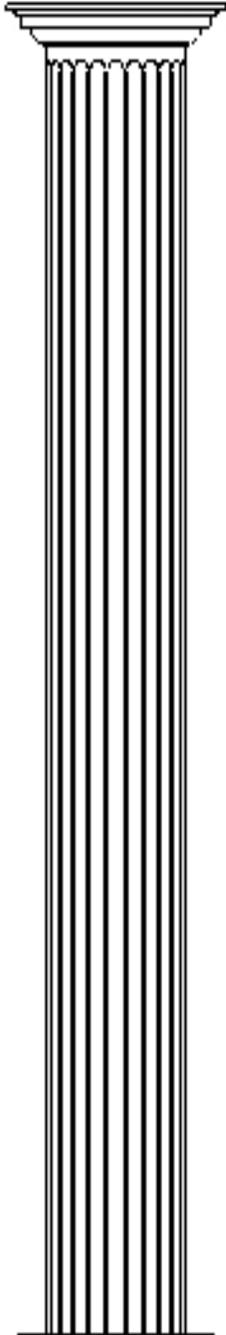


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



Modelos Oligopolísticos
en la Industria de la Electricidad

Presenta:

M.A. Felipe de Jesús Castillo Pérez

Tesis

Para obtener el grado de

Doctor en Ingeniería Física Industrial

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México.
Enero de 2011.

Mercados Oligopolísticos en la Industria de la Electricidad

Los miembros del comité aprueban la tesis de doctorado de
Felipe de Jesús Castillo Pérez

Dra. Nataliya Kalashnikova
Asesor (presidente)

Dr. Vitaly Kalashnicov
Co-asesor (secretario)

Dr. Neale Ricardo Smith Cornejo
Revisor (primer vocal)

Dr. Héctor Raymundo Flores Cantú
Revisor (segundo vocal)

Dr. José Fernando Camacho Vallejo
Revisor (tercer vocal)

Dedicatoria

Papá, este es un logro que quiero dedicarte y compartir contigo, porque eres la primer persona que antes que yo ha disfrutado cada una de mis metas alcanzadas, sabes que ocupas el lugar mas especial y que si estás orgulloso de mi, yo lo estoy más de ti.

Con mucho cariño quiero también dedicar esta tesis a mis hermanos Esmeralda, Gerardo, Cesar y Miguel, y a mis sobrinos Alexa, Keira, Gerita, Alondra, Juan Miguel y Gretta, porque el apoyo, ánimo y alegría que me brindan me han dado la fortaleza necesaria para seguir adelante.

Mami, aunque no estas físicamente, desde donde ahora estas se que cuidas de mi en cada paso y cada lugar que me encuentre, por eso como todas las cosas buenas, este es un logro que te dedico y disfruto con los nuestros como si fuera contigo.

Agradecimientos

Esta tesis doctoral, si bien ha requerido del esfuerzo y dedicación de un servidor, no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que a continuación citaré, muchas de las cuales han sido un soporte muy fuerte para el desarrollo de la misma.

A Dios primero, doy las gracias por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente. Por poner en mi camino personas maravillosas que han sido mi soporte y compañía durante esta etapa que culmina y en general a lo largo de mi vida. Gracias por las bendiciones y los regalos que recibo día tras día, por permitirme alcanzar esta meta y confirmarme que puedo alcanzar muchas mas, siempre de su mano.

Mi más sincero agradecimiento a mi Asesora Dra. Nataliya Kalashnikova, Coasesor Vitaly Kalashnikov, así como al Dr. Vyacheslav Kalasnikov, por su gran apoyo, colaboración, paciencia e interés durante todo este tiempo. Gracias.

A mis sinodales, Dr. Héctor Flores, Dr. Neale Smith, y Dr. Fernando Camacho. Y a mis profesores, así como a todas aquellas personas que de una u otra manera, han dejado en mí, una huella de duda y conocimiento. Gracias por darme una luz de pensamiento y enseñarme a llevar a cabo de manera eficiente la investigación.

A mi familia en general por todo el amor que recibo. A mi papá, mis abuelos, mis tíos, mis padrinos, mi cuñado y mis cuñadas, por darme la estabilidad emocional y sentimental para poder llegar a este logro. A mis hermanos, por el apoyo incondicional y porque a pesar de no estar presentes físicamente cada día, sé que procuran mi bienestar.

A todos mis amigos, por acompañarme en cada momento de alegría o tristeza, por ser parte del enorme motor que me mueve, en especial a Martha Muñoz, Mónica Garza, Rosy Veloz, Eduardo Gómez, Juan Paz, Mario Enríquez, Noe Sánchez y Jesús Soto. Por estar siempre presentes, a pesar del tiempo o la distancia, con entera disposición.

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, por la oportunidad de obtener este grado, a todo el personal de Postgrado por su apoyo cada día, su enseñanza, su atención y servicio, pero sobretodo por la calidez y amabilidad con que me han tratado. Gracias por lo mas valioso que me llevo, la amistad que durante este tiempo ha surgido.

A mis compañeros, Sonia, Clara, Jazmín, Aarón, Darío, Mauricio, Jorge, Mario, Pedro y Juanjo, que son parte de mi logro, pues además de mis maestros, ellos fueron un apoyo para sacar adelante este proyecto. Gracias porque ahora ya no son mis compañeros, ahora son mis amigos.

Son muchas las personas especiales a las que me gustaría agradecer su amistad, apoyo, animo y compañía en las diferentes etapas de mi vida. Algunas están aquí conmigo, otras en mis recuerdos y en el corazón o en los recintos mas escondidos de mi memoria. Pero sin importar en donde estén o si alguna vez llegan a leer estas dedicatorias quiero agradecer el que hallan sido participes en cincelar a éste Felipe Castillo. ¡GRACIAS!

Índice General

1. Introducción	8
2. Modelos Generalizados de Oligopolio del Mercado de Electricidad.	
2.1 Introducción	15
2.2 Especificación del Modelo	20
2.3 Equilibrio Externo	27
2.4 Equilibrio Interno	32
2.5 Estructura de la demanda y Equilibrio	39
3. Oligopolio Mixto con Conjeturas Consistentes	
3.1 Introducción	43
3.2 Especificación del Modelo	48
3.3 Equilibrio Externo	51
3.4 Equilibrio Interno	54
3.5 Resultados Numéricos	57
3.6 Apéndice	63
4. La liberalización del mercado de la electricidad en México. Las imperfecciones del mercado y sus implicaciones en la situación actual.	

4.1	Introducción	78
4.2	El Modelo Mextrom	82
4.3	Resultados Numéricos	102
5.	Conclusión y Trabajo Futuro	
5.1	Conclusión	109
5.2	Trabajo Futuro	112
	Bibliografía	113
	Publicaciones	122

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas de electricidad han sido reestructurados, o siguen esta tendencia, en muchas partes del mundo. El proceso no sigue un paradigma único, pero algunas características son comunes a la mayoría de las situaciones. Se presenta la competencia en la generación de la electricidad mientras que la transmisión y distribución siguen siendo monopolios regulados.

La cantidad ofertada de electricidad es elegida por cada productor y/o por los intermediarios o vendedores de la energía. Los productores y/o comercializadores de energía necesitan tener acceso a servicios de transmisión y distribución a fin de llegar a sus clientes. Por lo tanto, existe también una organización encargada de suministrar estos servicios. Una amplia variedad de instituciones se puede construir sobre la base de estos principios.

Distintos paradigmas de reestructuración de los sistemas de electricidad ya se encuentran en Europa hoy en día, sobre todo en Inglaterra, Gales y en los países escandinavos. La diversidad de

productores es también observada en los Estados Unidos. Varios sistemas de electricidad reestructurados también se pueden encontrar en América Latina, Nueva Zelanda, y Australia. Como el mercado de la electricidad de México Alemania está en el camino de la liberalización, un sistema de electricidad nuevo se va a desarrollar aquí.

La producción de electricidad en una forma adecuada para el consumidor requiere de tres pasos básicos, a saber, generación, transmisión y distribución. Generación es el proceso por el cual el combustible es convertido en electricidad. Se realiza generalmente en estaciones de energía en una escala muy grande con respecto al tamaño de los consumidores individuales. La mayoría de la generación normalmente se realiza a distancia considerable del mercado de consumo. La transmisión lleva electricidad a partir de plantas de generación a las subestaciones. Se lleva la electricidad más cerca de los consumidores y contribuye a su calidad (fiabilidad, voltaje, frecuencia, etc.) A fin de minimizar las pérdidas, la transmisión se realiza a través de líneas de alta tensión. El voltaje es reducido en las subestaciones. La electricidad se distribuye a los contadores individuales (consumidores) a través de líneas de baja tensión. El control y la propiedad de estas diferentes funciones de la cadena de suministro pueden variar considerablemente. Va desde la integración vertical completa a un control separado de cada eslabón de la cadena. Hasta hace poco, la integración vertical completa es la estructura dominante.

El poder de mercado de los generadores y los precios regulados de transmisión constituyen las principales características de la situación de estilo en el modelo. Los modelos de electricidad que se ocupan de este tipo de problema difieren considerablemente de los desarrollados en el marco del paradigma de la era del oligopolio. La reestructuración ha generado ya mucho de este nuevo tipo de modelos. Se revisa brevemente esta literatura a fin de poner nuestro trabajo en perspectiva.

Modelos estándar de la expansión de la capacidad en la electricidad (por ejemplo, EA Bloom (1984)) se refieren sólo a un modelo económico único, a saber, el monopolio o la centralización. En contraste, los modelos que involucran el concepto de un poder de mercado puede reflejar hipótesis económicas muy diferentes. En términos generales, el paradigma de la optimización, que caracteriza a los modelos de expansión de capacidad estándar, se sustituye por el paradigma de equilibrio de Nash. Esto puede conducir a diferentes tipos de equilibrios dependiendo del comportamiento asignado a los agentes. En uno de los primeros ejemplos de estos modelos, Hobbs (1986a) analiza un sector de la electricidad dispersada geográficamente a través del equilibrio de Bertrand. Varios modelos [53] [24] se han construido basándose en el equilibrio de Nash espacialmente basándose en las hipótesis de Cournot (Hashimoto, 1985, y Harker, 1986). Aquí también nos referimos al paradigma de Cournot, por varias razones. Conveniencia computacional es ciertamente una primera preocupación: en concreto, el equilibrio de Cournot, es más fácil de calcular que el equilibrio de Bertrand o el equilibrio en funciones de la oferta. Hay otras razones. En primer lugar, como ya se mencionó y será elaborado más tarde, buscamos equilibrios a largo plazo. La interpretación subyacente es que los generadores deben de aumentar la capacidad y comprometer su producción (que depende de tiempo y de las circunstancias) a los clientes a través de contratos a largo plazo. La interpretación de la conducta de Cournot parece ser más adecuada para describir esta situación. En segundo lugar, el cálculo de los equilibrios de Cournot también puede ser visto como un primer paso hacia el tratamiento de otros tipos de equilibrios de Nash. De hecho, es bien sabido que los diferentes paradigmas de la competencia imperfecta pueden ser de alguna manera unificada a través de la introducción de una variación conjetural o de un sistema de fijación de precios, [8] y [9]. El desarrollo de un modelo para el cálculo del equilibrio de Cournot es pues,

un primer paso natural hacia el cálculo de los equilibrios más general. En resumen, los modelos aquí propuestos se basan en un paradigma de la competencia imperfecta ahora comúnmente adoptada para el estudio de la reestructuración del sector eléctrico.

A excepción de las herramientas utilizadas para analizar el desarrollo de la red y/o de las operaciones, los modelos estándar de expansión de la electricidad no están realmente interesados en las cuestiones espaciales, salvo de los precios de transmisión. En particular, la mayoría de estos modelos fueron construidos con un solo nodo de generación. También los precios de transmisión no son realmente relevantes en el régimen de monopolio. En contraste, muchos de los modelos nuevos de la electricidad (Borenstein, y Bushnell 1996; Cardell et al. 1996; Hobbs, 1986a y 1986b; Hobbs y Kelly, 1992; Oren 1997) se desarrollan como modelos espaciales. Extensos debates (por ejemplo, Hogan 1992; Cardell et al. 1996; Chao y Peck, 1996 y 1997; Oren 1997) se han dedicado a las especiales características de la red eléctrica que normalmente deberían estar representados en estos modelos.

Los precios de la transmisión pueden ser regulados de maneras diferentes. La asignación y regulación de precios de transmisión han recibido mucha atención, tanto antes como durante el proceso de reestructuración. Por tanto, es importante ser capaz de presentar este comportamiento de los precios de transmisión en los modelos de generación. Un intento de hacerlo se presenta en Smeers y Wei (1999) y se ilustra en dos paradigmas de asignación de precios de transmisión. La primera, es decir, la asignación del precio de transmisión igual al costo marginal a largo plazo, es bastante inusual en la transmisión de electricidad, aunque el comportamiento a largo plazo de los propietarios de la transmisión es a menudo mencionado como un tema clave. En resumen, la mayoría de los modelos desarrollados con enfoque a la

reestructuración de la electricidad se centran generalmente en los generadores.

Muchos de los modelos que se ocupan de la reestructuración del sector de la electricidad buscan el equilibrio a corto plazo, es decir, trabajan con las capacidades fijas. Muchos investigadores, así como Wei y Smeers (1999), se ocupan tanto de las inversiones como de las operaciones. La selección de una visión a largo plazo no debe interpretarse como una sugerencia de que los equilibrios a corto plazo no valen la pena ser investigados. Por el contrario, la transición de la regulación a la competencia tanto en los Estados Unidos como en Europa, va acompañado de la aparición de una considerable capacidad redundante, lo que hace el análisis de los equilibrios a corto plazo algo más relevante. El artículo por Smeers y Wei (1997) extiende estos modelos para presentar la situación en la que los diferentes tipos de equilibrio se alcanzan tanto a largo como a corto plazo.

Una gran cantidad de trabajo se han realizado tratando de presentar una descripción realista de la operación del sistema eléctrico en los modelos de expansión de capacidad estándar. En contraste con muchos de los modelos mencionados anteriormente, el trabajo de Wei y Smeers (1999) también puede ser visto como un intento de arrojar algo de la representación comúnmente adoptado en los modelos de la ampliación de capacidad en el nuevo marco económico, aunque siendo aun computacionalmente factible. Tal esfuerzo debe generar una nueva demanda para las capacidades de computación más potentes.

En el camino de la competencia perfecta en el mercado de la electricidad, el comportamiento estratégico (es decir, la cooperación, la negativa de colaboración o la denegación de acceso a la red) determinará el desarrollo de la estructura de mercado de proveedores de energía y la composición de las tecnologías empleadas. Los proveedores de energía quieren optimizar sus ganancias en la producción y su

comportamiento estratégico maximizando sus cuotas de mercado, aumentando los precios de la electricidad, y reduciendo la demanda o el excedente de consumidores. Nuevos productos energéticos, como los servicios de energía, y actores en el mercado, como los agentes de la electricidad, serán establecidos. El trabajo de Kemfert y Tol (2000) [19] investiga el comportamiento estratégico de los agentes que influyen en las ganancias de la electricidad, los precios y la demanda. Este artículo estudia también el bienestar general dentro del mercado de la electricidad de México. Particularmente, la optimización de las cuotas de mercado podría llevar a mayores precios de la electricidad, el aumento de la producción y la disminución del excedente de consumidores, mientras que la competencia perfecta garantiza precios y las ganancias del mercado más bajos, y un aumento aparente de la demanda de electricidad.

En el Capítulo 2 presentamos un modelo de oligopolio del mercado energético con conjeturas sobre las variaciones de precios en función de aumentar la producción de los agentes o disminuirla. Introduciremos una noción de equilibrio externo y un tipo especial de función de costos para el productor, confirmando la existencia y unicidad de este equilibrio externo con conjeturas. Introduciremos también el concepto de equilibrio interno, después de aproximar una función de costo lineal a trozos, lo cual es característico en el modelo del mercado eléctrico. Y considerando un polinomio de segundo grado especial analizaremos el comportamiento de los grupos de consumidores con capacidades de producción diferentes.

En el Capítulo 3 extenderemos los resultados obtenidos por Bulavsky [7] a un modelo de oligopolio mixto. De la misma manera como en [8] y [9], aquí consideramos un modelo de oligopolio de variación conjetural, en el

que el grado de influencia en la situación completa para cada agente, es modelado por algunos parámetros especiales (coeficientes de influencia). En contraste con los modelos definidos en [8] y [9] y Kalashnikov et al. (2009, 2010) [58], [59], aquí seguimos la ideología de Bulavsky (vea [6] y [7]) seleccionando el precio de mercado p , más que la producción de los agentes, como una variable observable. Si fijamos los coeficientes de influencia de una manera exógena, entonces la estructura de la demanda no afecta el régimen de producción. Aunque la deformación de la curva de la demanda nos lleva a una variación del equilibrio, el modelo posible de la influencia de deformación en tales modelos es limitada. Por eso los coeficientes de influencia se incluyen en la definición del propio equilibrio, junto con el precio de equilibrio y los volúmenes de producción. En el Capítulo 3 introducimos el concepto del equilibrio externo y basando sobre las suposiciones generales demostramos la existencia y unicidad. Introducimos el criterio de consistencia de los coeficientes de influencia basando sobre un procedimiento especial de verificación introducido por Bulavsky (1996) [39]. Basando sobre el criterio de consistencia introducimos el concepto del equilibrio interno y demostramos su existencia y unicidad.

En el Capítulo 4 presentaremos los resultados de experimentos numéricos a partir de la construcción de un modelo para el mercado de la electricidad en México. Se analizará la eficiencia de la producción de electricidad con un juego de cálculo estático en un modelo teórico, que comparará el comportamiento estratégico de los diferentes productores de electricidad. Se evaluará el proceso de liberalización en este modelo al que llamaremos proyecto *Mexstrom* para el mercado de la electricidad en México, se analizarán las implicaciones de las estrategias de los productores de electricidad que podrían tener sobre el comercio de este recurso, la elección de la tecnología y sus capacidades, modelando los diferentes comportamientos (competencia perfecta, y Equilibrio de Nash).

Capítulo 2

Modelos Generalizados de Oligopolio del Mercado de Electricidad.

2.1. Introducción

Un punto clave del sector de la electricidad es la diversidad de fuentes para la producción de este producto homogéneo. Las fuentes difieren en capacidad, tiempo de producción, costos, etc. Debido al hecho de que la electricidad pertenece a los bienes de importancia primordial, la mayor parte de ella se comercializa principalmente en base contractual, incluso en los mercados liberalizados. Esto, junto con la amplia gama de las

Fuentes, lo hace interesante para construir la función de la estructura de costos del productor y utilizarla para la investigación teórica en el futuro.

En este capítulo, consideramos un modelo de oligopolio del mercado energético con conjeturas sobre las variaciones de precios en función de aumentar la producción de los agentes o disminuirla. Introduciremos una noción de equilibrio externo y un tipo especial de función de costos para el productor, confirmando la existencia y unicidad del equilibrio externo con conjeturas. Después de aproximar una función de costo lineal a trozos, lo cual es característico en el modelo del mercado eléctrico, considerando un polinomio de segundo grado especial, estamos en condiciones de aplicar una noción de equilibrio interno y analizar el comportamiento de los grupos de consumidores con capacidades de producción diferentes. Las técnicas propuestas también nos permiten hacer una descripción cualitativa de la dependencia del precio de mercado sobre el componente demanda activa.

Al estudiar el mercado oligopolístico en el marco de los modelos clásicos, [31], [55], [28], además de las cuestiones de la existencia de un equilibrio y su cálculo, se pone mucha atención en la comparación de éste con el modelo de competencia perfecta. Por ejemplo, [8] y [9], ambos modelos se incluyeron en una clase de modelos de oligopolio uniforme, donde el grado de influencia sobre toda la situación de cada agente se modela por algunos parámetros especiales (coeficientes de influencia). Si ponemos estos coeficientes de influencia de manera exógena, entonces la estructura de la demanda no afecta al régimen de producción, es decir, la dependencia de los valores de salida en el precio de mercado. A pesar de una deformación de la curva de demanda conduce a una variación del equilibrio, la modelación posible de la influencia de la deformación en los modelos es limitada. Por ejemplo, es

difícil trazar una rápida variación del precio de mercado, un precio estable en el crecimiento de la demanda (dentro de ciertos límites), y una serie de otros fenómenos.

Sin embargo, si no tomamos en cuenta los coeficientes de influencia tal como se indica de antemano, pero se incluyen en la definición del propio equilibrio, junto con el precio de equilibrio y los volúmenes de producción, se obtiene la posibilidad de simular los efectos antes mencionados. Esta noción de equilibrio se introdujo en el artículo de Bulavsky [6]. Allí, los coeficientes de influencia son determinados por un procedimiento especial de verificación de consistencia. El procedimiento de [6] supone que cada agente puede observar las variaciones de la salida de la producción total como respuesta a las variaciones de su propia producción y así estimar su influencia.

La elección del volumen de producción agregada como el parámetro observado se llevó a cabo debido al hecho de que el modelo clásico de Cournot se tomó como base del modelo desarrollado. Sin embargo, se puede suponer que es más natural observar el precio de mercado en lugar de la producción total, y por lo tanto, estimar la influencia de cada agente en el precio. Este enfoque se desarrolla en [40], lo que permitió relajarse las condiciones impuestas a la función de demanda y sigue, en esencia, sólo uno de ellos, a saber, su ser no mayor al aumentar el precio. Una condición técnica para la última función de ser continuamente diferenciable por partes también se mantiene válida.

En trabajos de Bulavsky [40], la existencia de equilibrio se estableció, y algunas consecuencias de las variaciones de la estructura de la demanda fueron examinados. Es decir, dos tipos de variaciones fueron ilustrados. El primero se relaciona con la caída de la capacidad de consumo de un

grupo de consumidores mientras que otro grupo se mantiene intacto. Resultó que el modelo propuesto prevé tres etapas del proceso: (i) el precio va hacia abajo con la salida de la producción total constante, (ii) al bajar el precio aún más, la producción simultánea disminuye y surge un déficit, (iii) y por último, una fuerte subida del precio sin crecimiento de la producción, y el déficit desaparece ya que los consumidores más pobres abandonan el mercado.

Antes de mencionar el segundo tipo de las variaciones de la estructura de la demanda mencionamos una aclaración. En los modelos de oligopolio clásico, el volumen total en el mercado disminuye a medida que el precio sea mayor. Este hecho va en concordancia con el postulado de que el precio caiga a medida que aumenta la oferta. Sin embargo, existe un postulado dual (en cierto sentido): los precios aumentaran cuando la demanda aumente. Con el fin de eliminar esta aparente contradicción, se debe hacer una distinción entre dos tipos de demanda: una pasiva y una activa.

