UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECANICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MÉTODO DE REDUCCIÓN DE OBJETIVOS PARA EL PROBLEMA DE LA SELECCIÓN DE CARTERAS DE PROYECTOS SOCIALES

POR

MIREYA ISABEL SÁNCHEZ VELÁZQUEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIA EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN JUNIO 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECANICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MÉTODO DE REDUCCIÓN DE OBJETIVOS PARA EL PROBLEMA DE LA SELECCIÓN DE CARTERAS DE PROYECTOS SOCIALES

POR

MIREYA ISABEL SÁNCHEZ VELÁZQUEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIA EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN JUNIO 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECANICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis <<Método De Reducción De Objetivos Para El Problema De La Selección De Carteras De Proyectos Sociales>>, realizada por la alumna Mireya Isabel Sánchez Velázquez, con número de matrícula 1164849, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité De Tesis

Dr. Fernando López Irarragorri

Asesor

Dr. Eduardo Rene Fernández González

Revisor

Dr. Oscar Leonel Chacón Mondragón

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, junio 2010

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a muchas personas por el apoyo incondicional en esta etapa de mi carrera que hoy estoy por concluir. Primeramente a Dios por darme la capacidad de concluir mis estudios de Maestría en Ciencias en Ingeniería en Sistemas.

A mis Padres José A. P. Sánchez Hdz. y Mireya Velázquez Soto, a mi hermano José de Jesús Sánchez Velázquez, a mi pareja Mario Alberto Lugo Hdz. y a mi amigo Gilberto Javier Tenorio Rodríguez; a ellos por las palabras de animo, por el apoyo incondicional y la comprensión para poder terminar esta etapa de mi carrera profesional.

A mis maestros tanto de Licenciatura como de Maestría por los conocimientos que transmitieron en mi. En especial al Dr. Fernando López Irarragorri por el conocimiento transmitido, por el apoyo profesional para la elaboración de este trabajo, y el apoyo en lo personal. Y al Dr. Oscar Leonel Chacón Mondragón también por su apoyo profesional y personal.

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo a mis Padres José A. P. Sánchez Hernández y Mireya Velázquez Soto que me dieron la vida.

A mi hermano José de Jesús Sánchez Velázquez y a mi pareja Mario Alberto Lugo Hdz.

Quiero hacer una dedicatoria especial al Maestro Alfredo Alanís Durán.

SÍNTESIS

MIREYA ISABEL SÁNCHEZ VELÁZQUEZ

Candidato para el grado **de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas**

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Titulo del Estudio:

Método De Reducción De Objetivos Para El Problema De La Selección De Carteras De Proyectos Sociales

Número de Paginas: **82**

DESCRIPCION DEL PROBLEMA

En la presente investigación se aborda el problema de la selección de proyectos en el sector público, específicamente el problema de la optimización de carteras de proyectos sociales. El interés principal se centra en la posibilidad de que en la modelación de la solución a dicho problema aparezcan muchos objetivos (decenas), lo que complica la exploración e interpretación de las soluciones.

La complejidad inherente al problema de la selección de proyectos sociales, la gran cantidad de factores que inciden en el impacto de la selección final (cartera), la naturaleza tangible o intangible de estos factores, la experiencia previa en la solución de problemas similares, y el carácter subjetivo de la evaluación de carteras sociales son elementos que sugieren que la modelación y el estudio de este problema mediante la optimización multiobjetivo resulta adecuada, no obstante esta hipótesis fue validada experimentalmente para las instancias estudiadas.

ANTECEDENTES

Investigaciones previas sobre problemas que tienen relación con el estudio en el presente trabajo de investigación se presentan a continuación: Deb incorpora las preferencias durante la búsqueda evolutiva y explora así la zona de privilegio de la frontera de pareto. Coello se orienta hacia generar toda la frontera de Pareto y aplicar después algún modelo de preferencias que permita determinar las mejores soluciones. Félix y Fernández, Félix y Mazcorro proponen un método que, a partir del *ranking*, intentan indirectamente aumentar el impacto de la cartera. Fernández y otros desarrollan un modelo que capta la subjetividad de la calidad de la cartera de proyectos públicos y generalizan el enfoque “costo-beneficio

OBJETIVO DE LA TESIS

Facilitar al tomador de decisión la comparación entre mejores soluciones No-Dominadas del problema de Optimización Carteras de Proyectos Sociales, reduciendo el cardinal del conjunto de “mejores soluciones” y reduciendo el numero de objetivos de forma tal que la comparación entre carteras del numero de objetivos reducido tenga sentido para el tomador de decisiones (DM por sus siglas en ingles Decision Maker).

CONTRIBUCIÓN CIENTÍFICA

Las contribuciones del trabajo son de índole metodológico y aplicada: Se dispondrá de un método de reducción de un problema de optimización con muchos objetivos a un problema de optimización multiobjetivo con pocos objetivos. Se implementará un prototipo de aplicación computacional para el apoyo a la decisión en el Problema de Optimización de Carteras de Proyectos Sociales.

Dr. Fernando López Irarragorri
Asesor

ÍNDICE

I. INTRODUCCION

1. INTRODUCCION

La selección de proyectos es un tema de interés, evidenciado por el gran número de publicaciones científicas que han sido publicadas desde finales del siglo pasado a la fecha. Sin embargo, la gran mayoría de las publicaciones se ha centrado en el estudio de la selección de proyectos en el sector privado.

En la presente investigación se aborda el problema de la selección de proyectos en el sector público, específicamente el problema de la optimización de carteras de proyectos sociales. El interés principal se centra en la posibilidad de que en la modelación de la solución a dicho problema aparezcan muchos objetivos (decenas), lo que complica la exploración e interpretación de las soluciones.

Este documento o informe científico de la tesis de grado se ha estructurado en seis capítulos, mismos que se describen a continuación:

1. Introducción: ese capítulo, se describe el diseño de la investigación así como la estructura de la tesis.
2. Descripción del problema: se presenta el problema científico sujeto a estudio, así como los retos asociados a encontrar una solución al mismo.

3. Marco teórico: se discuten las bases teóricas que dan soporte a la investigación y se examina el estado del arte de las publicaciones científicas relacionadas directamente con el problema sujeto de esta investigación.

4. Metodología propuesta: aquí se describe a detalle la metodología de solución propuesta, se discute como manejar la presencia de decenas de objetivos y darle tratamiento eficiente a tal situación, y se presenta y analiza un algoritmo genético multiobjetivo propuesto para llevar a cabo la búsqueda de soluciones eficientes bajo esas condiciones.

5. Experimentación numérica: se exponen los resultados obtenidos al aplicar diseños de experimentos para determinar la efectividad de la metodología propuesta y la comparación del algoritmo propuesto con Nondominated Sorting Genetic Algorithm's-II (NSGA-II) que es considerado un clásico benchmark por los especialistas en Multiple Objective Evolutionary Algorithm's(MOEA's).

Conclusiones y recomendaciones: finalmente en este capítulo se establecen los logros mas importantes de la investigación, el nivel de cumplimiento de los objetivos, la validez y el alcance de los resultados, así como áreas de oportunidad para realizar investigaciones futuras.

A continuación se describen las siguientes secciones del presente capitulo:

la sección 2 se observa donde esta presente este problema de estudio en la vida cotidiana y de ahí la importancia en resolverlo además se muestra las características de este problema y investigaciones relacionadas con el problema de estudio; en la sección 3 se define el objetivo de este trabajo además de los objetivos específicos; en la sección 4 se describe la justificación de resolver este problema de estudio; las siguientes secciones se definen el diseño de la investigación en la sección 5 se presenta la hipótesis en la que esta basada este trabajo de investigación; en la sección 6 se define la metodología propuesta; en la sección 7 se define la contribución que se espera obtener con el presente trabajo, finalmente en la sección 8 se definen las conclusiones del capitulo.

2. CONTEXTUALIZACION DEL PROBLEMA

Las instituciones de gobierno a todas las escalas de la estructura de gobierno, fundaciones con fondos privados, empresas privadas que apoyan proyectos sociales con fondos públicos o reciben presupuesto para desarrollar proyectos sociales propios frecuentemente deben seleccionar los proyectos que recibirán el apoyo y que cantidad asignar a cada proyecto. La selección se hace particularmente difícil cuando los fondos disponibles no alcanzan para financiar todos los proyectos o propuestas cuyas solicitudes de financiamiento se han recibido y además se espera que los proyectos aprobados tengan un impacto social significativo, impacto cuya naturaleza es principalmente subjetiva e intangible. Este problema es conocido como el problema de selección de carteras de proyectos sociales (Navarro,2005).

El problema antes mencionado pertenece a una clase de problemas más amplia conocida como la selección (optimización) de carteras de proyectos, que ha sido ampliamente estudiada para los casos de proyectos de inversión en el sector privado (Markowitz, 1952), proyectos de I&D también en el sector privado (Toole, 2000), y mas recientemente proyectos de I&D en el sector público (Caballero, 2010).

Sin embargo, el problema de la selección de carteras de proyectos sociales presenta las siguientes características que lo distinguen del resto de los problemas de selección de carteras de proyectos (Fernández y Navarro 2002):

- La mayoría de las veces se tiene repercusiones económicas, pero es manifestado de modo indirecto y muy difícil de cuantificar
- Se tiene atributos intangibles pero relevantes
- Es importante considerar el nivel de impacto y grupo social beneficiado.

La complejidad inherente al problema de la selección de proyectos sociales, la gran cantidad de factores que inciden en el impacto de la selección final (cartera), la naturaleza tangible o intangible de estos factores, la experiencia previa en la solución de problemas similares, y el carácter subjetivo de la evaluación de carteras sociales son elementos que sugieren que la modelación y el estudio de este problema mediante la optimización multi-objetivo resulta adecuada, no obstante esta hipótesis fue validada experimentalmente para las instancias estudiadas.

ANTECEDENTES

Investigaciones previas sobre problemas que tienen relación con el estudio en el presente trabajo de investigación se presentan a continuación:

- 2001, Deb incorpora las preferencias durante la búsqueda evolutiva y explora así la zona de privilegio de la frontera de pareto.
- 2005, Coello se orienta hacia generar toda la frontera de pareto y aplicar después algún modelo de preferencias que permita determinar las mejores soluciones.
- 2006 Félix y Fernández, Félix y Mazcorro proponen un método que, a partir del ranking, intentan indirectamente aumentar el impacto de la cartera.
- 2006, Fernández et. al desarrolla un modelo que capta la subjetividad de la calidad de la cartera de proyectos públicos y generalizan el enfoque “costo-beneficio”.

En general estos trabajos han dado buenos resultados para problemas con dos objetivos sin embargo la calidad de las soluciones se degrada rápidamente con el aumento de los objetivos.

- 2008, López Cervantes utiliza una relación de preferencia "Borrosa" de sobreclasificación y con esto una modificación al algoritmo NSGA-II. López supera estas limitaciones en la calidad al introducir la relación de preferencia "borrosa". En sus investigaciones ha probado instancias hasta de 9 objetivos, obteniendo soluciones muy satisfactorias. Sin embargo la mayor limitación que presenta este material se reduce en la complejidad que representa para el tomador la decisión de comparar 2 carteras en base a los valores que toma los objetivos, debido precisamente al elevado numero de estos (mucho mayor a 2).

3. OBJETIVO

Facilitar al tomador de decisión la comparación entre mejores soluciones No-Dominadas del problema de Optimización Carteras de Proyectos Sociales, reduciendo el cardinal del conjunto de "mejores soluciones" y reduciendo el numero de objetivos de forma tal que la comparación entre carteras del numero de objetivos reducido tenga sentido para el tomador de decisiones(DM por sus siglas en ingles Decision Maker).

Objetivos específicos

- Apoyar al DM en la fase de diseño e implementación del proceso de toma de decisión en el Problema de Optimización de Carteras de Proyectos Sociales (POCPS).
- Desarrollar una metodología de apoyo a la decisión que cubra con todas las fases en el POCPS.

- Implementar un prototipo computacional para el apoyo a la decisión en el POCPS basado en la metodología desarrollada.

4. JUSTIFICACION

El problema de optimización de carteras es estudiado como un problema de decisión en donde el objetivo es brindar al tomador de decisiones, un conjunto de soluciones que den un mejor compromiso; la mayoría de los trabajos previos en esta área dan como resultado un conjunto de soluciones con un cardinal muy grande, lo que dificulta al tomador de decisiones la elección del mejor compromiso o un compromiso satisfactorio. Por otra parte al modelar el problema como un problema de optimización multiobjetivo con mucho mas de dos objetivos, dificulta tal tomador de decisiones la comparación entre dos carteras, este es un problema no resuelto aún y en sí mismo da lugar a un área relativamente nueva de las ciencias de la computación: la optimización con muchos objetivos (Many Objective Optimization, en inglés). Es un propósito de esta investigación realizar un aporte en está área en el campo específico de la optimización de carteras de proyectos sociales

5. HIPOTESIS

Transformar el problema original de una cartera con “muchos” objetivos en un problema equivalente de Optimización de Cartera con pocos objetivos, empleando una relación de preferencia borrosa; facilita al tomado de decisiones, la comparación entre soluciones No-Dominadas y por ende la obtención del mejor compromiso.

6. METODOLOGÍA PROPUESTA

Ya que el manejo de muchos objetivos en trabajos previos dificulta obtener soluciones satisfactorias, proponemos un método de reducción de objetivos, donde definiremos una relación de sobreclasificación en el conjunto de las carteras. Así se podrá comparar las carteras dos a dos tomando en cuenta la preferencias del tomador de decisiones. Se implementará un MOEA inspirado en el NSGA-II y que emplee el método de reducción propuesto para calcular el valor de la función de adaptabilidad.

7. CONTRIBUCION ESPERADA

Las contribuciones del trabajo son de índole metodológico y aplicada: Se dispondrá de un método de reducción de un problema de optimización con muchos objetivos a un problema de optimización multiobjetivo con pocos objetivos. Se implementará un prototipo de aplicación computacional para el apoyo a la decisión en el Problema de Optimización de Carteras de Proyectos Sociales.

8. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha planteado el problema de la Optimización de carteras de proyectos sociales, se ha mostrado que es un problema de actualidad y se han presentado algunos antecedentes en la solución al mismo.

Se describe el diseño de la investigación que comprende la hipótesis de partida, los objetivos, la metodología y la contribución esperada.

II.DESCRIPCION DEL PROBLEMA

1. INTRODUCCION

En el presente capitulo se muestra que el enfoque multiobjetivo es un modelo válido para el problema de Optimización de carteras sociales, se analizan los posibles métodos para efectuar el proceso de la búsqueda de los mejores compromisos y se reconoce que es adecuado modelar los objetivos según el impacto de cada proyecto en los diferentes estratos sociales que componen el núcleo poblacional que es impactado por la cartera(sección 2). En la sección 3 se discute el estado del arte y finalmente en la sección 4 se elaboran las conclusiones del capítulo.

2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

El problema de estudio está en la modelación y solución del problema de selección de la cartera de proyectos sociales incorporando preferencias (de naturaleza subjetiva) del DM en el modelo. No se es de interés profundizar en la evaluación de los proyectos, para la que existen técnicas de clasificación multicriterio y de Inteligencia Artificial, además de los enfoques heurísticos tradicionales, y se ha resuelto empleando algoritmos genéticos, redes neuronales (Navarro, 2005), o mas recientemente Evolución Diferencial (Castro 2007). Se reformula el problema como un problema multiobjetivo

Se parte de un modelo basado en un enfoque normativo de solución propuesto por Fernández et al (2004), que construye un modelo de preferencias no lineal que se obtiene de la generalización “borrosa” del esquema clásico de programación 0-1 y de la teoría de la decisión multiatributo. En casos reales, la complejidad del problema de optimización no lineal no puede manejarse por algoritmos exactos.

