

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



USO DE COTAS LAGRANGIANAS MEJORADAS
PARA LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON
LA ESTRUCTURA DE DESCOMPOSICIÓN DOBLE

POR

JANIA ASTRID SAUCEDO MARTÍNEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

NOVIEMBRE 2009

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



USO DE COTAS LAGRANGIANAS MEJORADAS
PARA LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON
LA ESTRUCTURA DE DESCOMPOSICIÓN DOBLE

POR

JANIA ASTRID SAUCEDO MARTÍNEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

NOVIEMBRE 2009

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
División de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Uso de cotas lagrangianas mejoradas para los problemas de optimización con la estructura de descomposición doble», realizada por la alumna Jania Astrid Saucedo Martínez, con número de matrícula 01130000, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ingeniería con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Dr. Igor S. Litvinchev

Asesor

Dra. Socorro Rangel

Revisora

Dra. Ada M. Alvarez

Revisora

Dra. Yasmín A. Ríos-Solís

Revisora

Dra. Deniz Özdemir

Revisora

Vo. Bo.

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, noviembre 2009

A mis padres que siempre han confiado en mí.

A mi familia, especialmente a mis abuelas, Lola y Mamá Conchita.

A Sergio, por ayudarme a seguir adelante, paciencia, comprensión y amor.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	XII
Resumen	XIV
1. Introducción	1
1.1. Estructura de la tesis	2
1.2. Objetivo	3
1.3. Aportación científica	4
1.4. Metodología	4
2. Problema de Asignación	6
2.1. Multidimensionales	7
2.2. Múltiples tareas por agente	9
2.2.1. Problema de asignación múltiple (<i>MMAP</i>)	9
2.2.2. Problema de asignación generalizada (<i>GAP</i>)	12
2.3. A lo más una tarea por agente	15
2.3.1. Problema de asignación clásico (<i>CAP</i>)	15

2.3.2. Problema de asignación clásico tomando en cuenta la capacidad del agente	17
3. Revisión de la literatura	19
3.1. Relajación lagrangiana	19
3.1.1. Relajaciones de un problema de optimización	20
3.1.2. Interpretación geométrica de la relajación lagrangiana	24
3.1.3. Características de la función lagrangiana	30
3.2. Métodos para resolver el problema dual lagrangiano	35
3.2.1. Método del subgradiente	35
3.2.2. Métodos duales ascendentes	37
3.2.3. Método generación de restricciones o de planos cortantes	37
3.2.4. Método de generación de columnas	38
3.2.5. Método híbrido de dos fases	40
3.2.6. Descomposición de subproblemas	41
4. Construcción de nuevas cotas lagrangianas	44
4.1. Cota modificada	44
4.2. Cota modificada con π	49
4.3. Estimación de $\xi(\pi, u)$, mediante la definición del conjunto localización	53
4.3.1. Ejemplo del uso de la cota modificada	56
4.4. Cotas modificadas para el <i>MMAP</i>	61
5. Solucionando el dual lagrangiano del <i>MMAP</i>	63

5.1. Uso del subgradiente para del dual lagrangiano del <i>MMAP</i>	63
5.1.1. Método del subgradiente	64
5.1.2. Método heurístico voraz	65
6. Experimentación computacional	70
6.1. Implementación	70
6.1.1. Generalidades de AMPL	70
6.2. Casos prueba	71
6.3. Resultados experimentales	72
6.3.1. Método del subgradiente	75
6.3.2. Método del subgradiente y heurístico voraz en última iteración <i>MHL2</i>	79
6.3.3. Método del subgradiente y heurístico voraz alternando cada iteración	82
7. Conclusiones	89
7.1. Conclusiones	89
7.2. Trabajo futuro	91
A. Producción científica	93
A.1. Publicaciones	93
A.1.1. Artículos con arbitraje	93
A.1.2. Memorias en congreso	93
A.1.3. Exposiciones	94

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Problema de asignación multidimensional.	8
2.2. Problema de asignación múltiple.	10
2.3. Problema de asignación generalizada.	13
2.4. Problema de asignación clásico.	16
2.5. Problema de asignación clásico tomando en cuenta la capacidad del agente.	18
3.1. Interpretación geométrica de LR	26
3.2. Interpretación geométrica de la descomposición lagrangiana.	29
3.3. Restricciones de acoplamiento.	29
3.4. Función lagrangiana para el caso de maximización.	31
3.5. No hay intersección más pequeña, por lo que no es posible mejorar la cota.	33
3.6. Posible mejora de la cota lagrangiana.	34

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Métodos heurísticos para resolver el <i>GAP</i>	14
6.1. Calidad relativa entre cotas para instancias pequeñas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Dx \leq d$	77
6.2. Calidad relativa entre cotas para instancias medianas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Dx \leq d$	78
6.3. Factibilidad de las soluciones para instancias pequeñas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Dx \leq d$	79
6.4. Factibilidad de las soluciones para instancias medianas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Dx \leq d$	80
6.5. Calidad relativa entre cotas para instancias pequeñas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Ax \leq b$	81
6.6. Calidad relativa entre cotas para instancias medianas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Ax \leq b$	82
6.7. Factibilidad de las soluciones para instancias pequeñas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Ax \leq b$	83
6.8. Factibilidad de las soluciones para instancias medianas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Ax \leq b$	84

6.9. Proximidad entre la solución obtenida factible por el heurístico voraz y el subgradiente a la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Dx \leq d$, instancias pequeñas.	85
6.10. Proximidad entre la solución obtenida factible por el heurístico voraz y el subgradiente a la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Dx \leq d$, instancias medianas.	85
6.11. Proximidad entre la solución obtenida factible por el heurístico voraz y el subgradiente a la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Ax \leq b$, instancias pequeñas.	86
6.12. Proximidad entre la solución obtenida factible por el heurístico voraz y el subgradiente a la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Ax \leq b$, instancias medianas.	86
6.13. Proximidad entre la solución obtenida por el heurístico voraz y el subgradiente interactuando en cada iteración y la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Dx \leq d$, instancias pequeñas.	87
6.14. Proximidad entre la solución obtenida por el heurístico voraz y el subgradiente interactuando en cada iteración y la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Dx \leq d$, instancias medianas.	87
6.15. Proximidad entre la solución obtenida por el heurístico voraz y el subgradiente interactuando en cada iteración y la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Ax \leq b$, instancias pequeñas.	88

6.16. Proximidad entre la solución obtenida por el heurístico voraz y el sub- gradiente interactuando en cada iteración y la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Ax \leq b$, instancias medianas.	88
---	----

AGRADECIMIENTOS

Antes que todo quiera agradecer a Dios, que es el que me da las fuerzas necesarias para seguir adelante.

Además, quiero agradecer a toda mi familia por su apoyo incondicional, que a pesar de la etapa difícil por la que he pasado siempre estuvieron ahí. Sin olvidarme de las personas que de alguna u otra forma me ayudaron a continuar para obtener las metas que me propuse: Daniel, Lupita, Rocío y Miguel (primo).

A todo mi equipo de trabajo: Lucero, Miguel, Manuel. Además, a mi asesor Dr. Igor Litvinchev por todo su apoyo, su enseñanza, el tiempo disponible, paciencia, en fin, no encuentro palabras para expresarle mi más grande agradecimiento.

También quiero agradecer a todo el cuerpo académico del PISIS, especialmente al comité de tesis, compuesto por los doctores que han dedicado tiempo para revisar y fortalecer esta tesis: Dra. Socorro Rangel, Dra. Ada Álvarez, Dra. Deniz Özdemir, Dra. Yasmín Ríos Solís.

Quiero expresar mi más sentido agradecimiento a Ing. Efraín Soto Apolinar por su ayuda con LaTeX.

Análogamente, expreso mi más sincero agradecimiento a personas que aunque no pertenecen a PISIS ayudaron a la realización de este trabajo: al M. C. José Fernando Reyes Saldaña y nuevamente a la Dra. Socorro Rangel de la UNESP, que aunque estamos en polos distintos, hemos formado un gran equipo de trabajo, Dra. Rangel muchas gracias por su apoyo y dedicación a esta tesis.

Sin olvidar a las personas e instituciones que me apoyaron económicamente para poder realizar mis estudios de postgrado. El primer año subsidiado por el Dr. Igor Litvinchev, la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica y el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y al termino de este por el Fondo Mixto Nuevo León con el proyecto Dirección de Tesis entre la UANL, University of Texas at Austin y/o instituciones de educación superior de la asociación nacional de universidades, a cargo del Dr. Carlos Guerrero.

RESUMEN

Jania Astrid Saucedo Martínez.

Candidata para el grado de Doctor en Ingeniería
con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

USO DE COTAS LAGRANGIANAS MEJORADAS PARA LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON LA ESTRUCTURA DE DESCOMPOSICIÓN DOBLE

Número de páginas: 104.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: El problema de asignación (denotado de aquí en adelante por AP) consiste en relacionar elementos de varios conjuntos de manera óptima. El caso más sencillo es aquel que cuenta con tan sólo dos conjuntos que frecuentemente son nombrados: «tareas» quizá trabajos por hacer y «agentes» las personas o máquinas que realizarán las tareas. El objetivo es encontrar una relación biunívoca, es decir, asignar cada tarea a un sólo agente y cada agente a una sola tarea, minimizando costos (maximizando beneficios).

Usualmente en la practica, se encuentra una variación del AP , el cual consiste en asignar un conjunto de agentes a tareas, existiendo la posibilidad de que un agente

determinado pueda realizar varias tareas y una tarea dada pueda ser desempeñada por varios agentes, respetando ciertas capacidades límites tanto de agentes como de tareas (pueden ser el tiempo necesario para desempeñar tareas, la cantidad mínima o máxima de piezas a producir, el número de trabajadores para realizarlas, la materia prima disponible, etcétera), con el objetivo de maximizar beneficios (o minimizar costos). Dicho problema lo nombramos problema de asignación múltiple *MMAP*.

El *GAP* es una simplificación del *MMAP*, que sólo toma en cuenta la capacidad límite de un conjunto, ya sea el de tareas o agentes. Este ha sido ampliamente tratado tanto por métodos exactos como heurísticos, ya que es *NP*-difícil.

A diferencia del *GAP*, el *MMAP* no ha sido estudiado lo suficiente. Aprovechando la estructura especial en su matriz de restricciones, proponemos una nueva cota y un método de aproximación para solucionarla.

La mayoría de los problemas de optimización a gran escala, entre ellos, el *MMAP* cuentan con una estructura especial en su matriz de restricciones. Si tomamos ventaja de esta estructura, podemos crear alguna técnica de solución eficiente. Una de las estructuras más comunes que poseen este tipo de problemas, es la de diferenciar las restricciones en «fáciles» y «difíciles» [42], que al eliminar las restricciones que consideramos «difíciles» el problema se torna «fácil» de resolver. Un ejemplo típico, es un problema que se descompone en bloques, es decir, se separa en subproblemas independientes relajando las restricciones de acoplamiento (difíciles).

Proponemos explotar la estructura que posee el problema, relajando de forma lagrangiana las restricciones difíciles. La relajación lagrangiana consiste en relajar las restricciones difíciles y agregarlas mediante un término de penalización (llamado multiplicador lagrangiano) a la función objetivo para prevenir su posible violación. Dado un vector fijo de multiplicadores, obtenemos la solución óptima del problema lagrangiano, el cual es una cota superior (cuando la función objetivo se maximiza) del valor objetivo óptimo original. Por lo que para cada multiplicador dado contamos con

una cota, encontrar el valor óptimo de los multiplicadores lagrangianos que minimice la cota superior, es resolver el problema dual lagrangiano.

Las cotas lagrangianas son ampliamente usadas como base de muchas técnicas numéricas, por ejemplo en esquemas de ramificación y acotamiento, para problemas enteros mixtos y en técnicas de optimización convexa para medir el progreso del algoritmo principal y obtener el criterio de parada.

Existen diversas maneras en las que un problema puede ser relajado de forma lagrangiana. Por ejemplo, para una partición de variables específica ciertas restricciones pueden ser consideradas como restricciones de acoplamiento y por lo tanto candidatas a ser relajadas. Mientras tanto, las mismas restricciones pueden ser tratadas como un bloque de restricciones para otra partición de variables. Este tipo de estructura es llamada de «descomposición doble» la cuál puede ser encontrada en: el problema de asignación múltiple, de asignación generalizada, multi mochila, por mencionar algunos.

Este trabajo propone la creación de una nueva cota lagrangiana, para problemas que cuenten con la estructura de descomposición doble (en específico el *MMAP*), basado en la aproximación de la función dual lagrangiana. Dicha aproximación puede ser interpretada de dos formas. Primero podemos reformular el problema original para poder descomponer el problema lagrangiano en dos subproblemas. La segunda interpretación es la búsqueda de una mejor estimación para el término de penalización agregado al problema lagrangiano.

Debido a que las soluciones obtenidas por la mayoría de los algoritmos utilizados para resolver la relajación lagrangiana, no son factibles, éstas son utilizadas como punto de inicio en una heurística. Proponemos un método para encontrar la nueva cota y la obtención de soluciones factibles con un gap relativo muy pequeño.

En conclusión, en este trabajo creamos una nueva cota lagrangiana (llamada modificada), la cuál es mejor que la cota lagrangiana clásica y que la cota lineal, dicha cota es mejorada debido a que ve como un problema de optimización el término de

penalización agregado a la función objetivo lagrangiana, además, construimos un método heurístico voraz para resolver dicha relajación lagrangiana, el cuál genera la cota y encuentra la mejor solución factible para el *MMAP* obtenida a partir de la relajación. Presentaremos resultados numéricos para mostrar la eficiencia del algoritmo en el *MMAP*.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Entre las contribuciones del presente trabajo podemos mencionar las siguientes:

- construcción y cálculo de cotas clásicas y modificadas lagrangianas para el problema de asignación múltiple *MMAP*,
- implementación del método subgradiente para resolver el problema dual lagrangiano clásico y modificado del *MMAP*, para obtener la cota propuesta,
- demostración teórica y computacional que las cotas obtenidas dominan la cota lineal y la clásica lagrangiana,
- uso de las cotas lagrangianas para encontrar la mejor solución factible para el *MMAP*,
- desarrollo computacional de un nuevo método híbrido basado en el subgradiente y un heurístico voraz, para la generación de una solución factible,
- obtención de cotas superiores e inferiores factibles en cada iteración del método,
- comparación entre soluciones factibles y las cotas obtenidas y
- soluciones factibles en cada iteración del algoritmo.

Podemos concluir que la cota propuesta (que llamamos modificada) para el *MMAP*, es mejor que las existentes, debido a que, estimamos el término de complementariedad, (penalización) el cuál en la cota clásica lagrangiana frecuentemente es estimado como 0, por lo que al encontrar el menor valor posible de este, lograremos

mejorar la cota clásica. El valor de la cota modificada la resolvimos por medio de un método heurístico voraz que factibiliza la solución. La calidad de dicha solución, cuenta con un alto grado de suboptimalidad relativa (gap pequeño). Además de que el tiempo necesario para el cálculo de las cotas y soluciones es mucho menor que el necesario para solucionarlo de manera exacta debido a que el criterio de parada con respecto a la proximidad entre la mejor solución factible y la cota obtenida se cumple en muy pocas iteraciones por el uso del heurístico voraz.

Firma del asesor: _____

Dr. Igor S. Litvinchev

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El problema de asignación múltiple, consiste en asignar un conjunto de actividades o tareas a realizar un conjunto de agentes o máquinas que desempeñarán dichas actividades. En este problema existe la posibilidad de que un agente determinado pueda realizar varias tareas y una tarea dada pueda ser desempeñada por varios agentes, siempre y cuando se respete la capacidad límite de todos los elementos de cada conjunto, con el objetivo de maximizar beneficios (o minimizar costos).

El objeto de estudio del presente trabajo es el problema de asignación múltiple, presentado en [8], nombrado «many-to-many assignment problem», de ahí las siglas *MMAP*.

Debido a que el *MMAP* no ha sido tratado (al menos en la literatura revisada, no encontramos métodos exactos o aproximados, para la solución de este), hacemos una comparación con los métodos que han sido empleados para solucionar el problema de asignación generalizada *GAP*. El *GAP* a diferencia del *MMAP* sólo toma en cuenta las capacidades límite de los agentes, dejando libre las capacidades de las tareas, éstas solo son restringidas por la necesidad de que sean realizadas por un agente.

El *GAP* ha sido ampliamente estudiado desde su planteamiento en 1971, cuando fue introducido por De Maio y Roveda [16], pero fue hasta 1977 que Ross y Soland [61] le dieron el nombre de problema de asignación generalizada *GAP*.

Este problema ha sido resuelto tanto por métodos exactos como aproximados [10, 55, 51, 34, 38, 59], desde algoritmos «greedy», algoritmos genéticos, búsqueda tabú, heurísticas lagrangianas, etcétera.

Para explotar la estructura especial que posee el *MMAP* en su matriz de restricciones, proponemos un método heurístico lagrangiano (*MHL*), para construir una cota lagrangiana, la cuál es muy próxima a la solución óptima y obtiene soluciones factibles.

El contraste entre el *MHL* y los métodos existentes (para resolver el *GAP*), es que estos últimos, solo utilizan la relajación lagrangiana para generar soluciones que en su mayoría, son infactibles y solo emplean la solución lagrangiana como punto de inicio en una heurística, en cambio nosotros aprovechamos las características de esta solución para mejorar la cota.

Una analogía entre los trabajos realizados hasta la fecha para el *GAP* y el *MHL* es que ambos comparan el valor de la cota con la solución óptima, adicionalmente comparamos la cota con la solución factible, para tener noción de que tan factible es la solución lagrangiana.

1.1 ESTRUCTURA DE LA TESIS

La organización de este trabajo se presenta en capítulos. En este capítulo, el primero, se describe el objetivo y justificación bajo las que se realizó este trabajo; continuando con el capítulo dedicado a la formulación y descripción del problema a tratar, además de los posibles problemas donde puede ser empleado el procedimiento propuesto.

En el tercer capítulo presentamos una revisión de la literatura existente sobre el estado del arte de la relajación lagrangiana, los beneficios que brinda, las desventajas que presenta. En especial cómo, cuándo y porqué emplearla; ya que esta técnica es en la que nos enfocaremos para el desarrollo de cotas del *MMAP*.

Posteriormente, en el capítulo 4 titulado: construcción de cotas lagrangianas se describe la técnica empleada para la construcción de las cotas mejoradas.

Siguiendo con el capítulo 5, donde presentamos el método empelado para la solución del problema basado en el subgradiente y el heurístico voraz, además de las distintas versiones de dicho método que usamos para generar varios tipos de cotas.

En el capítulo 6, está dedicado a la experimentación computacional. Este se enfoca a la generación de los datos, instancias y presentación de resultados. Dicho capítulo incluye una discusión acerca de las características, ventajas y desventajas que presenta cada cota y las variaciones del método de solución presentado en el capítulo anterior.

Para finalizar presentamos el capítulo 7, que contiene las conclusiones, contribuciones del trabajo y trabajo futuro.

1.2 OBJETIVO

Los objetivos logrados con este trabajo son:

- el desarrollo e implementación una herramienta computacional capaz de solucionar el *MMAP* que sea de apoyo al experto en toma de decisiones,
- obtención de una nueva cota lagrangiana que domina a las ya existentes (la lineal, clásica lagrangiana) para el *MMAP*, además de una solución factible de buena calidad en un tiempo razonable,
- uso de la principal característica de la estructura de descomposición doble, para ver diferencias y similitudes en cuanto a la calidad de cotas y soluciones
- un punto muy importante que diferencia a este trabajo con los demás, que crean cotas es que usualmente se compara cota contra solución óptima.

Debido a que el *MMAP* es *NP* [25] en algunos casos podría ser imposible encontrar la solución óptima y sólo se cuenta con una solución factible, por

lo que nosotros, comparamos cotas con la solución factible obtenida. Además probamos que la solución lagrangiana obtenida por la cota, se encuentra próxima a una solución factible.

1.3 APORTACIÓN CIENTÍFICA

Las aportaciones principales son las siguientes:

- Nuevas técnicas de optimización basadas en relajación lagrangiana para problemas que cuenten con la estructura de descomposición doble.
- Implementación del algoritmo que obtendrá una cota dominante sobre las existentes que es de gran ayuda en la solución de problemas que se modelen como el *MMAP*.
- Comparación de la calidad de las soluciones obtenidas para el problema de asignación múltiple por varios métodos de aproximación y relajación de varias restricciones.

1.4 METODOLOGÍA

La metodología que se sigue en este trabajo consta básicamente de dos partes. La primera consiste en una parte teórica en la cual se realizará el desarrollo y justificación de las cotas lagrangianas, además de la descripción de las variaciones consistentes del método subgradiente y el heurístico voraz, para el problema de asignación múltiple. En la segunda se lleva a cabo la implementación de estos algoritmos propuestos en la primera parte.

Para poder situar el problema de asignación múltiple, comenzamos con una recopilación de los problemas de asignación, para mostrar la relación existente entre

estos, para posteriormente realizar la revisión de literatura acerca de la relajación lagrangiana que es el tema en el que basa principalmente el *MHL*.

CAPÍTULO 2

PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

En el resumen mencionamos que el problema que tratamos es el *MMAP*, este es una variación del problema de asignación, por lo que este capítulo está dedicado al problema de asignación y a problemas relacionados con el problema de asignación múltiple que ya han sido tratados en la literatura.

El problema de asignación también conocido como *AP* (por sus siglas en inglés de: «assignment problem»), consiste en relacionar elementos de varios conjuntos de manera óptima (problemas tipo «match» [58]), donde la dimensión del problema hace referencia a la cantidad y cardinalidad de dichos conjuntos. El caso más sencillo del *AP* es el problema nombrado de asignación clásico el cuál consiste en asignar 2 conjuntos, frecuentemente nombrados: tareas quizá trabajos por hacer y agentes las personas o máquinas que las realizarán, cada tarea debe ser asignada a un solo agente y cada uno de los agentes debe ser asignado a una sola tarea (relacionarlos de forma biunívoca, uno a uno).

Desde la publicación del método húngaro en 1955 por Kuhn [40], el cual soluciona el *AP*. Se ha ido adaptado el modelo matemático del problema de asignación, dependiendo de las variaciones del problema bajo diversas situaciones observadas en la vida cotidiana.

En el 50º aniversario del planteamiento del *AP*, Pentico realizó una recopilación de las versiones del *AP* que han sido tratadas [58], con el objetivo de facilitar la búsqueda de información acerca de cada reformulación y las características que cada

uno de estos poseen; por lo que catalogó todos los problemas en 3 distintas clases dependiendo de las tareas que podía realizar cada agente. Las categorías son las siguientes:

- a lo más una tarea por agente,
- múltiples tareas por agente y
- multidimensionales.

Después se realizó una clasificación por el tipo de función objetivo y restricciones con las que contaban, a continuación haremos una breve descripción de los problemas más representativos.

Iniciaremos una explicación deductiva desde el problema de asignación múltiple (el que nos interesa), hacia el problema de asignación clásico. Haciendo énfasis en las similitudes que poseen.

2.1 MULTIDIMENSIONALES

Los problemas más complejos tipo asignación, son los problemas multidimensionales. Estos cuentan con más de dos conjuntos a relacionar entre sí. Los tridimensionales son los que se pueden observar frecuentemente. Por ejemplo, el problema de asignar trabajos a trabajadores y a máquinas y asignar alumnos a maestros a clases y horarios.

Este tipo de problema se relaciona con el de asignación múltiple de forma en que si uno problema tridimensional tiene cardinalidad 1, tenemos un problema equivalente al *MMAP*.

Una de las situaciones en la vida diaria, que ha sido planteada como problema multidimensional y es de los más estudiados en la literatura es el que consiste en asignar profesores a un grupo de alumnos y a materias.

El problema del horario o mejor conocido como «timetabling» (en inglés) de una escuela o una universidad, consiste en asignar 3 conjuntos (no necesariamente de la misma dimensión), profesores a materias y a alumnos.

