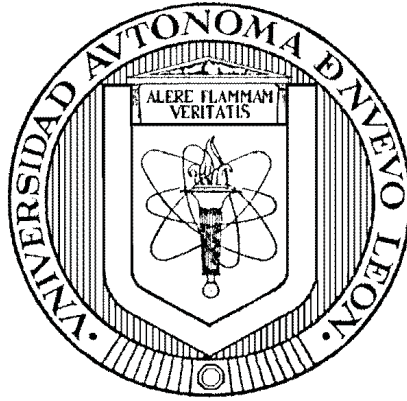


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL ROBUSTO \mathcal{H}_∞ DE SENSIBILIDAD MEZCLADA APLICADO A
SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO SUBACTUADOS

POR

CUTBERTO DANIEL CONEJO ROSAS

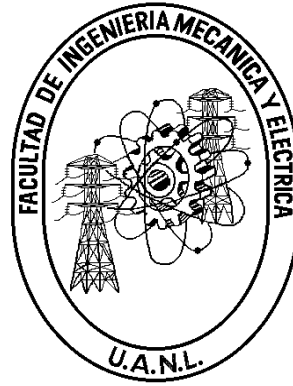
TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

JULIO DE 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL ROBUSTO \mathcal{H}_∞ DE SENSIBILIDAD MEZCLADA APLICADO A
SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO SUBACTUADOS

POR

CUTBERTO DANIEL CONEJO ROSAS

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

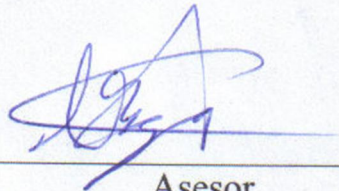
CD. UNIVERSITARIA

JULIO DE 2011

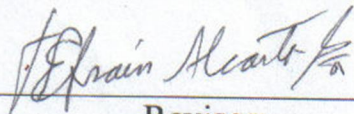
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "**CONTROL ROBUSTO H_∞ DE SENSIBILIDAD MEZCLADA APLICADO A SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO SUBACTUADOS**" realizada por el alumno **CUTBERTO DANIEL CONEJO ROSAS**, matrícula número 1241812 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis



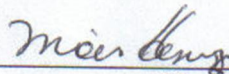
Asesor
Dr. René Galindo Orozco



Revisor:
Dr. Efraín Alcorta García



Revisor:
Dr. Anand Sánchez Orta



Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado
Cd. Universitaria, a Julio de 2011

Dedicado con mucho amor, cariño y afecto...

... a Dios

*... a mis padres Cutberto Conejo Murillo y
Margarita Beatriz Rosas Gutiérrez*

... a mi hermana Lucy

... a mi novia Nallely Sandoval

... a todos mis familiares.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios por bendecir a mi familia, mi novia y seres queridos. Por darme la fortaleza y entendimiento para realizar este trabajo, que en él espero sea el primero de muchos trabajos y metas personales.

A mi papá Cutberto Conejo Murillo por sus enseñanzas y apoyo, por sus consejos que usaré de por vida y su amor. A mi mamá Margarita Beatriz Rosas Gutiérrez por su respaldo absoluto y apoyo, por su amor y cariño que nos brinda a toda la familia. A mi hermana Lucy por su apoyo e interés en mi trabajo, por su bondad y carisma. A mi novia Nallely por su amor, paciencia, tolerancia y apoyo, con quien quiero compartir mi vida y amor por siempre.

A mis familiares paternos y maternos, a mi abuelo paterno Aniceto Conejo por estar siempre pendiente, a mis demás abuelos que en paz descansen pues sé que están y estarán siempre conmigo. A todos mis tíos y tías, primos y primas por su amor, apoyo, atención y cariño.

A mis amigos Edgar, Alma, Carlos, Alfredo, Eliezer, Álvaro y demás compañeros, por su valiosa amistad y apoyo, por su atención y ayuda de gran valor a lo largo del tiempo en el posgrado, y para toda la vida.

A mi asesor el Dr. René Galindo Orozco, por sus enseñanzas, paciencia y su atención siempre disponible. Por sus valiosos consejos, libertad y el apoyo brindado a las ideas propuestas para esta tesis.

Al comité de revisores: Dr. Efraín Alcorta Gracia y Dr. Anand Sánchez Orta, por sus valiosos comentarios y sugerencias que sirven de aprendizaje personal y profesional.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME), de la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), por brindarme la oportunidad de prepararme mejor como profesionista y ser humano.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado como soporte para la realización de este trabajo. Ya que este trabajo es hecho en México, para México y por México.

RESUMEN

Control robusto \mathcal{H}_∞ de sensibilidad mezclada aplicado a sistemas lineales invariantes en el tiempo subactuados.

Publicación No. _____

Cutberto Daniel Conejo Rosas, Ing. en Electrónica y Automatización

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2011

Profesor Asesor: Dr. René Galindo Orozco

Se presentan fórmulas explícitas de la parametrización de controladores estabilizantes de uno y dos parámetros para sistemas subactuados en un esquema de control maestro-esclavo con información completa del estado. Se consideran sistemas Multi Entrada Multi Salida (MEMS), estrictamente propios, de parámetros concentrados y Lineales Invariantes en el Tiempo (LIT) con una realización fuertemente estabilizable.

En el esquema de control maestro-esclavo se proponen factorizaciones coprimas derecha e izquierda de la función de transferencia en términos de la realización en espacio de estado, se resuelve la ecuación Diophantina asociada, y los controladores estabilizantes se obtienen usando la parametrización de Youla. Se dan condiciones para obtener estabilidad fuerte y se fijan los parámetros libres de los controladores estabilizantes, resolviendo los problemas de sensibilidad mezclada para sistemas actuados con información completa del estado y para sistemas subactuados.

En el esquema de control maestro-esclavo utilizado, un número de variables de estado igual al número de entradas es controlado “directamente”, y estas variables son utilizadas como entradas para controlar “indirectamente” al resto de las variables de estado, pues se tiene información completa del estado de la salida, como lo es velocidad y posición respectivamente.

Los resultados se aplican a los sistemas subactuados: Plano Vertical de Despegue y Aterrizaje (*PVTOL*, por sus siglas en inglés) y Pendubot.

Índice General

Resumen	v
Índice General	vi
Índice de Figuras	viii
1. Introducción	1
1.1. Objetivo	1
1.1.1. Objetivos particulares	1
1.2. Introducción general	2
2. Antecedentes	7
2.1. Introducción	7
2.2. Características del sistema	8
2.3. Estabilización fuerte y parametrización de todos los controladores estabilizantes	9
2.4. Problema de sensibilidad mezclada	15
3. Resultados	17
3.1. Introducción	17
3.2. Transformación del modelo E-L para sistemas subactuados.	18
3.3. Diseño de controladores estabilizantes para el esquema de control <i>maestro-esclavo</i>	23
3.4. Sensibilidad mezclada	26
3.5. Sensibilidad mezclada para el esquema <i>maestro-esclavo</i>	30
4. Sistemas subactuados	34
4.1. Introducción	34

4.2. PVTOL	36
4.2.1. Introducción	36
4.2.2. Desarrollo	37
4.3. Pendubot	44
4.3.1. Introducción	44
4.3.2. Desarrollo	45
5. Conclusiones y Trabajo Futuro	62
5.1. Trabajos futuros	63
Bibliografía	65
PUBLICACIONES	68

Índice de figuras

1.1. Esquema de control <i>maestro-esclavo</i>	5
2.1. Esquema de control de un parámetro.	10
2.2. Esquema de control de dos parámetros.	11
3.1. Esquema de control <i>maestro-esclavo</i> de un parámetro.	22
3.2. Esquema de control <i>maestro-esclavo</i> de dos parámetros.	22
3.3. Sensibilidad mezclada en función del parámetro r	29
3.4. Sensibilidad mezclada en función del parámetro q	29
3.5. Sensibilidad mezclada en función del parámetro r_e en el esquema de control <i>maestro-esclavo</i>	33
3.6. Sensibilidad mezclada en función del parámetro q_e en el esquema de control <i>maestro-esclavo</i>	33
4.1. PVTOL.	36
4.2. Visualización del movimiento deseado para el PVTOL linealizado.	41
4.3. Esquema de MATLAB Simulink, simulación del PVTOL linealizado.	41
4.4. Simulación de posiciones deseadas del PVTOL linealizado.	42
4.5. Simulación del error de la posición x del PVTOL linealizado.	42
4.6. Simulación del error de la posición y del PVTOL linealizado.	43
4.7. Simulación del error de la posición ψ del PVTOL linealizado.	43
4.8. Pendubot.	46
4.9. Sistema de control <i>maestro-esclavo</i> de dos parámetros del modelo lineal del Pendubot.	50
4.10. Posiciones de los eslabones q_1 y q_2 del modelo lineal del Pendubot.	51
4.11. Error de posición del eslabón q_1 del modelo lineal del Pendubot.	51

4.12. Error de posición del eslabón q_2 del modelo lineal del Pendubot.	52
4.13. Animación del modelo lineal del Pendubot.	52
4.14. Posiciones de los eslabones q_1 y q_2 del modelo lineal del Pendubot, en Top Position. .	53
4.15. Error de posición del eslabón q_1 del modelo lineal del Pendubot, en Top Position. . .	54
4.16. Error de posición del eslabón q_2 del modelo lineal del Pendubot, en Top Position. . .	54
4.17. Animación del modelo lineal del Pendubot, en Top Position.	55
4.18. Sistema de control <i>maestro-esclavo</i> de dos parámetros del modelo no lineal del Pendubot.	55
4.19. Posiciones de los eslabones q_1 y q_2 del modelo no lineal del Pendubot.	56
4.20. Error de posición del eslabón q_1 del modelo no lineal del Pendubot.	56
4.21. Error de posición del eslabón q_2 del modelo no lineal del Pendubot.	57
4.22. Animación del modelo no lineal del Pendubot.	57
4.23. Posiciones de los eslabones q_1 y q_2 del modelo no lineal del Pendubot, en Top Position.	58
4.24. Error de posición del eslabón q_1 del modelo no lineal del Pendubot, en Top Position.	59
4.25. Error de posición del eslabón q_2 del modelo no lineal del Pendubot, en Top Position.	59
4.26. Animación del modelo no lineal del Pendubot, en Top Position.	60
4.27. Energía aplicada a eslabón q_1 de τ_1	60

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se dan a conocer los objetivos buscados, los cuales propician la motivación de la temática que comprende esta tesis. Además se presentan los tipos de problemas a resolver, los resultados que se aportan presentados en el contexto de resultados previos en el tema. Dando así, una visión general de la aportación de los resultados de esta tesis. A continuación, se presenta en la siguiente sección los objetivos de la tesis.

