UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECANICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS FORMADAS POR PROYECTOS INTERDEPENDIENTES EN ORGANIZACIONES PUBLICAS.

POR

GILBERTO JAVIER TENORIO RODRIGUEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIA EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN JUNIO 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECANICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS FORMADAS POR PROYECTOS INTERDEPENDIENTES EN ORGANIZACIONES PUBLICAS.

POR

GILBERTO JAVIER TENORIO RODRIGUEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIA EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN JUNIO 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECANICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis << Optimización de Carteras entre Proyectos Interdependientes en Organizaciones Publicas>>, realizada por el alumno Gilberto Javier Tenorio Rodríguez, con numero de matricula 1175660, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Dr. Fernando López Irarragorri

Asesor

Dr. Eduardo Rene Fernández González

Revisor

Dr. Igor Litvinchev

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León. Junio 2010

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a mis padres Gilberto Tenorio Arias e Isabel Rodríguez Ramírez por apoyarme a lo largo de toda mi formación académica.

A mis amigas y amigos del posgrado por haberme dedicado en algún momento parte de su tiempo para ayudarme y asesorarme en temas relacionados con esta tesis, principalmente a mi amiga Mireya Isabel Sánchez Velásquez por no dejarme de la mano desde el inicio hasta el fin de esta carrera.

Al Dr. Fernando López Irarragorri por sus conocimientos que me brindo a lo largo de toda esta tesis y la paciencia que me tuvo hasta el final de la misma, también a la Dra. Lilia López Vera por su enorme apoyo en la impresión y empastado de esta tesis.

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mí familia (padres, hermanas y sobrinos), a todos mis amigos de mi generación de esta carrera: Mireya Isabel Sánchez Velásquez, Nancy Solís García, Perla Cecilia Hernández Lara, por nombrar solo algunos.

A mis amigos de la iglesia: Erika Noemí Rodríguez Rodríguez, Héctor Eduardo Mendoza Dávila, Sofía Lorena Pecina Dávila.

A mis maestros: Juan Antonio López de la Cruz, Norma Leticia Venegas Hernández

SÍNTESIS.

Esta tesis esta basada en un problema que cada día se vuelve más importante dentro de las Organizaciones Sociales, el problema de Optimización de Carteras de proyectos, aquí se considera que dicho proyectos sean interdependientes.

Existen investigaciones previas a dicho problema, entre las mas destacadas se encuentran por Fernández, el cual formula un modelo matemático que representa dicho problema, en este trabajo se obtiene un modelo (considerando rubros e interdependencias) el cual experimentalmente se demuestra que se trata de una generalización del modelo propuesto por Fernández.

Además se hace un estudio el cual indica que dicho modelo es eficaz para instancias grandes, el cual es muy común en la realidad.

Dr. Fernando López Irarragorri

Asesor

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN.

En la presente tesis se investiga el Problema de Optimización de Carteras formadas por Proyectos Interdependientes en Organizaciones Publicas. El documento esta estructurado de la siguiente manera: introducción, descripción del problema, marco teórico, modelos propuestos pruebas experimentales y por último conclusiones y recomendaciones. A continuación se describe brevemente el contenido de estos capítulos.

En el primer capitulo, se describe el diseño de la investigación que consta de la estructura formal: contexto, antecedentes, problema científico, hipótesis, objetivos, justificación, tareas científicas, resultados relevantes, etc.

En el segundo capitulo trata de la descripción del problema y los retos que se presentan en la elaboración de soluciones al mismo.

En el capitulo de marco teórico se describen las bases teóricas requeridas tanto para la formulación de modelos del problema como para el desarrollo de soluciones.

En el capitulo cuatro se desarrollan modelos matemáticos para el planteamiento del problema y su solución.

En el capitulo quinto se describen experimentos numéricos realizados para validar los modelos y analizar la eficiencia de los mismos en instancias típicas del problema generadas aleatoriamente.

Finalmente en el capítulo de conclusiones y recomendaciones se presentan los resultados obtenidos y las recomendaciones sobre trabajo futuro y aspectos abiertos no cubiertos totalmente en la presente investigación.

Este capítulo (introducción) se divide en:

1.1. Introducción: indica como esta estructurado el documento de tesis y las secciones de dicho capitulo.

1.2. Contexto: se refiere a la relación entre el problema y el entorno

1.3. Antecedentes: Que se ha hecho hasta el momento, limitaciones de las soluciones planteadas

1.4. Presentación del problema: de modo general el objetivo del problema de selección de carteras, en que consiste.

1.5. Hipótesis : los supuestos que se tienen para la formulación del problema

1.6. Objetivo: se refiere al objetivo general de este trabajo.

1.7. Justificación: el porque de la importancia de resolver este problema

1.8. Tareas científicas: se refiere a las tareas previas que tuvieron que hacerse para la elaboración de este trabajo (tesis).

1.9. Resultados Esperados: es decir la aportación científica del problema

1.10. Conclusiones: lo más destacado de este capítulo.

1.2 CONTEXTO

De acuerdo con Sapag (2000) un proyecto no es más que la búsqueda de una solución inteligente a un problema que intenta resolver una necesidad humana; "cualquiera sea la idea que se pretende implementar, ella conlleva necesariamente la búsqueda de proposiciones coherentes destinadas a resolver las necesidades de la persona en todos sus alcances: alimentación, salud, educación, vivienda, religión, defensa, política, cultura, recreación, etc." (Sapag, 2000).

Una de las principales tareas de dirección en las organizaciones de gobierno a cualquier nivel, organizaciones descentralizadas, fundaciones, instituciones que realizan investigación-desarrollo y otras, es evaluar un conjunto de proyectos con impacto social que compiten por apoyo financiero, recurso que es generalmente escaso. Con una cantidad a distribuir inferior a la demanda no se puede otorgar el beneficio a todos los proyectos en competencia, aun cuando fueran aceptables individualmente. En el marco de ciertas restricciones determinadas por la orientación de las políticas públicas, es preciso formar Carteras de Proyectos Sociales donde se maximice el impacto (político, social, etc.) de la solución escogida. Se trata de un problema de enorme importancia social en que el costo de pobres soluciones es sencillamente inmenso, aunque su complejidad ha impedido hasta ahora avances verdaderos para resolverlo.

Algunos ejemplos que ilustran la importancia de este problema se enumeran a continuación:

- Durante el año fiscal 2007 el Grupo del Banco Mundial destinó cerca de 8,000 millones de dólares al financiamiento de proyectos públicos y privados [1].

- En 2007 la ONU y la UE lanzan un proyecto humanitario para la República Democrática del Congo, es un esfuerzo global para la RDC y servirá para financiar 330 proyectos inscritos en el plan, por un valor de 681 millones de dólares [2].

- En 2008 se ejecutan ocho proyectos de campo con el apoyo del Fondo Fiduciario España-FAO, involucrando una inversión de cerca de 20 millones de dólares [3].

- En México, la dirección de Desarrollo Tecnológico y Negocios del CONACYT realizó la presentación de Programas 2009 con el fin de atraer mayores recursos para la motivación de la investigación y el desarrollo de nuevas tecnologías entre los empresarios de Coahuila, para este año se tiene pactado un total de 2,500 millones de pesos para proyectos en todo el país [4].

- El Instituto Mexicano de a Juventud (IMJUVE) entregó en agosto del 2008 más de 7 millones de pesos a organizaciones juveniles, de acuerdo a la convocatoria de Apoyo a Proyectos Juveniles ya que el objetivo 1: Ciudadanía y Participación del Programa Nacional de Juventud 2008-2012, tiene como estrategia promover la participación de las y los jóvenes en los procesos de toma de decisiones públicas. [5]

- El gobierno de Yucatán otorgo 110 millones de pesos, para apoyar el consumo familiar, respaldar a los sectores productivos y, especialmente, incentivar la creación de empleos.

El problema de la optimización de carteras de proyectos sociales se caracteriza por [6, 7, 8]:

- Muchas veces tienen repercusión económica indudable, pero que se manifiesta de modo indirecto, a largo plazo, y en forma muy difícil de cuantificar.
- Generalmente, además de su potencial impacto económico sobre el bienestar de toda o parte de la sociedad, el proyecto se caracteriza por otros atributos intangibles, que también son relevantes y que tomados integralmente determinan el beneficio esperado.
- Son importantes las consideraciones de equidad (nivel de impacto y grupo social beneficiado)

En esta investigación se aborda el problema de la optimización de carteras de proyectos de I & D (Investigación y Desarrollo) en organizaciones públicas, mismo que puede considerarse como un problema perteneciente a la clase de problemas de las carteras de proyectos sociales.

Hay dos sub-problemas fuertemente relacionados con la optimización de cartera [9]:

a evaluación de proyectos individuales

b selección de una cartera de proyectos maximizando un impacto

Para efectos de esta investigación se supone resuelto el problema de evaluación de proyectos y el interés se centra en el subproblema (b).

1.3 ANTECEDENTES.

Hasta la fecha los trabajos que abordan la selección de proyectos de I & D consideran el monto solicitado por el director del proyecto como único recurso a distribuir y este es tratado de forma monolítica. Sin embargo, en las convocatorias realizadas por organizaciones prestigiosas como la NSF de Estados Unidos de América, la Academia de Ciencias de Rusia, o el CONACYT en México se les exige a los directores de proyectos que desglosen su propuesta de necesidades económica en un número determinado de rubros, luego en el proceso de revisión los peers modifican estas cantidades acorde a su percepción de la correspondencia de estas exigencias con el impacto del proyecto. Como para cada proyecto el impacto en la disminución de fondos en cada uno de estos rubros puede ser diferente, y la cantidad en que pueden estar sobrevaluados los mismos por los directores de proyectos no es la misma esto puede conducir a que al final se obtengan carteras sub-optímales de proyectos.

Aunque la literatura sobre el tema de esta investigación no es muy extensa, existen trabajos de investigación relacionados con la optimización de carteras de proyectos; entre los que aportan una teoría completa y robusta para la solución del problema se encuentran las propuestas de [18] en estos trabajos se han aportado soluciones y metodologías que se sustentan en teorías y heurísticas robustas, entre las que se encuentran: teoría matemática de la decisión, lógica fuzzy rouge sets y sistemas de apoyo a la decisión, pero estas soluciones solo son aplicables a instancias de mediano tamaño (alrededor de 400 proyectos) [10].

Recientemente [10] lograron resolver instancias de carteras de hasta 25000 proyectos candidatos empleando modelos enteros mixtos y dos funciones objetivo: la calidad de la cartera y la cantidad de proyectos apoyados.

En todos los trabajos mencionados, sin embargo, no se consideran efectos sinérgicos de los proyectos en la optimización de la cartera, y se modela la asignación de dinero como una caja negra, mientras que en la realidad esa información es tomada en cuenta tanto para asignar recursos como para medir impacto de los proyectos. Según el conocimiento del autor este es un problema que no ha recibido atención en toda su dimensión, hay trabajos con pocos proyectos reportados por Stummer &Heiderberger [11], o Klapka &Pinos [12] o mas recientemente Caballero [13] donde se incorporan los efectos sinérgicos entre proyectos en los modelos de optimización de carteras pero en ninguno de estos se reporta la modelación de rubros o actividades en las que se descompone el monto de dinero recibido por cada proyecto y su incidencia en el impacto del proyecto.

1.4 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.

La importancia del problema de selección de carteras dentro de las Organizaciones Públicas va en aumento, este trabajo no esta limitado al Problema de Optimización de Carteras en Organizaciones Publicas entre Proyectos va mas allá, esto solo marca el punto de partida ya que a lo que realmente se aspira dentro de esta investigación es proponer un modelo que considere los requerimientos económicos de cada proyecto no como una única cantidad, sino como un conjunto de cantidades asociadas a rubros, a cada rubro se le asigna un nivel de impacto en el impacto total del proyecto y se consideran además interdependencias entre los mismos. De esta manera se obtiene un modelo para la optimización de la cartera de proyectos de I & D en organizaciones públicas mas cercano a la realidad. Sin embargo, al incorporar estos elementos en el modelo. La complejidad incluso en un número moderado de proyectos sobre un pequeño número de objetivos y restricciones puede volverse abrumadora.

La optimización de la cartera ha sido por años un problema popular entre los investigadores en las áreas de: inversión capital, compraventa de acciones y apoyo a proyectos I & D en empresas privadas, hasta hace poco no se había tomado la importancia en las Organizaciones Públicas.

Este problema puede clasificarse [19] como un problema estático de selección de proyectos I & D:

- Se anuncia un call-for-propals para solicitar propuestas en varias áreas de conocimiento, cada una de las cuales tiene un máximo y un mínimo de asignación de recursos que deben ser respetados.

- Las decisiones se toman una vez por cada periodo, y se trata de decidir cuales proyectos aprobar y en que cantidad.

La gran cantidad de proyectos candidatos que se consideran tiene implicaciones importantes en la solución del problema:

- Para la organización y procesamiento de la información.

- Para la eficiencia en la optimización de la cartera y por ende en los procedimientos y herramientas empleados.

- En la justificación ante instancias superiores de las carteras recomendadas.

De una manera técnica los parámetros principales (datos conocidos e irremovibles) del Problema de Selección de Proyectos se enlistan a continuación

- Cantidad de proyectos aspirantes a recibir apoyo

- Cantidad de áreas en las cuales los proyectos pueden clasificarse

- Cantidad de dinero mínima y máxima por proyecto

- Monto total disponible a distribuir entre los proyectos

- Presupuestos máximos y mínimos por área

Donde los objetivos son: maximizar la cantidad de proyectos aceptados y maximizar la calidad dentro de la cartera.

[20] propuso un modelo matemático para este problema, pero debido a que este modelo era un modelo no lineal esto se presto para que dicho modelo tuviera muchas limitaciones, por lo que se vio la necesidad de linealizar dicho modelo, el trabajo realizado por Litvinchev et al (2007) dio un enorme avance a este problema.

Posteriormente se dará una forma más detallada en el capítulo IV de esta sección, aquí se expondrán los modelos a los que se hacen referencia (no lineal y lineal).

1.5 HIPÓTESIS

En este trabajo no se tiene interés en la evaluación de los proyectos, para la que existen técnicas de clasificación multicriterio y de Inteligencia Artificial, además de los enfoques heurísticos tradicionales, aquí se aborda el problema de selección de carteras en organizaciones publicas (sub-problema b)), asumiendo que los proyectos han sido previamente evaluados. Las siguientes hipótesis se asumen que se cumplen:

1 Un presupuesto disponible para financiar es conocido, está disponible al inicio del periodo de desarrollo, y se anuncia para solicitar propósitos en varias áreas. El apoyo para un área en particular esta limitada por arriba y por de bajo.

2 La decisión en la financiación de proyectos es tomada una vez por periodo, es decir, el problema de selección de proyecto estático es considerado.

3 Típicamente los propósitos son originados de las instituciones no relacionadas mutuamente y así los proyectos públicos de I & D pueden ser considerados estadísticamente independientes con correlación muy pequeña o igual a cero.

4 Los bienes intangibles juegan un papel dominante en la medida de la calidad de una cartera.

5 Hay muchos proyectos candidatos que compiten por la financiación.

1.6 OBJETIVO.

Objetivo General

Profundizar en el estudio y análisis del problema de la selección de carteras de proyectos de I&D en grandes organizaciones públicas investigando el efecto de la consideración de relaciones sinérgicas entre proyecto y la descomposición de la asignación de fondos en rubros de proyectos.

Objetivos Secundarios:

- Desarrollar un modelo matemático para el problema sujeto a estudio que incorpore s rubros de proyectos y sinergias entre rubros.
- Resolver eficientemente instancias muy similares a problemáticas reales mediante el empleo de métodos exactos.

1.7 JUSTIFICACIÓN

El problema de la selección de carteras de proyectos de I & D en grandes organizaciones públicas no solo es relevante por el nivel de gasto público que representa (en países desarrollados un porcentaje muy pequeño pero no despreciable del PIB) sino también por el impacto social y económico en el futuro del país. Es por ello que es altamente deseable que los tomadores de decisiones tengan a mano herramientas, métodos basados en metodologías científicas que les garantice los resultados más congruentes con las políticas, estrategias y preferencias de aquellos sectores del gobierno a quienes representan.

La modelación matemática ha demostrado a lo largo del tiempo ser una herramienta útil para el quehacer del ser humano y en especial para apoyar a este en la toma de decisiones. En este trabajo nos proponemos desarrollar un modelo matemático para el problema de la selección de carteras de proyectos de I&D que incorpore interdependencias entre proyectos y que permita obtener eficientemente soluciones que serán recomendaciones para los tomadores de decisiones.

1.8 TAREAS CIENTÍFICAS

Para la elaboración de esta tesis se realizaron las siguientes tareas científicas:

1. Diseño de la investigación

2. Revisión del estado del arte

3. Familiarización con las teorías que conforman las bases teóricas

4 Elaboración de modelo matemático

5 Metodología propuesta para la solución del problema

6 Obtención de soluciones

7 Defensa de la tesis

1.9 RESULTADOS ESPERADOS.

Modelo matemático para el problema de la selección de carteras de proyectos de I&D en grandes organizaciones públicas que incorpore la representación de proyectos mediante rubros así como las relaciones sinérgicas que pueden tener lugar entre los mismos y que impactan las funciones objetivo.

Framework para solucionar mediante métodos exactos instancias similares a problemáticas reales.

1.10 CONCLUSIONES.

El problema de la selección de carteras de proyectos de I & D en organizaciones públicas no ha recibido mucha atención por parte de la comunidad científica en contraparte con otros problemas de carteras como las carteras de inversión o las carteras de proyectos de I & D en organizaciones privadas.

Existe una metodología integral para la solución de este problema pero se basa en modelos matemáticos no lineales y su efectividad alcanza para resolver problemas de tamaño medio, además no incorporan relaciones sinérgicas entre proyectos ni modelan el impacto de la asignación de fondos a diferentes rubros asociados a actividades que se llevan a cabo para obtener los objetivos de los proyectos.

II. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1 INTRODUCCIÓN.

Este capitulo se divide en las siguientes secciones: descripción del problema y descripción del estado del arte.

La descripción del problema se refiere a señalar las semejanzas que tiene este problema con otros problemas ya conocidos, así mismo indica los retos que se imponen a la solución del mismo, es decir detallar si la solución a este problema es difícil, y si es así explicar por que lo es, así mismo se enuncian los supuestos que se consideran en el problema, así mismo el objetivo de esta sección (2.2) es colocar el problema aquí estudiado en alguna de las clasificaciones de los problemas de optimización.

La descripción del estado del arte se refiere a las otras contribuciones que se han hecho para el problema, estas son menores a las que se contribuyen en este trabajo.

2.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.