En la figura 2.1 se puede observar un ejemplo de este problema. El objetivo es asignar 3 conjuntos entre sí, es decir, asignar profesores a un grupo de alumnos y estos a una materia por cursar. La asignación a realizar puede ser múltiple debido a que existe la posibilidad de que un maestro sea asignado a varios grupos de alumnos, un alumno pertenezca a varios grupos y curse varias materias.

Si se desea ver más información acerca de él ver [15, 23, 69].

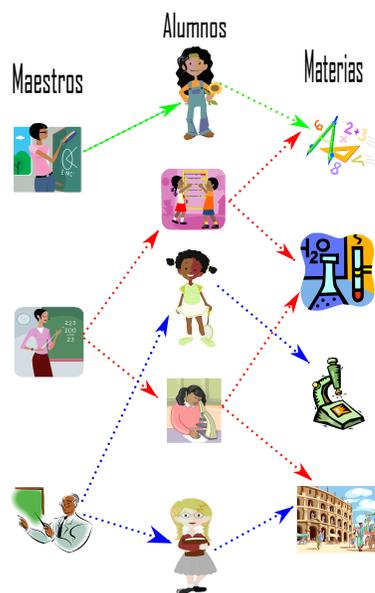


Figura 2.1: Problema de asignación multidimensional.

Continuando con la descripción de problemas de asignación, tenemos que cuándo sólo deseamos asignar dos conjuntos (que es en nuestro caso) contamos con problemas donde el agente puede realizar múltiples tareas, la descripción detallada de estos se presenta a continuación.

2.2 MÚLTIPLES TAREAS POR AGENTE

Esta sección se encuentra dedicada a los problemas que permiten la múltiple asignación de tareas a un sólo agente. Comenzamos con el planteamiento de problema de nuestro interés, el problema de asignación múltiple.

2.2.1 PROBLEMA DE ASIGNACIÓN MÚLTIPLE (*MMAP*)

El *MMAP* consiste en realizar una asignación, entre dos conjuntos, uno de agentes que son las personas o máquinas encargadas de desempeñar un conjunto de tareas o actividades y el otro conjunto son las actividades a realizar.

Este problema es nombramos de asignación múltiple, puesto que permite a un agente realizar más de una tarea y las tareas (o trabajos) pueden ser realizados por varios agentes (o máquinas). Debemos tomar en cuenta que cada agente tiene una capacidad la cual no podemos sobrepasar, esta podría ser el tiempo que esta realizando tareas, cantidad de trabajos o piezas a realizar. Al igual que los agentes las tareas también cuentan con requerimientos que deben respetarse, quizá tiempo límite para ser ejecutadas, un secuenciamiento determinado, demanda por cumplir, etcétera.

El modelo matemático del *MMAP* se presenta a continuación:

$$z_{MMAP}^* = \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$s.a : \sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} \leq d_j \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Donde la función objetivo representada por la ecuación (2.1) maximiza la ganancia ó utilidad, con c_{ij} denotando el beneficio de asignar el agente i a la tarea j .

La restricción (2.2) es la encargada de que no sobrepase la capacidad límite d_j del agente j , donde d_{ij} es la capacidad utilizada por la tarea i del agente j en caso de ser asignada. En cambio la desigualdad (2.3) respeta la capacidad b_i de la tarea i , con a_{ij} siendo la capacidad de la tarea i que es desempeñada por el agente j , en caso de ser asignada. Sin olvidar que $x_{ij} = 1$ si el agente i es asignado a la tarea j , 0 de otro modo.

En la figura 2.2 se puede observar un ejemplo del *MMAP*. En un hospital o centro médico, se desea realizar una asignación entre pacientes y médicos o de pacientes a tratamientos. Donde los médicos fungen la función de agentes a realizar las tareas, mientras que los pacientes la de tareas a ser desempeñadas por los agentes. La capacidad límite de cada paciente, podría ser: la cantidad de tiempo que puede pasar en ser atendido, la cantidad de doctores por los que tiene que ser atendido para poder ser dado de alta, tratamientos o análisis necesarios para ser diagnosticado, entre otros. Mientras que la capacidad de cada doctor sería: la cantidad de pacientes a tratar o el horario que cubren en un día determinado.

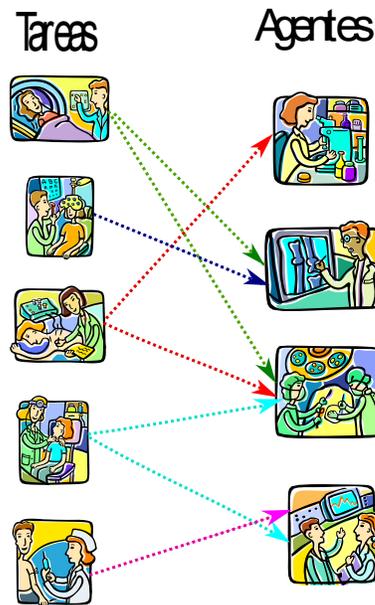


Figura 2.2: Problema de asignación múltiple.

Las líneas que aparecen en la figura 2.2 representan la asignación entre pacientes y doctores. Como se puede observar hay una asignación múltiple, debido a que

hay varias líneas salientes de algunos elementos del conjunto tareas (pacientes), lo que significa que ese paciente debe ser atendido por varios doctores para ser dado de alta. Además, hay varias líneas entrantes a los elementos del conjunto agentes (doctores), es decir que cada doctor puede atender varios pacientes.

Hay dos puntos importantes que cabe mencionar, uno es que no encontramos literatura relacionada con la solución exacta o aproximada de este tipo de problema (en la revisión literatura realizada) y el otro punto es que al igual que algunos problemas de asignación, cuenta con la estructura de descomposición doble. Dicha propiedad la usamos en capítulos posteriores para el desarrollo de una nueva cota lagrangiana.

Consideremos importante enfocarnos en el *MMAP*, debido a que existen muchas situaciones en la vida real, que pueden ser planteados como tal. El *MMAP* es un problema más complicado que el *GAP* y al tratar de resolverlo por un método exacto es más complejo. Debido a que el *GAP* ha sido más tratado, deciden optar por usar este y sacrificar alguna de las capacidades límites que no son tan rigurosas en algunas situaciones de la vida real. Por ejemplo al asignar horas máquinas a horas hombre, es posible que violen la capacidad límite de horas hombre, pidiéndole a cierto obrero que trabaje horas extras o simplemente cambiando el turno de trabajo de este, en cambio la capacidad límite de horas máquina no es más difícil de violar ya que podrían causar daños irreversibles en la herramienta y el costo de reparación es más alto que el pagar tiempo extra a un obrero o cambiarlo de horario.

El *MMAP* es un problema *NP*-difícil, ya que si tomamos el conjunto de tareas con cardinalidad 1, es decir $n = 1$, tenemos m restricciones tipo mochila, por lo que tenemos m problemas tipo mochila los cuales son *NP*-difícil.

El problema de asignación múltiple está muy relacionado con la versión más básica de los problemas de asignación que permiten realizar varias tareas por agentes o que varios agentes realicen varias tareas (no ambos), el cual es el problema de asignación generalizada que describimos a continuación.

Debido a que no existen métodos de solución aproximados para el *MMA*P (al menos en la revisión de literatura realizada), y el problema más parecido a este es el *GAP*. Haremos una comparación con los métodos dedicados a la solución de *GAP* en la subsección siguiente.

2.2.2 PROBLEMA DE ASIGNACIÓN GENERALIZADA (*GAP*)

El *GAP* es considerado como la versión más básica del *AP* cuando se permite la asignación de varias tareas a un agente o varios agentes a una tarea [16]. Note que la similitud entre el este problema y el *MMA*P, es que el *GAP* sólo respeta las capacidad límite de un sólo conjunto.

Es decir esta versión del problema de asignación permite la asignación múltiple en sólo uno de sus conjuntos, mientras no exceda la capacidad de cada uno de los elementos. Para comprender mejor esto se presenta en siguiente modelo que lo describe:

$$z_{GAP}^* = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.4)$$

$$s.a : \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (2.6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

La variable $x_{ij} = 1$, es igual a 1 si el agente i es asignado a la tarea j , 0 en caso contrario. La función objetivo (2.4) minimiza el costo c_{ij} de asignar un trabajo j a un agente i . La igualdad (2.5) asegura que todas las tareas j sean realizadas por un agente i , mientras que la desigualdad (2.6) asegura que se respete la capacidad b_i de cada agente i al asignársele una tarea j .

En algunas ocasiones puede presentarse que un agente i no pueda realizar determinada tarea i , en tal caso hacemos $a_{ij} = b_i + 1$ para evitar que a un agente no realice un actividad que no sepa o no pueda desempeñar.

En la figura 2.3 se muestra un ejemplo del *GAP*. Note que sólo hay una línea que sale de cada tarea (una tarea sólo puede ser asignada a un agente) y varias líneas que llegan a los agentes (un agente tiene la capacidad de realizar varias tareas), por lo que puede existir una asignación uno a varios.

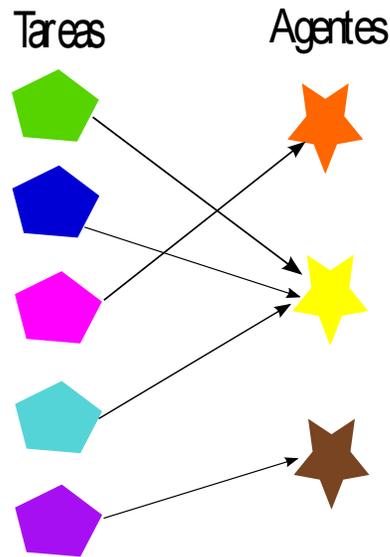


Figura 2.3: Problema de asignación generalizada.

En [10], Cattrysse muestra algunas versiones del *GAP* que han sido propuestas en la literatura para describir aplicaciones del mundo real. Anteriormente mencionamos que el *GAP*, cuenta con una restricción que asegura que no se viola las capacidades de cada uno de los agentes. En [66], permite aumentar dicha capacidad límite, incurriendo en un costo determinado. En cambio Neebe [56], se considera la versión de costos fijos del *GAP* donde cada agente incurre en un costo fijo por tarea realizada.

Ross y Soland emplean el modelo del *GAP*, para modelar problemas de localización [61]. El objetivo de este trabajo es ubicar servicios de emergencia.

Otro ejemplo del uso del *GAP*, es el propuesto por Blocq [7], el cual hace referencia a la asignación de sectores de eliminación de nieve en la ciudad de Montreal. En el mismo trabajo [7], se muestra otra aplicación del *GAP*, cuyo objetivo es reducir costos de entrega de productos derivados del petróleo a distintas estaciones

de servicio cada una bajo ciertas restricciones. Cada estación debe cumplir con una demanda, así como determinada cantidad entregada de cierto producto.

El *GAP* es considerado *NP*-difícil en [25] se puede encontrar información acerca de porque tiene esta complejidad. La demostración completa del teorema que prueba que el *GAP* es *NP*-difícil puede encontrarse en [20].

Debido a la complejidad del *GAP* se ha recurrido a varios métodos de aproximación para obtener una solución próxima a la óptima, algunos de ellos son:

Año	Método de aproximación	Referencia
1981	Greedy con búsqueda local	[51]
1995	Búsqueda tabú	[41]
1997	Algoritmos genéticos	[12]
2000	Algoritmos voraces	[53]
2001	Heurística lagrangiana	[33]
2002	Sistemas de hormigas y búsqueda tabú	[50]
2003	Encadenamiento de trayectorias	[1]
2003	Algoritmo de ramificación y acotamiento	[55]
2004	Subgradiente y ramificar y acotar	[34]
2007	Relajación lagrangiana	[38]
2008	Encadenamiento de trayectorias y fijar de variables	[59]

Tabla 2.1: Métodos heurísticos para resolver el *GAP*.

La diferencia entre los métodos que mencionamos en la tabla 2.1 son:

- los métodos de la tabla, generan la solución lagrangiana y utilizan ésta como punto de inicio para un método exacto, tardando demasiado tiempo para obtener una solución, no muy próxima a la solución óptima y en raros casos factibles,
- las instancias que resuelven cuentan con a lo más 500 variables en métodos exactos y 2000 en métodos aproximados sin obtener soluciones factibles y en

un tiempo de 3600sec o más, mientras que nosotros resolvemos problemas con 2000 variables obteniendo soluciones factibles y el tiempo que tardamos nosotros no excede los 360sec,

- aunque los procedimientos están diseñados para el *GAP*, los modelos podrían ser adaptados debido a que estructura del *MMAP* es muy parecida al de asignación generalizada y
- otra diferencia, es que los criterios de para son el tiempo o número de iteraciones, otro criterio que incorporamos, el de proximidad entre la mejor solución factible y la cota encontrada hasta el momento, este criterio es el que siempre se cumple primero.

Por último presentamos la sección que contiene la versión más sencilla del problema de asignación y es de donde se desprenden los casos que explicamos en las secciones anteriores.

2.3 A LO MÁS UNA TAREA POR AGENTE

Esta sección comprende los casos en los que un agente puede realizar a lo más una tarea y una tarea puede ser desempeñada por sólo un agente. Presentamos este debido a que usualmente es donde se empieza a comprender o visualizar que un problema es de este tipo.

2.3.1 PROBLEMA DE ASIGNACIÓN CLÁSICO (*CAP*)

El problema de asignación clásico *CAP* fue planteado por primera vez en 1952 por Votaw y Order [68] es la versión más básica de los modelos que cuentan con a lo más de una tarea por agente. Dicho problema

El *CAP* consiste en realizar una asignación uno a uno de dos conjuntos con la misma cardinalidad, es decir relacionar n tareas con n agentes, cuya función objetivo es minimizar el total de los costos.

La figura 2.4, se muestra una asignación uno a uno entre tareas y agentes, esto se puede observar ya que sólo sale una línea de cada tarea y sólo llega una línea a cada agente.

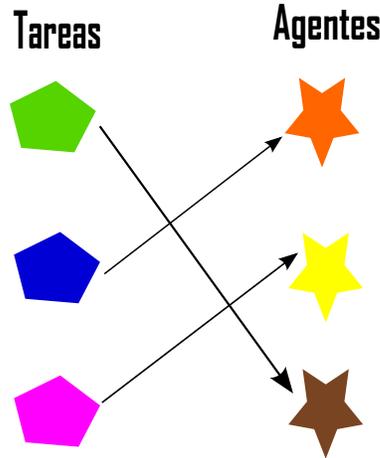


Figura 2.4: Problema de asignación clásico.

El modelo matemático que describe tal situación es el siguiente:

$$z_{CAP} = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.7)$$

$$s.a : \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

La variable $x_{ij} = 1$ si el agente i es asignado a la tarea j , 0 en caso contrario. La función objetivo (2.7) minimiza los costos c_{ij} al asignar un agente i a la tarea j . La igualdad (2.8) asegura la asignación de una única tarea a un agente, mientras que (2.9) se encarga de que cada agente sea asignado a una sola tarea. Cabe mencionar

que este problema es matemáticamente idéntico al problema de asignación ponderado bipartito (nombrado en inglés «weighted bipartite matching») de teoría de grafos.

Y por último mencionamos el problema de asignación clásico tomando en cuenta la capacidad del agente, que es equivalente al *MMAP* en el sentido que se están respetando las capacidades de ambos conjuntos tanto de tareas como de agentes, mediante la matriz de capacidades de que un agente realice una tarea o que un agente puede desempeñar una tarea.

2.3.2 PROBLEMA DE ASIGNACIÓN CLÁSICO TOMANDO EN CUENTA LA CAPACIDAD DEL AGENTE

En este problema se toma en cuenta la capacidad [9] que tiene cada agente (máquina o persona) de realizar una tarea (trabajo a desempeñar) determinada. Al igual que el *MMAP* existe el caso en el que las cardinalidades de los conjuntos pueden ser distintas.

El modelo que describe tal situación está dado por:

$$z^* = \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.10)$$

$$s.a : \quad \sum_{i=1}^m q_{ij} x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.12)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Donde $x_{ij} = 1$ si el agente i es asignado a la tarea j , 0 en caso contrario, q_{ij} es un parámetro que es igual a 1 si el agente i está calificado para realizar la tarea j , 0 en caso contrario.

El objetivo de este problema es maximizar la utilidad c_{ij} de asignar un trabajo j a un agente i (2.10), hay que tomar en cuenta que en caso de que un agente no pueda desempeñar una tarea es decir $q_{ij} = 0$ entonces $c_{ij} = 0$. Las desigualdades (2.11) y

(2.12) aseguran que a lo más un agente calificado j es asignado a cualquier tarea i y que a lo más una tarea j a un agente i , respectivamente.

En la figura 2.5 se puede observar un ejemplo de este problema, que puede ser encontrado en una empresa que cuenta con 3 empleados una secretaria, un montacarguista y un obrero.

La secretaria, el montacarguista y el obrero son los agentes o máquinas que deben desempeñar varias actividades o tareas escribir una carta, sacar copias, archivar documentos, usar una grúa, fabricar una pinza y arreglar un instrumento. Las líneas punteadas son las actividades que puede realizar un empleado. Por ejemplo la secretaria puede escribir una carta, archivar o sacar copias, pero no puede operar una grúa o arreglar un instrumento.

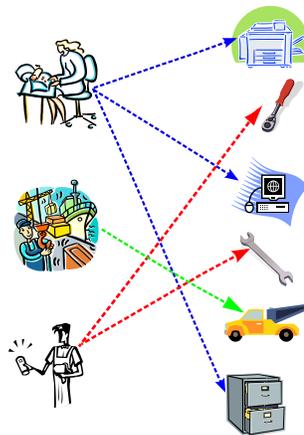


Figura 2.5: Problema de asignación clásico tomando en cuenta la capacidad del agente.

CAPÍTULO 3

REVISIÓN DE LA LITERATURA

En este capítulo hacemos una revisión de literatura acerca de dos temas relacionados con el método propuesto en esta tesis, el método heurístico lagrangiano *MHL*, será descrito a detalle en los capítulos titulados, construcción de cotas y solucionando el dual para el *MMAP*. Los temas relacionados con el *MHL*, son la relajación lagrangiana y los algoritmos empleados a la fecha para resolver dicha relajación, por un lado mencionamos los conceptos básicos, usos, características importantes y ventajas de la relajación lagrangiana, mientras que por el otro, los procedimientos heurísticos que se han empleado para resolver el problema de asignación generalizada *GAP*.

Hay que recordar que la revisión de literatura se realiza sobre el *GAP*, debido a la similitud que posee este con el problema de asignación múltiple *MMAP* y que hasta el momento no hemos encontrado literatura relacionada con el *MMAP*.

3.1 RELAJACIÓN LAGRANGIANA

Algunos de los principales puntos a tocar en esta sección están relacionados con las características fundamentales de la relajación lagrangiana, por ejemplo sus resultados, propiedades esenciales, las preguntas relacionadas con su uso, métodos de solución, interpretación geométrica, entre otros.

Cuando recurrimos a emplear alguna relajación de un problema de optimización dado, nos preguntamos:

- primero que todo ¿porqué emplear una relajación?,
- ya que decidimos utilizar una relajación, ¿cómo podemos construir la relajación de un problema de optimización entera?,
- ¿cómo usarlas para obtener el mejor beneficio posible?,
- ¿por qué es más fácil resolver una relajación que un problema de optimización?,
- y debido a que hay varios tipos de relajación ¿cómo determinar cuál relajación es mejor?,
- y por último ¿cómo calculamos la cota obtenida por una relajación?

éstas preguntas son las que nos interesa resolver a través de la revisión de la literatura.

La literatura existente acerca de relajaciones en especial la lagrangiana es muy amplia. Por lo que sólo citamos los trabajos más relevantes para desarrollo de este trabajo. Si se desea tener información adicional a la tratada, ver [5, 19, 21, 22, 26, 35, 36, 43, 63, 64, 27]. En caso de que usted no cuente con información básica acerca de relajación lagrangiana, se recomienda ver [27].

3.1.1 RELAJACIONES DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Lo primero que nos interesa saber es ¿cómo construir la relajación de un problema de optimización entera? La definición formal de una relajación de un problema de optimización [26], realizada por primera vez por Geoffrion en 1974 es la siguiente.

Definición 3.1 *Dado el problema de optimización*

$$P = \text{mín}\{f(x)|x \in V\} \tag{3.1}$$

su relajación se define por

$$RP = \min\{g(x)|x \in W\} \quad (3.2)$$

donde ambos problemas tienen como variable de decisión x si se cumple que el conjunto de soluciones factibles del problema relajado (3.2) está contenido en el problema (3.1), es decir $V \subseteq W$, y cualquier solución factible de (3.2) domina a (3.1) i. e. $\forall x, g(x) \leq f(x)$ (similarmente para un problema de maximización se cumple $\forall x, g(x) \geq f(x)$).

Observación 3.2 *Un problema de maximización o minimización puede ser considerado de forma indiferente. Debido a que puede ser transformado fácilmente de un formato a otro: $\max\{f(x)|x \in V\} = \min\{-f(x)|x \in V\}$.*

Observación 3.3 *De aquí en adelante P^* hace referencia al valor óptimo de la función objetivo del problema P .*

Entre las ventajas del uso de una relajación, se encuentran, que ofrecen una cota del valor óptimo para los problemas difíciles de resolver, la cuál es calculada a partir de la sustitución de la solución obtenida por el problema (3.2), en la función objetivo del problema (3.1). Otra característica provechosa con la que cuenta la relajación, es que la solución obtenida, aún siendo infactible en la mayoría de los casos, sirve como punto de inicio en algunas heurísticas.

Para problemas tipo (3.1), frecuentemente es empleada una relajación que consiste en ignorar las restricciones de integralidad sobre x . Dicha relajación es conocida como relajación lineal (denotada por LP) o relajación continua.

La nueva cota que proponemos, está basada en la relajación lagrangiana, definida a detalle en la próxima sección.

RELAJACIÓN LAGRANGIANA LR .

La «relajación lagrangiana», consiste en lo siguiente. Dado un problema de optimización

$$OP = \text{mín}\{fx \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\} \quad (3.3)$$

donde X está definido por las restricciones de signo y/o de integralidad sobre la variable x y un conjunto de restricciones $Ax \leq b$ que consideramos difíciles, en el sentido de que el problema (3.3) resulta fácil de resolver sin tomar en cuenta dichas restricciones. En cambio las restricciones $Cx \leq d$ se consideran fáciles, debido a que el problema (3.3) sólo con ellas es más simple de resolver. Por ejemplo, las restricciones $Cx \leq d$ podrían ser un conjunto vacío y podemos tomar éstas junto con X , y definir la relajación lagrangiana.

A continuación se presenta la relajación lagrangiana de las restricciones consideradas como difíciles dada por Held y Karp [35, 36].

Definición 3.4 *La relajación lagrangiana de las restricciones $Ax \leq b$ en el problema (3.3) está dada por*

$$LR_\lambda = \text{mín}\{fx + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq d, x \in X\} \quad (3.4)$$

donde λ es un vector no-negativo de «pesos» llamados *multiplicadores lagrangianos*.

En la función objetivo del problema (3.4) se agregan las restricciones consideradas como difíciles $Ax \leq b$ mediante un término de penalización (multiplicadores lagrangianos) para prevenir su posible violación y así «eliminarlas» del conjunto de restricciones. Este paso se conoce como dualización de las restricciones $Ax \leq b$.

Observación 3.5 *Cabe mencionar que la definición de relajación lagrangiana está dada para restricciones con desigualdades, en el caso de que contemos con restricciones de igualdad, se agregan multiplicadores lagrangianos a la función objetivo para dualizar las restricciones difíciles pero en este caso los multiplicadores no tienen que cumplir la condición de no negatividad, debido a la teoría de dualidad.*

Por la definición de relajación lagrangiana, tenemos que la región factible del problema original (3.3) está contenida en la región del problema relajado (3.4).

Para cualquier valor factible x para el problema original (3.3) y cualquier valor de $\lambda \geq 0$, se cumple que $fx + \lambda(Ax - b) \leq fx$, es decir que la función objetivo del problema (3.4) es menor o igual a la función objetivo del problema original (3.3), $LR_\lambda \leq OP$.

Dado un valor de $\lambda \geq 0$, tenemos un valor de LR_λ distinto, encontrar la mejor aproximación del óptimo original OP^* (3.3). A continuación se presenta el problema que encuentra la mejor cota lagrangiana [35, 36].