La función de demanda estándar en los modelos de oligopolio clásica describe la demanda pasiva: los consumidores están a la espera de un bien que se les propone en algún precio y luego de decidirse a comprar o no. Sin embargo, la demanda activa no depende del precio y constituye el componente adicional de la demanda agregada. Así que cuando la demanda activa aumenta el precio de mercado debe crecer.

El crecimiento de la componente activa de la demanda es el segundo tipo de variaciones de la estructura de la demanda examinado en [42]. El componente activo puede reflejar tanto una agitación de la demanda de agitación como de la demanda relacionada con algunas de las necesidades fuera del modelo. Por ejemplo, podría ser una demanda que

surja a causa de algunas acciones militares, el desarrollo de la producción de material de defensa, etc. Se mostró en [42] que crecimiento de la demanda activa, en presencia de un grupo de consumidores pasivos, también proporciona tres fases que debemos tener en cuenta: (i) el precio se mantiene invariable, mientras que la producción aumenta, (ii) el precio es constante y el volumen de producción también es constante, y por tanto, un déficit aparece, y (iii) por último, el precio se dispara, ya que el mercado es abandonado por los consumidores pasivos, y a partir de este momento sólo se satisface la demanda activa.

Un fenómeno interesante se mencionó en el artículo [42], con el primero y segundo tipo de las variaciones de la estructura de la demanda, el proceso no es reversible por completo. Por ejemplo, si el salto en el precio es seguido por la demanda activa que va abajo, entonces el precio no vuelve al nivel inicial a menos que la demanda activa sea inferior a la primera. Del mismo modo, en el segundo ejemplo, el precio inicial no se alcanza a menos que el grupo más pobre se redacta con el estado del grupo más rico, pero no con el estado inicial pobres.

En este capítulo, se aplica el modelo matemático de Bulavsky [40] a un mercado de la electricidad en el que cada empresa que produce la electricidad puede tener varias unidades de generación. Por lo tanto, su función de costo total de producción está formada por minimizar el costo total de producción. El modelo se especifica en la siguiente sección. Se demuestra la existencia del equilibrio externo y se ilustra con ejemplos simples.

2.2. Especificación del modelo

Considere $n \geq 3$ firmas que producen electricidad numeradas por $i = 1, \dots, n$, y sea $j = 1, 2, \dots, n_i$ denota las unidades de generación de la firma i . También introducimos las siguientes variables exógenas, variables de decisión y de utilidad tal como en Quick y Carey (2002).

Variables Exógenas:

C_{ij}	costo marginal constante por unidad con tecnología j de la firma i
CAP_{ij}	capacidad para tecnología j de la firma i
$LOSS$	porcentaje de pérdidas en la transmisión y distribución
RES_RATIO_{ij}	tasa de reserva requerida para cada tecnología j de la firma i
FOR_{ij}	tasa de producción extra forzosa para cada tecnología j de la firma i

Variables de Decisión:

x_{ij}	megawatts producidos (MW) de electricidad con tecnología j de firma i
xr_{ij}	megawatts de capacidad requerida para reservas de tecnología j de la firma i

La demanda esta descrita por la función de demanda $G(p)$, donde el argumento p es el precio propuesto por los productores. Una demanda

activa D es no negativa y no depende del precio. La función de demanda se asume no negativa y no creciente, y también continuamente diferenciable excepto por un número finito de puntos en los que la función $G(p)$ y su derivada $G'(p)$ pueden ser discontinuas. Por ello, denotamos como $G(p)$ la parte izquierda de la función en el punto p , mientras el lado derecho se denota como $g(p)$. Es lógico que $G(p) = g(p)$ en los puntos de continuidad mientras $G(p) > g(p)$ en los puntos de discontinuidad. En este caso, $G(p)$ puede considerarse como la cantidad potencial de mercado, y $g(p)$ como el límite inferior de la fuente de la prevención de la subida de precios.

Para describir el modelo, introducimos las siguientes restricciones.

Restricciones de Demanda:

El equilibrio entre la demanda y la oferta para un precio dado p es estipulado por las siguientes desigualdades

$$g(p) + D \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} (1 - LOSS) \leq G(p) + D. \quad (2.1)$$

Restricciones de Reserva:

$$\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - RES_RATIO_{ij} x_{ij}) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Restricciones de capacidad:

$$x_{ij} + x_{r_{ij}} = CAP_{ij} (1 - FOR_{ij}) \quad \forall i = 1, \dots, n; \forall j = 1, \dots, n_i. \quad (2.3)$$

Restricciones de no negatividad:

$$x_{ij} \geq 0, \quad xr_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \quad (2.4)$$

Podemos describir las propiedades (2.1) como la siguiente hipótesis: Las desigualdades (2.1) modelan los requerimientos de generación para ajustar la cantidad de electricidad producida con un factor de pérdida *LOSS*.

Para las restricciones de tasa de reserva, las desigualdades (2.2), requieren que cada firma mantenga una reserva para satisfacer los requerimientos por región. Cada firma que genera electricidad requiere un porcentaje de capacidad extra de generación (*RES_RATIO_{ij}*).

Las restricciones de capacidad de generación, las ecuaciones (2.3), aseguran que la suma de la electricidad producida por cada unidad x_{ij} y la capacidad usada como reserva rodante xr_{ij} no excede la capacidad total ajustada CAP_{ij} . Para considerar interrupciones y mantenimientos no programados, CAP_{ij} se ajusta a la capacidad esperada usando la tasa forzosa de interrupción FOR_{ij} específica para cada tipo de generación. La FOR_{ij} representa la probabilidad de una interrupción no planeada en cualquier momento dado.

Ahora denotamos con q_i la producción total de la firma i , que es,

$$q_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

e introducimos las funciones de costos $f_i(q_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, como sigue:

$$f_i(q_i) = \min \left\{ \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} x_{ij} \mid \text{sujeto a (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5)} \right\}. \quad (2.6)$$

Los siguientes resultados es una consecuencia directa del análisis de sensibilidad de programación lineal.

Lema 2.1. Cada función $f_i(q_i)$ definida por (2.6) es lineal y convexa por partes.

Demostración. Después de haber introducido una variable $y = (x_{i1}, \dots, x_{in_i})^T \in R^{n_i}$ y los parámetros $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in_i})^T, a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in_i})^T \in R^{n_i}$, y eliminando entonces las variables x_{ij} , podemos, para cualquier fijo $i = 1, 2, \dots, n$, describir el problema (2.6) de la siguiente forma:

$$c_i^T y \rightarrow \min, \quad (2.7)$$

sujeto a

$$a_i^T y \leq b_i \quad (2.8)$$

$$e_i^T y = q_i, \quad (2.9)$$

y

$$0 \leq y_j \leq d_{ij}, \quad j = 1, \dots, n_i. \quad (2.10)$$

Aquí $\alpha_{ij} = 1 + RES_RATIO_{ij}, d_{ij} = CAP_{ij}(1 - FOR_{ij}), j = 1, \dots, n_i;$

$b_i = \sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}, e_i = (1, \dots, 1)^T, d_i = (d_{i1}, \dots, d_{in_i})^T \in R^{n_i}$. Introducimos el conjunto

factible $Y = \{y \in R^{n_i} \mid y \text{ satisface (2.8)-(2.10)}\}$ del problema (2.7) – (2.10) y

definimos el conjunto

$$Q = \{q_i \mid 0 \leq q_i, \text{ y } Y \neq \emptyset\}. \quad (2.11)$$

Es fácil ver que el conjunto Q es el dominio de la función $f_i(q_i)$ definida por (2.6). Primero, demostramos que de hecho, el conjunto Q es un intervalo cerrado; más precisamente,

$$Q = [0, q_i^*], \quad (2.12)$$

donde

$$q_i^* = \max\{e_i^T y \mid \text{sujeto a (2.8) y (2.10)}\} \quad (2.13)$$

Así como a_i , e_i y d_i son estrictamente positivos, el problema (2.13) tiene la solución (única) $q_i^* > 0$. Además, (2.10) claramente implica que $q_i^* \leq b_i = \sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}$. Ahora para probar (2.12), es suficiente demostrar que si $0 \leq q_i < q_i^*$ entonces $q_i \in Q$. Para esto, formulamos para el problema (2.7) – (2.10) su problema dual como sigue:

$$ab_i + \beta q_i + z^T d_i \rightarrow \min, \quad (2.14)$$

sujeto a

$$a\alpha_i + \beta e_i + z \geq -c, \quad (2.15)$$

$$\alpha \geq 0, z \geq 0, \beta \in R. \quad (2.16)$$

Aquí α, β son escalares, mientras que $z = (z_1, \dots, z_{n_i})^T \in R^{n_i}$. Ahora como todos los parámetros del problema primal (2.7) – (2.10) son positivos, el que Y sea no-vacío es equivalente a la existencia de la solución del problema

primal (2.7) – (2.10). Por el Teorema de Dualidad esto último implica que el problema dual tiene solución. Ya que el problema (2.14) – (2.16) tiene una solución óptima en $q_i = q_i^*$, es también posible resolver para cualquier $0 \leq q_i < q_i^*$. En efecto, consideremos un valor arbitrario para (α, β, z) que satisfaga (2.15) – (2.16). Si $\beta \geq 0$ entonces el valor de la función objetivo en (2.14) es no negativo, sin importar el valor de $0 \leq q_i < q_i^*$. Por otro lado, si $\beta < 0$, entonces $\beta q_i > \beta q_i^*$ donde $0 \leq q_i < q_i^*$, lo cual de nuevo implica la posible solución del problema dual con $0 \leq q_i < q_i^*$, dado que existe solución para $q_i = q_i^*$. Por consiguiente, el dominio Q de la función $f_i(q_i)$ es en efecto el intervalo cerrado $[0, q_i^*]$.

Ahora para probar que la función $f_i(q_i)$ es convexa y lineal por partes, retomamos del Teorema de Dualidad que los valores óptimos del problema dual (2.14) – (2.16) y el problema inicial (2.7) – (2.10) (reordenado como el problema de la función negativa $-f_i(q_i)$) coincide; esto es,

$$-f_i(q_i) = \min \{ ab_i + \beta q_i + z^T d_i \mid (\alpha, \beta, z) \text{ satisfacen (2.15) - (2.16)} \} \quad (2.17)$$

Como el conjunto factible (2.15) – (2.16) es un poliedro convexo y la función objetivo (2.14) es lineal, el Análisis Convexo garantiza que la función $-f_i(q_i)$, siendo inferior a las funciones lineales, es cóncava. Por lo tanto, $f_i(q_i)$ es función convexa. Su linealidad por partes sigue del Análisis de Sensibilidad para problemas de Programación Lineal.

El Lema 2.1 implica que en cada punto q_i donde el valor $f_i(q_i)$ es finito, i.e. $f_i(q_i) < +\infty$, la subdiferencial de la función de costo es no vacía, i.e.

$$\partial f_i(q_i) \equiv \{s \in R \mid f_i(q_i + \eta) \geq f_i(q_i) + s \cdot \eta, \forall \eta \in R\} \neq \emptyset. \quad (2.18)$$

En los puntos de diferenciabilidad, $\partial f_i(q_i) = \{f'_i(q_i)\}$.

Ejemplo 2.1. Tenemos

$$n = 1, n_1 = 3, CAP_{1j}(1-FOR_{1j}) = 7, j = 1,2,3; , c_{11} = 2, c_{12} = 1, c_{13} = 1 \text{ y}$$

$RES_RATIO_{11} = 1/4, RES_RATIO_{12} = 1/8, RES_RATIO_{13} = 1/2$. Entonces es fácil verificar que

$$f_1(q_1) \equiv f(q) = \min 2x_1 + x_2 + x_3$$

sujeito a

$$5/4 x_1 + 9/8 x_2 + 3/2 x_3 \leq 21,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = q,$$

$$0 \leq x_j \leq 7, \quad j = 1,2,3..$$

Resolviendo este problema de programación lineal, encontramos que

$$f(q) = \begin{cases} q, & 0 \leq q \leq 14; \\ 2q - 14, & 14 < q \leq 16.1; \\ 7q - 94.5, & 16.1 < q \leq 16 \frac{11}{12} \approx 16.917; \\ +\infty, & q > 16.917. \end{cases}$$

por lo tanto,

$$\partial f(q) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \leq q < 14; \\ [1,2], & q = 14; \\ \{2\}, & 14 < q < 16.1; \\ [2,7], & 16.1 < q < 16 \frac{11}{12} \approx 16.917; \\ \emptyset, & q \geq 16.917. \end{cases}$$

2.3. Equilibrio Externo.

Ahora especificamos una noción de equilibrio externo. El productor i elige un volumen de producción q_i tal que maximice su utilidad $p \cdot q_i - f_i(q_i)$, $q_i \geq 0$ suponiendo que la elección puede afectar el precio p . La última suposición podría definirse por una dependencia conjeturada del precio p sobre la cantidad producida q_i . Así, la condición de primer orden para el máximo para describir el equilibrio tendría la forma

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } q_i > 0, \text{ entonces } 0 = \\ \text{si } q_i = 0, \text{ entonces } 0 \geq \end{array} \right\} p + q_i \frac{\partial p}{\partial q_i} - \partial f_i(q_i). \quad (2.19)$$

Entonces vemos que para describir el comportamiento del agente, más que la dependencia p de q_i es importante la derivada $\frac{\partial p}{\partial q_i} = -v_i$. Introducimos el signo menos para trabajar con valores positivos de v_i . Por supuesto, la dependencia conjeturada p de q_i debe proveer (al menos localmente) concavidad de la función de utilidad del agente i de su producción. Por otro lado no podemos garantizar que la utilidad sea maximizada (pero no minimizada). Como demostramos que las funciones de costo $f_i(q_i)$ son convexas, entonces el producto $p \cdot q_i$ tendría que ser cóncavo. Para eso es suficiente suponer que el coeficiente v_i (llamado ahora como *coeficiente de influencia* del agente i) esté no negativo y constante. Entonces, la dependencia conjeturada local de la utilidad de la cantidad producida η_i tiene la forma $[p - v_i(\eta_i - q_i)]\eta_i - f_i(\eta_i)$, mientras la condición del máximo en $\eta_i = q_i$ esta dada por las relaciones

$$\begin{cases} p - v_i q_i \in \partial f_i(q_i), & q_i > 0; \\ p \leq f'_i(0), & q_i = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

En un sentido, la condición (2.20) determina una respuesta óptima de la firma i a un precio dado p .

Ejemplo 2.2. Como continuación del Ejemplo 2.1, suponemos que $v_1 \equiv v = 0.5$. Ahora podemos construir la curva de solución óptima por el productor 1 como $q_1 \equiv q \equiv q(p, v)$, de la cual la grafica en el punto p es el conjunto de valores $q_1 \equiv q$ que satisfacen (2.20). Como condición (2.20) en nuestro particular caso es reducida a

$$\begin{cases} p \leq 1, & q = 0; \\ p - 0.5q = 1, & 0 \leq q < 14; \\ p - 0.5q \in [1, 2], & q = 14; \\ p - 0.5q = 2, & 14 < q < 16.1; \\ p - 0.5q \in [2, 7], & q = 16.1; \\ p - 0.5q = 7, & 16.1 < q \leq 16\frac{11}{12} \approx 16.917; \end{cases}$$

No es difícil verificar que entonces obtenemos la siguiente función lineal por partes:

$$q(p, 0.5) = \begin{cases} 0, & 0 \leq p \leq 1; \\ 2(p-1), & 1 < p \leq 8; \\ 14, & 8 < p \leq 9; \\ 2(p-2), & 9 < p \leq 10.05; \\ 16.1, & 10.05 < p \leq 15.05; \\ 2(p-7), & 15.05 < p \leq 15\frac{11}{24} \approx 15.458. \end{cases}$$

Lema 2.2. La función de solución óptima $q_i(p, v_i), i = 1, 2, \dots, n$, es continua, lineal por partes, no decreciente de estructura similar a la del Ejemplo 2.2.

Para que el conjunto de los participantes no se cambia, es decir, sigue estar constante independientemente de los valores de v_i (coeficientes de influencia), hacemos la siguiente suposición:

C2. Para un precio $p_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \{f'_i(0)\}$ para cualquier i existe un volumen de producción q_i^0 tal que $p_0 = \inf \{\partial f_i(q_i^0)\}$ y además, $\sum_{i=1}^n q_i^0 < g(p_0)$.

Estas últimas condiciones garantizan que para cualquier v_i las condiciones (2.1) y (2.20) pueden cumplirse solo para $p > p_0 \geq f'_i(0)$, y por tanto solo para todo q_i que sean estrictamente positivas.

Ahora introducimos los límites superiores para la producción total de electricidad para cada firma. Sea

$$\bar{q}_i = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \mid \text{subject to (2.2)-(2.4)} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.21)$$

Para que un equilibrio externo exista, es crucial que la demanda activa D satisfaga la siguiente suposición.

C3. Existe un precio p^1 tal que

$$G(p^1) + D < \sum_{i=1}^n \bar{q}_i (1 - \text{LOSS}). \quad (2.22)$$

La condición C3 nos da la existencia de producción necesaria para satisfacer la demanda acumulativa, dada la demanda activa D . Ahora, como Bulavsky (2002), podemos establecer los siguientes resultados.

Teorema 2.1. Bajo las suposiciones C1 y C2, para cualquier $D \geq 0$ que satisfaga C3, y $v_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, existe un equilibrio externo (p, q_1, \dots, q_n) . Si la función de demanda es continua y estrictamente decreciente, i.e. $g(p) \equiv G(p)$ y $G(p_1) < G(p_2)$ para $p_1 > p_2$, entonces el equilibrio externo (p, q_1, \dots, q_n) existe y es único y además depende continuamente de los parámetros (D, v_1, \dots, v_n) .

Demostración. Introduzcamos la respuesta total óptima de los productores para el precio p como sigue:

$$Q(p) = \sum_{i=1}^n q_i(p, v_i). \quad (2.23)$$

De los Lemas 2.1 y 2.2 sigue que la función $Q(p)$ es continua, lineal por partes y no decreciente. Ahora definimos

$$p_* = \sup \{ p \mid Q(p)(1 - LOSS) \leq G(p) + D \}. \quad (2.24)$$

Las suposiciones C2 y C3 garantizan que este valor existe y es finito. Como $q_i(p, v_i)$ es continua según el Lema 2.2, y $G(p)$ es continua por la izquierda según la suposición C1, entonces

$$Q(p_*)(1 - LOSS) \leq G(p_*) + D.$$

Como el límite izquierdo de la función de demanda, $g(p)$, es continuo por la derecha de acuerdo a la suposición C1, entonces si es válida la desigualdad $Q(p_*)(1 - LOSS) < g(p_*) + D$, esto implicaría que para algún $p > p_*$

$$Q(p_*)(1-LOSS) < g(p_*) + D \leq G(p) + D,$$

lo cual contradice (2.24). Por tanto, tenemos

$$g(p_*) + D \leq Q(p_*)(1-LOSS) \leq G(p_*) + D,$$

Entonces, el vector $(p_*, q_1^*, \dots, q_n^*)$ con $q_i^* = q_i(p_*)$, $i = 1, \dots, n$, satisface a (2.1) y (2.20), por tanto es un equilibrio externo.

La unicidad del equilibrio externo en el caso particular de monotonía estricta de la función continua de la demanda, es decir $g(p) \equiv G(p)$, es evidente, así como el equilibrio es determinado por una intersección única en un punto del gráfico de la función continua decreciente de la demanda $G(p) + D$ y la función continua no decreciente $Q(p)(1-LOSS)$. Así, el precio de equilibrio p_* , tanto como los volúmenes de producción del equilibrio $q_i^* = q_i(p_*)$, $i = 1, \dots, n$, están determinados como únicos y la demostración se completa.

2.4. Equilibrio Interno

En orden de presentar un *equilibrio interno*, tenemos que realizar un procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia v_i como fue propuesto por Bulavsky [40]. Sin embargo, no podemos aplicar este procedimiento a nuestro modelo si las funciones de costo son lineales por partes (cf. Lema 2.1 y Ejemplo 2.1) y por lo tanto si sus segundas derivadas son o ceros o no existen (en la unión de los puntos). Para poder verificar los

coeficientes de influencia, usamos el método de los cuadrados mínimos para obtener aproximación cuadrática $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, n$ de las funciones de costos f_i lineales por partes. Para la función de costos f_i consideramos el conjunto de los puntos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$. Determinamos la función cuadrática $\varphi_i(q_i) \equiv \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i + c_i$ tal que

$$F(a_i, b_i, c_i) \equiv \sum_{k=0}^N \left[\frac{1}{2} a_i t_k^2 + b_i t_k - f_i(t_k) \right]^2 = \min_{a, b, c} \sum_{k=0}^N \left[\frac{1}{2} a t_k^2 + b t_k + c - f_i(t_k) \right]^2. \quad (2.25)$$

El problema (2.25) siempre tiene solución.

Ejemplo 2.3. Para ilustrar esto, consideramos de nuevo la función lineal por partes del Ejemplo 2.1 y aplicamos el método de los cuadrados mínimos. La función en cuestión tiene cuatro puntos:

$$t_0 = 0 < t_1 = 14 < t_2 = 16.1 < t_3 = 16.917$$

con los valores

$$f(t_0) = 0, f(t_1) = 14, f(t_2) = 18.2, f(t_3) = 23.919.$$

Resolviendo el problema (2.14) encontramos la función de costos cuadrática $\varphi(q) \equiv \frac{1}{2} a q^2 + b q + c$ con $a = 0.0890, b = 0.5536, c = -0.7030$. El error de aproximación por cuadrados mínimos es $[F(a, b, c)]^{1/2} = 3.48$. La segunda derivada es igual a $\varphi'' \equiv a = 0.0890$.

Ahora podemos introducir el concepto de *equilibrio interno*. Suponemos que tenemos un equilibrio externo (p, q_1, \dots, q_n) para un modelo de mercado de electricidad con función de costos lineal por

partes f_i reemplazada por la aproximación cuadrática correspondiente $\varphi_i, i = 1, \dots, n$. Aplicando la misma técnica que propuso Bulavsky [40], llegamos al criterio de consistencia siguiente:

Criterio de Consistencia. Para un equilibrio externo (p, q_1, \dots, q_n) el coeficiente de influencia v_k es considerado *consistente* si existe un valor r_k tal que

$$\min\{G'(p-0), G'(p+0)\} \leq r_k \leq \max\{G'(p-0), G'(p+0)\}$$

y

$$v_k = \left(\sum_{i \neq k} (v_i + a_i)^{-1} - r_k \right)^{-1}$$

donde $a_i = \varphi_i''$, $i = 1, \dots, n, i \neq k$. La ecuación anterior puede describirse también como:

$$v_k = \frac{1}{\sum_{i \neq k} \frac{1}{v_i + a_i} - r_k}. \quad (2.26)$$

Aquí los valores de $G'(p-0)$ y $G'(p+0)$ son tomados en el punto $\left(p, G = \sum_{i=1}^n q_i - D\right)$ de la gráfica de función de la demanda. Si $r_k = -\infty$ entonces, $v_k = 0$.