1.1. Objetivo

El objetivo principal de este trabajo es el desarrollo de expresiones analíticas explícitas de la familia de controladores estabilizantes, los cuales son solución al problema de estabilidad robusta y desempeño robusto minimizando un criterio de sensibilidad mezclada, particularmente el problema de regulación para sistemas lineales invariantes en el tiempo subactuados.

1.1.1. Objetivos particulares

- 1 Aplicar los resultados sobre control de sistemas Euler-Lagrange (E-L) subactuados presentados en [1] y sobre la parametrización de controladores estabilizantes y sensibilidad mezclada

- propuestos en [2], que sirven de estudio para determinar expresiones analíticas de la familia de controladores estabilizantes para sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LIT) subactuados.
- 2 Fijar los parámetros libres de la familia de controladores estabilizantes obtenida en el paso 1, minimizando un criterio de sensibilidad mezclada para sistemas actuados con información completa del estado y para sistemas subactuados en un esquema *maestro-esclavo*.
 - 3 Obtener modelos LIT para los ejemplos de simulación de los sistemas: PVTOL (*Planar Vertical Take Off and Landing*, o bien, Plano Vertical de Despegue y Aterrizaje) y un robot planar de dos grados de libertad subactuado llamado Pendubot, cuyo modelo no lineal está dado en [4].
 - 4 Diseñar controladores estabilizantes robustos \mathcal{H}_∞ lineales, a partir de los modelos linealizados de los sistemas no lineales subactuados del paso 3, en un esquema *maestro-esclavo*.
 - 5 Evaluar el desempeño por medio del criterio de sensibilidad mezclada y la estabilidad mediante simulaciones de los ejemplos del paso 3.

1.2. Introducción general

El propósito principal es dar fórmulas explícitas de la parametrización de controladores estabilizantes de uno y dos parámetros para sistemas subactuados con información completa del estado, y fijar sus parámetros de control, resolviendo un problema de sensibilidad mezclada. En [6], se muestra un problema de sensibilidad mezclada que resuelve simultáneamente estabilidad robusta y desempeño robusto.

Se consideran sistemas Multi-Entrada Multi-Salida (MEMS), estrictamente propios, de parámetros concentrados y LIT, con una realización estabilizable y características dadas para las matrices de estado A y de entrada B . Se asume que la planta satisface la propiedad de entrelazamiento par, para asegurar que un controlador estable existe dentro del conjunto de controladores estabilizantes, *i.e.*,

que la planta es fuertemente estabilizable. Un controlador estable es importante por razones prácticas como rompimiento de lazo, falla o para minimizar errores numéricos.

Los sistemas subactuados son aquellos que tienen menos entradas de control que grados de libertad, esto se debe al diseño o a la falla de algún componente. Algunas aplicaciones son submarinos, robots, vehículos autónomos y satélites [12], [1], [13], [14], [4] y [15].

En [1] se menciona que la motivación para el estudio de los sistemas subactuados son los sistemas mecánicos autónomos así como vehículos submarinos y aeroespaciales. Los helicópteros son sistemas multivariable que representan un reto para los ingenieros en control ya que los helicópteros son inestables, es por esto que en [1] usan un Tandem Fan (Ventiladores en Paralelo) en una plataforma de tres grados de libertad, que emula las características de los helicópteros tipo Tandem. En [1] utilizan un control que cancela dinámica en el sistema E-L y separa en dinámicas rápidas y lentas representadas como singularmente perturbados, a su vez usando la técnica de control de saturaciones anidadas de [23], a diferencia de esta tesis que utiliza controladores estabilizantes de uno y dos parámetros con un esquema de control *maestro-esclavo*.

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo subactuados, respecto al desempeño y estabilidad fuerte representan un reto de control, pues se requiere de buenos modelos matemáticos que representen las dinámicas del sistema y de las incertidumbres. Es por esto que la motivación de esta tesis es proponer fórmulas explícitas para obtener controladores robustos que atenúen perturbaciones y dinámicas no modeladas.

En el esquema de control *maestro-esclavo* utilizado, un número de variables de estado igual al número de entradas es controlado “directamente”, y estas variables son utilizadas como entradas para controlar “indirectamente” al resto de las variables de estado, gracias a la información completa del estado a la salida y al acoplamiento dinámico que existe entre ellas. En este esquema, al sistema *maestro* que posee al elemento actuado se le asocia una dinámica directa (*d.d.*), y al sistema *esclavo*

que no posee al elemento actuado se le asocia una dinámica indirecta (*d.i.*). El objetivo de control es poder controlar la *d.i.* a través de la *d.d.* usando el esquema de control *maestro-esclavo*.

El control de sensibilidad mezclada [6] es un método de diseño de lazo cerrado, basado en la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ de la función sensibilidad a la salida, mejorando el desempeño y la atenuación de perturbaciones aditivas a la salida, y en la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ de la función de transferencia de la salida a la entrada de la incertidumbre, preservando estabilidad bajo incertidumbres.

La parametrización de todos los controladores estabilizantes da una solución al problema de síntesis de controladores LIT como lo proponen [5], [7], [8] y [9]. Los controladores estabilizan una planta dada y los problemas de desempeño pueden resolverse por medio de la correcta elección de sus parámetros libres. Hay pocos algoritmos para obtener expresiones analíticas de los controladores estabilizantes, tales como en [11] que proponen expresiones analíticas complejas, ya que usan matrices acopladas F y L para resolver la parametrización de Youla, y en esta tesis se dan expresiones analíticas más sencillas, donde sólo se requiere información del modelo de representación en variables de estado requerida sin matrices acopladas.

La parametrización propuesta de controladores estabilizantes para sistemas subactuados, se basa en [25] sobre la parametrización de controladores estabilizantes para sistemas actuados, se resume en la subsección 2.2 del capítulo 2, allí se aplican resultados algebraicos sobre una planta en términos de su realización en espacio de estado. Primero, se obtienen factorizaciones coprimas derecha e izquierda (*f.c.d.* y *f.c.i.*, respectivamente) de la función de transferencia sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables, como se presentó en [7]. Entonces, se resuelve la ecuación Diophantina derecha (ver libro [5]) y finalmente se dispone de la familia de todos los controladores estabilizantes a través de la parametrización de Youla como lo proponen [8] y [9].

La solución de la parametrización de todos los controladores estabilizantes para sistemas actuados

con información completa del estado que se presenta en la subsección 2.2 del capítulo 2, es menos compleja con respecto a la de [2], ya que usa un cambio de coordenadas para asegurar que la factorización pertenezca al conjunto de funciones racionales propias y estables, y esto no se requiere para la factorización propuesta en esta tesis, lo cual disminuye los parámetros de control y el esfuerzo computacional.

La estabilización fuerte, la parametrización de todos los controladores estabilizantes de uno y dos parámetros y los sistemas subactuados con las características necesarias se revisan en el capítulo 2.

Las contribuciones de la tesis son las siguientes:

- 1 Una transformación del modelo de E-L para sistemas subactuados tal que la $d.d.$ y la $d.i.$ cumplan con la condición de que la dimensión del estado sea par y sea el doble de la dimensión de la entrada.
- 2 El esquema *maestro-esclavo* (Fig. 1.1) para las $d.d.$ y las $d.i.$.
- 3 Se fijan los parámetros libres r y q de los controladores estabilizantes de uno y dos parámetros, resolviendo un problema de sensibilidad mezclada de forma explícita para sistemas actuados y para sistemas subactuados en el esquema maestro-esclavo.

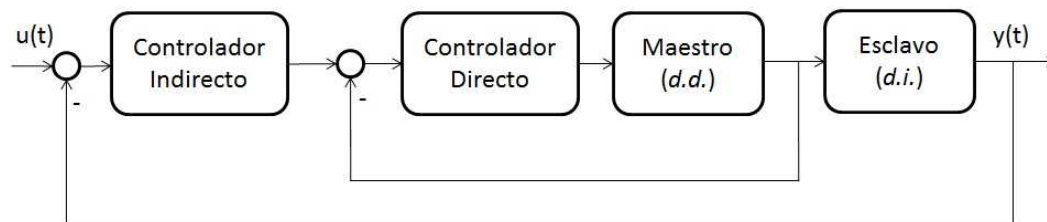


Figura 1.1: Esquema de control *maestro-esclavo*.

Los resultados se aplican a los ejemplos PVTOL y Pendubot en su respectivo capítulo 4 de Sistemas subactuados. En el último capítulo se dan conclusiones generales y trabajos futuros.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Introducción

En este capítulo, se presentan las herramientas matemáticas requeridas para el desarrollo de los resultados de esta tesis. Tales herramientas son la descripción del sistema para subactuados (ver [4], [25] y [24]), los controladores estabilizantes y sensibilidad mezclada (ver [2], [3] y [25]).

Es necesario la descripción del modelo del sistema subactuado, de manera que al linealizar el sistema se logre llevar a una representación en variables de estado, para poder utilizar la teoría de los controladores estabilizantes y sensibilidad mezclada, para garantizar estabilidad y desempeño robusto.

2.2. Características del sistema

Considere una realización causal, LIT MEMS y estabilizable (F, G, H) de un sistema, esto es, el subsistema no controlable es estable. Considere en lo que sigue el subsistema controlable y observable, *i.e.*, la realización mínima en variables de estado dada por,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, x(0) \in \mathfrak{R}^n. \quad (2.2.1)$$

Más aún, dado que todas las entradas de $u(t)$ son linealmente independientes, sin pérdida de generalidad, un cambio de base del estado puede seleccionarse, obteniendo la realización en nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \\ C &= I_n \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

donde $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular.