En base a la información más reciente no hay otras ideas cualitativamente nuevas para aplicar la tecnología moderna a los problemas de distribución de los recursos públicos (e-Gov, 2003). La pregunta es entonces si existe una forma de modelar cuantitativamente el impacto social de proyectos y carteras que, sin burdas simplificaciones pero también sin complicar el proceso de evaluación de los proyectos, permita comparar estimados de impacto de carteras diferentes y realizar una exploración del conjunto de carteras posibles para arribar a las mejores soluciones y lograrlo sin un esfuerzo excesivo del DM. Se trata de no renunciar a la posibilidad de optimizar las decisiones de cartera, e inconformarse con decisiones simplemente aceptables.

Al declarar W como un función de preferencia social significa que si la sociedad comparara dos estados diferentes, debería preferir aquél que arroja un valor mayor de W. La relación de preferencia-indiferencia sería entonces transitiva y completa sobre todos los estados posibles de la sociedad (French, 1993). Debido a las limitaciones para dar un contenido racional a las preferencias colectivas (paradoja de Condorcet, Teorema de Imposibilidad de Arrow, preferencias dependientes del contexto, etc. (Bouyssou et. al., 2000; Tversky y Simonson, 1993; French, 1993), la existencia de W sólo se puede tratar hipotéticamente, no se puede demostrar. Sin embargo, si ubicamos como “DM” a un individuo específico, quizás un representante de quienes tienen el poder de distribuir los recursos públicos, y exigimos normativamente su apego a los axiomas de la racionalidad postulados por la teoría de la decisión (ver por ejemplo, French, 1993), entonces existe una función W’ que refleja sus preferencias sobre “estados” de la sociedad, en el sentido de que:

a) W’(A) $>$ W’(B) si y sólo si el DM considera que el “estado social” A es mejor que B
b) W’(A) = W’(B) si y sólo si manifiesta indiferencia entre A y B.

En la práctica ocurre que el DM tiene su propia interpretación de qué es el bienestar social (acorde con su ideología), e incluso sus decisiones pueden verse afectadas por los intereses de los grupos que él mismo representa. El DM, que debería distribuir los recursos según W, no puede aspirar a más que hacerlo según W’ por dos razones principales:

i) porque desconoce la real W y casi seguramente duda de su existencia,
ii) porque siguiendo W’ actúa de acuerdo con su sincera opinión de qué es lo mejor.

La subjetividad es una categoría esencial en la decisión. Las funciones de preferencia modelan el sistema preferencial de quien decide, sistema que es eminentemente subjetivo. En presencia de múltiples criterios, (como los que intervienen en W’), no se puede resolver ningún problema de decisión sin apelar a cierta componente subjetiva que determine la solución del conflicto de atributos. No es posible determinar buenas decisiones en un sentido fundamentalmente objetivo, salvo en situaciones en que los estados que se comparan guarden una relación de dominancia. Cuando existe contradicción de atributos la corrección de las decisiones depende del sistema de preferencias de quien decide. Si W existiera como función de preferencia social, dependiente como sería de innumerables subjetividades (las funciones de utilidad individuales), se volvería objetiva al independizarse de los individuos concretos. Pero si no se puede probar la existencia de W como función de preferencias sociales, aún menos posible es construir un buen modelo matemático que la refleje a partir de las preferencias de muchos individuos. Renunciando a la objetividad de W, centremos la atención en W'. Como se expresó antes, la teoría de la decisión normativa puede exigir que el DM se comporte según una función de preferencias W', pero no puede normar el contenido de esa función, no puede normar qué debe preferir el DM. Bajo la premisa de un comportamiento ético por parte del DM, W' puede ser un modelo razonable de la preferencia social incluida en la mítica W. Graves deformaciones del modelo deben generar intensa inconformidad social, que tiende a producir una actualización de W' y su mejora como modelo de preferencia social (propuesta de proyecto de CONACyT por Fernández).

El número de objetivos depende de cómo se realice la partición de estratos sociales y de niveles de impacto, pero puede sobrepasar o acercarse a la cifra de 20. Un problema de estas características requiere de una poderosa heurística de búsqueda de buenas soluciones. Por la gran cantidad de objetivos se considera necesario emplear técnicas de reducción de objetivos que faciliten la interpretación de las soluciones por parte del tomador de decisiones.

En opinión de muchos la heurística más prometedora para resolver problemas de optimización multiobjetivo es la computación evolutiva orientada a múltiples criterios (MOEA). Además de las ventajas de las técnicas evolutivas sobre las clásicas, los MOEAs las superan porque en una sola corrida y sin un esfuerzo especial generan múltiples soluciones no dominadas (de manera informal diremos aquí que una solución no dominada (de Pareto) es una que tiene ventaja al menos en un objetivo respecto a cualquier otra solución factible del problema de optimización), mientras las técnicas convencionales generan solamente una solución no dominada (candidata a ser la mejor solución) por cada proceso de optimización. Los MOEAs tienen la propiedad de trabajar en forma paralela, consiguiendo procesar múltiples soluciones de forma simultanea y obtener en una sola ejecución muchas soluciones potencialmente no dominadas (Coello et. al., 2002). Sin embargo, en su primera etapa la capacidad de los MOEAs de generar una buena representación del conjunto de Pareto no era satisfactoria. Algoritmos más recientes (como SPEA, NSGA-II, Micro AG) (Coello et. al., 2005; Toscano, 2001) mejoraron apreciablemente esa capacidad pero continúa el proceso de experimentación.

En el campo de las metaheurísticas, a pesar de los avances logrados en la modelación y solución de problemas mediante múltiples objetivos, no se conocen evidencias de incorporación de preferencias en el proceso de búsqueda, véase la excelente y reciente reseña del estado del arte en ese campo escrita por Molina (2008).

Por otra parte, los métodos de decisión multicriterio como AHP, ELECTRE, PROMETHEE, MAUT (Figueiras et. al. 2005) no se comportan bien en instancias semejantes. En el problema de exploración y búsqueda de carteras que abordamos, sin herramientas matemáticas ni heurísticas para manejar su complejidad, difícilmente el DM alcanzará una buena solución aun si utilizara un MOEA capaz de generar la frontera de Pareto.

Por tanto, se requiere un algoritmo (evolutivo o metaheurístico) capaz de:

a) Ser eficiente en problemas de 20-25 objetivos;

b) prescindiendo de la modelación a posteriori de las preferencias del DM, ofrecer como resultado un número pequeño de buenas soluciones de Pareto entre las cuales se pueda sin dificultad obtener la mejor, heurísticamente o aplicando algún método de decisión multicriterio. La correcta modelación de las preferencias del DM deviene esencial.

Como en el problema de optimización de carteras de proyectos sociales las preferencias del DM no pueden ser establecidas a priori por desconocimiento, ni a posteriori por la gran cantidad de objetivos, estamos obligados a utilizar un método interactivo. De esta forma el DM da progresivamente información sobre sus preferencias, al mismo tiempo que las aclara y precisa en el contexto de las soluciones que se van obteniendo. Al interactuar con el algoritmo y valorar las soluciones posibles, el DM aprende sobre su propio problema, reflexiona sobre sus preferencias, y las actualiza y adecua.

En el presente problema trabajamos con los siguientes supuestos:

- Se dispone de una cierta cantidad de dinero para distribuir entre los proyectos candidatos. Esta cantidad es, en general, mucho menor que la cantidad necesaria para apoyar a todos los proyectos candidatos
- Cada proyecto es clasificado según el área y la región en la que impacta. Un proyecto solo puede pertenecer a un área y una región. Las áreas son definidas a priori por el tomador de decisiones, por ejemplo áreas del gobierno: salud, educación, infraestructura vial, etc.).
- Típicamente se imponen restricciones de la cantidad de dinero que se asigna a cada área y por ende a los proyectos que pertenecen a la misma (se basa en razones históricas, políticas, etc.), con esto se busca garantizar cierto nivel de "dispersión".
- La decisión de apoyar los proyectos es tomada una única vez en un periodo dado, por ejemplo, a la luz de una convocatoria de propuestas de proyectos. Una vez tomada la decisión no se modifica y los apoyos se entregan por el periodo que dure la convocatoria.
- Se presupone que los proyectos candidatos tienen una dependencia estadística muy baja o nula, por lo que la misma no se toma en cuenta.
- Además se supone que se ha extraído el modelo de preferencias del DM y este modelo resulta libre de inconsistencias.

3. ESTADO DEL ARTE

En esta sección vamos a revisar el enfoque de diversos autores tanto para el tema de la selección de carteras de proyectos sociales y la optimización multi-objetivo con "muchos objetivos".

En la actualidad hay trabajos relacionados con la selección de proyectos de investigación y desarrollo (I&D) este es un problema similar al nuestro problema de estudio selección de carteras de proyectos sociales del cual hay pocos trabajos enfocados a este tema.

D.L. Jensen y A.J. King(1992) estos autores desarrollaron una interfaz grafica para la optimización de portafolios de inversión financiera. Trabajan con una función la cual representa una medida de riesgo; esta interfaz dibuja una frontera eficiente de riesgo beneficio. Esta medida de riesgo esta basada en el termino económico "riesgo de baja"; esto es, una estimación de que un proyecto de inversión potencial sufra una baja en el precio si las condiciones del mercado se vuelven adversas. Además, la función de riesgo esta construida por tramos. Se produce una frontera eficiente al calcular una cartera de mínimo riesgo para cada objetivo.

Ya que la función de riesgo esta definida por tramos, se requiere de un mayor tiempo computacional para modelar el riesgo de baja, al calcular la cartera de mínimo riesgo; se puede ver que para interpretar los resultados el tomador de decisiones debe de contar con avanzados conocimientos en matemáticas, para poder tener provechos de los resultados que esta interfaz grafica le brinda; además, no se ve de manera clara cuales son los elementos que el tomador debe brindar para definir la función de riego.

En el sistema de apoyo a la decisión (SAD) los autores Ulrich Derigs y Nils Nickel (2001) presentan un diseño para la construcción de un sistema de apoyo a la decisión, además de un prototipo de SAD para la optimización de cartera basado en metaheurísticas. Los autores manejan la re-optimización de las carteras; entonces se asume que existe un cartera inicial la cual se re-optimizará por el tomador de decisión. Este diseño esta basado en 3 secciones:

- <u>Verificador de restricción</u> es donde se representan la restricción del problema y estas son definidas de manera legal, política, etc.
- <u>Evaluación</u> aquí se modelan los objetivos definidos por la empresa.
- <u>Búsqueda metaheurísticas</u> aquí se controla la eficiencia de la construcción de "buenas" carteras.

Este diseño puede tener un funcionamiento iterativo y darle al usuario propuestas factibles y este puede hacer ajustes de acuerdo al conocimiento del problema e iniciar nuevamente el procedimiento.

Lo que se ve en este trabajo son pasos muy generales para optimizar una cartera, no indica que metaheurísticas resulta mas eficiente ni la manera de encontrar los parámetros de búsqueda en estas metaheurísticas de forma tal que de mejores resultados. En lo que contribuye es en que da un diseño claro que puede servir como una guía para facilitar la implementación en cualquier problema de carteras.

Constanta Z. Radulescu y Marius Radulescu(2001) su investigación estuvo enfocada al diseño e implementación de un software para la selección de proyectos bajo riesgo y recursos limitados dando como resultado el paquete PROSEL(PROject analysis and SELection system) lo que se espera con este paquete es apoyar a los tomadores de decisiones en la selección de cartera de proyectos de alta calidad. Lo que se quiere con este paquete es resolver problemas de carteras de diversas áreas como de inversión financiera, I&D, etc. PROSEL es una herramienta que intenta maximizar la capacidad del tomador de decisión estructurando y analizando la información. Los autores utilizan un modelo de programación matemático 0-1 para la resolución del problema de selección de proyectos. Además se basa en métodos de dos tipos, de decisión multicriterio y de múltiples objetivos

A continuación se muestran las etapas de PROSEL para el análisis de la decisión:

- Identificación de las alternativas a evaluar.
- Claridad de las metas y objetivos que se deben cumplir al elegir la mejor alternativa.
- Identificar la medicas que cuantifican cuan bien se cumplen las metas y objetivos.
- Cuantificar el nivel de cada medida de acuerdo a cada alternativa.
- Cuantificación de las preferencias sobre diferentes niveles de medidas
- Ordenación de las preferencias al combinar las información de los paso 6.
- Ordenamiento de las preferencias al combinar la información de los pasos 2 pasos anteriores.
- Análisis de sensibilidad para observar los efectos de los resultados de cambios en los niveles de medida o en preferencias

Este software trabaja bien para instancias con número de proyectos menor a 20 ya que no se han hecho estudios con mayor valor. Además el tomador de decisión requiere de un conocimiento amplio del modelo matemático y del método de solución.

En carteras de I&D Christian Stummer y Kurt Heidenberge(2003) presentan una aproximación al análisis de estas carteras. Los autores mencionan que es una aproximación numéricamente tratable y esto permite que no sean necesarias suposición a priori de las preferencias del tomador de decisiones. La aproximación esta dividida en tres etapas

- Revisión de proyectos aquí se identifican lo proyectos que valen la pena considerar, con ello el numero de proyectos se mantiene en una cantidad manejable por medio de un ranking

- Determinación de todas las carteras factibles aquí se identifican todas aquellas carteras que contengan proyectos que hayan pasado la 1era fase y además que brinde un mayor beneficio. Para identificar las carteras factibles se utiliza un modelo de programación multi-objetivo lineal entero

- Ayuda al tomador de decisión aquí se trabaja de manera iterativa y facilita la selección de la cartera que cumple de la mejor manera la necesidades del tomador de decisión; en esta etapa los autores implementan un metaheurísticas ya que el numero de objetivos es muy grande.

La desventaja de esto es que en la segunda y tercera sección el número máximo de proyectos que se puede manejar son 30; además, algunas compañías no tiene todos lo registros que esta implementación necesita.

En la actualidad se han desarrollado diversas investigación de problemas de optimización multi-objetivo, la mayoría de estos trabajos solo estudian casos con 2 o 3 objetivos y su eficiencia decrece con el aumento de objetivos.

López Cervantes 2008 en su trabajo de tesis de maestría utiliza una relación de preferencia "Borrosa" de sobreclasificación y con esto una modificación al algoritmo NSGA-II. López supera las limitaciones que se tiene al incrementar el numero de objetivos al introducir la relación de preferencia “borrosa”. En sus investigaciones ha probado instancias hasta de 9 objetivos, obteniendo soluciones muy satisfactorias. Sin embargo, la mayor limitación que presenta este material se reduce en la complejidad que representa para el tomador la decisión de comparar 2 carteras en base a los valores que toma los objetivos, debido precisamente al elevado numero de estos (mucho mayor que 2). Además, debido a esto, no se puede comparar estos resultados con la verdadera frontera de pareto y se obtienen otros parámetros para elegir las mejores soluciones, pero con ello sigue la complejidad para el tomador de decisiones.