En el capitulo I se dio una descripción general al problema aquí estudiado, ahora en esta sección se dará una clasificación al problema asignándole una clase de complejidad computacional.

Se considera que los proyectos individuales compiten solo por apoyo financiero, recurso que es generalmente escaso; se parte del principio de que no es posible apoyar a todos los proyectos candidatos

Se desea seleccionar una cartera de proyectos de calidad donde se maximice el impacto de la solución escogida. El impacto debe responder a las preferencias de algún tomador de decisiones racional (uno solo, un grupo, comité, junta, etc.)

Entre las causas que dan origen al problema se pueden enunciar las siguientes: recursos escasos, proyectos con diferente impacto y calidad, razones históricas o políticas, como repartir dinero entre áreas de interés donde se impone que todas las áreas reciban un financiamiento mínimo preestablecido.

Los datos o información relevante a considerar para este problema son: cantidad de dinero disponible, áreas que se consideraran, monto tentativo máximo y mínimo que debe se asignado a cada área, datos de proyectos, montos máximos y mínimos solicitados por cada proyecto, evaluación de cada proyecto, requerimientos mínimos y máximos para cada rubro de cada proyecto, descripción de sinergias, su clasificación e impacto.

El enfoque tradicional para expresar la calidad o impacto de la cartera es: ordenar proyectos dentro de cada área según la evaluación y asignarle luego todo el dinero hasta que se termine y satisfaciendo los requerimientos de cada área.

El problema de la selección de proyectos I & D en grandes organizaciones públicas presenta restricciones de mochila para garantizar que no se asigne a los proyectos un monto mayor del disponible. Para cada proyecto se establecen cotas de financiamiento, una cota mínima necesaria para garantizar se obtengan niveles aceptables de cumplimiento de los objetivos y una cota máxima necesaria para garantizar niveles muy satisfactorios de cumplimiento de los objetivos estas cotas pueden representarse mediante un conjunto de valores enteros que pueden tomar las variables de decisión, situaciones como estas son consideradas en el problema acotado de la mochila, que representan el financiamiento de los proyectos. Si se considera, además, que los proyectos candidatos se agrupan en áreas (que pueden ser científicas, de aplicación, etc.) a las que se le asigna un rango de financiamiento que incluye una cota mínima y una cota máxima entonces se representa esta situación mediante restricciones de mochila múltiple. Los elementos anteriores permiten establecer cierta similitud del problema sujeto a estudio con tres problemas clásicos de la mochila.

A continuación se definen brevemente estos tres problemas y se emplean para mostrar que el problema de la selección de carteras de proyectos I&D en grandes organizaciones públicas es un problema difícil de resolver desde la perspectiva de las ciencias computacionales.

El problema de la mochila consiste en, dado un conjunto de objetos los cuales tienen un peso y un beneficio, el problema de la mochila consiste en encontrar un subconjunto de objetos que maximice el beneficio total de los objetos sin sobrepasar la capacidad de la mochila, a continuación se presenta su formulación:

$$\max \sum_{j=1}^{n} \rho_j x_j$$

$$sujeto\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \leq c$$

Donde ρj es el beneficio de seleccionar el objeto j xj vale 1 si el objeto j es seleccionado y 0 sino, rij es el espacio que ocupa que ocupa el objeto la suma de los objetos seleccionados debe ser menor o igual a la capacidad (C) de la mochila.

Supóngase que para el problema de la mochila se tiene una cantidad acotada mj de cada tipo de artículo j, sea xj la cantidad de cada tipo de articulo que se incluirá en la mochila entonces la formulación (problema de la mochila acotado) queda de la siguiente manera:

$$\max \sum_{j=1}^{n} \rho_j x_j$$

$$sujeto\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \leq c$$

$$x_j \in \{0,1,2,\ldots,m_j\}$$

El Problema de la Mochila Multidimensional (PMM) es un problema es un problema NP-difícil el cual tiene muchas aplicaciones prácticas como lo son:

- Asignación de procesos en sistemas distribuidos
- Presupuesto de capital

El objetivo del PMM es encontrar un subconjunto de objetos que maximice el beneficio total mientras que satisface algunas restricciones de recursos.

Actualmente existe un gran interés en implementar meta heurísticas (algoritmos genéricos que pueden ser implementados en diferentes problemas de optimización).

En distintos campos tales como las ciencias computacionales, matemáticas e investigación de operaciones se hacen ciertas clasificaciones, en este caso se pueden clasificar ciertos problemas, el criterio para seguir su clasificación, va en función del tiempo que toma algún algoritmo para resolver dicho problema.

Para la clasificación de los problemas de optimización, es fundamental el concepto O(n), este símbolo representa el número total de cálculos que realiza cierto algoritmo.

Se dice que un problema es fácil de resolver si se puede encontrar un algoritmo que resuelva cada instancia del problema en tiempo polinomial es decir, un algoritmo donde su número de operaciones no crezcan exponencialmente, dicho algoritmo se dice que es un algoritmo eficiente.

Un ejemplo de algoritmo eficiente es el siguiente: supóngase que se tiene un grafo G = (V, E) con n nodos y m aristas, un algoritmo eficiente para este caso es que dicho algoritmo requiera $O(m^p)$ cálculos para algún entero p, donde se asume que m ≥ n

A continuación se enunciaran algunos conceptos fundamentales para la clasificación de los problemas de optimización.

Considérese el siguiente problema de optimización $\max\{cx : x \in A\}$ una instancia para este problema consiste en un vector c y una representación del conjunto A. Este problema es reemplazado por el problema de decisión: hay un x ε A con valor cx ≥ k, cuyas posibles respuestas son SI o NO, para este problema una instancia consiste de un vector c y, representación de un conjunto A y un entero k.

Definición: Para una instancia X de un problema, la longitud de los datos de entrada (input) es la longitud de la representación binaria de una representación estándar de la instancia [22].

Definición: Dado un problema P, un algoritmo A para el problema y una instancia X, sea fA (X) el número de cálculos requeridos para correr el algoritmo A en la instancia X. $f_A^*(l) = \sup_X \{f_A(X) : L(X) = l\}$ es el tiempo de corrida del algoritmo A. Un algoritmo A se dice que es polinomial para un problema P si $f_A^*(l) = O(l^p)$ para algún entero positivo p [22]

Los problemas de optimización se clasifican en [24]:

- Problemas clase P
- Problemas clase NP
- Problemas clase NP-completo

- Problemas clase NP-difícil

Definición: Se dice que un problema pertenece a la clase P si existe algún algoritmo que lo resuelva en tiempo polinomial, en la literatura se encuentran problemas que pertenecen a esta clase tales como [21]:

- El problema del camino mas corto
- El problema de flujo máximo
- El problema de flujo de costo mínimo
- Programación lineal
- Problema de la mochila continuo
- Calculo del común divisor

Definición: NP se refiere a los problemas de decisión con la propiedad de que para cualquier instancia para la cual la respuesta es SI, hay un método “corto” (polinomial) para la obtención de esta respuesta [22].

Definición: Sean P, Q ε NP, si una instancia de P puede ser convertida en tiempo polinomial a una instancia de Q entonces P es polinomialmente reducible a Q [22].

Definición: NP- completo es el subconjunto de problemas P ε NP tal que para toda Q ε NP, Q es polinomialmente reducible a P [22].

Algunos ejemplos de problemas de la categoría NP-completo son:

- Problema de satisfacibilidad booleana (SAT)
- Problema de la mochila
- Problema del ciclo hamiltoniano
- Problema del agente viajero
- Problema de la clique

Definición: Un problema pertenece a la clase NP-dificil, si no existe un algoritmo que lo resuelva en tiempo polinomial [22].

Algunos ejemplos clásicos de la categoría de los problemas NP-difícil son:

- Problema del agente viajero

- Problema de la mochila

- Problema de la satisfactibilidad

De las definiciones anteriores es posible enunciar las siguientes proposiciones:

Proposición 1: Sean P y Q dos problemas de optimización [22]

- Si Q es "facil" y P " no es mas difícil que" Q, entonces P es "facil"

- Si P es "difícil" y P "no es mas difícil que" Q, entonces Q es difícil

Proposición 2: Sean R, Q ε NP [22]

- Si Q ε P y R es polinomialmente reducible a Q, entonces R ε P

- Si R ε NP- completo y R es polinomialmente reducible a Q, entonces Q ε NP- completo

En el capitulo IV se elaborara un modelo de optimización que resuelva el problema aquí estudiado, se podrá ver que dicho modelo puede ser reducido al problema de la mochila acotado, en base a esto se puede concluir que el Problema de Optimización de Carteras pertenece a la misma clase que el problema de la mochila acotado es decir la clase de NP-difícil.

Para la elaboración de esta investigación se consideraran una serie de supuestos, los cuales se enuncian a continuación:

- El tomador de decisiones es capaz de expresar las ventajas o desventajas que aporta los grupos sinérgicos de proyectos o rubros.

- Se considera que las sinergias de beneficio tienen una afectación lineal respecto a la calidad de la cartera.

- Todo rubro recibe un apoyo mayor o igual a la cantidad mínima o no recibe apoyo.

- El tomador de decisiones toma como validas o como suyas las decisiones que toman en su nombre aquellos a quienes designan, por ejemplo los evaluadores.

- Cada proponente es capaz de evaluar el impacto de cada unidad monetaria invertida en cada rubro en el impacto de cada unidad monetaria invertida en cada rubro en el impacto del proyecto y esta relación se expresa de forma lineal.

Los supuestos anteriores tendrán mas claridad conforme se avance en el escrito de este trabajo.

2.3 DESCRIPCIÓN DEL ESTADO DEL ARTE

Como ya se describió en el capitulo I el origen del problema aquí estudiado fue dentro de las Organizaciones ya sean publicas o de cualquier otro tipo como gubernamentales, ya que cada vez se presenta con mas frecuencia dicho problema, a través del tiempo y debido a las grandes investigaciones que se ha aportado, su evolución sido muy significativa.

La primera gran aportación que se le dio fue por parte de [18] cual fue capaz de desarrollar un modelo de optimización que representara dicho problema, pero este modelo tenia algunas desventajas ya que se trataba de un modelo no lineal y debido a esto su solución exacta era muy difícil de obtener, aun así vinieron consigo muchas ventajas ya que la aproximación para esta solución ahora era mas cercana, entre muchos otros métodos se utilizaron heurísticas para resolverlos y si bien no eran soluciones exactas por lo menos ya se había dado un gran paso para la solución del problema.

Posteriormente se dio otro gran paso ya que Litvinchev y López et al (2007) partiendo del modelo no lineal anterior desarrollaron un modelo lineal entero mixto el cual como es sabido en general es mas fácil de resolver que uno que sea no lineal debido a los métodos existentes y por los software avanzados los cuales dan una solución mucho mas precisa que las soluciones antes obtenidas.

Aun con este gran avance hasta este punto no se había llegado a la solución del problema ya que (como se describirá mas detalladamente en el capitulo IV) lo que se había considerado hasta aquí no cumplía con todas las características que distinguían al problema, por ejemplo los dos modelos que ya habían sido desarrollados (el no lineal y el modelo lineal entero mixto) no consideraban interdependencias entre si (este concepto posteriormente será definido) y otra aspecto es que el problema se consideraba entre proyectos y no entre rubros, en la realidad es mas frecuente que se considere entre rubros.

Los trabajos realizados por [11] y [13] son de importancia relevante ya que con ellos se dio un panorama de lo que se busca en este trabajo, es decir, la modelación de interdependencias las cuales son fundamentales en la elaboración de esta tesis

Añadiéndole todos estos aspectos extras dentro de este trabajo se vera que es posible obtener un modelo de optimización a este problema a partir de los modelos que ya se han formulado (como se vera en el capitulo IV), se trabajara con dicho modelo para así obtener la solución a este problema.

Hay dos sub-problemas fuertemente relacionados con la optimización de cartera [9]:

a) evaluación de proyectos individuales

b) selección de una cartera de proyectos maximizando un impacto

2.4 CONCLUSIONES

Este capitulo abordo una parte de la literatura que se refiere a la clasificación de los problemas de optimización, de acuerdo al modelo de este problema (el cual se obtendrá posteriormente) se llevo a concluir que el problema aquí estudiado es de la clase NP- difícil.

Este capitulo también hablo acerca de la aportación (el cual es superior) de este trabajo al estudio del problema el cual ya se había estudiado en diferentes investigaciones.

III. MARCO TEÓRICO

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capitulo se presenta la base teórica de esta tesis, esta organizado de la siguiente manera: Programación Lineal (sección 3.2), la cual se subdivide en Programación Lineal Entera Mixta (sección 3.2.1) y Programación entera binaria (sección 3.2.2) después se tocara el tema de Optimización Multi-objetivo (sección 3.3) y por ultimo conclusiones.

3.2 PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es una rama de la programación matemática que estudia la optimización (maximización o minimización) de una función lineal que debe satisfacer un conjunto de restricciones lineales también de desigualdad o igualdad.

El siguiente es un problema de programación lineal en su forma general.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
s.a.: \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& \qquad\qquad\qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Aquí $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ es la función objetivo que debe maximizarse, los parámetros c_i son los coeficientes de costo, las cantidades x_i son las variables de decisión que deben determinarse. La desigualdad $\sum_{J=1}^{n} a_{ij} \leq b_i$ es la i-esima restricción, los parámetros a_{ij} se denominan coeficientes tecnológicos, los parámetros b_i reciben el muy general nombre de valor del lado derecho y representa los requerimientos que deben satisfacerse. Por ultimo, $x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0$ son las restricciones de no negatividad.

Un conjunto de valores para las variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ que satisfacen todas las restricciones se denomina punto factible. Al conjunto de todos los puntos factibles se le llama región factible.

Para que la representación de un problema de optimización como uno de programación lineal sea valida se requiere cumplir con al menos las siguientes cuatro hipótesis:

1. Proporcionalidad. El costo de una variable es proporcional al valor que tome así como la contribución en cada restricción. Esto es, dada una variable x_j su contribución al costo total es $c_j x_j$ y a la i-esima restricción es $a_{ij} x_j$

2. Aditividad. El costo total es la suma de los costos individuales y la contribución total en cada restricción es la suma de las contribuciones de cada variable.

3. Divisibilidad. Las variables de decisión se pueden dividir en cualesquiera valores fraccionales, permitiendo con ello valores no enteros para las variables.

4. Deterministica. Todos los coeficientes c_j, a_{ij} y b_i están bien determinados. Esto es, se asume que no hay componentes estocásticas o que tales componentes pueden aproximarse bien mediante tales coeficientes.

Como ya se ha dicho, un programa lineal es un problema de maximizar o minimizar una función lineal bajo restricciones lineales de desigualdad o igualdad. Todo problema lineal puede transformarse de una forma a otra equivalente mediante manipulaciones simples.

Una restricción de desigualdad $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$ puede transformarse fácilmente en una de igualdad adicionando una variable de holgura $s_i \geq 0$ obteniendo $\sum_j a_{ij} x_j + s_i = b_i$

Similarmente la restricción $\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$ se transforma en $\sum_j a_{ij} x_j - s_i = b_i$ sustrayendo la variable de exceso $s_i \geq 0$. Por otra parte una restricción de igualdad $\sum_j a_{ij} x_j = b_i$ siempre puede transformarse en las dos desigualdades $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$ y $\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$

Todo problema de maximización puede convertirse en uno de minimización y viceversa. A saber, es claro que

$$\max \sum_j c_j x_j = -\min \sum_j -c_j x_j$$

Así, todo problema de maximización (minimización) puede transformarse en uno de minimización (maximización) multiplicando por −1 los coeficientes de la función objetivo.

Sean

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces el problema de programación lineal puede escribirse en forma matricial de la forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ s.a.: \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

Como ya se ha visto, un problema de programación lineal puede expresarse en diversas maneras haciendo alguna manipulación. Existen dos formas particularmente útiles llamadas forma canónica y forma estándar.

Se dice que un problema de programación lineal se encuentra en forma estándar si todas las restricciones son de igualdad y todas las variables son no negativas, i.e. si es de la forma

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ s.a.: \quad & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

Un problema está en forma canónica si todas sus variables son no negativas y todas las restricciones son de tipo < para un problema de maximizar o todas son del tipo > si es un problema de minimizar. Esto es, si es de cualquiera de las formas

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.a.: & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.a.: & Ax \ge b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

Dado un problema de programación lineal en su forma general (llamado también primal), se puede encontrar otro problema lineal llamado dual, a continuación se describen estos dos aspectos:

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\Pr oblema\ primal} \\ \max & c^T x \\ s.a.: & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\Pr oblema\ dual} \\ \min & yb \\ s.a.: & yA \ge c^T \\ & y \ge 0 \end{array}$$

Como se puede observar, en el problema dual se utilizan exactamente los mismos parámetros que el problema primal, pero en diferentes lugares, donde y es un vector renglón, es decir $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

En base en lo anterior, se desprenden la siguiente relación primal-dual:

- Propiedad de dualidad débil: si **x** es una solución factible para el problema primal y **y** es una solución factible para el problema dual, entonces: **cx ≤ yb**

- Propiedad de dualidad fuerte: si **x*** es una solución optima para el problema primal y **y*** es una solución optima para el problema dual, entonces **cx*=yb**

El procedimiento general para resolver un problema de programación lineal es el método Simplex, desarrollado por Dantzig (quien también desarrollo la programación lineal) y publicado en 1949.

3.2.1 PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA MIXTA

La programación entera es la rama de la programación matemática que trata de la optimización de problemas cuyas variables deben ser discretas o enteras. Por ejemplo en muchos modelos las variables deben tomar un valor de 0 o 1 y representan una decisión de Si o No que debe ser tomada.

Una gran variedad de los problemas de la práctica pueden ser formulados y resueltos mediante programación entera. Desafortunadamente los métodos actuales de solución, aunque son suficientemente eficientes, no suelen ser tan rápidos como los que existen para programación lineal.

El siguiente es un problema de programación lineal entera en su forma general:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c^T x \\
s.a.: \quad & Ax \le b \\
& x \ge 0 \\
& x \in Z
\end{aligned}
$$

En ocasiones no es necesario que todas las variables tomen valores enteros, sino sólo un grupo de ellas. El siguiente es un problema entero mixto.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c^T x \; + \; f^T y \\
s.a.: \quad & Ax + Dy \le b \\
& x \ge 0, y \ge 0 \\
& x \in R, y \in Z
\end{aligned}
$$

Donde A, c, x e b son como antes; D es una matriz m×p; f e y son vectores columna p-dimensionales.

El algoritmo de ramificar y acotar (“branch & bound” en inglés) es quizá el algoritmo exacto mas empleado para resolver problemas enteros. En la actualidad existen diversas y muy eficientes herramientas basadas en ramificar y acotar que son implementadas computacionalmente modificando o enriqueciendo el algoritmo básico.