Antes de definir el equilibrio interno notemos que cuando el equilibrio corresponde a un punto de continuidad de la función de demanda, r_k tiene el mismo valor para todos k . Si el equilibrio corresponde a un punto de discontinuidad, es decir, si $G'(p-0) \neq G'(p+0)$, el criterio de consistencia permite la existencia de diferentes valores para r_k . Tal hecho

podría considerarse como natural si los puntos de inflexión del gráfico son admitidos como reflexiones exactas de la situación modelada. Sin embargo, si tratamos manejar con los puntos de inflexión como una idealización conveniente de curvas suavizadas con cambios turbios rápidos, tenemos que recurrir al caso de la igualdad para todo r_k como si fuera el caso con aproximación suave de la curva de demanda. Por eso tal caso en la definición del equilibrio interno se considera separado, tal como consideró Bulavsky (Ver [40])

Definición 2.2. La colección $(p, q_1, \dots, q_n, v_1, \dots, v_n)$ donde $v_k \geq 0, i = 1, \dots, n$, se llama *equilibrio interno* si, para los coeficientes de influencia considerados, el vector (p, q_1, \dots, q_n) es un *equilibrio externo* y el criterio de consistencia se cumple para todo k . Además, si todo r_k en (2.4) tienen el mismo valor, entonces decimos que el *equilibrio interno es fuerte*.

El siguiente Teorema 2.2 es extensión del Teorema 2 en el artículo de Bulavsky (2000) [40].

Teorema 2.2. Bajo las suposiciones C1, C2 y C3, existe un equilibrio interno fuerte.

Ya que la demostración del Teorema 2.2 coincide exacto con la demostración del Teorema 2 de Bulavsky (2000) [40], presentamos ésta completa en español, pues este artículo se encuentra solo en ruso.

Demostración. Necesitamos mostrar que existe $r \in [-\infty, 0]$, $v_i \in [0, +\infty)$, $p \in [p_0, +\infty)$ y $q_i \geq 0$ tal que (p, q_1, \dots, q_n) es un equilibrio externo y la igualdad (2.26) es válida para todo k con $v_k = r$, y r pertenece o al intervalo cerrado $[G'(p-0), G'(p+0)]$ o $[G'(p+0), G'(p-0)]$.

En orden de no tratar con valores infinitos negativos ponemos $r = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, $\alpha \in [-1,0]$, y describimos la parte del lado derecho de (2.26) como

$$F_k(\alpha, v_1, \dots, v_n) = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha) \sum_{i \neq k} \frac{1}{v_i + f_i''(q_i)} - \alpha} \quad (2.27)$$

Aquí cada q_i es un equilibrio externo (p, q_1, \dots, q_n) y por lo tanto es una función de D y v_j , $j = 1, \dots, n$.

La dependencia de D no se muestra explícitamente porque D es una constante dentro de la demostración.

Debido a la relación $\alpha \in [-1,0]$, $v_i \geq 0$ y $f_i''(q_i) > 0$, la parte del lado derecho en (2.27) está bien definido. Como $f_i''(q_i)$ y q_i son continuas (como funciones de v_j , $j = 1, \dots, n$, Teorema 2.1), los mapeos F_1, \dots, F_n son continuos también para α y v_i .

Definimos un mapeo $F_0 : [-1,0] \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow 2^{[-1,0]}$ como sigue. Para $\alpha \in [-1,0]$ y $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_+^n$, encontramos un equilibrio externo (p, q_1, \dots, q_n) que corresponde el vector $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_+^n$, y en el punto $(p, G = \sum q_i)$ de la curva de demanda definimos $G'(p+0)$ y $G'(p-0)$, después calculamos $\alpha^+ = \frac{G'(p+0)}{1-G'(p+0)}$ y $\alpha^- = \frac{G'(p-0)}{1-G'(p-0)}$. $G'(p+0)$ y $G'(p-0)$ pertenecen al intervalo $[-\infty, 0]$, Entonces α^+ y α^- pertenecen al intervalo $[-1,0]$. Defina la imagen del mapeo F_0 como el intervalo $[\alpha^+, \alpha^-]$, si $\alpha^+ \leq \alpha^-$, o $[\alpha^-, \alpha^+]$, si $\alpha^+ > \alpha^-$. Podemos ver que el mapeo F_0 es cerrado. Si p es un punto de continuidad de la función de demanda entonces $G'(p+0) = G'(p-0) = G'(p)$ y la función $G'(p)$ es continua. Debido a la dependencia continua de p de v_1, \dots, v_n , la dependencia de $\alpha^+ = \alpha^-$ de

v_1, \dots, v_n es continua también (una superposición de funciones continuas). Note que la dependencia de F_0 de la primera variable α es ficticia. Ahora suponemos que el equilibrio es un punto esquina de la curva de demanda:

1) $G(p) = \sum q_i > g(p)$, e.g. Este es un punto de discontinuidad de la curva de demanda y (p, G) es el punto superior del intervalo vertical del gráfico de la función de demanda;

2) $G(p) > \sum q_i = g(p)$ - lo mismo pero (p, G) es el punto final inferior;

3) $G(p) > \sum q_i > g(p)$ - lo mismo pero (p, G) es un punto intermedio del intervalo vertical;

4) $G(p) = \sum q_i = g(p)$, pero $G'(p+0) \neq G'(p-0)$; en este caso p es un punto de continuidad de la función de demanda, pero su derivada es discontinua en este punto.

Analizamos el primer caso a detalle. Como lo decidimos, en este caso $G'(p+0) = -\infty$ y por tanto. La derivada izquierda es finita, entonces $\alpha^- \in (-1, 0]$. Además la función $G'(p)$ es continua en cierta vecindad a la izquierda de p (con p incluida). Así para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para los precios $\pi \in (p - \delta, p]$, la siguiente desigualdad se cumple

$$\left| \frac{\alpha^- - G'(\pi-0)}{1 - G'(\pi-0)} \right| < \varepsilon.$$

Podemos suponer que $G(p)$ y su derivada son continuas en un intervalo $(p - \delta, p)$. Denote $v = (v_1, \dots, v_n)$ y considere una vecindad $V \subset \mathbb{R}_+^n$ de v . Para $w \in V$ definamos $\pi(w)$ y $q_i(w)$ como el precio y los volúmenes de equilibrio, así que $\pi(v) = p$, $q_i(v) = q_i$. Como estos mapeos son continuos podemos encontrar una vecindad V suficientemente pequeña, tal que si $w \in V$ las desigualdades $|\pi(w) - p| < \delta$, $\sum q_i(w) > g(p)$ son validas.

Denotemos como $\alpha^+(w)$ y $\alpha^-(w)$ los puntos extremos del intervalo $F_0(\alpha, w)$ como fueron antes presentados.

Si suponemos que $\pi(w) > p$ para algún $w \in V$, entonces, como los puntos de discontinuidad son aislados y la función de demanda es no creciente, llegamos a las series contradictorias de las relaciones $G(\pi(w)) \leq g(p) < \sum q_i(w) \leq G(\pi(w))$. Esta contradicción muestra que $\pi(w) \leq p$ para todo $w \in V$. Si $\pi(w) = p$ y $\sum q_i(w) < G(\pi(w)) = G(p)$, entonces $\alpha^-(w) = \alpha^+(w) = -1$, esto es $F_0(\alpha, w)$ es un punto que pertenece a $F_0(\alpha, v)$. Finalmente si $\pi(w) = p$ y $\sum q_i(w) = G(\pi(w)) = G(p)$, entonces $\alpha^-(w) = \alpha^-$ y $\alpha^+(w) = \alpha^+ = -1$, lo que significa que $F_0(\alpha, w)$ coincide con $F_0(\alpha, v)$.

Ahora sea $\pi = \pi(w) \in (p - \delta, p)$. Entonces $\alpha^-(w) = \alpha^+(w) = \frac{G'(\pi)}{1 - G'(\pi)}$, y debido a la selección de δ , tenemos $|F_0(\alpha, w) - \alpha^-| < \varepsilon$, lo que demuestra la semi-continuidad superior del mapeo F_0 en (α, v) .

Los tres casos 2) – 4) pueden analizarse de una manera similar, después de modificar apropiadamente los argumentos mencionados. Para finalizar la demostración tenemos que construir solamente el mapeo $F = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ en $[-1, 0] \times \mathbb{R}^n$ y encontramos tal conjunto convexo y compacto que el mapeo F se transforma en si mismo.

Debido a que para todo $v = (v_1, \dots, v_n) \geq 0$, el precio de equilibrio $p > p_0 > 0$ (debido a C3), y los valores del equilibrio no exceden $G(p_0)$, esto es, $q_i \leq G(p_0)$. Denotamos:

$$a = \max\{f_i''(q_i) \mid q_i \in [0, G(p_0)], 1 \leq i \leq n\}.$$

La continuidad y positividad de las segundas derivadas implican $0 < \alpha < +\infty$. Como $\alpha \in [-1, 0]$, la relación (2.27) implica

$$0 \leq F_k(\alpha, v_1, \dots, v_n) \leq \frac{1}{\sum_{i \neq k} \frac{1}{v_i + \alpha}}. \text{ Esto último significa que si } 0 \leq v_i \leq \frac{\alpha}{n-2},$$

entonces $0 \leq F_k(\alpha, v_1, \dots, v_n) \leq \frac{\alpha}{n-2}$. Así tenemos establecido que el mapeo

$F = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ mapea el subconjunto compacto $[-1, 0] \times [0, \alpha / (n-2)]^n$ en si mismo.

Debido al teorema de Kakutani el mapeo F tiene un punto fijo $(\alpha, v_1, \dots, v_n)$. Definiendo $r = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ (si $\alpha = -1$, entonces $r = -\infty$) y un equilibrio externo para los coeficientes de influencia v_1, \dots, v_n , obtenemos un equilibrio interno fuerte. El teorema es demostrado.

2.5 Estructura de la Demanda y Equilibrio

En esta sección se examina cómo las variaciones de la estructura de la demanda afecta el precio de equilibrio y la producción de electricidad total. Estamos mayormente interesados no tanto en la variación cuantitativa sino en la cualitativa predicha por el modelo anterior. Aunque los Teoremas 2.1 y 2.2 de la existencia de equilibrio son válidos en el caso más general de las funciones de costo cuadráticas a trozos, para comprender mejor el análisis, consideraremos primero funciones de costo cuadráticas puras, como en artículo de Bulavsky (2000) [40].

Por tanto recurrimos de nuevo a usar aproximaciones cuadráticas a las funciones de costo de la forma $\varphi_i(q_i) = a_i q_i^2 / 2 + b_i q_i + c_i$ donde $b_i > 0$ y $a_i > 0, i = 1, \dots, n$. Si estamos solo interesados en el equilibrio interno fuerte, entonces la formula (2.26) del criterio de consistencia puede describirse como sigue:

$$v_k = \frac{1}{\sum_{i \neq k} \frac{1}{v_i + a_i} - r}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.28)$$

donde $r \in [-\infty, 0]$. Si $r = -\infty$, entonces la ecuación (2.28) tiene la solución única $v_k = 0, i = 1, \dots, n$. Por otro lado, la siguiente afirmación es valida (de nuevo, tomamos la demostración de artículo de V.A. Bulavsky por no estar traducido en ingles).

Lema 2.3 Para cualquier $r \in [-\infty, 0]$ existe una solución única de la ecuación (2.28) $v_k = v_k(r), k = 1, \dots, n$, que depende continuamente de r . Además, $v_k(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow -\infty$, y $v_k(r)$ estrictamente crece a $v_k(0)$ como r tiende a cero.

Demostración. Igual que en la demostración del Teorema 2.2, denotemos como $F_k(r, v_1, \dots, v_n) = F_k(r, v)$ la parte del lado derecho de (2.28), y $\alpha = \max\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Para un punto fijo $r \in (-\infty, 0]$ el mapeo $F = (F_1, \dots, F_n)$ transforma el cubo $M = \left[0, \frac{\alpha}{n-2}\right]^n$ en si mismo. La matriz Jacobiana $J = \left\{ \frac{\partial F_k}{\partial v_s} \right\}$ del mapeo F tiene los elementos

$$\frac{\partial F_k}{\partial v_s} = \begin{cases} 0, & s = k; \\ \frac{F_k^2}{(v_s + a_s)^2}, & s \neq k. \end{cases} \quad (2.29)$$

Por lo tanto, la matriz J es no negativa y no se descompone. Estimamos la suma de sus elementos en columnas por arriba:

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial v_s} = F_k^2 \sum_{s \neq k} \frac{1}{(v_s + a_s)^2} \leq \frac{\sum_{s \neq k} \frac{1}{(v_s + a_s)^2}}{\left(\sum_{s \neq k} \frac{1}{v_s + a_s} \right)^2} = R(v). \quad (2.30)$$

La función $R(v)$ es continua por v en el cubo M , y sus valores son estrictamente menores a 1, por tanto su máximo valor r en M es también estrictamente menor a 1. Por lo tanto la matriz $I - J$ (donde I - matriz identidad) tiene la inversa positiva, y el mapeo F en M es la contracción estricta. Por consiguiente, la solución de (2.28) existe y es único. Por el Teorema de Función Implícita, es también continuamente diferenciable por r .

Para establecer la monotonicidad de la solución con respecto a r , diferenciamos (2.28):

$$v_k' = F_k^2 \left[1 + \sum_{i \neq k} \frac{v_i'}{(v_i + a_i)^2} \right], \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.31)$$

Si reescribimos estas ecuaciones en forma de vector, tenemos

$$v' = J \cdot v' + F^2, \quad (2.32)$$

donde F^2 - es un vector con componentes F_k^2 . Como la inversa de $I - J$ es positiva, por tanto $v' = (I - J)^{-1} F^2 > 0$. El límite $\lim_{r \rightarrow -\infty} v(r) = 0$ sigue de las

desigualdades evidentes $v_k(r) \leq \frac{1}{-r}$, $k = 1, \dots, n$. La demostración queda completada.

Las relaciones (2.9) de la aproximación cuadrática de las funciones dan las dependencias lineales $q_i(p, v_i) = \frac{p - b_i}{v_i + \alpha_i}$. Así para cada $r \in [-\infty, 0]$ podemos determinar $v_k, i = 1, \dots, n$ de (2.28) y entonces construir la función de producción agregada

$$Q(p, r) = \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{v_i + \alpha_i}. \quad (2.33)$$

Es inmediato que $Q(p, r)$ crece estrictamente por p y decrece estrictamente con respecto a r . Por lo tanto los puntos de intersección de las rectas $G = Q(p, r)$ con la curva de la demanda se mueven monótonamente a la derecha cuando r crece de $-\infty$ a 0 . La recta $G = Q(p, -\infty)$ describe la dependencia de la producción agregada del precio p en el caso de competencia perfecta, cuando los productores excluyen la posibilidad de su influencia en el precio individualmente. La recta $G = Q(p, 0)$ corresponde al máxima influencia individual (para las funciones de costo dadas). Ahora el análisis cualitativo de la dependencia del precio de equilibrio respecto de nivel de demanda activa puede ser conducido exactamente en la misma manera como hizo Bulavsky en su artículo (2004).

Capítulo 3

Oligopolio Mixto con Conjeturas

Consistentes

3.1. Introducción

En los últimos años, la investigación de patrones de comportamiento de los agentes en los mercados mixtos, en los cuales el estado de propiedad (pública, doméstica, etc.), empresas que buscan maximizar el bienestar social frente a empresas que buscan la maximización de ganancias privadas (o extranjeras), se ha vuelto más y más popular. Para las obras pioneras de los oligopolios en común, (véase [26], [31], [17], y Bos (1986, 1991)). Excelentes encuestas se pueden encontrar en [32], [11] y [27].

El interés en oligopolios mixtos es alto debido a su importancia para las economías de Europa (Alemania, Inglaterra y otros), Canadá y Japón (véase [25]). Hay ejemplos de oligopolios mixtos en los Estados Unidos tales como las

industrias de paquetería y entrega nocturnas. Oligopolios mixtos son también comunes en la Europa del Este y la antigua Unión Soviética, donde la competencia entre las empresas públicas y privadas ha existido o aún existe en muchas industrias como la banca, préstamo hipotecarios, seguro de vida, líneas aéreas, telecomunicaciones, gas natural, energía eléctrica, ferrocarril, automóviles, el acero, la educación, hospitales, atención sanitaria, la radiodifusión, y servicios de entrega.

En la mayoría de los documentos antes mencionados, el oligopolio mixto es estudiado en el marco clásico de Cournot, o modelos de Stackelberg (Véase [24], [25], [10]). Es bien sabido (véase, [14]) que el equilibrio de Nash (incluyendo el equilibrio de Cournot como un caso particular) es el resultado coherente de los agentes racionales que toman decisiones rivales, tal como figura cuando se pretende optimizar utilidades. Alternativamente, en el equilibrio Stackelberg hay dos agentes que toman sus decisiones de forma secuencial, el primer agente en movimiento es conocido como el líder, mientras que el segundo se llama el seguidor. El equilibrio de Stackelberg es un resultado coherente con el comportamiento racional del seguidor, ya que se ha observado el movimiento del líder, y el comportamiento racional del líder quien puede inferir cuál será la reacción racional del seguidor a su decisión actual.

Equilibrios de variación conjetural (CVE) han sido introducidos en [4] y [15] como otro concepto de la solución posible en juegos estáticos. Según este concepto, los agentes se comportan de la siguiente manera: cada agente elige su acción más favorable teniendo en cuenta que la estrategia de cada rival es una función conjeturada de su propia estrategia.

En las obras de Bulavsky y Kalashnikov [8] y [9], [18], una nueva gama de equilibrios de variaciones conjeturales (CVE) fue presentado e investigado, en el que las variaciones conjeturales (representado a través de los

coeficientes de influencia de cada agente) afectó a la estructura del equilibrio de Nash. En otras palabras, no sólo como una clásica competencia en cantidades, sino también un modelo de tipo Cournot con valores de los coeficiente de influencia diferentes de 1 (el valor de 1 corresponde al modelo clásico de Cournot). Varios resultados de existencia y unicidad del equilibrio se obtuvieron en algunas de las obras antes citadas.

Por ejemplo, [44], el modelo de oligopolio clásico se extendió al oligopolio conjeturado de la siguiente manera. En lugar de la clásica hipótesis de Cournot, todos los productores, $i=1,2,\dots,n$, utilizaron la variación conjetural que se describe a continuación:

$$G_i(\eta) = G + (\eta - q_i)w_i(G, q_i)$$

Aquí G es la cantidad total que se requiere producir para el mercado, q_i y η son, respectivamente, la cantidad producida actualmente y la esperada para producir por el agente i , siendo $G_i(\eta)$ el volumen total conjeturado por el agente i como resultado de cambio de su producción de q_i a η . La función de conjetura w_i representa el coeficiente de influencia del productor i (El modelo clásico de Cournot asume $w_i \equiv 1$ para todo i). Bajo los supuestos generales suficientes para las propiedades del coeficiente de influencia $w_i = w_i(G, q_i)$, las funciones de costo $f_i(q_i)$ y la función inversa de la demanda $p = p(G)$, se obtuvieron nuevos resultados de existencia y unicidad para el equilibrio de variación conjetural (CVE). Este enfoque fue desarrollado en Kalashnikov et al. (2009, 2010) [58], [59], con aplicación al modelo de oligopolio mixto. Aquí de nuevo, todos los agentes (con firmas públicas y privadas) toman sus decisiones basándose en los datos del

modelo (función de costos y función inversa de la demanda) y sus coeficientes de influencia (conjeturas) $w_i = w_i(G, q_i)$.

Como se menciona en [14], [16]), el concepto de variación conjetural ha sido objeto de diversas controversias teóricas (vea [47]). Los economistas han hecho un uso extensivo de una u otra forma del CVE para predecir producciones de comportamientos no cooperativos en bastantes campos de la economía. Una cantidad considerable de trabajos empíricos y econométricos también los hay que evalúan como afectan las conjeturas en situaciones de juegos teóricos en particular. Más recientemente se ha retomado el interés por este concepto usando o un contexto dinámico o situaciones de racionalidad limitada, o ambos.

La literatura sobre variaciones conjeturales se ha centrado principalmente en juegos de dos agentes [14]. El concepto central de la teoría, es la noción de conjeturas. Por lo general, la conjetura variacional r_j describe la reacción del jugador j , según lo previsto por el jugador i , para una variación infinitesimal de la estrategia del jugador i . Este mecanismo conduce a la noción de una función de reacción del oponente. Teniendo en cuenta estas reacciones por parte de los rivales, cada agente optimiza su rentabilidad percibida. Esto produce el concepto de una función de mejor respuesta conjetural. El equilibrio se obtiene cuando ningún jugador tiene interés en apartarse de su estrategia, es decir, su mejor respuesta conjunta a las estrategias del otro jugador.

La consistencia (en ocasiones llamada "racionalidad") del equilibrio se define como la coincidencia entre la mejor respuesta conjetural de cada agente con la función de reacción de la misma. Esta coincidencia se puede definir con diversos grados de fuerza. La más débil definición de consistencia propuesta en la literatura postula que la coincidencia ocurre sólo en el

equilibrio. Una definición más fuerte requiere que la coincidencia se da en una vecindad del equilibrio.

En este trabajo, extendemos los resultados obtenidos en [7] a un modelo de oligopolio mixto. De la misma manera como en [8] y [9], consideramos un modelo de oligopolio de variación conjetural, en el que el grado de influencia en la situación completa para cada agente es modelada por algunos parámetros especiales (coeficientes de influencia). En contraste con los modelos definidos en [8] y [9], aquí seguimos la ideología de Bulavsky [6], [7] seleccionando el precio de mercado p , más que la producción de los agentes, como una variable observable. Entonces, si fijamos los coeficientes de influencia de una manera exógena, entonces la estructura de la demanda no afecta el régimen de producción, i.e. la dependencia de los valores de producción en el precio de mercado. Aunque la deformación de la curva de la demanda nos lleva a una variación del equilibrio, la modelación posible de estas deformaciones en tales modelos es limitada.