Definición 3.6 *El problema dual lagrangiano de (3.3), con respecto a las restricciones difíciles $Ax \leq b$ es*

$$DL = \max_{\lambda \geq 0} \min_x \{fx + \lambda(Ax - b) | Cx \leq d, x \in X\} \quad (3.5)$$

donde el espacio solución de (3.5) es el espacio dual sobre los multiplicadores lagrangianos $\lambda \geq 0$, mientras que (3.4) es resuelto sobre el espacio primal de las variables x .

Una de las interrogantes que planteamos al inicio de esta sección, es la factibilidad de las soluciones obtenidas por el problema (3.5). Por lo que a continuación presentamos algunas de las características que posee dicha solución.

Definición 3.7 *Sea x_λ la solución óptima de (3.4) para algún $\lambda \geq 0$, entonces x_λ es llamada solución lagrangiana.*

La solución lagrangiana no siempre satisface todas las restricciones originales de (3.3), debido a que ignoramos algunas restricciones (las dualizadas), por lo que x_λ algunas ocasiones podría ser no factible.

La información disponible acerca del valor LR^* , es que, dado un x_λ , este valor se encuentra entre $fx_\lambda + \lambda(Ax_\lambda - b)$ y fx_λ .

Si fx_λ es una solución factible del problema (3.3), entonces $fx_\lambda + \lambda(Ax_\lambda - b)$ es una cota inferior de OP^* . Pero, si se cumplen las condiciones de holgura complementaria, es decir, si, $\lambda(Ax_\lambda - b) = 0$, entonces $fx_\lambda + \lambda(Ax_\lambda - b) = OP^* = fx_\lambda$, por lo que x_λ es una solución óptima del problema (3.3).

Las condiciones de holgura complementaria que puede cumplir x_λ , están enlistadas en el siguiente teorema presentado por Guignard en [29].

Teorema 3.8 *Si x_λ es una solución óptima del problema (3.4) para algún $\lambda \geq 0$, entonces*

$$fx_\lambda + \lambda(Ax_\lambda - b) \leq OP^* \quad (3.6)$$

Si x_λ es una solución factible del problema (3.3), entonces

$$fx_\lambda + \lambda(Ax_\lambda - b) \leq OP^* \leq fx_\lambda \quad (3.7)$$

Si $\lambda(Ax_\lambda - b) = 0$, entonces x_λ es la solución óptima del problema (3.3) y $OP^ = fx_\lambda$*

Observación 3.9 *La tercera condición del teorema 3.8 es una condición de optimalidad suficiente, más no necesaria. Es decir, es posible que una solución factible x_λ sea óptima para el problema (3.3), aunque x_λ no cumpla las condiciones de holgura complementaria.*

En la siguiente sección, se muestra una explicación gráfica de los resultados que hemos hecho referencia hasta el momento.

3.1.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA RELAJACIÓN LAGRANGIANA

Iniciamos, con la mención del teorema 3.10. Este teorema nos permite estudiar esquemas de relajación lagrangiana, mediante la interpretación gráfica del espacio solución del dual lagrangiano (3.5), sobre la variable λ , mientras que para el espacio primal es sobre x .

Teorema 3.10 *El problema dual lagrangiano (3.5) es equivalente a la relajación primal*

$$PR = \min_x \{fx \mid Ax \leq b, x \in \text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}\} \quad (3.8)$$

en el sentido que $LR^* = PR^*$, donde $\text{conv}(\cdot)$ es el cascarón convexo del conjunto correspondiente.

La demostración del teorema 3.10 es presentado en [26].

Cuando la matriz de restricciones sea no racional, puede pasar que el resultado del teorema 3.10 sea falso, aunque en la práctica no es posible que ocurra esto, debido a que computacionalmente hablando, todos los números son almacenados como números racionales y con esto lograr la estructura de un poliedro asociado.

Algunos resultados inferidos de la interpretación gráfica asociada con el cascarón convexo del problema (3.8).

Definición 3.11 *Decimos que el problema dual lagrangiano (3.5) tiene la propiedad de integralidad si $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \{x \in X \mid Cx \leq d\}$*

En la figura (3.1), se puede observar que las restricciones a relajar $\{x \in X \mid Ax \leq b\}$, representadas por el conjunto rojo, junto con las restricciones que consideramos fáciles $\{x \in X \mid Cx \leq d\}$ (el pentágono azul). El recuadro amarillo representa $\text{conv}\{x \in X \mid Ax \leq b\} \cap \{x \in X \mid Cx \leq d\}$ y el rectángulo verde es el $\text{conv}\{x \in X \mid Ax \leq b\}$.

Se puede observar en la figura (3.1), que si LR cuenta con la propiedad de integralidad, entonces no es posible mejorar la cota obtenida por relajación lineal, debido a que los puntos extremos de $\{x \mid Cx \leq d\}$ están en X .

Si el problema dual lagrangiano (3.5) cuenta con la propiedad de integralidad (de aquí en adelante denotada por IP), entonces no es posible mejorar la cota obtenida por relajación lineal, debido a que los puntos extremos del conjunto $\{x \mid Cx \leq d\}$ están en X . Cabe mencionar, que la mejor cota obtenida por relajación lagrangiana

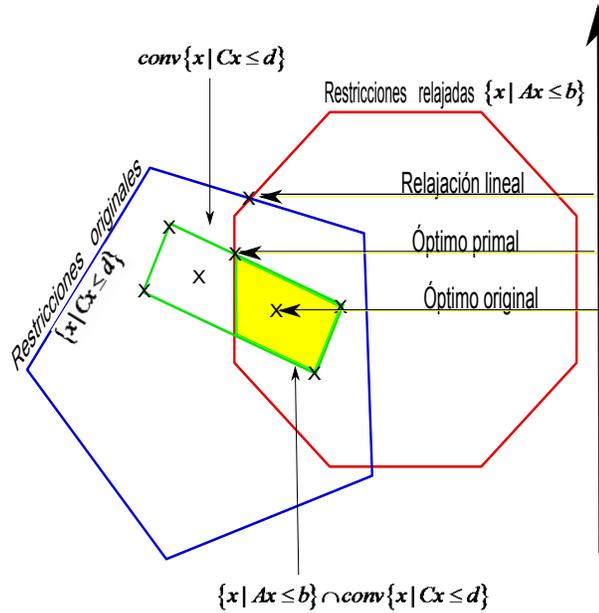


Figura 3.1: Interpretación geométrica de LR .

(DL^*) siempre será igual o mejor que la de relajación lineal, nunca peor. Dichos resultados son establecidos por los siguientes corolarios presentados y demostrados por Monique Guignard en [27].

Corolario 3.1 *Si $\text{conv}\{x \in X | Cx \leq d\} = \{x \in X | Cx \leq d\}$ cuenta con la IP, entonces $LP^* = PR^* = DL^* \leq OP^*$. Es decir la solución óptima del problema lineal es igual a las soluciones del problema primal y el dual lagrangiano, todos estos menores o iguales que la solución óptima original.*

Corolario 3.2 *Si el conjunto $\text{conv}\{x \in X | Cx \leq d\} \subset \{x \in X | Cx \leq d\}$, entonces $LP^* \leq PR^* = DL^* \leq OP^*$, es posible que la mejor cota lagrangiana es estrictamente mejor que la cota lineal.*

Ahora que sabemos algunas de las características que posee la solución lagrangiana, continuamos con la siguiente interrogante, ¿cómo construir una relajación?.

Un problema de optimización puede ser relajado lagrangianamente de varias formas, la mayoría de los casos ayuda a tener un problema más fácil de resolver;

esto con el objetivo de tener esquemas de relajación eficientes. Las relajaciones más usuales se enlistan a continuación.

- **Aislar un subproblema, mientras dualizamos las demás restricciones.** Es una de las aproximaciones más usadas, tiene la ventaja de que al ser empleada los subproblemas lagrangianos resultantes cuentan con una estructura especial y puede ser explotada para resolverlos de forma eficiente.
- **Descomposición lagrangiana (LD)** También conocida como partición de variables [57], o «layering variables» en inglés [60]. Esta es la relajación usada por el *MHL*, para encontrar la nueva cota lagrangiana.

La (LD) consiste en realizar una partición de las variables[65], haciendo una copia de las restricciones, para después poder dualizarlas y obtener subproblemas independientes (frecuentemente son más de dos) con estructuras especiales.

Si tenemos el problema $P = \min_x \{fx | Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$ y empleamos el proceso (LD), reformulamos el problema haciendo una partición de variables, obteniendo un problema equivalente $P' = \min_{x,y} \{fx | Ax \leq b, x \in X, Cy \leq d, y \in X, x = y\}$.

Los problemas P' y P tienen valores óptimos iguales, pero son resueltos en distintos espacios solución. Además, si x^* es la solución óptima de P , entonces la solución $(x, y) \equiv (x^*, x^*)$ es un óptimo para P' y si (x^*, y^*) es una solución óptima de P' , entonces $x^* = y^*$ y x^* es óptimo para P .

Después de copiar las variables, dualizamos las restricciones $x = y$ en P' con multiplicadores λ , lo cual separa al problema P' en dos subproblemas independientes, uno sobre x y otro para y

$$LD_\lambda = \min_{x,y} \{fx + (y - x) | Ax \leq b, x \in X, Cy \leq d, y \in X\} \quad (3.9)$$

$$LD_\lambda = \min_x \{(f - \lambda)x | Ax \leq b, x \in X\} + \min_y \{\lambda y | Cy \leq d, y \in X\} \quad (3.10)$$

La aplicación del proceso de (LD) conlleva a tener una estructura especial, la de escalera, por lo tanto el modelo puede ser decompuesto en subproblemas.

El vector de multiplicadores λ , con el que se dualiza la copia de restricciones, no necesita ser no negativo, debido a que dualizamos una restricción de igualdad, en otras palabras, de forma automática tenemos una solución factible lagrangiana óptima para el problema de programación entero original.

Si los subproblemas lagrangianos, obtenidos por la dualización de la restricciones de igualdad ($x = y$), tienen la misma solución, ésta solución, es óptima para el problema original y cuenta con la *IP*.

Los siguientes teoremas y corolarios presentados y demostrados en [30], muestran que la cota obtenida por (LD) puede dominar estrictamente las cotas lagrangianas obtenidas por dualización de un conjunto de restricciones.

Teorema 3.12 *Si la solución óptima del problema (3.9) es*

$$LD = \max_{\lambda} \{ \min_x \{ (f - \lambda)x \mid Ax \leq b, x \in X \} + \min_y \{ \lambda y \mid Cy \leq d, y \in X \} \} \quad (3.11)$$

entonces

$$LD = \min_x \{ fx \mid x \in \text{conv}\{x \in X \mid Ax \leq b\} \cap \text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} \} \quad (3.12)$$

En la figura 3.2, se muestra la interpretación geométrica del teorema 3.12. Las «x's» denotan los puntos de los conjuntos convexos, la parte rellena de amarillo es el conjunto donde se intersectan los puntos que cumplen todas las restricciones, es decir son soluciones factibles.

Corolario 3.3 *Si alguno de los subproblemas cuenta con la *IP*, entonces la solución óptima del problema dual lagrangiano (3.5) es igual o mejor que cualquier de las cotas lagrangianas obtenidas por dualizar las restricciones $Ax \leq b$ ó $Cx \leq d$.*

*Si ambos subproblemas tienen la *IP* entonces la solución óptima del dual lagrangiano DL^* es igual a la cota obtenida por relajación lineal.*

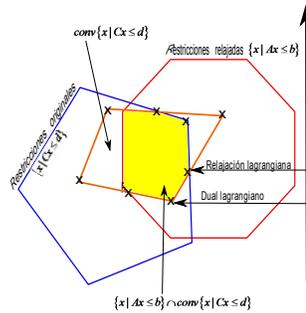


Figura 3.2: Interpretación geométrica de la descomposición lagrangiana.

- Dualizar restricciones de acoplamiento.** Una ventaja que podemos encontrar, después de haber realizado algún tipo de reformulación, es tener un problema con estructura independiente. Si dualizamos las restricciones de acoplamiento, tenemos que el problema es dividido en subproblemas para cada una de las variables.

Presentamos el caso de un problema que cuenta con dos variables de decisión, x y y la cual es introducida mediante reformulaciones. En el problema que se observa en la figura (3.3), la restricción (recuadro azul) $Ex + Fy \leq h$ relaciona ambas variables, por lo que si logramos eliminarlas (dualizar) las restricciones de acoplamiento el problema se separa en un problema para x y uno para y .

$$\begin{aligned}
 \min \quad & fx + gy \\
 \text{s.a:} \quad & Ax \leq b \\
 & Cx \leq d \\
 & \boxed{Ex + Fy \leq h} \\
 & x \in X, y \in Y
 \end{aligned}$$

Figura 3.3: Restricciones de acoplamiento.

- Dualizar un conjunto de copias individuales de variables.** A diferencia de la técnica anterior, ésta introduce la nueva variable y en el problema P mediante una copia de la variable x , describiendo la restricción $Cx \leq d$ como $Cy \leq d$, para obtener un problema equivalente a P .

Otra opción es introducir la variable y , mediante la inclusión de la restricción $Dy = Cx$, teniendo el siguiente problema equivalente

$$P'' = \min_{x,y} \{fx | Ax \leq b, x \in X, Dy \leq d, y \in X, Dx = Cy\}$$

Después de haber agregado la restricción $Dy = Cx$ la dualizamos por relajación lagrangiana y resolvemos el problema. La restricción $Dy = Cx$ es más débil que $x = y$, es decir, este problema es más fácil de resolver que el presentado en la construcción anterior.

Cabe notar que debido a que la restricción agregada es una igualdad, el problema lagrangiano tiene soluciones óptimas x y y que satisfacen la restricción agregada $Dy = Cx$, por lo que la solución x es óptima para el problema P .

3.1.3 CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN LAGRANGIANA

La función lagrangiana está dada por

$$z(\lambda) = \min_x \{fx + \lambda(Ax - b) | Cx \leq d, x \in X\} \quad (3.13)$$

Una de las ventajas que tiene la función lagrangiana, es que este problema es equivalente a solucionar el óptimo del problema lagrangiano.

Otra característica con la que cuenta el problema (3.13) es que podemos descomponerlo en subproblemas, de la forma $\min_{k=1,\dots,K} \{fx^k + \lambda(Ax^k - b)\}$, si el conjunto $\text{conv}\{x \in X | Cx \leq d\}$ es un politopo, es decir, un poliedro acotado, el cuál consiste en una familia grande pero finita de vértices tipo $\{x^1, x^1, \dots, x^k\}$.

La solución óptima del problema lagrangiano no es única, debido a que $z(\lambda)$ es una función cóncava de λ , con saltos donde es no diferenciable. Donde $z(\lambda)$ es la cubierta menor de la familia de funciones lineales de λ , tipo $fx^k + \lambda(Ax^k - b)$, $k = 1, \dots, K$.

En la figura 3.4 se puede observar que la función lagrangiana es descompuesta por varios subproblemas representados por las variables *eta* (línea negra delgada),

mientras que la línea azul representa los puntos factibles. La línea roja representa los puntos factibles óptimos, por o que el problema cuenta con varias soluciones óptimas.

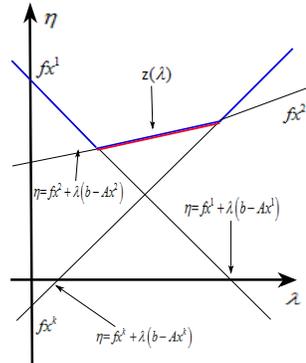


Figura 3.4: Función lagrangiana para el caso de maximización.

La función cóncava $f(x)$ es continua sobre el dominio y diferenciable casi en todos los puntos, excepto sobre un conjunto de medida 0. La función es no diferenciable en dichos puntos, tampoco tiene gradiente, pero si cuenta con subgradiente. Aprovechamos las ventajas de la función cóncava $f(x)$, para obtener el problema dual lagrangiano.

Definición 3.13 Un vector $y \in \mathbb{R}^n$ es un vector subgradiente de una función cóncava $f(x)$ el punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - f(x^0) \leq y(x - x^0) \quad (3.14)$$

Definición 3.14 El conjunto de todos los subgradientes de una función cóncava $f(x)$ el punto x^0 es llamado subdiferenciable de f en x^0 y es denotado como $\partial f(x^0)$.

Teorema 3.15 El subdiferenciable $\partial f(x^0)$ de una función cóncava $f(x)$ en x^0 siempre es no vacío, cerrado, convexo y acotado.

Si $\partial f(x^0)$ tiene un solo elemento, entonces ese elemento es el subgradiente de f en x^0 , denotado por $\nabla f(x^0)$.

El problema dual lagrangiano (3.5) es

$$\begin{aligned}
 DL &= \max_{\lambda \geq 0} (LR_{\lambda}^*) \\
 &= \max_{\lambda \geq 0} (z(\lambda)) \\
 &= \max_{\lambda \geq 0} \min_{k=1, \dots, K} \{fx^k + \lambda(Ax^k - b)\} \\
 &= \max_{\lambda \geq 0, \eta} \{\eta \mid \eta \leq fx^k + \lambda(Ax^k - b), k = 1, \dots, K\}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde λ^* es el multiplicador óptimo del problema (3.5), que minimiza $z(\lambda)$ y encuentra valores óptimos de η y $z(\lambda^*)$, tales que $\eta^* = z(\lambda^*)$.

El valor actual de λ^* en la iteración k , está denotado por λ^k , que satisface $\eta^k = z(\lambda^k)$ y que un nivel del hiperplano $H^k = \{\lambda \mid fx^k + \lambda(Ax^k - b) = \eta^k\}$ pasa por λ^k .

- Si $z(\lambda)$ es diferenciable en λ^k , es decir, el problema (3.5) tiene una única solución óptima x^k , entonces $z(\lambda)$ tiene un gradiente $\nabla z(\lambda^k)$ en λ^k y es

$$\nabla^T z(\lambda_k) = (Ax_k - b) \perp H_k \tag{3.16}$$

- Si $z(\lambda)$ es no diferenciable en λ^k , es decir, LR_{λ^k} tiene soluciones óptimas múltiples x^k , se puede mostrar que el vector $s^k = (Ax^k - b)^T$ es un subgradiente de $z(\lambda)$ en λ^k , donde el vector s^k es ortogonal a H^k .

Esto para simplificar el problema. Recuerde que el uso principal de la relajación es obtener un problema más sencillo de resolver que el original. Sin olvidar que en algunos casos no es posible obtener la solución exacta a nuestro problema incluso una buena.

Ahora hablaremos acerca de la comparación con respecto a la fortaleza que posee cada una de las relajaciones.

Una opción que surge para transformar un problema difícil a uno fácil, al tener el problema dual lagrangiano (3.5), es el de guardar los nuevos cortes generados por

las restricciones violadas junto con las restricciones que en su inicio consideramos difíciles, sólo si existe una nueva intersección entre el poliedro nuevo relajado (el que contiene los cortes violados) y el cascarón convexo original de soluciones enteras (restricciones que consideramos difíciles al inicio y que están guardadas), es decir que haya una intersección más pequeña que la anterior. Logrando fortalecer la cota. Si llega a ocurrir que nuevamente un corte es violado por la solución lagrangiana actual, entonces existen las siguientes posibilidades:

- si el corte es igual a una combinación convexa de las restricciones dualizadas actuales o guardadas, no es posible reducir la intersección desde cada punto de intersecciones antiguas. En la figura 3.5, vea que no es posible mejorar la cota debido a que el corte generado no interseca la región formada por los cortes actuales o guardadas(área amarilla).

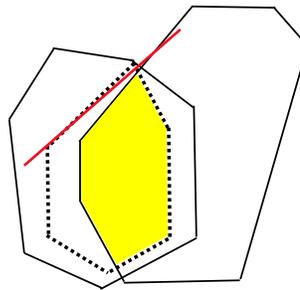


Figura 3.5: No hay intersección más pequeña, por lo que no es posible mejorar la cota.

- si el corte es una desigualdad válida para el problema lagrangiano, entonces cada punto en el cascarón convexo de puntos enteros satisface las restricciones guardadas, de ser necesario es posible usar información de las restricciones guardadas y dualizadas para generar el corte y borrar parte de la intersección. En la figura 3.6, se puede observar que el cascarón convexo (área roja), es intersecada por el nuevo corte por lo que es posible mejorar la cota.

Este procedimiento es llamado relajar y cortar, el cuál en su formato más sencillo consiste en

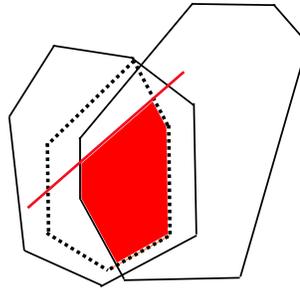


Figura 3.6: Posible mejora de la cota lagrangiana.

1. inicializar el multiplicador lagrangiano λ ,
2. resolver el problema lagrangiano actual, siendo $x(\lambda)$ la solución lagrangiana.
Si aún no ha sido resuelto el dual lagrangiano, actualizar λ . Si no terminar.
3. Identificar el corte que fue violado por $x(\lambda)$ y dualizarlo. Ir a (2).

Una de las ventajas más importantes de la relajación lagrangiana, son la obtención de una cota y la solución lagrangiana.

Usualmente la solución es usada como punto de inicio por una heurística y puede cumplir varias características, por ejemplo

- si satisface las restricciones de holgura complementaria (llamadas *CS* de aquí en adelante), la solución obtenida es óptima para el problema entero o
- si la solución es factible pero no cumple las *CS*, al menos se tiene una solución factible del problema original, pero aún hay que determinar, por algún otro método (puede ser el de ramificar y acotar) el óptimo y por último
- si la solución es infactible, frecuentemente éstas soluciones están cerca de la factible, por lo que en la literatura se encuentran demasiada información acerca de cómo factibilizarla, algunos de los procedimientos más usuales consisten en transformar la solución de forma correcta en infactibilidades, cuidando en afectar en forma mínima la función objetivo [29], otra forma de factibilizar la solución es fijando (en 1 ó 0) algunos componentes significativos de las variables

de decisión según sus valores actuales y resolviendo óptimamente el problema restante, comenzando con la fijación de variables que satisfacen las restricciones relajadas [28].

Para finalizar el capítulo de revisión de literatura, enlistamos algunos de los métodos más importantes para la solución del dual lagrangiano (3.5).

3.2 MÉTODOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA DUAL LAGRANGIANO

La calidad de la cota obtenida por relajación lagrangiana depende en cierta forma del método de solución del problema dual lagrangiano. Por lo que ahora nos enfocaremos en dichos métodos, enlistando los más frecuentes, dando una breve descripción de cada uno y las ventajas de cada uno. Empezamos con la optimización subgradiente, posteriormente los métodos basados en la propiedad lagrangiana, como planos cortantes (o generación de restricciones), Dantzig-Wolfe (o generación de columnas), algoritmo volumen, métodos lagrangianos de agregación y desagregación, también algunos métodos de aproximación híbrida.

3.2.1 MÉTODO DEL SUBGRADIENTE

Este método podría decirse que es el más usado para la solución del dual lagrangiano (3.5), incluso es el usado por nosotros. Pero los pioneros en considerarlo para la solución de dicho problema fueron Held y Karp en 1971 [36] y posteriormente fue probado por Held, Wolfe y Crowder en [37].

Este método es un procedimiento iterativo, el cual en cada iteración k , se obtiene un vector multiplicador actual λ^k y la longitud del paso que da con subgradiente $z(\lambda^k)$, que en caso de ser necesario, el punto resultante es proyectado en un ortogonal no negativo.

Consideremos que LR_λ^k es el problema dual lagrangiano en la iteración k cuya solución óptima es x^k . Entonces $s^k = (Ax^k - b)^T$ es un subgradiente de $z(\lambda)$ en λ^k .