La investigación realizada por Coello (2006) 20 Years of Evolutionary Multi-Objective Optimizacion proporciona una descripción general en del campo ahora conocido como “Optimizacion evolutiva multiobjetivo”; en este trabajo se se discute algunos algoritmos representativos que se han desarrollado hasta ahora. La mayor parte de los esfuerzos hechos se han enfocado en optimizar problemas con dos o tres objetivos. Sin embargo en la práctica muchos problemas involucran una mayor cantidad de criterios a optimizar.

Los problemas con un mayor número de objetivos se conocen en la actualidad con el termino de Many-Objetive al que hace referencia Farina y Amato(2002). En años recientes se ha despertado mucho interés en este tema, donde se han desarrollado diversos estudios para evaluar el comportamiento de los algoritmos ante este tipo de problemas. A continuación algunos de estos estudios:

- Khare,Yao y Deb.(2003) Performance Scaling of Multi-objective Evolutionary Algorithms.
- Hughes.(2005) Evolutionary Many-Objective Optimisation: Many Once or One Many?.
- Ishibuchi, Kuwajima y Nojima.(2008) Evolutionary Multi-objective Rule Selection for Classification Rule Mining.

- Purshouse y Fleming.(2003) Evolutionary Multi-Objective Optimisation: An Exploratory Analysis.

Hughes 2005, compara tres diversos acercamientos de la generación de Pareto que emerge en problemas multiobjetivo y many objetivo. El primer acercamiento utiliza el establecido método de generación de Pareto (NSGA-II), el segundo combina optimizaciones objetivas múltiples en un solo funcionamiento y el tercer utiliza funcionamientos múltiples de un solo optimizador objetivo.

Los resultados presentados por Hughes (2005) demuestran que se gana mucho generando el sistema entero de Pareto en un solo funcionamiento, cuando se esta comparando a las optimizaciones objetivo repetidas. También muestran que NSGA-II pierde su eficacia mientras la dimensionalidad del problema aumenta.

Hay ciertas dificultades que ocurren al aplicar algunos de los algoritmos evolutivos basados en dominancia de Pareto a problemas con mas de tres objetivos; estas dificultades son señaladas por Ishibuchi et al. (2008) y son las siguientes:

- Deterioro de la habilidad de búsqueda
- Dificultad en la visualización de las soluciones
- Crecimiento exponencial en el número de soluciones requeridas para aproximar el verdadero frente de pareto.

Como resultado todos estos estudios han reportado que al incrementa la cantidad de objetivos, la mayoría de los algoritmos o enfoques, principalmente los estudios basados en la dominancia de Pareto, degradan representativamente su desempeño y la calidad de los resultados obtenidos.

Por esto se han hecho diversas propuestas para resolver problemas de optimización con mas de tres objetivos(muchos objetivos):

- Sanghamitra Bandyopadhyay, Saha, Maulik, and Deb.(2008) A Simulated Annealing-Based Multiobjective Optimization Algorithm: AMOSA.
- Hughes.(2003) Multiple Single Objective Pareto Sampling.
- Hughes.(2007) MSOPS-II: A General-Purpose Many-Objective Optimiser
- Liu, Tan y Ho. (2007)A Distributed Co-Evolutionary Particle Swarm Optimization Algorithm.
- Farina y Amato. (2002) On the Optimal Solution De_nition for Many-criteria OptimizationProblems.
- Purshouse y Fleming.(2003) An Adaptive Divide-and-Conquer Methodology for Evolutionary Multi-criterion Optimisation.

Sin embargo, son pocos los esfuerzos que se han realizado. Por ende se da la necesidad de contar con técnicas eficientes y robustas ante los aumentos en la cantidad de objetivos.

4. CONCLUSIONES

El modelo de impacto de la cartera de proyectos sociales propuesto por Fernández et al. es a nuestro juicio el mejor fundamentado y formalmente expresado por lo que ha sido adoptado en la presente investigación como medida de impacto de la cartera, sin embargo el número de objetivos de este modelo crece según los estratos sociales por lo que rápidamente puede convertirse en un modelo con muchos objetivos (many objective optimization), hecho que dificulta al tomador de decisiones la comparación entre dos carteras y por ende encontrar un compromiso satisfactorio.

A partir de la revisión del estado del arte, no existe un método satisfactorio para apoyar al tomador de decisiones en la comparación de dos carteras en presencia de muchos atributos.

Entre los procedimientos reportados en la literatura para abordar el apoyo a la decisión en problemas con muchos objetivos los métodos de reducción de objetivos son los más simples y fáciles de interpretar por los tomadores de decisión, por ello se ha decidido emplear un método de reducción de objetivos en el problema de optimización de carteras de proyectos sociales.

III. MARCO TEORICO

1. INTRODUCCION

En el presente capítulo se habla de las bases teóricas de esta investigación, como el problema de Optimización de carteras sociales puede ser tratado como un problema de Optimización Multiobjetivo además de las ventajas de resolver este problema con un algoritmo evolutivo multiobjetivo. En la sección 2 del capitulo se describe este problema como un problema de decisión en el cual es importante la incorporación de las preferencias del tomador de decisiones; en la sección 3 se habla de los problemas de selección y ranking; en la sección 4 se estudia los problemas de Optimización Multiobjetivo además de hablar de las técnicas tradicionales para la Optimización Multiobjetivo así como las desventajas al trabajar con estos métodos; en la sección 5 se estudian los algoritmos evolutivos en 4 subsecciones: Introducción de los algoritmos evolutivos; las técnicas evolutivas para la optimización multiobjetivo; las ventajas de los algoritmos evolutivos y las desventajas de los AE's . En la ultima sección se elaboran las conclusiones del capitulo.

2. PROBLEMAS DE DECISION

Los problemas de decisión son problemas que se dan en la vida cotidiana por ejemplo al decidir cual par de zapatos comprar, que camión tomar para llegar a cierto lugar, y la mayoría de las veces no nos ponemos a pensar en cual seria la mejor opción simplemente tomamos una decisión. La mayoría de las veces no nos damos cuenta pero hay ciertas preferencias que influyen en una situación concreta de decisión, en cuestión de que camión elegir podríamos elegir que camión me deja mas cerca a mi destino o que camión hace menor tiempo en el recorrido, o simplemente tomamos el camión que pase primero etc. todas estas preferencias implícitas o explicitas influyen en la decisión final que tomamos.

Un problema de decisión en forma general se puede definir como dar una respuesta de Si o No a un cierto curso de acción. Los componentes en los que esta centrado un problema de decisión son:

- Un tomador de decisiones (DM), persona o grupo a cargo de elegir una solución para el problema de decisión.
- Conjunto de objetos (alternativas, opciones, acciones, etc.) sobre los cuales debe pronunciarse el DM para resolver el problema de decisión.

En la práctica el problema de decisión por sus objetivos se puede describir como (Roy y Vanderpooten, 1995), Se tiene un conjunto A de alternativas, opciones o acciones potenciales y se desea:

- Que el DM pueda seleccionar la mejor o mejores alternativas del conjunto A según sus preferencias, buscando siempre reducir al máximo el cardinal del conjunto de mejores soluciones. (P_{α})
- Asociar cada objeto a una categoría predefinida (clasificar o evaluar) según el sistema preferencias o creencias del DM. (P_{β})
- Hacer un ordenamiento (ranking) del conjunto A de acuerdo a criterios de calidad de cada objeto, también en correspondencia con las preferencias del DM. (P_{γ})

- Esclarecer una decisión mediante una descripción, con un lenguaje apropiado, de las acciones y de sus consecuencias. El resultado es una descripción o un procedimiento cognitivo de las posibles relaciones causales entre estos elementos. (P_δ) (Flament, 1999)

El cardinal del conjunto A es libre, este puede contener pocos, muchos o incluso infinitos elementos. El conjunto de decisión puede describirse por una lista o mediante restricciones matemáticas sobre las variables de decisión. Cuando A está dado por una lista generalmente tiene un cardinal pequeño o moderado y estamos ante un problema de selección, ranking o clasificación. Cuando A está descrito por restricciones matemáticas la cantidad de elementos del conjunto pude ser muy grande o incluso infinita, y en ese caso P se convierte en un problema de optimización.

3. PROBLEMAS DE SELECCIÓN Y RANKING (P_α Y P_γ)

Según Leyva (2001) los problemas de selección y de ranking (para el caso de tamaño moderado del conjunto de alternativas), son estudiados principalmente por dos escuelas que son capaces en cualquiera de los casos, de elegir a la mejor opción u ordenar el conjunto de decisión. Junto con el pragmático "proceso análitico-jeraquico" (Saaty, 1980), que escapa a esta clasificación, son en la actualidad las tendencias más aceptadas, por el número de personas que trabajan en ellas y por la cantidad de aplicaciones y artículos publicados con que cuentan: la escuela norteamericana que se basa en el análisis normativo de la decisión, y la escuela europea que se basa en el enfoque constructivo francés de ayuda a la decisión multicriterio.

i. ESCUELA NORTEAMERICANA

Se apoya en la teoría de la función de valor, que posee mayor elegancia formal que cualquier otro enfoque, y su valor normativo para aumentar la consistencia y racionalidad de la decisión es indiscutible (Leyva, 2001; Fernández, 1999); además, constituye a la fecha el mejor modelo teórico de la actitud hacia el riesgo. Magníficas exposiciones de ella pueden encontrarse en (Keeney y Raifa, 1976; French, 1986). La teoría normativa descansa en asumir que el DM puede establecer una relación de preferencia "al menos tan buena como" ($\succcurlyeq$) sobre el conjunto de alternativas, y que esa relación es transitiva y completa. Sobre la base de cierta construcción axiomática que incluye el postulado anterior, se demuestra que existe, (en el caso de decisiones bajo certidumbre), una función ($V: A \rightarrow R$, donde R es el conjunto de números reales) que coincide con $\succcurlyeq$ sobre A, en el sentido de que para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ $V(\mathbf{a}) \geq V(\mathbf{b})$ equivale a $\mathbf{a} \succcurlyeq \mathbf{b}$.

Bajo el enfoque normativo la función de valor o de utilidad representa un modelo de agregación de preferencias bien formado, estructurado a partir de un conjunto de axiomas que se identifican con el comportamiento racional del DM. El modelo se infiere de los axiomas y de la expresión de preferencias del DM. La tarea del analista es conciliar al DM real con ese ideal de la racionalidad, y de ese modo llegar a la formulación del modelo. La búsqueda de una solución consiste en el descubrimiento de una alternativa que maximice la función de valor (o la utilidad esperada). Es un problema matemático bien formulado (Leyva, 2001).

Las principales debilidades de este enfoque son las siguientes (Roy, 1990; Roy y Vanderpooten, 1995; Fernández, 1999; Leyva, 2001):

- Con frecuencia es necesario contar uno o varios analistas para llevar a cabo la modelación.
- Aun cuando el número de atributos sea pequeño, hay notorias dificultades prácticas para establecer una función de valor o de utilidad

multiatributo que modele razonablemente bien el comportamiento del DM.

- La teoría establece un modelo ideal de DM. El DM real ha de compararse con el DM ideal. En ocasiones la diferencia modelo-realidad es importante. Algunas veces estas discrepancias pueden superarse; sin embargo, si éstas son producidas por factores psicológicos que no pueden ser reflejados en una teoría normativa, entonces el DM puede no sentirse a gusto con un modelo que no representa su propia personalidad.
- A menudo no existe el verdadero DM, o el analista no tiene acceso a él.
- La información disponible es demasiado imprecisa o demasiado subjetiva.
- Si la entidad decisora es un grupo no se puede sustentar teóricamente la existencia de funciones de valores de utilidad.

El enfoque normativo asume una consistencia fuerte de las estructuras de preferencias del DM. En muchos casos prácticos resulta difícil o imposible hacerlo verdaderamente operacional. Sin embargo, si esto se logra, resulta muy fácil explotar V y obtener una recomendación para el problema del ordenamiento (Leyva, 2001); se obtiene un pre orden completo de A que está implícito en V. Si se desea resolver P_α simplemente hay que maximizar V.

ii. ESCUELA EUROPEA

Representa el modelo relacional de integración de preferencias y constituye la tendencia predominante en Francia, Países Bajos y otros de Europa. Se auto reconoce como Múltiple Criteria Decisión Aid (MCDA), por contraposición con los enfoques normativos y algunos heurísticos que se agrupan bajo el término Múltiple Criteria Decisión Making (MCDM). El objetivo de un estudio realizado con técnicas de MCDA es el de proporcionar al DM sugerencias para resolver su problema de decisión. Esa información se traduce en prescripciones o recomendaciones, propuestas concretas con relación a la toma de decisiones que debe realizarse (Leyva, 2001).

En MCDA el modelo de integración de preferencias está basado en una relación de sobreclasificación (“outranking relation” en la literatura inglesa). En este enfoque el objetivo principal es construir o crear algo que, por definición, no existe antes del proceso de ayuda a la decisión (Roy y Vanderpooten, 1995). Su objetivo es ayudar al actor que forma parte del proceso de decisión a:

- Formular, y/o argumentar, y/o transformar sus preferencias, o
- A tomar una decisión conforme a sus objetivos.

Para modelar el comportamiento del DM real (distinto del ideal normativo, con una capacidad infinita de discriminación), Roy introdujo cuatro relaciones fundamentales (Roy, 1996):

- **Indiferencia:** Las dos acciones son indiferentes si existen claras y positivas razones para decidir la equivalencia. Notación: *a**I**b*. La relación ***I*** es simétrica y reflexiva.
- **Preferencia estricta:** Existen claras y positivas razones para justificar que una de las dos acciones (bien especificada) es significativamente preferida a la otra. Notación: *a**P**b* ; ***P*** es asimétrica.
- **Preferencia débil:** Una de las acciones (digamos b) no es preferida a la otra (a), pero es imposible afirmar que ésta sea preferida estrictamente a b o sean indiferentes, pues ninguna de esas situaciones predominan. Notación: *a**Q**b*. La relación ***Q*** es asimétrica.
- **Incomparabilidad:** Las dos acciones son incomparables en el sentido de que ninguna de las tres situaciones anteriores (***I***, ***P***, ***Q***) predomina. Notación: *a**R**b*, siendo ***R*** simétrica.

Relación de Sobreclasificación (Outranking):

Para aumentar la flexibilidad de su sistema de relaciones fundamentales, Roy (1996) introdujo una nueva relación, que llamó de sobreclasificación:

La acción *a* sobreclasifica a *b* ($a\boldsymbol{S}b$) si existen claras y positivas razones para establecer que $a\boldsymbol{P}b$ o $a\boldsymbol{Q}b$ o $a\boldsymbol{I}b$. Más formalmente $a\boldsymbol{S}b \leftrightarrow a\boldsymbol{P}b \vee a\boldsymbol{Q}b \vee a\boldsymbol{I}b$.