Sin embargo, si incluimos los coeficientes de influencia en la definición del propio equilibrio, junto con el precio de equilibrio y los volúmenes de producción, se aparece la posibilidad de simular los efectos antes mencionados. Esta noción de equilibrio se introdujo en [6]. Allí, los coeficientes de influencia son determinados por un procedimiento especial de verificación que comprueba su coherencia. El procedimiento en [6] supone que cada agente puede observar las variaciones de la salida de la producción total como respuesta a las variaciones de su propia producción y así estimar su influencia. La elección del volumen de producción agregada como el parámetro observado se llevó a cabo debido al hecho de que el clásico modelo de Cournot se tomó como base del modelo desarrollado. Sin embargo, se puede suponer que es más natural observar el precio de mercado en lugar de la producción total, y por lo tanto, estimar la influencia de cada agente en el precio. Este enfoque se desarrolla en el trabajo de Bulavsky [7], lo que permitió flexibilizar las condiciones impuestas a la función

de demanda y sigue, en esencia, sólo uno de ellos, a saber, el que sea no creciente cuando el precio crece. Una condición técnica para la función que es suave por partes también se mantiene válida.

3.2. Especificación del modelo

Consideremos no menos que tres productores de un bien homogéneo con las funciones de costos: $f_i(q_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $n \geq 2$, donde q_i es la producción de cada agente i . La demanda de los consumidores estará descrita por la función de demanda $G(p)$, para la cual el argumento p es el precio de mercado propuesto por los productores. Tenemos una demanda activa D no negativa y que no depende del precio. Definiremos el equilibrio entre la demanda y la oferta para el precio p dado por la siguiente igualdad de balance

$$\sum_{i=0}^n q_i = G(p) + D. \quad (3.1)$$

Asumimos las siguientes propiedades de los datos del problema.

A1. La función de demanda $G(p)$ está definida para precios $p \in (0, +\infty)$ siendo no negativa, no creciente y continuamente diferenciable.

A2. Para cada $i = 0, 1, \dots, n$, la función de costo $f_i(q_i)$ es cuadrática, i.e.

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i, \quad (3.2)$$

donde

$$a_i > 0, b_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Asumimos también que

$$b_0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} b_i. \quad (3.3)$$

El productor privado i , $i = 1, \dots, n$, elige su volumen de producción $q_i \geq 0$ buscando maximizar su función de utilidad $\pi_i(p, q_i) = p \cdot q_i - f_i(q_i)$. Por otro lado, la firma pública con coeficiente $i = 0$ elige su valor de producción $q_0 \geq 0$ de tal modo que maximice el beneficio social definido como la diferencia entre el superávit del consumidor, las entradas totales de las firmas privadas y los costos de producción de la firma pública:

$$S(p; q_0, q_1, \dots, q_n) = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i} p(x) dx - p \cdot \left(\sum_{i=1}^n q_i \right) - c_0 - b_0 q_0 - \frac{1}{2} a_0 q_0^2; \quad (3.4)$$

Ahora postulamos que los agentes (firma pública y privados) asumen que su elección de producción pueden afectar el valor del precio p . Esta hipótesis podría definirse como la dependencia conjeturada del precio p en los volúmenes de producción q_i . Entonces tenemos que la condición de maximización de primer orden para describir el equilibrio tendría la forma siguiente:

para la firma pública ($i = 0$)

$$\frac{\partial S}{\partial q_0} = p - \left(\sum_{i=1}^n q_i \right) \frac{\partial p}{\partial q_0} - f_0'(q_0) \begin{cases} = 0, & \text{si } q_0 > 0; \\ \leq 0, & \text{si } q_0 = 0; \end{cases} \quad (3.5)$$

y

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p + q_i \frac{\partial p}{\partial q_i} - f_i'(q_i) \begin{cases} = 0, & \text{si } q_i > 0; \\ \leq 0, & \text{si } q_i = 0, \end{cases} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Entonces, vemos que para describir el comportamiento del agente, necesitamos evaluar el comportamiento de la derivada $\frac{\partial p}{\partial q_i} = -v_i$ más que la dependencia de p en q_i . Introducimos el signo menos para tener valores positivos de v_i . Por supuesto, la dependencia conjetural de p en q_i tiene que dar (al menos localmente) concavidad de la ganancia conjeturada del agente i como una función de su producción. De lo contrario no podemos garantizar que la utilidad sea maximizada (aunque no es minimizada).

Como suponemos que las funciones de costo $f_i(q_i)$ son cuadráticas y por lo tanto convexas, entonces para $i = 1, \dots, n$, la concavidad del producto $p \cdot q_i$ con respecto a la variación η_i del volumen de producción actual estará dada. Por instancia, es suficiente asumir el coeficiente v_i (en adelante referido como el coeficiente de influencia del agente i) que sea no-negativo y constante. Entonces la dependencia local conjeturada de la ganancia respecto a la producción η_i tiene la siguiente forma $[p - v_i(\eta_i - q_i)]\eta_i - f_i(\eta_i)$, mientras que la condición del máximo en $\eta_i = q_i$ esta dada por las relaciones

$$\begin{cases} p = v_i q_i + b_i + a_i q_i, & \text{si } q_i > 0; \\ p \leq b_i, & \text{si } q_i = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Igualmente, la dependencia local conjeturada de la firma publica del beneficio social en su volumen de producción η_0 tiene la forma

$$\int_0^{\eta_0 + \sum_{i=1}^n q_i} p(x) dx - [p - v_0(\eta_0 - q_0)] \cdot \left(\sum_{i=1}^n q_i \right) - f_0'(\eta_0), \quad (3.8)$$

que permite escribir la condición del máximo en $\eta_0 = q_0$ como sigue:

$$(3.9) \quad \begin{cases} p = -v_0 \sum_{i=1}^n q_i + b_0 + a_0 q_0, & \text{si } q_0 > 0; \\ p \leq -v_0 \sum_{i=1}^n q_i + b_0, & \text{si } q_0 = 0. \end{cases}$$

Donde las conjeturas de los agentes para el modelo dado exógenamente como se asume en [8] y [9], permitiríamos que los valores v_i sean funciones de q_i y p . Aquí usamos el enfoque del trabajo de Bulavsky, [6], [7], donde los parámetros de conjetura para un equilibrio están determinados simultáneamente con el precio p y los valores de producción q_i por un procedimiento especial de verificación. En el último caso, los coeficientes de influencia son los paramentarios escalares determinados solo para el equilibrio. En lo que sigue, tal equilibrio se conoce como un interno y se describe por el conjunto de parámetros $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, v_0, v_1, \dots, v_n)$.

3.3. Equilibrio Externo

Para presentar el procedimiento de verificación necesitamos otra noción del equilibrio llamado *equilibrio externo* [7] con parámetros v_i dados exógenamente.

Definición 3.1. El conjunto $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ se llama *equilibrio externo* para los coeficientes de influencia dados (v_0, v_1, \dots, v_n) , si el mercado esta balanceado, i.e. condición (3.1) se satisface, y para cada i las condiciones para el máximo (3.7) y (3.9) son validas.

En adelante, consideraremos solo el caso cuando el conjunto de participantes es constante independientemente de los valores v_i de los coeficientes de influencia. Para tener esto hacemos las hipótesis siguientes:

A3. Para el precio $p_0 = \max_{1 \leq j \leq n} b_j$, se cumple lo siguiente:

$$\sum_{i=0}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} < G(p_0). \quad (3.10)$$

Remark 3.1. La ultima hipótesis, junto con las hipótesis A1 y A2, garantizan que para todo valor no negativo de $v_i, i=1, \dots, n$, y para $v_0 \in [0, \bar{v}_0)$, donde

$$0 < \bar{v}_0 = \begin{cases} a_0 \left[\frac{G(p_0) - \frac{p_0 - b_0}{a_0}}{\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i}} - 1 \right], & \text{si } \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} > 0; \\ +\infty, & \text{para el caso contrario,} \end{cases} \quad (3.11)$$

Siempre existe una única solución de la optimalidad de las condiciones (3.7) y (3.9) satisfaciendo la igualdad de balance (3.1), i.e., un equilibrio externo. Sobre todo, las condiciones (3.1), (3.7), (3.9) pueden cumplirse simultáneamente si, y solo si, $p > p_0$, lo que es, si y solo si todas las cantidades producidas q_i son estrictamente positivas, $i=0,1, \dots, n$. En

efecto, si $p > p_0$ entonces es evidente que ni las desigualdades $p \leq b_i, i=1, \dots, n$, de (3.7), ni $p \leq -v_0 \sum_{i=1}^n q_i + b_0$ de (9) son posibles, lo que significa que ningún $q_i, i=0, 1, \dots, n$, puede ser cero. Contrariamente, si todos $q_i > 0, i=0, 1, \dots, n$, entonces es un hecho de las condiciones (3.7) que:

$$p = v_i q_i + b_i + a_i q_i > b_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

y así

$$p > \max_{1 \leq i \leq n} b_i = p_0.$$

Teorema 3.1 Bajo las condiciones A1, A2 y A3, para cualquier $D \geq 0, v_i \geq 0, i=1, \dots, n$, y $v_0 \in [0, \bar{v}_0)$, existe únicamente un equilibrio externo $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$, el cual depende continuamente de los parámetros $(D, v_0, v_1, \dots, v_n)$. El precio de equilibrio $p = p(D, v_0, v_1, \dots, v_n)$ como una función de estos parámetros es diferenciable con respecto a ambos, D y $v_i, i=0, 1, \dots, n$. Por otra parte, $p(D, v_0, v_1, \dots, v_n) > p_0$, y además

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^n \frac{1}{v_i + a_i} - G'(p)}. \quad (3.12)$$

Las pruebas de todos los resultados de este trabajo se encuentran en el Apéndice del Capítulo.

3.4. Equilibrio Interno

Ahora estamos listos para definir un equilibrio interno. Para ello, primero describimos el procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia v_i como esta dado en [6] y [7]. Asuma que tenemos un equilibrio externo $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ que resulto para algún v_0, v_1, \dots, v_n y D . Uno de los productores, digamos k , temporalmente cambia su comportamiento con la abstención de maximización de utilidad conjeturada (o beneficio social en el caso de $k=0$) y haciendo variaciones pequeñas alrededor de su volumen de producción de equilibrio q_k . En términos matemáticos es equivalente a la restricción de los agentes del modelo al subconjunto $i \neq k$ con producción q_k sustraída de la demanda activa.

La variación de la producción del agente k es entonces equivalente a la variación de la demanda activa de la forma $D_k = D - q_k$. Si consideramos estas variaciones como infinitesimales, asumimos que por observación del correspondiente cambio en el precio de equilibrio, el agente k obtiene la derivada del precio de equilibrio con respecto a la demanda activa, i.e. sus coeficientes de influencia.

Aplicando (3.12) del Teorema 3.1 para calcular las derivadas, tenemos que recordar que el agente k esta temporalmente ausente del modelo de equilibrio, entonces tenemos que excluir de todas las sumas, el termino con $i=k$. Considerando esto, llegamos al siguiente criterio

Criterio de Consistencia. En un equilibrio externo $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ los coeficientes de influencia $v_k, k = 0, 1, \dots, n$, serán consistentes si se cumplen las siguientes desigualdades:

$$v_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - G'(p)}, \quad (3.13)$$

y

$$v_i = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} - G'(p)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Ahora estamos en una posición de definir el concepto de un equilibrio interno.

Definición 3.2. La colección $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, v_0, v_1, \dots, v_n)$ donde $v_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, n$, es referida como un *equilibrio interno* si, para los coeficientes de influencia considerados, la colección $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ es un equilibrio externo, y el criterio de consistencia se satisface para todo k .

Remark 3.2. Si, todos los agentes son firmas privadas, que buscan maximizar su utilidad, entonces las formulas (3.13)- (3.14) se reducen a la obtenida en [7] y [23]:

$$v_i = \frac{1}{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} - G'(p)}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

El siguiente teorema es una extensión del teorema 2 en [7] para el caso de un oligopolio mixto

Teorema 3.2 Bajo las suposiciones A1, A2 y A3, existe un equilibrio interno.

En nuestra futura investigación, nos extenderemos a la obtención de resultados para el caso de funciones de demanda no diferenciables. Por otro lado algunas de las técnicas necesarias pueden desarrollarse ahora, en el caso diferenciable. Para ello, denotamos el valor de la derivada de la función de demanda por $\tau = G'(p)$ y rescribimos las ecuaciones de consistencia (13)-(14) de la siguiente manera:

$$v_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - \tau}, \quad (3.15)$$

y

$$v_i = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} - \tau}, i = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

donde $\tau \in (-\infty, 0]$. Cuando $\tau \rightarrow -\infty$ entonces el sistema (3.15) – (3.16) tiene la única solución de límite $v_j = 0, j = 0, 1, \dots, n$. Para todos los valores finitos de τ establecemos la siguiente afirmación.

Teorema 3.3. Para cada $\tau \in (-\infty, 0]$ existe una única solución de las ecuaciones (3.15) – (3.16) $v_k = v_k(\tau), k = 0, 1, \dots, n$, continuamente dependientes de τ . Además, $v_k(\tau) \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow -\infty, k = 0, 1, \dots, n$, y $v_0(\tau)$ estrictamente crece a $v_0(0)$ cuando τ tiende a cero.

3.5. Resultados Numéricos

Para ilustrar la diferencia entre los oligopolios mixtos y clásicos relacionados al equilibrio de variaciones conjeturales con conjeturas consistentes (coeficientes de influencia), ampliamos las formulas (3.15) – (3.16) al ejemplo simple de un oligopolio en el mercado de la electricidad (vea [23]). La única diferencia en nuestro ejemplo modificado de la instancia de [23] es en lo siguiente: en su caso, todos los seis agentes son firmas privadas produciendo electricidad y maximizando sus utilidades netas, y en nuestro caso, asumimos el agente 0 (y solo este) como una firma publica buscando maximizar el beneficio social publico definido por (3.4). Todos los otros parámetros involucrados en la función inversa de la demanda p y las funciones de costo, son exactamente iguales.

Entonces, siguiendo [23], utilizamos un sistema con 6 generadores para ilustrar el análisis anterior. La función inversa de la demanda en el mercado de la electricidad esta dado de la forma:

$$p(G, D) = 50 - 0.02(G + D) = 50 - 0.02 \sum_{i=0}^5 q_i.$$

Los parámetros de las funciones de costo de los productores (generadores) están listados en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Coeficientes de las funciones de costo

Agente	c_i	b_i	a_i
0	0	2.0	0.02
1	0	1.75	0.0175
2	0	3.0	0.025

3	0	3.0	0.025
4	0	1.0	0.0625
5	0	3.25	0.00834

Para encontrar los coeficientes de influencia consistentes en el mercado de oligopolio clásico (Caso 1), [23], se usan las formulas (3.14) para todos los seis productores, mientras para nuestro modelo de oligopolio mixto (Caso 2), explotamos la formula (3.13) para el productor $i=0$ y las formulas (3.14) para los productores de $i=1, \dots, 5$. con los coeficientes de influencia obtenidos para el equilibrio único es encontrado para cada Caso 1 y 2. los resultados del equilibrio (coeficientes de influencia, cantidades de producción, precio de equilibrio y los valores óptimos de la función objetivo) son presentados en Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Resultados computacionales para CVE consistentes: v_i , generacion, utilidades.

Agente	v_i	v_i	q_i	q_i	Utilidad	Utilidad
	Caso 1	Caso 2	(MWH) Caso 1	(MWH) Caso 2	(\$/H) Caso 1	(\$/H) Caso 2
0	0.19275	0.18779	353.405	626.006	1727.4	595.77
1	0.19635	0.16674	405.120	358.138	2076.6	1550.04
2	0.18759	0.15887	258.436	220.451	1082.9	761.90
3	0.18759	0.15887	258.436	220.451	1082.9	761.90
4	0.17472	0.14761	142.898	125.462	707.48	538.37
5	0.22391	0.19270	560.180	488.905	2709.8	1917.98

Como podría esperarse, el precio de equilibrio en el Caso 1, (oligopolio clásico) resulta como $p_1 = 10.4304$, mientras en el Caso 2 (oligopolio mixto) para este ejemplo el precio resulta $p_2 = 9.2118$. En lo contrario, la

generación total de electricidad es más alta: 2039.412 MWH, en el segundo caso (oligopolio mixto), que el Caso 1: 1978.475 MWH. Ambos resultados son más atractivos para los consumidores. Simultáneamente, las utilidades netas de los productores privados se observan más bajas en el oligopolio mixto (Caso 2) que en el caso de oligopolio clásico (Caso 1). En el Caso 2, la utilidad es mínima en la celda del productor $i=0$, como su función objetivo no es la utilidad, sino el beneficio social definido por (3.4); es esta instancia, esto sucede para llegar hasta \$42,187.80/H.

Es también interesante comparar los resultados en CVE con conjeturas consistentes (Caso 1 y 2) contra la producción y utilidad obtenida para los mismos casos en el equilibrio clásico de Cournot (i.e., con todos $v_i = 1, i = 0, 1, \dots, 5$.) la Tabla 3.3 ilustra los resultados dados, con $p_1 = 14.760$ en oligopolio clásico (Caso 1) mucho más alto que el precio de equilibrio $p_2 = 9.5349$ en el oligopolio mixto (Caso 2).

Tabla 3.3. Resultados del modelo Cournot: v_i , generación, utilidades

Agente	v_i		q_i		Profits	
	Caso 1	Caso 2	(MWH) Caso 1	(MWH) Caso 2	(\$/H) Caso 1	(\$/H) Caso 2
0	1	1	319.06	1200.00	3054.0	-5358.14
1	1	1	347.00	207.597	3461.7	1239.02
2	1	1	261.39	145.220	2220.5	685.38
3	1	1	261.39	145.220	2220.5	685.38
4	1	1	166.82	103.453	1426.2	548.51
5	1	1	406.23	221.767	3988.5	1188.70

De nuevo, la generación total de electricidad es mayor: 2023.256 MWH, en el segundo Caso (oligopolio mixto) que en el Caso 1: 1761.9 MWH. Ambos resultados son de mayor ventaja para el consumidor,

simultáneamente las utilidades netas de los productores privados se ve que son mucho menores en el oligopolio mixto (Caso 2) que en el oligopolio clásico (Caso 1). En el Caso 2, las utilidades son siempre negativas en la celda correspondiente al productor $i=0$, como su función objetivo no es de utilidad propiamente sino de beneficio social definida por (3.4); en este ejemplo, es igual a \$35,577.50/H. El último dato, junto con su precio de mercado, sugiere que el oligopolio mixto con conjeturas consistentes es preferible para los consumidores que el modelo de Cournot.

Por supuesto, el modelo de competencia perfecta (ver Tabla 4.4) con $v_i = 0, i = 0, 1, \dots, 5$, es lo mejor para los consumidores en ambos Casos 1 y 2.: con $p_1 = p_2 = 8.9685$ y la producción total $G_1 = G_2 = 2051.57$ MWH. El beneficio social es también mayor en este caso que en todos los anteriores: \$43,303.52/H.

Tabla 3.4. Resultados en el modelo de competencia perfecta: v_i , generación, ganancias

Agente	v_i	v_i	q_i	q_i	Utilidad	Utilidad
	Caso 1	Caso 2	(MWH) Caso 1	(MWH) Caso 2	(\$/H) Caso 1	(\$/H) Caso 2
0	0	0	348.43	348.43	1214.00	1214.00
1	0	0	412.49	412.49	1488.80	1488.80
2	0	0	238.74	238.74	712.47	712.47
3	0	0	238.74	238.74	712.47	712.47
4	0	0	127.50	127.50	507.98	507.98
5	0	0	685.68	685.68	1960.50	1960.50

Es interesante ver que (cf. Tablas 3.2 – 3.4) el oligopolio clásico (Caso 1), el modelo de Cournot demuestra ser el más rentable para los productores,

mientras no lo es el Caso para el oligopolio mixto: aquí la existencia de una empresa pública, con una función de utilidad distinta hace el consistente CVE más ventajoso para el resto de los productores que en el Caso Cournot.

Finalmente, podemos comparar los consistentes CVEs (Tabla 3.5), el equilibrio Cournot (Tabla 3.6) y la competencia perfecta para el Caso 2 (oligopolio mixto con productor $i=0$ siendo una compañía pública) contra un Caso similar (Caso 3) en el que no el productor $i=0$ sino el (mucho más fuerte) productor $i=5$ es el productor público.

Tabla 3.5. Resultados del consistente CVE: v_i , generación, utilidad

Agente	v_i	v_i	q_i	q_i	Utilidad	Utilidad
	Caso 2	Caso 3	(MWH) Caso 2	(MWH) Caso 3	(\$/H) Caso 2	(\$/H) Caso 3
0	0.18779	0.13208	626.006	259.480	595.77	851.16
1	0.16674	0.13497	358.138	303.229	1550.04	1052.75
2	0.15887	0.12803	220.451	176.884	761.90	471.22
3	0.15887	0.12803	220.451	176.884	761.90	471.22
4	0.14761	0.11843	125.462	105.984	538.37	377.63
5	0.19270	0.21584	488.905	1083.785	1917.98	114.52

Con el precio de mercado $p_3 = 7.8751$ aun más bajo y beneficio social \$44,477.30/H, aun más alto que en el modelo de competencia perfecta, estos consistentes CVE pueden servir como un buen ejemplo de la compañía pública fuerte regulando los precios dentro de un oligopolio.

Son interesantes los resultados en la Tabla 3.6: comparando con el oligopolio de Cournot en los Casos 1,2 y 3, podríamos ver que con una firma pública más débil (Caso 2) los productores privados pueden inclinarse al modelo de Cournot (cf. Tabla 3). Sin embargo, con firma

pública privada, como es en el Caso 3, las compañías privadas deberían más bien seleccionar el consistente CVE: en el Caso del modelo de Cournot, la firma pública fuerte subyuga todos los rivales a los niveles mínimos de producción y utilidad. Sin embargo, el modelo de Cournot con firma pública fuerte provee el precio más bajo de mercado: $p_3 = 6.9045$, aunque a costa de reducir un poco el beneficio social: \$41,111.59/H.

Tabla 3.6. Resultados del modelo de Cournot: v_i , generación, utilidad.

Agente	v_i Caso 2	v_i Caso 3	q_i (MWH) Caso 2	q_i (MWH) Caso 3	Utilidad (\$/H) Caso 2	Utilidad (\$/H) Caso 3
0	1	1	1200.00	122.612	-5358.14	451.01
1	1	1	207.597	137.452	1239.02	543.18
2	1	1	145.220	86.766	685.38	244.67
3	1	1	145.220	86.766	685.38	244.67
4	1	1	103.453	71.569	548.51	262.51
5	1	1	221.767	1649.612	1188.70	-5319.04

Como podría esperarse, en el modelo de competencia perfecta, ambos Casos 2 y 3 dan exactamente los mismos resultados, aunque diferentes valores de beneficio social: \$43,303.52/H en el Caso 2 contra un poco mayor en el Caso 3 \$43,303.52/H con firma pública más fuerte.