Sea λ^k la solución óptima (no conocida) de la relajación lagrangiana, con $\eta^* = z(\lambda^*)$, sea λ'^{k+1} una proyección de λ^k es un hiperplano H^* paralelo a H_k , donde

$$H^* = \{\lambda | fx^k + \lambda(Ax^k - b) = \eta^*\} \quad (3.17)$$

El vector s^k es perpendicular a H_k y a H^* (debido al paralelismo con H_k), por lo que $\lambda'^{k+1} - \lambda^k$ es un multiplicador no negativo de s^k es decir

$$\lambda'^{k+1} - \lambda^k = \mu s^k, \quad \mu \geq 0 \quad (3.18)$$

Además, si λ'^{k+1} pertenece a H^* , entonces

$$fx^k + \lambda'^{k+1}(Ax^k - b) = \eta^* \quad (3.19)$$

por lo tanto

$$fx^k + \lambda^k(Ax^k - b) + \mu s^k((Ax^k - b)) = \eta^* + \mu s^k \bullet s^k = \eta^* \quad (3.20)$$

donde $\mu = \frac{\eta^* - \eta^k}{\|s^k\|}$, por lo que

$$\lambda'^{k+1} = \lambda^k \frac{s^k(\eta^* - \eta^k)}{\|s^k\|^2} \quad (3.21)$$

Para concluir presentamos la definición del multiplicador de la iteración siguiente como $\lambda^{k+1} = [\lambda'^{k+1}]^+$ es decir λ^{k+1} es la proyección ortogonal no negativa, por lo que λ^{k+1} debe ser no negativo. Debido a las descripción dada de las proyecciones geométricas, es claro que λ^{k+1} se encuentra más cerca a λ^* que a λ^k , en consecuencia tenemos que la secuencia $\|\lambda^k - \lambda^*\|^2$ es monótonamente no creciente.

Lo descrito en el párrafo anterior dice que la convergencia del subgradiente es impredecible. Por lo que para algunos problemas, la convergencia es rápida y altamente confiable, mientras que para otros tiende a producir multiplicadores en secuencia, o de forma equivocada.

3.2.2 MÉTODOS DUALES ASCENDENTES

A diferencia del método subgradiente, este tipo de métodos aprovecha la estructura del problema dual lagrangiano (3.5) para crear una secuencia de multiplicadores que garanticen la monótonidad creciente del algoritmo.

Normalmente los métodos duales ascendentes se concentran en optimizar problemas duales lagrangianos por lo que en general, no se puede esperar que las soluciones del problema original siempre sean enteras.

Observación 3.16 *Este tipo de aproximaciones son de estructura independiente por lo que sólo se puede emplear en problemas específicos. Si se desea tener más detalles acerca de las condiciones necesarias para emplearlos vea [31].*

3.2.3 MÉTODO GENERACIÓN DE RESTRICCIONES O DE PLANOS CORTANTES

Consideremos la siguiente relajación lagrangiana LR

$$\begin{aligned}
 DL &= \max_{\lambda \geq 0} (LR_{\lambda}^*) \\
 &= \max_{\lambda \geq 0} (z(\lambda)) \\
 &= \max_{\lambda \geq 0} \min_{k=1, \dots, K} \{fx^k + \lambda(Ax^k - b)\} \\
 &= \max_{\lambda \geq 0, \eta} \{\eta \mid \eta \leq fx^k + \lambda(Ax^k - b), k = 1, \dots, K\}
 \end{aligned}$$

En cada iteración k de este tipo de método, se genera uno o más cortes de la forma $\eta \leq fx^k + \lambda(Ax^k - b)$ para resolver el k -ésimo subproblema lagrangiano LR_{λ}^k cuya solución es x^k .

Los cortes generados en la iteración anterior son agregados a la iteración actual, de forma que el problema actual está formado por todos los cortes generados en

iteraciones anteriores, formando el problema maestro de la siguiente forma

$$MP^k = \max_{\lambda \geq 0, \eta} \{ \eta \mid \eta \leq f x^{k(h)} + \lambda (Ax^{k(h)} - b), \quad h = 1, \dots, K \} \quad (3.22)$$

cuya solución de la próxima iteración es λ^{k+1} , el proceso continua hasta que se cumpla que $(MP^k)^* = z(\lambda^{k+1})$, obteniendo el valor óptimo de LR .

Dicho método fue implementado en [11, 39], partiendo del hecho que $z(\lambda)$ es la cubierta mínima de una familia de funciones lineales, con la forma de los cortes descritos anteriormente.

3.2.4 MÉTODO DE GENERACIÓN DE COLUMNAS

Daremos una breve descripción acerca del método de generación de columnas, pero si le parece insuficiente dicha información vea [17, 18].

El método de generación de columnas o CG consiste en reformular un problema de forma de obtener un problema lineal (o entero) cuyas columnas corresponden a soluciones factibles de un subconjunto de problemas, sujetos a las restricciones restantes, cuyas variables son sujetas a pesos.

Dos aspectos importantes a considerar en este método son que podemos verlo como el proceso dual de la relajación lagrangiana o el método dual de generación de restricciones (descrito en la sección anterior). Además, este método es una aplicación del algoritmo de descomposición [13, 14].

Para comenzar dicho algoritmo, elegimos la variable $x^k \in \{x \in X \mid Cx \leq d\}$ y $k \in K$ de tal forma que se encuentre en el conjunto $conv\{k\} = conv\{x \in X \mid Cx \leq d\}$. Una manera adecuada de elegir las variables tipo x^k pueden ser todos los puntos que están contenidos en $conv\{x \in X \mid Cx \leq d\}$, pero si deseamos encontrar una solución más rápida cabe definir a éstas variables solamente como los vértices de $conv\{x \in X \mid Cx \leq d\}$.

Consideremos el problema de optimización

$$P = \min\{fx \mid Ax \leq d, Cx \leq d, x \in X\} \quad (3.23)$$

El problema P está definido de tal forma que beneficie la estructura del problema 3.24 dual lagrangiano que está definido como sigue

$$LR = \max_{\lambda \geq 0} \left\{ \min_x \{fx + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq d, x \in X\} \right\} \quad (3.24)$$

El problema primal equivalente al dual lagrangiano 3.24 es

$$PR = \min_x \{fx \mid Ax \leq b, x \in \{x \in X \mid Cx \leq d\}\} \quad (3.25)$$

debido a que $x \in \text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}$ puede ser escrito como una combinación lineal de pesos μ_k , tales que $\sum_{k \in K} \mu_k = 1$ y $\mu_k \geq 0$. Logrando la reformulación siguiente

$$PR = \min_x \left\{ f \sum_{k \in K} \mu_k x^k \mid A \sum_{k \in K} \mu_k x^k \leq b, \sum_{k \in K} \mu_k = 1, \mu_k \geq 0 \right\} \quad (3.26)$$

$$= \min_x \left\{ \sum_{k \in K} \mu_k \cdot f(x^k) \mid \sum_{k \in K} \mu_k A(x^k) \leq b, \sum_{k \in K} \mu_k = 1, \mu_k \geq 0 \right\} \quad (3.27)$$

, donde el operador \cdot representa el producto interno (punto) de vectores.

El lograr separar las restricciones guardadas (generadas) de las restricciones dualizadas (las originales relajadas), es un proceso equivalente a tener un subproblema y un problema maestro. Por lo que mediante la generación de columnas obtenemos las soluciones de subproblemas enteros que poseen las mismas restricciones que los subproblemas lagrangianos. En [62] puede encontrarse una implementación exitosa de este método realizada por Savelsbergh que brinda cotas lagrangianas mejores que las obtenidas por la relajación lineal para el *GAP*.

Held y Karp sospechan que la fortaleza de la cota obtenida por generación de columnas o relajación lagrangiana depende, de que los subproblemas no tomen en cuenta la *IP*. Esto pasa cuando la cota lineal del problema maestro es igual a la cota lagrangiana [35, 36].

El esquema puede ser exitoso mediante la solución de problemas que cuenten con la *IP* porque permite calcular indirectamente la solución óptima de la relajación lineal aún cuando no puede ser calculada directamente, debido a la cantidad exponencial de restricciones [35, 36].

A diferencia del método del subgradiente, el método de generación de columnas, cuenta con un criterio de parada por calidad $(MP^k)^* = z(\lambda^{k+1})$.

3.2.5 MÉTODO HÍBRIDO DE DOS FASES

Un método híbrido de dos fases, como su nombre lo dice, consiste en un método que compuesto por dos algoritmos para encontrar la solución del problema dual lagrangiano.

En [32] se presenta un método híbrido que combina el método del subgradiente con el método de generación de restricciones. Lo primero que hacen Guignard y Zhu es ajustar los multiplicadores de acuerdo al subgradiente, a la vez que agregan las restricciones correspondientes a todas las soluciones conocidas de los subproblemas, al problema maestro relajado linealmente, para tomar la solución óptima de este como una estimación actual del dual lagrangiano óptimo. Conforme van transcurriendo las iteraciones la exactitud de la estimación va mejorando, por lo que no es necesario ajustar el tamaño del paso $\epsilon_k = 1, \forall k$. Este método es convergente, tal y como el método de generación de restricciones, debido a que da un intervalo del dual óptimo, mediante la cota obtenida por relajación lagrangiana y el valor del problema maestro.

En este método se debe contar con la certeza de que el proceso no se cicla, en caso de que el proceso se cicle, es decir se obtienen restricciones repetidas y no es posible mejorar el problema maestro. Por lo que se sigue el mismo criterio de mejoramiento que el subgradiente, es decir, si después de cierto número de iteraciones (digamos, 5 veces), se genera el mismo corte, se recomienda cambiar a una fase de generación de restricciones pura.

3.2.6 DESCOMPOSICIÓN DE SUBPROBLEMAS

Uno de los métodos que aprovecha la estructura que poseen algunas de las relajaciones lagrangianas es el método de descomposición en subproblemas siempre y cuando el subproblema lagrangiano se descomponga en problemas pequeños, por lo que la región factible es el producto cartesiano de varias regiones pequeñas.

La ventaja más importante con la que cuenta este método es que reduce la complejidad computacional de los subproblemas lagrangianos. Por ejemplo, si contamos con un problema de 5,000 variables binarias, podemos descomponerlo en 50 problemas con 100 variables binarias, los cuales son más fáciles de resolver.

Un ejemplo de la descomposición de subproblemas aplicado al *GAP* es el siguiente

$$\begin{aligned} LR_\lambda = \text{mín} &= \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_j \lambda_j(1 - \sum_i x_{ij}) \\ \text{s.a. :} &= \sum_j a_{ij}x_{ij} \leq b_i \quad \forall i \in I \quad (KP) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \end{aligned}$$

Reagrupando con respecto a los factores en común, tenemos

$$LR_\lambda = \text{mín} \left\{ \sum_{i,j} (c_{ij} - \lambda_j)x_{ij} + \sum_j \lambda_j \left| \sum_j a_{ij} \leq b_i, \forall i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \right. \right\}$$

Si tomamos el conjunto de soluciones factibles $E(KP) = \{x^k | k \in K\}$ formado por las restricciones tipo *KP* y separamos el problema para cada una de las restricciones tipo *KP* tenemos, $E(KP_1) = \{x_1^k | k \in K_1\}$, por lo que la intersección de las soluciones que cumplen todas las restricciones es $K = \sum_i K_i$.

Entonces, la solución factible de LR_λ se escribe como $x_{ij} = \sum_{k \in K_i} \mu_k^i x_{ij}^k, \forall i, j$, por lo que

$$\text{máx}_{\lambda, z} \left\{ z + \sum_j \lambda_j \left| z \leq \sum_{i,j} (c_{ij} - \lambda_j)x_{ij}^k, \forall k \in K \right. \right\}$$

Desagregando el problema dual lagrangiano en K_i problemas independientes, por lo que la generación de columnas del problema maestro podría ser

$$\max_{\lambda, z} \left\{ \sum_i z^i + \sum_j \lambda_j |z_i \leq \sum_j (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij}^k, \forall i, k \in K_i \right\} \quad (3.28)$$

dualizando tenemos

$$\begin{aligned} \min_{\mu} &= \sum_{k \in K_i} \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}^k \mu_k^i \\ s.a : & \sum_{k \in K_i} \sum_i x_{ij}^k \mu_k^i \\ & \sum_{k \in K_i} \mu_k^i = 1 \\ & \mu_k^i \geq 0 \end{aligned}$$

Los métodos presentados en ésta sección, consideramos que no son adecuados para resolver el problema de asignación múltiple, ya que queremos analizar las propiedades con las que cuenta la solución lagrangiana. En la mayoría de los métodos anteriores, la solución lagrangiana sólo es utilizada como punto de inicio. Además de que conforme van transcurriendo el número de iteraciones, el problema puede irse complicando.

Otra de las barreras por las que no podemos hacer uso de los métodos presentados, es porque están basados en el problema de asignación generalizada y no al problema de asignación múltiple, en el que estamos enfocados.

Nosotros empleamos el método del subgradiente para resolver el dual lagrangiano, ya que consideramos que es fácil de emplear, rápido y obtiene buenas soluciones para el problema a tratar.

Algunas alternativas a las presentadas en esta última sección para resolver el problema dual lagrangiano, son el algoritmo «volume», el cual es una extensión del subgradiente y está estrechamente relacionada con la técnica «bundle» [3]. Otro de los algoritmos que han sido propuestos para resolver este problema y que obtiene buenas soluciones dual como primales es el descrito en [4]. Usualmente la solución

primal (no entera), es usada como punto de inicio en métodos heurísticos con el objetivo de crear varias soluciones enteras [2].

CAPÍTULO 4

CONSTRUCCIÓN DE NUEVAS COTAS LAGRANGIANAS

Este capítulo está dedicado a la construcción y desarrollo de cotas lagrangianas modificadas para el problema de asignación múltiple *MMAP*. Presentamos un procedimiento innovador, para transformar el *MMAP*, a un problema equivalente, que sea más fácil de resolver. Posteriormente describimos el método de solución para resolver el problema obtenido.

En la sección 4.1 se muestra el desarrollo de lo que nombramos cotas lagrangianas modificadas. Debido a que definimos dos tipos de cotas, que están relacionadas, dedicamos una sección a cada una de ellas, éstas difieren, en cuanto al tipo de restricciones a dualizar.

4.1 COTA MODIFICADA

Consideremos el siguiente problema de optimización entero

$$z^* = \text{máx}\{cx \mid Dx \leq d, Ax \leq b, x \in U\}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, el conjunto U puede estar formado por restricciones de signo sobre x y/o restricciones de integralidad para algunos componentes de x .

El problema 4.1 tiene m restricciones tipo $Dx \leq d$ consideradas como «restricciones difíciles» y n «restricciones fáciles» de tipo $Ax \leq b$ en el sentido de que el problema

de optimización sólo con este tipo de restricciones y $x \in U$ es más fácil de resolver que el problema original.

Sea a x^* como la solución óptima del problema (4.1). De aquí en adelante denotamos al conjunto X como el conjunto que posee las variables x que cumplen las restricciones fáciles, es decir $X = \{x \in U | Ax \leq b\}$.

Observación 4.1 *El problema posee la estructura de descomposición doble, es decir, si relajamos las restricciones $Dx \leq d$ el problema se descompone en n subproblemas independientes. Por otro lado, si relajamos el otro conjunto de restricciones $Ax \leq b$ el problema se descompone en m subproblemas independientes. Relajando cualquier tipo de restricciones, contamos con un problema más fácil que el original.*

Por lo que, es indistinto, considerar como restricciones difíciles a $Ax \leq b$ ó a $Dx \leq d$. Entonces, sólo describiremos el procedimiento tomando en cuenta a $Dx \leq d$ como difíciles, puesto que el procedimiento es análogo, si las restricciones $Ax \leq b$ son las que consideramos como difíciles.

Definimos $u = \{u_i\} \geq 0$ como un vector de m multiplicadores lagrangianos. La relajación lagrangiana consiste en agregar mediante un término de penalización a la función objetivo las restricciones que se consideran como difíciles para prevenir su posible violación y se define como

$$z(u) = \text{máx}\{cx + u(d - Dx) | x \in X\} \quad (4.1)$$

Por simplicidad suponemos que conocemos la solución óptima del problema (4.1) $\forall u \geq 0$. Si x^* es una solución factible del (4.1), se cumple que

$$c^* + u(d - Dx^*) \leq z(u) \quad (4.2)$$

es decir para cualquier $u \geq 0$. Si x^* es factible para (4.1), tenemos que para cualquier valor de $u \geq 0$, obtenemos una cota, $z^* \leq z(u)$, la cuál es conocida como cota clásica lagrangiana.

Dado un vector $u \geq 0$, tenemos una cota clásica lagrangiana, por lo que encontrar los multiplicadores óptimos u^* asociados a este problema, consiste en resolver el problema dual lagrangiano

$$z(u^*) = \min_{u \geq 0} z(u) \equiv w_D \quad (4.3)$$

el cual encuentra la mejor cota clásica lagrangiana.

Para problemas tipo (4.3), convexos y bajo ciertas condiciones de regularidad (ver [6], para más detalles acerca de dichas condiciones) tenemos que $u^*(d - Dx^*) = 0$, aún cuándo $u(d - Dx^*)$, puede ser estrictamente positivo para $u \neq u^*$. Si X es no convexo, el término de complementariedad $u(d - Dx^*)$ puede ser estrictamente positivo para $u = u^*$. Por lo tanto, proponemos fortalecer la cota lagrangiana $z(u)$ y el valor de la cota lagrangiana dual w_D estimando los términos de complementariedad los más pequeños posibles.

Suponemos la siguiente información acerca de una solución óptima x^* del problema (4.3).

Suposición 4.2 *Se conoce un conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $x^* \in W$, llamado conjunto localización.*

Observación 4.3 *Existen distintas formas de definir el conjunto localización. La sección 4.3 titulada «Estimación de $\xi(\pi, u)$, mediante la definición del conjunto localización» donde definimos algunos conjuntos localización.*

Presentamos el procedimiento que proponemos, este encuentra una nueva cota lagrangiana, incluso mejor que la clásica. ¿Porqué obtiene una mejor cota que la cota clásica lagrangiana? En 4.1 el término de penalización agregado a la función objetivo se considera que tiende a 0, cuando no necesariamente es así. Si logramos encontrar el valor óptimo de dicho término de penalización, encontramos una cota más «estrecha» que la clásica.

Sea $\theta(u)$ el valor óptimo del problema auxiliar usado para estimar el término de complementariedad

$$\theta(u) = \min_{y \in W} u(d - Dy), \quad u \geq 0 \quad (4.4)$$

La demostración de la siguiente proposición muestra formalmente que la nueva cota lagrangiana (la modificada) es mayor o igual que la cota clásica lagrangiana.

Proposición 4.4 *Sea W una localización. Entonces se cumple que para cualquier $u \geq 0$, tenemos*

$$z^* \leq z_M(u) \quad (4.5)$$

donde la cota lagrangiana modificada esta definida como la sustracción del valor óptimo de (4.1) y (4.4)

$$z_M(u) \equiv \{z(u) - \theta(u)\}$$

encontrar la mejor cota de este tipo, está definida por la solución del problema lagrangiano dual modificado

$$z_{MD} = \min_{u \geq 0} \{z_M(u)\} \quad (4.6)$$

Demostración: Por la definición de $z(u)$ y la condición de que $x^* \in X$ implica que $z^* \leq z(u) - u(d - Dx^*)$. Entonces tenemos que el

$$z^* \leq \min_{u \geq 0} \{z(u) - u(d - Dx^*)\}$$

por definición de $x^* \in W$ sigue que

$$\leq \max_{y \in W} \{ \min_{u \geq 0} \{z(u) - u(d - Dy)\} \}$$

debido a las propiedades de un problema de *minmax*

$$\leq \min_{u \geq 0} \{ \max_{y \in W} \{z(u) - u(d - Dy)\} \}$$

agrupando los problemas dependiendo de su variable de decisión y empleando la propiedad de que un problema de maximización puede ser expresado como uno de minimización

$$= \min_{u \geq 0} \{z(u) - \min_{y \in W} \{u(d - Dy)\} \} \equiv w_D$$

$$\leq z(u) - \min_{y \in W} \{u(d - Dy)\} \equiv z_M(u)$$

para cualquier $u \geq 0$ ■

Proposición 4.5 *Para cualquier $u \geq 0$, la desigualdad $uDx \leq u(d - Dx)$ es válida cuando $x = x^*$. Si u es el vector de multiplicadores óptimo para la relajación convexa del problema (4.1) y se cumple que $\theta(u) \geq 0$, entonces $uDx \leq u(d - Dx)$ con $u = u^*$ y x^* no es la solución óptima del problema relajado.*

Demostración: Si $x^* \in W$ un punto óptimo para el problema original, entonces la solución óptima del problema auxiliar $\theta(u)$ (el multiplicador óptimo), es mejor que cualquier multiplicador factible

$$\theta(u) = \min_{y \in W} u(d - Dy) \leq u(d - Dx^*). \quad (4.7)$$

Entonces $uDx \leq u(d - Dx)$ se cumple, si $x = x^*$ y toda $u \geq 0$. Las condiciones de holgura complementaria [54] se cumplen cuando $uDx = ud$. Por lo que si $\theta(u) \geq 0$, la desigualdad $uDx \leq ud - \theta(u)$ no se cumple cuando $x = x^*$. ■

Observación 4.6 *Note que el valor de la cota lagrangiana modificada, está compuesta por la resta de los valores óptimos de los problemas (4.1) y (4.4) y no por la solución óptima del problema compuesto por la resta de los problemas, es decir, $w_{MD} \neq z(u^*) - \theta(u^*)$. En otras palabras, no se deben tomar ambos problemas como si fuera uno mismo, ya que algún multiplicador óptimo para (4.1) quizá no sea el mismo que para (4.4).*

Suponemos que los conjuntos solución del problema dual lagrangiano modificado, X y W , contienen un gran número de puntos pero finito, por lo que podemos descomponerlos de la siguiente manera $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ y $W = \{y_1, y_2, \dots, y_L\}$, es decir que X y W son poliedros acotados vértices x_i y y_j .

Proposición 4.7 *El problema dual modificado puede ser expresado como*

$$w_{MD} = \max\{cx \mid Dx \leq Dy, x \in \text{conv}(X), y \in \text{conv}(W)\} \quad (4.8)$$

Demostración: Por la definición de los problemas w_{MD} , $z_M(u)$ y $z(u)$ tenemos

$$\begin{aligned} w_{MD} &= \min_{u \geq 0} \{ \max_{x \in X} \{ cx + u(d - Dx) \} - \min_{y \in W} \{ u(d - Dy) \} \} \\ &= \min_{u \geq 0} \{ \max_{t=1, \dots, T} \{ cx_t + u(d - Dx_t) \} - \min_{l=1, \dots, L} \{ u(d - Dy_l) \} \} \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde η y ξ están definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \eta &= \max_{t=1, \dots, T} \{ cx_t + u(d - Dx_t) \} \\ \xi &= \min_{l=1, \dots, L} \{ u(d - Dy_l) \} \end{aligned}$$

Rescribiendo el problema tenemos

$$\begin{aligned} \min \quad & \eta - \xi \\ & \eta \geq cx_t + u(d - Dx_t), \quad t = 1, \dots, T \\ & \xi \leq u(d - Dy_l), \quad l = 1, \dots, L \\ & u \geq 0, \eta, \xi \in \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

■

El problema que obtenemos como resultado de la proposición 4.7 es equivalente a resolver el dual lagrangiano (4.3), en caso de que este problema aún se considere difícil de resolver, podemos hacer una aproximación de ξ (siguiendo el mismo procedimiento, es decir, relajar de forma lagrangiana las restricciones difíciles y calcular el mejor término de penalización agregado a la función objetivo). Para más detalles ir a la sección 4.3 «Estimación de $\xi(\pi, u)$, mediante la definición del conjunto localización».

4.2 COTA MODIFICADA CON π

En esta sección se describe una de las aportaciones más importante de este trabajo, la cual consiste en el cálculo de la cota lagrangiana modificada para los problemas que cuentan con la estructura de descomposición doble.

En la sección 4.1 definimos el problema dual lagrangiano (4.3), el cuál es equivalente a la relajación primal presentada por Geoffrion en [26] definida como

$$w_D = \text{máx}\{cx \mid Dx \leq d, x \in \text{conv}(X)\}$$

donde $\text{conv}()$ denota el cascarón convexo.