3.2.2 PROGRAMACIÓN ENTERA BINARIA

Si todos los valores de las variables están restringidas a tomar valores en el conjunto **B** = {0, 1} se dice que tenemos un problema de programación entera binaria o simplemente un problema binario.

$$
\begin{array}{ll}
\max & c^T x \\
s.a.: & Ax \leq b \\
 & x \geq 0 \\
 & x \in Z \\
 & x \in B
\end{array}
$$

3.3 OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO.

Optimización se refiere a encontrar una o mas soluciones de manera que minimicen o maximicen una o mas funciones objetivos sujeto a que se satisfagan ciertas restricciones.

Un problema de optimización de un solo objetivo solo se ve involucrado con una función objetivo, donde resulta comúnmente una sola solución llamada solución factible.

Un problema de optimización multi-objetivo se puede definir como el problema de encontrar un vector de variables de decisión que satisfaga ciertas restricciones y optimice un vector de funciones cuyos elementos representen las funciones objetivos [Referencia]

La optimización muli-objetivo tiene la tarea de considerar varios objetivos, es decir funciones que forman una descripción matemática de criterios de rendimiento que están normalmente en conflicto entre ellos [Referencia]

La optimización multi-objetivo no se restringe a la búsqueda de una única solución, sino de un conjunto de soluciones llamadas soluciones no nominadas. Cada solución de este conjunto factible de alternativas se dice que es un óptimo de Pareto (nombradas así porque históricamente en 1896 Pareto fue el primero en referirse a problemas de este tipo).

De los óptimos de Pareto obtenidos, solo una de estos es seleccionado, para este caso se necesita la colaboración de un tomador de decisiones que decida la solución más adecuada de acuerdo a la información que este tenga al espacio el cual contiene al conjunto factible llamado espacio de decisión.

El frente de Pareto es la representación en el espacio de los valores de las funciones objetivo, la obtención del frente de Pareto es la principal finalidad de la optimización multi-objetivo

Las diversas técnicas existentes para obtener el frente de Pareto se pueden clasificar en tres categorías:

- Enumerativas
- Deterministas
- Estocásticas

En los últimos años, los métodos estocásticos han sido ampliamente estudiados; en particular, se ha trabajado mucho en la investigación de algoritmos evolutivos.

Estos métodos no garantizan la obtención de la solución óptima, pero ofrecen soluciones aceptables para un amplio rango de problemas de optimización en los que los métodos deterministas encuentran dificultades

La búsqueda enumerativa, es un método determinista en el que no se emplea heurística alguna, constituye una estrategia conceptualmente simple de optimización, y esta basada en la evaluación de cada posible solución dado un espacio de búsqueda finito. El inconveniente de esta técnica es su inherente ineficiencia, ya que puede ser computacionalmente costosa e incluso prohibitiva a medida que el espacio de búsqueda crece.

A pesar de sus desventajas, los resultados que se obtienen mediante enumeración son de gran interés para la investigación en optimización multi-objetivo, ya que pueden ser utilizados para compararlos con aquellos obtenidos mediante el uso de algoritmos heurísticos. En consecuencia, se puede medir de forma objetiva la calidad de estas soluciones. Por tanto, se pueden alcanzar importantes avances científicos con la comparación y evaluación de nuevos algoritmos, algo que contrasta con la situación actual en la que se realizan análisis no estandarizados

En seguida se enuncian los tipos de problemas de decisión que se definen en función del conjunto de alternativas

- Cuando el conjunto de alternativas bien conocidas es finito.

- Problemas discretos, cuando el conjunto de alternativas son descritas mediante la forma de funciones matemáticas.

- Problemas continuos es cuando las alternativas están dadas por restricciones.

Por ejemplo supóngase que se quiere comprar un carro de estos siguientes modelos: VW Golf, Opel Astra, Ford Focus y un Toyota Corolla. La decisión de comprarlo puede ser de acuerdo al precio, consumo de gasolina y velocidad, lo ideal es el carro mas barato, veloz y que consuma la menor cantidad de gasolina. Para este ejemplo se tiene cuatro alternativas y tres criterios. A continuación se presentan los datos más detalladamente:

TABLA 1 Criterios y alternativas

		Alternativas			
		VW	Opel	Ford	**Toyota**
	Precio(1000 euros)	16.2	14.9	14.0	**15.2**
Criterios	Consumo (1/km)	7.2	7.0	7.5	**8.2**
	Velocidad (km/h)	**66.0**	**62.0**	**55.0**	**71.0**

Cuando un problema de decisión contiene un numero contable de alternativas (tal como este ejemplo) se le llama *discreto*, en el otro caso se le llama *continuo.*

Considerando solo las alternativas de precio y consumo, se puede ilustrar los valores de los criterios en un plano bidimensional de la siguiente manera:

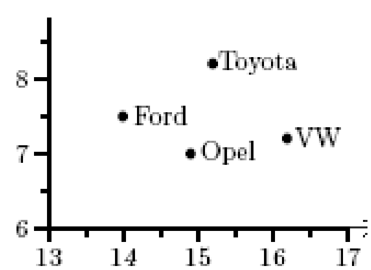

Figura 1. Espacio Criterio del ejemplo

De esta figura es fácil ver que Opel y Ford son las elecciones mas eficientes, pero aun así no hay alternativas que sean a la vez mas baratas y que consuman menos gasolina, para este ejemplo el conjunto **X** = {Foro, Toyota, Opel, VW} es el conjunto factible o el conjunto de alternativas para el problema de decisión. El espacio el cual el conjunto factible **X** es un subconjunto es llamado *espacio de decisión.*

Si se denota al precio como f_1 y al consumo como f_2 entonces f_i : **X** $\longrightarrow$ **R** son funciones objetivos y el problema puede ser escrito matemáticamente de la siguiente manera:

$$\min_{x \in X} \{f_1(x), f_2(x)\}$$

En general se puede escribir un problema de minimización en optimización multicriteria como $\min_{x \in X}\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}$

Sin embargo cada una de estas funciones puede tener importancias diferentes, es decir, una función puede llegar a ser más importante de acuerdo a lo que decida el tomador de decisiones, tales funciones se dicen que son comparadas lexico-gráficamente.

A continuación se presentaran algunas definiciones y proposiciones que conllevaran a una definición formal de problemas de optimización.

Sea *S* un conjunto. Una relación binaria en *S* es un subconjunto *R* de *S x S*, a continuación se presentan algunas propiedades de las relaciones binarias.

Definición: Una relación binaria *R* en *S* es llamada

- Reflexiva si $(s,s) \in R$ para toda $s \in S$

- Irreflexiva si $(s,s) \notin R$ para toda $s \in S$

- Simétrica si $(s_1, s_2) \in R$ entonces $(s_2, s_1) \in R$ para todo $s_1, s_2 \in S$

- Asimétrica si $(s_1, s_2) \in R$ entonces $(s_2, s_1) \notin R$ para todo $s_1, s_2 \in S$

- Antisimetrica si $(s_1, s_2) \in R$ y $(s_2, s_1) \in R$ entonces $s_1 = s_2$ para todo $s_1, s_2 \in S$

- Transitiva si $(s_1, s_2) \in R$ y $(s_2, s_3) \in R$ entonces $(s_1, s_3) \in R$ para todo $s_1, s_2, s_3 \in S$

- Negativamente transitiva si $(s_1, s_2) \notin R$ y $(s_2, s_1) \notin R$ entonces $(s_1, s_3) \notin R$ para todo $s_1, s_2, s_3 \in S$

- Conexa si $(s_1, s_2) \in R$ o $(s_2, s_1) \in R$ para todo $s_1, s_2 \in S$, con $s_1 \neq s_2$

- Fuertemente conexa (o totalmente) si $(s_1,s_2) \in R$ o $(s_2,s_1) \in R$ para todo $s_1, s_2, s_3 \in S$

Definición: Una relación binaria R en S es:

- Una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva

- Un preorden (cuasi-orden) si es reflexiva y transitiva

La expresión $(s_1,s_2) \in R$ se puede escribir como s_1Rs_2, en el caso de que R sea un preorden, el par (S, R) es llamado conjunto preordenado. También para representar $(s_1, s2) \in$ R es común escribirlo como $s_1 \preceq s_2$ y $s_1 \npreceq s_2$ para $(s_1, s_2) \notin R$ y referirnos a la relación R mediante el símbolo $\preceq$ (esta notación es leída como "preferida a").

Dado un preorden $\preceq$ se definen las siguientes relaciones

$$s_1 \prec s_2 :\Leftrightarrow s_1 \preceq s_2 \ y \ s_2 \npreceq s_1$$

$$: s_1 \sim s_2 \quad s_1 \Leftrightarrow s_1 \preceq s_2 \ y \ s_2 \preceq s_1$$

Proposición: Sea $\precsim$ un preorden en S. La relación es $\prec$ irreflexiva y transitiva y la relación ~ es una relación de equivalencia. (Para una demostración detallada véase [Referencia])

Proposición: Una relación binaria asimétrica es irreflexiva. Una relación binaria transitiva e irreflexiva es asimétrica. [Referencia]

Definición: Una relación binaria $\precsim$ en S es:

- Un preorden total si es reflexiva, transitiva y conexa.

- Un orden total si es un preorden total antisimetrica.

- Un orden estrictamente débil si es asimétrica y negativamente transitiva.

Proposición: Si $\precsim$ es un preorden total en S, entonces la relación asociada $\prec$ es un orden estrictamente débil.

Definición: Una relación binaria $\precsim$ es llamada:

- Orden parcial si es reflexiva, transitiva y antisimetrica

- Orden estrictamente parcial si es asimétrica y transitiva (o lo que es equivalente si es irreflexiva y transitiva).

Definición: Un subconjunto $C \subseteq R^p$ es llamado cono si αd ε C para toda d ε C y para toda α ε R.

La siguiente imagen es un ejemplo de dos conos.

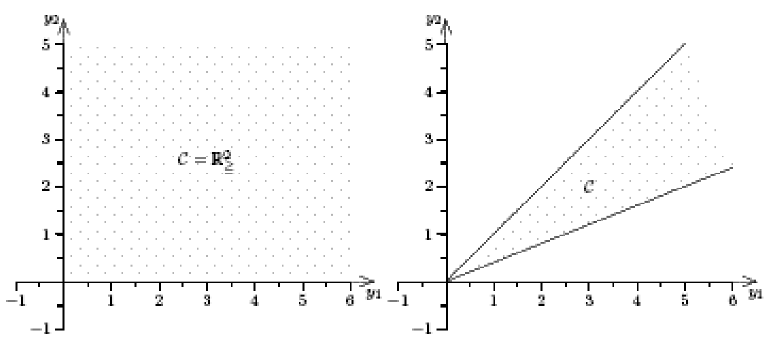

Figura 2. Ilustración de dos conos

Definición: Un cono C en R^p es llamado:

- No trivial o propio si C≠Φ y C ≠ R^p

- Convexo si $\alpha d_1+(1-\alpha d_2)$ ε C, para todo d_1, d_2 ε C y para todo 0<α<1

- Puntual si para d ε C, d≠0, ∉ d C, es decir $C \cap (-C) \subseteq \{\mathbf{0}\}$

En general cuando un vector función objetivo es mapeado de R^p a un espacio ordenado $(R^p, \preceq)$ donde las comparaciones son hechas usando la relación de orden $\preceq$. Este mapa es llamado mapa del modelo.

Como resumen se tienen los elementos de un problema de optimización multicriteria:

- Un conjunto factible ***X***
- Un vector función objetivo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p) : X \to R^p$
- El espacio de objetivo R^p
- El conjunto ordenado $(R^p, \preceq)$
- El mapa modelo *θ*

Definición: Una solución factible x* ε ***X*** es llamada solución óptima de un problema de optimización multicriteria $(X, f, R^p)/\theta/(R^p, \preceq)$ sino hay un x ε ***X***, x ≠ x* tal que $\theta(f(x)) \preceq \theta(f(x^*))$

Para una solución optima x*, θ(f(x*)) es llamado valor optimo del problema de optimización multicriteria.

El conjunto de soluciones optimas es denotado por

.
$$Opt((X,f,R^p)/\theta/(R^p,\preceq))$$

El conjunto de valores óptimos se denota como:
$$Val((X,f,R^p)/\theta/(R^p,\preceq))$$

Definición: Una clase de optimización multicriteria es el conjunto de todos los problemas de optimización multicriteria con el mismo mapa del modelo y el conjunto ordenado, es denotado por $\bullet/\theta/(R^p,\preceq)$.

A continuación se presentara una definición más formal de una solución factible, aquí la función *f* representa un vector de funciones:

Definición: Una solución factible $\hat{x} \in X$ es llamada eficiente u optima de Pareto si no hay otro $x \in X$ tal que $f(x) \leq f(\hat{x})$. Si $\hat{x}$ es eficiente, $f(\hat{x})$ es llamado punto no dominante. Si $x^1, x^2 \in X$ y $f(x^1) \leq f(x^2)$ se dice que x^1 domina a x^2 y $f(x^1)$ domina a $f(x^2)$.

El conjunto de todas las soluciones eficientes $\hat{x} \in X$ denotado por X_E es llamado *conjunto eficiente.*

El conjunto de todos los puntos no dominantes $\hat{y} = f(\hat{x}) \in \mathrm{Y}$, donde $\hat{x} \in X$, es denotado como Y_N y llamado conjunto no dominante.

Para darle más claridad al concepto de solución eficiente, se definirá el siguiente subconjunto de R^p

$$R^p_{\geq} = \{y \in R^p : y \geq 0\}$$

De acuerdo a esto $\hat{x}$ es eficiente si:

1. No hay $x \in X$ tal que $f_k(x) \leq f_k(\hat{x}) \; \forall k = 1,2,\ldots,p \;\; f_i(x) < f_i(\hat{x})$ para algún *i* ε {1,2,…,k}

2. No hay $x \in X$ tal que $f(x) - f(\hat{x}) \in -R^p_{\geq} \setminus \{0\}$

3. $f(x) - f(\hat{x}) \in R^p_{\geq} \setminus \{-R^p_{\geq} \setminus \{0\}\} \; \forall x \in X$

4. $f(X) \cap (f(\hat{x}) - R^p_{\geq}) = \{f(\hat{x})\}$

5. No hay $f(x)$ ε $f(X) \setminus \{f(\hat{x})\}$ con $f(x) \in f(\hat{x}) - R^p_{\geq}$

6. $f(x) \leq f(\hat{x})$ $para\ alguna\ x \in X\ \ implica\ f(x) = f(\hat{x})$

A continuación se ilustran las definiciones anteriores excepto la última

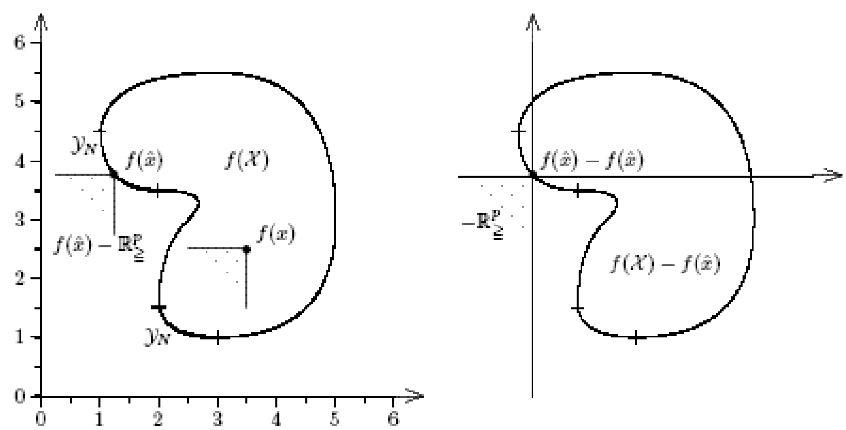

Figura 3. Ilustración de la definición de soluciones eficientes

La figura del lado izquierdo corresponde a las definiciones 1, 4 y 5, mientras que la del lado derecho corresponde a las definiciones 2 y 3.

Definición: Sea $(S, \preceq)$ un conjunto preordenado (reflexivo y transitivo), $(S, \preceq)$ es inductivamente ordenado, si cada subconjunto totalmente ordenado de $(S, \preceq)$ tiene una cota inferior. Un subconjunto totalmente ordenado de $(S, \preceq)$ es llamado una cadena.

Lema de Zorn: Sea $(S,\preceq)$ un conjunto preordenado y sea inductivamente ordenado. Entonces *S* contiene un elemento mínimo, es decir hay $\hat{s} \in S$ tal que $s \preceq \hat{s}$ implica $\hat{s} \preceq s$

Definición: Una solución factible $\hat{x} \in X$ es llamada débilmente eficiente si no hay un $x \in X \; tal \; que \; f(x) < f(\hat{x})$

3.4 CONCLUSIONES

En este capitulo se aborda la parte teórica del problema para posteriormente iniciar con la búsqueda de la solución al problema. Se hizo mención a los conceptos mas básicos dentro de la las ramas a las que pertenece el problema, para que de esta forma haya mas la comprensión a la hora de que el modelo matemático sea presentado, así como la solución del mismo.

IV. MODELO PROPUESTO

4.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se describe la incorporación de rubros e interdependencias en un modelo para la selección de proyectos de I & D en organizaciones públicas.

Se inicia con la descripción de antecedentes directos del modelo propuesto (4.2), se hace referencia al modelo no lineal que obtuvo [18]) y los resultados que obtuvo a partir de este modelo, posteriormente se vera que de este modelo no lineal es posible obtener un modelo lineal entero mixto (Litvinchev y López et al 2007) entre proyectos, después se definen los rubros y se muestra como se pueden incorporar en el modelo (4.4). A continuación se introducen las interdependencias, y se discuten los modelos más difundidos (4.5). Una vez presentada la modelación de interdependencias se muestra una propuesta para modelar las interdependencias y se presenta el modelo que final propuesto (4.6). Finalmente se elaboran conclusiones sobre los contenidos del capítulo (4.7).

4.2 ANTECEDENTES

Se parte de un modelo basado en un enfoque normativo de solución propuesto por Fernández et al (2004), que construye un modelo de preferencias no lineal que se obtiene de la generalización “borrosa” del esquema clásico de programación 0-1 y de la teoría de la decisión multiatributo. Para cientos de variables, la complejidad del problema de optimización no lineal no puede manejarse por algoritmos tradicionales, y se ha resulto empleando algoritmos genéticos, redes neuronales (Navarro, 2005), o mas recientemente Evolución Diferencial (Castro 2007). Se reformula el problema como un problema multiobjetivo que se modela como un problema lineal entero mixto con múltiples objetivos.
Según se plantea en [20] los parámetros principales del problema son:

N ($N \geq 1$): Cantidad de proyectos aspirantes a recibir apoyo financiero en una convocatoria pública de I & D, que cumplen requisitos mínimos de aceptabilidad;

K ($K \geq 1$): Cantidad de áreas en las cuales los N proyectos pueden clasificarse. La división en áreas puede ser resultado de consideraciones de estructura organizacional ó del interés en balancear la cartera y se impondrá como condición que cada proyecto debe estar clasificado solamente en un área.