3.6. Apéndice

Este apéndice asegura las demostraciones de los Teoremas 3.1, 3.2 y 3.3.

Demostración del Teorema 3.1

Dado que las hipótesis A1 – A3, y el vector dado $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)^T \geq 0$, las igualdades en las condiciones de optimalidad (3.7) y (3.8) definen la respuesta óptima como la función $q_i = q_i(p; v_0, \dots, v_n)$ continuamente diferenciable (con respecto a p) definida para el intervalo $[p_0, +\infty)$ por las siguientes formulas:

$$q_0 = \frac{p - b_0}{a_0} + \frac{v_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{v_i + a_i}, \quad (3.17)$$

y

$$q_i = \frac{p - b_i}{v_i + a_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

Por otra parte, las derivadas parciales de las funciones de respuesta óptima son positivas:

$$\frac{\partial q_0}{\partial p} = \frac{1}{a_0} + \frac{v_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} \geq \frac{1}{a_0} > 0, \quad (3.19)$$

y

$$\frac{\partial q_i}{\partial p} = \frac{1}{v_i + a_i} > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la función para el volumen total de producción $Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n) = \sum_{j=0}^n q_j(p; v_0, v_1, \dots, v_n)$ es continua y estrictamente creciente

en p . De acuerdo a la hipótesis A3, esta sumatoria tiene en $p = p_0$ un valor estrictamente menor a $G(p_0)$. De hecho, de (3.17) y (3.18) tenemos que si

$\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 Q(p_0; v_0, v_1, \dots, v_n) &= \sum_{j=0}^n q_j(p_0; v_0, v_1, \dots, v_n) = \\
 &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \frac{v_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} = \\
 &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} < \\
 &< \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \frac{\bar{v}_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} = \\
 &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \left[\frac{G(p_0) - \frac{p_0 - b_0}{a_0}}{\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i}} \right] \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} = \\
 &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + G(p_0) - \frac{p_0 - b_0}{a_0} = G(p_0).
 \end{aligned}$$

De otro modo, i.e. si $\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 Q(p_0; v_0, v_1, \dots, v_n) &= \sum_{j=0}^n q_j(p_0; v_0, v_1, \dots, v_n) = \\
 &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \frac{v_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} = \\
 &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} < G(p_0)
 \end{aligned}$$

para cualquier $v_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Por otro lado, la producción total $Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n)$ tiende a $+\infty$ cuando $p \rightarrow +\infty$.

Definimos entonces

$$p_* = \sup \{ p \mid Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n) \leq G(p) + D \}. \quad (3.21)$$

Como $Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n)$ y $G(p) + D$ son funciones continuas con respecto a p , $Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n)$ crece ilimitadamente y $G(p) + D$ es no-creciente sobre el intervalo $[p_0, +\infty)$, ello implica que primero, $p_* < +\infty$ y segundo,

$$Q(p_*; v_0, v_1, \dots, v_n) \leq G(p_*) + D.$$

Ahora demostramos que la desigualdad estricta $Q(p_*; v_0, v_1, \dots, v_n) < G(p_*) + D$ no puede ocurrir. Y de hecho, asumimos lo contrario, que la desigualdad estricta es válida. Entonces, la continuidad de las funciones envueltas implica que para algunos valores $p > p_*$ al rededor de p_* la misma relación es verdadera: $Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n) < G(p) + D$, lo cual contradice la definición (3.21). Por lo tanto se cumple la igualdad exacta $Q(p_*; v_0, v_1, \dots, v_n) = G(p_*) + D$, lo que significa que los valores p_* y $q_i^* = q_i(p_*; v_0, v_1, \dots, v_n)$, $i = 0, 1, \dots, n$, definidos por las formulas (3.17) y (3.18) con p_* en lugar de p , forman un equilibrio externo para el vector $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)^T \geq 0$. La unicidad de este equilibrio sigue del hecho de que la función $Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n)$ estrictamente crece mientras la función $G(p) + D$ es no-creciente con respecto a p . De hecho lo ultimo implica que $Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n) < G(p) + D$ cuando $p_0 < p < p_*$, mientras que $Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n) > G(p) + D$ para $p > p_*$. Debido a esto, el precio de equilibrio p_* y la producción de equilibrio $q_i^* = q_i(p_*; v_0, v_1, \dots, v_n)$, $i = 0, 1, \dots, n$, son determinados únicamente.

Ahora establecemos la continua dependencia del precio de equilibrio (y por tanto, los volúmenes de producción del equilibrio) de los parámetros $(D, v_0, v_1, \dots, v_n)$. Para esto, sustituimos las expresiones (3.17) y

(3.18) por $q_i = q_i(p; v_0, \dots, v_n)$ en la ecuación de balance (3.1) y llegamos a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 q_0 + \sum_{i=1}^n q_i - G(p) - D &= \\
 &= \left(\frac{p-b_0}{a_0} + \frac{v_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p-b_i}{v_i+a_i} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{p-b_i}{v_i+a_i} - G(p) - D = \\
 &= p \left(\frac{1}{a_0} + \frac{v_0+a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p-b_i}{v_i+a_i} \right) - \frac{b_0}{a_0} - \frac{v_0+a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{v_i+a_i} - G(p) - D = 0.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Introducimos la función

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p; v_0, v_1, \dots, v_n, D) &= \\
 &= p \left(\frac{1}{a_0} + \frac{v_0+a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p-b_i}{v_i+a_i} \right) - \frac{b_0}{a_0} - \frac{v_0+a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{v_i+a_i} - G(p) - D
 \end{aligned}$$

Y rescribimos la última desigualdad en (3.22) como la ecuación funcional

$$\Gamma(p; v_0, v_1, \dots, v_n, D) = 0. \tag{3.23}$$

Como la derivada parcial de esta función con respecto a p es siempre positiva:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p} = \frac{1}{a_0} + \frac{v_0+a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i+a_i} - G'(p) \geq \frac{1}{a_0} > 0,$$

Entonces podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita y concluir que el precio de equilibrio p considerado como una función $p = p(v_0, v_1, \dots, v_n, D)$ es diferenciable con respecto a todos los parámetros v_0, v_1, \dots, v_n, D . Además, la derivada parcial del precio de equilibrio con respecto a D puede encontrarse de la expresión:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial \Gamma}{\partial D} = 0,$$

lo que nos da finalmente:

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^n \frac{1}{v_i + a_i} - G'(p)}.$$

Y así concretamos la prueba.

Demostración del Teorema 3.2

Mostraremos que existe un $v_0 \in [0, \bar{v}_0)$, $v_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; $q_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$; y $p > p_0$ tal que el vector $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, v_0, v_1, \dots, v_n)$ es un equilibrio interno. En otras palabras, el vector $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ es un equilibrio externo, y en adición, las ecuaciones (3.15) – (3.16) se cumplen. Para propósitos técnicos, introduzcamos un parámetro α tal que $G'(p) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$ para cierto $\alpha \in [-1, 0]$, y entonces reescribimos el lado derecho de las formulas (3.13) y (3.14) de la siguiente manera:

$$F_0(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - \alpha}, \quad (3.24)$$

y

$$F_i(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} - \alpha}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.25)$$

Como $v_i \geq 0$, $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, y $\alpha \in [-1, 0]$, las funciones F_i , $i = 0, 1, \dots, n$ están definidas y son continuas con respecto a sus argumentos sobre los

dominios correspondientes. Ahora introducimos una función auxiliar $\Phi: [-1, 0] \times R_+^{n+1} \rightarrow [-1, 0]$ como sigue. Para un valor arbitrario $\alpha \in [-1, 0]$ y $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in [0, \bar{v}_0) \times R_+^n$, encontramos el equilibrio externo (determinado únicamente) $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ y calculamos la derivada $G'(p)$ en el punto de equilibrio p . Entonces definimos el valor de la función Φ como a continuación:

$$\Phi(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = \hat{\alpha} = \frac{G'(p)}{1 - G'(p)} \in [-1, 0]. \quad (3.26)$$

Cuando definimos esta función auxiliar, no indicamos su dependencia en D , porque no varía para la prueba. Como la derivada $G'(p)$ es continua por p (dada la hipótesis A1), y el precio de equilibrio $p = p(v_0, v_1, \dots, v_n)$, a su vez, es una función continua (cf. Teorema 3.1), entonces la función Φ es continua como una superposición de funciones continuas. (También hacemos notar que su dependencia en α es ficticia). Para finalizar la prueba, hacemos un mapeo $H = (\Phi, F_0, F_1, \dots, F_n): [-1, 0] \times R_+^{n+1} \rightarrow [-1, 0] \times R_+^{n+1}$ y seleccionamos un compacto convexo que es mapeado por H en si mismo. Definimos entonces: $s = \max \{\bar{v}_0, a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Las formulas (3.24) – (3.25) nos dan las siguientes relaciones: si $\alpha = -1$, entonces:

$$F_0(-1, v_0, v_1, \dots, v_n) = 0, \quad (3.27)$$

$$F_i(-1, v_0, v_1, \dots, v_n) = 0, i = 1, \dots, n, \quad (3.28)$$

mientras para $\alpha \in (-1, 0]$ tenemos:

$$\begin{aligned}
0 \leq F_0(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) &= \frac{1+\alpha}{(1+\alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - \alpha} \leq \frac{1+\alpha}{(1+\alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i}} = \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i}} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + s}};
\end{aligned} \tag{3.29}$$

y

$$\begin{aligned}
0 \leq F_i(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) &= \frac{1+\alpha}{(1+\alpha) \frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} - \alpha} \leq \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j}} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j}} \leq \frac{1}{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + s}}, \quad i=1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Las relaciones (3.27) – (3.30) claramente implican que para cualquier $\alpha \in [-1, 0]$, si $0 \leq v_j \leq \frac{s}{n-1}$, $j=0, 1, \dots, n$, entonces los valores de $F_j(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n)$, $j=0, 1, \dots, n$, se engloban en el intervalo (cerrado) $\left[0, \frac{s}{n-1}\right]$. Por lo tanto, tenemos establecido que el mapeo continuo $H = (\Phi, F_0, F_1, \dots, F_n)$ mapea el compacto $[-1, 0] \times \left[0, \frac{s}{n-1}\right]^{n+1}$ en si mismo. Así, por el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, el mapeo H tiene un punto fijo $(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n)$, esto es:

$$\begin{cases} \Phi(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = \alpha, \\ F_0(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = v_0, \\ F_1(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = v_1, \\ \vdots \\ F_n(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = v_n. \end{cases} \tag{3.31}$$

Habiendo determinado para estos coeficientes de influencia $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in [0, \bar{v}_0) \times R_+^n$ el equilibrio externo único (según Teorema 3.1) $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$, podemos inmediatamente concluir de (3.31) y de la definición de la función Φ que $G'(p) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, y los coeficientes de influencia satisfacen las condiciones (3.15)- (3.16). Por tanto, de acuerdo a la Definición 3.2, el vector $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, v_0, v_1, \dots, v_n)$ es el buscado equilibrio Interno.

Demostración del Teorema 3.3

De manera similar a la prueba del Teorema 3.2, introducimos las funciones

$$F_0(\tau, v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - \tau} = v_0, \quad (3.32)$$

y

$$F_i(\tau, v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} - \tau} = v_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.33)$$

y establecemos $s = \max \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Es fácil verificar que para cualquier valor dad de $\tau \in (-\infty, 0]$, la función vectorial $\Gamma = (F_1, \dots, F_n)$ mapea el cubo n

- dimensional $M = \left[0, \frac{s}{n-1}\right]^n$ en si mismo. Ahora mostramos que el

subsistema (3.33) tiene solución única $v(v_0, \tau) = (v_1(v_0, \tau), \dots, v_n(v_0, \tau))^T$ para

cualquier $\tau \in (-\infty, 0]$ y $v_0 \geq 0$; además, la función $v(v_0, \tau)$ es continuamente

diferenciable con respecto a ambas variables. La matriz Jacobiana del

mapeo $\Gamma = (F_1, \dots, F_n)$, que es, la matriz $J = \left(\frac{\partial F_i}{\partial v_j} \right)_{i=1, j=1}^{n, n}$ tiene los siguientes

elementos:

$$\frac{\partial F_i}{\partial v_j} = \begin{cases} 0, & j = i; \\ \frac{v_0 + a_0}{a_0} \frac{F_i^2}{(v_j + a_j)^2}, & j \neq i. \end{cases} \quad (3.34)$$

Entonces, la matriz J es no negativa y no descomponible. Ahora estimamos la suma de los elementos de la matriz en cada renglón $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial v_k} &= \frac{v_0 + a_0}{a_0} F_i^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2} \leq \frac{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2}}{\left(\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2} \right)^2} = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2} \right)^2} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2}}{\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2} \right)^2} = R_i(v_1, \dots, v_n; v_0) < 1. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para cualquier valor fijo $v_0 \geq 0$, las funciones $R_i(v_1, \dots, v_n; v_0)$, $i = 1, \dots, n$, están definidas en el cubo M , continuamente dependen de las variables v_1, \dots, v_n , y toman solo valores positivos estrictamente menores a 1. Además, sus valores máximos que se logran en el cubo M son estrictamente menores a 1, lo cual implica que la matriz $I - J$ es invertible (aquí I es el n -dimensional matriz unidad), y el mapeo $\Gamma = (F_1, \dots, F_n)$ definido en M es un mapeo contraído en la norma cúbica (i.e., $\| \cdot \|_\infty$ -norm). Lo anterior nos da

que para cualquier valor fijo de $\tau \in (-\infty, 0]$ y $v_0 \geq 0$, la ecuación (3.33) tiene una solución única $v(v_0, \tau) = (v_1(v_0, \tau), \dots, v_n(v_0, \tau))^T$. Como $\det(I - J) \neq 0$ para cualquier $\tau \in (-\infty, 0]$ y $v_0 \geq 0$, el Teorema de la Función Implícita también garantiza que $v(v_0, \tau)$ es continuamente diferenciable por ambas variables.

Para establecer la dependencia monótona de la solución $v(v_0, \tau)$ del subsistema (3.33) en τ para cualquier valor fijo $v_0 \geq 0$, sacamos el diferencial de (3.33) con respecto a τ , lo que nos da:

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau} = F_i^2 \left[1 + \frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial \tau}}{(v_k + a_k)^2} \right], i = 1, \dots, n. \quad (3.36)$$

Reorganizando los términos, podemos reescribir como la ecuación vectorial

$$v_\tau' = J v_\tau' + F^2, \quad (3.37)$$

donde

$$v_\tau' = \left(\frac{\partial v_1}{\partial \tau}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial \tau} \right)^T \text{ y } F^2 = (F_1^2, \dots, F_n^2)^T > 0. \quad (3.38)$$

Como todos los elementos de la inversa de la matriz $(I - J)$ son no negativos, y la matriz inversa $(I - J)^{-1}$ no tiene renglones cero, entonces (3.37) y (3.38) implican:

$$v_\tau' = (I - J)^{-1} F^2 > 0, \quad (3.39)$$

Esto es, cada componente del vector de solución $v(v_0, \tau)$ es una función estrictamente creciente por τ para cada valor fijo de $v_0 \geq 0$. Por otro lado, tenemos

$$v_i(v_0, \tau) \leq -\frac{1}{\tau}, i = 1, \dots, n, \quad (3.40)$$

de aquí sigue que para cualquier valor dado $v_0 \geq 0$

$$v_i(v_0, \tau) \rightarrow 0 \text{ como } \tau \rightarrow -\infty, i = 1, \dots, n, \quad (3.41)$$

Para probar la dependencia monótona de la solución $v(v_0, \tau)$ en $v_0 \geq 0$, para cada valor fijo de $\tau \in (-\infty, 0]$, diferenciamos (3.33) por v_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial v_0} &= -F_i^2 \left[\frac{1}{a_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{v_k + a_k} + \frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial v_0}}{(v_k + a_k)^2} \right] = \\ &= F_i^2 \frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial v_0}}{(v_k + a_k)^2} - \frac{F_i^2}{a_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{v_k + a_k}, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Reorganizando estas igualdades como vector-ecuación:

$$v'_{v_0} = Jv'_{v_0} - Q, \quad (3.43)$$

donde

$$v'_{v_0} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial v_0}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial v_0} \right)^T \quad (3.44)$$

y $Q \in \mathbb{R}^n$ es el vector con componentes

$$Q_i = \frac{F_i^2}{a_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{v_k + a_k} > 0, i = 1, \dots, n. \quad (3.45)$$

De (3.43) deducimos que

$$v'_{v_0} = -(I - J)^{-1} Q < 0, \quad (3.46)$$

esto es:

$$\frac{\partial v_i}{\partial v_0} < 0, i = 1, \dots, n, \quad (3.47)$$

Lo que significa que cada componente de $v(v_0, \tau)$ es una función estrictamente decreciente de $v_0 \geq 0$ para cada valor dado de $\tau \in (-\infty, 0]$.

Ahora podemos establecer la existencia y suavidad de la solución única $v(\tau) = (v_0(\tau), v_1(\tau), \dots, v_n(\tau))^T$ del sistema completo (3.32) – (3.33) para cada valor fijo $\tau \in (-\infty, 0]$. Para hacer esto, tomamos la mencionada solución única del subsistema (3.33) en (3.32) y llegamos a la ecuación funcional:

$$v_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i(v_0, \tau) + a_i} - \tau}. \quad (3.48)$$

En orden de establecer la solución única de este último, fijamos un valor arbitrario $\tau \in (-\infty, 0]$ e introducimos la función

$$\Psi(v_0) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i(v_0, \tau) + a_i} - \tau}. \quad (3.49)$$

Como establecimos que

$$0 \leq v_i(v_0, \tau) \leq \frac{s}{n-1}, i = 1, \dots, n, \quad (3.50)$$

obtenemos

$$\Psi(v_0) \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i(v_0, \tau) + a_i}} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i(v_0, \tau) + s}} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{s}{n-1} + s}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{ns}} = \frac{s}{n-1}, \quad (3.51)$$

Lo que significa que (para cada valor fijo $\tau \in (-\infty, 0]$) la función $\Psi(v_0)$ mapea el intervalo cerrado $\left[0, \frac{s}{n-1}\right]$ en si mismo. Además de acuerdo al Teorema de Punto Fijo de Brouwer, existe un punto fijo $v_0 = \Psi(v_0)$ dentro de este intervalo.

Probamos que este punto es único (para cada valor fijo $\tau \in (-\infty, 0]$). De hecho, (3.53) implica que, para cada $\tau \in (-\infty, 0]$, las funciones $v_i(v_0, \tau), i = 1, \dots, n$, son estrictamente decrecientes con respecto a $v_0 \geq 0$, por tanto, cada relación $\frac{1}{v_i(v_0, \tau) + a_i}$ estrictamente crece por $v_0 \geq 0$. Ahora deducimos de (3.49) que la función $\Psi(v_0)$, a su vez, es estrictamente decreciente con respecto a $v_0 \geq 0$, lo que significa que cada punto fijo $v_0 = \Psi(v_0)$ es único. La diferenciabilidad de estas funciones determinadas definidas $v_0 = v_0(\tau)$ con respecto a τ sigue del Teorema de la Función Implícita, debido a que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v_0} = \Psi^2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial v_0}}{(v_i + a_i)^2} < 0 \text{ para cualquier } \tau \in (-\infty, 0].$$

Es fácil ver que la función vectorial

$$v(\tau) = [v_0(\tau), v_1(v_0(\tau), \tau), \dots, v_n(v_0(\tau), \tau)]^T \quad (3.52)$$

obtenida al sustituir la función $v_0 = v_0(\tau)$ en la solución previamente descrita $v(v_0, \tau) = (v_1(v_0, \tau), \dots, v_n(v_0, \tau))^T$ del subsistema (3.33) que representa la solución determinada como única y continuamente diferenciable para el sistema completo (3.32)- (3.33).

Para establecer la monotonicidad del primer componente $v_0 = v_0(\tau)$ por τ , diferenciamos las ecuaciones (3.48) – (3.49) como superposiciones, que nos da

$$\frac{dv_0}{d\tau} = \left(\Psi^2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial v_0}}{(v_i + a_i)^2} \right) \frac{dv_0}{d\tau} + \Psi^2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{dv_i}{d\tau}}{(v_i + a_i)^2} + \Psi^2 \quad (3.53)$$

Resolviendo (3.53) para la derivada obtenemos:

$$\frac{dv_0}{d\tau} = \frac{B}{A}, \quad (3.54)$$

donde

$$A = 1 - \Psi^2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial v_0}}{(v_i + a_i)^2} > 0 \quad (3.55)$$

debido a (3.47), y

$$B = \Psi^2 \left[\sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial \tau}}{(v_i + a_i)^2} + 1 \right] > 0 \quad (3.56)$$

por (3.39). Combinando (3.54) – (3.56) concluimos que $\frac{dv_0}{d\tau} = \frac{B}{A} > 0$, por tanto la función $v_0 = v_0(\tau)$ estrictamente crece por τ . Además, tenemos la estimación evidente de que

$$v_0(\tau) \leq -\frac{1}{\tau},$$

lo que sigue de (3.54), deducimos que $v_0 = v_0(\tau)$ se desvanece como as $\tau \rightarrow -\infty$. De igual forma, (3.41) implica que lo mismo es valido para todos los coeficientes de influencia restantes, i.e. $v_k = v_k(\tau) \rightarrow 0$ como $\tau \rightarrow -\infty$.

Capítulo 4

La liberalización del mercado de la electricidad en México. Las imperfecciones del mercado y sus implicaciones en la situación actual.

4.1. Introducción

El mercado de la electricidad está en proceso de transformación de un estado de monopolio de propiedad de la producción y distribución a los mercados privatizados, con varias empresas en competencia. La velocidad de privatización varía mucho, por lo tanto, el mercado y sus

reglas ya no son fijos. El mercado de la electricidad está en un proceso dinámico y complejo de cambio.

Este capítulo muestra los resultados de los experimentos numéricos en la construcción de un modelo para el mercado de la electricidad en México. El modelo está calibrado para el mercado de comercialización en México y sus fronteras considerando en total siete subdivisiones territoriales. Los resultados del modelo propuesto nos permiten analizar los posibles comportamientos estratégicos de los diferentes productores de electricidad. En un mercado liberalizado, las empresas grandes son más propensas a comportarse de manera estratégica y ejercer poder de mercado a fin de maximizar las ganancias. Además, un líder en el mercado potencial puede surgir, que anticipándose a la reacción de los seguidores, podría adquirir mayores beneficios al aumentar la producción y la cuota de mercado.