El problema original está compuesto por dos subproblemas interesantes, resultantes de la relajación de cada uno de los conjuntos de restricciones, es decir tenemos un problema si relajamos solo $Dx \leq d$ y otro al relajar $Ax \leq b$. Al relajar alguno de los dos tipos restricciones, obtenemos beneficios con cada uno de ellas (mencionados en el transcurso de ésta sección), pero estructuras distintas. En este caso, es práctico reformular el problema original antes de efectuar la relajación. Una transformación equivalente al problema original es realizada en [30] por Guignard, que es llevada a cabo mediante la introducción de una copia de las restricciones

$$z^* = \text{máx}\{cx \mid Dx \leq d, x \in U, x = y, Ay \leq b, y \in U\} \quad (4.10)$$

En el problema (4.10), se introdujeron las restricciones $x = y$, dualizandolas con multiplicadores $\lambda \in \mathbb{R}$ y asociando los términos similares, tenemos un problema con variable de decisión x y uno resuelto para y ,

$$z(\lambda) = \text{máx}_x \{(c - \lambda)x \mid Dx \leq d, x \in U\} + \text{máx}_y \{\lambda y \mid y \in X\}$$

La cota obtenida por la descomposición del problema dual lagrangiano en dos subproblemas es

$$z^* \leq z(\lambda^*) = \text{mín}_\lambda \{z(\lambda)\} \equiv w_{LD} \quad (4.11)$$

la cual domina estrictamente la cota lagrangiana obtenida por la dualización de cualquier un conjunto de restricciones. Esto debido a que el problema (4.12) considera todas las restricciones originales,

$$w_{LD} = \text{máx}\{cx \mid x \in \text{conv}(x \in U, Dx \leq d) \cap \text{conv}(X)\} \quad (4.12)$$

mientras que w_{D_1} y w_{D_2} sólo consideran un conjunto de restricciones, ya que son cotas lagrangianas estándar obtenidas por la dualización de cualquiera de las restricciones

$Dx \leq d$ o $Ax \leq b$, por lo que

$$w_{LD} \leq \min\{w_{D_1}, w_{D_2}\}$$

Consideramos los mismos supuestos anteriores, es decir, contamos con un conjunto localización W tal que $x^* \in W$. Dicho conjunto puede ser definido por mediante algunas de las restricciones del problema original, dependiendo del tipo de problema. Ver la sección 4.3, Estimación de $\xi(\pi, u)$, mediante la definición del conjunto localización.

Considere el problema modificado original

$$z_M = \max\{cx \mid x \in X, Dx \leq Dy, cx = cy, y \in W\} \quad (4.13)$$

Sea $(x, y) = (x^*, x^*)$ un par de soluciones factibles para el problema (4.13).

El problema (4.13) es una relajación del problema original (4.1) por lo tanto, $z^* \leq z_M$. Si el conjunto W es tal que $y \in W$, entonces, las restricciones $Dy \leq d$ son incluidas explícitamente en la definición del conjunto W . Una solución óptima x^* para (4.13) es factible para (4.1) y cumple que $z^* \geq z_M$. Finalmente para una localización dada tenemos $z^* = z_M$.

Dualizando las restricciones $Dx \leq Dy, cx = cy$ con multiplicadores $u \geq 0, \pi$, obtenemos la cota lagrangiana modificada con $\pi, (z_M(u \geq 0, \pi))$ definida como $\max_{x \in X}\{(1 - \pi)cx - uDx\} + \max_{y \in W}\{\pi c + uD\}y$ y

$$z^* \leq z_M \leq z_M(\pi, u) \quad (4.14)$$

Denotamos por $\eta(\pi, u)$ como el valor óptimo de la primera maximización de $z_M(\pi, u)$, es decir, $\eta(\pi, u) = \max_{x \in X}\{(1 - \pi)cx - uDx\}$ y a $\xi(\pi, u)$ como el valor óptimo de $\max_{y \in W}\{\pi c + uD\}y$.

Debido a la suposición realizada en la sección 4.1 «Cota modificada», consideramos como restricciones fáciles a $x \in X$, calcular el valor de $\eta(\pi, u)$ es fácil (más

sencillo de resolver que el problema original) puesto que el problema correspondiente sólo ésta formado por restricciones «fáciles».

El problema dual modificado correspondiente a la cota (4.14) está definido como

$$w_{MD} = \min_{u \geq 0, \pi} = \{\eta(\pi, u) - \xi(\pi, u)\} \quad (4.15)$$

El problema dual modificado

$$w_{MD} = \max\{cx \mid x \in \text{conv}(X), Dx \leq Dy, cx = cy, y \in W\}$$

y si $y \in W$ cumple la restricción $Dy \leq d$ entonces,

$$w_{MD} \leq \min\{w_{D_1}, \max_{x \in W} cx\}$$

Similar, a lo definido en la sección 4.1 «Cota modificada», la factibilidad de x^* para el problema lagrangiano estándar implica que $cx^* + u(d - Dx^*) \leq z(u)$. Si x^* es factible para (4.10) y $u \geq 0$, entonces $u(d - Dx^*) \geq 0$, obtenemos inmediatamente una cota del problema original $z^* \leq z(u)$.

Para problemas convexos y bajo ciertas suposiciones de regularidad (ver [6], para más detalles acerca de dichas condiciones), usualmente se toma como 0 el valor de $u^*(d - Dx^*)$, cuando no necesariamente es así, es decir $u(d - Dx^*)$, puede ser estrictamente positivo para $u \neq u^*$. Sí X es no convexo, el término de complementariedad $u(d - Dx^*)$ puede ser estrictamente positivo para $u = u^*$. Por lo que podemos fortalecer la cota lagrangiana estándar, usando mejores estimaciones del término complementario en lugar de $u(d - Dx^*) \geq 0$.

Si $x^* \in W$ entonces para cualquiera localización W tenemos que la cota clásica lagrangiana $z(u)$ para cualquier solución factible del problema original es peor que la cota clásica lagrangiana evaluada con la solución óptima original y que la cota clásica calculando el mejor termino de penalización agregado al problema lagrangiano

$$z(u) \geq cx^* + u(d - Dx^*)$$

$$\geq cx^* + \min_{y \in W} u(d - Dy)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} z^* &\leq \max_{x \in X} \{cx + u(d - Dx)\} - \min_{y \in W} \{u(d - Dy)\} \\ &\equiv z_M(u, 0) \end{aligned}$$

Después de varias transformaciones algebraicas elementales, tenemos que la cota coincide con la cota obtenida por el problema (4.14) con $\pi = 0$.

Para problemas enteros, donde las restricciones $Dx \leq d$ no son cumplidas como igualdad, una elección razonable de W es $\theta(u) = \min_{y \in W, u(d - Dy) > 0}$ y así mejorar la cota lagrangiana estándar.

4.3 ESTIMACIÓN DE $\xi(\pi, u)$, MEDIANTE LA DEFINICIÓN DEL CONJUNTO LOCALIZACIÓN

El principal uso de la cota lagrangiana modificada (4.14) está dado bajo una construcción adecuada del conjunto localización W . Debido a la definición de $z_M(\pi, u)$ tenemos que, la localización más «estrecha» de W es el valor más pequeño de $\xi(\pi, u)$, es decir el mejor valor de la cota superior modificada $z_M(\pi, u)$. Desde este punto de vista, es mejor considerar tantas restricciones originales como sea posible en el conjunto localización W .

A continuación definimos distintos conjuntos localización, comenzando por aquel que contiene todas las restricciones originales, denotado por W_{all} , por definiciones anteriores puede observarse que $z_M(\pi, u) = z^*$ con $\pi = 1$ y $u = 0$.

Debemos considerar la definición de W , lo suficientemente sencillo (que sea más fácil de resolver que el original) para garantizar que el cálculo de $\xi(\pi, u)$ (problema que cuenta con restricciones consideradas difíciles) en el problema (4.14) sea fácil, pues es lo que se desea lograr al relajar, si no lo consideramos así, estaremos

invirtiendo el objetivo logrado (calcular $\eta(\pi, u)$ es «fácil» debido a la suposición que hicimos en el problema original, es decir, este problema es fácil ya que sólo contiene restricciones fáciles).

Debemos tomar en cuenta que si $\xi(\pi, u)$ es más complicado de resolver que el problema original, bajo una localización definida por todas (o algunas) de las restricciones, recomendamos usar una estimación de $\xi(\pi, u)$. De tal forma que, si relajamos algunas restricciones complicadas (formando una localización más fácil), sobre la cota lagrangiana estándar o modificada, tenemos una relajación sobre la estimación de $\xi(\pi, u)$. Este tipo de relajación sobre una relajación es llamada *relajación lagrangiana anidada* (*nested relaxation*).

Definimos una localización como $W_D = \{y | Dy \leq d, y \in W\}$.

Si $\theta(u) = \min_{y \in W_D} \{u(d - Dy)\} \geq 0$ para cualquier $u \geq 0$ entonces $W_D \geq \min_{u \geq 0} \{z(u) - \theta(u)\} \equiv \min_{u \geq 0} z_M(\pi, u) \geq w_{MD}(W_D)$, con lo que posiblemente fortaleceremos la cota dual estándar w_D considerando el problema (4.14).

Si el conjunto localización W_D se puede descomponer, esto es

$$W_D = W_{D1} \times W_{D2} \times \cdots \times W_{DL}$$

el cálculo de $\xi(\pi, u)$ se reduce a resolver n subproblemas independientes de dimensiones pequeñas. Algunas clases de problemas cuentan con dicha estructura en los conjuntos X y W_D de tal modo que resulta en una descomposición de cálculos de $\eta(\pi, u)$ y $\xi(\pi, u)$. Frecuentemente, este es el caso de los problemas que tienen variables « x_{ij} » por ejemplo, el de asignación generalizada, localización de empresas, multi-mochila y de empaquetamiento.

Otra localización adecuada resulta en $\theta(u) \geq 0$, esta es una localización sustituta, $W_S = \{y | uDy \leq ud, y \in U\}$ dando como resultado que la cota obtenida por el dual lagrangiano modificado es mejor que la cota dual lagrangiana $w_D \geq w_{MD}(W_S)$.

Interpretamos el caso de localizaciones W_S y W_D como sigue. En lugar de calcular de manera «exacta» $\xi(\pi, u)$ usando la localización W_{all} definida por todas

las restricciones originales $Dx \leq d$, $Ax \leq b$, $x \in U$ simplemente eliminamos las restricciones $Ax \leq b$ y usamos la estimación correspondiente del problema «exacto» de $\xi(\pi, u)$ (en el caso de W_S podemos emplear la relajación de una única restricción, mediante relajación sustituta, del conjunto de restricciones tipo $Dx \leq d$, si se desea ver más información acerca de como realizar este tipo de relajación ver relajación sustituta en [6]).

Otra forma de estimar el valor de $\xi(\pi, u)$ es usar la relajación lagrangiana, estándar o modificada, en lugar de eliminar las restricciones. Sea $W_1 = \{y | Py \leq p, y \in (Y \cap U)\}$, la localización dada (recuerde, que podemos definir la localización, con algunas de las restricciones del problema original) donde $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, la matriz P y el vector p son correspondientemente dimensionados (P es una copia de la matriz A y p es el vector b). Suponemos que el conjunto Y tiene una estructura favorable (por ejemplo, puede ser un conjunto que sea descompuesto en vértices) y podemos manejar explícitamente las restricciones $y \in Y$, mientras que las restricciones $Py \leq p$ pueden ser dualizadas con multiplicadores $v \geq 0$. De tal forma que podemos estimar $\xi(\pi, u)$, para esto relajamos las restricciones $Py \leq p$, obteniendo $\xi^L(\pi, u, v)$

$$\begin{aligned} \xi(\pi, u) &\equiv \max_{y \in W} \{\pi c y + u D y\} \\ &\leq \max_{y \in Y \cap U} \{\pi c y + u D y + v(p - P y)\} \\ &\equiv \xi^L(\pi, u, v) \quad \forall v \geq 0 \end{aligned}$$

mientras que la cota modificada lagrangiana, se obtiene por el mejor término de penalización, resultando una estimación de $xi^L(\pi, u, v)$, $\forall v \geq 0$

$$\begin{aligned} xi^L(\pi, u, v) &= \max_{y \in W_1} \{\pi c y + u D y\} \\ &\leq xi^{ML}(\pi, u, v) \\ \xi^{ML}(\pi, u, v) &\equiv \max_{y \in Y \cap U} \{\pi c y + u D y - v P y\} + \max_{w \in U, P w \leq w} v P w \end{aligned} \quad (4.16)$$

Basados en estimaciones de $\xi(\pi, u)$ obtenemos dos problemas duales modificados asociados con la relajación lagrangiana anidada para la localización W_1 ,

$$w_{MD}^L = \min_{u, v \geq 0, \pi} \{\eta(\pi, u) + \xi^L(\pi, u, v)\}$$

$$w_{MD}^{ML} = \min_{u,v \geq 0, \pi} \{ \eta(\pi, u) + \xi^{ML}(\pi, u, v) \}$$

Esta última cota w_{MD}^{ML} , es la más sencilla de resolver (no quiere decir que la calidad de la cota obtenida por esta sea mala) ya que empleamos relajación anidada y el conjunto localización que esta considerando toma menos restricciones en cuenta, y estamos encontrando el mejor término de complementariedad agregado. A w_{MD}^{ML} le llamamos cota lagrangiana modificada con π , si fijamos $\pi = 0$ en w_{MD}^{ML} , obtenemos la cota lagrangiana modificada.

4.3.1 EJEMPLO DEL USO DE LA COTA MODIFICADA

EJEMPLO 1

A continuación presentamos el procedimiento empleado en un pequeño ejemplo académico. Considere el siguiente problema binario, Freville y Hanafi [24]

$$z^* = \min x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$s.a : \quad 8x_1 + 16x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 18 \quad (4.17)$$

$$5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 16x_4 \leq 19 \quad (4.18)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

donde la restricción (4.17) define las restricciones tipo $Dx \leq d$ y también define el conjunto Y y la restricción (4.18) toma el lugar de las restricciones tipo $Ax \leq b$ así como $Py \leq p$.

La solución óptima de este problema es $z^* = 2$, $x^* = \{ (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0) \}$. Realizando la relajación lineal obtenemos como solución $x_{lp} = (0, 0.89, 0, 0.63)$ y la cota lineal es $z_{lp} = 3.04$. Empleando la relajación lagrangiana, tenemos que su cota es $w_{LD} = 2\frac{2}{3}$ y los multiplicadores asociados son $\lambda^* = \frac{2}{3}(1, 1, 1, 2)$. Mientras que el problema clásico lagrangiano de dualizar las restricciones (refeq:difi), da como resultado la cota $w_{D_1} = z(\frac{1}{3}) = 2\frac{12}{13} \approx 2.923$ con $u_1^* = \frac{1}{13}$, mientras que si dualizamos $5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 16x_4 \leq 19$, tenemos $w_{D_2} = z(\frac{2}{19}) = 2\frac{18}{19} \approx 2.947$ para los

multiplicadores $u_2^* = \frac{2}{19}$. La relajación (que llamaremos sustituta), obtenida por la sustitución de las dos restricciones originales en una combinación de ambas usando dos multiplicadores ($\mu = (1, 0.5)$), da una cota $w_S = 3$. Mientras que la relajación compuesta, es decir la relajación que incluye ambas relajaciones simultáneamente (la sustituta y la relajación lagrangiana estándar de las dos restricciones), usando cuatro multiplicadores, obtiene la cota $w_c = 2.82$, resultado obtenido por Freville y Hanafi en [24].

Las restricciones (4.18) fungen el papel de las restricciones $Ax \leq b$, las cuales son consideradas como fáciles; mientras que la restricción a dualizar con multiplicador $u \geq 0$ es la difícil (4.17), la cual es tipo $Dx \leq d$. Sea $U = \{x \in \{0, 1\}\}$. Supongamos que el conjunto localización está dada por W_1 está definida por las dos restricciones originales, tal que la primera restricción es usada para definir la condición $y \in Y$, la cual manejamos explícitamente, mientras que la segunda es usada para definir $Py \leq p$ y dualizarla con multiplicador $v \geq 0$ en la estimación del problema $\xi^L(\pi, u, v)$. Usando una técnica lagrangiana estándar, presentamos el problema dual $w_{MD}^L(W_1)$ como un problema lineal (problema maestro), cuyo espacio factible está dado por $\{x | Ax \leq b\} \cap U$ para $\eta(\pi, u)$, mientras que para $\xi^L(\pi, u, v)$ en el conjunto $Y \cap U$. Eliminando las restricciones redundantes obtenemos el problema maestro final

$$w_{MD}^L(W_1) = \min_{u, v \geq 0, \pi} \eta + \xi$$

s. a:

$$\eta \geq \left\{ \begin{array}{l} 2 - 2\pi - 6u \\ 3 - 3\pi - 19u \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\xi \geq \left\{ \begin{array}{l} \pi + 8u + 14v \\ 2\pi + 16u + 9v \\ 4\pi + 17u - 10v \\ 3\pi + 14u - 2v \\ 19v \end{array} \right\}$$

donde la última restricción para η y ξ corresponde a la solución factible 0. La solución óptima del problema maestro es $\pi = \frac{-1}{25}$, $u = \frac{2}{25}$, $v = 0$, $\eta = 1.6$, $\xi = 1.2$, dando una cota $w_{MD}^L(W_1) = 2.8 \leq \min\{w_{D_1}, w_{D_2}\} = 2.923$.

En caso de que no usemos la copia de las restricciones $cx = cy$, es decir, simplemente fijar $\pi = 0$ en el problema maestro, obtenemos los siguiente $u = \frac{1}{13} \equiv 0.0769$, $v = \frac{1}{247} \equiv 0.004$, $\eta = \frac{20}{13} \equiv 1.538$, $\xi = \frac{313}{247} \equiv 1.267$, obteniendo una cota $\eta - \xi = \frac{693}{247} \equiv 2.8057$.

Usando la relajación lagrangiana $\xi^L(\pi, u, v)$ para estimar $\xi^L(\pi, u)$, usamos la relajación sustituta. Sea W_S la localización sustituta obtenida por la suma de la multiplicación de $8x_1 + 16x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 18$ por $\mu_1 = 1$, y $5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 16x_4 \leq 19$ por $\mu_1 = 0.5$

$$W_S = \{x \in \{0, 1\} | 10.5x_1 + 21x_2 + 7x_3 + 14x_4 \leq 27.5\} \quad (4.19)$$

. Dichos multiplicadores μ son los óptimos para la relajación sustituta del problema original, resultando una cota sustituta $w_S = 3$. Cuando la localización $W = W_S$ la cota dual modificada w_{MD} definida por la ecuación (4.6) es calculada usando el problema maestro lineal. Notemos que la restricción correspondiente a la variable η en el problema maestro permanece igual a como la habíamos definido al inicio de este ejemplo. La solución del nuevo (el problema que toma la estimación de $\xi^L(\pi, u)$) problema maestro es $\pi = \frac{2}{15}$ con $u = \frac{1}{15}$, $\eta = \xi = \frac{4}{3}$, obteniendo una cota

$\eta + \xi = 2\frac{2}{3} \equiv 2.667$, cuyo valor coincide con la cota w_{LD} obtenida por descomposición lagrangiana.

Si usamos la localización W_0 definida por las restricciones $8x_1 + 16x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 18$ y no usamos la copia de las restricciones $cx = cy$, la cota lagrangiana asociada coincide con la cota de descomposición lagrangiana presentada en [27] (vea ejemplo 7.4 en dicha referencia para más información). Para el calculo de dicha cota, hay que fijar $\pi = 0$ y $v = 0$ en el problema maestro, donde la solución asociada a esta cota es $u = \frac{1}{13} \equiv 0.0769$, $\eta = \frac{20}{13} \equiv 1.538$, $\xi = \frac{17}{13} \equiv 1.308$ obteniendo una cota $\eta + \xi = \frac{37}{13} \equiv 2.846$.

Ahora consideremos la restricción $5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 16x_4 \leq 19$ como $Dx \leq d$, es decir tomadas como restricción difícil y candidatas a relajar, mientras que $8x_1 + 16x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 18$ ocuparía el lugar de $Ax \leq b$ considerada como fácil. Además la primera restricción es manejada explícitamente en la definición $y \in Y$, mientras que la segunda restricción es usada para la estimación de $\xi_{\pi,u,v}^L$. Después de eliminar las restricciones redundantes obtenemos el siguiente problema maestro

$$w_{MD}^L(W_1) = \min_{u,v \geq 0, \pi} \eta + \xi$$

s. a:

$$\eta \geq \left\{ \begin{array}{l} 2 - 2\pi - 10u \\ 4 - 4\pi - 29u \\ 3 - 3\pi - 24u \\ 0, \end{array} \right.$$

$$\xi \geq \left\{ \begin{array}{l} \pi + 8u + 15v \\ 2\pi + 16u + 12v \\ 3\pi + 18u - v \\ 18v. \end{array} \right\}$$

La solución óptima es $\pi = \frac{-4}{15}$, $u = \frac{2}{25}$, $v = 0$, $\eta = 1.2$, $\xi = 1.8$, dando una cota $w_{MD}^L(W_1) = 2.8$.

Si fijamos $\pi = 0$ (calculamos la cota sin la copia de las restricciones $cx = cy$), obteniendo $\eta + \xi = 2.826$. Mientras que si fijamos $\pi = 0$ y $v = 0$ (calcular la cota de descomposición lagrangiana) tenemos $\eta + \xi = 2.842$

EJEMPLO 2

Considere el siguiente problema no lineal

$$z^* = \text{máx} \{f(x) | Ax = b, x \geq 0\} \quad (4.20)$$

con cóncava $f(x)$. Definimos $X = \{x | Ax = b\}$ y $W = \{y | \bar{A}y = \bar{b}, y \geq 0\}$, donde la matriz $[\bar{A}, \bar{b}]$ contiene un subconjunto de filas de la matriz extendida $[A, b]$.

Dualizando las restricciones de no negatividad $x \geq 0$, la cota lagrangiana calculada para un $u \geq 0$ fijo es

$$z(u) = \text{máx} \{f(x) - ux | Ax = b\} \quad (4.21)$$

mientras que la cota lagrangiana modificada $z_M(u)$ está definida por

$$z_M(u) = z(u) - \theta(u) \quad \theta(u) = \text{mín} \{yu | \bar{A}y = \bar{b}, y \geq 0\}$$

En particular, si u es estrictamente positivo y la matriz $[\bar{A}, \bar{b}]$ contiene al menos una fila con elementos positivos, entonces $\theta(u) > 0$ y $z_M(u) < z(u)$.

Observación 4.8 *Los multiplicadores son estrictamente positivos y frecuentemente son usados en técnicas de punto interior, ver [67].*

4.4 COTAS MODIFICADAS PARA EL $MMAP$

En esta sección desarrollamos el procedimiento propuesto para calcular la mejor cota para el $MMAP$. Recapitulando el $MMAP$ es una asignación varios a varios reconociendo capacidades límites de agentes y tareas, cuyo modelo es

$$\begin{aligned}
 z_{MMAP}^* &= \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.a :} & \sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} \leq d_j \quad j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Análogamente este tipo de problema cuenta con la estructura de descomposición doble.

Para comenzar la aplicación del procedimiento propuesto en secciones anteriores para el $MMAP$, definamos

$$\begin{aligned}
 X &= \{x_{ij} \in \{0, 1\} \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m\} = \prod_{i=1}^m X_i \\
 X_i &= \{x_{ij} \in \{0, 1\} \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i\} \\
 W_i &= \{y_{ij} \in \{0, 1\} \mid Py \leq p\} \\
 \{Py \leq p\} &\equiv \{y_{ij} \in \{0, 1\} \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m\}
 \end{aligned}$$

$$Y = \{y_{ij} \in \{0, 1\} \mid \sum_{i=1}^m d_{ij}x_{ij} \leq d_j \quad j = 1, \dots, n\} = \prod_{j=1}^n Y_j$$

$$Y_j = \{y_{ij} \in \{0, 1\} \mid \sum_{i=1}^m d_{ij}x_{ij} \leq d_j\}$$

Las restricciones originales incluidas en X son consideradas como «fáciles», mientras que aquellas en Y son tratadas como «difíciles». La localización W_1 puede ser usada en la dual lagrangiana modificada (4.15) para calcular el valor de $w_{MD}^L(W_1)$. Las restricciones $y \in Y$ son manejadas explícitamente, mientras las restricciones $Py \leq p$ pueden ser dualizadas en la estimación $\xi^L(\pi, u, v)$. Sea $u = \{u_j, \quad j = 1, \dots, n\}$ y $v = \{v_i, \quad i = 1, \dots, m\}$ los multiplicadores lagrangianos.