También, se supone que el estado es medible o se puede estimar, que $n = 2m$ donde n es la dimensión del estado y m es la dimensión de la entrada, y que se particiona $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ de acuerdo a la partición a bloques de $B \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, donde $A_{11} = 0$ y A_{12} es una matriz no singular que es modificada por $A_{12} = I_m$ a diferencia de como se muestra por [2], esto se debe a que se usa una representación en variables de estado conveniente para la formulación E-L con información completa del estado y completamente actuada, pues es una clase de sistemas dinámicos no lineales que tiene una realización linealizada de la forma (2.2.2) y satisface la condición $n = 2m$, mientras que la formulación E-L para sistemas subactuados es

$$\ddot{q}(t) = M^{-1}(q(t)) \left(\begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} - C(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t) - G(q(t)) \right) \quad (2.2.3)$$

donde $M(q(t)) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$ denota la inercia, $C(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$ es la matriz de Coriolis-centrípeta, $G(q(t)) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2}}$ la fuerza de gravedad, $\tau(t) \in \mathfrak{R}^m$ es la fuerza generalizada, siendo $m \leq$

$\frac{n}{2}$ y $q(t) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2}}$, $\dot{q}(t) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2}}$ y $\ddot{q}(t) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2}}$ las coordenadas generalizadas de posición, velocidad y aceleración, respectivamente.

La formulación para sistemas subactuados (2.2.3), su representación en variables de estado es completamente actuado, por esto, se propone en el capítulo 3 de Resultados una transformación para (2.2.3) y así obtener la estructura de la realización en espacio de estados subactuado para las *d.d.* y las *d.i.* que tienen la estructura dada por (2.2.2), satisfaciendo cada una la condición $n = 2m$, lo cual se requiere para desarrollar los resultados principales de esta tesis.

2.3. Estabilización fuerte y parametrización de todos los controladores estabilizantes

El problema de estabilización fuerte fue estudiado por [10] para plantas con una entrada y una salida, y [5] extendió estos resultados a plantas MEMS, dando la siguiente propiedad de entrelazamiento par (*p.e.p.*)

Teorema 1. *Una planta $P(s)$ es fuertemente estabilizable si el número de polos de $P(s)$ (contados de acuerdo al grado McMillan) entre cada par de ceros reales, incluyendo los ceros al infinito, en el semiplano derecho, es par.* ▲▲▲

El problema de estabilización fuerte es importante por razones prácticas, como rompimiento de lazo físico (desconexión de cableado, pérdida total de un sensor, etc.), fallas (pérdida total de un actuador o componentes) o minimizar errores numéricos.

La configuración de control de un parámetro se muestra en la Fig. 2.1 (ver [26] y [5]), donde $P(s)$ representa a la planta, $u(s)$ y $y(s)$ son la entrada y salida de la planta, $e(s)$ es la señal de error, y $d_i(s)$, $d_o(s)$ y $d_m(s)$ son perturbaciones externas a la entrada, a la salida y en la medición de la planta, respectivamente.

Se supone en lo que sigue que la norma \mathcal{H}_2 de las perturbaciones es acotada. La entrada de la planta $u(s)$ es generada por una señal independiente, esto es

$$u(s) = K(s)e(s) + d_i(s) \quad (2.3.1)$$

donde

$$e(s) = y_d(s) - (y(s) + d_m(s)) \quad (2.3.2)$$

y $K(s)$ es el controlador de un parámetro.

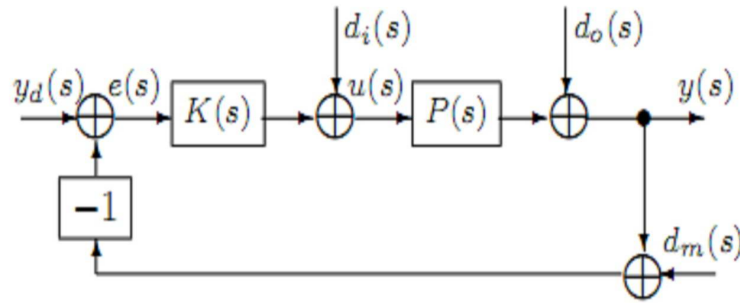


Figura 2.1: Esquema de control de un parámetro.

La parametrización de todos los controladores estabilizantes de un parámetro están dados por el siguiente teorema tomado de [5].

Teorema 2. *Suponga que $P(s) \in \mathfrak{R}^{p \times m}(s)$ y $K(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ en la configuración retroalimentada de la Fig. 2.1. Sean*

$$P(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (2.3.3)$$

y

$$P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (2.3.4)$$

cualquier f.c.d. y f.c.i. de $P(s)$ con $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{N}(s)$ y $\tilde{D}(s)$ perteneciendo al conjunto \mathfrak{RH}_∞ . Entonces, el conjunto de todos los controladores que estabilizan $P(s)$ está dado por,

$$\begin{aligned}
K(s) &= \tilde{D}_k^{-1}(s) \tilde{N}_k(s) \\
\tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) \\
\tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s)
\end{aligned}
\tag{2.3.5}$$

donde $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son parámetros libres satisfaciendo $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$, y $X(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $Y(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son la solución de la ecuación Diophantina

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m \tag{2.3.6}$$

▲▲▲

Una versión de configuración de control de dos parámetros se muestra en la Fig. 2.2 (ver [26] y [5]), donde $u(s)$ es generada por dos señales independientes diferentes, esto es,

$$u(s) = K_r(s)y_d(s) - K(s)y(s) \tag{2.3.7}$$

donde y_d es la entrada de referencia y $\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix}$ es el controlador de dos parámetros.

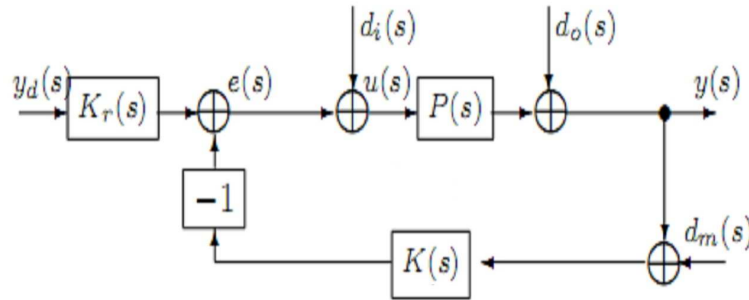


Figura 2.2: Esquema de control de dos parámetros.

La parametrización de todos los controladores estabilizantes de dos parámetros tomado de [5], está dada por,

Teorema 3. *Suponga que $P(s) \in \mathfrak{R}^{p \times m}(s)$, $K_r(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ y $K(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ en la configuración retroalimentada de la Fig. 2.2. Sean*

$$P(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (2.3.8)$$

y

$$P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (2.3.9)$$

cualquier f.c.d. y f.c.i. de $P(s)$ con $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{N}(s)$ y $\tilde{D}(s)$ perteneciendo al conjunto \mathfrak{RH}_∞ . Entonces, el conjunto de todos los controladores que estabilizan $P(s)$ está dado por,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} &= \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_k(s) \end{bmatrix} \\ \tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

donde $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son parámetros libres satisfaciendo $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$, y $X(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $Y(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son la solución de la ecuación Diophantina,

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m \quad (2.3.11)$$

▲▲▲

En la Fig. 2.2, el controlador $K_r(s)$ es usado para mejorar la regulación de la señal de salida $y(s)$ a la referencia $y_d(s)$, y el controlador $K(s)$ garantiza estabilidad interna en las Fig. 2.1 y 2.2.

Si $K_r(s)$ es inestable, su salida crece sin límite. Una alternativa es obtener un denominador coprimo común, tal es $\tilde{D}_k(s)$ de ambos controladores (ver [5]), ésto es,

$$K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) \quad (2.3.12)$$

y

$$K_r(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)Q(s). \quad (2.3.13)$$

La *f.c.d.* (2.3.8) y la *f.c.i.* (2.3.9) de la planta y una solución analítica de la ecuación Diophantina se dan en el siguiente lema (ver prueba en [25]),

Lema 1. *Considere la realización en espacio de estado dada por la Ec. (2.2.2) satisfaciendo la condición $n = 2m$ donde n es la dimensión del estado y m es la dimensión de la entrada. Entonces, la *f.c.d.* y la *f.c.i.* de la función de transferencia $(sI_n - A)^{-1}B$ sobre \mathfrak{RH}_∞ son,*

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix} \quad (2.3.14)$$

$$\tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ sB_m \end{bmatrix}$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix} \quad (2.3.15)$$

$$D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s)$$

respectivamente, donde $0 < a \in \mathfrak{R}$, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ es una matriz no singulares y,

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - sA_{22} - A_{21}). \quad (2.3.16)$$

Además, una solución analítica de la ecuación Diophantina (2.3.11) para la *f.c.d.* de la ecuación (2.3.15) sobre \mathfrak{RH}_∞ es,

$$\begin{aligned} X(s) &= \begin{bmatrix} a^2 I_m + A_{21} & 2aI_m + A_{22} \end{bmatrix} \\ Y(s) &= B_m \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Los resultados del Lema 1 son menos complejos comparandolos a los de [2]. En el Lema 1, las factorizaciones pertenecen a \mathfrak{RH}_∞ y no se necesita el cambio de coordenadas usado en [2], disminuyendo los parámetros de control y el esfuerzo computacional para las factorizaciones del Lema 1.

Si A_{11} en la matriz de estado A no es cero, entonces el complemento de Schur tendrá un término $sI_m - A_{11}$ que impide obtener la *f.c.i.* de $P(s)$.