M_j: cantidad de dinero que satisface plenamente los requisitos presupuestales del proyecto j

m_j: cantidad tal que, en caso de no ser satisfecha, existirían serias dudas de que el proyecto j recibe un financiamiento adecuado.

P_G: Monto total de los recursos financieros disponibles a distribuir entre los proyectos.

P_i^+: Presupuesto máximo que puede ser ejercido por los proyectos del área i.

P_i^-: Presupuesto mínimo que puede ser ejercido por los proyectos del área i.

Variables de decisión: dj: monto financiero otorgados al proyecto j. El modelo matemático no lineal multiobjetivo queda entonces planteado como sigue [18]

La región factible está caracterizada por:

$$\sum_{j=1}^{N} \delta_j \geq \Omega \qquad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \mu_j (d_j) \geq \Delta \qquad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^{N} d_j - P_G \leq 0 \qquad (4.3)$$

$$\sum_{j \in J_i} d_j - P_i^+ \leq 0 \qquad (4.4)$$

$$P_i^- - \sum_{j \in J_i} d_j \leq 0 \qquad (4.5)$$

$$d_j \in [m_j, M_j] \cup \{0\} \qquad (4.6)$$

$$\delta_j \in \{0,1\} \qquad (4.7)$$

Donde:

- δ_j toma valor 1 si $d_j > 0$, y 0 en otro caso.
- Δ representa el nivel mínimo aceptable de calidad y Ω la cantidad mínima aceptable de proyectos que pertenecen a la cartera.
- J_i denota el conjunto de proyectos pertenecientes al área i.
- w_j modela la importancia asignada al proyecto j-ésimo, la cual depende de su evaluación y del área a la que pertenece el proyecto.
- μ_j (d_j) indica si el proyecto j ha sido suficientemente apoyado en la cartera. Esta función es creciente en el intervalo [m_j, M_j], tal que $\mu_j (M_j) = 1$, $\mu_j (m_j) = \alpha_j$,

  $\mu_j (m_j<d_j<M_j) >0$, y $\mu_j (d_j <m_j) = 0$. Aquí α_j representa el nivel mínimo de pertenencia al predicado difuso que establece si un proyecto está adecuadamente apoyado o no.

Se desea obtener un compromiso aceptable para el tomador de decisión entre los objetivos:

$$\max \sum_{j=1}^{n} w_j \mu_j (d_j) \qquad (4.8)$$

$$\max \sum_{j=1}^{N} \delta_j \qquad (4.9)$$

$$\textit{sujeto a las restricciones } (4.1)-(4.7)$$

La complejidad en la solución de este modelo radica en la no linealidad y el carácter discontinuo de la región factible y la función objetivo que caracteriza la calidad de la cartera, estas particularidades del modelo dificultan enormemente el proceso de búsqueda por métodos heurísticos y descarta la utilización de métodos exactos. Sin embargo la estructura del problema sugiere que puede ser factible separar la función objetivo y la región factible en subproblemas menos complejos (Jain & Grossman 2001, Hooker 2007).

En el modelo matemático presentado en la sección anterior note que salvo las funciones μ_i los demás componentes son lineales. Pero incluso estas funciones son lineales por tramos. Es esta característica la que se explota para establecer un modelo lineal entero mixto equivalente al modelo no lineal, para mayor detalle de la equivalencia de ambos modelos o de cómo partiendo del primero se puede llegar al segundo se detalla en Litvinchev et al (2009), a continuación se presenta el modelo propuesto en ese trabajo:

$$\max \quad \pi \sum_{j=1}^{N} w_j (a_j y_j + b_j x_j) + (1-\pi) \sum_{j=1}^{N} y_j \qquad (4.10)$$

$$\textit{sujeto a}:$$

$$m_j y_j \le x_j \le M_j y_j, \quad j \in \{1,\dots,N\} \qquad (4.11)$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \le P_G \qquad (4.12)$$

$$P_i^- \le \sum_{j \in J_i} x_j \le P_i^+, \quad i \in \{1,\dots,K\} \qquad (4.13)$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad (4.14)$$

Las variables de decisión son x_j y y_j, donde las x´s representan los valores de las d´s (en el modelo no lineal), mientras que las y´s representan si los proyectos han sido suficientemente apoyados (1) o no (0).

En la función objetivo el término $\pi \sum_{j=1}^{N} w_j (a_j y_j + b_j x_j)$

representa la calidad de la cartera ponderada por un factor π que indica la importancia relativa de la calidad de la cartera ante la cantidad de proyectos apoyados, esta último representada en el término $(1-\pi)\sum_{j=1}^{N} y_j$. Este modelo hace innecesarias las restricciones (4.1) y (4.2) puesto que el efecto se logra dando diferentes valores a π.

Las restricciones (4.6) se transforman en las restricciones

$m_j y_j \leq x_j \leq M_j y_j, \quad j \in \{1,\ldots,N\}$, que garantizan que si un proyecto no es apoyado suficientemente, entonces no debe entrar a la cartera y por consiguiente el monto asignado es 0.

4.3 MODELACIÓN DE RUBROS.

El modelo presentado por Litvinchev et al en la sección anterior solo permite considerar la asignación de recursos a proyectos como una caja negra. Se entrega una cierta cantidad de dinero en el caso que nos ocupa pero no se tiene información del impacto que esta asignación tiene hacia distintas actividades asociadas a la propuesta. Por otra parte, es un hecho común en las convocatorias de propuestas de proyectos de I & D en organizaciones públicas que exijan desgloses financieros de los apoyos solicitados en una serie de rubros (actividades) que son considerados importantes para las organizaciones que brindan los apoyos. También es común que se impongan ciertas restricciones a las cantidades de recursos que se pueden asignar a ciertos rubros, como por ejemplo las cantidades que pueden gastar en inversión o gasto corriente, o en viáticos, etc. También es un hecho reconocido que para proyectos diferentes no necesariamente impactan con una magnitud similar el dinero invertido en gasto corriente o inversiones o viáticos, es posible que en un proyecto sea más importante el poder contar con la literatura requerida y poder asistir a determinada reunión o conferencia académica para lograr sus objetivos que comprar equipo de cómputo, mientras que para otro proyecto sea más importante formar recursos humanos y adquirir equipo de cómputo que participar en reuniones académicas. Luego la asignación de recursos a estas actividades impacta de forma diferente en que estos proyectos logren sus objetivos.

Considerando los argumentos anteriores es que se propone en este trabajo la incorporación de la modelación del impacto del financiamiento parcial o total en los rubros recogidos en el desglose financiero de cada proyecto.

En la literatura revisada existen pocos trabajos que modelen la descomposición de los requerimientos financieros de los proyectos que compiten por recursos, Aunque la finalidad principal es para poder realizar una planeación de asignación de recursos en el tiempo. Para incorporar rubros en el modelo anterior, Se sustituyen en las restricciones (4.11 – 4.13) las x_j que representan las cantidades de dinero asignadas a cada proyecto j por $\sum_{i=1}^{T} r_{ji}$ que representan las cantidades asignadas a cada rubro i en cada proyecto j.

Esta sustitución no refleja la importancia que tiene para la obtención de los objetivos del proyecto la inversión de una unidad monetaria en cada rubro. Por ejemplo si una unidad monetaria en inversión es 3 veces más importante que la inversión de una unidad monetaria en viáticos esa situación no se ve reflejada en la substitución anterior. Se propone entonces la siguiente substitución de x_j para la función objetivo: $\sum_{i=1}^{T} \rho_{ji} r_{ji}$ donde los ρ_{ji} representan la importancia que tiene la inversión de una unidad monetaria en el rubro i del proyecto j, estos constituyen además una información adicional para el tomador de decisiones que de no estar de acuerdo puede modificarlos acorde a su interpretación del impacto en el proyecto respectivo, de esta manera se potencia la posibilidad de que no aumente el riesgo de que los proyectos no cumplan sus objetivos por un financiamiento inadecuado atendiendo a los requerimientos específicos de cada rubro.

A continuación se presenta el modelo donde se incorporan los rubros:

$$\max \quad \pi\sum_{j=1}^{N} w_j\,(a_j y_j + b_j \sum_{i=1}^{T}\rho_{ji}\cdot r_{ji}) + (1-\pi)\sum_{j=1}^{N} y_j \qquad (4.15)$$

$$sujeto\ a:$$

$$m_j^- y_j \le \sum_{i=1}^{T}\rho_{ji}\cdot r_{ji} \le M_j^+ y_j\,, \quad j\in\{1,\dots,N\} \qquad (4.16)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{T}\rho_{ji}\cdot r_{ji} \le P_G \qquad (4.17)$$

$$P_i^- \le \sum_{j\in J_i}\sum_{t=1}^{T} r_{jt} \le P_i^+\,, \quad i\in\{1,\dots,K\} \qquad (4.18)$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad (4.19)$$

Se pueden añadir también restricciones de cajas para cada rubro, algo que no es inusual en las convocatorias donde al menos un monto máximo de financiamiento es establecido para ciertos rubros.

4.4 INTERDEPENDENCIAS ENTRE PROYECTOS Y ENTRE RUBROS

Dos o más proyectos o rubros se dice que son interdependientes si el impacto de uno depende de los impactos de los proyectos o rubros relacionados [14]. Por ejemplo varias funciones controladas por un ordenador dentro de un automóvil son interdependientes ya que estas requieren del desarrollo de un sistema operativo central, otro ejemplo de sinergias se puede ver en un modelo de asignación de tareas de computadoras, donde alguna computadora solo puede iniciar su procesamiento cuando otra ya haya terminado [14]

Las interdependencias se clasifican en tres tipos [16]: interdependencias de recurso, de beneficio y técnica, a continuación se describen cada una de estas:

1 Las <u>interdependencias de recurso</u> ocurren cuando la cantidad de recursos requeridos para desarrollar un conjunto de proyectos independientes es más grande que la cantidad de recursos requeridos cuando todos ellos son seleccionados.
2 La <u>interdependencia de beneficio</u> resulta de un incremento o decremento con respecto a la suma individual de los beneficios de los proyectos interrelacionados.
3 La <u>interdependencia técnica</u> se refiere a que si un conjunto de proyectos mutuamente exclusivos es identificado, un proyecto que pertenece a este conjunto solo puede ser seleccionado solo si otro proyecto de este conjunto no es seleccionado.

Generalmente las interdependencias de recursos van modeladas en las restricciones, mientras que las de beneficio se sitúan comúnmente en la función objetivo.

Un ejemplo de interdependencias de recursos se ilustra a continuación: Por ejemplo, en un departamento de investigación varios proyectos que compiten por recursos solicitan cada uno un servidor y software similares, requeridos para resolver una misma clase de problemas. Este mismo ejemplo sirve para ilustrar una interdependencia de beneficio. Estos dos tipos de interdependencias son los más comunes.

Una situación que ilustra la interdependencia técnica puede ser (hipotéticamente): en una convocatoria de proyectos sociales se ha establecido una licitación para la construcción de un hospital, varias empresas constructoras envían una propuesta de proyectos, de las cuales sólo una será seleccionada. Usualmente la interdependencia técnica tiene lugar entre proyectos, no entre rubros.

Hay varias formas de representar sinergias una es la relación no lineal entre costo y valor, los modelos de optimización que manejan sinergias frecuentemente las incluyen en la función objetivo y en sus restricciones, también se pueden representar las sinergias de costos y valores en un conjunto de proyectos mediante matrices esparcidas [17]

La programación entera (lineal y no lineal) considera proyectos interdependientes, al igual que los modelos de programación de meta y la programación no lineal no considera proyectos de este tipo [17].

Dentro de la programación estocástica se encuentra la investigación de espacio de parámetro estocástico que es capaz de resolver problema de selección de proyecto con interdependencias entre ellos [17].

La programación dinámica también trabaja con este tipo de proyectos, aunque esta pose algunas desventajas como: frecuentemente encuentra problemas computacionales, y que solo se encuentra una restricción de recurso [17].

Un método también utilizable es la matriz de dependencia, la cual es cuadrada, donde cada proyecto representa una columna y una fila idénticamente ordenadas, de tal manera que los elementos de esta matriz varían de cero a uno, por ejemplo si el elemento de la fila i y columna j es cero, esto quiere decir que los proyectos i y j son independientes, si el elemento es 1 significa que son totalmente dependientes [15].

Se ha desarrollado un modelo de opciones anidadas que incorpora el impacto de interdependencias de proyecto para calcular el valor de opción de todos los proyectos [11].

Existen nuevos métodos visuales los cuales maneja mas de tres proyectos interrelacionados entre si [11].

Diversos métodos solo trabajan con a lo mas tres proyectos interdependientes, la metodología empleada por [11] va mas allá de solo trabajar con tres proyectos interdependientes, consta de tres fases:

La primera fase trata de un método de selección, donde se escogen a los proyectos aceptables para una nueva evaluación y se guarda el número de proyectos, en la segunda fase se trabaja con un modelo de programación entera lineal que identifica todas las carteras eficientes, donde la suma de los beneficios que ocurren si un conjunto de interdependencias esta dentro de la cartera esta incluida en la función objetivo, y en las restricciones se encuentra un indicador que dice si una interdependencia de un proyecto toma efecto para una cartera específica, y finalmente la tercera fase pretende encontrar una cartera apropiada según el tomador de decisiones [11].

En [11] se trabaja con un ejemplo numérico de 9 proyectos interdependientes con 3 categorías de beneficio, 2 categorías de recurso y 3 periodos, resulta que en la fase 2 solo se requieren de algunos segundos para calcular todas las carteras de un problema con 20 proyectos, por lo que este método es bastante efectivo en cuanto al tiempo de procedimiento y además maneja varios objetivos a la vez.

En [14] se presenta un modelo desarrollado por la Compañía Boeing, de Seattle, para optimizar una cartera de proyectos de desarrollo en la mejora de productos, usando una matriz de dependencia, que cuantifica las interdependencias entre proyectos, y modelo entero no lineal para optimizar la selección de proyectos.

En [16] es propuesto un modelo de programación entera mixta para resolver el problema de selección y programación de proyectos interdependientes, se considera un ejemplo numérico en una compañía de 10 proyectos disponibles para ser seleccionados.

De acuerdo a la literatura, el procedimiento que más se acerca a lo que se esta buscando para resolver este problema es el establecido por [11].

En resumen, entre los métodos que consideran interdependencias se encuentran [17]: Programación entera (binaria), Programación de meta, Programación estocástica, Programación estocástica difusa. Otros modelos son: scoring model [17], matriz de dependencia [15] y métodos visuales como: Método de diagramas por flecha, Modelo de opciones anidadas, aproximación de red de precedencia.

A continuación se describen los modelos que representan interdependencias entre proyectos que más se acercan a la problemática que se investiga en este trabajo.

4.4.1 MODELACIÓN DE INTERDEPENDENCIAS POR STUMMER & HEIDERBERGER:

Stummer & Heiderberger [11] modelan las interdependencias entre proyectos de la siguiente manera:

Las funciones objetivo se modelan de la manera siguiente:

$$\max u_{k,t} = \sum_{i=1}^{I} b_{i,k,t} \cdot x_i + \sum_{j=1}^{J} g_j(x) \cdot c_{j,k,t} + \sum_{j=J+1}^{\hat{J}} h_j(x) \cdot d_{j,k,t} \qquad (4.17)$$

para k=1,…K t=1,…T

donde u_{kt} es la función asociada a la categoría (indicador k, en el periodo t), $x_i = 1$ si el proyecto i está en la cartera y $x_i = 0$ si no, I es el número de proyectos, K el número de categorías y T el número de periodos, la primer suma se refiere a los beneficios individuales b_{ikt}, la segunda a los beneficios adicionales c_{jkt} surge si la cartera x contiene al menos un número m_j de proyectos que son elementos de algún subconjunto A_j de interrelación (j=1,...,J), si este es el caso entonces gj(x)=1 sino gj(x)=0 y la tercera suma corresponde a los beneficios d_{jkt} que ocurre si en la cartera x contiene a lo más n_j de proyectos de algún subconjunto Aj (j=1,...,J) de interdependencia contenida en x, si este es el caso entonces $h_j(x)$ =1 sino hj(x) =0 $g_j(x)$. Esta función objetivo está sujeta a ciertas restricciones (restricciones de interdependencia), donde $g_j(x)$ funciona como un indicador de interdependencia. Se define a $f_j(x) = \sum_{i=1}^{I} a_{ij} \cdot x_i \quad \forall j = 1,...,J$ que representa al número de proyectos en la cartera x que está afectada por la interdependencia j con a_{ij} =1 si i pertenece a A_j y a_{ij} =0 sino. Dada m_j como el mínimo número necesario de proyectos, las relaciones

$$f_j(x) - m_j + 1 \leq I \cdot g_j(x) \leq f_j(x) - m_j + I \qquad (4.18)$$

$$g_j(x) \in \{0,1\}, \forall j = 1,\ldots,J \qquad (4.19)$$

Aseguran que si $f_j(x) \geq m_j$ entonces gj(x) =1 y si $f_j(x) < mj$ entonces $g_j(x)$ =0 como se requería.

El modelo de Stummer & Heiderberger si bien es bastante general, no sugiere (al menos de una forma directa) como modelar las interdependencias de recursos, beneficios o técnicas. No incorpora las restricciones de áreas y considera que los proyectos compiten por recursos que pueden ser diferentes del dinero. En ese sentido el modelo es mas bien un framework, ya que no indica como modelar concretamente el impacto de la cartera, así como el impacto de las sinergias en la selección.