Tenemos $w_{MD}^L(W_1) = \min_{u, v \geq 0, \pi} \varphi(\pi, u, v)$ con

$$\varphi(\pi, u, v) = \eta(\pi, u) + \xi^L(\pi, u, v) \quad (4.22)$$

$$\eta(\pi, u) = \sum_i \max_{x \in X_i} \left\{ \sum_j [(1 - c_{ij}) - u_j d_{ij}] x_{ij} \right\} \quad (4.23)$$

$$\xi^L(\pi, u, v) = \sum_j \max_{y \in Y_j} \{(\pi c_{ij} + u_j d_{ij})\} + \sum_i v_i b_i \quad (4.24)$$

CAPÍTULO 5

SOLUCIONANDO EL DUAL LAGRANGIANO DEL *MMA*P

En el capítulo anterior explicamos como construir la mejor cota lagrangiana modificada para el *MMA*P, ahora desarrollamos el método de solución para obtenerla, haciendo enfoque en los aspectos algorítmicos. Ésta sección es importante ya que presenta otra de las aportaciones de este trabajo. Presentamos un estudio numérico para comparar la calidad de las cotas resultados, mediante un análisis de los resultados.

5.1 USO DEL SUBGRADIENTE PARA DEL DUAL LAGRANGIANO DEL *MMA*P

El método propuesto para la solución del dual lagrangiano del *MMA*P, es un método heurístico lagrangiano (*MHL*) que consiste de dos fases: primero en el método del subgradiente, posteriormente un heurístico voraz (que nos ayuda a encontrar soluciones factibles). Existen varias versiones del *MHL*, entre las que se encuentran aplicar el subgradiente, para después aplicar el heurístico voraz solamente en la última iteración logrando factibilizar la solución obtenida por el subgradiente, esta versión es la más sencilla y la denotamos como *MHL1*. Otra versión del *MHL*, es más compleja, la cuál consiste en ir «mezclando» ambos métodos de forma que en

cada iteración obtengamos una cota superior, una inferior y una solución factible, a esta versión la nombramos *MHL2*.

5.1.1 MÉTODO DEL SUBGRADIENTE

En el capítulo 4 titulado «Construcción de nuevas cotas lagrangianas», planteando el problema dual lagrangiano del *MMA*P, que calcula la nueva cota modificada lagrangiana.

Un método popular para resolver el problema dual es el subgradiente. A continuación presentamos los pasos básicos del método que consiste en la «fusión» del subgradiente y del heurístico voraz, es decir, *MHL2*.

Sea π^k , u^k , v^k , los valores de los multiplicadores correspondientes a la iteración k , $\varphi^k = \varphi(\pi^k, u^k, v^k)$ y x_{ij}^k , y_{ij}^k las soluciones correspondientes a los subproblemas:

$$x_{ij}^k = \arg \max_{x \in X_i} \left\{ \sum_i [(1 - \pi^k)c_{ij} - u_j^k d_{ij}] x_{ij} \right\} \quad (5.1)$$

$$y_{ij}^k = \arg \max_{y \in Y_j} \left\{ \sum_j (\pi^k c_{ij} - u_j^k - a_{ij}^k) y_{ij} \right\} \quad (5.2)$$

El subgradiente está directamente identificado después de resolver los subproblemas como:

$$\begin{aligned} \alpha_i^k &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \right]^k = b_i - \sum_j a_{ij} y_{ij}^k \\ \beta_j^k &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right]^k = - \sum_i d_{ij} x_{ij}^k + \sum_i d_{ij} y_{ij}^k \\ \gamma^k &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \pi} \right]^k = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}^k + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}^k \end{aligned}$$

Denotamos por s^k un vector compuesto por $\{\gamma^k, \beta^k, \alpha^k\}$, sea $\lambda^k = \{\pi^k, v^k, u^k\}$ y $\bar{\lambda}^{k+1} = \lambda^k - \epsilon^k (\varphi^k - \varphi_{lb}) \frac{s^k}{\|s^k\|^2}$ donde $\epsilon^k \in (0, 2]$, φ_{lb} es una cota inferior en $\varphi^* =$

$w_{MD}^L(W_1)$. Si $z_{ip} \leq w_{MD}^L(W_1)$, podemos fijar φ_{ib} igual al valor de la función objetivo del *MMAP* asociado a una solución factible.

Observación 5.1 *La solución factible ϕ_{ib} es construida por el «método heurístico voraz» presentado en la sección 5.1.2.*

Los multiplicadores para la siguiente iteración están definidos como la proyección de \bar{v}^{k+1} , \bar{u}^{k+1} , en el espacio no negativo pues $u, v \geq 0$, mientras π no tiene restricciones de signo, entonces $\pi^{k+1} = \bar{\pi}^{k+1}$, $v^{k+1} = \max\{0, \bar{v}^{k+1}\}$, $u^{k+1} = \max\{0, \bar{u}^{k+1}\}$ donde \max es tomado por componentes.

El método del subgradiente no es monótono, esto es que no necesariamente $\varphi^k \geq \varphi^{k+1}$. En la práctica, el parámetro ϵ_k varía en $(0, 2]$, comenzando con $\epsilon_k = 2$. Si después de K iteraciones consecutivas con un ϵ_k fijo y la función φ no ha sido mejorada lo «suficientemente», entonces usamos un valor más pequeño ϵ_k usualmente, se toma como $\frac{\epsilon_k}{2}$.

5.1.2 MÉTODO HEURÍSTICO VORAZ

Debido a que algunas de las soluciones del dual lagrangiano durante y después del método del subgradiente no son factibles, realizamos un método heurístico voraz que consiste en transformar nuestra solución infactible en la mejor solución factible que se pueda obtener, a partir de una solución existente. Daremos una breve descripción de este procedimiento para después definirlo detalladamente.

La idea es muy sencilla. Primero cambiamos algunos de los componentes de una solución de 1 a 0, es decir, cambiar la asignación de un x_{ij} dado de 1 a 0 esto con la finalidad de obtener una solución factible.

Existen varias elecciones para determinar el elemento ij que cambiará su asignación, en nuestro caso está determinado por el valor que afecte menos a la función objetivo, es decir el elemento ij que tenga menor c_{ij} (debido a que tenemos un

problema de maximización), con esto logramos encontrar una solución factible (ésta parte del algoritmo es ignorada en caso de que la solución sea factible).

Una vez que ya contamos con una solución factible, conseguimos la mejor solución factible, cambiando algunos de los elemento ij que no tengan realizada la asignación, es decir, cambiamos algún $x_{ij} = 0$ por $x_{ij} = 1$, siempre y cuando la asignación realizada no viole ninguna restricción. Escogiendo los elementos a cambiar de valor de tal forma que obtenemos el mejor incremento posible (los x_{ij} que tengan el costo que más nos beneficie).

Sea x^k la solución actual binaria del *MMAP*, no necesariamente factible. Sea Ω_0^k el conjunto de todos los pares (i, j) tales que $x_{ij}^k = 0$ y Ω_1^k el conjunto de todos los pares (i, j) tales que $x_{ij}^k = 1$. Ahora decimos que:

$$\begin{aligned}\delta_i^k &= b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij}^k \\ \sigma_j^k &= d_j - \sum_{i=1}^m d_{ij}x_{ij}^k\end{aligned}$$

Si el se cumple el criterio de factibilidad

$$\min_{i,j} \{\delta_i^k, \sigma_j^k\} \geq 0$$

entonces x^k es una solución factible del *MMAP*.

MÉTODO HEURÍSTICO VORAZ: «GREEDY»

1. Sea x^0 la solución lagrangiana (x , ó y). Sean t_{ij} , r_{ij} indicadores redondeo, $t_{ij} = c_{ij}$, $r_{ij} = c_{ij}$.

Observación 5.2 Usualmente la elección de costos está basada en $\min_{(i,j) \in \Omega_1^t} t_{ij}$ para $t_{ij} = c_{ij}$. En lugar de esto, usamos otro indicador, fijamos $t_{ij} = \frac{c_{ij}}{\max(a_{ij}, d_{ij})}$. De esta manera realmente podemos tener en cuenta el impacto que causa la componente (i, j) en la violación de las restricciones (es decir los valores de a_{ij} , d_{ij} que obtienen factibilidad más pronto). Del mismo modo, elegimos t_{ij}

de tal forma que $t_{ij} = \frac{c_{ij}}{\max\{\frac{a_{ij}}{b_i}, \frac{d_{ij}}{d_i}\}}$, dado que los valores relativos $\frac{a_{ij}}{b_i}$ y $\frac{d_{ij}}{d_i}$ también dan una medida de la factibilidad. Similarmente definimos r_{ij} , tal que $r_{ij} = \frac{c_{ij}}{\min\{a_{ij}, b_i\}}$ los valores de a_{ij} , d_{ij} que disminuyan la factibilidad lo más lento posible.

La definición de t_{ij} y r_{ij} , la realizamos fuera del algoritmo principal, para realizar un mejor manejo de estos.

2. Criterio de factibilidad: Dado x^k , calculamos δ_i^k, σ_i^k . Si $\min_{i,j}\{\delta_i^k, \sigma_i^k\} \geq 0$ ir a paso 4, ya que x^k es una solución factible del MMAP, de no ser así ir a 3.
3. Factibilizando la solución: Calcular $\min_{(i,j) \in \Omega_1^k} t_{ij}$, sea $(i,j)^k$ el valor mínimo alcanzado en la iteración k . Sea $x_{ij}^{k+1} = 0$ para $(i,j) = (i,j)^k$ y $x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^k$ para $(i,j) \neq (i,j)^k$. Sea $\Omega_1^{k+1} = \Omega_1^k - (i,j)^k$ y $\Omega_0^{k+1} = \Omega_0^k \cup (i,j)^k$, $\delta_i^{k+1} = \delta_i^k + a_{ij}^k$, $\sigma_j^{k+1} = \sigma_j^k + d_{ij}^k$. Ir a paso 2 con: $x^{k+1}, \Omega_1^{k+1}, \Omega_0^{k+1}, \delta_i^{k+1}, \sigma_j^{k+1}$.
4. En este paso tenemos x^k con $\min_{i,j}\{\delta_i^k, \sigma_i^k\} \geq 0$. Sea $S_0^k \subseteq \Omega_0^k$ un conjunto tal que $(i,j) \in \Omega_0^k$, además, cumple que $a_{ij} \leq \delta_i^k$ y $d_{ij} \leq \sigma_j^k$. Si $S_0^k = \emptyset$ entonces detener el algoritmo (encontramos la solución factible). Si no (es decir $S_0^k \neq \emptyset$) ir al paso 5.
5. Mejor solución factible: Calcular $\max_{(i,j) \in S_0^k} r_{ij}$, sea $(i,j)^S$ el valor máximo alcanzado en la iteración k . Sea $\delta_i^{k+1} = \delta_i^k - a_{ij}^k$, $\sigma_j^{k+1} = \sigma_j^k - d_{ij}^k$. Sea $x_{ij}^{k+1} = 1$ para $(i,j) = (i,j)^S$ y $x_{ij}^{k+1} = 0$ para $(i,j) \neq (i,j)^S$. Ir a paso 4.

MÉTODO DEL SUBGRADIENTE VERSIÓN MHL2

El procedimiento que proponemos funciona de la siguiente manera. El método heurístico lagrangiano versión 2 MHL2, maneja el subgradiente interactuando en cada iteración con el método heurístico voraz.

- Resuelve los subproblemas (5.1,5.2).
- Calcula el subgradiente (5.3).

- Realiza el método heurístico voraz.
- Actualiza los multiplicadores.
- Actualiza el valor de ϵ , en caso de ser necesario.
- Verifica si algún criterio de parada se cumple, si no regresa al primer paso.
 - Criterio de parada por: $\epsilon \leq 0.005$,
 - máximo número de iteraciones,
 - tiempo límite,
 - proximidad: mejor (solución factible-cota actual)/cota actual menor o igual al error (0.0001)
- Por último vuelve a aplicar el método heurístico voraz.

MÉTODO DEL SUBGRADIENTE VERSIÓN *MHL1*

El método heurístico lagrangiano versión 1 *MHL1*, resuelve el problema dual lagrangiano, sólo con el subgradiente y al terminar empleamos el método heurístico voraz para factibilizar la solución lagrangiana.

- Resuelve los subproblemas (5.1,5.2).
- Calcula el subgradiente (5.3).
- Actualiza los multiplicadores.
- Actualiza el valor de ϵ , en caso de ser necesario.
- Verifica si algún criterio de parada se cumple, si no regresa al primer paso.
 - Criterio de parada por: $\epsilon \leq 0.005$,
 - máximo número de iteraciones,
 - tiempo límite,

- proximidad: mejor (solución factible-cota actual)/cota actual menor o igual al error (0.0001)
- Aplicar el método heurístico voraz.

CAPÍTULO 6

EXPERIMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Para poder apreciar adecuadamente los resultados obtenidos desarrollamos casos prueba, cuyo objetivo principal es comparar la calidad relativa de las cotas y la proximidad entre cada una de ellas.

6.1 IMPLEMENTACIÓN

Iniciamos con una breve explicación del optimizador e interfaz que usamos para resolver el método propuesto en la última sección del capítulo anterior, posteriormente presentaremos los resultados y un análisis de los mismos.

6.1.1 GENERALIDADES DE AMPL

AMPL (por sus siglas en inglés de «A Mathematical Programming Language») es un lenguaje de programación de alto nivel, capaz de expresar en notación algebraica problemas de optimización tales como los problemas de programación lineal; usualmente se emplea para describir y resolver problemas complejos, especialmente de problemas de optimización a gran escala.

Este lenguaje resuelve problemas: lineales, no lineales, y enteros-mixtos sin limitación de tamaño. Además de ser lo suficientemente poderoso para solucionar problemas con un alto grado de precisión, también presenta un alto rendimiento.

Otra de las cualidades con las que cuenta AMPL es la representación de problemas de flujo en redes, y la diferenciación automática de funciones no lineales.

En nuestro caso usamos el **ILOG CPLEX**, el cuál frecuentemente sólo es nombrado **CPLEX**.

Con respecto a las versiones del optimizador y del lenguaje de programación usados para resolver todos los subproblemas de optimización asociados con el método propuesto se empleó, el sistema CPLEX 9.0, Sun Fire V440, de 4 procesadores UltraSparc III a 1062 GHz con 1MB de memoria caché cada uno, 8 Gb de RAM (16*512 MB).

6.2 CASOS PRUEBA

Para poder realizar el estudio numérico, necesitamos comparar la relación entre la calidad de las cotas y la factibilidad de la solución con respecto a la solución óptima exacta, para todos los distintos tipos de cotas. Por lo que creamos dos tipos de casos prueba del *MMAP*, dependiendo de la cantidad de agentes m y tareas n :

- instancias pequeñas
 - máquinas m : 5, 8, 10
 - agentes n : 50
- instancias medianas
 - máquinas m : 5, 10, 20
 - agentes n : 100

Las instancias generadas están basadas según las creadas por Martello y Toth [52], siguiendo las siguientes especificaciones:

- $c_{ij} \in U [10, 50]$

- $a_{ij} \in U [5, 25]$
- $d_{ij} \in U [3, 20]$

donde U es una distribución uniforme dentro del intervalo de enteros mencionado. Además,

- $b_i = \alpha (\sum_i a_{ij} - 1)$
- $d_j = \alpha (\sum_j d_{ij} - 1)$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$, lo que hace que generemos soluciones factibles y así poder compararlas. Por lo que a su vez han sido divididos en 3 clases con respecto a los valores de α :

- $\alpha = 0.8$
- $\alpha = 0.9$
- $\alpha = 1.0$

Calculamos varios tipos de cotas (dependiendo si utilizamos el método *MHL1* o *MHL2*, y el dual lagrangiano a resolver), presentamos los datos obtenidos para solucionar el dual lagrangiano(φ) del *MMAP*, calculado por variaciones del método del subgradiente. Todos los resultados fueron obtenidos usando un $K = 5$ y si $\frac{\varphi^k - \varphi^{k+1}}{\varphi_{min}} \leq \delta$ donde $\delta = 0.005$ para 5 iteraciones consecutivas fijamos ϵ_k modificándolo a $\frac{\epsilon_k}{2}$ y φ_{min} representa el mejor valor objetivo actual.

6.3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se presentan los resultados de la aplicación de las cotas lagrangianas modificadas por el *MMAP*. Para cada una de las instancias calculamos:

- z_{ip} solución óptima del problema original entero

- z_{lp} solución de la relajación lineal
- z_{lag} cota clásica lagrangiana w_D
- z_{md} cota modificada lagrangiana $w_{MD}^L(W_1)$ con $\pi = 0$
- $z_{md\pi}$ cota modificada lagrangiana $w_{MD}^L(W_1)$

por lo que para cada caso prueba contamos con 4 cotas superiores de z_{ip} que es el valor óptimo del *MMAP* original.

El valor de las cotas, fue calculado para medir la mejoría que tiene una cota sobre otra, por lo que presentamos los indicadores que comparan dos cotas. El valor dado a rel_0 indica la mejora de la relajación de la restricción $cx = cy$ es decir la mejora de la cota lagrangiana modificada con la dualización de la copia de restricciones ($x = y$) $z_{md\pi}$ sobre la cota modificada lagrangiana sin la dualización z_{md}

$$rel_0 = \frac{z_{md\pi} - z_{ip}}{z_{md} - z_{ip}}$$

la mejora de la cota modificada con $\pi = 0$ sobre la cota clásica lagrangiana está dada por rel_1

$$rel_1 = \frac{z_{md} - z_{ip}}{z_{lag} - z_{ip}}$$

la mejora de la cota modificada con $\pi = 0$ sobre la cota lineal está dada por rel_2

$$rel_2 = \frac{z_{md} - z_{ip}}{z_{lp} - z_{ip}}$$

y por último rel_3 compara la calidad de la cota clásica lagrangiana sobre la cota lineal

$$rel_3 = \frac{z_{lag} - z_{ip}}{z_{lp} - z_{ip}}$$

Mientras que los valores que miden la proximidad entre la solución entera z_{ip} y cada una de las cotas, está dado de la siguiente manera

- proximidad de $z_{md\pi}$ a z_{ip}

$$gap_0 = \frac{z_{md\pi} - z_{ip}}{z_{ip}}$$

- proximidad de z_{md} a z_{ip}

$$gap_1 = \frac{z_{md} - z_{ip}}{z_{ip}}$$

- proximidad de z_{lag} a z_{ip}

$$gap_2 = \frac{z_{lag} - z_{ip}}{z_{ip}}$$

- proximidad de z_{lp} a z_{ip}

$$gap_3 = \frac{z_{lp} - z_{ip}}{z_{ip}}$$

Debido a que las soluciones lagrangianas usualmente son usadas como punto inicio de algunos método heurísticos (para más detalles ver tabla 2.1, que se ubica en el capítulo 2, [51, 33, 38]), calculamos algunas características de la solución, tales como, número de restricciones violadas por la solución, grado de factibilidad y sub-optimalidad de las soluciones.

- El número de restricciones que son violadas, es representado por

$$nv$$

- La desviación de la función objetivo obtenida por la solución lagrangiana objetivo óptimo con respecto a la solución entera óptima original, es calculada por

$$gap_4 = \frac{z_{ip} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \sigma_{ij}}{z_{ip}} * 100 \% \quad (6.1)$$

donde σ_{ij} representa la solución lagrangiana.

- La violación relativa asociada a la solución lagrangiana está dada por la siguiente ecuación.

$$vel_{rel}(\sigma) = \text{máx} \left\{ 0, \max_{ij} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m d_{ij} \sigma_{ij}}{d_j}, \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} \sigma_{ij}}{b_i} \right\} \right\} \quad (6.2)$$

- Y por último, la proximidad entre el valor de la función objetivo obtenida por la solución lagrangiana, y su cota correspondiente.

$$gap_5 = \frac{z_{bound} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \sigma_{ij}}{z_{bound}} * 100 \% \quad (6.3)$$

donde σ_{ij} representa la solución lagrangiana.

Observación 6.1 *Realizamos varios conjuntos de casos prueba, pero sólo presentamos los resultados para una sola, debido a que los resultados cumplen características similares, por lo que no vimos necesario mostrarlos completamente. Si se desea ver más resultados acerca de la calidad relativa entre cotas y la proximidad de estas a la solución óptima entera ver [44, 49, 47].*

6.3.1 MÉTODO DEL SUBGRADIENTE

En esta sección presentamos el análisis de los resultados usando solamente el subgradiente para resolver el problema dual lagrangiano. Para poder comprender mejor los resultados de la tabla 6.1 y tabla 6.2 vamos a describir lo que significa cada columna de las tablas en la primera columna titulada m se presenta la cantidad de agentes disponibles para desempeñar n tareas dato almacenado en la columna 2, posteriormente se muestra el valor de α . Las siguientes 5 columnas representan los valores de rel_0 (mejoría de la cota modificada con dualización de restricciones, con la cota modificada que no cuenta con dualizaciones), rel_1 (mejoría de la cota modificada sin dualización con respecto a la cota clásica lagrangiana), rel_2 (mejoría entre la cota modificada sin dualización y la cota lineal) y por último rel_3 (cota clásica sobre cota lineal), los cuales representan la comparación entre dos cotas (ver el capítulo de experimentación computacional, para la descripción de cada valor).

Para la instancia del problema con 20 máquinas m y 100 tareas n , CPLEX no encontró la solución óptima, debido a falta de memoria, por lo que esta instancia fue abortada y la mejor solución entera hasta el momento fue la utilizada para calcular los indicadores (contando con un gap absoluto de $absmipgap = 27.0845$, mientras que el gap relativo es de $relmipgap = 0.000494234$).

Como puede verse en las tabla 6.1 y tabla 6.2, en todos los casos el índice rel_0 es menor al 100%, es decir, la relajación de la restricción $cx = cy$ tiene un efecto beneficioso (en es aspecto, que da una mejor cota que la modificada sin dualización

de restricciones, es decir $z_{md_\pi} \leq z_{md}$) en el cálculo de la cota modificada lagrangiana, empleando solamente el método del subgradiente.

Por lo que podemos decir que la introducción de la copia de las restricciones al problema dual lagrangiano, resulta en una mejoría para la cota lagrangiana, esto debido al cálculo del mejor término de penalización, obtenido por la definición que hicimos del problema auxiliar $\theta(u)$.

En todos los casos se puede observar que rel_0 es significativamente menor que rel_1 , es decir que el desempeño logrado por la cota lagrangiana modificada z_{md_π} con la relajación de $cx = cy$ es mejor que el obtenido por la cota modificada z_{md} sobre la cota clásica lagrangiana z_{lag} .

Acerca del índice rel_1 que representa la mejoría de la cota modificada lagrangiana sin dualización de la copia de restricciones con respecto a la cota clásica lagrangiana, cabe mencionar que es menor al 100 % en todas las instancias con $\alpha = 0.8$ y $\alpha = 0.9$, por lo que podemos decir que la cota modificada lagrangiana z_{md_π} domina la clásica lagrangiana z_{lag} . Sin embargo, cuando la proximidad entre la cota lineal y la solución óptima entera crece (los valores de gap_3 son más pequeños), la cercanía entre z_{md_π} y z_{lag} disminuye, esto caso se cumple en algunas instancias con 20 máquinas, 100 tareas y $\alpha = \{0.8, 0.9\}$.

Con respecto a la proximidad de cada uno de los valores de las cotas y la solución óptima entera, podemos decir que entre más pequeño sea el valor del gap es mejor y debido a que el gap_0 es significativamente menor que el $\min\{gap_1, gap_2, gap_3\}$ para todos los casos (a excepción del caso con 20 máquinas, 100 trabajos y con $\alpha = 1.0$), lo que significa que la cota modificada con π , z_{md_π} es superior (mejor calidad) a todas las demás cotas. En la mayoría de los casos, el índice de proximidad $gap_0 < 0.5$ y en todos los problemas con $\alpha = 0.8$, se encuentra la solución óptima es decir, $gap_0 = 0$. Otra consecuencia que surge al tener $gap_0 = 0$, es que no existe otra cota mejor que z_{md_π} , porque la cota encontrada es igual a la solución óptima del problema original.