Ahora, basándose en el Lema 1 la parametrización de todos los controladores estabilizantes de dos parámetros está dada en el siguiente teorema (ver [25]),

Teorema 4. *Considere la realización en espacio de estado dada por la ecuación (2.2.2) en la configuración retroalimentada de la Fig. 2.2, satisfaciendo la condición $n = 2m$ donde n es la dimensión del estado y m es la dimensión de la entrada. Entonces, el conjunto de todos los controladores de dos parámetros que estabilizan la ecuación (2.2.2) es,*

$$\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} = \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_k(s) \end{bmatrix} \quad (2.3.18)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k(s) &= \left(I_m - \frac{1}{(s+a)^2} (R_1(s) + sR_2(s)) \right) B_m \\ \tilde{N}_k(s) &= \begin{bmatrix} a^2 I_m + A_{21} + R_1(s)\Gamma(s) & 2aI_m + A_{22} + R_2(s)\Gamma(s) \end{bmatrix} \\ Q(s) &= \begin{bmatrix} Q_1(s) & Q_2(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

siendo $R_i \in \mathfrak{RH}_\infty$ satisfaciendo $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$ y $Q_i(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$, $i = 1, 2$, parámetros libres, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ una matriz no singular, $0 < a \in \mathfrak{R}$ y

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - sA_{22} - A_{21}). \quad (2.3.20)$$

Más aún, suponga que $(sI_n - A)^{-1} B$ satisface la p.e.p. y,

$$\det(s^2 I_m + s(2aI_m - R_2(s)) + a^2 I_m - R_1(s)) \quad (2.3.21)$$

es un polinomio Hurwitz, entonces la ecuación (2.3.18) es estable, i.e., el controlador

$$\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} \in \mathfrak{RH}_\infty. \quad (2.3.22)$$

▲▲▲

La estabilidad del controlador de dos parámetros depende de a y $R_i(s)$, $i = 1, 2$. En particular si $R_i(s)$, $i = 1, 2$ son $r_i I_m$ donde $r_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2$, entonces (2.3.21) es un polinomio Hurwitz si,

$$r_1 < a^2 \text{ y } r_2 < 2a. \quad (2.3.23)$$

Dado que $\tilde{N}(s)$ es una matriz larga de dimensión $n \times m$, entonces $\tilde{N}(s)$ no tiene una inversa a la derecha y por lo tanto la ecuación Diophantina izquierda

$$\tilde{N}(\lambda)\tilde{X}(\lambda) + \tilde{D}(\lambda)\tilde{Y}(\lambda) = I \quad (2.3.24)$$

no tiene solución.

2.4. Problema de sensibilidad mezclada

En [22], se considera el lazo retroalimentado de la Fig. 2.1, así como sistemas MEMS y $P(s)$ es estabilizada por $K(s)$ en lazo cerrado, se supone que no se sabe que tipo perturbaciones se esperan, pero se sabe que su espectro es esencialmente confinado al rango de frecuencias $0 \leq \omega \leq \omega_b$. El objetivo de diseño es encontrar un controlador $K(s)$ que minimice el peor caso de la excursión de $y(s)$ que resulta de cualquier perturbación $d(s)$ (y establezca el lazo), y esto se logra resolviendo el problema,

$$\text{mín } \|S\|_{\infty}, \quad (2.4.1)$$

donde S es la función sensibilidad.

Se considera una planta incierta $P_{\Delta}(s)$ en una configuración de retroalimentación negativa unitaria. La función sensibilidad genérica S de (2.4.1), donde la función sensibilidad a la salida S_o , logra minimizar el efecto de las perturbaciones $\|d(t)\|_2$ sobre la salida $\|y(t)\|_2$, esto se logra minimizando

$$J_1 = \left\| \left[\begin{array}{c} W_1(s)S_o(s) \\ W_2(s)T_{u_{\Delta}y_{\Delta}}(s) \end{array} \right] \right\|_{\infty} \quad (2.4.2)$$

por un controlador estable $K(s)$ diseñado para la planta nominal $P(s)$, donde $S_o(s)$ es la función sensibilidad a la salida, $T_{u_{\Delta}y_{\Delta}}(s)$ es la función de transferencia de la salida a la entrada de la incertidumbre Δ , y $W_i(s)$, $i = 1, 2$, son funciones de peso pasa-bajas y pasa-altas, respectivamente, estables y de fase mínima.

Usando un controlador estabilizante, este problema ha sido transformado en un problema de seguimiento de modelo que depende principalmente del parámetro libre de la parametrización de controladores estabilizantes, y J_1 es minimizado por el teorema de Nehari [17] resolviendo ecuaciones de Riccati (ver [18], [19] y [20]).

El índice (2.4.2) es transformado en [21] en,

$$J_2 = \left\| \begin{bmatrix} S_{ol} \\ T_{u_{\Delta}y_{\Delta}h} \end{bmatrix} \right\|_{\infty}. \quad (2.4.3)$$

Así, se plantea un problema de sensibilidad mezclada con matrices cuyos elementos son reales y sin un sistema aumentado, implicando que el orden de $K(s)$ no será más grande que el de $P(s)$. El índice J_2 involucra la minimización simultánea de $\|S_{ol}\|_{\infty}$ y de $\|T_{u_{\Delta}y_{\Delta}h}\|_{\infty}$, esto es,

$$\min_{K(s)} \|S_{ol}\|_{\infty} \quad (2.4.4)$$

sujeto a

$$\|T_{u_{\Delta}y_{\Delta}h}\|_{\infty} = \|S_{ol}\|_{\infty}. \quad (2.4.5)$$

Para modelos con Δ multiplicativa a la salida, $T_{u_{\Delta}y_{\Delta}}(s)$ se convierte en

$$T_o(s) := S_o(s)P(s)K(s). \quad (2.4.6)$$

También para plantas estrictamente propias,

$$T_{oh} := L_{oh}. \quad (2.4.7)$$

En el siguiente capítulo, se dan los resultados principales de esta tesis, tales son la transformación del modelo E-L para subactuados, controladores estabilizantes para el esquema de control *maestro-esclavo* y la solución al problema de sensibilidad mezclada del esquema de uno y dos parámetros y para el esquema de control *maestro-esclavo* de uno y dos parámetros, que se aplican como solución al PVTOL y Pendubot en el capítulo 4 de Sistemas subactuados.

Capítulo 3

Resultados

3.1. Introducción

Se muestran en este capítulo expresiones analíticas explícitas, tales son:

- la transformación del modelo E-L para sistemas subactuados
- la parametrización de controladores estabilizantes y la solución al problema de sensibilidad mezclada, para los esquemas de control de uno y dos parámetros y para los esquemas de control *maestro-esclavo* de uno y dos parámetros

como resultados principales de esta tesis.

En [2], se obtiene la parametrización de controladores estabilizantes para sistemas con información completa del estado y se usa una transformación en la representación de variables de estado. Sin embargo, en esta tesis se usa una transformación en el modelo E-L para sistemas subactuados, y se logra una cancelación parcial de dinámica y la linealización del sistema no lineal, para obtener una representación en variables de estado con la estructura de A y B que cumplen con la condición $n = 2m$ en las *d.d.* (dinámica directa) y *d.i.* (dinámica indirecta) (ver [3]) en un esquema de control *maestro-esclavo*.

También se obtienen resultados de la parametrización de los controladores estabilizantes y la solución de la ecuación Diophantina para los controladores estabilizantes de uno y dos parámetros (ver [25]) y para los controladores estabilizantes del esquema de control *maestro-esclavo* de uno y dos parámetros propuesto. A su vez, se fijan los parámetros libres que minimizan un criterio de sensibilidad mezclada para sistemas subactuados.

3.2. Transformación del modelo E-L para sistemas subactuados.

Se transforma el modelo (2.2.3) para desacoplar el efecto de la entrada sobre el elemento no actuado del sistema y obtener la representación en variables de estado de la forma (2.2.2), pues se requiere que las *d.d.* se controlen directamente y *d.i.* sean controladas por la salida de la variable de estado de la *d.d.* Para esto, se propone una matriz de transformación que haga cero a una parte de la submatriz $M^{-1}(q(t)) \begin{bmatrix} \tau(t) & 0 \end{bmatrix}^T$ de (2.2.3) correspondiente a la *d.i.* Esto es, que la submatriz de la transformación multiplica a la ecuación de la *d.i.* denotadas por q_i y \dot{q}_i , dejando como entrada de control para q_i la salida de la *d.d.* denotadas por q_d y \dot{q}_d , así, la transformación logra separar al sistema (2.2.3) en un sistema con *d.d.*, q_d y \dot{q}_d , que controle a la *d.i.*, q_i y \dot{q}_i , cumpliendo cada parte la condición $n = 2m$ y de la forma (2.2.2), gracias a la transformación del modelo E-L para subactuados, a la cancelación de dinámica y a la linealización del sistema.

A continuación, para obtener la matriz de transformación se particiona $M^{-1}(q(t))$ de acuerdo a las dimensiones de $\begin{bmatrix} \tau(t) & 0 \end{bmatrix}^T$, esto es

$$M^{-1}(q(t)) \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q(t)) & M_{12}(q(t)) \\ M_{21}(q(t)) & M_{22}(q(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

$$M^{-1}(q(t)) \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q(t))\tau(t) \\ M_{21}(q(t))\tau(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

Como se muestra en (3.2.2), se presenta $\tau(t)$ en la *d.i.*, de manera que se propone T tal que

$$M_{21}(q(t))\tau(t) = 0, \quad (3.2.3)$$

esto se logra linealizando primero $M^{-1}(q(t))$ en los puntos de equilibrio ($q_e = cte.$ y $\dot{q}_e = 0$)

$$M^{-1}(q(t))\big|_{q_e} = \begin{bmatrix} M_{11}(q_e) & M_{12}(q_e) \\ M_{21}(q_e) & M_{22}(q_e) \end{bmatrix}, \quad (3.2.4)$$

esto es solamente para obtener una matriz de transformación constante y que tenga inversa, definida por,

$$\begin{aligned} q(t) &= T^{-1}\bar{q}(t) \\ \dot{q}(t) &= T^{-1}\dot{\bar{q}}(t) \cdot \\ \ddot{q}(t) &= T^{-1}\ddot{\bar{q}}(t) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Proponemos

$$T = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -M_{21}(q_e)M_{11}^{-1}(q_e) & I_m \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2m \times 2m}, \quad (3.2.6)$$

de manera que,

$$TM^{-1}(q_e)\tau(t) = \begin{bmatrix} M_{11}(q_e)\tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2m \times 1} \quad (3.2.7)$$

dando como resultado (3.2.3). La transformación se aplica a (2.2.3), donde la separación de la *d.d.* y la *d.i.* se logra después de una cancelación de dinámica apropiada y de la linealización del sistema no lineal.