El objetivo del modelo Mexstrom es analizar el mercado de la electricidad en México para visualizar el proceso de liberalización, para analizar las implicaciones que las estrategias de los productores de electricidad podrían tener sobre el comercio de este recurso, la elección de la tecnología y sus capacidades. Simulando diferentes comportamientos (competencia perfecta, y Equilibrio de Nash) nos permite analizar diferentes escenarios de liberalización de mercado.

Los principales objetivos de la liberalización del mercado de la electricidad son, en primer lugar, mejorar la eficiencia de la industria de suministro de electricidad, segundo, garantizar un suministro seguro y, en tercer lugar, el establecimiento de precios bajos al por menor. El proceso de liberalización del mercado eléctrico se caracteriza, al menos en principio, por más competencia en el sector de suministro de electricidad.

La estructura actual del mercado en México de la electricidad es bastante homogénea aún. La situación actual se caracteriza por estrategias de aplicación individual. En la mayoría de los países, el suministro de electricidad es producida por los monopolios regionales y el proceso de esta posición a la plena competencia de todos los proveedores de electricidad necesita tiempo y le da gran campo para la ejecución de poder de mercado.

Estas características son analizadas con la ayuda de un juego computable MEXSTROM 2010, (modelo teórico). Se presta especial atención al comportamiento estratégico de mercado de los proveedores de electricidad y sus efectos sobre la fijación de precios en cada región.

El objetivo principal de estas herramientas de modelación consiste en investigar los diferentes comportamientos estratégicos de los proveedores del mercado y para analizar los resultados económicos en términos de precios, volúmenes de comercio, los costos y beneficios de cada proveedor de electricidad individuales. El modelo se utiliza para analizar si el proceso de liberalización mejora el rendimiento económico de la industria del suministro de electricidad. El objetivo científico principal del modelo construido es simular el proceso de liberalización para México, y comparar los resultados de diferentes comportamientos del mercado.

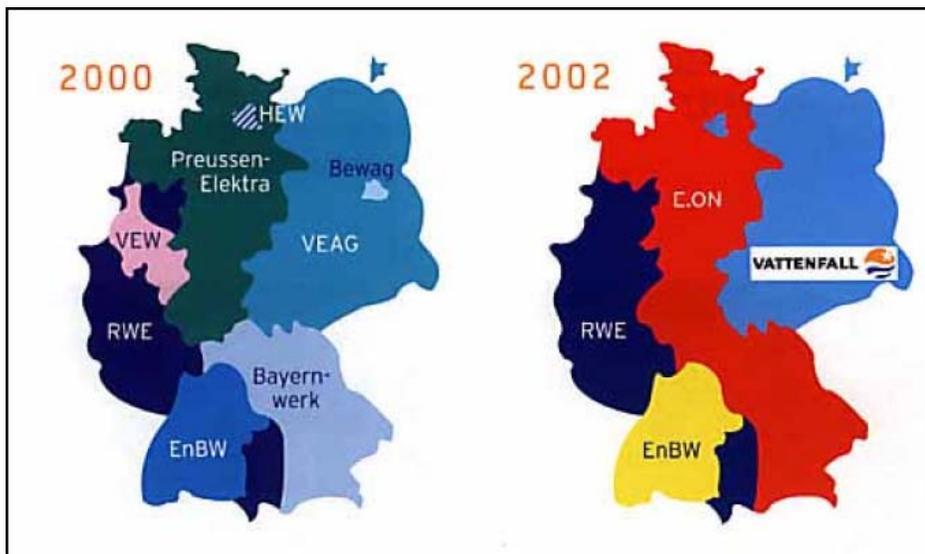
El proceso de liberalización puede tener graves consecuencias para la estructura del mercado mexicano de la electricidad. De la teoría económica de la organización industrial, sabemos que hay una serie de estructuras de mercado posibles, lo que podría ser aplicable al mercado liberalizado de la electricidad. Hay dos extremos de estructuras de mercado posibles, a saber, el monopolio y la competencia perfecta. En el caso de monopolio, hay una empresa grande y dominante (monopolio), como es el caso de EDF en Francia o CFE en nuestro país. Como CFE es una empresa del gobierno, esto nos permite modelar el caso del

Oligopolio Mixto (Ver Capítulo 1).

Debido a su posición, CFE podría afectar el precio de mercado de la electricidad en México en un mercado liberalizado. En una competencia perfecta, hay un número importante de productores de electricidad con pequeñas cuotas de mercado. Ninguna de las empresas puede ejecutar cualquier dominancia en el mercado de la electricidad, y por lo tanto, no pueden afectar a los precios de mercado. Entre estas dos estructuras de mercado extremas, hay una amplia gama de otras posibilidades, que son los oligopolios. En el caso de los oligopolios, hay un número limitado de medianas o grandes empresas, y estas empresas dominan el suministro de electricidad.

Debido al tamaño de estas empresas, que pueden afectar a los precios de mercado. En Alemania, por ejemplo, el número inicial de 30 pequeñas empresas se ha reducido a cuatro grandes empresas durante un lapso de unos pocos años debido al proceso de liberalización. (Ver Figura 4.1). Con el fin de reducir el poder de mercado en los mercados nacionales, los gobiernos definen cuotas de mercado máximas permitidas. A pesar de que estas limitaciones se aplican a los mercados nacionales, no hay ninguna restricción en la adquisición de cuotas de mercado en los mercados adyacentes.

Figura 4.1. Mercado de Electricidad en Alemania



Si todas las grandes empresas de una manera similar, toman sus decisiones de producción al mismo tiempo, en el mercado de la electricidad, buscando maximizar su función de utilidades, se dice que terminan en el llamado equilibrio de Cournot-Nash. Si existe una empresa con una función objetivo diferente (como el caso de una empresa gubernamental), llamamos a tal modelo Oligopolio Mixto. (Ver Capítulo 1). Alternativamente, uno podría imaginar que una empresa intenta aumentar su cuota de mercado, incluso con pérdidas debido a la falta de optimización de la estrategia. Esta empresa posteriormente aumenta su oferta y cuota de mercado. De hecho, esta empresa tiene como objetivo lograr papel dominante en el mercado. En este contexto, el mercado de la electricidad se dice que termina en el llamado equilibrio de Stackelberg.

El modelo desarrollado Mexstrom es una versión ampliada del juego original modelo teórico computacional aplicada al mercado alemán de la electricidad, en Kemfert (1999), Kemfert y Tol (2000), EMELIE etc., [19]. El modelo original se extiende y combina muchos aspectos diferentes del mercado de la electricidad, que hace que sea un modelo único en comparación con otros modelos de mercado de la electricidad, [33], [35], [51].

4.2 El modelo Mexstrom

Investigamos la evolución del mercado en México mediante el modelo

Mexstrom. Este es un modelo numérico, con el que el comportamiento del mercado de las empresas en los mercados de oligopolio puede ser investigados. Los proveedores de energía en Mexstrom producen electricidad a través de diferentes tecnologías. Un jugador puede ser propietario de varias centrales eléctricas de diferente tipo (carbón, petróleo - base, etc.), de los cuales se considera la capacidad total, así como los costos variables de producción. Las decisiones de inversión no son consideradas aquí, el modelo se limita al estudio de las repercusiones económicas de la liberalización con la estructura de la capacidad actual.

El modelo se calibra para proporcionar el precio de la electricidad al por menor y la demanda real para un año determinado como base. Hemos tomado el año 2010 como el año base, considerando para éste, los datos con que finaliza el año 2009.

Después de la calibración, el modelo de Mexstrom usa diferentes conjuntos de supuestos sobre el comportamiento de los productores en el modelo para calcular el estado del mercado en equilibrio. Además algunos datos sobre los productores de electricidad, la elasticidad de la demanda se especifica de forma exógena. Mexstrom a continuación, determina los precios de la electricidad nacional, volumen de producción y electricidad comercializada por región. Para el primer caso se utiliza la hipótesis del mercado perfectamente competitivo, es decir, las empresas son tomadoras de precios y actúan como si no pudieran influir en el precio de mercado. Este caso se conoce como el caso de la competencia perfecta, COMP.

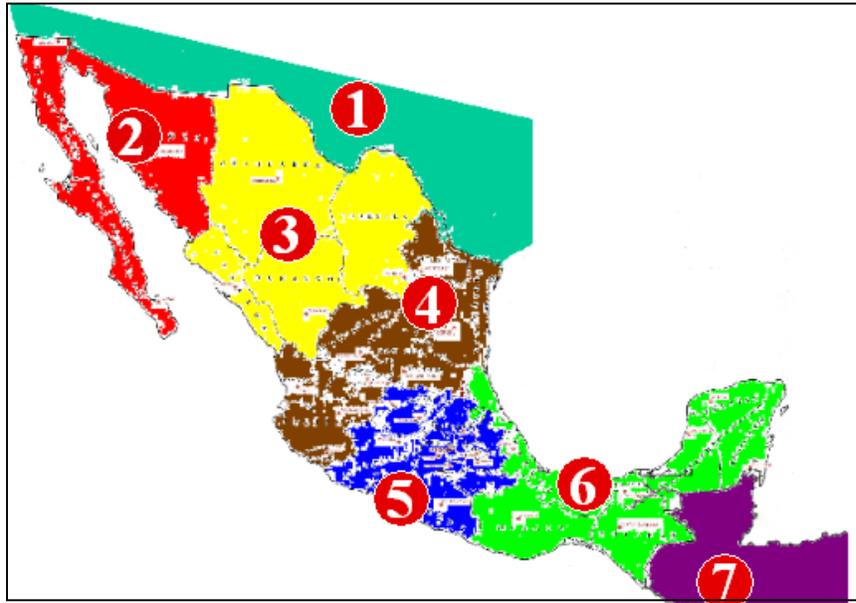
En contraste con la situación de competencia perfecta, el segundo caso supone que los productores actúan estratégicamente. Cada empresa decide la cantidad a producir, teniendo en cuenta que los otros jugadores siguen la misma estrategia. Esta situación se resuelve mediante el cálculo del equilibrio de Cournot-Nash en el modelo de oligopolio, que

se caracteriza por acciones simultáneas estratégicas mutuas por los agentes del mercado. En la solución de este juego, las estrategias de todos los agentes del mercado son las mejores respuestas a las acciones de todos los agentes del mercado. Estratégicamente las empresas pueden comportarse de cierta manera e influir en los precios por cambios en la producción. Si consideramos que CFE tiene diferente función objetivo, e.g. maximizar el beneficio social, tenemos el escenario de Oligopolio Mixto.

En la resolución de problemas de optimización, es importante reconocer que cada problema de optimización puede ser definido y modelado como un problema de complementariedad que refleja todas las limitaciones de lado. En términos generales, en el marco de un formato de complementariedad, no bien una variable es cero o negativo de la restricción de desigualdad correspondiente es, en efecto, una igualdad. En primer lugar, por la solución de un problema de complementariedad mixta (MCP), el Karush Kuhn-Tucker (KKT) las condiciones de optimalidad son determinados y se resuelve para una variable de decisión. El formato de MCP y las condiciones KKT son equivalentes. Por lo tanto, cada problema MCP puede ser transformado en las condiciones de optimalidad clásica por la consideración de limitaciones de la oferta y viceversa. La idea detrás de la formulación MCP es desarrollar un programa que permite al método de descomposición clásica, ser obsoleto, en lugar de determinar las condiciones de MCP directamente. Las principales ventajas del MCP son: (1) la determinación simultánea y paralela de las variables de decisión y las limitaciones de la oferta, y (2) la solución de complejos programas de matemática sin una formulación explícita de la función objetivo. Solucionadores especialmente desarrollado detectan el formato MCP directamente y, si es necesario, las limitaciones de la oferta se definen directamente. La actual tecnología informática al día permite una solución sencilla y rápida de los problemas

de MCP por algoritmos matemáticos de problemas. GAMS proporciona, en este momento, PATH-NLP y rutas importantes para su solución. Además, aplicando el método de MCP evita la complejidad de encontrar una solución mediante un programa de solución de NLP estándar si los valores de partida son distantes de los valores óptimos. La transformación de un problema de optimización en una formulación MCP requiere una especificación de las condiciones de primer orden y todos los límites superior e inferior de las variables de decisión. El formato MCP permite una caracterización sencilla de resolver simultáneamente las variables de decisión (como en la teoría de juegos) y un procedimiento de solución rápida. GAMS proporciona esta formulación altamente eficiente, principalmente para resolver los recíprocos enfoques de modelos que aparecen, por ejemplo, la teoría de juegos o modelos aplicados de equilibrio en general. Esta es una manera rápida y eficiente para resolver el modelo con diferentes escenarios y con diferentes conjuntos de datos. Para el modelo Mexstrom se realizó la recopilación de datos del mercado de la electricidad en México 10 años atrás hasta el 2010, considerando los últimos datos disponibles (fin de año 2009) para situación simulada como actual (inicio de 2010). Los datos incluyen información sobre los productores individuales de electricidad, la demanda y el suministro de energía en el mercado nacional, las tecnologías de producción, la capacidad de interconexión entre las regiones etc. El modelo está calibrado para el mercado de comercialización en México y sus fronteras considerando en total siete subdivisiones territoriales, considerando cinco regiones que dividen el territorio nacional basándonos en la estadística de consumo por estado, además de dos regiones adicionales que corresponden a cada frontera con que colinda México y en donde es posible la relación comercial de el producto en cuestión (Figura 4.2). Centrando nuestra atención en los resultados para regiones nacionales (regiones 2-6).

Figura 4.2. Subdivisión territorial donde se comercializa la electricidad en México según modelo MEXTROM.



El modelo MEXTROM creado para el mercado mexicano de electricidad, está diseñado para trabajar con consumos, precios y producción por cada tecnología, en regiones, las cuales se eligieron después de analizar las estadísticas de demanda, extensión territorial, así como la factibilidad de la comercialización dentro de cada una de estas y las capacidades de transmisión entre sí, según los estados de la república que resultaron colindantes de acuerdo a la región que pertenecen en la subdivisión propuesta.

La demanda de la energía eléctrica ha crecido alrededor de un 23 % en los últimos 10 años (Ver Tabla 4.1, Figura 4.1 - 4.2), presentándose un incremento más notable en el sector doméstico y la mediana empresa.

Tabla 4.1. Consumos anuales por sector de mercado (GWH)

Años	Doméstico	Comercial	Servicios	Agrícola	Empresa Mediana	Gran Industria	Total
1999	33,370	10,964	5,432	7,997	49,446	37,788	144,996

2000	36,128	11,691	5,873	7,901	53,444	40,311	155,349
2001	38,344	12,185	5,954	7,463	54,722	38,535	157,204
2002	39,032	12,528	6,057	7,644	55,776	39,166	160,203
2003	39,861	12,825	6,132	7,338	56,874	37,355	160,384
2004	40,748	12,928	6,274	6,968	59,165	37,464	163,547
2005	42,531	13,007	6,431	8,067	61,921	37,799	169,757
2006	44,452	13,229	6,577	7,959	65,266	37,887	175,371
2007	45,835	13,408	6,789	7,804	67,799	38,833	180,469
2008	47,451	13,645	7,057	8,109	69,100	38,551	183,913
2009	48,540	13,417	7,787	9,299	67,630	34,794	181,465

Figura 4.1. Participación de mercado por sector en 1999

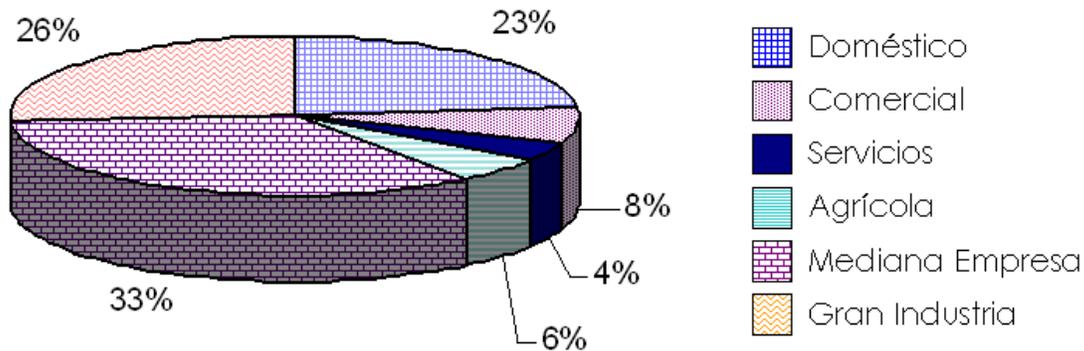
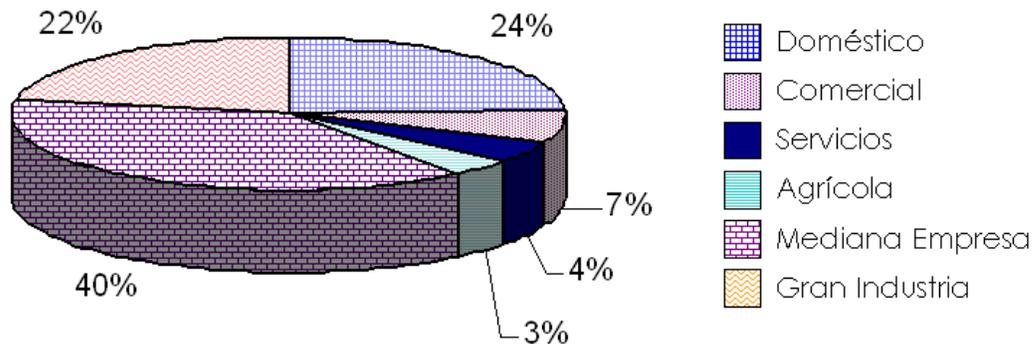


Figura 4.2. Participación de mercado por sector en 2010



En las Figuras 4.1 – 4.2 se muestra como ha cambiado en los últimos años el consumo de electricidad presentando un incremento principalmente en el sector de la mediana empresa, lo que hace suponer el interés de la participación privada en generación de electricidad para por lo menos suministrar la propia demanda de la industria como hasta ahora esta permitido.

En México se no se ha presentado gran incremento en cuanto a la capacidad por tecnología para producir la electricidad, a excepción de las plantas termoeléctricas, (ver Tabla 4.2). Sin embargo, la capacidad excedida con que se ha contado en los últimos 10 años cada vez se ha eficientado cada vez más, según vemos en la estadística de la Tabla 4.3.

Tabla 4.2. Capacidad de generación de electricidad por tipo de tecnología en México (MW)

Años	Hidro eléctrica	Termo eléctrica	Privados	Duales	Carbo eléctrica	Núcleo eléctrica	Geotermo eléctrica	Eolo eléctrica	Total
1999	9,618	19,227	0	2,100	2,600	1,368	750	2	35,666
2000	9,619	19,672	484	2,100	2,600	1,365	855	2	36,697
2001	9,619	20,539	1,455	2,100	2,600	1,365	838	2	38,519
2002	9,615	21,164	3,495	2,100	2,600	1,365	843	2	41,184
2003	9,615	21,164	6,756	2,100	2,600	1,365	960	2	44,561
2004	10,530	21,730	7,265	2,100	2,600	1,365	960	2	46,552
2005	10,536	20,720	8,251	2,100	2,600	1,365	960	2	46,533
2006	10,566	20,917	10,387	2,100	2,600	1,365	960	2	48,897
2007	11,343	21,118	11,457	2,100	2,600	1,365	960	85	51,029

2008	11,343	21,191	11,457	2,100	2,600	1,365	965	85	51,105
2009	11,383	21,731	11,457	2,100	2,600	1,365	965	85	51,686

Tabla 4.3. Generación efectiva de electricidad por tipo de tecnología en México (MW)

Años	Hidro eléctrica	Termo eléctrica	Privados	Duales	Carbo eléctrica	Núcleo eléctrica	Geotermo eléctrica	Eolo eléctrica	Total
1999	32,712	103,089	-	11,234	18,251	10,002	5,623	6	180,916
2000	33,075	111,956	1,295	13,569	18,696	8,221	5,901	8	192,721
2001	28,435	117,106	4,590	14,109	18,567	8,726	5,567	7	197,106
2002	24,862	108,466	21,852	13,879	16,152	9,747	5,398	7	200,362
2003	19,753	103,864	31,645	13,859	16,681	10,502	6,282	5	202,590
2004	25,076	94,512	45,855	7,915	17,883	9,194	6,577	6	207,019
2005	27,611	93,226	45,559	14,275	18,380	10,805	7,299	5	217,160
2006	30,305	84,432	59,428	13,875	17,931	10,866	6,685	45	223,568
2007	27,042	83,354	70,982	13,375	18,101	10,421	7,404	248	230,927
2008	38,892	79,185	74,232	6,883	17,789	9,804	7,056	255	234,096
2009	26,445	83,856	76,496	12,299	16,886	10,501	6,740	249	233,472

Podemos observar que en los últimos cuatro años, no se ha incrementado la capacidad de generación en México ni por parte del gobierno ni por parte de la parte privada, por lo que se mantiene constante la participación respectiva en cuanto a ello, sin embargo la participación en cuanto a producción se sigue incrementando por la parte privada, aprovechando ésta la capacidad hasta ahora instalada.

Para considerar un precio de referencia en cada escenario a simular, se determinaron por el método de mínimos cuadrados los valores de precio para escenarios futuros (2015 y 2020) partiendo de los datos estadísticos. Utilizando estos para tomarlos como referencia en la función correspondiente de nuestro modelo. (Ver Tabla 4.4)

Tabla 4.4. Precios promedio por sector de mercado eléctrico en México (Cent/KWH)

Años	Doméstico	Comercial	Servicios	Agrícola	Empresa Mediana	Gran Industria
1999	49	118	93	26	52	35
2000	56	126	105	29	61	43
2001	61	130	113	31	63	44
2002	77	138	125	34	70	48
2003	85	161	134	36	85	60
2004	88	187	141	39	98	71
2005	92	205	148	44	106	78
2006	98	232	157	44	119	89
2007	102	239	166	48	124	91
2008	106	255	172	51	153	118
2009	107	237	176	41	126	96
2010	120	275	189	52	153	116
2011	126	291	198	54	162	124
2012	132	306	206	56	172	131
2013	138	321	214	58	181	139
2014	144	336	223	61	191	147
2015	150	351	231	63	200	154
2016	156	367	239	65	209	162
2017	162	382	248	67	219	169
2018	168	397	256	70	228	177
2019	174	412	264	72	238	185
2020	180	427	273	74	247	192

Nota: Los datos son reales hasta el año 2009,[54], en adelante se proyectaron por

regresión lineal.