4.4.2 MODELACIÓN DE INTERDEPENDENCIAS POR RAFAEL CABALLERO.

El doctor Rafael Caballero expresa un modelo para la selección y scheduling de carteras de proyectos de la siguiente manera (solo se hará mención de la parte de la modelación de sinergias): supóngase una organización en la que se tienen I proyectos propuestos para seleccionar de acuerdo al conjunto de objetivos y restricciones, también se especifica cuando cada proyecto comenzara dentro de un horizonte de planeacion dividido en T periodos, la variable de decisión esta definida de la siguiente manera:

$$x_{it} = \begin{cases} si\ el\ proyecto\ i\ \ comienza en\ t \\ en\ otro\ caso \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{I} \\ \mathrm{t} = 1,2,\ldots,\mathrm{T} \end{array}$$

Si el proyecto i inicia en t y tarda di periodos, entonces el tiempo de ejecución del proyecto i en el periodo k es k+1-t. Si k+1-t≤0, el proyecto no ha iniciado y si k+1-t > di, el proyecto ya ha sido completado. Esto es el proyecto i se activara en k solo si

$$\sum_{t=k-d_i+1}^{k} x_{it} = 1 \qquad (4.20)$$

Para describir las funciones objetivos se asume que la organización quiere evaluar las carteras de acuerdo a un conjunto de atributos (flujo de efectivo, ventas riesgos, etc.), también ha especificado diferentes subconjuntos de proyectos A_j tal que si en el periodo k la cartera contiene un numero de proyectos que es mayor o igual a m_j y menor a M_j hay un incremento (o decremento) en el valor a_{jqk} (sinergia j, j=1,….,s) en el atributo q (q = 1,…,Q), se obtiene la siguiente estructura

$$C_{qk}(x) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{k} c_{iq(k+1-t)} x_{it} + \sum_{j=1}^{s} g_{jk}(x) a_{jqk} \quad q = 1,\ldots,Q, \; k = 1,\ldots,T \qquad (4.21)$$

Donde $c_{iq(k+1-t)}$ representa la contribución individual del proyecto i si fue seleccionado e iniciado en el tiempo t para la función q en el periodo k, la función g_{jk}(x) toma valor 1 cuando la sinergia j ocurre y 0 en otro caso, es decir, la segunda parte de la expresión (4.21) representa el efecto positivo (o negativo) de las sinergias entre proyectos. Caballero incorpora en la región factible las restricciones que reflejan las interdependencias entre proyectos que se definen de la siguiente manera: cada interdepedencia *j* (*j*=1,…,S) tiene un conjunto de proyectos *Aj* , una cota inferior m_j y una superior M_j, la función $g_{jk}(x)$ detecta si hay o no una sinergia j entre algunos proyectos dados, puede ser expresada como el producto de dos funciones $g_{jk}^{m}(x)$ y $g_{jk}^{m}(x)$, la primera función indica si la cota inferior es efectiva o no y la segunda indica la efectividad de la cota superior. Si el número de proyectos activos del conjunto A_j en el periodo k es al menos mj, entonces $g_{jk}^{m}(x) = 1$ (0 en otro caso), tomando en cuenta (4.20) se tienen las siguientes restricciones:

$$\sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^{k} x_{it} - m_j + 1 \leq I g_{jk}^{m}(x) \leq \sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^{k} x_{it} - m_j + I \quad j = 1,\ldots,S \qquad (4.22)$$

Por otro lado, si el número de proyectos no excede la cota superior M_j entonces $g_{jk}^{M}(x)=1$ (0 en otro caso), ahora se tienen las siguientes restricciones:

$$M_j - \sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^{k} x_{it} + 1 \leq I g_{jk}^{M}(x) \leq M_j - \sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^{k} x_{it} + I \quad j=1,\ldots,S \quad (4.23)$$

Si una de las dos cotas no esta verificada entonces $g_{jk}^{M}(x) \cdot g_{jk}^{m}(x) = 0 = g_{jk}(x)$ lo cual significa que la sinergia j no existe.

El modelo desarrollado por Caballero, toma como base al modelo propuesto por Stummer & Heiderberger y desarrolla en detalle la parte de la planificación temporal, sin embargo este modelo tampoco profundiza en la representación de las sinergias entre proyectos.

A continuación se presenta nuestra propuesta para la representación de interdependencias en carteras de proyectos de I & D en organizaciones públicas, misma que se basa en los trabajos de Stummer & Heiderberger y Caballero, pero que representa de manera explícita las interdependencias de beneficio, recursos y técnicas.

4.4.3 PROPUESTA DE MODELACIÓN DE INTERDEPENDENCIAS.

Primero se explicara la sinergia de beneficio, la cual como ya se explico antes se ve involucrada en la función objetivo. Supóngase que se tienen D1, D2, …Dl ; conjuntos de todas las relaciones sinérgicas entre rubros donde cada relación que es activada aporta un beneficio extra (v_l) al impacto de la cartera, si se tiene una variable binaria σji que indica si el recurso j del proyecto i recibe apoyo o no, la siguiente ecuación será añadida a la función objetivo $\sum_{l\in L}(-1)^{f(l)}\cdot v_l\cdot\frac{1}{|D_l|}\sum_{(j,i)\in D_l} r_{ji}\cdot\prod_{(j,i)\in D_l}\sigma_{ji}$ donde *f (l)* es una función entera, la cual indicara si se le restara o sumara v_l por cada peso que le asigne el recurso j al proyecto i, esta ecuación me indica que solo se agregara el beneficio si todo recurso j y todo proyecto i recibe apoyo al menos para uno de los *l* conjuntos.

Para las interdependencias de recurso se denota el conjunto de todos aquellos rubros (j, i) que no están contenidos en algún conjunto sinérgico por Ψ, además M y S representan los conjuntos de todas relaciones sinérgicas entre rubros donde cada relación que es activada requiere en total menor o mayor cantidad de fondos que ser incluidos los rubros correspondiente de forma individual respectivamente, si R_{ji}^{+} y R_{ji}^{-} son las cantidades máxima y mínima de financiamiento a otorgar al rubro (j, i), respectivamente y r_{ji} es la cantidad de dinero asignado del recurso j al proyecto i, se necesita garantizar que se le asignara dinero al recurso j del proyecto i cuando este sea apoyado y lo contrario cuando no se apoye, lo cual se puede expresar mediante las siguientes restricciones: .

$$\sigma_{ji} \cdot R_{ji}^{-} \leq r_{ji} \leq \sigma_{ji} \cdot R_{ji}^{+} \quad (j,i) \notin \Psi$$
$$(1 - \prod_{(t,h)\in M_q} \sigma_{th}) \cdot R_{ji}^{-} \leq r_{ji} \leq (1 - \prod_{(t,h)\in M_q} \sigma_{th}) \cdot R_{ji}^{+} \quad (j,i) \in M$$
$$(1 - \prod_{(t,h)\in S_g} \sigma_{th}) \cdot R_{ji}^{-} \leq r_{ji} \leq (1 - \prod_{(t,h)\in S_g} \sigma_{th}) \cdot R_{ji}^{+} \quad (j,i) \in S$$

Sean η_q, λ_g cotas sinérgicas para los rubros que pertenecen a cada relación de sinergia para restricciones tipo M y S respectivamente, cada rubro

4.5 MODELO PROPUESTO PARA LA INCORPORACIÓN DE RUBROS Y SINERGIAS EN EL PROBLEMA DE LA CARTERA DE PROYECTOS I&D EN ORGANIZACIONES SOCIALES.

A continuación se presenta y describe el modelo no lineal entero mixto biobjetivo (basado en el modelo propuesto por Litvinchev & Lopez) que incorpora rubros y sinergias.

$$
\begin{aligned}
&donde \quad : \\
&\Psi = M \cup S \\
&M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_Q \\
&S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_G \\
&D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_L
\end{aligned}
$$

T es la cantidad de recursos considerados

f(l) es una función que depende de l

r_{ji} es la cantidad de dinero asignado del recurso j al proyecto i.

ρ_{ji} es el impacto relativo que resulta de invertir una unidad monetaria en el recurso j en el proyecto i

v_l beneficio asociado a la sinergia l, si la misma es activada

σ_{ji} indica si el recurso j del proyecto i recibe apoyo o no, toma valores 1 y 0.

Ψ – Es el conjunto de todos aquellos rubros (j, i) que no están contenidos en algún conjunto sinérgico.

M - Es el conjunto de todas relaciones sinérgicas entre rubros donde cada relación que es activada (todos los rubros que la componen reciben financiamiento) requiere en total menor cantidad de fondos que ser incluidos los rubros correspondiente de forma individual.

S – Es el conjunto de todas las relaciones sinérgicas entre rubros donde cada relación que es activada (todos los rubros que la componen reciben financiamiento) requiere en total mayor cantidad de fondos que de ser incluidos los rubros correspondientes de forma individual.

D – Es el conjunto de todas las relaciones sinérgicas entre rubros donde cada relación que es activada (todos los rubros que la componen reciben financiamiento) aporta un beneficio extra (en términos de impacto) al impacto de la cartera.

R_{ji}^{+} - Cantidad máxima de financiamiento a otorgar al rubro (j, i)

R_{ji}^{-} - Cantidad mínima de financiamiento a otorgar al rubro (j,i)

η_q – cota sinérgica para los rubros que pertenecen a cada relación de sinergia para restricciones tipo M.

λ_g – cota sinérgica para los rubros que pertenecen a cada relación de sinergia para restricciones tipo S.

$$\max \pi \sum_{j=1}^{N} w_j (a_j y_j + b_j \sum_{i=1}^{T} \rho_{ji} \cdot r_{ji}) + (1-\pi) \sum_{j=1}^{N} y_j +$$

$$\sum_{l \in L} (-1)^{f(l)} \cdot v_l \cdot \frac{1}{|D_l|} \sum_{(j,i) \in D_l} r_{ji} \cdot \prod_{(j,i) \in D_l} \sigma_{ji} \quad (4.24)$$

$$sujeto\ a:$$

$$m_j^- y_j \le \sum_{i=1}^{T} \rho_{ji} \cdot r_{ji} \le M_j^+ y_j, j \in \{1,\dots,N\} \quad (4.25)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{T} \rho_{ji} \cdot r_{ji} \le P_G \qquad (4.26)$$

$$P_i^- \le \sum_{j \in J_i} \sum_{t=1}^{T} r_{jt} \le P_i^+, i \in \{1,\dots,K\} \quad (4.27)$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad (4.28)$$

$$\sigma_{ji} \cdot R_{ji}^- \le r_{ji} \le \sigma_{ji} \cdot R_{ji}^+ \ (j,i) \notin \Psi \quad (4.29)$$

$$(1 - \prod_{(t,h) \in M_q} \sigma_{th}) \cdot R_{ji}^- \le r_{ji} \le (1 - \prod_{(t,h) \in M_q} \sigma_{th}) \cdot R_{ji}^+ \ (j,i) \in M \ (4.30)$$

$$(1 - \prod_{(t,h) \in S_g} \sigma_{th}) \cdot R_{ji}^- \le r_{ji} \le (1 - \prod_{(t,h) \in S_g} \sigma_{th}) \cdot R_{ji}^+ \ (j,i) \in S \ (4.31)$$

$$(\prod_{(t,h) \in M_q} \sigma_{th}) \cdot \sum_{(j,i) \in M_q} R_{ji}^- \le \sum_{(j,i) \in M_q} r_{ji} \le (\sum_{(j,i) \in M_q} R_{ji}^+ - \eta_q) \cdot (\prod_{(t,h) \in M_q} \sigma_{th}) \ (4.32)$$

$$(\prod_{(t,h) \in S_g} \sigma_{th}) \cdot \sum_{(j,i) \in M_q} R_{ji}^+ \ge \sum_{(j,i) \in S_g} r_{ji} \ge (\sum_{(j,i) \in M_q} R_{ji}^- + \lambda_g) \cdot (\prod_{(t,h) \in S_g} \sigma_{th}) (4.33)$$

$$\sum_{(t,h) \in T_{1s}} \sigma_{th} \le (1 - \prod_{(t,h) \in T_{2s}} \sigma_{th}) \cdot |T_{1s}|, s \in \{1,2 \dots, T_1\} \quad (4.34)$$

$$\sum_{(t,h) \in T_{2s}} \sigma_{th} \le (1 - \prod_{(t,h) \in T_{1s}} \sigma_{th}) \cdot |T_{2s}|, s \in \{1,2 \dots, T_1\} \quad (4.35)$$

$$\sum_{i=1}^{T} \sigma_{ji} \le y_j \cdot T \qquad (4.36)$$

$$\sum_{i=1}^{T} \sigma_{ij} \ge y_j \cdot I \ j \in \{1,2,\dots,N\} \quad (4.37)$$

En la función objetivo (4.24) la interdependencia de beneficio queda plasmada en la ultima sumatoria doble representa los términos que se derivan de relaciones sinérgicas de beneficio, en este caso estas relaciones pueden potenciar o mermar el valor de la función objetivo de ahí el termino de (-1) elevado a una función que depende de la relación sinérgica representada a l.Las restricciones (4.25) a (4.29) se refieren al modelo lineal entero mixto propuesto por Litvinchev & López, ahora incorporando los rubros.

Las restricciones (4.30) a (4.37) están asociadas a la introducción de las interdependencias en el modelo. Restricciones (4.30) y (4.31) se activan solo si no son activadas las interdependencias entre rubros (4.32) a (4.35) que representan interdependencias de recursos (por exceso o defecto) y técnicas respectivamente. Las restricciones (4.36) a (4.37) reflejan la relación de que si un proyecto no es apoyado entonces ningún rubro del mismo puede ser apoyado y viceversa.

Como puede observarse, el modelo presentado contiene algunas restricciones no lineales, así como términos no lineales en la función objetivo, lo que lo invalida para ser resuelto por métodos exactos. En la siguiente subsección se presenta un modelo lineal, obtenido a partir de aplicar técnicas de modelado para la linearización de restricciones.

4.5.1 LINEALIZACIÓN DE TÉRMINOS

La técnica empleada para linealizar los términos no lineales consiste en adicionar variables adicionales al modelo. Específicamente se adiciona una variable binaria por cada relación de rubros interdependientes.

Para obtener el modelo lineal entre sinergias, se utilizan algunos parámetros antes explicados, otros son cambiados (en cuanto a la simbología), por ejemplo sean r_{ji} y R_{ji} la cantidad mínima y máxima de financiamiento a otorgar al rubro (j , i) respectivamente, x_{ji} representa el monto asignado del proyecto j al rubro i, se define la siguiente variable

$$y_j = \begin{cases} 1, & si\ el\ proyecto\ j\ es\ apoyado\ suficientemente \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La correspondencia entre esta variable y x_{ij} es la siguiente:

$$m_j y_j \leq \sum_{i \in I} x_{ij} \leq M_j y_j, \quad j \in J$$

La siguiente variable indica si un rubro es apoyado, se define como:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ el\ rubro\ es\ apoyado\ suficientemente \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La correspondencia entre z_{ij} y x_{ij} es:

$$r_{ij} z_{ij} \leq x_{ij} \leq R_{ij} z_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J$$

El proyecto j es apoyado si al menos es apoyado en un rubro es apoyado, y si el proyecto no es apoyado entonces no es apoyado en todos los rubros.

La correspondencia entre y_j y z_{ij} es la siguiente:

$$y_j \leq \sum_{i \in I} z_{ij}, \quad j \in J$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq I y_j, \quad j \in J$$

Se define un conjunto de proyectos, recursos que representa una sinergia s, la sinergia s es llamada activa si todos los proyectos de la sinergia son apoyados, este conjunto se denota de la siguiente forma:

$$C^s \subseteq JxI$$

La siguiente variable indica si la sinergia se activa

$$\sigma^s = \begin{cases} 1, & si\ z_{ij} = 1\ \forall (i,j) \in C^s \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La correspondencia entre esta variable y z_{ij} es la siguiente:

$$\sum_{(j,i) \in C^s} z_{ij} \geq \left| C^s \right| \sigma^s$$

$$\sigma^s + \left| C^s \right| - 1 \geq \sum_{(j,i) \in C^s} z_{ij}$$

A continuación se presenta el modelo lineal considerando rubros e interdependencias.

4.6 MODELO LINEAL PARA LA SELECCIÓN DE CARTERAS DE PROYECTOS DE I & D EN ORGANIZACIONES PÚBLICAS CONSIDERANDO RUBROS E INTERDEPENDENCIAS.

Se definen los siguientes parámetros:

J - conjunto de proyectos

I – conjunto de recursos

S – conjunto índice de sinergias

$C^s \subseteq J \times I$, $s \in S$

B – Conjunto de sinergias de beneficio

L – conjunto de sinergias de reducción de recurso

H – conjunto de sinergias de incremento de recurso

T_1 -conjunto de sinergias técnicas apoyadas

T_2 - conjunto de sinergias técnicas no apoyadas

$C = B \cup L \cup H \cup T_1 \cup T_2$ - conjunto de sinergias

η^s - Cota sinérgica para los rubros que pertenecen a cada relación de sinergia para restricciones tipo L.

λ^s – Cota sinérgica para los rubros que pertenecen a cada relación de sinergia para restricciones tipo H.

r_{ji} - Cantidad mínima de financiamiento a otorgar al rubro *ji*.

R_{ji} - Cantidad máxima de financiamiento a otorgar al rubro *ji*.

Se definen las siguientes variables de decisión de esta forma

$$x_{ij}\ \textit{monto de apoyo recibido por rubro i del proyecto j}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \textit{si el proyecto j es apoyado suficientemente} \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{si el rubro es apoyado suficientemente} \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$\sigma^s = \begin{cases} 1, & si\ z_{ij} = 1\ \forall (i, j) \in C^s \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Se obtiene el modelo que se presenta a continuación:

$$\max_{x,y,z,\sigma} \pi\left[\sum_{j\in J} w_j (a_j y_j + b_j \sum_{i\in I} \rho_{ij} \cdot x_{ij}) + \sum_{s\in B} \upsilon_s \cdot \sigma_s \right] + (1-\pi)\sum_{j\in J} y_j \quad (4.38)$$

$$sujeto\, a:$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{ij} \le P_G \quad (4.39)$$

$$P_k^- \le \sum_{j\in J_{k_i}} \sum_{i\in I} x_{ij} \le P_k^+, k\in K \quad (4.40)$$

$$m_j^- y_j \le \sum_{i\in I} x_{ij} \le M_j^+ y_j, j\in J \quad (4.41)$$

$$r_{ij} z_{ij} \le x_{ij} \le R_{ij} z_{ij},\ i\in I,\ j\in J,\ (i,j)\notin L\cup H\cup T_1 \cup T_2 \quad (4.42)$$

$$y_j \le \sum_{i\in I} z_{ij}, j\in J \quad (4.43)$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} \le |I| y_j, j\in J \quad (4.44)$$

$$\sum_{(j,i)\in C^s} z_{ji} \ge |C^s| \sigma^s,\ s\in S \quad (4.45)$$

$$\sigma^s + |C^s| - 1 \ge \sum_{(j,i)\in C^s} z_{ji},\ s\in S \quad (4.46)$$

$$\sum_{(j,i)\in C^s} x_{ji} \le \sum_{(j,i)\in C^s} R_{ji}^+ - \eta^s \cdot \sigma^s,\ s\in L \quad (4.47)$$

$$\sum_{(j,i)\in C^s} x_{ji} \ge \sum_{(j,i)\in C^s} r_{ji}^- + \lambda^s \cdot \sigma^s,\ s\in H \quad (4.48)$$

$$\sum_{(j,i)\in C^t} z_{ji} \le (1-\sigma^t)\cdot |C^t|,\ t\in T_1 \quad (4.49)$$

$$\sum_{(j,i)\in C^t} z_{ji} \le \sigma^t \cdot |C^t|,\ t\in T_2 \quad (4.50)$$

$$x_{ij} \ge 0,\ y_j, z_{ij}, \sigma^s \in \{0,1\}$$

La restricción (4.39) se refiere al presupuesto máximo, (4.40) representa los límites de recurso por área, (4.41) indica si un proyecto es suficientemente apoyado o no, (4.42) indica si un recurso es suficientemente apoyado o no, (4.43) indica que si todos los rubros no son apoyados entonces el proyecto no es apoyado, (4.44) si al menos un rubro es apoyado el proyecto es apoyado, (4.45) sinergia no se activa si un proyecto no es apoyado, (4.46) la sinergia es activada si todos los proyectos son apoyados, las restricciones (4.47), (4.48) se refieren a las sinergias de reducción y de incremento respectivamente, (4.49) y (4.50) son las sinergias complementarias.