Note que:

$\boldsymbol{S}$ es reflexiva y además: $a\boldsymbol{S}b \wedge b\boldsymbol{S}a \leftrightarrow a\boldsymbol{I}b$

$a\boldsymbol{S}b \wedge bn\boldsymbol{S}a \leftrightarrow a\boldsymbol{P}b \vee a\boldsymbol{Q}b$

De acuerdo con Félix (2006), para que la acción *a* sobreclasifique a *b* se requieren argumentos claros que justifiquen la pertenencia de (*a,b*) bien sea a ***P***, a ***Q*** o ***I***, pero también se requiere que no existan argumentos de peso a favor de $b\boldsymbol{P}a$, pues ellos negarían la sobreclasificación. Los argumentos a favor de $a\boldsymbol{S}b$ constituyen la coalición de concordancia (Roy, 1990); los argumentos a favor de $b\boldsymbol{P}a$ se agrupan en la coalición de discordancia. Entonces se puede dar a la relación *S* el siguiente significado: *a* sobreclasifica a *b* si de acuerdo al sistema de preferencias del *DM* en un problema de decisión determinado, se considera que hay suficientes argumentos a favor del enunciado "la acción *a* es al menos tan preferible como la acción *b*", y no hay argumentos de suficiente peso en su contra. Esta idea de sobreclasificación es la base sobre la que descansan los métodos ELECTRE para la decisión multicriterio en sus diferentes variantes (ver por ejemplo (Roy, 1990; Ostanello, 1984; Roger et. al., 2000)).

Otra noción importante es la del veto. Supongamos que en un problema multicriterio el atributo *j-ésimo* está en la coalición de discordancia de *aSb*. Sin pérdida de generalidad y siguiendo a Félix (2006), aceptemos que las evaluaciones del atributo j-ésimo pueden hacerse mediante una función cardinal g_j, creciente con la preferencia. Entonces $g_j(b) > g_j(a)$. Mientras mayor sea la diferencia $g_j(b)$ - $gj(a)$, más intensamente prefiere el *DM* a *b* respecto al atributo *j-ésimo*. Si este atributo tiene suficiente importancia dentro del sistema de preferencias del *DM*, la diferencia $g_j(b)$ - $gj(a)$ puede llegar a ser tan significativa que haga dudar seriamente de la veracidad del enunciado de sobreclasificación. Entonces se dice que el atributo tiene poder de veto, y que la diferencia $g_j(b)$ - $gj(a)$ ha llegado a ser de tal envergadura que se ha producido una situación de veto. La magnitud de la diferencia mínima con capacidad de veto se modela con un umbral de veto v_j, que puede depender de los valores de $g_j(b)$ o $gj(a)$. No necesariamente cualquier criterio tiene capacidad de veto (Felix, 2006).

Según Leyva (2001), a diferencia de MCDM, MCDA por lo regular no formula un problema matemático sin ambigüedad. Sobre la base de una familia de criterios e información adicional intercriterios, el problema es elaborar un modelo matemático que nos permita comparar las alternativas o acciones potenciales de una manera general. Las condiciones que se emplean para establecer las relaciones de sobreclasificación (condiciones de concordancia y discordancia) están orientadas a construir un modelo de integración de preferencias realistas y respetuosas de la diferencia y conflicto. El modelo resultante, aún cuando es más confiable, generalmente es más pobre que la función de valor *V*; esto significa que por lo general solamente es posible producir “recomendaciones parciales”, es decir, un preorden no completo (parcial). Aún más, debido a la presencia de intransitividades es difícil deducir tales recomendaciones parciales.

Los métodos de integración multicriterio están diseñados para construir una recomendación sobre un conjunto de alternativas acorde a las preferencias del DM o de un grupo de DMs. En algunos enfoques, como en MAUT (MultiAttribute Utility Theory), la recomendación se deduce de inmediato del proceso de integración de preferencias. Sin embargo, cuando el proceso de integración está basado en el enfoque de sobreclasificación se requiere de un tratamiento especial para construir dicha recomendación (Vanderpooten, 1990; Leyva, 2001). Comúnmente se distinguen dos pasos básicos en todos los métodos de sobreclasificación (Fernández y Leyva, 2004):

- La construcción de una (o varias) relación (es) de sobreclasificación para modelar las preferencias del DM.
- La explotación de la(s) relación(es) de sobreclasificación a fin de presentar una recomendación acorde a una formulación del problema específico.

4. PROBLEMAS DE OPTIMIZACION MULTIOBJETIVO

La optimización multiobjetivo o multicriterio tiene la particular característica de que no existe una solución única que optimice simultáneamente todos los criterios de calidad (objetivos), sino un conjunto de soluciones válidas donde todas y cada una de ellas deben ser consideradas. Esta característica es consecuencia del conflicto de los atributos y da lugar al concepto de soluciones *no dominadas*, que se abordará en rigor más adelante.

Un problema de optimización multiobjetivo (MOP) es definido en (Félix, 2006) como:

> El problema de encontrar un vector de *variables de decisión* que satisfaga las *restricciones* y optimice una función vectorial cuyos elementos representen las *funciones objetivo*. Estas funciones forman una descripción matemática de criterios de desempeño que están usualmente en conflicto entre sí. Por lo tanto, el término optimizar significa encontrar aquella solución que daría un valor que el DM considere razonablemente satisfactorio en todas las funciones objetivo. Esta solución dependerá naturalmente del sistema de preferencias del DM y la denotaremos como *el mejor compromiso* (Deiros et. al., 1989)

Entendemos por:

Variables de decisión: son un conjunto de n parámetros cuyos valores dan una solución (puede o no ser válida) a un problema de optimización. Agrupadas en un vector $\vec{X}$ y cada variable representada por xj; donde j=1,2……n. El vector de variables de decisión puede representarse de dos formas: $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ o $\vec{X} = [x_1, x_2, \ldots x_n]^T$

Restricciones: delimitan el problema y validan las soluciones. Por lo tanto, se puede decir que las restricciones dibujan el contorno de la región donde se encuentra el conjunto factible del problema. Las restricciones son funciones de las variables de decisión y son expresadas con ecuaciones de igualdad o desigualdad.

$g_i \leq 0$, i=1, … m *restricciones de desigualdad*

$h_i = 0$, i=1,… p *restricciones de igualdad*

Función objetivo: Las funciones objetivo forman el criterio de evaluación para saber qué tan buena es una solución; al igual que las restricciones, son funciones de las variables de decisión. En la optimización multiobjetivo existen dos o más funciones objetivos $\left(f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}), \ldots f_k(\vec{X})\right)$ en cada problema. El vector de funciones objetivo puede también representarse de dos formas:

$$\vec{f}(\vec{X}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ . \\ . \\ . \\ f_k(\vec{X}) \end{bmatrix} \quad o \quad \vec{f}(\vec{X}) = [f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}), \ldots f_k(\vec{X})]^T$$

En resumen un problema de optimización multiobjetivo (MOP: por sus siglas en ingles) es un conjunto de n variables de decisión, k funciones objetivo, m restricciones de desigualdad y p de igualdad. En estos problemas el objetivo de la optimización es encontrar el vector de decisión $\vec{X}$ para:

Minimizar o Maximizar

$$\vec{f}(\vec{X}) = \left[f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}), \dots f_k(\vec{X})\right]^T \quad (1)$$

cumpliendo con:

$$\vec{g}(\vec{x}) \leq 0 \; ; \; \vec{g} = [g_1 \; g_2 \; \dots \; g_i \; \dots \; g_m]$$

$$\vec{h}(\vec{x}) \leq 0 \; ; \; \vec{h} = [h_1 \; h_2 \; \dots \; h_i \; \dots \; h_p]$$

No existe la solución óptima ideal (aquélla óptima en todos los objetivos simultáneamente). Buscamos entonces el mejor compromiso. En este afán, es necesario tener claros los conceptos *conjunto factible, dominancia de Pareto, optimo de Pareto, frente de Pareto*.

Conjunto factible: El conjunto factible *S* está definido como el conjunto de vectores de decisión $\vec{\boldsymbol{X}}$ que satisfacen las restricciones de desigualdad $\vec{g}_i\,(\vec{X})$ y las restricciones de igualdad $\vec{h}_i\,(\vec{X})$

$$S = \{\vec{x} \in \vec{X} / \vec{g}\,(\vec{x}) \leq 0 \; \wedge \; \vec{h}(\vec{x}) = 0\} \quad (2)$$

La imagen de *S* en el espacio de las funciones objetivo está definido por $Z = \vec{f}\,(S)$

Dominancia de Pareto: Para dos vectores de decisión: $\vec{x^*}, \vec{y^*} \in X$ se dice que x^* domina a y^* si y sólo si

- La solución $\vec{x^*}$ no es peor que $\vec{y^*}$ en ninguno de sus objetivos. En caso de minimización la formula sería:

$$f_j(\vec{x^*}) \leq f_j(\vec{y^*}), \forall \, j = 1, 2, \dots M.$$

- La solución $\overrightarrow{x^*}$ es estrictamente mejor que la solución $\overrightarrow{y^*}$ en al menos un objetivo.

$$f_j(\overrightarrow{x^*}) < f_j(\overrightarrow{y^*}), \qquad para\ al\ menos\ un\ \ j \in 1, 2, \ldots M.$$

y lo denotaremos como $f(x^*) < f(y^*)$

Optimo de Pareto: Un vector de decisión $\overrightarrow{x^*}$ es óptimo de Pareto si y sólo si:

$$\overrightarrow{x^*} \in S \mid \neg \exists\, \overrightarrow{y^*} \in S \mid \vec{f}(\overrightarrow{y^*}) \leq \vec{f}(\overrightarrow{x^*})$$

Esta fórmula podemos interpretarla como; un vector de decisión que es miembro del conjunto factible *S* es óptimo de Pareto si no existe otro vector de decisión $\overrightarrow{y^*}$ que pertenezca a *S* y que lo domine. Si es óptimo de Pareto se dice que es solución *no dominada* del MOP.

El concepto de óptimo de Pareto tiene gran importancia en optimización multiobjetivo, pues se puede demostrar fácilmente que el mejor compromiso es siempre una solución de Pareto (Fernández, 1987).

Frontera de Pareto: Para un MOP dado y un conjunto óptimo de Pareto P^*, la frontera de Pareto (*FP*) se define como:

$$FP^* = \{u = f = (f_1(x), \ldots . f_k(x)) \mid x \in P^*)\} \tag{3}$$

Cabe mencionar que algunos problemas presentan diferentes fronteras de Pareto ficticias que atraen la mayoría de las soluciones; estos conjuntos son conocidos como fronteras de Pareto locales.

Desde que el economista *Vilfredo Pareto* introdujera en 1896 el concepto de *solución no dominada* se han desarrollado un gran número de técnicas de optimización multiobjetivo tanto tradicionales (investigación de operaciones), como alternativas (algoritmos evolutivos).

i. TÉCNICAS TRADICIONALES PARA LA OPTIMIZACION MULTIOBJETIVO

La comunidad de investigación de operaciones ha desarrollado numerosas técnicas de optimización multiobjetivo, de entre las cuales mencionaremos las principales. Utilizaremos la clasificación de Hwang y Masud (1979) que atiende al momento en que se modelan las preferencias del DM.

a. MÉTODOS

MÉTODOS SIN MODELACIÓN DE PREFERENCIAS

Aquí se incluyen varios métodos que no toman en consideración las preferencias de quien toma las decisiones. El problema de optimización multiobjetivo es resuelto usando técnicas relativamente simples y la solución encontrada es presentada al DM, el cual puede aceptarla o rechazarla. Como quedan sin modelar las preferencias, es difícil que se arribe a una solución cercana al mejor compromiso. Estos métodos son generalmente utilizados cuando el DM no espera una solución especial y está satisfecho con cualquier solución óptima en el sentido de Pareto. (Toscano, 2001).

Ejemplos de esta clasificación son:

- Método del criterio global.
- Método multiobjetivo de los paquetes próximos.

MÉTODOS QUE MODELAN LAS PREFERENCIAS A POSTERIORI

Estos métodos generan un conjunto de óptimos de Pareto, con el inconveniente de que el proceso de generación es usualmente muy costoso computacionalmente y en la mayoría de los problemas es sumamente difícil alcanzarlo. Estos métodos se dividen en dos subclases: los que pueden encontrar todo el frente de Pareto, y lo que pueden generar únicamente los puntos que se encuentran en los extremos del frente de Pareto. Ejemplos de métodos a posteriori (Toscano, 2001; Hwang y Masud, 1979):

- Método de la función suma ponderada.
- Método de restricciones ε.

MÉTODOS QUE MODELAN LAS PREFERENCIAS A PRIORI

La especificación de preferencias en estos métodos se realiza antes del proceso de solución. La principal dificultad de estos métodos radica en que no siempre se saben de antemano las características deseables que deben de tener las soluciones del problema. A continuación se mencionan sus principales exponentes (Hwang y Masud, 1979; Fernández, 1987):

- Método de la función valor. .
- Método Lexicográfico. .
- Programación de metas. .
- Programación Borrosa.

METODOS INTERACTIVOS

Esta clase es la más desarrollada de las cuatro. Esto se debe a que se solventan la mayoría de los problemas de la toma de decisiones mediante la interacción entre quien toma la decisión y el método interactivo. La forma básica de la interacción es la siguiente (Miettinen, 1999):

1. Inicio
2. Encontrar una solución factible
3. Repetir

4. Interactuar con quien toma las decisiones (INCORPORACION DE PREFERENCIAS)
5. Obtener una nueva solución de acuerdo a esas preferencias
6. Hasta que se acepte la nueva solución
7. fin

Entre numerosos métodos interactivos destacan los siguientes (Toscano, 2001; Hwang y Masud, 1979; Miettinen, 1999):

- STEM
- Programación de metas interactiva.
- Método Interactivo de compromisos valuados.
- Método de satisfacción de compromisos
- Método de Geoffrion-Dyer-Feinberg
- Técnica secuencial de optimización próxima
- Método de Tchebycheff
- Método de punto de referencia
- Método GUESS
- Búsqueda Light Beam.
- Enfoque de referencia de dirección
- Método NIMBUS

b. DESVENTAJAS DE LAS TECNICAS TRADICIONALES

Los métodos tradicionales son bastante limitados y generalmente son lo suficientemente costosos como para obtener una respuesta en un tiempo polinomial a medida que el problema crece (Toscano, 2001). Su eficiencia computacional decae bruscamente con el aumento del número de objetivos y de la cantidad de variables de decisión. Son muy sensibles a las propiedades matemáticas de las funciones objetivo (continuidad, diferenciabilidad, etc.) y a las características de la región factible. En caso de que se encuentren las soluciones no dominadas, éstas suelen corresponder a una única solución o a una porción limitada del frente de Pareto esperado.

Hay bastante consenso de que los métodos interactivos ofrecen mejores posibilidades de encontrar el mejor compromiso (Deiros, et. al., 1989). Generalmente las preferencias no están claras a priori, y una modelación previa resulta cuestionable. Los métodos que incorporan las preferencias a posteriori son muy costosos, pues deben generar casi toda la frontera de Pareto, y entonces todavía el DM debe encontrar la mejor solución resolviendo un problema de selección multicriterio que puede ser complicado con más de tres atributos. En los métodos interactivos el DM pasa por un proceso de aprendizaje que le permite aclarar sus preferencias y prioridades, precisar los compromisos que está dispuesto a hacer, entender mejor la naturaleza del conflicto entre los atributos (Hwang y Masud, 1979). Sin embargo, autores de la talla de French (1986) cuestionan los métodos interactivos basándose en la probable falta de transitividad de la preferencia del DM en la sucesión de soluciones que el procedimiento interactivo genera.

5. ALGORITMOS EVOLUTIVOS

i. INTRODUCCION A LOS ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Los EAs (por sus siglas en ingles) basan su funcionamiento en la simulación del proceso de evolución natural (Goldberg, 1989). Consisten en una técnica iterativa que aplica operadores estocásticos sobre un conjunto de individuos

-la población- con el propósito de mejorar su fitness, una medida relacionada con la función objetivo del problema en cuestión. Cada individuo de la población representa una solución potencial del problema, codificada de acuerdo a un esquema de representación, generalmente basado en números binarios o reales.

