp 10-16.
- [17] Zhou Kemin *et al.* (1996), *Robust and Optimal Control.*, pp 32-35.
- [18] Chen Chi-Tsong. (1999), *Linear Sisitem Theory and Design*, 3dr ed., pp 152-158.