Otra consecuencia de las tablas 6.1 y 6.2, con respecto a los valores de proximidad gap_1, gap_2, gap_3 es, que para la mayoría de los problemas generados con $\alpha = 1.0$ vemos que $gap_3 \leq \min(gap_1, gap_2)$, por lo que la solución obtenida por relajación lineal z_{lp} es mejor que la cota clásica lagrangiana z_{lag} y la modificada z_{md} .

En [48], Litvinchev presenta un método de generación de restricciones para obtener el valor de z_{md} y z_{lag} y se cumple que para todos los problemas (independiente del α), se cumple que $gap_1 < gap_2 < gap_3$, pero a diferencia del método que proponemos, en los problemas con $\alpha = 1.0$ los indicadores son muy pobres, es decir que existe muy poco margen entre los valores de cada una de las cota.

m	n	α	rel_0	rel_1	rel_2	rel_3	gap_0	gap_1	gap_2	gap_3
5	50	0.8	0.00	59.93	60.37	100.73	0.00	6.65	11.09	11.01
5	50	0.9	0.00	78.39	81.79	104.33	0.00	5.58	7.50	7.18
5	50	1.0	15.12	66.47	72.78	109.50	0.36	2.40	3.61	3.30
8	50	0.8	0.00	76.06	72.96	95.92	0.00	4.38	5.76	6.00
8	50	0.9	5.89	78.72	88.61	112.56	0.12	1.96	2.49	2.21
8	50	1.0	9.67	98.02	104.06	106.16	0.32	3.35	3.42	3.22
10	50	0.8	0.00	80.88	75.19	92.96	0.00	3.30	4.08	4.39
10	50	0.9	20.09	85.89	93.56	108.93	0.28	1.39	1.62	1.49
10	50	1.0	24.83	109.24	117.48	107.55	0.51	2.04	1.86	1.73

Tabla 6.1: Calidad relativa entre cotas para instancias pequeñas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Dx \leq d$.

En la tabla 6.3 y tabla 6.4, se muestran los resultados con respecto a la proximidad entre la solución obtenida por las cotas y la solución entera óptima. La cantidad de agentes con la que se generó el problema está en la primera columna titulada m , las n tareas que tienen que ser desempeñadas por dichos agentes se encuentra en la columna 2, además de que el valor de α , se encuentra en la columna 3. En las siguientes tres columnas posteriores se encuentran los índices de factibilidad para la cota clásica lagrangiana x_{lag} , dichas tres columnas presentan los valores de las violaciones relativas, número de restricciones violadas y la proximidad de la cota lagrangiana a la

m	n	α	rel_0	rel_1	rel_2	rel_3	gap_0	gap_1	gap_2	gap_3
5	100	0.8	0.00	66.68	67.04	100.54	0.00	7.44	11.16	11.10
5	100	0.9	0.00	73.43	77.34	105.32	0.00	5.02	6.84	6.49
5	100	1.0	0.93	70.79	75.80	107.07	0.03	3.37	4.76	4.45
10	100	0.8	0.00	77.61	78.05	100.57	0.00	3.42	4.41	4.38
10	100	0.9	5.75	76.97	96.52	125.40	0.07	1.18	1.53	1.22
10	100	1.0	7.26	107.98	118.92	110.14	0.17	2.37	2.19	1.99
20	100	0.8	0.00	91.22	82.13	90.03	0.00	1.50	1.65	1.83
20	100	0.9	8.40	107.71	125.48	116.50	0.08	0.98	0.91	0.78
20	100	1.0	77.41	139.73	165.02	118.10	0.79	1.02	0.73	0.62

Tabla 6.2: Calidad relativa entre cotas para instancias medianas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Dx \leq d$.

solución óptima respectivamente, las seis columnas posteriores muestran los mismos índices de calidad para y_{md} y y_{md_π} , respectivamente.

Ahora haremos un breve análisis acerca de las características que son presentadas en dichas tablas, las cuales están relacionadas con la factibilidad de las soluciones. Como puede observarse en la tabla 6.3 y tabla 6.4, el número de restricciones violadas (nv), para la solución obtenida por la cota z_{md_π} como por z_{md} en instancias generadas con $\alpha = 0.8$ es igual a 0. Es decir que la solución lagrangiana es completamente factible mientras que las obtenidas por z_{lag} en este mismo tipo de problemas, cuenta con un gran número de restricciones violadas. Con respecto a la medida de calidad que representa la violación relativa de restricciones v_{rel} , podemos comentar que aunque es pequeño (el valor más alto es 21 % de restricciones violadas para el problema con 20 máquinas, 100 tareas y un $\alpha = 1.0$, caso que truncamos por falta de memoria) para las soluciones obtenidas por z_{lag} , es menor para z_{md} y z_{md_π} . Por otra parte con respecto a la desviación entre solución obtenida por el subgradiente y la función objetivo óptima $|gap_4|$ observamos que para todas las instancias se cumple que gap_4 es mucho menor para las dos cotas modificadas lagrangianas que para la clásica lagrangiana.

			x_{lag}			y_{md}			$y_{md\pi}$		
m	n	α	v_{rel}	nv	gap_4	v_{rel}	nv	v_{rel}	nv	v_{rel}	gap_4
5	100	0.8	0.03	31.00	-6.56	0.00	0.00	8.48	0.00	0.00	0.00
5	100	0.9	0.18	28.00	-7.52	0.00	0.00	14.81	0.00	0.00	0.00
5	100	1.0	0.30	16.00	-2.68	0.27	1.00	10.47	0.13	3.00	-0.36
8	50	0.08	0.01	43.00	-5.48	0.00	0.00	7.30	0.00	0.00	0.00
8	50	0.9	0.14	20.00	-2.37	0.00	0.00	11.07	0.05	3.00	-0.12
8	50	1.0	0.28	27.00	-3.89	0.00	0.00	17.34	0.11	4.00	-0.32
10	50	0.8	0.01	41.00	-3.95	0.00	0.00	5.58	0.00	0.00	0.00
10	50	0.9	0.13	20.00	-1.31	0.00	0.00	12.10	0.10	5.00	-0.28
10	50	1.0	0.27	23.00	-1.54	0.03	5.00	16.32	0.05	5.00	-0.04

Tabla 6.3: Factibilidad de las soluciones para instancias pequeñas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Dx \leq d$.

Para concluir el análisis de esta sección, comparamos los tres tipos de cotas que calculamos es preferible en términos de factibilidad la solución obtenida por la z_{md} sobre $z_{md\pi}$, pero en términos de optimalidad es mejor $z_{md\pi}$, tales diferencias subyacen de la introducción de la restricción $cx = cy$ mediante la relajación en la función objetivo.

Observación 6.2 *El análisis es similar para las instancias donde se consideran como restricciones difíciles a $Dx \leq d$ como a $Ax \leq b$. Ver resultados en las tablas 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8.*

6.3.2 MÉTODO DEL SUBGRADIENTE Y HEURÍSTICO VORAZ EN ÚLTIMA ITERACIÓN *MHL2*.

Ahora, hacemos un análisis de los datos contenidos en las tablas 6.9 y 6.10. El procedimiento utilizado para resolver el problema dual lagrangiano, es resuelto por el subgradiente, posteriormente de emplea el heurístico voraz para factibilizar y

			x_{lag}			y_{md}			$y_{md\pi}$		
m	n	α	v_{rel}	nv	gap_4	v_{rel}	nv	v_{rel}	nv	v_{rel}	gap_4
5	100	0.8	0.03	70.00	-8.03	0.00	0.00	11.09	0.00	0.00	0.00
5	100	0.9	0.17	58.00	-6.75	0.00	0.00	12.01	0.00	0.00	0.00
5	100	1.0	0.30	46.00	-4.81	0.00	0.00	13.91	0.07	1.00	-0.03
10	100	0.8	0.01	92.00	-4.34	0.00	0.00	5.49	0.00	0.00	0.00
10	100	0.9	0.13	41.00	-1.25	0.00	0.00	12.37	0.04	3.00	-0.07
10	100	1.0	0.28	47.00	-2.30	0.01	3.00	15.72	0.11	6.00	-0.17
20	100	0.8	0.01	80.00	-1.61	0.00	0.00	3.31	0.00	0.00	0.00
20	100	0.9	0.12	49.00	-0.74	0.04	11.00	12.55	0.06	11.00	-0.08
20	100	1.0	0.21	46.00	-0.83	0.01	7.00	22.41	0.12	17.00	-0.79

Tabla 6.4: Factibilidad de las soluciones para instancias medianas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Dx \leq d$.

encontrar la mejor solución factible, por lo que en esta sección sólo discutiremos los índices 6.1 y 6.3 que representan la proximidad entre el calculo de la función objetivo con la solución lagrangiana obtenida por el método y la solución entera o la cota de esta solución.

Los resultados de las tablas tablas 6.9, 6.10, 6.11 y 6.12, tienen en la primera columna m representa la cantidad de agentes disponibles para desempeñar n tareas, dato contenido en la columna 2, posteriormente se muestra el valor de α . Posteriormente se encuentran los valores de 6.1 ó 6.3, para x_{lag} , después para y_{md} y por último para $y_{md\pi}$ la descripción detallada de estos valores se encuentra en el capítulo experimentación computacional. No mostramos los índices de factibilidad debido a que todas las soluciones encontradas son factibles, ya que después de haber aplicado el subgradiente, factibilizamos las soluciones por medio del heurístico voraz.

La primera característica que debemos notar es que las soluciones son 100% factibles (debido a que empleamos en la última iteración el heurístico voraz que factibiliza soluciones), por descripción del método *MHL2*.

m	n	α	rel_0	rel_1	rel_2	rel_3	gap_0	gap_1	gap_2	gap_3
5	50	0.8	0.00	57.83	60.00	100.63	0.00	6.63	10.10	11.00
5	50	0.9	0.00	77.69	80.00	103.43	0.00	4.98	6.20	6.40
5	50	1.0	12.13	65.46	71.08	105.79	0.30	1.98	3.50	3.65
8	50	0.8	0.00	75.00	71.96	99.89	0.00	4.38	5.00	5.77
8	50	0.9	7.98	79.46	88.56	108.56	0.11	0.89	1.49	2.21
8	50	1.0	9.67	98.02	104.06	106.16	0.32	3.35	3.42	3.22
10	50	0.8	0.00	80.88	75.19	92.57	0.00	3.20	3.18	4.01
10	50	0.9	20.78	85.89	93.56	108.93	0.28	1.39	1.62	1.49
10	50	1.0	24.83	109.24	120.48	107.55	0.51	2.04	1.86	1.73

Tabla 6.5: Calidad relativa entre cotas para instancias pequeñas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Ax \leq b$.

El índice gap_4 , que mide la cercanía entre el valor de la función objetivo generada por la solución lagrangiana x_{lag} podemos decir que las instancias donde $\alpha = 0.8, 0.9$, el valor de proximidad se encuentra al rededor de un 15% mientras que para las instancias con $\alpha = 1.0$ es de a lo más un 20%, continuando con el análisis de los valores de gap_4 generados por la solución y_{md} , observamos que los valores se encuentran alrededor de un 7%, valores menores que los obtenidos por x_{lag} , por lo que podemos comentar que esta solución es más próxima a la óptima, por último el valor de gap_4 para las instancias $y_{md\pi}$ se encuentran en un 3%, por lo que ésta solución es la mejor solución de todas.

Con respecto a la proximidad del valor de la función objetivo calculada por la solución lagrangiana y la cota lagrangiana (gap_5), analizamos que los datos encontrados en la tabla 6.10, siguen las mismas características que el índice gap_4 .

Observación 6.3 *El análisis es similar para las instancias donde se relaja $Dx \leq d$ como $Ax \leq b$. Ver resultados en la tabla 6.11 y tabla 6.12.*

m	n	α	rel_0	rel_1	rel_2	rel_3	gap_0	gap_1	gap_2	gap_3
5	100	0.8	0.00	68.66	64.89	100.45	0.00	7.42	10.96	11.10
5	100	0.9	0.00	72.43	75.34	104.21	0.00	4.99	6.44	6.49
5	100	1.0	0.93	70.98	74.70	106.99	0.02	3.97	4.66	4.50
10	100	0.8	0.00	76.51	77.98	99.97	0.00	3.22	4.21	4.49
10	100	0.9	5.75	75.94	97.50	120.43	0.06	0.99	1.42	1.20
10	100	1.0	7.60	106.23	109.27	100.34	0.15	2.40	2.09	1.77
20	100	0.8	0.00	89.02	87.13	89.45	0.00	0.90	1.56	1.37
20	100	0.9	7.99	106.34	119.00	115.49	0.07	0.89	0.90	0.88
20	100	1.0	77.41	129.89	150.00	110.79	0.69	0.99	0.57	0.59

Tabla 6.6: Calidad relativa entre cotas para instancias medianas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Ax \leq b$.

6.3.3 MÉTODO DEL SUBGRADIENTE Y HEURÍSTICO VORAZ

ALTERNANDO CADA ITERACIÓN

Este método es el que resuelve el subgradiente pero después de resolver los subproblemas pasamos las soluciones obtenidas por el heurístico voraz para factibilizar las soluciones y tratar de converger más rápido, además de agregar un criterio de parada, el de cercanía entre la mejor solución factible y la cota obtenida hasta el momento. Hay que recalcar que este criterio es el que siempre es cumplido, por lo que siempre se lleva a una cercanía deseada entre estos dos valores.

Los resultados a presentar contenidos en las tablas 6.13,6.14,6.15 y 6.16; poseen las siguientes columnas: en la primera titulada m representa la cantidad de agentes disponibles para desempeñar n tareas, dato contenido en la columna 2, posteriormente se muestra el valor de α . Posteriormente se encuentran los valores de 6.1 y 6.3, para x_{lag} , después para y_{md} y por último para $y_{md\pi}$. No mostramos los índices de factibilidad debido a que todas las soluciones encontradas son factibles.

			x_{lag}			y_{md}			y_{md_π}		
m	n	α	v_{rel}	nv	gap_4	v_{rel}	nv	v_{rel}	nv	v_{rel}	gap_4
5	100	0.8	0.03	30.00	-6.45	0.00	0.00	8.45	0.00	0.00	0.00
5	100	0.9	0.16	25.00	-7.49	0.00	0.00	13.99	0.00	0.00	0.00
5	100	1.0	0.30	15.00	-2.45	0.25	1.00	10.56	0.34	2.00	-0.23
8	50	0.07	0.06	42.00	-5.23	0.00	0.00	6.28	0.00	0.00	0.00
8	50	0.9	0.10	19.00	-2.30	0.00	0.00	10.99	0.04	2.00	-0.09
8	50	1.0	0.27	25.00	-3.08	0.00	0.00	15.04	0.09	3.00	-0.30
10	50	0.8	0.01	40.00	-3.86	0.00	0.00	5.46	0.00	0.00	0.00
10	50	0.9	0.12	21.00	-1.30	0.00	0.00	11.99	0.09	4.00	-0.26
10	50	1.0	0.25	22.00	-1.23	0.02	4.00	17.43	0.02	6.00	-0.03

Tabla 6.7: Factibilidad de las soluciones para instancias pequeñas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Ax \leq b$.

En la tabla 6.13 y tabla 6.14 se observa que la calidad de la solución de x_{lag} con respecto a la solución exacta óptima en promedio de todos los casos prueba es de 11.75% mientras que la de y_{md} es mejor con solo un 4.465%. Cabe notar que la aportación más importante de los datos contenidos en dicha tabla es el porcentaje de proximidad que presenta la solución y_{md_π} que es mucho menor que la cercanía a la solución óptima exacta que presentan las 2 soluciones anteriores, con tan sólo un 0.0088%. Concluyendo, la tabla 6.13 vemos que el valor de gap_4 (proximidad entre la función objetivo del procedimiento greedy a partir de x_{lag} , y_{md} y y_{md_π} y el valor exacto) es menor que el obtenido por las soluciones x_{lag} y y_{md} .

Con respecto a los valores de gap_5 contenido en la tabla 6.14, podemos decir, que la proximidad entre el valor objetivo obtenido por x_{lag} y la cota lagrangiana clásica (z_{lag}) obtenida por el método descrito en secciones anteriores y [49, 46, 45] es del 15.65%, mientras que el porcentaje entre la cota lagrangiana modificada z_{md} y la solución de y_{md} son del 6.40%; sin olvidar que la medida de calidad entre la cota lagrangiana modificada z_{md_π} y y_{md_π} es del 0.01055%. Por lo tanto el mejor valor de gap_5 está dado por y_{md_π} posteriormente y_{md} y por último por x_{lag} , es decir que la

			x_{lag}			y_{md}			y_{md_π}		
m	n	α	v_{rel}	nv	gap_4	v_{rel}	nv	v_{rel}	nv	v_{rel}	gap_4
5	100	0.8	0.02	69.00	-7.90	0.00	0.00	10.99	0.00	0.00	0.00
5	100	0.9	0.19	59.00	-6.47	0.00	0.00	11.78	0.00	0.00	0.00
5	100	1.0	0.29	43.00	-4.30	0.00	0.00	12.89	0.05	1.00	-0.03
10	100	0.8	0.01	90.00	-4.25	0.00	0.00	5.94	0.00	0.00	0.00
10	100	0.9	0.11	40.00	-1.23	0.00	0.00	11.43	0.03	2.00	-0.06
10	100	1.0	0.25	45.00	-2.15	0.01	2.00	14.99	0.09	5.00	-0.16
20	100	0.8	0.01	79.00	-1.59	0.00	0.00	3.35	0.00	0.00	0.00
20	100	0.9	0.10	47.00	-0.76	0.03	10.00	11.34	0.02	10.00	-0.07
20	100	1.0	0.21	45.00	-0.79	0.01	6.00	27.40	0.11	16.00	-0.76

Tabla 6.8: Factibilidad de las soluciones para instancias medianas, resolviendo el dual lagrangiano, sólo con el subgradiente, relajando $Ax \leq b$.

solución de la cota modificada lagrangiana z_{md_π} es una solución más cercana a una solución factible.

			x_{lag}		y_{md}		y_{md_π}	
m	n	α	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5
5	50	0.8	4.00	3.12	2.34	3.21	0.00	2.50
5	50	0.9	9.46	7.20	0.00	7.46	7.89	0.00
5	50	1.0	7.49	6.96	0.04	7.98	6.67	0.04
8	50	0.8	3.60	4.12	0.00	2.56	4.19	0.00
8	50	0.9	8.63	7.96	0.00	8.43	9.03	0.00
8	50	1.0	3.98	1.20	2.15	3.78	1.23	2.12
10	50	0.8	4.90	0.00	0.00	4.25	0.00	0.00
10	50	0.9	0.09	47.00	1.23	0.09	48.00	0.99
10	50	1.0	0.19	44.00	-0.6	0.18	42.00	-0.7

Tabla 6.9: Proximidad entre la solución obtenida factible por el heurístico voraz y el subgradiente a la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Dx \leq d$, instancias pequeñas.

			x_{lag}		y_{md}		y_{md_π}	
m	n	α	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5
5	100	0.8	3.27	3.09	0.00	4.07	3.18	0.00
5	100	0.9	8.69	7.49	0.00	3.23	2.19	0.00
5	100	1.0	7.89	6.37	0.04	3.23	3.14	0.00
10	100	0.8	3.10	4.25	0.00	4.34	2.99	0.00
10	100	0.9	9.00	7.19	0.00	2.45	2.21	0.00
10	100	1.0	1.28	0.99	1.29	3.23	1.20	0.00
20	100	0.8	4.27	0.00	0.00	3.73	1.99	0.00
20	100	0.9	0.09	47.00	0.98	3.77	1.13	0.00
20	100	1.0	0.19	45.00	-0.7	3.79	2.98	0.00

Tabla 6.10: Proximidad entre la solución obtenida factible por el heurístico voraz y el subgradiente a la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Dx \leq d$, instancias medianas.

			x_{lag}		y_{md}		y_{md_π}	
m	n	α	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5
5	50	0.8	3.39	3.10	0.00	3.35	2.20	0.00
5	50	0.9	9.06	7.03	0.00	8.50	7.26	0.00
5	50	1.0	7.89	6.56	0.04	7.49	6.89	0.05
8	50	0.8	3.51	4.98	0.00	2.14	4.15	0.00
8	50	0.9	8.79	7.46	0.00	7.59	8.13	0.00
8	50	1.0	3.98	1.37	2.35	3.98	1.37	2.35
10	50	0.8	4.23	0.00	0.00	6.27	0.00	0.00
10	50	0.9	0.11	48.00	1.34	0.12	49.00	1.34
10	50	1.0	0.21	46.00	-0.8	0.21	46.00	-0.8

Tabla 6.11: Proximidad entre la solución obtenida factible por el heurístico voraz y el subgradiente a la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Ax \leq b$, instancias pequeñas.

			x_{lag}		y_{md}		y_{md_π}	
m	n	α	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5
5	100	0.8	4.67	3.21	0.00	4.67	3.21	0.00
5	100	0.9	9.56	8.23	0.00	4.67	3.21	0.00
5	100	1.0	8.38	7.89	0.05	4.67	3.21	0.00
10	100	0.8	3.61	5.12	0.00	4.67	3.21	0.00
10	100	0.9	9.59	8.13	0.00	4.67	3.21	0.00
10	100	1.0	3.98	1.37	2.35	4.67	3.21	0.00
20	100	0.8	5.82	0.00	0.00	4.67	3.21	0.00
20	100	0.9	0.12	49.00	1.34	4.67	3.21	0.00
20	100	1.0	0.21	46.00	-0.8	4.67	3.21	0.00

Tabla 6.12: Proximidad entre la solución obtenida factible por el heurístico voraz y el subgradiente a la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Ax \leq b$, instancias medianas.

			x_{lag}		y_{md}		$y_{md\pi}$	
m	n	α	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5
5	50	0.8	11.70	11.68	0.31	6.15	0.01	0.01
5	50	0.9	13.50	16.95	0.30	4.15	0.01	0.01
5	50	1.0	11.54	14.46	1.43	4.69	0.01	0.01
8	50	0.8	6.08	9.85	5.61	4.26	0.01	0.01
8	50	0.9	13.06	14.99	2.73	2.75	0.01	0.01
8	50	1.0	16.57	19.50	0.72	4.20	0.02	0.03
10	50	0.8	5.09	8.08	0.04	3.19	0.00	0.00
10	50	0.9	9.42	10.61	0.25	1.56	0.01	0.01
10	50	1.0	15.35	17.38	1.02	3.39	0.02	0.02

Tabla 6.13: Proximidad entre la solución obtenida por el heurístico voraz y el subgradiente interactuando en cada iteración y la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Dx \leq d$, instancias pequeñas.

			x_{lag}		y_{md}		$y_{md\pi}$	
m	n	α	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5
5	100	0.8	11.27	16.97	0.38	6.78	10.00	0.00
5	100	0.9	12.55	16.54	0.49	5.03	0.00	0.00
5	100	1.0	15.56	18.39	0.91	4.23	0.01	0.01
10	100	0.8	11.68	15.44	0.23	7.01	0.00	0.00
10	100	0.9	11.90	17.57	1.72	4.12	0.01	0.01
10	100	1.0	14.67	16.98	0.80	5.33	0.01	0.02
20	100	0.8	8.93	4.91	0.49	4.91	0.00	0.00
20	100	0.9	13.55	15.55	0.50	4.34	0.00	0.00
20	100	1.0	9.16	17.45	0.90	5.69	0.01	0.02

Tabla 6.14: Proximidad entre la solución obtenida por el heurístico voraz y el subgradiente interactuando en cada iteración y la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Dx \leq d$, instancias medianas.

			x_{lag}		y_{md}		$y_{md\pi}$	
m	n	α	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5
5	50	0.8	11.60	10.95	0.45	5.23	0.01	0.01
5	50	0.9	11.20	14.90	0.20	3.25	0.01	0.01
5	50	1.0	10.65	13.62	0.93	3.39	0.01	0.01
8	50	0.8	5.00	10.08	6.61	5.12	0.01	0.01
8	50	0.9	13.05	13.78	1.84	1.99	0.01	0.01
8	50	1.0	17.75	20.01	0.84	3.29	0.02	0.03
10	50	0.8	5.09	7.07	0.03	2.94	0.00	0.00
10	50	0.9	8.19	9.19	0.23	1.52	0.01	0.01
10	50	1.0	14.50	16.98	0.92	2.47	0.02	0.02

Tabla 6.15: Proximidad entre la solución obtenida por el heurístico voraz y el subgradiente interactuando en cada iteración y la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Ax \leq b$, instancias pequeñas.

			x_{lag}		y_{md}		$y_{md\pi}$	
m	n	α	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5	gap_4	gap_5
5	100	0.8	10.76	15.72	0.29	6.17	9.00	0.00
5	100	0.9	12.55	15.63	0.39	4.97	0.00	0.00
5	100	1.0	14.78	17.89	0.84	3.02	0.01	0.01
10	100	0.8	10.84	14.92	0.21	6.98	0.00	0.00
10	100	0.9	10.23	16.32	1.51	3.26	0.01	0.01
10	100	1.0	13.96	15.81	0.76	5.42	0.01	0.02
20	100	0.8	7.23	4.48	0.36	4.78	0.00	0.00
20	100	0.9	12.95	15.03	0.49	4.12	0.00	0.00
20	100	1.0	9.01	16.15	0.89	5.23	0.01	0.02

Tabla 6.16: Proximidad entre la solución obtenida por el heurístico voraz y el subgradiente interactuando en cada iteración y la solución óptima entera o la cota lagrangiana correspondiente relajando $Ax \leq b$, instancias medianas.