Para poder aplicar un EA se requiere de los siguientes seis componentes básicos (Navarro, 2005; Toscano, 2001):

- Una representación de las soluciones potenciales del problema. La representación es la cadena (posiblemente binaria) que codifica las soluciones del problema (a la cadena se le llama cromosoma). A cada posición de la cadena se le denomina gene y al valor dentro de esta posición se le llama alelo.
- Una forma de crear una población inicial de posibles soluciones (normalmente un proceso aleatorio).
- Una función de evaluación que juegue el papel del ambiente, clasificando las soluciones en términos de su aptitud.
- Un mecanismo de selección que permita seleccionar a los individuos de acuerdo a su aptitud. En los algoritmos genéticos se puede llevar el proceso de selección de diversas maneras, ya sea determinística o probabilísticamente (dando la oportunidad a los menos aptos para reproducirse). Las técnicas de selección se pueden agrupar en tres grupos:

1) Selección proporcional: Los individuos se eligen de acuerdo a su aptitud con respecto a la población. Se subdivide en:

- Ruleta.
- Sobrante estocástico.
- Universal estocástico.
- Muestreo determinístico.

Y puede presentar aditamentos como: escalamiento sigma, jerarquías y selección de Boltzman.

2) Selección mediante Torneo: Se selecciona con base en comparaciones directas entre los individuos. Se subdivide en:

- Torneo determinístico.

- Torneo probabilístico.

3) Selección de estado uniforme. Reemplaza a los individuos menos aptos de la generación por los más aptos de la nueva generación. Esta técnica se usa en los EAs no generacionales.

- Operadores genéticos (cruza, mutación y elitismo) que alteren la composición de los hijos que se producirán para las siguientes generaciones. El EA enfatiza la importancia de la cruza sexual (operador principal) sobre el de la mutación (operador secundario) y necesita elitismo para poder converger al óptimo (Toscano, 2001). Existen tres tipos principales de cruza:

1) Cruza de un punto: se selecciona un punto de manera aleatoria dentro del cromosoma de cada padre y a partir de éste se intercambian los materiales genéticos para dar origen a nuevos individuos.

2) Cruza de dos puntos: Igual a la anterior excepto que se generan dos puntos de cruza por cada padre.

3) Cruza uniforme: cruza de n puntos.

- Valores para los diferentes parámetros que utiliza el algoritmo genético (tamaño de la población, probabilidad de cruza, probabilidad de mutación, número máximo de generaciones, etc.).

La heurística evolutiva ha probado ser potente para manejar la complejidad de los problemas exponenciales, y la falta de propiedades matemáticas “nobles” de las funciones del problema, así como eludir las soluciones locales convergiendo a zonas cercanas al óptimo global (Deb, 2001; Coello et. al., 2002).

ii. TECNICAS EVOLUTIVAS PARA LA OPTIMIZACION MULTIOBJETIVO

La gran mayoría de los problemas de optimización del mundo real son realmente problemas multiobjetivo, si bien para manejar su complejidad suelen convertirse a problemas con una sola función objetivo volviendo restricciones las demás funciones objetivo.

Historia de los MOEA's

De acuerdo con Coello et al. (2002), la capacidad de los EAs para resolver problemas con múltiples objetivos fue sugerida en la década de 1960 por Rosenberg, pero hasta mediados de la década de 1980 no se presentó la implementación de un algoritmo evolutivo para optimización multiobjetivo (Schaffer, 1985). A partir de la década de 1990 fueron realizadas una gran cantidad de propuestas de MOEAs, (por sus siglas en ingles) formándose una comunidad de investigadores en el área que trabaja activamente en la actualidad.

Dado que trabajan en paralelo sobre un conjunto de soluciones, los EAs tienen la potencialidad de tratar problemas con objetivos múltiples, hallando en cada ejecución un conjunto de soluciones que aproximan a la frontera de Pareto. Esto representa una importante ventaja respecto a los algoritmos tradicionales, que solamente generan una solución por ejecución. Complementariamente, los EAs tienen otras ventajas respecto a los algoritmos tradicionales, como ser menos sensibles a las propiedades matemáticas de las funciones y restricciones del problema, a la forma o a la continuidad del frente de Pareto, o permitir abordar problemas con espacio de soluciones de gran dimensión Coello (2006, Notas de Curso: Introducción a la Computación Evolutiva).

Un MOEA debe diseñarse para conseguir dos propósitos en forma simultánea: lograr buenas aproximaciones al frente de Pareto y mantener la diversidad de las soluciones, de modo que se puede muestrear adecuadamente el espacio de soluciones y no converger a una solución única o a una sección acotada del frente. El mecanismo evolutivo de los EAs permite lograr el primer propósito, mientras que para preservar la diversidad los MOEAs utilizan las técnicas de *fitness*, *nichos*, *fitness sharing*, *crowding* o similares, utilizadas tradicionalmente por los EAs en la optimización de funciones multimodales (Deb, 2001).

Existe un número considerable de técnicas evolutivas para optimización multiobjetivo. (Coello 1998) las agrupa en:

- Formas simplistas: Suma de pesos, Programación de metas, Satisfacción de metas, Método de restricciones ε.
- Técnicas no basadas en óptimos de Pareto: VEGA, Ordenamiento Lexicográfico, Uso de géneros para identificar objetivos, Uso de Min/Max con pesos, Algoritmo genético no generacional, Uso de pesos generados aleatoriamente y elitismo.
- Técnicas basadas en óptimos de Pareto: MOGA, NSGA, NPGA, NSGA-II.

Posterior a esta clasificación, Deb (2001) presenta una nueva categorización enfatizando en el elitismo como parte agua en las divisiones de los MOEA's.:

- Algoritmos Evolutivos sin Elitismo: VEGA, VOES, Algoritmo Genético basado en Pesos, MOGA, Algoritmo Genético Basado en Pesos Generados Aleatoriamente, NSGA, Algoritmo Genético Basado en Nichos de Pareto, Entre otros...
- Algoritmos Evolutivos con Elitismo: Rudolph´s Elitist AG, NSGA-II, DPGA, SPEA, TDGA, PAES, mGAs

El elitismo es un mecanismo utilizado para asegurar que algunos individuos pasen a la siguiente generación sin alteraciones en su cromosoma por algún operador genético. Los EA's que usan elitismo permiten que ciertos individuos sean llevados a la siguiente generación, sin que su aptitud se deteriore, y con ello converger al óptimo. Algunos estudios han demostrado que el uso de elitismo es necesario para poder demostrar la convergencia de un Algoritmo Genético (Coello et. al., 2002).

Como se observa en las categorías presentadas anteriormente existe una gran variedad de Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo, cuya eficiencia depende en cierta medida de las características del problema que se está resolviendo. No hay fundamentos teóricos suficientes para escoger unos pocos métodos "universales". Una generalidad es que todos están orientados hacia la búsqueda de la frontera de Pareto (el conjunto no dominado); la mayor parte de los EA's no garantiza encontrarla, pero sí hallan una frontera de Pareto *conocida*, que es la que más se acerca a la frontera de Pareto *verdadera*. Hay cierta evidencia experimental de que el procedimiento elitista NSGA-II propuesto por (Deb et. al., 2000) promete una rápida convergencia a la frontera de Pareto, comportándose mejor que muchos de los métodos alternativos (Coello et. al., 2002). Puesto que será parte de nuestra propuesta de solución lo describiremos con mayor detalle algo a continuación.

NON-DOMINATED SORTING GENETIC ALGORITHM, *NSGA-II*

Representante de la tercera oleada de MOEAs distinguida por el empleo de elitismo en conjunción con ranking de Pareto (Coello, 2005), el algoritmo NSGA-II (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*, versión II) fue presentado por K. Deb y sus colegas del Laboratorio de Algoritmos Genéticos del Instituto Tecnológico Kanpur en India en el año 2000 (Deb et al., 2000). Surgió como una versión mejorada del algoritmo NSGA creado por Srinivas y Deb (1994), de quién heredó su estructura principal, pero incluyendo características distintivas para resolver tres aspectos fuertemente criticados en la comunidad de investigadores sobre el NSGA: el ordenamiento no dominado, la ausencia de elitismo y la dependencia de un parámetro externo para aplicar la técnica de *fitness sharing* (*repartición de aptitud*).

Ya que en nuestro algoritmo esta basado en NSGA-II es preciso explicar mas profundamente su funcionamiento. Empieza inicializando de manera aleatoria una población *P* denominada P_0 conteniendo a *N* individuos. La población es ordenada en diferentes capas o clases (en primer lugar los individuos no dominados); la primera clase C_1, por lo general está compuesta de las soluciones no dominadas o de menor debilidad de P_0. La segunda capa C_2 contiene las soluciones no dominadas o de menor debilidad en los individuos de $\{P_0\} – \{C_1\}$ y así sucesivamente hasta clasificar a todos los individuos de P_0. A cada solución se le asigna un *rank* igual al número de capa en que están, considerando que son mejores individuos lo que fueron seleccionados primeramente. A P_t (donde *t* tiene un valor inicial de 0) se le aplican los operadores de selección por torneo binario, recombinación y mutación para crear una población de hijos H_t de tamaño N. Después las poblaciones P_t y H_t se unen para formar $P_t´$ ($P_t´ = \{P_t\} \cup \{H_t\}$) de tamaño 2N. La población $P_t´$ se ordena en capas de acuerdo a los mismos criterios de clasificación aplicados a Pt; a partir de este momento sabemos que la primera capa es una aproximación a Frontera de Parto ecuación (3). Como $P_t´$ es de tamaño 2N y el algoritmo trabaja con poblaciones de tamaño N, se crea la población P_{t+1} tomando los mejores individuos de las capas contenidas en $P_t´$. Por lo general la primer capa pasa completa a P_{t+1} (implementación de elitismo), y después se toman los individuos más aptos (en clases de menor *rank*) de las siguientes capas. Si todos los individuos tienen la misma aptitud se usa una técnica de nicho para mantener la diversidad de la población. NSGA-II utiliza una técnica de nicho basada en una medida de “aglomeración” (crowding distance). Esta medida trata con la densidad de las soluciones en cierta región de las capas no-dominadas. Las soluciones en zonas de menos densidad (de soluciones) son preferidas porque ayudan a mantener la diversidad de la población y a “esparcir” la población de manera más uniforme sobre la FP. Para obtener un estimado de la densidad de las soluciones, NSGA-II toma la distancia promedio de dos soluciones para cada uno de sus objetivos. Esta cantidad es un estimado del perímetro del cuboide formado por los vértices de los vecinos. Cuando P_{t+1} alcanza los N individuos, incrementamos el número de generaciones en uno y P_{t+1} se convierte ahora en P_t y volvemos a generar los hijos… hasta que *t* alcance al número de generaciones (mientras que t < N).

Se presenta el pseudocódigo del algoritmo NSGA-II, basado en la descripción de Deb et al. (2000):

El pseudocódigo del algoritmo es:

Crear la Población Inicial

- -Generar una población (padres) de tamaño N de manera aleatoria
- -Evaluar las funciones de aptitud
- -Generar los conjuntos de capas de No-Dominados
- -Asignar un rank (Nivel) basado en la dominancia de Pareto
- -Generar la Población de Hijos a partir de la población de padres utilizando selección por torneo binario, cruza y mutación.

Mientras i < Numero de Generaciones

- Con la Población de padres e Hijos
  - -Generar los conjuntos (clases) No-Dominados
  - -Asignar un rank (Nivel) basado en la dominancia de Pareto
  - -Seleccionar las soluciones que pasarán a la siguiente generación, iniciando con la primera clase hasta obtener los N individuos
  - -Determinar la “medida de aglomeración” entre los puntos de cada frente.
- Crear la siguiente generación aplicando:
  - -Selección por torneo Binario
  - -Cruza y Mutación
- Incrementar el índice de la siguiente generación

Fin del Ciclo.

Para la selección de los padres, NSGA-II usa una clase especial de Torneo Binario que es llamado “Operador de Selección Por Torneo de Aglomeración” (Deb, 2001). Sin embargo no sugiere técnicas particulares para los operadores de Cruza y Mutación. Enseguida describimos el operador de selección por torneo y un procedimiento para el cálculo de la medida de aglomeración:

Operador de Selección por Torneo basado en una medida de aglomeración

Este operador, denotado por $<_c$, compara dos soluciones y retorna al ganador del torneo.

La definición del operador por torneo basado en medida de aglomeración nos dice que: Una Solución i gana un torneo con otra solución j si una de las siguientes condiciones son verdaderas:

- Si la solución i tiene un mejor rank ($r_i < r_j$)
- Si tiene el mismo rank, pero la solución i tiene una menor medida de aglomeración que la solución j ($r_i = r_j$ y $d_i < d_j$)

Con esto aseguramos que tengan preferencia las soluciones que se encuentren en la mejor clase no dominada (las verdaderas soluciones no dominadas de la población); y cuando compiten soluciones del mismo frente, aquellas que tengan menor medida de aglomeración serán las ganadoras.

Para obtener el estimado de la densidad de las soluciones alrededor de una solución particular i el algoritmo NSGA-II usa un procedimiento que toma la distancia promedio de dos soluciones para cada uno de sus objetivos. El algoritmo utilizado para el cálculo de la medida de aglomeración se describe a continuación:

- Asigna a cada solución del conjunto una distancia crowding igual a cero (d_i =0)
- Para cada función objetivo (m=1,2,3..), ordenar de forma creciente el conjunto o buscar el vector de índices ordenados: I_m= Sort(f_m,>).
- Para cada función objetivo (m=1,2,3,...) asignar una distancia grande a las soluciones de los limites ($d_{I_1^m} = d_{I_l^m} = \infty$) y para el resto de las soluciones asignar (j=2 a l-1):

$$d_{I_i^m} = d_{I_i^m} + \frac{F_m^{I_{J+1}^m} - F_m^{I_{J-1}^m}}{F_m^{max} - F_m^{min}} \qquad (4)$$

Donde I_j denotan el índice de la solución j de la lista ordenada y I_1 y I_l los valores más altos y más bajos de la función objetivo.

NSGA-II ha mostrado buena capacidad de convergencia y diversidad de soluciones de Pareto en problemas con pocos objetivos, pero su desempeño se degrada rápidamente con el aumento del número de objetivos (Coello et. al., 2002).

iii. VENTAJAS DE LOS ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Los algoritmos evolutivos son especialmente apropiados para resolver problemas de optimización multiobjetivo debido a su gran flexibilidad, adaptabilidad y sólido desempeño. Estas características hacen posible que sean capaces de lidiar con diferentes formas de la frontera de Pareto (inconexa, convexa o cóncava), sin que se degrade su desempeño. También le permite localizar y poblar zonas promisorias en problemas con grandes espacios de búsqueda mientras que las técnicas tradicionales no podrían acercarse siquiera a la zona factible de muchos de ellos (generalmente asumen que el frente de Pareto es convexo y que las funciones objetivo son diferenciables). Adicionalmente a esto los algoritmos evolutivos tienen la capacidad inherente de encontrar diferentes miembros del conjunto de óptimos de Pareto en una sola corrida, gracias en gran medida al hecho de que son una técnica poblacional.

iv. DESVENTAJAS DE LOS ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Ya a partir de la segunda generación de MOEAs se observa en la literatura un predominio sustancial de los métodos que buscan generar la frontera de Pareto, y entonces aplicar *a posteriori* las preferencias del DM. En el caso bi-objetivo este segundo proceso de decisión no representa dificultades; pero con una dimensión mayor que tres, la selección del mejor compromiso es un problema discreto de decisión multicriterio que no es esencialmente más simple que la primera búsqueda realizada. A pesar de que las técnicas evolutivas sobrepasan con mucho a las técnicas tradicionales en la búsqueda de los mejores compromisos en un MOP, colocan al DM en serios problemas puesto que los resultados que arroja cualquiera de los algoritmos analizados anteriormente, son demasiados y, en ausencia de un procedimiento riguroso de modelación de preferencias, la solución que sea elegida tiene altas probabilidades de no ser la mejor. De ahí la importancia de las técnicas que intentan incorporar preferencias en los MOEAs.