El modelo (2.2.3) transformado utilizando la matriz de transformación (3.2.6) es,

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{q}}(t) &= \\ TM^{-1}(T^{-1}\bar{q}(t)) &\left(\begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} - C(T^{-1}\bar{q}(t), T^{-1}\dot{\bar{q}}(t))T^{-1}\dot{\bar{q}}(t) - G(T^{-1}\bar{q}(t)) \right) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

o bien,

$$\ddot{\bar{q}}(t) = \hat{M}^{-1}(q(t)) \left(\begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} - \hat{C}(q(t), \dot{q}(t))\dot{\bar{q}}(t) - \hat{G}(q(t)) \right) \quad (3.2.9)$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{M}^{-1}(q(t)) &= TM^{-1}(T^{-1}\bar{q}(t)) \\ \hat{C}(q(t), \dot{q}(t)) &= C\left(T^{-1}\bar{q}(t), T^{-1}\dot{\bar{q}}(t)\right) T^{-1} . \\ \hat{G}(q(t)) &= G(T^{-1}\bar{q}(t))\end{aligned}\quad (3.2.10)$$

Obtenido (3.2.9), se linealiza en los puntos de equilibrio ($q_e = cte.$ y $\dot{q}_e = 0$) y se cancela parcialmente el acoplamiento dinámico de las $d.d$ y de las $d.i.$ por retroalimentación. Así, separando el modelo E-L para sistemas subactuados en $d.d$ (identificado con el subíndice d) y en $d.i.$ (identificado con el subíndice i),

$$\bar{q}(t) := \begin{bmatrix} \bar{q}_d(t) \\ \bar{q}_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

las variables de estado de la $d.d.$ se definen por,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_{1d}(t) \\ x_{2d}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{q}_d(t) \\ \dot{\bar{q}}_d(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_{1d}(t) \\ \dot{x}_{2d}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{2d}(t) \\ \ddot{\bar{q}}_d(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.2.12)$$

y las variables de estado de la $d.i.$ se definen como sigue,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{q}_i(t) \\ \dot{\bar{q}}_i(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_{1i}(t) \\ \dot{x}_{2i}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{2i}(t) \\ \ddot{\bar{q}}_i(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.2.13)$$

Las representaciones en variables de estado asociadas a (3.2.12) y (3.2.13) cumplen con la condición $n = 2m$ y tienen la forma (2.2.2). Por lo tanto, la matriz de transformación (3.2.6), la cancelación de dinámica y la linealización del sistema no lineal propuestas, hace que el sistema (2.2.3) tenga la forma (2.2.2).

Dado lo anterior, para utilizar el esquema de control *maestro-esclavo*, se requiere de la función de sensibilidad complementaria del esquema de control de un parámetro dada en [5] de la Fig. 2.1 y del

Teorema 2, esto es,

$$\begin{aligned}
T_o(s) &= (I_n + P(s)K(s))^{-1}P(s)K(s) \\
&= P(s)(I_n + K(s)P(s))^{-1}K(s) \\
&= P(s)(I_n + (Y(s) - R(s)\tilde{N}(s))^{-1}(X(s) + R(s)\tilde{D}(s))N(s)D^{-1}(s))^{-1}K(s) \\
&= P(s)(Y(s) + X(s)N(s)D^{-1}(s))^{-1}\tilde{D}_k(s)K(s) \\
&= P(s)D(s)(Y(s)D(s) + X(s)N(s))^{-1}\tilde{D}_k(s)K(s) \\
&= P(s)D(s)\tilde{D}_k(s)K(s) \\
&= N(s)D^{-1}(s)D(s)\tilde{D}_k(s)\tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s)
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

por lo tanto,

$$T_o(s) = N(s)\tilde{N}_k(s) \tag{3.2.15}$$

y para la configuración retroalimentada de dos parámetros de la Fig. 2.2 y del Teorema 3, esto es,

$$\begin{aligned}
T_o(s) &= (I_n + P(s)K(s))^{-1}P(s)K_r(s) \\
&= P(s)(I_n + K(s)P(s))^{-1}K_r(s) \\
&= P(s)(I_n + (Y(s) - R(s)\tilde{N}(s))^{-1}(X(s) + R(s)\tilde{D}(s))N(s)D^{-1}(s))^{-1}K_r(s) \\
&= P(s)(Y(s) + X(s)N(s)D^{-1}(s))^{-1}\tilde{D}_k(s)K_r(s) \\
&= P(s)D(s)(Y(s)D(s) + X(s)N(s))^{-1}\tilde{D}_k(s)K_r(s) \\
&= P(s)D(s)\tilde{D}_k(s)K_r(s) \\
&= N(s)D^{-1}(s)D(s)\tilde{D}_k(s)\tilde{D}_k^{-1}(s)Q(s)
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

por lo tanto,

$$T_o(s) = N(s)Q(s) \tag{3.2.17}$$

respectivamente.

Se muestra el esquema de control *maestro-esclavo* de un parámetro en la Fig. 3.1, donde $T_o(s)$ representa la función de sensibilidad complementaria de un parámetro dada por (3.2.15) para el esquema de la Fig. 2.1 asociada a la *d.d.* Sea $P_i(s)$ la función de transferencia de la representación en variables de estado de la *d.i.* asociada a (3.2.13), y defina la planta nueva (subíndice n) de diseño,

$$P_n(s) := P_i(s)T_o(s). \tag{3.2.18}$$

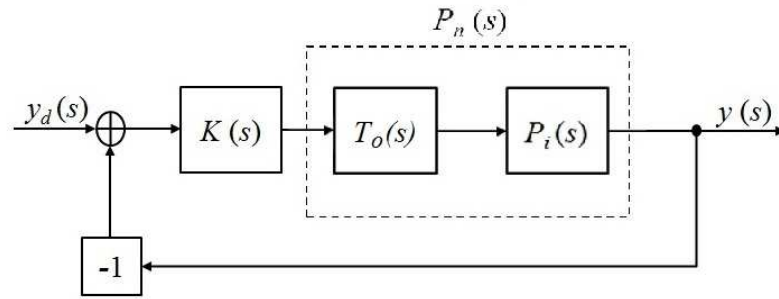


Figura 3.1: Esquema de control *maestro-esclavo* de un parámetro.

Además, se muestra el esquema de control *maestro-esclavo* de dos parámetros en la Fig. 3.2, donde $T_o(s)$ representa la función complementaria de dos parámetros dada por (3.2.17) para el esquema de la Fig. 2.2 asociada a la *d.d.*. Utilizando esta $T_o(s)$, sea (3.2.18) la función de transferencia de la representación en variables de estado de la *d.i.* asociada a (3.2.13).

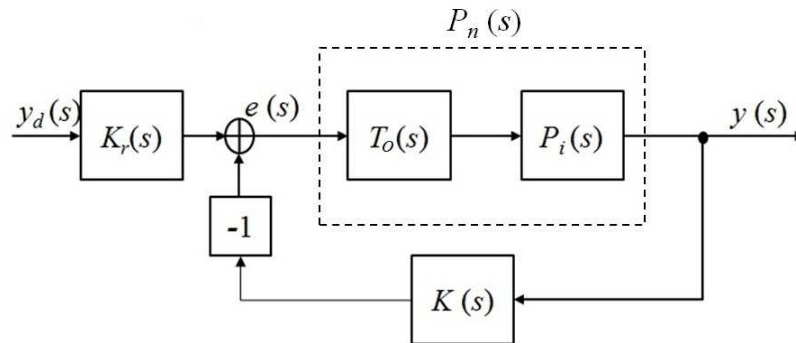


Figura 3.2: Esquema de control *maestro-esclavo* de dos parámetros.

Los esquemas de control *maestro-esclavo* de las Figs. 3.1 y 3.2, son propuestos de manera que la *d.d.* sea el control maestro asociado a la parte del sistema actuada, representada como la función de sensibilidad complementaria $T_o(s)$. La función de sensibilidad complementaria $T_o(s)$ no es la misma en las Figs. 3.1 y 3.2, pues cada $T_o(s)$ representa la configuración de uno y dos parámetros

respectivamente, por lo tanto $P_n(s)$ tampoco es la misma en ambas figuras.

Por lo que $P_i(s)$ representa la función de transferencia asociada a la *d.i.*, correspondiente al control esclavo de la parte del sistema subactuado. Donde la entrada de referencia de los esquemas de control *maestro-esclavo* de uno y dos parámetros, es la referencia de posición deseada de la *d.i.*, por lo que los controladores estabilizantes de la *d.d.* y del esquema de control *maestro-esclavo* se encargan de estabilizar y regular a la parte del sistema no actuada asociada a la *d.i.*.

En [1] representan al sistema como un sistema singularmente perturbado, donde asignan dinámicas rápidas a las *d.d.* y dinámicas lentas a las *d.i.*, por lo que los resultados presentados en esta tesis son diferentes a [1], pues se asigna una misma velocidad de respuesta para las *d.d.* y las *d.i.*.

En la siguiente sección, se obtienen las formulaciones de la familia de controladores estabilizantes para los esquemas de las Figs. 3.1 y 3.2.

3.3. Diseño de controladores estabilizantes para el esquema de control *maestro-esclavo*

A partir de la función complementaria de un parámetro dada por (3.2.15) (ver [5]) asociada a la *d.d.* del esquema de control *maestro-esclavo* de la Fig. 3.1, del Teorema 2 y de (2.3.15), se tiene que,

$$T_o(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix} [X(s) + R(s)\tilde{D}(s)] \quad (3.3.1)$$

donde (3.3.1) es una matriz cuadrada de dimensión $2m \times 2m$ con entradas y salidas, de posición y su derivada (velocidad), ya que sólo se requiere la información de posición que brinda el elemento $T_{o(1,1)}(s)$ de (3.3.1), puesto que la referencia de velocidad es cero, de (3.3.1), (2.3.14) y (2.3.17) se tiene,

$$T_{o(1,1)}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} (a^2 I_m + A_{21} + R_1(s)\Gamma_d(s)) \quad (3.3.2)$$

donde $\Gamma_d(s)$ está dada por (2.3.16).

Del esquema de control *maestro-esclavo* de un parámetro de la Fig. 3.1, se tiene la *f.c.d.* y la *f.c.i.* de $P_n(s)$, de los resultados del Lema 1 denotados por el subíndice e a continuación, donde el subíndice i denota a la *d.i.* y el subíndice d denota a la *d.d.*, están dadas por

$$\begin{aligned}\tilde{D}_e(s) &= \tilde{D}_i(s) \\ \tilde{N}_e(s) &= \tilde{N}_i(s) (a^2 I_m + A_{21d} + R_{1d}(s)\Gamma_d(s)) \frac{1}{(s+a)^2} \\ N_e(s) &= \frac{1}{(s+a)^4} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix} \\ D_e(s) &= (a^2 I_m + A_{21d} + R_{1d}(s)\Gamma_d(s))^{-1} B_{mi}^{-1} \Gamma_i(s)\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

donde se asume que $(a^2 I_m + A_{21d} + R_{1d}(s)\Gamma_d(s))^{-1} \in \mathfrak{RH}_\infty$.