4.7 CONCLUSIONES

A pesar de que hay trabajos anteriores donde se incorporan rubros en los modelos, solo toman en cuenta estos para la planeación temporal pero no los consideran cuando miden el impacto de la cartera a partir de la asignación de recursos a los mismos. También existen trabajos previos que representan interdependencias entre proyectos, sin embargo estos no las representan de forma explícita y los modelos que plantean por lo tanto no pueden ser linealizados.

Se ha logrado construir un modelo lineal entero mixto que incorpora tanto los rubros como las interdependencias entre ellos, se reconocen y modelan tres tipos de interdependencias que son las que con más frecuencia aparecen en los problemas de selección de carteras de proyectos I & D en organizaciones públicas: de beneficio, de recursos y técnicas.

Se requiere desarrollar una metodología organizacional que haga explícito un proceso donde se evalúen los proyectos y se establezcan las interdependencias relevantes. También se requiere desarrollar un proceso de apoyo a la decisión para que los gestores de proyectos logren hacer explícitos los impactos de la asignación de dinero en los rubros y sus relaciones con la obtención de los objetivos del proyecto.

Al incorporar rubros e interdependencias en el modelo obviamente se complica la modelación de preferencias de los tomadores de decisión, se requiere de un volumen mayor de información asociada a los nuevos parámetros introducidos y el tamaño de los problemas puede crecer en varios niveles de orden debido a la gran cantidad de variables que se introducen, pero por otra parte el modelo se acerca mucho mas a los procesos que se realizan en la vida real por parte de las organizaciones y eso lo posiciona favorablemente para que en un futuro pueda ser adoptado por estas.

V. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

5.1 INTRODUCCION

En ese capítulo se presentan los resultados más ininteresantes obtenidos en la implementación de varios experimentos numéricos realizados para validar la efectividad del modelo propuesto, así como su eficiencia computacional.

Inicialmente se describe la instancia principal con la que se ha trabajado y el resto de las instancias empleadas (sección 5.2). A continuación (sección 5.3) se describe el experimento realizado para establecer la equivalencia del modelo propuesto con el modelo biobjetivo lineal que no incluye la modelación de rubros ni sinergias. En la sección 5.4 se describen los experimentos realizados para verificar que el modelo realmente es capaz de sacar partido de la modelación de rubros y sinergias, mientras que en la sección 5.5 se describe un experimento realizado con una instancia de gran tamaño para validar la eficiencia computacional del modelo. Finalmente en la sección 6 se presentan algunas conclusiones.

5.2 DESCRIPCIÓN DE LAS INSTANCIAS Y DE LOS EXPERIMENTOS.

Para la realización de los experimentos se seleccionó el software comercial CPLEX por varias razones: constituye una de las herramientas líderes en el mercado, está instalado en el servidor SUN RAY con 4 procesadores del programa de posgrado de Ingeniería en Sistemas. Este servidor está disponible 24 horas los 365 días del año para estudiantes e investigadores del programa.

Para la ejecución de los experimentos se implementó el modelo en AMPL y se desarrolló un script también en AMPL para generar cada corrida del experimento y almacenar los resultados relevantes (ambos programas se suministran en el Apéndice A).

Dado que el análisis cualitativo para determinar si el modelo realiza una selección adecuada de la cartera es sumamente complejo, pues se realiza sobre la base de la comparación entre carteras, es importante contar con instancias que proporcionen simultáneamente situaciones complicadas y situaciones típicas para probar que el modelo es capaz de generar soluciones donde estas situaciones estén reflejadas adecuadamente. Sin embargo, no es una tarea trivial el construir estas instancias y menos aún el generarlas por medio de un programa de computación.

Se siguió la convención de nombrar las instancias según la cantidad de proyectos candidatos (P15), la cantidad de áreas (A4), la cantidad de rubros (RX) y la cantidad de sinergias (SY) que se encuentran definidos en la instancia respectivamente.

Para la validación del modelo se consideraron 15 proyectos (P15), 4 áreas (A4), 1 o 2 rubros (R1 o R2), y 0 o 2 sinergias (S0 o S2). Se construyó en primer lugar la instancia P15A4R1S0, a partir de esta se generó la instancia P15A4R2S0 simplemente tomando la cantidad de dinero requerido y se dividió a partes iguales entre ambos rubros de cada proyecto de forma tal que tuviesen idénticas restricciones. La elección de asignar restricciones iguales a ambos rubros facilita la identificación del impacto de otros parámetros del modelo en las funciones objetivo y en la asignación del dinero a los proyectos de la cartera.

Por las razones expuestas arriba se decidió realizar la experimentación tomando como base a dos instancias principalmente: una instancia base (P15A4RXSX, de la que se derivaron las instancias P15A4R1S0, P15A4R2S0, P15A4R2S2) pequeña que fue construida expresamente para realizar los experimentos para validar el modelo, y una instancia grande (P10000A4R8S0) que fue generada para validar la eficiencia computacional del modelo. A continuación se describen las instancias P15A4RXSX.

Datos generales de las instancias

Cantidad de dinero disponible: 2, 000,000 de pesos

Cantidad de proyectos candidatos: 15

Cantidad de áreas: 4

Restricciones para las áreas (monto total asignado a proyectos del área debe ser mayor o igual que el mínimo y menor o igual que el máximo, las cantidades de dinero están dadas en miles) para:

TABLA 2. Presupuesto mínimo y máximo por área

	MIN.	MAX.
A1	400	760
A2	500	900
A3	250	500
A4	400	700

Datos generales de los proyectos (las cantidades de dinero están dadas en miles)

TABLA 3. Datos de los proyectos

	MIN.	MAX.	AREA	EVAL.
P1	150	450	1	8.4
P2	117	194	1	6.59
P3	140	194	1	5.46
P4	113	193	2	7.19
P5	115	151	2	5.69
P6	103	139	2	4.5
P7	102	121	2	4.29
P8	200	300	3	6.66
P9	187	283	3	4.66
P10	140	194	4	4.75
P11	135	184	4	4.37
P12	113	193	4	4.25
P13	125	210	4	4
P14	201	284	4	3.87
P15	115	151	4	3.87

Para la construcción de los proyectos se consideraron tres aspectos: la cantidad de dinero máxima requerida, la diferencia entre la cantidad máxima y mínima y la evaluación del proyecto. Respecto a la cantidad máxima solicitada se consideraron 3 categorías de proyectos:

Muy Caros: aquellos que solicitan un monto mayor que 250000.
Caros: aquellos que solicitan un monto máximo menor que 250000 y mayor a 170000.
Menos Caros: el resto.

Se consideraron 4 proyectos muy caros (P1,P8,P9,P14), 7 proyectos caros (P2,P3,P4,P10,P11,P12,P13) y 4 conforman los menos caros (P5,P6,P7,P15).

De los 4 proyectos muy caros se ubico uno en la posición primera del ranking (P1), dos en posiciones intermedias (P8, P9) y el restante en una baja posición (P14). De los proyectos caros se ubicaron 3 en las posiciones mas altas (P2, P3, P4) uno en posición intermedia (P10) y 3 en posiciones bajas (P11, P12, P13). Mientras que del resto se ubicaron 3 en posiciones intermedias (P5, P6, P7) y uno en última posición (P15).

Luego se seleccionaron los proyectos por áreas, se asignaron los proyectos P1, P2 y P3 al área A1, P4 al P7 se asignaron al área A2, P8 y P9 al área 3 y P10 al P15 al área 4.

El impacto de los proyectos se generó de forma tal que se respetara el ranking establecido.

La instancia construida de la forma que se ha explicado presenta algunas características interesantes:

1. El proyecto mejor evaluado es al mismo tiempo el más caro (P1).
2. El proyecto peor evaluado es uno de los mas baratos (P15)
3. Los proyectos P3 y P10 presentan igual requerimiento de dinero, también los proyectos P4 y P12, así como P5 y P15. No obstante nótese que en todos los casos están suficientemente separados en la posición que ocupan respecto al ranking de impacto.
4. Los proyectos P6 y P7 no son iguales pero son muy similares en cuanto a los requerimientos de dinero y a la posición que ocupan en el ranking.
5. El área A1 tiene proyectos muy bien evaluados pero también muy caros.
6. Los proyectos del área A2 son dispares, P4 es el mejor evaluado pero es también el más caro, P5 es un proyecto con valores intermedios en los requerimientos máximos y el impacto. Mientras que P6 y P7 son los peores evaluados pero a la vez son los menos caros. Se identifican entonces tres agrupamientos naturales (P4), (P5) y (P6, P7).

7. Los proyectos del área A3 son muy caros y dispares en cuanto al impacto, aunque hay una pequeña diferencia en cuanto a los requerimientos de dinero a favor de P9 y una diferencia apreciable en cuanto a impacto a favor de P8.
8. Todos los proyectos del área A4 son de bajo impacto, aunque 4 proyectos son considerados caros (P10, P11, P12, P13), uno muy caro (P14) y uno no muy caro (P15).

Con esta información es posible detectar inconsistencias en la asignación de fondos a proyectos y rubros.

A continuación se brindan algunos ejemplos de cómo puede emplearse esa información para detectar consistencia o inconsistencia en el modelo:

1) El proyecto P14 es claramente uno de los peores candidatos ya que es muy caro y resulta con muy bajo impacto, luego en general no debe ser apoyado.

2) Si el proyecto P4 no es apoyado entonces el proyecto P12 tampoco debe ser apoyado, y si se debe seleccionar uno entre los dos el P4 debe ser seleccionado.

3) Igualmente, por lo general P6 y P7 deben ser apoyados con mayor probabilidad que P10, P11, P12.

Aquí el proyecto P1 a pesar de ser el mas caro de todos debe ser apoyado en la mayoría de las situaciones pues la cantidad mínima de apoyo que requiere es aceptable, aquí es perfectamente aceptable que se apoye. En cuanto a los proyectos P2 y P3 en caso de tener que dejar de apoyar a uno de ellos resulta razonable escoger P3 ya que requiere la misma cantidad máxima que P2 y la cantidad mínima aceptable es mayor que la de P2.

Sin embargo, estas apreciaciones pueden no ser válidas cuando se considera que en cada proyecto el impacto del dinero asignado a cada rubro es diferente y cuando se consideran sinergias entre los rubros. Precisamente estas situaciones no evidentes son las que se pretenden estudiar con los experimentos de las secciones siguientes.

5.3 PRUEBAS DE EQUIVALENCIA CON MODELO BASE SIN RUBROS NI SINERGIAS.

Este experimento se desarrolla para validar la equivalencia entre el modelo biobjetivo lineal sin considerar rubros ni sinergias (4.10-4.14) y el modelo que se propone en esta investigación que se inspira en el primero.

Para conducir el experimento se han construido dos instancias a partir de la instancia base descrita en la sección anterior:

P15A4R1S0: Esta instancia es prácticamente igual que la anterior, solo se diferencia de aquella en que se agregan las restricciones para cada rubro de cada proyecto. Y se adecuan algunos parámetros para poder invocar la implementación en AMPL del modelo propuesto.

P15A4R2S0: Esta instancia se construye tomando las cantidades máximas y mínimas solicitadas por cada proyecto, se dividen ambas entre 2 y se asignan estas cantidades como restricciones de cotas mínimas y máximas de cada rubro de cada proyecto (en las Tablas 4 y 5 se puede observar la distribución resultante para los 5 primeros proyectos, en el Apéndice B se presenta la tabla completa). Finalmente se añaden los valores de ρ para cada rubro de cada proyecto. En este caso se toman todos iguales a 1, lo que significa que el decisor considera que un peso invertido en cualquier rubro tiene el mismo impacto en el cumplimiento de los objetivos del proyecto.

TABLA 4. Cotas Mínimas para rubros

Proy.	Rubro 1	Rubro 2
1	75	75
2	58	58
3	70	70
4	56	56
5	57	57

TABLA 5 Cotas Máximas para rubros

Proy.	Rubro 1	Rubro 2
1	230	230
2	100	100
3	100	100
4	100	100
5	80	80

Para cada instancia se emplearon varios valores de π en la ponderación de los objetivos: 0, 0.25, 0.5, 0.7 y 1. Se compararon los valores objetivos obtenidos en cada caso, así como la cantidad de proyectos aprobados y cuales proyectos fueron rechazados. Se obtuvo una coincidencia del 100% con el modelo original, en la Tabla 6 se pueden observar los resultados del experimento.

TABLA 6 Resultados considerando el modelo original y un rubro

Pi	Calidad de la cartera	Cantidad de proyectos aprobados	Cantidad de proyectos rechazados
0	14.0334	14	1 P14
0.25	23.148	12	3 P9, P13, P14
0.5	34.488	11	4 P9,P12,P13,P14
0,7	43.8832	11	4 P9,P12,P13,P14
1	54.7816	11	4 P9,P12,P13,P14

Estos experimentos muestran que el modelo propuesto se reduce al modelo (4.10-4.14) de dos formas:

1. Considerando para cada proyecto un solo rubro y tomando a $\rho_j = 1$ para cada proyecto.

2. Considerando para cada proyecto dos rubros, y asignar a cada rubro como financiamiento mínimo aceptable la mitad del financiamiento mínimo aceptable declarado para el proyecto y asignar a cada rubro como financiamiento (máximo) deseable la mitad del financiamiento deseable. También tomar $\rho_{ji} = 1$ para cada proyecto j y rubro i.

Si se emplean K rubros se mantiene la equivalencia siempre que K no sea muy grande. Esta última afirmación se basa en la observación y en el conocimiento de la estructura de ambos problemas, y su demostración formal es trivial por eso no se incluye.

Analizando los resultados presentados en la tabla anterior (Tabla 6) se puede corroborar que el modelo ha funcionado identificando aquellos proyectos que pueden entorpecer el que la cartera tenga valores objetivos satisfactorios. Así, por ejemplo, se identifica al proyecto P14 como el peor (nunca es apoyado), luego le siguen los proyectos P9 y P13, y a continuación el proyecto P12.

5.4 EXPERIMENTOS PARA VALIDAR LA MODELACIÓN DE SINERGIAS ENTRE RUBROS.

Estos experimentos se diseñaron para estudiar relaciones entre los parámetros del modelo y los valores objetivos, así como también validar la consistencia respecto las propiedades de los proyectos (requerimientos e impacto). Para tal efecto se construyó el siguiente diseño de experimentos:

Se construyeron tres instancias a partir de la instancia P15A4R2S0 añadiendo dos sinergias, una de beneficio y otra de recursos: P15A4R2S2-b19r19, P15A4R2S2-b314r314 y P15A4R2S2-b314r19 descritas en la Tabla 7

TABLA 7 Descripción de las instancias empleadas en el experimento.

Instancia	Descripción
P15A4R2S2-b19r19	Sinergia de beneficio y de recursos compuestas por los rubros de los proyectos 1 y 9
P15A4R2S2-b314r314	Sinergia de beneficio y recursos compuesta por los rubros de los proyectos 3 y 14
P15A4R2S2-b314r19	Sinergia de beneficio compuesta por los rubros de los proyectos 3 y 14 y sinergia de recursos compuesta por los rubros de los proyectos 1 y 9

La incorporación de los pares de proyectos 3 y 14 en sinergias está dada por el hecho de que son proyectos que no están entre los mas atractivos entonces es interesante ver si el modelo es consistente al activar la sinergia, y no deja fuera otros proyectos mas atractivos que aporten en conjunto mas que la suma de los impactos de 3 y 14 y el impacto adicional de la sinergia. Una razón similar es la que motivo la inclusión en una sinergia de los proyectos 1 y 9, aunque en este caso son proyectos que se encuentran en posiciones aceptables del ranking en cuanto evaluación pero por ser muy caros no deben ser apoyados completamente como en el caso del proyecto P1, mientras que el proyecto P9 comparte área con el P8 y basta con apoyar a uno de los dos para que se cumplan las restricciones de área, luego en ocasiones se apoya el P8 y en otras el P9 pero solo cuando se da demasiada importancia a la cantidad de proyectos se apoyan ambos simultáneamente.

Como parámetros causales: π, η, ν y ρ cuyos niveles relevantes se recogen en la Tabla 8

TABLA 8 Niveles relevantes de los parámetros del diseño de experimentos

Parámetro	Valores
Π	0 0.2 0.5 0.7 1
η	50 80 130
N	1 5 8
P	0.1:0.9 0.5:0.5 0.7:0.3

Se deseaba investigar el efecto de las combinaciones de niveles de los parámetros en tres medidas de desempeño: las funciones objetivo del modelo lineal entero mixto propuesto: el impacto de la cartera y la cantidad de proyectos apoyados y la activación o no de las sinergias declaradas en las instancias analizadas.

En total se realizaron 405 corridas (135 por instancia), las tablas completas de resultados se pueden ver en el Apéndice C.

A continuación se destacan algunas observaciones interesantes después de analizar los resultados de los experimentos.

Primero comentaremos los resultados obtenidos de la instancia P14A4R2S2_b314r19. (Ver Tabla 9)

TABLA 9. Resultados sintéticos del experimento con la instancia P15A4R2S2_b314r19.