De igual manera que con los precios, en base a datos estadísticos [55] proyectamos por regresión lineal los datos de demanda para años futuros (2015 y 2020), ver Tabla 4.5.

Tabla 4.5. Consumos de electricidad por sector de mercado en México (GWH)

Años	Doméstico	Comercial	Servicios	Agrícola	Empresa Mediana	Gran Industria
1999	33,370	10,964	5,432	7,997	49,446	37,788
2000	36,128	11,691	5,873	7,901	53,444	40,311
2001	38,344	12,185	5,954	7,463	54,722	38,535
2002	39,032	12,528	6,057	7,644	55,776	39,166
2003	39,861	12,825	6,132	7,338	56,874	37,355
2004	40,748	12,928	6,274	6,968	59,165	37,464
2005	42,531	13,007	6,431	8,067	61,921	37,799
2006	44,452	13,229	6,577	7,959	65,266	37,887
2007	45,835	13,408	6,789	7,804	67,799	38,833
2008	47,451	13,645	7,057	8,109	69,100	38,551
2009	48,540	13,417	7,787	9,299	67,630	34,794
2010	50,051	14,093	7,507	8,398	71,929	36,777
2011	51,480	14,324	7,692	8,487	73,900	36,566
2012	52,908	14,554	7,877	8,575	75,871	36,355
2013	54,336	14,784	8,062	8,664	77,842	36,143
2014	55,765	15,015	8,247	8,752	79,813	35,932
2015	57,193	15,245	8,432	8,840	81,784	35,721
2016	58,622	15,475	8,617	8,929	83,755	35,510
2017	60,050	15,706	8,802	9,017	85,726	35,299
2018	61,478	15,936	8,987	9,106	87,697	35,088
2019	62,907	16,166	9,172	9,194	89,668	34,876
2020	64,335	16,397	9,357	9,283	91,639	34,665

Nota: Los datos son reales hasta el año 2009,[54], en adelante se proyectaron por regresión lineal.

De acuerdo a lo observado en tablas anteriores, información de costos (a nivel general por la confidencialidad de los mismos) se alimenta el modelo con costos aproximados en la proporción correspondiente por tecnología de acuerdo a costos promedio que se presentan a nivel internacional, y proponiendo las consideraciones razonables (Ver Tabla 4.6) se alimento también nuestro modelo para obtener resultados numéricos en cada escenario de tiempo (2010, 2015 y 2020) como también en tipo de mercado (clásico, mixto, en competencia perfecta o tipo Cournot).

Tabla 4.6. Capacidad de trasmisión entre regiones (TW)

	Región 1	Región 2	Región 3	Región 4	Región 5	Región 6	Región 7
Región 1	50	20	20	0	0	0	0
Región 2	50	50	20	0	0	0	0
Región 3	20	20	50	20	0	0	0
Región 4	0	0	20	50	20	0	0
Región 5	0	0	0	20	30	10	0
Región 6	0	0	0	0	10	30	20
Región 7	0	0	0	0	0	20	30

El modelo como se ha mencionado, cuenta con un gran numero de parámetro y variables a determinar, las cuales se enlistan en la Tabla 4.7 para su mayor comprensión.

Tabla 4.7. Parámetros y Variables del modelo Mextram

Parámetro o Variable	Descripción	Unidades
F	Firmas	
I	Tecnologías	
R	Regiones	

Fr^*	Firmas en región r^*	
$c_{i,r}^v$	Costos variables de producción	\$/GW
d_r^0	Demanda de referencia	TW
p_r^0	Precio de referencia	\$/GW
σ_r	Elasticidad de la demanda	
λ_{r,r^*}	Perdidas por transportación	%
η_{r,r^*}	Máximo posible de comercialización	GW
$q_{i,f}^{\max}$		
ξ	Factor de reducción por arranque	
π_f	Utilidad de la firma f	\$
p_r	Precio de mercado para la electricidad	\$/GW
$c_{i,f,r}^m$	Costos marginales de producción	\$/GW
$\mu_{i,f}$	Precio sombra por restricción de capacidad	\$/GW
τ_{r,r^*}	Precio sombra por restricción de comercialización	\$/GW
$g_{f,r}$	Proporción de mercado cubierto por firma	%

$S_{f,r}$	Cantidad abastecida por firma	GW h
S_r	Cantidad total abastecida por región	GW h
$q_{i,f,r}$	Producción de electricidad	GW h
x_{r,r^*}	Cantidad neta comercializada entre región r y región r*	GW h

Nota: El modelo esta planteado como un Problema de Complementariedad (MCP). Los parámetros del modelo son exógenos, para poder determinar los valores de las variables.

En un mercado liberalizado de electricidad, las firmas maximizan su utilidad produciendo con tecnologías diferentes i , y vendiendo esta electricidad producida en las regiones posibles. La utilidad es la diferencia entre las entradas por las ventas de electricidad y los costos (i.e. producción, transportación, etc.). Los precios de la electricidad difieren entre regiones, estos precios debieran depender de la cantidad demandada en cada región durante cierto periodo de tiempo. Esta dependencia refleja el comportamiento estratégico de los productores de electricidad (4.1). las firmas basan su decisión en la cantidad producida dada la tecnología y el mercado ($q_{i,f,r}$). La función de utilidad para la firma f es:

$$\Pi_f = \sum_{r \in R} (p_r(S_r) s_{f,r}) - \sum_{r \in R} \left(\left(\sum_{i \in I} c_{i,r}^V q_{i,f,r} \right) \right) \quad (4.1)$$

El primer término refleja la cantidad total de entradas de dinero por

venta de electricidad, mientras que el segundo termino es la sumatoria de los costos totales de producción y suministro de la electricidad.

Las empresas maximizan sus utilidades, aunque no pueden incrementarlas indeterminadamente. Hay restricciones que las empresas tienen que considerar. En primer lugar, la capacidad de producción de electricidad es limitada. El campo de interés del modelo establece en el mercado mayorista por lo que se ignoran empresas que sólo comercializan la electricidad. Otra restricción es la capacidad máxima de la comercialización entre regiones.

Hay tres "identidades" en el modelo. Primero, se define la demanda regional S_r por período. La función de demanda (función CES), depende del parámetro elasticidad σ_r demanda de referencia d_r^0 y el precio de referencia p_r^0 .

Suponemos que los mercados regionales tienen una función de demanda como a continuación se presenta:

$$S_r = \sum_{f \in R} s_{f,r} = d_r^0 \left(\frac{p_r(S_r)}{p_r^0} \right)^{-\sigma_r} \quad (4.2)$$

En segundo lugar, debido a la distribución de electricidad, se producen pérdidas de transporte, que representan un porcentaje de la producción, que se designarán $\lambda_{r^*,r}$ donde f es la empresa ubicada en la

región r^* . Si una empresa f localizada en la región r^* exporta s^* unidades de electricidad a la región r , tiene que producir $s^*/(1-\lambda_{r^*,r})$ unidades de electricidad. De manera más general, el suministro de electricidad es una fracción de la producción de electricidad, donde la empresa f se encuentra en la región r^* :

$$s_{f,r} = (1 - \lambda_{r^*,r}) \sum_{i \in I} a_{i,f,r} \quad (4.3)$$

En tercer lugar, las cuotas de mercado regional de la firma de f son dados por:

$$g_{f,r} = \frac{s_{f,r}}{\sum_{g \in F} s_{g,r}} \quad (4.4)$$

la firma f no tiene necesariamente que estar ubicada en la región r , ya que permiten a las empresas.

Junto a la identidad, el modelo considera dos diferentes restricciones: las restricciones de capacidad en la producción y el comercio. La producción de electricidad por la tecnología de una empresa f es restringido. Las limitaciones se deben a las limitaciones físicas (las tecnologías que utilizan la incineración) o debido a condiciones climáticas (viento o la energía solar). Por lo tanto, existe un límite superior de la capacidad de producción. Este límite superior es complementario del precio sombra $\mu_{i,f,r}$, que obtiene un valor no negativo en cuanto a la

producción con la tecnología i por la firma f , y es igual a la capacidad máxima:

$$\left(q_{i,f}^{\max} - \sum_{r \in R} q_{i,f,r} \right) \mu_{i,f} = 0, \forall i, f \quad (4.5)$$

Debido a la liberalización del mercado eléctrico, las empresas tienen la oportunidad de exportar su electricidad a otros países. Sin embargo, el importe máximo de exportación de electricidad es limitada con respecto a la capacidad de interconexión entre los dos países. El importe de las exportaciones netas e importaciones entre los países r^* y r es la cantidad exportada de electricidad desde la región r^* para la región r menos la cantidad importada de electricidad a región r^* desde región r , donde la empresa f se encuentra en país r^* ($f \in F_{r^*}$)

$$x_{r^*,r} = \sum_{f \in F_{r^*}} s_{f,r} - \sum_{g \in F_r} s_{g,r^*} \quad (4.6)$$

Estas exportaciones están restringidas con un límite superior η_{r,r^*} , y son complementarios al precio sombra τ_{r,r^*} . Como es habitual con una mezcla de condiciones complementarias, el precio sombra del comercio es cero, cuando el nuevo comercio de construcción \neg no es vinculante:

$$\tau_{r^*,r} (\eta_{r^*,r} - x_{r^*,r}) = 0, \forall r, r^* \quad (4.7)$$

Si $x_{r^*,r} < 0$ entonces país r^* importa electricidad desde el condado de r .

No imponemos una restricción a las importaciones netas del país r^* , porque esos son implícitamente impuestos por las restricciones a la exportación de otros países. De tal manera, la importación y exportación de las interconexiones pueden diferir. Suponemos que no hay "restricción de los intercambios sobre la electricidad producida y consumida dentro de una región.

Puesto que suponemos un mercado liberalizado de la electricidad, suponemos que todas las empresas a maximizar los beneficios: la función de utilidad de operación se resume en la función de utilidad en (4.1) con la identidad en (4.3), y está sometido a la restricción de capacidad de producción en (4.5) y la restricción al comercio de (4.7). Así, el beneficio de explotación del productor de electricidad f ubicado en el país r^* (nótese que esta es la función de Lagrange del problema de optimización):

$$\begin{aligned}
 \Pi_f &= \sum_{r \in R} \left(p_r(S_r) (1 - \lambda_{r^*,r}) \sum_{i \in I} q_{i,f,r} \right) - \sum_{r \in R} \left(\sum_{i \in I} c_{i,r}^y q_{i,f,r} \right) \rightarrow \max \\
 \text{s.t.} & \\
 \forall i \in I & \left(\sum_{r \in R} q_{i,f,r} - q_{i,f}^{\max} \right) \leq 0 \\
 \forall r \in R, r \neq r^* & (x_{r^*,r} - \eta_{r^*,r} \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ahora, para oligopolio mixto asumimos que la firma 1 es un conglomerado de firmas privadas que buscan maximizar sus propias utilidades, mientras que una firma 2 es una firma pública nacional que

pretende maximizar el beneficio social. Entonces la función objetivo de firma 1 estará dada por

$$\begin{aligned} \Pi(G, q_1) &= \sum_{r \in R} \left(p_r(S_r) (1 - \lambda_{r^*,r}) \sum_{i \in I} q_{i,f,r} \right) - \sum_{r \in R} \left(\sum_{i \in I} c_{i,r}^v q_{i,f,r} \right) \rightarrow \max \\ \text{s.t.} & \\ \forall i \in I & \left(\sum_{r \in R} q_{i,f,r} - q_{i,f}^{\max} \right) \leq 0 \\ \forall r \in R, r \neq r^* & (x_{r^*,r} - \eta_{r^*,r} \leq 0 \end{aligned} \tag{4.8.1}$$

Donde mientras que el beneficio social es maximizado por la firma nacional de gobierno firma 2, que es la suma del beneficio social a los consumidores y las utilidades de la firma 2:

$$\begin{aligned} \text{Sur}(G, q_2) &= \sum_{r \in R} \left(\int_0^{G_r} p_r(s_r) ds_r - p_r(s_r) (s_r - q_{i,2,r}) - c_{i,2,r}^v (q_{i,2,r}) \right). \\ \text{s.t.} & \\ \forall i \in I & \left(\sum_{r \in R} q_{i,f,r} - q_{i,f}^{\max} \right) \leq 0 \\ \forall r \in R, r \neq r^* & (x_{r^*,r} - \eta_{r^*,r} \leq 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para completar las condiciones de Kuhn-Tucker, tenemos las restricciones en (4,5) y (4,7), la restricción de no negatividad en todos los precios de la sombra de la cantidad de electricidad producida $q_{i,f,r}$ y, finalmente, las identidades en (4,2), (4,3), (4,4) y (4,6).

En los modelos económicos, las funciones de producción suelen ser funciones "agradables" (convexa, continua y diferenciable). En el modelo Mextrom, sin embargo, los costos de producción varían en las tecnologías y los países. De hecho, las funciones de producción son funciones escalón

con respecto a los costes variables (tecnología), pero también se incluyen las dimensiones de las regiones de suministro. Los costos marginales función de producir una unidad de electricidad se pueden derivar de (4.9):

$$C_{i,f,r}^m = C_{i,f,r}^v + \mu_{i,f} + (1 - \lambda_{r,r^*}) \tau_{r^*,r}, \quad i \in I, r \in R \quad (4.10)$$

El primer término del lado derecho de (4.10) los costes de producción del suministro de electricidad. El segundo y tercero en el lado derecho de la ecuación (4.10) son, respectivamente, los precios sombra de la capacidad de producción máxima por tecnología y las restricciones del comercio.

Usamos un enfoque de MCP en las que los costos marginales son implícitamente considerados por el modelo. Sin embargo, necesitamos un criterio para determinar si una empresa está dispuesta a producir electricidad. Este criterio es que el ingreso marginal de la producción de electricidad tiene que ser igual o mayor que el costo marginal de producción. Desde (4,9), derivamos la ecuación única ecuación en MCP en términos de $q_{i,f,r}$:

$$(1 - \lambda_{r^*,r}) p_r(S_r) \left[1 - \frac{g_{f,r}}{\sigma_r} \right] - C_{i,f,r}^m \geq 0 \perp 0 \leq q_{i,f,r} \quad (4.11)$$

Los costos marginales son los definidos en (4.10). Esta desigualdad es

complementario del nivel de producción de electricidad con la tecnología i , de la firma f , que se entregarán en la región r . Esto significa que una producción no negativa es rentable siempre y cuando el costo marginal de la electricidad producida por la firma de f es igual o inferior a los ingresos marginales.

$$(1 - \lambda_{r^*,r})p_r - c_{i,f,r}^m \geq 0 \perp 0 \leq a_{i,f,r} \quad (4.12)$$

El primer término del lado izquierdo en la expresión (4.12) representa el ingreso marginal de las ventas de electricidad en un mercado regional. La cantidad óptima de las ventas depende de tipo de la empresa de la conducta. Por ejemplo, el ingreso marginal de ventas regionales de electricidad se ha reducido en un mercado de energía con la relación $(g_{i,r} / \sigma_r)$ en la expresión (4.11). Este es el caso de competencia por la cantidad, a lo que nos referimos como el escenario de comportamiento estratégico.

El monopolio de margen también puede ser cero. Este es el caso de la competencia de precios, lo que nos referimos como el escenario totalmente liberalizado. También es posible extender el modelo estático con un comportamiento de las empresas alternativas. Vamos con el caso en que una empresa es un líder, y considera la posibilidad de jugar primero, asumiendo que la reacción de otras empresas está determinada por la ecuación (4.11). La acción de la empresa dominante puede ser

modificada, aumentando el monopolio de margen, de la siguiente manera:

$$(1 - \lambda_{r,r}) p_r (S_r) \left[1 - \xi_f \frac{g_{f,r}}{\sigma_r} \right] - c_{i,f,r}^m \geq 0 \perp 0 \leq q_{i,f,r}, \quad (4.13)$$

Donde ξ_f es una fracción entre cero y uno, lo que reduce el monopolio recargo del líder. La consecuencia para la firma líder f de establecer ξ_f es que la empresa f es capaz de aumentar su rentabilidad, al aumentar la producción, mientras que la reacción de otras empresas es reducir su producción un poco y ver una reducción en sus pagos. Por lo tanto, el modelo Mextrom consta de 7 variables ($q_{i,f,r}$, τ_{r,r^*} , $\mu_{i,f}$, $S_{f,r}$, $g_{f,r}$, p_r , x_{r,r^*}) y 7 ecuaciones (tiempos de los índices), a saber, (4.2) - (4.7), (4.13). Por otra parte, existe un conjunto F de las empresas situadas en R regiones de México y sus fronteras.

Con el modelo Mextrom podemos estudiar las consecuencias económicas del mercado eléctrico bajo distintos tipos de comportamiento de los productores.

4.3 Resultados Numéricos.

Es de suma importancia y muy acorde con lo que en realidad esta sucediendo en el país, llevar a cabo análisis como lo que se ha propuesto

aquí, y de lo cual mostramos los resultados en esta sección, pues sin duda alguna, el Oligopolio Mixto es lo que debiéramos considerar al llevarse a cabo una liberalización de mercado de electricidad en este país, además de mostrar los resultados obtenidos, es interesante ver también como el Gobierno Mexicano actualmente a través de una determinación de precios y tarifas diferentes, por sector de mercado (Doméstico, Agrícola, Comercial Mediana Empresa y Gran Industria) (Ver Tabla 4.5), pero también establece tarifas diferentes según el consumo mensual de cada Hogar como se aprecia en la siguiente Tabla 4.8.

Tabla 4.8. Tarifas de la electricidad en México según el consumo mensual doméstico

Año	Cargos por energía consumida, para consumos hasta 140 KWH.		Cargos por energía consumida, para consumos mayores a 140 KWH.		
	Consumo básico	Consumo intermedio	Consumo básico	Consumo intermedio	Consumo excedente
	por cada uno de los primeros 75 KWH.	por cada KWH adicional a los anteriores.	por cada uno de los primeros 75 kilowatts-hora.	por cada uno de los siguientes 50 KWH	por cada KWH adicional a los anteriores.
2002	\$0.469	\$0.556	\$0.469	\$0.650	\$1.623
2003	\$0.505	\$0.604	\$0.505	\$0.839	\$1.761
2004	\$0.529	\$0.640	\$0.529	\$0.887	\$1.862
2005	\$0.562	\$0.676	\$0.562	\$0.935	\$1.970
2006	\$0.597	\$0.711	\$0.597	\$0.986	\$2.080
2007	\$0.621	\$0.735	\$0.621	\$1.022	\$2.164
2008	\$0.639	\$0.753	\$0.639	\$1.049	\$2.227
2009	\$0.663	\$0.783	\$0.663	\$1.089	\$2.313
2010	\$0.687	\$0.819	\$0.687	\$1.137	\$2.409

El modelo propuesto en este Capítulo, ha sido aplicado al mercado de nuestro interés, como se ha mencionado, considerando 7 diferentes regiones (Ver Figura 4.2) donde se comercializa la electricidad producida en México, dividiendo el territorio nacional en 5 regiones, de acuerdo a un análisis de consumos, precios y plantas generadoras instaladas, previamente realizado con los datos a los que nos fue posible acceder [54], [55], además de dos regiones más, frontera norte y frontera sur del

país, consideradas estas como territorio donde es posible tener trato comercial tanto de compra como de venta del producto en cuestión, pero centrando nuestra atención en los resultados de precios que se presentarían en cada región de México considerada.

Con los parámetros propuestos, a partir de estadísticas y las formulaciones correspondientes se obtienen resultados interesantes para cada escenario, que como se esperaba en concordancia al tipo de mercado que estamos simulando como se ha mencionado en capítulos anteriores, (Ver Capítulo 2 y 3), cuando se tiene el Oligopolio mixto, se presentan precios más atractivos para el consumidor. (Ver Tablas 4.9 – 4.11).

Tabla 4.9. Resultados de precios por región en México para diferentes escenarios para 2010 (Cent/KWH)

Regiones	Competencia Perfecta		Equilibrio de Nash	
	Oligopolio Clásico	Oligopolio Mixto	Oligopolio Clásico	Oligopolio Mixto
Región 2	229.42	229.42	378.82	306.03
Región 3	299.88	299.88	492.45	400.02
Región 4	233.34	233.34	384.39	311.27
Región 5	362.70	362.70	594.48	483.83
Región 6	274.95	274.95	452.79	366.77

Los resultados que muestra la tabla anterior (Tabla 4.9) nos indica los precios que resultan para cada caso de equilibrio, donde, como es de esperarse para una competencia perfecta tenemos mejores precios para el consumidor, resultando similares para casos de oligopolio clásico u oligopolio mixto, los resultados de precios para el equilibrio de Nash resultan más altos que en competencia perfecta, siendo este escenario el que se asemeja más a lo que serian las primeras etapas de la liberalización de mercado de electricidad, pero algo importante y

también de esperarse según lo que se menciona anteriormente (Ver capítulos 2 y 3) cuando se da el oligopolio mixto, es decir, cuando un competidor del juego no pretende maximizar ganancias monetarias sino que tiene una función objetivo de Bienestar Social, lo que obliga al mercado, de cierta manera a tener un mejor precio de mercado al renunciar una de las firmas (firma pública) a utilidades monetarias, como se aprecia en los resultados.

Para este caso donde tenemos resultados para el escenario de tiempo presente, podemos observar, que los resultados de precios se aproximan o son parecidos a los que se ofrecen al sector comercial del país, siendo sabido que es el mismo que tiene la tarifa más alta establecida para el consumo de electricidad (Véase Tabla 4.4). Cabe recordar que el Gobierno Mexicano ha venido subsidiando este recurso, hasta en un 80 % del costo real de proveer el servicio eléctrico, si consideramos los sectores doméstico y agrícola, principalmente a las familias de menos recursos económicos del país.

Tabla 4.10. Resultados de precios por región en México para diferentes escenarios para 2015 (Cent/KWH)

Regiones	Competencia Perfecta		Equilibrio de Nash	
	Oligopolio Clásico	Oligopolio Mixto	Oligopolio Clásico	Oligopolio Mixto
Región 2	484.17	484.17	786.28	645.86
Región 3	632.87	632.87	1,027.76	844.21
Región 4	492.44	492.44	799.70	656.88
Región 5	765.41	765.41	1,243.01	1,021.02
Región 6	580.24	580.24	942.29	774.01

En la Tabla 4.10 observamos los resultados para los mismos escenarios modelados pero en año 2015, donde resulta como esperamos, por las características particulares de cada tipo de mercado (Ver Capítulo 2 y 3), el mismo comportamiento de los precios, si comparamos para un mismo tiempo, diferentes escenarios, resultando más atractivos para el

consumidor si hablamos de una competencia perfecta o un mercado tipo Cournot con Oligopolio mixto, es decir, empresa gubernamental presente, con función objetivo que maximiza el Bienestar Social, los precios aunque por encima de los reales (o aproximaciones con base en estadística) se acercan más a los precios del sector comercial (Ver Tabla 4.4), lo que nos permite pensar que como se informa al consumidor, gran parte de los precios ofertados para cada sector comercial en especial los sectores diferentes al comercial, son más bajos que el costo real de producir y suministrar la electricidad, pues esta diferencia actualmente esta subsidiada por el Gobierno.