Todos los MOEAs, si bien en distinto grado, son sensibles al aumento del número de objetivos. En una población de tamaño N_0 escogida al azar, la probabilidad de que un individuo cualquiera sea no-dominado en esa población se incrementa con el número de objetivos, pero al mismo tiempo se reduce la probabilidad de que sea una buena aproximación a un punto de la verdadera frontera de Pareto. Cuando este efecto se hace crítico podemos tener que todos, o la gran mayoría de individuos son no-dominados en esa población, pero están lejos de la verdadera frontera de Pareto. Así, puede reducirse la presión selectiva al verdadero conjunto no-dominado, y aumentar la tendencia a la convergencia local prematura. Los operadores de selección y cruzamiento pueden difícilmente cumplir a cabalidad su rol de explotación en la búsqueda evolutiva.

6. CONCLUSIONES

Los problemas de optimización multiobjetivo son problemas que no se deben considerar solucionado cuando se encuentran soluciones eficientes, pues el tomador de decisiones debe elegir compromisos satisfactorios entre las soluciones que se le proponen; es por ello que en el caso de mucho objetivos, es imperativo desarrollar estrategias de apoyo a la decisión que faciliten, al tomador de decisión, la interpretación de las conclusiones.

Los métodos evolutivos ofrecen una gran ventaja que es ofrecer varias soluciones eficientes (localmente) en una corrida, a diferencia de los AE esto ya que trabajan en base a poblaciones.

IV. METODOLOGIA PROPUESTA

1. INTRODUCCION

En el presente capítulo se estudiará en la sección 2, la descripción general de la metodología que seguimos para estudiar el presente problema; en esta sección definiremos la instancia además, de paso a paso, el método de reducción de objetivos que estamos proponiendo. En la sección 3 se describe el modelo teórico para el problema de carteras de proyectos sociales. En la sección 4 se presenta el modelo lineal entero mixto, como una realización del modelo teórico y se justifica porque resulta impráctico para resolver instancias reales del problema sujeto a investigación. En la sección 5 describimos el método de reducción de objetivos propuesto donde se definirá la relación de sobreclasificación y los pasos a seguir para la reducción de objetivos. En la sección 6 se presenta el algoritmo evolutivo multiobjetivo NOSGA-II que esta basado en el algoritmo NSGA-II pero este incluye dos procesos de filtrado en base a la relación de sobreclasificación descrita en el la sección 5; de este capitulo en la ultima sección se desarrolla las conclusiones de este capitulo.

2. DESCRIPCION GENERAL DE LA METODOLOGIA PROPUESTA

En esta sección se describen de forma general los pasos seguidos para obtener soluciones eficientes de varias instancias de problemas generados automáticamente. En resumen los pasos se listan a continuación:

1. Confección de un modelo teórico que permitiese establecer con claridad los elementos del problema de decisión: alternativas, función objetivo, modelo de preferencias.
2. Con base en el modelo teórico confeccionar un modelo operativo que permita al menos resolver el problema para instancias pequeñas y estudiar el comportamiento de las soluciones eficientes, así como su interpretación.
3. Proponer un método de reducción de objetivos para el problema que se investiga. Demostrar que el problema modificado por la aplicación del método tiene las mismas soluciones eficientes que el problema original.
4. Desarrollar un algoritmo para resolver el problema estudiado, donde por resolver se entiende obtener soluciones eficientes y que éstas puedan ser interpretadas y comparadas sin mucha dificultad por el tomador de decisiones.

En las secciones que siguen se discuten cada uno de estos pasos.

3. MODELO TEÓRICO

En el problema sujeto a estudio considerado como un problema de decisión se definen los siguientes parámetros:

<u>Objetivos</u>: son los indicadores de impacto social considerados relevantes por el tomador de decisiones; por ejemplo clases sociales o estratos baja, media y alta en este caso tendríamos 3 objetivos pero estos se pueden dividir cada una en estratos bajo y alto lo que da lugar a 6 objetivos.

<u>Alternativas:</u> son todas las carteras posibles de proyectos apoyados que puede formarse con las características de mi instancia solución al problema.

Definición de instancia:

- El impacto de los indicadores sociales (j), éste es medido a través de la cantidad de personas que son potencialmente beneficiadas por el indicador del proyecto (i) y lo representamos por $V_{i,j}$.
- Monto en dinero necesario para llevar acabo con éxito el proyecto (i) representado por (M_i).
- El área k y la región s a la que pertenece el proyecto (i).
- El monto total disponible para repartir, esta expresado como B.
- w_i es el peso que se le da a cada objetivo.
- El a_k es el minimo y $A_k$es el máximo porcentaje de B que se puede destinar al área k
- El r_k es el minimo y $R_k$es el máximo porcentaje de B que se puede destinar al área s.

Una cartera puede representarse en un conjunto **δ** de valores binarios {**δ_i**}

Una cartera factible cumple con lo siguiente:

- Las restricciones de asignación de dinero a cada área y región.
- Que el monto total requerido para financiar los proyectos de la cartera sea inferior o igual al monto disponible.

Con esto podemos representar el problema de la siguiente manera, que es un modelo teórico:

$$Max\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j V_{1,j}\ ,\qquad \sum_{j=1}^{n}\delta_j V_{1,j}\ ,\qquad \dots\ ,\sum_{j=1}^{n}\delta_j V_{1,j}\right)$$

(5)

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n}\delta jMj \leq B$$

(6)

Esta restricción garantiza que no se exceda del monto total disponible.

$$a_k \leq \sum_{j=J_k}\delta jMj \leq A_k$$

(7)

Esta restricción garantiza el porcentaje de dinero que se dispone para cada área. Donde J_k define el índice de los proyectos que están en el área k.

$$r_s \leq \sum_{j=J_l}\delta jMj \leq R_s$$

(8)

Esta restricción garantiza el porcentaje de dinero que se dispone para cada región. Donde J_l define el índice de los proyectos que están en el área s.

La primera restricción (6) es la restricción del monto total, la restricción (7) se refiere al dinero a asignar en cada área definida en el problema y la restricción (8) es para la asignación de dinero definida para cada región.

4. MODELO LINEAL ENTERO MIXTO

Expresamos a continuación el modelo lineal entero mixto para el problema de estudio

$$Max\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{n} \delta_j V_{i,j}\right) \tag{9}$$

Sujeto a las restricciones: (6),(7) y (8)

Como vemos, en este modelo resulta impráctico para generar una aproximación a la Frontera de Pareto aceptable ya que si tenemos 10^9 ciclos del procedimiento y podemos suponer que se tarda 1milisegundo por cada corrida, entonces nos tardaríamos 11 días en resolverlo lo cual es ineficiente.

Pero este modelo nos permitió demostrar que efectivamente los objetivos entran en conflicto.

5. METODO DE REDUCCIÓN DE OBJETIVOS PROPUESTO

Basándonos en trabajos previos (Fernández y su equipo de trabajo 2008), se han definido medidas proxi que aproximan la función de satisfacción social, estos atributos indican el número de personas impactadas en cada clase social y con esto se tendrán tantos objetivos como clases sociales.

Considerando el impacto sobre clases sociales pero por un conjunto de índices de desempeño de variada naturaleza por ejemplo político, ecológico entre otros. Esto conduce a un mayor número de objetivos pero tal ves resulta una mejor aproximación a la función de satisfacción social.

El número de objetivos suele ser mucho mayor que 3 si se desea lograr buenas aproximaciones.

Como mostramos en el capitulo 2 en la sección 3 Coello (2005) se orienta a generar toda la frontera de pareto de estos problemas lo cual resulta tardado cuando hablamos de problemas con muchos objetivos además que después aplicaríamos a los elemento del problema algún crfiterio de preferencia. Nos damos cuenta que la calidad de las soluciones se degrada con el aumento de los objetivos.

Lopez Cervantes (2008) manejando una relación de preferencia borrosa e introduciendo el concepto de superación mejora el problema de trabajar con problemas de mas de objetivos sin embargo la complejidad que muestra al tomador de decisiones al comparar 2 carteras en base a los valores objetivos esto debido a que el nuemero de estos es mucho mayor a 2.

Podemos concluir lo dicho en la sección 3 del capitulo 2 todos los estudios realizados en esta area han reportado que al incrementa la cantidad de objetivos, la mayoría de los algoritmos o enfoques, principalmente los estudios basados en la dominancia de Pareto, degradan representativamente su desempeño y la calidad de los resultados obtenidos.

Debido a las dificultades que presenta el resolver un problema con muchos objetivos, nuestra propuesta se basa en un esquema de reducción de objetivos; para esto definiremos un relación inspirada en los métodos ELECTRE en el conjunto de las carteras. Esta relación permite comparar las carteras dos a dos en cuanto a las preferencias del tomador de decisión.

El modelo de las preferencias del DM puede ser considerado como una relación de preferencia borrosa; estas relaciones son un buen compromiso entre las funciones de valor y las relaciones de preferencia inestables. Las relaciones borrosas son relaciones numéricas como funciones de valor pero pueden modelar fácilmente la incomparabilidad y no la transitividad.

- Definición 1: Sea O un conjunto de alternativas, sea σ una relación de preferencia borrosa en OxO, con σ(x,y) representando el valor de credibilidad de la afirmación "x es al menos tan bueno como y". La condición **$\sigma(x,y) \geq \lambda$** define una relación de sobreclasificación "firme" (no borrosa) **xSy**.

Consideramos la existencia de un umbral **$\lambda>0.5$** aceptable para el predicado xSy y los parámetros de asimetría y simétrica **$\beta>0$** y **ε** **$(0<\varepsilon<\beta<\lambda)$** respectivamente**.**

- Definición 2: Una relación **de preferencia estricta** es denotada de la siguiente manera $\boldsymbol{x}\mathbf{P}(\lambda,\beta)\boldsymbol{y}$ y se da al cumplirse los 3 siguientes enunciados:
    - ***x*** domina a ***y***
    - $\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq \lambda \wedge \sigma(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) < 0.5$
    - $\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq \lambda \wedge (0.5 \leq \sigma(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) < \lambda) \wedge (\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sigma(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})) \geq \beta$
- Definición 3: una relación de indiferencia esta denotada por $\boldsymbol{x}\mathbf{I}(\lambda,\varepsilon)\boldsymbol{y}$ y se cumple si se satisfacen ambos enunciados siguientes:
    - $\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq \lambda \wedge \sigma(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \geq \lambda$
    - $|\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sigma(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})| \leq \varepsilon$

- Definición 4: La relación de preferencia débil es denotada por $\boldsymbol{x}\mathbf{Q}(\lambda,\beta,\varepsilon)\boldsymbol{y}$ dada por la conjunción de los siguientes enunciados:

  - $\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq \lambda \wedge \sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \sigma(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$
  - $\boldsymbol{x}\mathrm{P}(\lambda,\beta)\boldsymbol{y}$
  - $\boldsymbol{x}\mathrm{I}(\lambda,\varepsilon)\boldsymbol{y}$

- Definición 5:La relación de incomparabilidad esta definida por

$$\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \lambda \wedge \sigma(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) < \lambda.$$

- Definición 6: Sea C denota un especificación de parámetros λ, β, ε (λ>0.5 >β >ε >0). Nosotros decimos que C es preferentemente constante si P(λ,β), I(λ,ε), Q(λ,β,ε), R(λ) definidas anteriormente forman un sistema de preferencias en el sentido de (Roy 1996).

A continuación nosotros suponemos que C es preferentemente constante.

Las siguientes definiciones son adaptadas por Fernández et al. (2009a):

- Definición 7: Sea B un subconjunto de O. Si no existe y elemento de A talque yP(λ,β)x, decimos que x es P-no superada estrictamente
- Definición 8: P(λ,β) se dice libre de inconsistencias si no hay ciclos de la relación en O.

- Definición 9: P(λ,β) se dice que es mínimamente libre de inconsistencias si no existe por lo menos una solución P-no superada estrictamente en O.

- Definición 10: Sea $B \subset O$. $\forall$ $x \in B$ definimos el siguiente conjunto de soluciones que superan a x estrictamente como

$$(S_B)_x = \{y \in B \mathbin{/} y\mathbf{P}(\lambda,\beta)x\}.$$

card$(S_B)_x$ es su cardinal, una función de numero entero dependiente de x. Como podemos observar si x es una solución P-no superada en O entonces card$(S_B)_x$=0.

- Definición 11: El conjunto $N_S = \{x \in O$ talque card / $(S_o)_x = 0\}$ es llamado la frontera P-no superada del problema(10).

- Definición 12: Sea $B \subset O$. $\forall$ $x \in B$ definimos el siguiente conjunto de soluciones que superan débilmente a x como

$$(W_B)_x = \{\boldsymbol{y} \in B \mathbin{/} \boldsymbol{y}\mathbf{Q}(\lambda,\beta,\varepsilon)\boldsymbol{x}\}.$$

  card $(W_B)_x$ es su cardinal, una función de numero entero dependiente de x.

- Definición 13: Sea $B \subset O$. $\forall$ $x \in B$ es una solución P- no superada débilmente si *card* $(S_B)_x$ = *card* $(W_B)_x$ = 0.

-

- *Definición 14*: Dada $\sigma(x,y)$ un relación de preferencia borrosa en el conjunto B, sea $a \in B$ se define el conjunto neto de a como:

$$Fn(a) = \Sigma\, c \in B\text{-}\{a\}\ [\sigma(a,c) - \sigma(c,a)]$$

- Definición 15: Sea $B \subset O$. $\forall$ $x \in B$ definimos el siguiente conjunto de soluciones que superan en flujo neto a x como

$$(F_B)_x = \{\boldsymbol{y} \in B \mathbin{/} F_n(\boldsymbol{y}) > F_n(\boldsymbol{x})\}$$

En base a estas definiciones podemos establecer el esquema de reducción de objetivos cuando partimos de un problema de optimización multiobjetivo definido de forma general de la siguiente manera:

Maximizar $\boldsymbol{F}= (f_1(z), f_2(z),\ldots f_n (z))$ (10)

Sujeto a $z\in R_F$

Y donde z denota el vector de variables de decisión y R_F (Región de Factibilidad) es determinado por el conjunto de restricciones.