π	ν	Λ	ρ1	ρ2	Impacto	Cant. de proys. apoyados	σ1	σ2	Proys. no apoyados
0	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	7.2/1.5/4.1	14	0	0	14
0	5	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	9.9/5.1/7.3	14	1	0	10
0	8	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	12.9/8.1/10.3	14	1	0	10
0.2	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	13.2/1.5/9	13/14/13	0	0	8, 14/14/8,14
0.2	5	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	20.1/9.4/12.3	12/13/13	1	0	8, 10, 11/10,11/8,10
0.2	8	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	23.1/12.4/15.3	12/13/13	1	0	8, 10, 11/10,11/8,10
0.5	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.7	18.1/12.3/15	11/10/10	1/0/0	0	8, 10, 11, 15/9, 10,11,14,15/

									3,8,11,14,15
0.5	5 / 8	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.3	22.1/15.3/ 18	11	1	0	8, 10, 11, 15/ 9, 10,11,15/ 8, 10, 11, 15
0.7	1	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	19.1/12.8/ 15.6	10/9/9	0	0	3,8,10,14,15/ 3.9,10,11,14, 15/ 3.9,10,11,14, 15
0.7	5	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	22.5/15.8/ 18	10/10/11	1	0	8,10,11,13,15 / 9,10,11,14,15 / 8,10,11,13,15
0.7	8	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	25.5/18.8/ 21	10/10/11	1	0	8,10,11,13,15 / 9,10,11,14,15 / 8,10,11,13,15
1	1	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	19.1/12.8/ 15.6	10/10/11	1	0	8,10,11,13,15 / 9,10,11,14,15 / 8,10,11,13,15
1	5 / 8	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	22.5/15.8/ 18.4	10	1	0	8,10,11,13,15 / 9,10,11,13,15 / 8,10,11,13,15

Los “/” en las columnas de valores de parámetros indican que estos tienen el mismo efecto en las medidas de desempeño, salvo ρ. Mientras que los “/” en las medidas de desempeño indica que los conjuntos de valores que separan se obtienen para diferentes valores de ρ, cuyos valores aparecen en la columna correspondiente y en el mismo orden. Por ejemplo la fila 4 de la tabla debe interpretarse de la manera siguiente:

Para el valor 0 del parámetro π, valor 1 del parámetro *v*, cualquier valor del parámetro λ, se obtienen los resultados siguientes para cada valor de ρ1 y ρ2:

- (0.9, 0.1) ==> impacto = 13.2, cantidad de proyectos aprobados =13, ambas sinergias son inactivas (0), y se han rechazado los proyectos 8 y 14.
- (05,0.5) ==> impacto = 1.5, cantidad de proyectos aprobados = 14, ambas sinergias inactivas, y se ha rechazado al proyecto 14.
- (0.7, 0.3) ==> impacto = 9, cantidad de proyectos aprobados =13, ambas sinergias son inactivas (0), y se han rechazado los proyectos 8 y 14.

Observaciones derivadas del análisis de los resultados presentados en la Tabla 9:

1. Para un mismo valor de π se produce variaciones pequeñas en la cantidad de proyectos apoyados independientemente del nivel de los otros parámetros.

2. Según los resultados los peores proyectos según el impacto son: 14,10,{8,9},11,15,3,13 en ese orden. El orden es violado si se activa la sinergia de beneficio donde se apoyan los proyectos 3 y 14. Aquí una posible objeción se pueda originar al hecho de que el proyecto 10

es excluido de la cartera antes que el proyecto 13, pero lo que ocurre es que el proyecto 13 tiene una cota inferior menor que la del proyecto 10 y aunque es muy pequeña la diferencia esto permite que se pueda apoyar un proyecto mas y el impacto conjunto de ambos es mayor que el impacto del proyecto 13 apoyado al mismo nivel.

3. Los cambios más significativos en los valores objetivos se producen por variaciones en los valores de ρ.

4. Al variar *v*, varían los valores objetivo y la activación de las sinergias. Se aprecian los mayores cambios al pasar del valor 1, para el cual no se activa la sinergia de beneficio, al valor 5 que entre el valor 5 y el 8.

A continuación se presenta los resultados de las instancias restantes (P15A4R2S2_b19r19 y P15A4R2S2_b314r314)

TABLA 10. Resultados sintéticos del experimento con la instancia P15A4R2S2_b19r19.

π	ν	λ	P1	P2	Impacto	Cant. de Proys apoyados	σ1	σ2	Proys. no apoyados
0	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	8.3/2.5/5.1	14	1	1	14
0	5	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	12.3/6.5/9.1	14	1	1	14
0	8	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	15.3/9.5/12.1	14	1	1	14
0.2	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	14.2/2.5/10	13/14/13	1	1	8, 14/14/8,14
0.2	5	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	18.2/6.5/14	13/14/13	1	1	8, 14/14/8,14

0.2	8	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	21.2/9.5/17	13/14/13	1	1	8, 14/14/8,14
0.5	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.7	19/12/16	11/11/10	1	1	8, 10, 14, 15/ 8,11,14,15/ 3,8,11,14,15
0.5	5	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	23/16/20	11/11/10	1	1	8, 10, 14, 15/ 9, 11,11,15/ 3, 8, 11, 14, 15
0.5	8	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	26/19/23	11/11/10	1	1	8,10,14,15/ 8,11,14,15/ 8,10,11,14,15
0.7	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.1	19.9/13/16	10	1	1	3,8,10,14,15/ 8,10,11,14,15/ 3,8,11,14,15
0.7	5	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.1	23.9/17/20	10	1	1	3,8,10,14,15/ 8,10,11,14,15/ 3,8,11,14,15
0.7	8	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.1	26.9/20/23	10	1	1	3,8,10,14,15/ 8,10,11,14,15/ 3,8,11,14,15
1	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.1	19.4/13/26	10/9/9	1	1	3, 8,10,14,15/ 3,8,10,11,14,15 / 3,8,10,11,14,15
1	5	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.1	23.9/17.2/20.4	10/9/9	1	1	3,8,10,14,15/ 3,8,10,11,14,15 / 3,8,10,11,14,15
1	8	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.1	26.9/20/23	10/9/9	1	1	3,8,10,14,15/ 3,8,10,11,14,15 /3,8,10,11,14,15

TABLA 11 Resultados sintéticos del experimento con la instancia P15A4R2S2_b314r314

π	ν	Λ	ρ1	P2	Impacto	Cant. de proys apoyados	σ1	σ2	Proys no apoyados
0	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	8.8/1.5/4.7	14	1/0/1	1/0/1	10/14/10
0	5	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	12.8/5.1/8.7	14	1	1	10
0	8	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	15.8/8.1/11.7	14	1	1	10
0.2	1	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	19.5/1.5/10.2	12/14/13	1/0/1	1/0/1	9,10,11/14/9,10
0.2	5	50/80/130	0.1/0.5/0.7	0.9/0.5/0.3	23.5/9.4/14.2	12/13/13	1	1	9,10,11/10,11/9,10

0.2	8	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.3	26.5/12.4/ 17.2	12/13/13	1	1	9,10,11/10,11 /9,10
0.5	1	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.7	21.3/12.3/ 15.8	11/10/11	1/0/1	1/0 /1	9, 10, 11,15/ 9,10,11,14,15/ 9,10,11,15
0.5	5	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.3	25.3/15.3/ 19.8	11/11/11	1	1	9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,15
0.5	8	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.3	28.3/18.3/ 22.8	11/11/11	1	1	9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,15
0.7	1	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	21.3/12.8/ 15.8	11/9/11	1/0/1	1/0 /1	9,10,11,15/ 3,9,10,11,14,1 5/ 9,10,11,15
0.7	5	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	25.3/15.3/ 19.8	11/11/11	1	1	9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,15
0.7	8	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	28.3/18.3/ 22.8	11/11/11	1	1	9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,15
1	1	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	21.3/12.8/ 15.8	11/9/11	1/0/1	1/0 /1	9, 10, 11,15/ 3, 9, 10, 11,14,15/ 9, 10, 11,15
1	5	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	25.3/15.7/ 19.8	11/10/11	1	1	9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,14,15/ 9, 10, 11,15
1	8	50/80/ 130	0.1/0.5/ 0.7	0.9/0.5/ 0.1	28.3/18.7/ 22.8	11/10/11	1	1	9, 10, 11,15/ 9, 10, 11,14,15/ 9, 10, 11,15

5.5 EXPERIMENTOS PARA ESTABLECER LA EFICIENCIA COMPUTACIONAL DEL MODELO CON RUBROS.

El interés principal en la realización de estos experimentos se centró en la eficiencia computacional al resolver instancias de tamaño real. También se generaron algunas instancias complicadas (características conocidas a partir de la revisión de trabajos anteriores en los que se basa la presente investigación). Los experimentos se realizaron en la misma plataforma de hardware que los experimentos anteriores.

A continuación se describen las instancias que se emplearon para verificar la eficiencia en instancias de tamaño real y las instancias complicadas (señaladas con *).

TABLA 12 Descripción de instancias de tamaño real

Instancias	Descripción	Origen
P400A4R2S0	Presupuesto 50000 Proyectos 400 Áreas 4 Rubros 2	Se genero a partir de una instancia utilizada en trabajos anteriores del Dr. Fernández
P1200A4R2S0	Presupuesto 150000 Proyectos 1200 Áreas 4 Rubros 2	Se genero a partir de una instancia utilizada en trabajos anteriores del Dr. Fernández
P10000A4R2S0	Presupuesto 1250000 Proyectos 10000 Áreas 4 Rubros 2	Se genero a partir de una instancia utilizada en trabajos anteriores del Dr. Fernández
P1000A4R15S0[a]	Presupuesto 1000000 Proyectos 10000 Áreas 4 Rubros 15	Instancia generada de forma automatizada.
P10000A4R15S0[b]	Presupuesto 1000000 Proyectos 100000 Áreas 4 Rubros 15	Instancia generada de forma automatizada.

[a]Lo que hace complicada a la instancia P1000A4R15S0 es el hecho de que se asigno una cantidad de dinero superior a la requerida por los proyectos candidatos y se generaron con un margen estrecho tanto las cotas para asignar dinero tanto en los proyectos (mMin aproximadamente igual que mMax) como las cotas para asignar dinero en los rubros (rmin aproximadamente igual que rmax) hecho que por experiencia empírica de trabajos anteriores revisados conduce a que la instancia no pueda ser resuelta eficientemente (en cuanto más 30 minutos por la necesidad de generar varias soluciones de compromiso lo que implica resolver repetidas veces la instancia).

[b]Por otra parte la instancia P10000A4R15S0 resulta complicada por las mismas razones que la instancia descrita en el párrafo anterior y además porque la cantidad de proyectos candidatos se incrementa diez veces pero se mantiene el mismo presupuesto que para la instancia P1000A4R15S0.

Los resultados obtenidos en los experimentos realizados se pueden observar en la Tabla 13

TABLA 13 Resultados de la ejecución del modelo con rubro en 4 instancias de tamaño real.

Instancias	Tiempo Ejecución (seg.)	MIPGAP	impact	Cant. Proy. apoyados	Cantidad de dinero asignado
P400A4R2S0	0.02	1e-004	211	292	50000
P1200A4R2S0	2.42	1e-003	604	565	150000
P1000A4R15S0*	172.22	1e-003	41188	1000	72492
P10000A4R2S0	77	1e-003	4214	5300	1250000
P10000A4R15S0*	N.D.	1e-003	N.D.	N.D.	N.D.

Como se puede observar en la Tabla 13 se obtuvieron resultados satisfactorios en la eficiencia computacional del cómputo de la solución para las instancias de tamaño real. La instancia P1000R15S0 generada automáticamente y que se suponía complicada resultó en efecto con un tiempo de cómputo mayor que el requerido para solucionar la instancia P1200A4R2S0 que tenía una cantidad similar de proyectos aunque significativamente menos rubros, el tiempo resulto muy superior incluso al requerido para resolver la instancia P10000A4R2S0 con 10 veces mas proyectos aunque menor cantidad de rubros.

Para la instancia P10000A4R15S0 no fue posible obtener resultados numéricos en tiempos aceptables en la plataforma empleada, por este motivo se resolvieron las instancias P1000A4R15S0 y P10000A4R15S0 en otra plataforma de hardware: Servidor DELL PowerEdge 2950 con 8 núcleos de procesamiento. Los resultados obtenidos se pueden observar en la Tabla 14, en este caso si se obtuvo una solución para la instancia P10000A4R15S0 aunque con un tiempo de ejecución casi cercano a los 20 minutos, por otra parte el tiempo de ejecución de la instancia P1000A4R15S0 resulta inferior al obtenido en la plataforma Sun Ray (que actualmente se encuentra muy cargado de tareas aunque se trató de realizar los experimentos en las horas de menos demanda de cómputo), nótese también que el GAP es de 0.00001%.

TABLA 14 Resultados obtenidos en Dell PowerEdge

Instancias	tpo. Ejecución	MIPGAP
P10000A4R15S0	1038sg	1e-006
P1000A4R15S0	43.44sg	1e-006

5.6 CONCLUSIONES

Se realizaron experimentos con dos instancias (una con un único rubro y otra con dos rubros) construida a ex profeso en los que el modelo propuesto arroja idénticos resultados que el modelo base, biobjetivo lineal entero mixto propuesto por los Dres. Litvinchev y López. La equivalencia entre ambos problemas es independiente de la cantidad de rubros siempre y cuando no se expresen preferencias respecto al impacto de los montos de apoyo asignados a cada rubro en cada proyecto.

El modelo propuesto permite que instancias de tamaño y complejidad similares a problemas reales sean resueltas eficientemente, incluso instancias muy grandes y complicadas (por algunas características que hacen que sean difíciles de resolver) también se obtienen tiempos de computo satisfactorios en el proceso de obtención de soluciones.

CAPÍTULO VI

Conclusiones y recomendaciones

El modelo matemático lineal entero mixto propuesto para el problema de la selección de proyectos de I & D en grandes organizaciones públicas permite de forma eficiente descomponer en rubros a la cantidad de dinero designada para apoyar un proyecto de I & D. Se probo empíricamente que el modelo que incorpora los rubros es equivalente al modelo sin rubros propuesto para el problema que se investiga por otros autores con anterioridad a este trabajo. Luego el modelo propuesto constituye una generalización de este modelo base.

Se logró representar en el modelo 3 clases importantes de sinergias: beneficio, recursos y técnicas que si bien no abarcan todas las posibles representaciones de sinergias si representan sin dudas las más frecuentes, y lo más importante se logró mantener la linealidad del modelo.

Un reto particularmente importante en este trabajo lo constituyo sin dudas la generación de instancias dada la complejidad de las mismas así como de las interrelaciones que se pueden establecer entre los elementos que las componen. Por ello se decidió emplear en la mayoría de los casos instancias desarrolladas para trabajos anteriores y adaptarlas al problema que se investiga. No obstante se creo una instancia de 15 proyectos totalmente controlada que sirvió para validar el modelo y establecer la equivalencia con un modelo previo que no incorpora rubros y que sirve como base al modelo propuesto.

Los resultados arrojados por los experimentos realizados avizoran que el modelo presentado permite la obtención eficiente de soluciones para instancias similares a problemáticas reales, ya que instancias de 10,000 proyectos y dos rubros fueron resueltas en poco mas de 1 minuto, mientras que una instancia de 10,000 proyectos y 15 rubros se resolvió en poco mas de 13 minutos. Mientras que instancias de hasta 1200 proyectos y dos rubros fueron resueltas de manera casi instantánea. Sin embargo es justo mencionar que sería altamente deseable desarrollar un estudio estructural del problema para determinar que elementos hacen que una instancia sea fácil o difícil de resolver, lo cual sería de mucha ayuda al seleccionar métodos adecuados de solución.

La interpretación del impacto de sinergias resulta en extremo complicada, en este trabajo la experimentación para determinar el impacto de sinergias se limitó a investigar instancias con muy pocas sinergias pero los resultados arrojados fueron alentadores ya que en todos los casos el modelo resultó ser congruente con lo esperado. Sin embargo esta es una de las áreas donde aun hay una gran oportunidad para profundizar en las relaciones de las sinergias y su impacto en las funciones objetivo. Se debe implementar un generador de instancias que incluya sinergias y una forma no muy complicada de establecer a priori el impacto o los posibles impactos que están puedan tener en los objetivos del problema, para validar contra las soluciones que se obtienen al optimizar el modelo. Particularmente importante es desarrollar una metodología para establecer como detectar sinergias y como establecer el impacto potencial de las mismas, a quien se le debe asignar esa responsabilidad y a que altura en el organigrama de una organización. Son consideraciones importantes para llegar a una toma de decisiones racional en la selección de carteras de proyectos de I & D en grandes organizaciones públicas.

Se desarrolló un programa en AMPL para: la implementación del modelo, así como la generación de instancias y el desarrollo de los experimentos numéricos conjunto que constituye un valioso framework para investigaciones futuras o la implementación de herramientas par el apoyo a la decisión en el problema de selección de carteras de proyectos de I & D en grandes organizaciones públicas.

En resumen se ha logrado desarrollar un modelo matemático general para el problema de selección de carteras de proyectos de I & D en grandes organizaciones públicas que incorpora rubros e interdependencia entre proyectos y que se ha mostrado eficiente en la solución de varias instancias similares a problemáticas reales. Sin embargo se requiere realizar una investigación mas a fondo sobre las propiedades estructurales de instancias del problema para establecer cuales instancias podrían ser fáciles o difíciles de resolver, este estudio incluye el desarrollo de un generador de instancias que permita a priori establecer el impacto de determinadas decisiones constructivas en las soluciones.

Otro aspecto interesante que añadiría valor a investigaciones futuras sería incorporar en el modelo la planificación de la asignación de recursos monetarios cuando el monto de los apoyos no está disponible completamente al inicio del periodo de desarrollo de los proyectos sino que se debe asignar por etapas.

BIBLIOGRAFÍA

[1]http://web.worldbank.org/WBSITE/EXTERNAL/BANCOMUNDIAL/EXTSPPAIS ES/LACINSPANISHEXT

[2] http://www.elmundo.es/elmundo/2006/02/14/solidaridad/1139911065.html

[3] http://www.rlc.fao.org/fondo/noticias/noticia_002.htm

[4] http://www.zocalo.com.mx/seccion/articulo/oferta-conacyt-2-mil-500-mdp-para-atraer- recursos

[5]http://www.imjuventud.gob.mx/index.php?option=com_content&task=view&id=113 &Itemid=48

[6] Cohen, E., Franco, R., (1992): Evaluación de Proyectos Sociales, Ed. Siglo XXI, México

[7] Fernández, E., Navarro J., (2001): "Modelo y Sistema de Apoyo a la Decisión para Problemas de Cartera de Proyectos con Relevancia Social", Gestión y Política Pública, Vol. 10, no. 1, 2001, pp. 31-52.

[8] Fernández, E., Navarro J., (2002): "A Genetic Search for Exploiting a Fuzzy Preference Model of Portfolio Problems with Public Projects", Annals of Operations Research 117, pp. 191-213.

[9] J. Martino, "Research and Development Project Selection," Wiley, NY, 1995.