De llevarse a cabo la liberalización del mercado eléctrico como se ha considerado para estos experimentos, el precio no sigue una tendencia lineal como la pronosticada o proyectada por nosotros (Véase Tabla 4.4) para años futuros, y podemos considerar que es debido al poder que deja de ejercer la compañía Gubernamental sobre el mercado, pero que para casos prácticos en su momento debiera tomar las acciones correspondientes, a través de Impuestos o Subsidios para productores o el cliente en el caso de subsidio, y controlar de alguna manera que se considere pertinente el precio en el mercado.

Recordemos que estos resultados no consideran ningún tipo de subsidio y el precio resultante en los experimentos es un precio promedio resultante para los consumidores, sin considerar el uso que se da a este recurso, es decir, estos precios (Tablas 4.9-4.11) no distinguen entre sectores de mercado como los estipulados actualmente por el Gobierno.

Tabla 4.11. Resultados de precios por región en México para diferentes escenarios para 2020 (Cent/KWH)

Regiones	Competencia Perfecta		Equilibrio de Nash	
	Oligopolio Clásico	Oligopolio Mixto	Oligopolio Clásico	Oligopolio Mixto
Región 2	1,021.76	1,021.76	1,659.31	1,362.97
Región 3	1,335.55	1,335.55	2,168.89	1,781.55
Región 4	1,039.23	1,039.23	1,687.68	1,386.28
Región 5	1,615.27	1,615.27	2,623.15	2,154.69
Región 6	1,224.54	1,224.54	1,988.62	1,633.47

Esta última tabla (Tabla 4.11) nos permite observar como se mantiene el comportamiento de los resultados para diferentes escenarios en un mismo tiempo, también cómo crece drásticamente conforme modelamos años más distantes en futuro, donde podemos considerar que se debe a la menor participación cada vez de la empresa productora gubernamental, misma que pierde cada vez más dominio en el mercado.

Es un echo también que los precios que tomamos de referencia son los precios reales que se han impuesto en el país, los cuales no llevan ninguna utilidad monetaria, sino por el contrario, no cubren siquiera los costos totales de producción, sin embargo estos resultados que se obtienen en el modelo, nos pueden servir de referencia ya que si consideramos una tasa de subsidio específica para cada sector de mercado, se puede tomar de referencia para interés del gobierno y considerar las nuevas tasas de subsidio que debieran aplicarse, las cuales seguramente resultaran menores a las que existen hasta la fecha. Es decir, si el gobierno esta subsidiando una parte del costo de la electricidad demandada actualmente, lo atractivo del proceso de liberalización puede encontrarse en la búsqueda de los valores de subsidio necesarios para satisfacer al mercado mexicano sin alterar su estabilidad económica o en su caso hasta que precio podría ofrecerse manteniendo el mismo subsidio según

se considere conveniente.

Recordemos que actualmente el subsidio por parte del Gobierno alcanza hasta un 80 % para alguna parte del mercado, y en promedio alrededor del 50% de los costos para el mercado en general, por lo que es en estos números en los que se debiera trabajar, una vez que se cuenten con estos datos de manera exacta, de acuerdo a los precios esperados que aparezcan en el mercado según los experimentos realizados con el modelo y con acceso a cada uno de los datos que deben alimentarlo.

Con los recursos e información que se requiere podemos de manera altamente confiable prever lo que se presentaría al llevarse a cabo este proceso de liberalización del mercado de electricidad como es la tendencia actualmente a nivel mundial.

Conclusión

En esta tesis se investigan modelos con el equilibrio de variaciones conjeturales (CVE), los cuales incluyen como casos especiales los tres tipos de mercado de oligopolio que más frecuentemente son objeto de investigación para trabajos de economía matemática: La competencia perfecta, el modelo de Cournot, y el modelo de Stackelberg, por ser los más representativos y comunes en la mayoría de los mercados. Asumiendo conjeturas (o coeficientes de influencia) de los agentes participantes en tales modelos, investigamos el mercado de la electricidad.

Primero, consideramos un modelo de oligopolio clásico con el equilibrio de variaciones conjeturales (CVE). Las conjeturas de los agentes se refieren a la variación de los precios en función de incrementar o disminuir su producción. Para este modelo introduciremos un tipo especial de función de costos para el productor y una noción de equilibrio externo, confirmando la existencia y unicidad de este equilibrio externo con conjeturas. Después de aproximar una función de costo lineal a trozos, lo cual es característico en el modelo del mercado eléctrico, introduciremos

también el concepto de equilibrio interno. Y considerando un polinomio especial de segundo grado analizaremos el comportamiento de los grupos de consumidores con capacidades de producción diferentes.

Segundo, consideramos un modelo de oligopolio mixto con el equilibrio de variaciones conjeturales (CVE). Se establecen los resultados de existencia y unicidad del equilibrio de variaciones conjeturadas para cualquier conjunto de conjeturas posibles (denominado equilibrio externo). Se introdujo el concepto de equilibrio interno, desarrollando un criterio de consistencia de las conjeturas (coeficientes de influencia) consideradas para el equilibrio. Y se demuestra el teorema de existencia para el equilibrio interno (entendido como CVE con conjeturas consistente).

Tercero, presentamos los resultados experimentales para modelar un caso de liberalización de mercado de la electricidad en México, en el que pudimos analizar las diferencias entre la situación actual y el supuesto de una mayor participación de productores privados, para la actualidad como para los siguientes 5 y 10 años, definiendo parámetros que requiere el modelo a partir de datos estadísticos y proyecciones de acuerdo al comportamiento de dicho mercado en los últimos 10 años.

Cuarto, con estas herramientas y a partir de datos reales, pudimos obtener resultados de posibles escenarios que se pueden presentar en México en caso de llevarse a cabo la liberalización del mercado eléctrico, como se ha presentado en otros países, que han experimentado este proceso, adelantándonos a visualizar las consecuencias o repercusiones en precios y por tanto en el Bienestar Social del país. Actualmente gran parte del costo de la electricidad esta subsidiado por el Gobierno, ofreciendo precios razonables para la sociedad mexicana, y aplicando

ciertos criterios se tienen tarifas definidas para cada sector de mercado de la electricidad, beneficiando en cuestión de subsidio o precio estipulado para los sectores domestico y agrícola, teniendo segmentado el mercado total en otros sectores como comercial, servicios, mediana empresa y gran industria, buscando la estabilidad económica en México. El analizar resultados numéricos a partir de estas efectivas herramientas, con las consideraciones necesarias y la mayoría de datos reales a los que se tenga acceso, nos ayuda a medir con alto nivel de exactitud, las consecuencias de ciertas decisiones que puedan tomarse en la búsqueda de un mejor en el servicio y bienestar económico nacional, considerando un posible decremento en las cantidades de dinero subsidiado para la producción de la energía eléctrica, o según el criterio del gobierno un mejor precio ofrecido a los consumidores de este producto.

Trabajo Futuro

Vamos a extender los resultados de Capítulo 3 para el caso de oligopolio mixto con la función de demanda no diferenciable y las funciones de costo más generales, no necesariamente cuadráticas, y utilizar los resultados obtenidos para el análisis cualitativo del comportamiento de precio del mercado dependiendo de los cambios de la función de la demanda. Utilizando nuevos resultados teóricos desarrollar modelos aun más amplios y variados para seguir experimentando con mercado eléctrico, previendo la situación de liberalización de mercado para la electricidad, que seguramente se presentará en un mediano plazo como se ha venido dando en muchos países del mundo.

Bibliografía

- [1] Başar T, Olsder GJ. Dynamic non-cooperative game theory. Academic Press: New York; 1982.
- [2] Börs D. Public enterprise economics. North-Holland: Amsterdam; 1986.
- [3] Börs D. Privatization: A theoretical treatment. Clarendon Press: Oxford; 1991.
- [4] Bowley AL. The mathematical groundwork of economics. Oxford University Press: Oxford; 1924.
- [5] Bresnahan TF. Duopoly models with consistent conjectures. American Economic Review 1991; 71 (5); 934 – 945.
- [6] Bulavsky VA. An imagined experiment in the framework of the generalized Cournot model. Economics and Mathematical Methods

(*Ekonomika i Matematicheskie Metody*) 1996; 32; 128 – 137 (*in Russian*).

- [7] Bulavsky VA. Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly, *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* 1997; 33; 112 – 124 (*in Russian*).
- [8] Bulavsky VA, Kalashnikov VV. One-parametric method to study equilibrium. *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* 1994; 30; 129 – 138 (*in Russian*).
- [9] Bulavsky VA, Kalashnikov VV. Equilibrium in generalized Cournot and Stackelberg models, *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* 1995; 31; 164 – 176 (*in Russian*).
- [10] Cornes RC, Sepahvand M. Cournot vs Stackelberg equilibria with a public enterprise and international competition. Discussion Paper No. 03/12, 2003, University of Nottingham, School of Economics, United Kingdom. – 21 p.
- [11] De Fraja G, Delbono F. Game theoretic models of mixed oligopoly. *Journal of Economic Surveys* 1990; 4; 1 – 17.
- [12] Driskill R, McCafferty S 1989. Dynamic Duopoly with Output Adjustment Costs in International Markets: Taking the Conjecture Out of Conjectural Variations. In: Feenstra RE (Ed), *Trade policies for international competitiveness*. University of Chicago Press: Chicago; 1989. p. 125 – 144.

- [13] Fershtman C, Kamien M. Dynamic duopolistic competition with sticky prices. *Econometrica* 1987; 55; 1151 – 1164.
- [14] Figuières C, Jean-Marie A, Quérou N, Tidball M. Theory of conjectural variations. World Scientific: New Jersey/London/Singapore/Shanghai /Hong Kong/Taipei/Bangalore; 2004.
- [15] Frisch R. Monopole, polypole – La notion de force en économie. *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 1933; 71; 241 – 259 (reprinted: Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy. *International Economic Papers* 1951; 1; 23 – 36.)
- [16] Giocoli N. The escape from conjectural variations: the consistency condition in duopoly theory from Bowley to Fellner. *Cambridge Journal of Economics* 2005; 29; 601 – 618.
- [17] Harris RG, Wiens EG. Government enterprise: An instrument for the internal regulation of industry. *Canadian Journal of Economics* 1980; 13; 125 – 132.
- [18] Isac G, Bulavsky VA, Kalashnikov VV. Complementarity, equilibrium, efficiency and economics. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/Boston/London; 2002.
- [19] Kalashnikov VV, Kemfert C, Kalashnikov VV-Jr. Conjectural variations equilibrium in a mixed duopoly. *European Journal of Operational Research* 2009; 192; 717 – 729.

- [20] Kalashnikov VV, Cordero E, Kalashnikov VV-Jr. Cournot and Stackelberg equilibrium in mixed duopoly models, *Optimization* 2010; 99999:1, DOI: 10.1080/02331930802434773, URL: <http://dx.doi.org/10.1080/02331930802434773> – 18 p.
- [21] Laitner J. "Rational" duopoly equilibria. *Quarterly Journal of Economics* 1980; 95; 641 – 662.
- [22] Lindh T. The inconsistency of consistent conjectures. Coming back to Cournot, *Journal of Economic Behaviour and Optimization* 1980; 18; 69 – 90.
- [23] Liu Youfei, Ni YX, Wu FF, Cai Bin. Existence and uniqueness of consistent conjectural variation equilibrium in electricity markets, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems* 2007; 29; 455 – 461.
- [24] Matsumura T. Stackelberg mixed duopoly with a foreign competitor. *Bulletin of Economic Research* 2003; 55; 275 – 287.
- [25] Matsushima N, Matsumura T. Mixed oligopoly and spatial agglomeration. *Canadian Journal of Economics* 2003; 36; 62 – 87.
- [26] Merrill W, Schneider N. Government firms in oligopoly industries: A short-run analysis. *Quarterly Journal of Economics* 1966; 80; 400 – 412.
- [27] Nett L. Mixed oligopoly with homogeneous goods. *Annals of Public and Cooperative Economics* 1993; 64; 367 – 393.
- [28] Novshek W. On the existence of Cournot equilibrium. *Review of Economic Studies* 1985; 52; 85 – 98.

- [29] Perry MK. Oligopoly and consistent conjectural variations. *Bell Journal of Economics* 1982; 13; 197 – 205.
- [30] Sugden R. Consistent conjectures and voluntary contributions to public goods: why the conventional theory does not work. *Journal of Public Economics* 1985; 27; 117 – 124.
- [31] Ruffin RJ. Cournot oligopoly and competitive behavior. *Review of Economic Studies* 1971; 38; 493 – 502.
- [32] Vickers J, Yarrow G. *Privatisation – an economic analysis*. MIT Press: Cambridge, MA; 1988.
- [33] Amundsen, E. and L. Bergman (2002): Will cross-ownership re-establish market power in the Nordic power market? *The Energy Journal* 23(2):73–95.
- [34] Becker, G., W. Sun, and J.O. Huang (2004): Liberalisation of the European Electricity Market: Who wins? Effects of Mergers and Emission Trading on Retail Prices, Company Profit and Pollution using the EMELIE model. Masters thesis. Faculty of Earth and Life Sciences. Free University. Amsterdam. the Netherlands.
- [35] Bigano, A. and S. Proost (2002): The opening of the European electricity market and environmental policy: Does the degree of competition matter? Center for Economic Studies. Katholieke Universiteit Leuven. <http://weber.ucsd.edu/~carsonvs/papers/602.pdf>.

- [36] Bower, J., D. W. Bunn and C. Wattendrup (2001): A model-based analysis of strategic consolidation in the German electricity industry. *Energy Policy* 29: 987–1005.
- [37] Bowley, A.L. (1924), *The Mathematical Groundwork of Economics*, Oxford: Oxford University Press.
- [38] Brubakk, L., M. Aaserud, W. Pellekaan, and F. von Ostvoorn (1995): SEEM - An Energy Demand Model for Western Europe. Report 95/24. Statistics Norway. Oslo.
- [39] Bulavsky, V.A. An Imagined Experiment in the Framework of the Generalized Cournot Model. *Economics and Mathematical methods*. 1996. V. 32. N. 2. (In Russian)
- [40] Bulavsky, V.A. (2000), *Structure of Demand and Oligopolistic Equilibria*. (Private communication).
- [41] Cardell, J., C. C. Hitt and W. W. Hogan (1996): *Market Power and Strategic Interaction in Electricity Networks*. Harvard Electricity Policy Group. Cambridge, Mass.
- [42] Isac, G., Bulavsky, V.A and Kalashnikov, V.V. (2002) *Nonconvex Optimization and its Applications. Complementarity, Equilibrium, Efficiency and Economics*. Kluwer Academic Publishers. Chapters 4 and 5.
- [43] Quick, D.M., and Carey, J.M. *Transmission Capacity and Market Power: the Effect on a Dominant Generation Firm*. *Energy Policy*. 2002. V. 30.

- [44] Kalashnikov, Vyacheslav, and Vitaly Kalashnikov (2005a), Conjectural variations equilibrium in a duopoly with a competitor maximizing domestic social surplus. Proceedings of the 2005 International Applied Business Research Conference (IABR'2005), Puerto Vallarta, Mexico, March 14-18, 2005. –12 p.
- [45] Kalashnikov, Vyacheslav, and Vitaly Kalashnikov (2005b), Equilibrium in a mixed duopoly with domestic social surplus: Case of constant elasticity. Proceedings of the 2005 International Business and Economics Research Conference (IBER'2005), Las Vegas, NV, U.S.A., October 04-07, 2005. –8 p.
- [46] Vyacheslav V. Kalashnikov, Vitaly Kalashnikov, (2006), “Mixed Duopoly: Conjectural Variations Equilibrium”. – In: H. Cancela et al. (Eds), Proceedings of the 13th Latin-American Congress in Operations Research (CLAIO 13), Montevideo, Uruguay, November 27 – 30, 2006 – 6p.
- [47] Lindh, T. (1992), The inconsistency of consistent conjectures. Coming back to Cournot, Journal of Economic Behaviour and Optimization, Vol. 18, pp. 69 – 90.
- [48] Navrud, S. and J. Riise (1999): Results for Norway. In ExternE - Externalities of Energy-Vol. 10- National Implementation. Pages 435-472. European Commission. Luxembourg.
- [49] Newberry, D.M. (2000): Privatisation, Restructuring and Regulation of Network utilities. MIT Press.

- [50] Newberry, D.M. (2002a): Regulatory Challenges to European Electricity Liberalisation. Cambridge.
- [51] Pineau, P.O. and P. Murto (2003): An oligopolistic investment model of the Finnish electricity market. *Annals of Operations Research*. 121, 123–148.
- [52] Sherali H.D., Soyster A.L. and Murphy F.H. Stackelberg -Nash-Cournot equilibria: characterizations and computations. *Oper. Res.* 1983. V. 31. N. 2.
- [53] Borenstein, S., J. Bushnell. 1996. An Empirical Analysis of Market Power in a Deregulated California Electricity Market. University of California Energy Institute, Berkeley, CA (January).
- [54] Secretaria de Energía de México. Estadísticas de Energía. Electricidad <http://sener.gob.mx/webSener/portal/Default.aspx?id=1430>
- [55] Comisión Federal de Electricidad. Tarifas para el suministro y de energía eléctrica. <http://www.cfe.gob.mx/casa/ConocerTarifa/Paginas/Conocetutarifa.aspx>
- [56] Vitaly V. Kalashnikov, Nataliya I. Kalashnykova y Felipe de Jesus Castillo Perez. Modelling Mexican Electricity Market: Experimental Results.- *Internacional Business & Economics Reserch Journal*, 2010, Vol. 9, No. 7, ISSN 1535-0754, -6 pp.
- [57] Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova y Felipe J. Castillo Pérez. Mixed Oligopoly with

Consistent Conjectures. –The European Journal of Operational Research, ISSN 0377-2217. – 32 pp.

[58] Kalashnikov VV, Kemfert C, Kalashnikov VV-Jr. Conjectural variations equilibrium in a mixed duopoly. European Journal of Operational Research 2009; 192; 717 – 729.

[59] Kalashnikov VV, Cordero E, Kalashnikov VV-Jr. Cournot and Stackelberg equilibrium in mixed duopoly models, Optimization 2010; 59; 689 – 706.

Publicaciones

Artículos en Revistas Científicas

- Vitaly V. Kalashnikov, Nataliya I. Kalashnykova Y Felipe De Jesús Castillo Pérez. Modelling Mexican Electricity Market: Experimental Results.- *Internacional Business & Economics Reserch Journal*, 2010, Vol. 9, No. 7, ISSN 1535-0754, -6 pp.
- Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova y Felipe J. Castillo Pérez. Mixed Oligopoly with Consistent Conjectures. –*The European Journal of Operational Research*, ISSN 0377-2217. – 32 pp.

Capítulos y Contribuciones en Libros

- Vitaly Kalashnikov-Jr., N.I. Kalashnykova, F. Castillo, César Uranga and Claudia Mayela Avila Garza, Liberalization of Mexican Electricity Market: Various Modeling Approaches with Numerical Simulation Results. – En: J.-S. Pan et al. (editors), *Proceedings of the 8th International Conference on Intelligent System Design and Applications (ISDA'2008)*, Kaohsiung, Taiwan, 26 – 28 de Noviembre de 2008, pp. 67 – 71. ISBN 978-0-7695-3382-7

Memorias de Congresos con Revisión

- Vitaly V. Kalashnikov, Nataliya I. Kalashnykova y Felipe de Jesus Castillo Pérez. Modelling Mexican Electricity Market: Experimental Results.- Proceedings of the International Business & Economics Research Conference (IBER), Las Vegas, Nevada, 5-7 de octubre, 2009, pp.-6.
- Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya Kalashnykova y Felipe J. Castillo Pérez. Computing Consistent Conjectures in a Mixed Oligopoly. – En: R.C. Clute (editor), Proceedings of the 2010 European Applied Business Research Conference (2010 EABR & ETLC), Dublin, Irlanda, 07 – 10 de junio del 2010, 12 pp.; ISSN 1539 – 8757.
- Vitaliy V.Kalashnikov, Nataliya I. Kalashnykova Y Felipe J. Castillo Pérez. Mexican Electricity Market 2010-2020- Simulation Results of a Game Theoretic Modelling Concept. – En: R.C. Clute (editor), Proceedings of the 2010 European Applied Business Research Conference (2010 EABR & ETLC), Dublin, Irlanda, 07 – 10 de junio del 2010, 8 pp.; ISSN 1539 – 8757.
- Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya Kalashnykova y Felipe J. castillo Pérez. Computing Consistent Conjectures for Equilibrium in Mixed Oligopoly. – En: Conference Book of the 7th International Conference on Computational Management Science (CMS 2010), Vienna, Austria, 28 – 30 de Julio del 2010, pp. 16 – 17.

Congresos y pláticas

- Vitaly V. Kalashnikov, Nataliya I. Kalashnykova y Felipe de Jesús Castillo Pérez. Modelling Mexican Electricity Market: Experimental Results.-The International Business & Economics Research Conference (IBER), las Vegas, Nevada, 5-7 de octubre, 2009.
- Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova, y Felipe de Jesús Castillo Pérez. Consistent Conjectures in a Mixed Oligopoly Model. – Conferencia invitada en el Seminario del Departamento de Optimización, Instituto de

Teorética Información y Automatización (UTIA), Praga, República Checa, 04 de mayo del 2010.

- Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya Kalashnykova y Felipe J. Castillo Pérez. Computing Consistent Conjectures in a Mixed Oligopoly. – Presentación en the 2010 European Applied Business Research Conference (2010 EABR & ETLIC), Dublin, Irlanda, 07 – 10 de junio del 2010
- Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova y Felipe de Jesús Castillo Pérez. Computación de conjeturas consistentes en un oligopolio mixto. – Presentación en II Encuentro Iberoamericano de Investigación Operativa y Ciencias Administrativas (IOCA'2010), Monterrey, N.L., 21 – 23 de julio del 2010.
- Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya Kalashnykova y Felipe J. castillo Pérez. Computing Consistent Conjectures for Equilibrium in Mixed Oligopoly. – Presentación en the 7th International Conference on Computational Management Science (CMS 2010), Vienna, Austria, 28 – 30 de Julio del 2010.