Así, de (3.3.3) se obtiene la solución de la ecuación Diophantina para el esquema de control *maestro-esclavo* de la Fig. 3.1, donde los sistemas asociados a la *d.d.* y a la *d.i.* que cumplen la condición $n = 2m$ y la forma (2.2.2), tienen elementos escalares de manera que, la solución propuesta es,

$$\begin{aligned}X_e(s) &= \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \end{bmatrix} \\ Y_e(s) &= \left(1 + \frac{y_1}{(s+a)} + \frac{y_2}{(s+a)^2}\right) B_{mi} (a^2 + A_{21d} + R_{1d}(s)\Gamma_d(s))\end{aligned},\tag{3.3.4}$$

donde

$$x_0 = 6a^2 A_{21i} + 4a A_{21i} A_{22i} + A_{21i}^2 + A_{21i} A_{22i}^2 + a^4\tag{3.3.5}$$

$$x_1 = 6a^2 A_{22i} + 4a A_{22i}^2 + 4a A_{21i} + A_{22i}^3 + 2A_{21i} A_{22i} + 4a^3\tag{3.3.6}$$

$$y_1 = A_{22i} + 2a\tag{3.3.7}$$

$$y_2 = 3a A_{22i} + A_{22i}^2 + A_{21i} + 3a^2\tag{3.3.8}$$

siendo $\Gamma_d(s)$ y $\Gamma_i(s)$ los complementos de Schur de (3.2.15) asociados a la *d.d.* y a la *d.i.*, respectivamente, dadas por (2.3.16). De esta manera, aplicar (3.3.3) y (3.3.4) en el Teorema 2 para obtener los controladores estabilizantes de un parámetro de la Fig. 3.1.

El parámetro a es considerado como la misma velocidad de respuesta para las *d.d.* y las *d.i.*, debido a esto se obtienen los resultados (3.3.4) y (3.3.3). Si se escoge el parámetro a cerca del eje $j\omega$

su velocidad de respuesta será lenta, y si por el contrario se aleja del eje $j\omega$ su velocidad de respuesta será más rápida. Lo cual tiene como consecuencia la modulación de la velocidad de respuesta y desgaste de los actuadores.

Similarmente, respecto a la función complementaria de dos parámetros (3.2.17) (ver [5]) para obtener los controladores estabilizantes de la *d.i.* (2.3.10) en el esquema de la Fig. 3.2, de (3.2.17) y (2.3.15) se tiene que,

$$T_o(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(s) & Q_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

donde (3.3.9) es una matriz cuadrada con entradas y salidas, de posición y su derivada (velocidad), y ya que sólo se requiere la información de posición que brinda el elemento $T_{o(1,1)}(s)$ de (3.3.9), puesto que la referencia de velocidad es cero, de (3.3.9) se tiene,

$$T_{o(1,1)}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} Q_1(s). \quad (3.3.10)$$

Del esquema de control *maestro-esclavo* de un parámetro de la Fig. 3.2, se tiene la *f.c.d.* y la *f.c.i.* de $P_n(s)$ de los resultados del Lema 1 denotados por el subíndice e a continuación, donde el subíndice i denota a la *d.i.* y el subíndice d denota a la *d.d.*,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_e(s) &= \tilde{D}_i(s) \\ \tilde{N}_e(s) &= \tilde{N}_i(s) Q_{1d}(s) \frac{1}{(s+a)^2} \\ N_e(s) &= \frac{1}{(s+a)^4} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix} \\ D_e(s) &= Q_{1d}^{-1}(s) D_i(s) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

donde $Q_{1d}(s)$ es tal que $Q_{1d}^{-1}(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$.

Así, de (3.3.11) se obtiene la solución de la ecuación Diophantina para el esquema de control *maestro-esclavo* de la Fig. 3.2, donde los sistemas asociados a la *d.d.* y a la *d.i.* que cumplen la condición $n = 2m$ y la forma (2.2.2), sus elementos se consideran escalares, de manera que la solución

propuesta es,

$$\begin{aligned} X_e(s) &= \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \end{bmatrix} \\ Y_e(s) &= \left(1 + \frac{y_1}{(s+a)} + \frac{y_2}{(s+a)^2} \right) B_{mi} Q_{1d}(s) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

donde x_0 , x_1 , y_1 y y_2 están dadas por (3.3.5) a (3.3.8), siendo $\Gamma_i(s)$ el complemento de Schur de (3.2.17) asociado a la *d.i.*. De esta manera, aplicar (3.3.11) y (3.3.12) en (2.3.10), para obtener los controladores estabilizantes de dos parámetros de la Fig. 3.2.

En la siguiente sección, se fijan los parámetros libres r y q para obtener estabilidad robusta y desempeño robusto, en particular regulación al aplicar los controladores estabilizantes, minimizando un criterio de sensibilidad mezclada.

3.4. Sensibilidad mezclada

Se considera la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ de una aproximación de bajas frecuencias de la función de sensibilidad a la salida $\|S_{ol}\|_\infty$ y una aproximación de altas frecuencias de la función de transferencia de la salida a la entrada de la incertidumbre $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$, respectivamente, (ver [3]).

Este problema involucra la minimización simultánea de $\|S_{ol}\|_\infty$ y de $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$, (2.4.4) y (2.4.5). El problema es resuelto fijando los parámetros r y q de los controladores estabilizantes, asumiendo que la entrada de referencia de velocidad es cero. Una solución exacta a (2.4.4) y (2.4.5) para sistemas con información completa del estado, se propone en el siguiente teorema,

Teorema 5. *Considere la realización en espacio de estados dada por la ecuación (2.2.2) de la planta $(sI_n - A)^{-1}B$ en el esquema de las Figs. 2.1 y 2.2. Suponga que $K(s)$ está dado por el Teorema 3. Sea la entrada de referencia del estado*

$$y_d(t) = \begin{bmatrix} y_{d1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4.1)$$

y los parámetros libres

$$\left. \begin{aligned} R_1(s) &= rI_m \\ R_2(s) &= 0 \\ Q_1(s) &= qI_m \\ Q_2(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \in \mathfrak{RH}_\infty. \quad (3.4.2)$$

Entonces, los valores óptimos de r y q para un modelo de la incertidumbre multiplicativo a la salida son,

$$r = \frac{a^2 (\|A_{21}\|_\infty - a^2 b)}{a^4 m + \|A_{21}\|_\infty} \quad (3.4.3)$$

y

$$q = \frac{a^2 \omega_h}{a^2 + \omega_h} \quad (3.4.4)$$

respectivamente, donde

$$b = \frac{1}{\omega_h} \|a^2 I_m + A_{21}\|_\infty \quad (3.4.5)$$

y

$$m = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\omega_h} \|2a^2 I_m + A_{21}\|_\infty - b \right). \quad (3.4.6)$$

▲▲▲

Prueba. La función de sensibilidad complementaria $T_o(s)$ en la configuración retroalimentada de un parámetro está dada por (3.2.15) en la Fig. 2.1 (ver [5]), dado que,

$$R(s) = \left[\begin{array}{cc} R_1(s) & R_2(s) \end{array} \right] \in \mathfrak{RH}_\infty \quad (3.4.7)$$

donde $R_1(s) = rI_m$ y $R_2(s) = 0$.

Entonces, de (2.3.15), (2.3.14) y $N_k(s)$ de (2.3.10), la aproximación de altas frecuencias de (3.2.15) es,

$$T_{oh} \approx \frac{1}{\omega_h} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ a^2 I_m + A_{21} + rI_m & 2aI_m + A_{22} \end{array} \right] \quad (3.4.8)$$

y la aproximación en bajas frecuencias de la función sensibilidad a la salida,

$$S_o(s) = I_n - T_o(s) \quad (3.4.9)$$

es

$$S_{ol} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \left(\frac{r}{a^2} I_m - I_m \right) A_{21} & \frac{-2}{a} I_m - \frac{1}{a^2} A_{22} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (3.4.10)$$

respectivamente.

Dado que la función de sensibilidad complementaria $T_o(s)$ en la configuración retroalimentada de dos parámetros está dada por (3.2.17) en la Fig. 2.2 (ver [5]), dado que,

$$Q(s) = \left[\begin{array}{cc} Q_1(s) & Q_2(s) \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty \quad (3.4.11)$$

donde $Q_1(s) = qI_m$ y $Q_2(s) = 0$.

Entonces, de (2.3.15) la aproximación de alta frecuencia de (3.2.17) es

$$T_{oh} \approx \frac{1}{\omega_h} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ qI_m & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.12)$$

y la aproximación en baja frecuencia de la función sensibilidad a la salida, definida por (3.4.9), es

$$S_{ol} \approx \begin{bmatrix} I_m - \frac{q}{a^2} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}. \quad (3.4.13)$$

De manera que, de (3.4.8) y (3.4.10) y como la referencia de velocidad es cero, las submatrices que contienen al parámetro libre de la configuración de un parámetro, tales son

$$\begin{aligned} \|T_{oh(2,1)}\|_\infty &\approx \frac{1}{\omega_h} \|a^2 I_m + A_{21} + r I_m\|_\infty, \\ \|S_{ol(1,1)}\|_\infty &\approx \frac{1}{a^2} \left\| \left(\frac{r}{a^2} I_m - I_m \right) A_{21} \right\|_\infty, \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

de igual manera, de (3.4.12) y (3.4.13) y como la referencia de velocidad es cero, las submatrices que contienen al parámetro libre de la configuración de dos parámetros, los cuales son

$$\begin{aligned} \|T_{oh(2,1)}\|_\infty &\approx \frac{1}{\omega_h} |q| \\ \|S_{ol(1,1)}\|_\infty &\approx \left| 1 - \frac{q}{a^2} \right|. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Así, (3.4.14) y (3.4.15) tienen una solución

$$\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty \quad (3.4.16)$$

en el punto de intersección de las dos líneas rectas mostradas en las Figs. 3.3 y 3.4, de los parámetros r y q respectivamente.