[10]Igor Litvinchev, Fernando López, Ada Álvarez and Eduardo Fernández, "Large scale public R&D portfolio selection by maximizing a biobjective impact measure," Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans

[11] Christian Stummer and Kurt Heidenberger, "Interactive R&D Portfolio Analysis with Project Interdependencies and Time Profiles of Multiple Objectives," IEEE Transactions on Engineering Management, Vol. 50, No.2, May 2003

[12]Jindrich Klapka and Petr Piños,(2001): "Decision support system for multicriteria R&D and information systems projects selection", European Journal of Operations Research 140 (2002) 434-446

[13] A.F. Carazo, Trinidad Gomez, Julian Molina, Alfredo G. Hernandez-Diaz, Flor M Guerrero and Rafael Caballero, "Solving a comprehensive model for multiobjective Project portfolio selection", Computer & Opeerations Research 37 (2010) 630-639

[14]Jeffrey M. Keisler "When to consider synergies in project portfolio decisions," College of management working paper. April 2005.

[15]Michael W. Dickinson, Anna C. Thornton, and Stephen Graves, "Technology Portfolio Management: Optimizing Interdependent Projects Over Multiple Time Periods," IEEE Transactions on Engineering Management, Vol. 48, No. 4, November 2001

[16]Andrea Zuluaga, Jorge A. Sefair, and Andrés L. Medaglia, "Model for the Selection and Scheduling of Interdependent Projects," Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de los Andes (Bogotá D.C., Colombia) e-mail: {and-zulu, j-sefair, amedagli}@uniandes.edu.co

[17] Mait Rungi "Visual representation of interdependencies between projects," Department of Industrial Management and Computer Science Lappeenranta University of Technology Finland, mait.rungi@lut.fi

[18]E. Fernández, F. López, J. Navarro, and A. Duarte, "Intelligent techniques for R&D projects selection in large social organizations," *Computación y Sistemas*, vol. 10, No.1, 28-56, 2006.

[19]Boaz Golany , "R&D project evaluation: An integrated DEA and balanced scorecard approach "

[20] E. Fernández, F. Lopez, and J. Navarro, "Decision support tools for R&D project selection in public organizations," presented at IAMOT, Washington, D.C., 2004.

[21] Ravindra K. Ahuja "Network flows: Theory, Algorithms and Applications"

[22] Laurence A. Wolsey "Integer Programming"

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

APÉNDICE A

```
#Model of Portfolio of R&D Proyects in Public Organizations v1.0

#--------------------------------------------general model params------------------------------------------
--------------------------------------------

# n - number of projects competing for funds
# m - number of areas to with proyects belongs
# k - number of resources to fund per portfolio
# s - number of sinergies

param budget >= 0;

param n >= 0, integer;

param m >= 0, integer;

param k >= 0, integer;

param alpha := 0.5;

#param s := 2;

#--------------------------------------------Index Sets------------------------------------------------------------
-----------------------------------

set PROJECTS := 1..n;

set AREAS := 1..m;

set RESOURCES := 1..k;

#set S := 1..s;
#---------------------------------------------areas data-------------------------------------------------------------
---------------------------------------

param aMin {i in AREAS};

param aMax {i in AREAS};

#---------------------------------------------projects data--------------------------------------------------------
----------------------------------------

param mMin {j in PROJECTS} >=0;

param mMax {j in PROJECTS} >=0;

param parea {j in PROJECTS} >=0;

param weight {j in PROJECTS} >=0;

param rmin  {j in PROJECTS, i in RESOURCES} >=0;

param rmax  {j in PROJECTS, i in RESOURCES} >=0;
```

```
param rho  {j in PROJECTS, i in RESOURCES} >=0;

param mu >=0;

param lamda >=0;

#Interdependencies

set B1 within {j in PROJECTS, i in RESOURCES};

set C1 within {j in PROJECTS, i in RESOURCES};

#-----------------------------------------Model Variables and non negativity restrictions------------
-----------------------------------------------------

var x {j in PROJECTS, i in RESOURCES} >= 0;

var y {j in PROJECTS} binary;

var z {j in PROJECTS, i in RESOURCES} binary;

var sigma {1..2}  binary;

#----------------------------------------------------Other model parameters---------------------------------
------------------------------------------------

param delta {j in PROJECTS} := (1 - alpha)/(mMax[j] - mMin[j]);

param theta {j in PROJECTS} := ((alpha*(mMax[j] - mMin[j]) - (1-
alpha)*mMin[j]))/(mMax[j] - mMin[j]);

param pi := 0.932;

set PSI = B1 union C1;

#-----------------------------------------------------------Objective--------------------------------------------
------------------------------------------

maximize quality: pi*(sum{j in PROJECTS}( weight[j]*(theta[j]*y[j]+delta[j]*sum{ i in
RESOURCES } rho[j,i]*x[j,i]))+mu*sigma[1]) + (1-pi)*sum {j in PROJECTS} y[j];

#------------------------------------------------------------Restrictions---------------------------------------
--------------------------------------------

subject to impact: sum{j in PROJECTS}( weight[j]*(theta[j]*y[j]+delta[j]*sum{ i in
RESOURCES } rho[j,i]*x[j,i])+mu*sigma[1])>=0;

subject to cantproy: sum {j in PROJECTS} y[j]>=0;

subject to general_budget : sum{j in PROJECTS} sum{ i in RESOURCES } x[j,i] <=
budget;

subject to area_min_budget {i in  AREAS}: sum{j in PROJECTS : parea[j] = i} sum{ t in
RESOURCES } x[j,t]>= aMin[i];

subject to area_max_budget {i in  AREAS}: sum{j in PROJECTS : parea[j] = i}  sum{ t
in RESOURCES } x[j,t]<= aMax[i];
```

```
subject to project_lower_bound {j in PROJECTS}: mMin[j]*y[j] <= sum{ i in
RESOURCES } x[j,i];

subject to project_upper_bound {j in PROJECTS}: sum{ i in RESOURCES} x[j,i] <=
mMax[j]*y[j];

subject to rubro_lower_bound {(j,i) in {PROJECTS,RESOURCES} : (j,i) not in PSI}:
rmin[j,i]*z[j,i] <= x[j,i];

subject to rubro_upper_bound {(j,i) in {PROJECTS,RESOURCES} : (j,i) not in PSI}:
x[j,i] <= rmax[j,i]*z[j,i] ;

subject to rubros_are_funded {j in PROJECTS}: y[j] <= sum {i in RESOURCES} z[j,i];

subject to at_least_one_rubro_is_funded {j in PROJECTS}: sum {i in RESOURCES}
z[j,i] <= k*y[j];


#---------------------------------Sinergy restrictions-------------------

subject to synergy_not_active_if_a_project_not_funded1 : sum {j in PROJECTS, i in
RESOURCES : (j,i) in B1} z[j,i] >= card(B1)*sigma[1];

subject to synergy_not_active_if_a_project_not_funded2 : sum {j in PROJECTS, i in
RESOURCES : (j,i) in C1} z[j,i] >= card(C1)*sigma[2];

subject to synergy_is_active_if_all_projects_are_funded1 : sigma[1] + card(B1) - 1 >=
sum {j in PROJECTS, i in RESOURCES : (j,i) in B1} z[j,i];

subject to synergy_is_active_if_all_projects_are_funded2 : sigma[2] + card(C1) - 1 >=
sum {j in PROJECTS, i in RESOURCES : (j,i) in C1} z[j,i];

subject to resource_reduction_synergy1 : sum {j in PROJECTS, i in RESOURCES : (j,i)
in C1} x[j,i] <= sum {j in PROJECTS, i in RESOURCES : (j,i) in C1} rmax[j,i]-
mu*sigma[1];
```

APÉNDICE B

TABLA 15. Cotas Mínimas para Rubros de los 15 proyectos

Proyecto	Rubro 1	Rubro 2
1	75	75
2	58	58
3	70	70
4	56	56
5	57	57
6	51	51
7	51	51
8	100	100
9	93	93
10	70	70
11	67	67
12	56	56
13	62	62
14	100	100
15	57	57

TABLA 16. Cotas Máximas para Rubros de los 15 proyectos

Proyecto	Rubro 1	Rubro 2
1	230	230
2	100	100
3	100	100
4	100	100
5	80	80
6	70	70
7	65	65
8	150	150
9	150	150
10	100	100
11	100	100
12	100	100
13	120	120
14	150	150
15	80	80

APÉNDICE C

TABLA 17. Resultados completos de la corrida

pi	mu	lamda	rho1	rho2	impact	cant. de proy. apoyados	sigma1	sigma2	Proy. no apoyados	
0	1	50	0.1	0.9	8.3	14	1	1		14
0	1	50	0.5	0.5	2.5	14	1	1		14
0	1	50	0.7	0.3	5.1	14	1	1		14
0	1	80	0.1	0.9	8.3	14	1	1		14
0	1	80	0.5	0.5	2.5	14	1	1		14
0	1	80	0.7	0.3	5.1	14	1	1		14
0	1	130	0.1	0.9	8.3	14	1	1		14
0	1	130	0.5	0.5	2.5	14	1	1		14
0	1	130	0.7	0.3	5.1	14	1	1		14
0	5	50	0.1	0.9	12.3	14	1	1		14
0	5	50	0.5	0.5	6.5	14	1	1		14
0	5	50	0.7	0.3	9.1	14	1	1		14
0	5	80	0.1	0.9	12.3	14	1	1		14
0	5	80	0.5	0.5	6.5	14	1	1		14
0	5	80	0.7	0.3	9.1	14	1	1		14
0	5	130	0.1	0.9	12.3	14	1	1		14
0	5	130	0.5	0.5	6.5	14	1	1		14
0	5	130	0.7	0.3	9.1	14	1	1		14
0	8	50	0.1	0.9	15.3	14	1	1		14
0	8	50	0.5	0.5	9.5	14	1	1		14
0	8	50	0.7	0.3	12.1	14	1	1		14
0	8	80	0.1	0.9	15.3	14	1	1		14
0	8	80	0.5	0.5	9.5	14	1	1		14
0	8	80	0.7	0.3	12.1	14	1	1		14
0	8	130	0.1	0.9	15.3	14	1	1		14
0	8	130	0.5	0.5	9.5	14	1	1		14
0	8	130	0.7	0.3	12.1	14	1	1		14
0.2	1	50	0.1	0.9	14.2	13	1	1	8 y 14	
0.2	1	50	0.5	0.5	2.5	14	1	1		14
0.2	1	50	0.7	0.3	10	13	1	1	8 y 14	
0.2	1	80	0.1	0.9	14.2	13	1	1	8 y 14	
0.2	1	80	0.5	0.5	2.5	14	1	1		14
0.2	1	80	0.7	0.3	10	13	1	1	8 y 14	
0.2	1	130	0.1	0.9	14.2	13	1	1	8 y 14	
0.2	1	130	0.5	0.5	2.5	14	1	1		14
0.2	1	130	0.7	0.3	10	13	1	1	8 y 14	
0.2	5	50	0.1	0.9	18.2	13	1	1	8 y 14	
0.2	5	50	0.5	0.5	6.5	14	1	1		14
0.2	5	50	0.7	0.3	14	13	1	1	8 y 14	
0.2	5	80	0.1	0.9	18.2	13	1	1	8 y 14	
0.2	5	80	0.5	0.5	6.5	14	1	1		14
0.2	5	80	0.7	0.3	14	13	1	1	8 y 14	
0.2	5	130	0.1	0.9	18.2	13	1	1	8 y 14	
0.2	5	130	0.5	0.5	6.5	14	1	1		14

0.2	5	130	0.7	0.3	14	13	1	1	8 y 14
0.2	8	50	0.1	0.9	21.2	13	1	1	8 y 14
0.2	8	50	0.5	0.5	9.5	14	1	1	14
0.2	8	50	0.7	0.3	17	13	1	1	8 y 14
0.2	8	80	0.1	0.9	21.2	13	1	1	8 y 14
0.2	8	80	0.5	0.5	9.5	14	1	1	14
0.2	8	80	0.7	0.3	17	13	1	1	8 y 14
0.2	8	130	0.1	0.9	21.2	13	1	1	8 y 14
0.2	8	130	0.5	0.5	9.5	14	1	1	14
0.2	8	130	0.7	0.3	17	13	1	1	8 y 14
0.5	1	50	0.1	0.9	19	11	1	1	8, 10, 14 y 15
0.5	1	50	0.5	0.5	12	11	1	1	8, 11 14 y 15
0.5	1	50	0.7	0.3	16	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
0.5	1	80	0.1	0.9	19	11	1	1	8, 10, 14 y 15
0.5	1	80	0.5	0.5	12	11	1	1	8, 11 ,14 y 15
0.5	1	80	0.7	0.3	16	10	1	1	3, 8,11,14 y 15
0.5	1	130	0.1	0.9	19	11	1	1	8, 10, 14 y 15
0.5	1	130	0.5	0.5	12	11	1	1	8, 11, 14 y 15
0.5	1	130	0.7	0.3	16	10	1	1	8, 10,11, 14 y 15
0.5	5	50	0.1	0.9	23	11	1	1	8, 10, 14 y 15
0.5	5	50	0.5	0.5	16	11	1	1	8,11, 14 y 15
0.5	5	50	0.7	0.3	20	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
0.5	5	80	0.1	0.9	23	11	1	1	8, 10, 14 y 15
0.5	5	80	0.5	0.5	16	11	1	1	8, 11, 14 y 15
0.5	5	80	0.7	0.3	20	10	1	1	3, 8 11, 14 y 15
0.5	5	130	0.1	0.9	23	11	1	1	8, 10 14 y 15
0.5	5	130	0.5	0.5	16	11	1	1	8, 11, 14 y 15
0.5	5	130	0.7	0.3	20	10	1	1	8,10, 11, 14 y 15
0.5	8	50	0.1	0.9	26	11	1	1	8, 10, 14 y 15
0.5	8	50	0.5	0.5	19	11	1	1	8, 11, 14 y 15
0.5	8	50	0.7	0.3	23	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
0.5	8	80	0.1	0.9	26	11	1	1	8, 10, 14 y 15
0.5	8	80	0.5	0.5	19	11	1	1	8, 11, 14 y 15
0.5	8	80	0.7	0.3	23	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
0.5	8	130	0.1	0.9	26	11	1	1	8, 10, 14 y 15
0.5	8	130	0.5	0.5	19	11	1	1	8,11, 14 y 15
0.5	8	130	0.7	0.3	23	10	1	1	8, 10,11, 14 y 15
0.7	1	50	0.1	0.9	19.9	10	1	1	3, 8, 10, 14 y 15
0.7	1	50	0.5	0.5	13	10	1	1	8, 10,11, 14 y 15
0.7	1	50	0.7	0.3	16	10	1	1	3, 8 11, 14 y 15
0.7	1	80	0.1	0.9	19.9	10	1	1	3, 8, 10, 14 y 15
0.7	1	80	0.5	0.5	13	10	1	1	8, 10,11, 14 y 15
0.7	1	80	0.7	0.3	16	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
0.7	1	130	0.1	0.9	19.9	10	1	1	3, 10, 11, 14 y 15
0.7	1	130	0.5	0.5	13	10	1	1	8,10,11, 14 y 15
0.7	1	130	0.7	0.3	16	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
0.7	5	50	0.1	0.9	23.9	10	1	1	3, 8, 10, 14 y 15
0.7	5	50	0.5	0.5	17	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15

0.7	5	50	0.7	0.3	20	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
0.7	5	80	0.1	0.9	23.9	10	1	1	3, 8, 10, 14 y 15
0.7	5	80	0.5	0.5	17	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
0.7	5	80	0.7	0.3	20	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
0.7	5	130	0.1	0.9	23.9	10	1	1	3, 10, 11, 14 y 15
0.7	5	130	0.5	0.5	17	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
0.7	5	130	0.7	0.3	20	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
0.7	8	50	0.1	0.9	26.9	10	1	1	3, 8, 10, 14 y 15
0.7	8	50	0.5	0.5	20	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
0.7	8	50	0.7	0.3	23	10	1	1	3, 8 11, 14 y 15
0.7	8	80	0.1	0.9	26.9	10	1	1	3, 8 , 10, 14 y 15
0.7	8	80	0.5	0.5	20	10	1	1	8, 10, 11 , 14 y 15
0.7	8	80	0.7	0.3	23	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
0.7	8	130	0.1	0.9	26.9	10	1	1	3, 10, 11, 14 y 15
0.7	8	130	0.5	0.5	20	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
0.7	8	130	0.7	0.3	23	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
1	1	50	0.1	0.9	19.4	10	1	1	3, 8 10, 14 y 15
1	1	50	0.5	0.5	13	9	1	1	3, 8, 10, 11, 14 y 15
1	1	50	0.7	0.3	26	9	1	1	3, 8, 10, 11, 14 y 15
1	1	80	0.1	0.9	19.4	10	1	1	3, 8 10, 14 y 15
1	1	80	0.5	0.5	13	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
1	1	80	0.7	0.3	26	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
1	1	130	0.1	0.9	19.4	10	1	1	3, 10,11, 14 y 15
1	1	130	0.5	0.5	13	10	1	1	8, 10,11, 14 y 15
1	1	130	0.7	0.3	26	10	1	1	8, 10,11, 14 y 15
1	5	50	0.1	0.9	23.9	10	1	1	3, 8, 10, 14 y 15
1	5	50	0.5	0.5	17.2	9	1	1	3, 8, 10, 11, 14 y 15
1	5	50	0.7	0.3	20.4	9	1	1	3, 8, 10, 11, 14 y 15
1	5	80	0.1	0.9	23.9	10	1	1	3, 8, 10, 14 y 15
1	5	80	0.5	0.5	17.2	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
1	5	80	0.7	0.3	20.4	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
1	5	130	0.1	0.9	23.9	10	1	1	3, 10,11, 14 y 15
1	5	130	0.5	0.5	17.2	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
1	5	130	0.7	0.3	20.4	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
1	8	50	0.1	0.9	26.9	10	1	1	3, 8, 10, 14 y 15
1	8	50	0.5	0.5	20	9	1	1	3, 8, 10,11, 14 y 15

1	8	50	0.7	0.3	23	9	1	1	3, 8, 10, 11, 14 y 15
1	8	80	0.1	0.9	26.9	10	1	1	3, 8, 10, 14 y 15
1	8	80	0.5	0.5	20	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
1	8	80	0.7	0.3	23	10	1	1	3, 8, 11, 14 y 15
1	8	130	0.1	0.9	26.9	10	1	1	3, 10, 11, 14 y 15
1	8	130	0.5	0.5	20	10	1	1	8, 10, 11, 14 y 15
1	8	130	0.7	0.3	23	10	1	1	8, 10,11, 14 y 15