CONCLUSIONES

7.1 CONCLUSIONES

La contribución principal del presente trabajo es la obtención de nuevas cotas lagrangianas modificadas para el *MMAP*, empleando el método *MHL*, basado en el método de subgradiente y el heurístico voraz (procesamiento que factibiliza las soluciones obtenidas) y sus distintas versiones.

La construcción de cotas modificadas, consistió en calcular el valor que corresponde al término de penalización agregado a la función objetivo del problema lagrangiano, el cual en la cota lagrangiana clásica es tomado como 0, por lo que al encontrar el menor valor posible de este, hará que mejoremos la cota clásica.

El método *MHL* (tanto en versión 1 ó 2) empleado para calcular cotas para el problema de asignación múltiple *MMAP* es muy eficaz debido a que la cantidad de multiplicadores asociados a un problema con $m * n$ variables y $m + n$ restricciones, cuenta con tan sólo $m + n + 1$ multiplicadores.

Ya que dualizamos ambos tipos de restricciones (las relacionadas con la capacidad límite de los agentes $Cx \leq d$ y la capacidad de las tareas $Ax \leq b$), para cada una de las relajaciones del problema de asignación múltiple, obtuvimos seis tipos distintos de cotas,

- la cota generada por relajación lineal

- la cota clásica lagrangiana
- la cota modificada lagrangiana sin dualizar la copia de restricciones usando el método del subgradiente y aplicando el heurístico voraz sólo en la última iteración
- la cota modificada lagrangiana dualizando la copia de restricciones usando el método del subgradiente y aplicando el heurístico voraz sólo en la última iteración
- la cota modificada lagrangiana sin dualizar la copia de restricciones usando el *MHL* y por último
- la cota modificada lagrangiana dualizando la copia de restricciones usando el *MHL*.

Con respecto a la calidad de las cotas obtenidas por el *MHL* y el método subgradiente con el heurístico voraz aplicado sólo en la última iteración, podemos decir que la cota lagrangiana modificada con la copia de restricciones dualizadas es mejor que la cota modificada lagrangiana sin dualizar la copia de las restricciones, pero éstas dominan a la cota clásica lagrangiana, la cuál es mejor que la cota obtenida por relajación lineal.

En cuanto a la factibilidad que poseen las soluciones obtenidas por cada una de las cotas, se pudo observar que se comportan de manera similar a la calidad de la cota, es decir, la cota lagrangiana modificada con la copia de restricciones dualizada es la más factible, que las demás, siguiéndole a ésta, la cota lagrangiana modificada sin la copia de restricciones dualizada, posteriormente la cota clásica lagrangiana y por último la cota de relajación lineal. Los resultados son análogos para la proximidad entre la solución lagrangiana y valor óptimo.

Hay que mencionar que además de presentar (las cotas lagrangianas modificadas, tanto las que dualizan como las que no, la copia de restricciones) un grado alto de factibilidad, en algunos casos se cuenta con soluciones óptimas. Puntualizando,

la proximidad de las cotas se reduce de un 15 % de proximidad, presentada por la cota clásica lagrangiana, a menos de un 0.03 % de proximidad en promedio para la cota modificada con la copia de las restricciones dualizadas.

La proximidad que presenta la cota modificada lagrangiana con la copia de las restricciones dualizadas a la solución óptima, es de 0.5 % y está dada por la interacción que tiene el método del subgradiente con el heurístico voraz para generar soluciones factibles con pérdidas «mínimas» en la función objetivo.

Una característica importante con la que cuenta el *MHL*, es que a pesar de que es un método que emplea el subgradiente para calcular las cotas, posee varios criterios de parada que el subgradiente en si no tiene, por ejemplo la proximidad entre solución factible y la cota lagrangiana de la iteración actual (criterio que siempre se cumple y es igual a $\frac{\text{valordelacota}-\text{solucion.factible}}{\text{valordelacota}} \leq 0.0001$), aparte de los criterios usuales como lo son el número de iteraciones y el tiempo.

Otro punto importante que hay que tomar en cuenta con respecto al *MHL*, es que en cada iteración contamos con una solución factible.

El tiempo de solución, tenemos que el tiempo promedio para resolver un problema de forma exacta por CPLEX es del orden (secs- min) para problemas chicos, (min-hrs) para problemas medianos, mientras que el *MHL* está dado por décimas de segundos para problemas medianos (20*100).

7.2 TRABAJO FUTURO

Como trabajo futuro podemos mencionar que sería interesante probar la cota creada para los demás tipos de problema de asignación y para problemas de optimización que cuenten con la estructura de descomposición doble.

Encontrar el punto crítico con respecto a la cantidad de variables, donde el método ya no obtiene buenos resultados, aunque manejamos 2000 variables (los

demás manejan alrededor de 500 y 1000 variables), no aseguramos que cuando tengamos instancias de mayor tamaño obtengamos resultados de buena calidad.

Con la propuesta anterior, en caso de obtener resultados no gratos o que no consideremos adecuados, para las instancias grandes, podríamos adecuar el método y procedimiento propuesto para llegar a tener mejores resultados.

Otra aportación que podríamos hacer es, resolver la nueva cota modificada lagrangiana, con algún otro tipo de método, como, el volume, «bundle», Benders, etcétera.

Al resolver la nueva cota modificada, obtenemos soluciones factibles, ¿que pasaría si introducimos esta a un método de solución exacto, como el método de ramificación y acotamiento?, ¿reduciría considerablemente el tiempo de ejecución para encontrar el punto óptimo?.

APÉNDICE A

PRODUCCIÓN CIENTÍFICA

A.1 PUBLICACIONES

A continuación enlistamos exposiciones de los trabajos relacionados con la tesis desarrollada:

A.1.1 ARTÍCULOS CON ARBITRAJE

- «Studying properties of Lagrangian bounds for many-to-many assignment problems», I. Litvinchev, S. Rangel, M. Mata, J. Saucedo. *Journal of Computer and System Science International*, Vol. 48, núm. 3, págs. 48 - 62, 2009.
- «A Lagrangian bound for many-to-many assignment problems», I. Litvinchev, S. Rangel, J. Saucedo. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2009. Disponible en línea: <http://www.springerlink.com/content/2643619731192825/>.

A.1.2 MEMORIAS EN CONGRESO

- «Cotas lagrangianas para el problema de asignación generalizada», En memorias de: XVI Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico, Gómez Palacio, Durango, abril 2007.

- «Cotas lagrangianas para el problema de asignación generalizada», En memorias del: VI Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico, IEEE - AMIME, Cuernavaca, Morelos, octubre 2007.
- « Studying properties of the solution optimal to refined lagrangian problem», XIV Congreso Latino-Ibero- Americano en Investigación de Operaciones (CLAIO), Cartagena, Colombia, septiembre del 2008.
- «Problema de asignación múltiple: cotas lagrangianas mejoradas», J. Saucedo, I. Litvinchev, M. Mata, S. Rangel. En Memorias del IEEE VI Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico, IEEE-AMIME, págs. 1231 - 1241, Cuernavaca, Morelos, octubre 2008.
- «Studying a modified lagrangian bound for a class of the generalized assignment problems», I. Litvinchev, M. Mata, S. Rangel, J. Saucedo. En Proceedings of VI ALIO/EURO Workshop on Applied Combinatorial Optimization, págs. 971 - 976, Buenos Aires, Argentina, diciembre 2008.
- «Heurística lagrangiana para el problema de asignación múltiple», J. Saucedo, I. Litvinchev, S. Rangel. En Memorias del IEEE VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico, IEEE-AMIME, págs. 1 - 5, Cuernavaca, Morelos, octubre 2009.
- «Heurística híbrida lagrangiana para el problema de asignación múltiple», J. Saucedo, I. Litvinchev, S. Rangel. En Memorias del Taller Latino Iberoamericano de Investigación Operaciones, TLAIO, MMMO073110 págs. 1 - 6, Acapulco, Guerrero, octubre 2009.

A.1.3 EXPOSICIONES

- «Cotas lagrangianas para el problema de asignacion generalizada», XVI Escuela Nacional de Optimizacion y Analisis Numerico, Gómez Palacio, Durango, abril 2007.

- «Cotas lagrangianas para el problema de asignación generalizada», VI Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico, IEEE- AMIME, Cuernavaca, Morelos, octubre 2007.
- «Studying properties of the solution optimal to refined lagrangian problem», XIV Congreso Latino-Ibero- Americano en Investigación de Operaciones (CLAIO), Cartagena, Colombia, septiembre del 2008.
- «Problema de asignación múltiple: cotas lagrangianas mejoradas», VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico, IEEE- AMIME, Cuernavaca, Morelos, octubre 2008.
- «Studying properties of the solution optimal to refined lagrangian problem», VI ALIO/EURO Workshop on Applied Combinatorial Optimization, Buenos Aires, Argentina, diciembre 2008.
- «Estudiando propiedades de las soluciones lagrangianas para el problema de asignación múltiple», Seminario de Investigación del Postgrado en Ingeniería de Sistemas, FIME, UANL, diciembre 2008.
- «Heurística lagrangiana para el problema de asignación múltiple», Seminario de Investigación del Postgrado en Ingeniería de Sistemas, FIME, UANL, junio 2009.
- «Heurística híbrida lagrangiana para el problema de asignación múltiple», Taller Latino Iberoamericano de Investigación Operaciones, TLAIO, Acapulco, Guerrero, octubre 2009.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALFANDARI, L., A. PLATEAU y P. TOLLA, «A path relinking algorithm for the generalized assignment problem», *Metaheuristics: Computer Decision Making*, págs. 1 – 18, 2003.
- [2] BAHINSE, L., F. BARAHONA y O. PORTO, «Solving Steiner tree problems in graphs with Lagrangian relaxation», *Journal of Combinatorial Optimization*, (7), págs. 259 – 282, 2003.
- [3] BAHINSE, L., N. MACULAN y C. SAGASTIZÁBAL, «The volume algorithm revisited: relation with bundle methods», *Math Program*, (94), págs. 41 – 69, 2002.
- [4] BARAHONA, F. y R. ANBIL, «The volume algorithm: producing primal solutions with a subgradient method», *Math Program*, (87), págs. 385 – 399, 2000.
- [5] BEASLEY, J. E., *Modern heuristic techniques for combinatorial problems: Lagrangean relaxation*, primera edición, Blackwell Scientific Publications, 1993.
- [6] BERTSEKAS, D., *Nonlinear Programming*, segunda edición, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1999.
- [7] BLOCQ, R., D. R. MORALES, H. ROMEIJN y G. TIMMER, «The multi-resource generalized assignment problem with an application to the distribution of gasoline products», Working Paper, Department of Decision and Information Sciences, Rotterdam School of Management, The Netherlands, 2000.

-
- [8] BURKARD, R., M. DELL'AMICO y S. MARTELLO, *Assignment Problems*, primera edición, SIAM, Philadelphia, 2009.
- [9] CARON, G., P. HANSEN y B. JAUMARD, «The assignment problem with seniority and job priority constraints», *Operations Research*, **3**(47), págs. 449 – 454, 1999.
- [10] CATTRYSEE, D. G. y L. N. V. WASSENHOVE, «A survey of algorithms for the generalized assignment problem», *European Journal of Operational Research*, **3**(60), págs. 260 – 272, 1992.
- [11] CHENEY, E. W. y A. A. GOLDSTEIN, «Newton 's method for convex programming and Tchebicheff approximations», *Numerisch Mathematik*, (1), págs. 253 – 268, 1959.
- [12] CHU, P. C. y J. E. BEASLEY, «A genetic algorithm for the generalized assignment problem», *Computers Operations Research*, (24), págs. 17 – 23, 1997.
- [13] DANTZING, G. B. y P. WOLFE, «The descomposition principle for linear programs», *Operations Research*, (8), págs. 101 – 111, 1960.
- [14] DANTZING, G. B. y P. WOLFE, «The descomposition algorithm for linear programs», *Econometrica*, (29), págs. 767 – 778, 1961.
- [15] DASKALAI, S., T. BIRBAS y E. HOUSOS, «An integer programming formulation for a case study in university timetabling», *European Journal of Operational Research*, **1**(153), págs. 117 – 135, 2004.
- [16] DE MAIO, A. y C. ROVEDA, «An all zero-one algorithm for a certain class of transportation problems», *Operations Research*, **6**(19), págs. 1406 – 1418, 1971.
- [17] DU MERLE, O., J. L. GOFFIN y J.-P. VIAL, «On improvements to the analytic center cutting plane method», *Computational Optimization and Applications*, (11), págs. 37 – 52, 1998.

-
- [18] DU MERLE, O., D. VILLENEUVE, J. DESROSIERS y P. HANSEN, «Stabilized column generation», *Discrete Mathematics*, (94), págs. 229 – 237, 1999.
- [19] EVERETT III, H., «Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources», *Operations Research*, (11), págs. 399 – 417, 1963.
- [20] FISHER, M., R. JAIKUMAR y L. V. WASSENHOVE, «A multiplier adjustment method for the generalized assignment problem», *Management Science*, **9**(32), págs. 1095 – 1103, 1986.
- [21] FISHER, M. L., «The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems», *Management Science*, (27), págs. 1 – 18, 1981.
- [22] FISHER, M. L., «An applications oriented guide to Lagrangian relaxation», *Interfaces*, (15), págs. 10 – 21, 1985.
- [23] FOULDS, J. L. R. y D. G. F. JOHNSON, «A microcomputer-based decision support system for university timetabling», *Decision Support System*, **4**(27), págs. 367 – 387, 2000.
- [24] FREVILLE, A. y S. HANA, «The multidimensional 01 knapsack problem bounds and computational aspects», *Annals of Operations Research*, (139), págs. 195 – 227, 2005.
- [25] GAREY, M. R. y D. S. JOHNSON, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, primera edición, Freeman, San Francisco, California, 1979.
- [26] GEOFFRION, A. M., «Lagrangean relaxation for integer programming», *Mathematical Programming Study*, (2), págs. 82 – 114, 1974.
- [27] GUIGNARD, M., «Lagrangean relaxation», *TOP*, **2**(11), págs. 151 – 228, 2003.
- [28] GUIGNARD, M., E. CHAJAKIS, H. YAN y S. ZHU, «The lazy lagrangean heuristic», Optimization Days, Montreal, 1996.

-
- [29] GUIGNARD, M. y R. DE MATTA, «Dynamic production scheduling for a process industry», *Operations Research*, (42), págs. 492 – 503, 1994.
- [30] GUIGNARD, M. y S. KIM, «Lagrangean decomposition: a model yielding stronger Lagrangean bounds», *Mathematical Programming*, (39), págs. 215 – 228, 1987.
- [31] GUIGNARD, M. y M. B. ROSENWEIN, «An application-oriented guide for designing Lagrangian dual ascent algorithms», *European Journal of Operational Research*, **43**, págs. 197 – 205, 1989.
- [32] GUIGNARD, M. y S. ZHU, «A hybrid algorithm for solving Lagrangean duals in mixed-integer programming», Memorias del VII CLAIO. Santiago, Chile, 1994.
- [33] HADDADI, S. y H. OUZIA, «An effective lagrangiana heuristic for the generalized assignment problem», *INFOR*, (39), págs. 351 – 356, 2001.
- [34] HADDADI, S. y H. OUZIA, «Effective algorithm and heuristic for the generalized assignment problem», *European Journal of Operational Research*, (153), págs. 184 – 190, 2004.
- [35] HELD, M. y R. M. KARP, «The traveling salesman problem and minimum spanning trees», *Operations Research*, (18), págs. 1138 – 1162, 1970.
- [36] HELD, M. y R. M. KARP, «The traveling salesman problem and minimum spanning trees: part II», *Mathematical Programming*, (1), págs. 6 – 25, 1971.
- [37] HELD, M., P. WOLFE y H. CROWDER, «Validation of subgradient optimization», *Mathematical Programming*, (6), págs. 62 – 88, 1974.
- [38] JEET, V. y E. KUTANOGLU, «Lagrangian relaxation guided problem space search heuristics for generalized assignment problems», *European Journal of Operational Research*, (182), págs. 1039 – 1056, 2007.
- [39] KELLEY, J. E., «The cutting-plane method for solving convex programs», *Journal of the SIAM*, (8), págs. 703 – 712, 1960.

-
- [40] KUNH, H. W., «The Hungarian method for the assignment problem», *Naval Research Logistics Quarterly*, (2), págs. 83 – 97, 1955.
- [41] LAGUNA, M., J. P. KELLEY, J. L. GONZÁLEZ-VELARDE y F. GLOVER, «Tabu search for the multilevel generalized assignment problem», *European Journal of Operational Research*, (82), págs. 176 – 189, 1995.
- [42] LASDON, L. S., *Optimization Theory for Large Scale Systems*, segunda edición, Dover, Mineola, New York, 2002.
- [43] LEMARÈCHAL, C., «Computational Combinatorial Optimization», *Primavera Verlag, Heidelberg*, págs. 115 – 160, 2001.
- [44] LITVINCHEV, I., «Refinement of lagrangian bounds in optimization problems», *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **7**(47), págs. 1101 – 1108, 2007.
- [45] LITVINCHEV, I., M. MATA, S. RANGEL y J. SAUCEDO, «Problema de asignación múltiple: cotas lagrangianas mejoradas», Memorias del IEEE VI Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico, IEEE - AMIME, pp. 1231-1241, 2008.
- [46] LITVINCHEV, I., M. MATA, S. RANGEL y J. SAUCEDO, «Studying a modified lagrangian bound for a class of the generalizad assignment problems», Proceedings of VI ALIO/EURO Workshop on Applied Combinatorial Optimization, Buenos Aires, Argentina, 2008.
- [47] LITVINCHEV, I., S. RANGEL, M. MATA y J. SAUCEDO, «Studying properties of Lagrangian bounds for many-to-many assignment problems», *Journal of Computer and System Science International*, **3**(48), págs. 48 – 62, 2009.
- [48] LITVINCHEV, I., S. RANGEL y J. SAUCEDO, «Modifying Lagrangian bounds», Reporte técnico 2008-01, Posgrado en Ingeniería de Sistemas, Universidad Autónoma de Nuevo León, México, 2008.

-
- [49] LITVINCHEV, I., S. RANGEL y J. SAUCEDO, «A Lagrangian bound for many-to-many assignment problems», *Journal of Combinatorial Optimization*, <http://www.springerlink.com/content/26436l9731192825/>, 2009.
- [50] LOURENÇO, H. R. y D. SERRA, «Adaptive search heuristics for the generalized assignment problem», *Mathware and Soft Computing*, (9), págs. 209 – 234, 2002.
- [51] MARTELLO, S. y P. TOTH, «An algorithm for the generalized assignment problem», *Operational Research*, págs. 589 – 603, 1981.
- [52] MARTELLO, S. y P. TOTH, *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementation*, Wiley, New York, 1990.
- [53] MORALES, D. y H. ROMEJIN, «A class of greedy algorithms for the generalized assignment problem», *Discrete Applied Mathematics*, (103), págs. 209 – 235, 2000.
- [54] MURTY, K. G., *Linear programming*, segunda edición, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [55] NAUSS, R. M., «Solving the generalized assignment problem: an optimizing and heuristic approach», *INFORMS Journal on Computing*, **15**(3), págs. 249 – 266, 2003.
- [56] NEEBE, A. y M. RAO, «An algorithm for the fixed charge assigning users to sources problem», *Journal of the Operational Research Society*, **11**(34), págs. 1107 – 1113, 1983.
- [57] NÄSBERG, M., K. O. JÖRNSTEN y P. A. SMEDS, «Variable Splitting - A new Lagrangean relaxation approach to some mathematical programming problems», Reporte LITH-MAT-R-85-04. Linköping University, 1985.
- [58] PENTICO, D. W., «Assignment problems: A golden anniversary survey», *European Journal of Operational Research*, (176), págs. 774–793, 2007.

-
- [59] PRZYBYLSKI, A., X. GANDIBLEUX y M. EHRGOTT, «Two phase algorithms for the bi-objective assignment problem», *European Journal of Operational Research*, **2**(158), págs. 509 – 533, 2007.
- [60] RIBERO, C. y M. MINOUX, «Solving hard constrained shortest path problems by Lagrangean relaxation and branch-and-bound algorithms», *Mathematics of Operation Research*, (53), págs. 303 – 316, 1986.
- [61] ROSS, G. y R. SOLAND, «Modeling facility location problems as generalized assignment problems», *Management Science*, **3**(24), págs. 345 – 357, 1977.
- [62] SAVELSBERGH, M., «A branch-and-cut algorithm for the generalized assignment problem», *Operations Research*, (45), págs. 831 – 841, 1997.
- [63] SHAPIRO, J. F., «A survey of Lagrangean techniques for discrete optimization», *Annals of Discrete Mathematics*, (5), págs. 113 – 138, 1974.
- [64] SHAPIRO, J. F., *Mathematical Programming: structure and algorithms*, primera edición, John Wiley, 1979.
- [65] SOENEN, R., «Contribution à l'étude des systèmes de conduite en temps réel en vue de la commande d'unités de fabrication», Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Lille. France., 1977.
- [66] SRINIVASAN, V. y G. L. THOMPSON, «An algorithm for assigning uses to sources in a special class of transportation problems», *Operations Research*, (21), págs. 284 – 295, 1972.
- [67] TERLAKY, T., *Interior Point Methods of Mathematical Programming*, Kluwer, Netherlands, 1996.
- [68] VOTAW, D. F. y O. A., «The personnel assignment problem», Symposium on Linear Inequalities and Programming, SCOOP 10, US Air Force pp. 155 - 162, 1952.

-
- [69] WERRA, D. D., «An introduction to timetabling», *European Journal of Operation Research*, **2**(19), págs. 151 – 162, 1985.

FICHA AUTOBIOGRÁFICA

Jania Astrid Saucedo Martínez

Candidato para el grado de Doctor en Ingeniería
con especialidad en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

USO DE COTAS LAGRANGIANAS MEJORADAS
PARA LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON
LA ESTRUCTURA DE DESCOMPOSICIÓN DOBLE

Hija de Eleazar Saucedo Zertuche y Juanita de Lourdes Martínez Ruíz, nacida en Nueva Rosita, San Juan de Sabinas, Coahuila, México. Graduada de la carrera de Licenciada en Matemáticas en la Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León del 2001 al 2005. En el 2007 obtuvo el título de Maestra en Ciencias en Ingeniería de Sistemas por la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la misma Universidad en la División de Postgrado en Ingeniería de Sistemas. Apartir del 2008 ingreso al programa doctoral del mismo posgrado.