Esto es, de la Fig. 3.3 se obtiene el resultado de la ecuación (3.4.3), y de la Fig. 3.4 se obtiene el resultado de la ecuación (3.4.4). ■

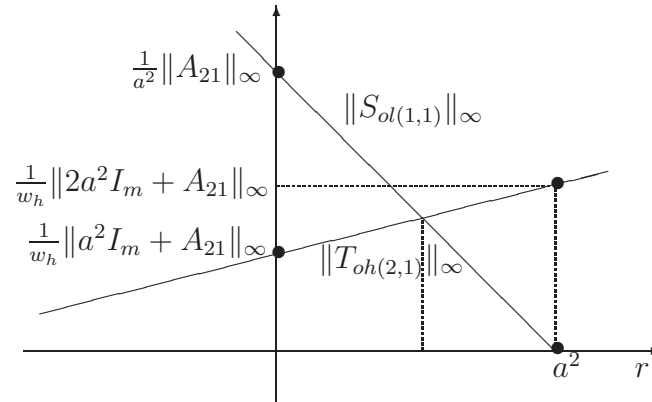


Figura 3.3: Sensibilidad mezclada en función del parámetro r .

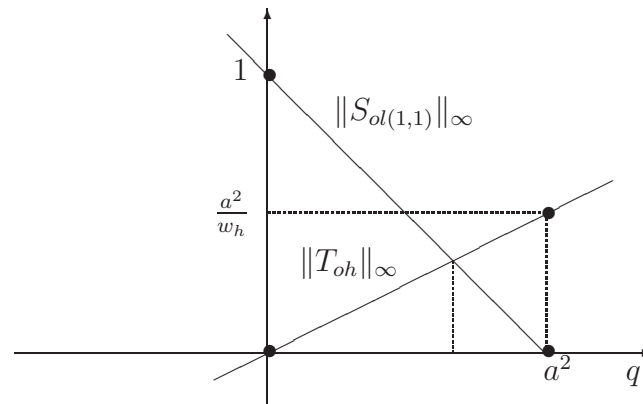


Figura 3.4: Sensibilidad mezclada en función del parámetro q .

Aunque la solución del Teorema 4 no es única, la solución propuesta asegura que existe un punto

de cruce en las Figs. 3.3 y 3.4, puesto que $\|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ alcanza su mínimo valor conforme los parámetros r y q se incrementan.

Además, para las soluciones de los parámetros r y q propuestas, para la restricción

$$\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty, \quad (3.4.17)$$

que como se mostrará, puede minimizarse simultáneamente por la selección apropiada de los parámetros de control a y ω_h .

De las ecuaciones (3.4.3) y (3.4.14) se tiene,

$$\|S_{ol(1,1)}\|_\infty \approx \frac{1}{a^2} \left\| \left(\frac{(\|A_{21}\|_\infty - a^2 b)}{a^4 m + \|A_{21}\|_\infty} - 1 \right) A_{21} \right\|_\infty \quad (3.4.18)$$

y de las ecuaciones (3.4.4) y (3.4.15) se tiene,

$$\|S_{ol(1,1)}\|_\infty \approx \left| 1 - \frac{\omega_h}{a^2 + \omega_h} \right|, \quad (3.4.19)$$

en la configuración retroalimentada de uno y dos parámetros respectivamente.

Si $\omega_h \rightarrow \infty$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} b \\ m \end{array} \right\} \rightarrow 0 \quad (3.4.20)$$

por lo tanto, $|r| \rightarrow a^2$ y del Teorema 3, si $|r| \rightarrow a^2$, los controladores son inestables. Así, para a suficientemente pequeña tal que se preserve la estabilidad de los controladores, el problema de sensibilidad mezclada se resuelve incrementando ω_h . De manera que cuando $\omega_h \rightarrow \infty$, las ecuaciones (3.4.18) y (3.4.19) se hacen cero, puesto que entre más grande sea ω_h más se aproxima a I_m .

3.5. Sensibilidad mezclada para el esquema *maestro-esclavo*

Se presentan resultados del problema de sensibilidad mezclada utilizando el Teorema 5 para el esquema *maestro-esclavo*, en las configuraciones retroalimentadas de uno y dos parámetros de las Figs. 3.1 y 3.2, siguiendo la metodología de la sección 3.4.

De (3.3.4), (3.3.3) y $\tilde{N}_k(s)$ dado en (2.3.19), siendo

$$R(s) = R_e(s) = \left[\begin{array}{cc} r_e I_m & 0 \end{array} \right] \in \mathfrak{RH}_\infty \quad (3.5.1)$$

se obtiene la función de sensibilidad complementaria (3.2.15) de la configuración retroalimentada de un parámetro del esquema *maestro-esclavo* de la Fig. 3.1. Cuya aproximación en altas frecuencias es

$$T_{oeh} \approx \frac{1}{\omega_h^3} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ x_0 + r_e I_m & x_1 \end{array} \right], \quad (3.5.2)$$

y la aproximación en bajas frecuencias de la función sensibilidad a la salida,

$$S_{oe}(s) = I_n - T_{oel} \quad (3.5.3)$$

es,

$$S_{oel} \approx \left[\begin{array}{cc} \frac{-1}{a^4} \left(x_0 - \frac{r_e}{a^2} A_{21i} \right) & -x_1 \\ 0 & I_m \end{array} \right] \quad (3.5.4)$$

respectivamente.

Además, de (3.3.12), (3.3.11) y $\tilde{N}_k(s)$ dada en (2.3.19), siendo,

$$Q(s) = Q_e(s) = \left[\begin{array}{cc} q_e I_m & 0 \end{array} \right] \in \mathfrak{RH}_\infty \quad (3.5.5)$$

se obtiene la función complementaria (3.2.17) en la configuración retroalimentada de dos parámetros del esquema *maestro-esclavo* de la Fig. 3.2. Cuya aproximación en altas frecuencias es

$$T_{oeh} \approx \frac{1}{\omega_h^3} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ q_e I_m & 0 \end{array} \right], \quad (3.5.6)$$

y la aproximación en bajas frecuencias de la función sensibilidad a la salida,

$$S_{oe}(s) = I_n - T_{oel} \quad (3.5.7)$$

es,

$$S_{oel} \approx \left[\begin{array}{cc} I_m - \frac{q_e}{a^4} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{array} \right] \quad (3.5.8)$$

respectivamente.

De manera que, de (3.5.2) y (3.5.4) y como la referencia de velocidad es cero, las submatrices que contienen al parámetro libre de la configuración de un parámetro, tales son,

$$\begin{aligned} \|T_{oeh(2,1)}\|_{\infty} &\approx \frac{1}{\omega_h^3} \|x_0 + r_e I_m\|_{\infty} \\ \|S_{oel(1,1)}\|_{\infty} &\approx \frac{1}{a^4} \left\| \left(\frac{r_e}{a^2} A_{21i} - x_0 \right) \right\|_{\infty} \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

de igual manera, de (3.5.6) y (3.5.8) y como la referencia de velocidad es cero, las submatrices que contienen al parámetro libre de la configuración de dos parámetros, los cuales son,

$$\begin{aligned} \|T_{oeh(2,1)}\|_{\infty} &\approx \left| \frac{1}{\omega_h^3} q_e \right| \\ \|S_{oel(1,1)}\|_{\infty} &\approx \left| 1 - \frac{1}{a^4} q_e \right| \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Así, (3.5.9) y (3.5.10) tienen una solución

$$\|T_{oeh(2,1)}\|_{\infty} = \|S_{oel(1,1)}\|_{\infty} \quad (3.5.11)$$

en el punto de intersección de las dos líneas rectas mostradas en las Figs. 3.5 y 3.6, de los parámetros r y q respectivamente.

Esto es, de la Fig. 3.5 se obtiene el resultado para el esquema de control *maestro-esclavo* de un parámetro,

$$r_e = \frac{(a^4 \omega_h^3 - a^8) \|x_o\|_{\infty}}{a^4 (\|x_o + a^4\|_{\infty} - \|x_o\|_{\infty}) - \omega_h^3 (\|a^2 A_{21i} - x_0\|_{\infty} - \|x_o\|_{\infty})}, \quad (3.5.12)$$

y de la Fig. 3.6 se obtiene el resultado para el esquema de control *maestro-esclavo* de dos parámetros,

$$q_e = \frac{a^4 \omega_h^3}{a^4 + \omega_h^3}. \quad (3.5.13)$$

Todos los resultados obtenidos en este capítulo, se aplican en el siguiente capítulo Sistemas subactuados, donde se observa la aplicación de los controladores estabilizantes, el esquema *maestro-esclavo*, fijando sus parámetros libres de acuerdo al criterio de sensibilidad mezclada.

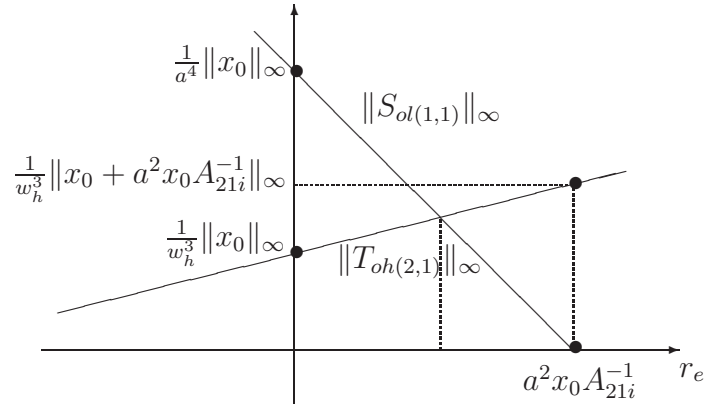


Figura 3.5: Sensibilidad mezclada en función del parámetro r_e en el esquema de control *maestro-esclavo*.

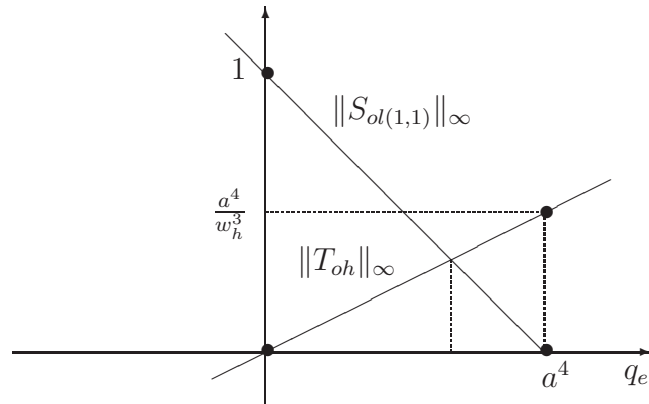


Figura 3.6: Sensibilidad mezclada en función del parámetro q_e en el esquema de control *maestro-esclavo*.