Los objetivos de este problema pueden ser reducidos en base a las definiciones anteriores en la siguiente forma:

Minimizar $(\mathrm{card}(S_o)_{\mathbf{x}}, \mathrm{card}\ (W_{NS})_{\mathbf{x}}, \mathrm{card}(F_{NW})_{\mathbf{x}})$ (11)

Sujeto a $x\in O$

Nuestro esquema de reducción de objetivos esta basado en el modelo anterior:

Minimizar $(\mathrm{card}(S_o)_x, \mathrm{card}\ (W_B)_x, \mathrm{card}(F_B)_x)$ (12)

Sujeto a $x\in O$

Donde $B=\{y\in O$ tal que $\mathrm{card}(S_o)_x =\mathrm{card}(S_o)_y\}$

Al reducir el cardinal de objetivos a solo tres nos permite trabajar con problemas con objetivos iniciales mucho mayor a dos. Esta reducción de objetivos facilita la comparación 2 a 2 lo que también facilita al tomador de decisiones la toma de su decisión final, ya que se busca la mejor solución compromiso.

6. ALGORITMO EVOLUTIVO MULTI OBJETIVO NOSGA-II

Ahora para resolver este problema nosotros utilizamos un algoritmo basado en NSGA-II (cf. DEB, 2001) y lo definimos como NOSGA-II que es el sucesor del proceso denominado NOSGA (Non-Outranked-Sorting Genetic Algorithm) por Fernández et al. (2010). NOSGA-II esta basada en dos pasos importantes:

1) Un primer paso es un proceso de filtrado similar al que usa NSGA-II pero usando el concepto de no- superación, y se forman las clases C_S donde cada individuo de la clase tienen el mismos card (S_o).

2) El segundo paso se da al cambiar el concepto de distancia crowding por una medida de fuerza η, donde en cada clase C_s se calcula card $(W_{Ci})_x$, card$(F_{Ci})_x$ y con esto η =card $(W_{Ci})_x$ + card$(F_{Ci})_x$

El pseudocódigo de NOSGA-II es el siguiente:

Inicializa la población

Generar una población aleatoria P de tamaño L.

Evaluar los valores objetivos

Evaluar σ en PxP

Para cada x en P calcular card $(S_o)_x$

Generar las fronteras de igual valor de card $(S_o)_x$

Asignar a cada frontera un rank (nivel) basado en card $(S_o)_x$

Para cada C_i hacer

Para cada x en C_i, calcular el card $(W_{Ci})_x$, card$(F_{Ci})_x$, η

Fin Para C_i

Generar la población de hijos Q con tamaño L

Selección por torneo binario

Cruza y mutación

Para i=1 hasta el numero de generaciones

Con P y Q formar P´

Evaluar σ en P´xP´

Para cada x en P´

Calcular card $(S_o)_x$

Asignar a cada frontera un rank (nivel) basado en card $(S_o)_x$

Calcúlate η

Colocar dentro de la siguiente generación hasta que se haya encontrado L individuos

Fin Para x

Remplazar P por los L individuos encontrados

Generar la población de hijos Q con tamaño L

Selección por torneo binario

Cruza y mutación

Incrementar el índice de la generación

Fin Para i

Fin de Procedimiento

7. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha planteado el modelo teórico para el problema de Optimización de carteras sociales. En base a este modelo, se propone un método de reducción así como el uso del algoritmo multi-objetivo denominado NOSGA-II.

V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

1. INTRODUCCION

En este capítulo presentaremos los experimentos hechos con NOSGA-II además de los resultados experimentales que se obtuvieron. En la sección 2 describiremos las características de la instancias usadas en los experimentos, en la sección 3 hablaremos de las adaptaciones hechas a NOSGA-II por ejemplo en el operador de cruza, en la sección 4 haremos un análisis de los resultados obtenidos.

2. CARACTERIZACION DE INSTANCIAS

Se generaron dos clases de instancias:

TIPO 1: instancias chicas cuya frontera de pareto podía ser completamente descrita empleando enumeración exhaustiva. Se generaron instancias de 20 proyectos y 4 objetivos. Los objetivos de esta clase de instancias se obtuvieron al considerar las combinaciones de dos grupos sociales (CLASE_MEDIA, POBRES) y dos niveles de impacto (ALTO, BAJO).

TIPO 2: instancias medianas cuya frontera de Pareto no podía ser generada por enumeración exhaustiva. En estas instancias se consideraron 9 objetivos y 100 proyectos. Los objetivos de esta clase de instancias se obtuvieron al considerar las combinaciones de tres grupos sociales (CLASE_MEDIA, POBRES, EXTREMADAMENTE_POBRES) y tres niveles de impacto (ALTO, MEDIO, BAJO).

Se generaron 5 réplicas de cada clase de instancias.

En la Tabla 8 del anexo A se presentan datos de una instancia de TIPO 2, donde los objetivos se han nombrado según la combinación de grupo social e impacto, así por ejemplo EP_MI significa: que el objetivo se refiere a las personas que pertenecen al grupo social Extremadamente Pobres y el nivel de impacto es Medio. También se puede observar en la penúltima fila de la tabla que el DM considera que el objetivo más importante es el primero. En segundo nivel de importancia están los objetivos 2 y 4. Tienen importancia promedio los objetivos 3 y 5. Los restantes objetivos tienen menos importancia, siendo el último objetivo el menos importante.

3. DESCRIPCION GENERAL DE LOS EXPERIMENTOS

Los experimentos se realizaron en tres etapas:

1. Validación de que las instancias tienen los objetivos en conflicto usando un método exacto de solución. Para cada réplica y cada objetivo se realizó una corrida asignando peso 1 al objetivo que se deseaba maximizar y un peso de 0 al resto de los objetivos. Si para una réplica resultaba que los objetivos no estaban en conflicto entonces se volvía a generar, afortunadamente todas las réplicas generadas presentaban objetivos en conflicto. Véase por ejemplo la donde se presentan los resultados de las corridas para cada varios objetivos en la primera réplica de instancia TIPO 2. Los resultados resaltados constituyen el valor óptimo del objetivo optimizado.
2. Validación y ajuste del algoritmo NOSGA-II empleando instancias de tipo I: se generaron las fronteras de pareto de las 5 instancias empleando la enumeración exhaustiva (se evaluaron todas las carteras posibles y se compararon dos a dos para obtener las no dominadas). Luego se ejecuto

el algoritmo con diferentes parámetros de operación, diferentes operadores y expresiones para la distancia crowding.Tabla 9 del anexo A pueden observarse los mejores resultados obtenidos por el algoritmo NOSGA II y la enumeración exhaustiva. En el anexo B se presentan los operadores que se usaron en los experimentos.

3. Para cada replica de cada tipo de instancias se confecciono un pool de soluciones empleando NSGA-II y empleando NOSGA-II, en cada pool se seleccionaron las 100 mejores soluciones y se compararon los resultados obtenidos por ambos métodos. Los resultados para las replicas de la instancia de tipo 2 pueden ser vistos en laTabla 10 del anexo A. En la tabla se pueden observar cuantas soluciones obtenidas por NSGA-II son no dominadas (ND) y no superadas (NS) respecto a NOSGA-II y viceversa.

Tabla 1 : resultados de las corridas para cada varios objetivos en la primera réplica de instancia TIPO 2

Obj.	**1**	**3**	**4**	**5**	**7**	**8**
1	**560000**	475000	510000	500000	500000	480000
2	905000	770000	915000	980000	1045000	890000
3	465000	**700000**	545000	455000	435000	485000
4	1140000	1185000	**1380000**	975000	1110000	1020000
5	1170000	1020000	855000	**1425000**	1185000	1170000
6	405000	525000	315000	300000	420000	465000
7	882000	864000	834000	924000	**1050000**	756000
8	954000	840000	804000	948000	702000	**1272000**
9	498000	612000	618000	480000	504000	204000

4. ANALISIS DE RESULTADOS

En las réplicas de la instancia de tipo 2 no podemos conocer la verdadera frontera de pareto ya que cuenta con 100 proyectos y 9 objetivos que dan 1,267,650,600,228,229,401,496,703,205,376 combinaciones posibles. Por tanto no podemos comparar contra la verdadera frontera de pareto y tendremos que basarnos en algunos criterios complementarios para argumentar la calidad de los resultados.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en cada una de las instancias de tipo 2 que son de 100 proyectos y 9 objetivos:

Tabla 2 Primera Instancia Tipo 2:

Algoritmo	No-dominadas	No-superadas
NSGA-II	66/100	5/100
NOSGA-II	21/21	21/21

Tabla 3: Segunda Instancia Tipo 2

Algoritmo	No-dominadas	No-superadas
NSGA-II	88/100	5/100
NOSGA-II	29/29	29/29

Tabla 4: Tercera Instancia Tipo 2

Algoritmo	No-dominadas	No-superadas
NSGA-II	82/100	0/100
NOSGA-II	32/32	32/32

Tabla 5: Cuarta Instancia Tipo 2

Algoritmo	No-dominadas	No-superadas
NSGA-II	77/100	0/100
NOSGA-II	15/15	15/15

Tabla 6: Quinta Instancia Tipo 2

Algoritmo	No-dominadas	No-superadas
NSGA-II	82/100	0/100
NOSGA-II	18/18	18/18

En la notación ## / ## el valor de la izquierda significa el total de soluciones no-dominadas o no-superadas conocidas y el valor de la derecha representa el total de soluciones no-dominadas o no-superadas de la primera frontera generada por NSGA-II y NOSGA-II.

Antes se puntualizó nuestro desconocimiento de las verdaderas soluciones no-dominadas y no-superadas. Entonces el valor de la izquierda en los datos presentados arriba lo obtuvimos de un procedimiento auxiliar denominado “nd_vs_ns”, en el cual unimos conjuntos de soluciones no-dominadas del primer frente de NSGA-II y el conjunto de soluciones no-superadas de la primera clase de NOSGA II; de ese conjunto obtenemos los rank de no-dominadas y no-superadas. De ahí podemos estimar cuan robustas son las soluciones que ofrecen los algoritmos. Por ejemplo, el dato 77 / 100 correspondiente al desempeño de NSGA-II en la cuarta instancia tipo 2 significa que 23 de las 100 soluciones del primer frente son dominadas cuando se unió con el mismo frente generado por NOSGA-II. El procedimiento nos muestra que las soluciones no-superadas generadas por NOSGA-II se mantienen como verdaderas no-superadas y parte significativa de las soluciones no-dominadas generadas por NSGA-II son dominadas por alguna de las soluciones que NOSGA-II encuentra.

Los resultados confirman las tendencias mostradas por NOSGA-II en los experimentos de prueba porque se mantiene reducido el cardinal de la primera clase, y las soluciones mantienen su calidad al ser comparadas con los de NSGA-II. Y NSGA-II confirma lo expuesto en la literatura al no funcionar bien con más de 4 o 5 objetivos.

Con el procedimiento auxiliar “nd_vs_ns”, también generamos tres indicadores de calidad a nivel del conjunto de soluciones no-dominadas y no-superadas; estos son los promedios de la debilidad (D_e), fuerza (F_e) y flujo neto (FN), descritos en la siguiente tabla.

Tabla 7:

Instancia	NSvsND	Cardinal Primer Rank	Debilidad	Fuerza	Flujo Neto
1 tipo 2	NS	21	5.09	66.38	37.71
	ND	100	0.35	11.85	-7.92
2 tipo 2	NS	29	5.96	81.03	45.31
	ND	100	0.18	28.64	-13.14
3 tipo 2	NS	32	1.71	104.13	5.24
	ND	100	0.43	36.31	-17.35
4 tipo 2	NS	15	2.13	89.00	60.13
	ND	100	0.39	30.74	-9.02
5 tipo 2	NS	18	4.61	93.11	63.58
	ND	100	0.54	34.42	-11.44

Claramente se observa que los promedios del conjunto de no-superadas dominan obviamente a los promedios del conjunto de las no dominadas, confirmando superioridad a favor de NOSGA-II para este tipo de problemas.

5. CONCLUSIONES

En el presente capitulo se presentan los resultados obtenidos con NOSGA-II. NOSGA-II obtiene un conjunto de soluciones pequeño que puede ser fácilmente interpretado por el tomador de decisiones. Además NOSGA-II supera las limitaciones que tiene NSGA-II al trabajar con 9 objetivos.

VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Hemos desarrollado un método que parece funcionar en el problema que estamos tratando (un método para reducir los objetivos) y denominado NOSGA-II.

- El algoritmo NOSGA-II, que es una modificación a NSGA-II empleando el concepto de no-superación en lugar de no-dominancia e introduciendo una medida de fuerza calculada a partir de la dominancia, converge a unas pocas soluciones que parecen ser una buena aproximación al desconocido frente no-superado verdadero.

- Cuando soluciones obtenidas por NOSGA-II se agregan con el primer frente que da NSGA-II (la mejor representación que conocemos de la frontera de Pareto), las soluciones de NOSGA-II se mantienen no-dominadas, y tienen en promedio mucho mejores valores de fuerza, debilidad y flujo neto. Cuando se unen los primeros frentes de NOSGA-II y NSGA-II, casi todas las soluciones que el segundo propone son superadas, mientras que las del primero mantienen su condición y buena parte de la frontera que genera NSGA-II es dominada por soluciones engendradas por NOSGA-II.

- En problemas con las dimensiones de nuestros experimentos, la facilidad con que el tomador de decisión puede decidirse por una solución final es incomparablemente superior si se emplea NOSGA-II. Ya que las soluciones pertenecen a una zona de privilegio, son pocas y no muy diferentes y porque con nueve objetivos es difícil decidir entre tres opciones en severo conflicto, mucho más entre la cantidad que sugiere NSGA-II.

- Como muestra el experimento de control, solo por casualidad NSGA-II logra encontrar soluciones no-superadas, no ya verdaderas sino incluso del frente conocido. Como consecuencia resulta probable que las mejores soluciones no sean detectadas. Si se realizan muchas corridas de NSGA-II aumenta la probabilidad de que en alguna aparezcan soluciones no-superadas, pero el esfuerzo necesario por parte del DM se multiplica al verse obligado a considerar un conjunto de mucha mayor cardinalidad.

- Dado el tiempo limitado no se pudo experimentar con otros MOEAs y vale la pena seguir estudiando este problema y comprar estos resultados con otros MOEA's para ver los alcances de este algoritmo NOSGA-II. Y seria deseable comparar la eficiencia con otras y mejorar la eficiencia del algoritmo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bandyopadhyay,Saha,Maulik, y Deb.(2008) A Simulated Annealing-Based Multiobjective Optimization Algorithm: AMOSA. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 12(3): pp269-283, Junio 2008.

[2] Brans, J. P., & Mareschal, B. (1992). Promethee-V -- MCDM Problems with Segmentation Constraints. INFOR, 30(2) , 85-96.

[3] Brans, J. P., & Vincke, P. (1985). A preference ranking organization method. Management Science Vol. 31 , pp 647-656.

[4] Caballero, R., Carazo, A.F., Gómez T., Molina, J., Hernández-Díaz, A. y Guerrero, F.M.(2010) Solving a comprehensive model for multiobjective project portfolio selection. Computers &Operations Research 37(2010)630--639

[5] Castro, M. A.(2007) Desarrollo e Implementación de un Framework para la Formación de Carteras de Proyectos de I&D en Organizaciones Publicas. Tesis de Grado de maestría.

[6] Coello, C. A. (2006) Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo: Resultados Recientes y Problemas Abiertos. Evolutionary Computation Group (EVOCINV), departamento de Ingeniería Eléctrica. México, D.F. 07360, MEXICO

[7] Coello, C. A. (2000). Handling Preferences in Evolutionary Multiobjective Optimization. A Survey, In 2000 Congress on Evolutionary Computation (pp. 30-37). Piscataway, New Jersey: IEEE Service Center.

[8] Coello, C. A. (2005). Recent Trends in Evolutionary Multiobjective Optimization. Evolutionary Multiobjective Optimization: Theoretical Advances And Applications (pp. 7-32). London: Springer-Verlag, London.

[9] Coello, C. A. (2006). Notas de Curso: Introducción a la Computación Evolutiva. Cinvestav-IPN.

[10] Coello, C. A., Van Veldhuizen, D., & Lamont, G. (2002). Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems. New York-Boston-Dordrecht-London-Moscow: Kluwer Academic Publishers.

[11] Coello,C. A.(2006) 20 Years of Evolutionary Multi-Objective Optimization: What Has Been Done and What Remains to be Done. In Gary Y. Yen and David B. Fogel, editors, Computational Intelligence: Principles and Practice.

[12] David, P.A., Hall, B.H., Toole, A.A. (2000) Is public R&D a complement or

aubtitute for provate R&D? A review of the econometric evidence.

[13] Deb, K. (2001). Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms. Chichester-New York-Weinheim-Brisbane-Singapore-Toronto: John Wiley & Sons.

[14] Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., & Meyarivan, T. (2000). A fast elitist multi-objetive genetic algorith: NSGA-II

[15] Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., & Meyarivan, T. (2000). A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization. in Proceedings of the Paralell Problem Solving from Nature VI , pp 849

[16] Deiros, B., Fernández, E., & Díaz, T. (1989). Optimización. La Habana, Cuba: Editorial ISPJAE.

[17] Farina y Amato(2002). On the Optimal Solution Definition for Many-criteria Optimization Problems. In Proceedings of the NAFIPS-FLINT International Conference'2002, (pp 233-238), Piscataway, New Jersey, Junio 2002. IEE

[18] Félix, L. F. (2006). Un procedimiento basado en relaciones de sobreclasificación y algoritmos genéticos multiobjetivo para resolver problemas de cartera de proyectos de importancia social, Tesis de Maestria. Culiacan,

[19] Fernández, E. (1987). Application of Multicriteria Optimization to Designing and Modelling of Circuits and Components, Tesis Doctoral. Poznan, Polonia: Universidad Tecnológica de Poznan.

[20] Fernández, E. (1999). El Método EDIPO para la Ayuda a la Decisión Multicriterio. UPIICSA Tecnología Ciencia Cultura, vol. 3, no. 19 , pp 25-30.

[21] Fernández, E., & Leyva, J. C. (2004). A method based on multiobjective optimization for deriving a ranking from a fuzzy preference relation. European Journal of Operational Research , vol. 154, no.1 , pp 110-124.

[22] Fernández, E., & Olmedo, R. (2003). An improved method for deriving final ranking from a fuzzy preference relation via multiobjective optimization. Foundations of Computing and Decision Sciences, vol. 28, no. 3 , pp 1

[23] Fernández, E., Cancela, N., & Olmedo, R. (2008). Deriving a final ranking from fuzzy preferences: An approach compatible with the Principle of Correspondece. Amsterdam: ELSEVIER.

[24] Fernández E., Lopez E., Bernal, S., Coello C., Navarro J., "Evolutionary multiobjective optimization using an outranking-based dominance generalization", Computers & Operations Research vol. 37, 2010, pp. 390-395

[25] Figueira, J., Mousseau, V., & Roy, B. (2005). ELECTRE Methods. Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys, Springer Science +

Bussiness Media (pp. 133-154). New York: Greco y Erghott (eds.).

[26] Flament, M. (1999, 09 10). Glosario Multicretirio: de la Red Iberoamericana de Evaluación y Decisión Multicriterio. Retrieved 08 24, 2006,

[27] Fodor, J., & Roubens, N. (1994). Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

[28] Fonseca, C. M., & Fleming, P. J. (1993). Genetic Algorithms for Multiobjective. Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic (pp. 416-423). San Mateo, California,: Morgan Kauffman Publishers.

[29] French, S. (1986). Decision Theory: an introduction to the mathematics of rationality. NY- Brisbane- Chichester: Halsted Press.

[30] Goldberg, D. (1989). Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Addison-Wesley.

[31] Grefenstette, J. J. (1984). GENESIS : A system for using genetic search precerures. Conference on intelligent Systems and Machines,, (pp. 161-165).

[32] Guimaraes, A. (1995). Computers in urban planning and urban management. 4ta International Conference. Melbourne, Australia.

[33] Holland, J. H. (1975). daptation in Natural and Artificial Systems. Ann Arbor: University of Michigan Press.

[34] Horn, J., & Nafpliotis, N. (1993). Multiobjective Optimization using the Niched Pareto Genetic Algorithm. Urbana, Illinois,: University of Illinois at Urbana-Champaign,.

[35] Hughes(2003). Multiple Single Objective Pareto Sampling. In Proceedings of the 2003 Congress on Evolutionary Computation (CEC'2003), volumen 4, pp 2678-2684, Canberra, Australia, Diciembre 2003. IEEE Press.

[36] Hughes(2005). Evolutionary Many-Objective Optimisation: Many Once or One Many? In 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC'2005), volumen 1, pp 222-227, Edinburgh, Scotland, Septiembre 2005. IEEE Service C

[37] Hughes(2007). MSOPS-II: A General-Purpose Many-Objective Optimiser. In 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC'2007), pp 3944-3951, Singapore, Septiembre 2007. IEEE Press.

[38] Hwang, C. L., & Masud, A. S. (1979). Multiple Objetive Decision Making. Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey. New York: Springer-Verlang.

[39] Ishibuchi,Kuwajimay Nojima(2008). Evolutionary Multi-objective Rule Selection for Classification Rule Mining. In Ashish Ghosh, Satchidananda Dehuri, and Susmita Ghosh, editors, Multi-objective Evolutionary Algorithms

[40] Keeney, R., & Raiffa, H. (1976). Decision with multiple objectives: preferences and value tradeoffs. New York: Wiley.

[41] Khare, Yao y Deb(2003). Performance Scaling of Multi-objective Evolutionary Algorithms. In Fonseca, Fleming, Zitzler,Deby Thiele, BIBLIOGRAFIA 105 editors, Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Second Internatio

[42] Knowles, J. D., & Corn, D. W. (2000). Approximating the Nondominated Front Using the Pareto Archived Evolution Strategy. Evolutionary Computation 8(2) , pp 149-172.

[43] Laumanns, M. , Zitzler E. y Thiele L. Multiple Criteria Decision Support by Evolutionary Computation

[44] Laumanns, N. Laumanns, M. y Kitterer Hartmut. Evolutionary Multi-Objective integer Programming for the Design of Adaptive Cruise Control systems

[45] Leyva, J. C. (2001). Aplicación de los algoritmos genéticos a la solución del problema de decisión multicriterio individual y en grupo, Tesis Doctoral. Mexico: Universidad Autónoma de Sinaloa.

[46] Leyva, J. C., & Aguilera, M. A. (2005). A Multiobjetive Evolutionary Algorithm for Deriving Final Ranking from A Fuzzy Outranking Relation. Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Third International Conference EMO

[47] Leyva, J. C., & Fernández, E. (1999). A Genetic Algorithm for Deriving Final Ranking from A Fuzzy Outranking Relation. Foundations of Computing an Decisión Science 24(1) , pp 33-47.

[48] Liu, Tan y Ho.(2007) A Distributed Co-Evolutionary Particle Swarm Optimization Algorithm. In 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC'2007), pp 3831-3838, Singapore, Septiembre 2007. IEEE Press.

[49] Lopez Cervantes Eddy. (2008)Incorporación de preferencias en Algoritmos Evolutivos MultiObjetivo utilizando información de una relación “borrosa” de sobreclasificación. Tesis de grado de maestría.

[50] Markowitz, H. M. (1991) Portofolio selection: efficiente diversificaion of investmments.

[51] Michalewicz, Z. (1996). Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

[52] Miettinen, K. M. (1999). Nonlinear Multiobjective Optimization. Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[53] Navarro, J. (2005). Herramientas Inteligentes para la Evaluación y Selección de Proyectos de Investigación-Desarrollo en el Sector Público, Tesis Doctoral. Culiacan, Sinaloa, México: Universidad Autónoma de Sinaloa.

[54] Orlovski, S. A. (1978). Decision-making with a fuzzy preference relation.

Fuzzy Sets and Systems vol 1 , pp 155-167.

[55] Ostanello, A. (1984). Outranking methods. Proceeding of the first summer school on MCDM, Sicilia , pp. 41-60.

[56] Praditwong y Yao(2007). How Well Do Multi-Objective Evolutionary Algorithms Scale to Large Problems. In 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC'2007), pp 3959-3966, Singapore, Septiembre 2007. IEEE Press.

[57] Purshouse y Fleming (2003). Evolutionary Multi-Objective Optimisation: An Exploratory Analysis. In Proceedings of the 2003 Congress on Evolutionary Computation (CEC'2003), volumen 3, pp 2066-2073, Canberra, Australia.

[58] Radulescu, C. Z y Radulescu, M.(2001) Project Portfolio Selection Models and Decision Support.

[59] Rogers, M., Bruen, M., & Maystre, L. (2000). ELECTRE and Decision Support. Boston-Dordrecht-London: Kluwer.

[60] Roy, B. (1990). The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. In Bana e Costa, C.A., Reading in multiple criteria decision aid (pp. 155-183). Berlin: Springer-Verlag.

[61] Roy, B. (1996). Multicriteria methodology for Decision Aiding. Dordrecht-Boston- London: Kluwer Academic Publisher.

[62] Roy, B., & Vanderpooten, D. (1995). The European School of MCDA: A Historical Review In Slowinski. Toward Intelligent Decision Support, 14th European Conference on Operational Research (pp. 39-65). R. (ed.).

[63] Saaty, T. L. (1980). The Analytic Hierarchy Process. McGraw-Hill, Inc.

[64] Schaffer, J. (1985). Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms. In Genetic Algorithms and their Applications: Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms (pp.

[65] Srinivas, N., & Deb, K. (1994). Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms. Evolutionary Computation 2(3) , pp 221-248.

[66] Taha, A. (1998). Investigación de operaciones: Una introducción (6a. edición en español). México: Pearson.

[67] Tanaka, M., & Tanino, T. (1992). Global optimization by the genetic algorithm in a multiobjetive decision support system. In Proceedings of the 10th International Conference on Multiple Criteria Decision Making Vol 2,

[68] Tverky, A., & Simonson, I. (1993). Context-dependent preferentes. Magnament Science, vol 39(10) , pp. 1179-1189.

[69] Vanderpooten, D. (1990). The construction of prescriptions in outranking

methods. In Bana e Costa, C.A., Reading in multiple criteria decision aid (pp. 184-215). Berlin: Springer-Verlag.

[70] Voget, S., & Kolonko, M. (1998). Multidimensional Optimization with a Fuzzy Genetic Algorithm. Journal of Heuristics, 4(3) , pp 221-244.

[71] Zitzler y Kunzli (2004). Indicator-based Selection in Multiobjective Search. In Xin Yao et al., editor, Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII, pp 832-842, Birmingham, UK, Septiembre 2004. Springer-Verlag. L

ÍNDICE DE TABLAS

ANEXO A

Tabla 8: Datos de la primera instancia de tipo 2.

PROY.	MONTO	ÁREA	REG.	VALORES OBJETIVO								
				EP AI	EP MI	EP BI	P AI	P MI	P BI	CM AI	CM MI	CM BI
1	50000000	1	1	0	20000	0	0	0	30000	0	36000	0
2	49750000	3	1	0	0	20000	60000	0	0	0	0	60000
3	49500000	2	2	10000	0	0	0	30000	0	0	42000	0
4	49250000	3	1	0	35000	0	0	45000	0	0	0	48000
5	49000000	2	2	40000	0	0	60000	0	0	48000	0	0
6	48750000	3	2	25000	0	0	30000	0	0	0	0	18000
7	48500000	2	1	0	0	15000	60000	0	0	0	0	24000
8	48250000	2	1	0	10000	0	0	45000	0	0	48000	0
9	48000000	1	1	0	0	5000	30000	0	0	48000	0	0
10	47750000	2	1	0	0	50000	0	0	30000	0	0	6000
11	47500000	1	2	0	25000	0	0	0	45000	0	0	54000
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
95	26500000	1	2	0	0	25000	0	60000	0	0	0	48000
96	26250000	1	1	15000	0	0	15000	0	0	0	0	6000
97	26000000	2	2	45000	0	0	0	0	30000	0	0	60000
98	25750000	3	1	0	45000	0	0	30000	0	0	0	54000
99	25500000	3	1	0	0	30000	0	30000	0	54000	0	0
100	25250000	3	1	0	50000	0	0	0	15000	60000	0	0
PESO				23	14	11	14	11	7	9	7	4
UMBRAL DE VETO				252500	430000	310000	487500	517500	0	396000	0	0

Tabla 9:

CARTERA	Obj1	Obj2	Obj3	Obj4	Montocartera
ALGORITMO EXAHUSTIVO					
10010011000101111010	180	165	240	180	474250
11010011000101011010	180	170	225	180	477500
11100001000101111010	190	150	210	195	475750

CARTERA	Obj1	Obj2	Obj3	Obj4	Montocartera
ALGORITMO NOSGA-II					
11100001000101111010	190	150	210	195	475750
11010001000110101011	145	195	180	135	474750
11010000010101011101	190	110	210	120	474000
01111010000101011001	140	140	240	150	477500
11110000001011111000	160	130	225	150	478500
01010111101101010000	50	225	210	180	480250
00111001010100011011	180	100	90	270	474000
10010011110011010010	145	110	150	225	477250
11100001111001011000	175	85	165	210	479750
01011000001100111011	155	155	195	120	472250
00100001011101111001	140	120	210	195	471000
11010101000111001001	120	200	195	120	478250
11001010110101010010	160	120	210	120	478750
00110001110100101110	115	140	135	240	473750
11111000101000111000	170	115	165	165	481750
01010100110001011011	160	110	135	180	473250
11111011100100001000	125	175	180	180	485500
00010001100011101111	110	115	195	150	468250
01000001101011101011	100	140	225	105	470500
01001010111101010001	95	130	240	90	476000
00010001111011010101	90	90	150	195	471750
…	…	…	…	…	…

Tabla 10:

	ND	ND	NS	NS
INSTANCIAS	NSGA-II	NOSGA-II	NSGA-II	NOSGA-II
1	68	100	0	100
2	47	100	0	100
3	66	100	0	100
4	65	100	0	100
5	71	100	0	100

ANEXO B

PRUEBAS DE OPERADORES

Se hicieron pruebas con los operadores de cruza:

- Operador de cruza normal

  Ese es el operador usado por NSGA-II sin ninguna modificación donde intercambia los genes de 2 individuos dependiendo de la probabilidad que se tenga de cruza.

- Operador de cruza de área

  Este operador intercambia los genes de 2 individuos siempre y cuando estos genes estén en la misma área para esto cada área va a tener una probabilidad de acción para que el operador realice el intercambio.

- Operador de cruza de región

Similarmente al operador anterior intercambia los genes de 2 individuos siempre y cuando estos genes estén en la misma región. Y además este operador define las probabilidades de cruza en cada región.

Se crearon combinación de los nuevos operadores de cruz (área y región) y el operador de cruza habitual obteniendo mejores soluciones con el operador de región.