Capítulo 4

Sistemas subactuados

4.1. Introducción

En [1] se menciona que la motivación por el estudio de los sistemas subactuados son los sistemas mecánicos autónomos así como vehículos submarinos y aeroespaciales. Estos sistemas son a veces subactuados por diseño o por falla en algún componente, teniendo así menos actuadores que grados de libertad.

Los helicópteros son sistemas multivariable que representan un reto para los ingenieros en control, es por esto que en [1] usan un Tandem Fan (Ventiladores en Paralelo) en una plataforma de tres grados de libertad, que emula las características de los helicópteros tipo Tandem. En [1] utilizan un control que cancela dinámica en el sistema E-L y separa en dinámicas rápidas y lentas representadas como sistema singularmente perturbado, usando la técnica de control de [23].

En la tesis de [4], se presenta el diseño y control de un robot de dos enlaces subactuado llamado Pendubot, donde se dan detalles del diseño del Pendubot, discutiendo el enlace de los componentes y la interface con la computadora usada como controlador.

En [4] la identificación de los parámetros del Pendubot es completada por un método sólido de

modelado, una solución de mínimos cuadrados para la ecuación de energía de los enlaces y una técnica reducida de minimización. Con los parámetros identificados, modelos matemáticos son desarrollados para facilitar el diseño del controlador.

Uno de los objetivos de control de [4] al igual que en esta tesis, es llevar los eslabones desde Bottom Position (Posición Inferior) hasta Top Position (Posición Superior), esto es desde la posición de ambos eslabones desde abajo hasta el punto de equilibrio inestable de la posición de los eslabones en la posición vertical hasta arriba. Dos algoritmos de control son usados en el trabajo de [4], linealización por retroalimentación parcial para el empuje inicial y linealización de las ecuaciones dinámicas en el punto de equilibrio inestable para el control de balanceo en Top Position. Así, como las técnicas de asignación de polos y LQR son usadas para diseñar el controlador estabilizante.

En [24] se desarrollaron técnicas de control Robusto de Bajo Orden Dinámico (RBOD) para sistemas MEMS con parámetros concentrados e invariantes en el tiempo, además se hace un análisis detallado de la teoría y su aplicación al sistema electromecánico subactuado Pendubot, las dinámicas no modeladas tales como las no linealidades del Pendubot se consideran dentro del conjunto de incertidumbres admisibles.

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo subactuados representan un reto de control, pues se requiere obtener desempeño ante perturbaciones e incertidumbres, además se requiere de buenos modelos matemáticos que representen las dinámicas del sistema y que la energía de la incertidumbre sea acotada.

En la siguiente sección, se usan los resultados del capítulo anterior en los sistemas subactuados PVTOL (*Planar Vertical Take Off and Landing*) y Pendubot.

4.2. PVTOL

4.2.1. Introducción

En esta sección, se utiliza como ejemplo el modelo subactuado PVTOL cuyo diagrama se muestra en la Fig. 4.1 (ver [1]), donde $x(t)$ representa la distancia de la posición horizontal, $y(t)$ es la altura y $\psi(t)$ es el ángulo de giro. El PVTOL es un sistemas subactuado que tiene dos controles, un control para la elevación y otro de giro, mientras que el movimiento de desplazamiento es controlado indirectamente por el control de giro. Este es un ejemplo ilustrativo, en el cual se simula el despegue y aterrizaje vertical de un avión en un plano.

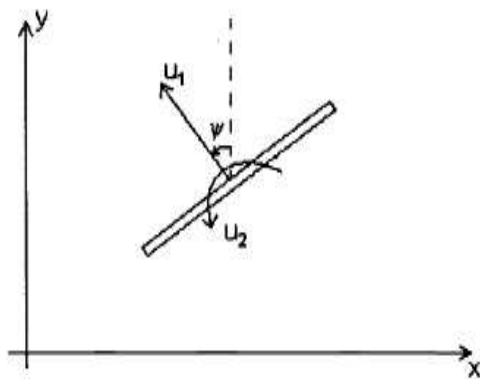


Figura 4.1: PVTOL.

El procedimiento a seguir en esta sección es cancelar la dinámica y las ecuaciones de movimiento resultantes son una cadena de integradores, a partir de las cuales se emplean los resultados obtenidos del capítulo anterior.

4.2.2. Desarrollo

El modelo E-L no lineal (2.2.3) de la Fig. 4.1, donde

$$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

es,

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\psi(t))u_1(t) \\ \text{cos}(\psi(t))u_1(t) + 1 \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Los movimientos $y(t)$ y $\psi(t)$ son controlados directamente, y $x(t)$ es controlado usando $\psi(t)$ como entrada de control indirecta. Aplicando la ley de control, propuesta en [1]

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\bar{u}_1(t)}{\text{cos}(\psi(t))} \\ \bar{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

que cancela una parte de la dinámica en (4.2.2), se tiene el modelo del PVTOL de la forma

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{tan}(\psi(t)) (\bar{u}_1(t) - 1) \\ \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

de manera que queda distribuido en *d.d.* para $y(t)$ y $\psi(t)$, y en *d.i.* para $x(t)$. De (4.2.4), se propone que en estado cuasi-estacionario,

$$\psi(t) = \text{tan}(\psi_{es}(t))^{-1}, \quad (4.2.5)$$

donde

$$\psi_{es}(t) = \frac{\bar{\psi}_d(t)}{\bar{u}_1(t) - 1} \quad (4.2.6)$$

para cancelar el resto de la dinámica de $\ddot{x}(t)$ en (4.2.4), así,

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_d(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (4.2.7)$$

el sistema anterior es una cadena de integradores, al cual se emplean los resultados obtenidos en el capítulo 3 como sigue. Para (4.2.7), se definen,

$$\begin{aligned} x_1(t) = x(t) &\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ x_2(t) = \dot{x}(t) &\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \bar{\psi}_d(t) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned} y_1(t) = y(t) &\Leftrightarrow \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ y_2(t) = \dot{y}(t) &\Leftrightarrow \dot{y}_2(t) = \bar{u}_1(t) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = \psi(t) &\Leftrightarrow \dot{\psi}_1(t) = \psi_2(t) \\ \psi_2(t) = \dot{\psi}(t) &\Leftrightarrow \dot{\psi}_2(t) = \bar{u}_2(t) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

respectivamente. Así, las representaciones en variables de estado de las *d.d.* $y(t)$ y $\psi(t)$, y de la *d.i.* $x(t)$, son,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{\psi}_d(t) \quad (4.2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}_1(t) \quad (4.2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}_2(t) \quad (4.2.13)$$

que tienen la forma de (2.2.2), los elementos de las submatrices $A_{11} = A_{21} = A_{22} = 0$ y $A_{12} = B_m =$

1. Resolviendo el problema de sensibilidad mezclada en un esquema de control de un parámetro, para obtener estabilidad y desempeño, siendo $a = 10$ y $\omega_h = 1000$, de (3.4.3),

$$r = -100 \quad (4.2.14)$$

dado que este valor de r vuelve inestable al controlador estabilizante, ya que $|r| \rightarrow a^2$ de acuerdo al Teorema 3, se hace una pequeña aproximación para r cuando $|r| \rightarrow a^2$, esto es,

$$r = -100 + 1 = -99 \quad (4.2.15)$$

garantizando que el controlador estabilizante sea estable.

Ahora bien, aplicando el Lema 1 las *f.c.d.* y las *f.c.i.* de las *d.d.* $y(t)$ y $\psi(t)$ y la *d.i.* $x(t)$, y la solución de la ecuación Diophantina dada por (2.3.11), son,

$$\begin{aligned} N_x(s) = N_y(s) = N_\psi(s) &= \frac{1}{(s+10)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\ D_x(s) = D_y(s) = D_\psi(s) &= \frac{s^2}{(s+10)^2} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_x(s) = \tilde{N}_y(s) = \tilde{N}_\psi(s) &= \frac{1}{(s+10)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\ \tilde{D}_x(s) = \tilde{D}_y(s) = \tilde{D}_\psi(s) &= \frac{s^2}{(s+10)^2} I_2 \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

$$\begin{aligned} X_x(s) = X_y(s) = X_\psi(s) &= \begin{bmatrix} 100 & 20 \end{bmatrix} \\ Y_x(s) = Y_y(s) = Y_\psi(s) &= 1 \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

donde (4.2.16), (4.2.17) y (4.2.18) pertenecen a \mathfrak{RH}_∞ respectivamente. Utilizando (4.2.16), (4.2.17) y (4.2.18) en (2.3.19), siendo,

$$\left. \begin{aligned} R_1(s) &= rI_m \\ R_2(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \in \mathfrak{RH}_\infty \quad (4.2.19)$$

y de (2.3.18), se tienen los controladores estabilizantes de un parámetro estables para las *d.d.* en el esquema de control de la Fig. 2.1,

$$K_y(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+2000s+10000}{s^2+20s+199} & \frac{20s^2+400s+2000}{s^2+20s+199} \end{bmatrix} \quad (4.2.20)$$

$$K_\psi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+2000s+10000}{s^2+20s+199} & \frac{20s^2+400s+2000}{s^2+20s+199} \end{bmatrix}. \quad (4.2.21)$$

Se utiliza el esquema de control *maestro-esclavo* de un parámetro de la Fig. 3.1, para la *d.i.* $x(t)$ que es controlado por la *d.d.* $\psi(t)$. Así, la *f.c.d.* y *f.c.i.* dadas en (3.3.3), y la solución de la ecuación Diophantina presentada en (3.3.4) para el esquema de control *maestro-esclavo* de un parámetro de la Fig. 3.1, donde $T_o(s)$ es la función complementaria de un parámetro dado por (3.2.15) de la *d.d.* $y(t)$

y $\psi(t)$, y $P_i(s)$ es la planta de la *d.i.* $x(t)$ en (3.2.18), es,

$$\left. \begin{aligned} N_e(s) &= \frac{1}{(s+10)^4} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}; \quad D_e(s) = \frac{s^2}{s^2+2000s+10000} \\ \tilde{D}_e(s) &= \frac{s^2}{s^2+20s+100} I_2 \\ \tilde{N}_e(s) &= \frac{s^2+2000s+10000}{s^6+60s^5+1500s^4+20000s^3+150000s^2+600000s+1000000} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\ X_e(s) &= \begin{bmatrix} 10000 & 4000 \end{bmatrix} \\ Y_e(s) &= \frac{s^4+2040s^3+90600s^2+1600000s+6000000}{s^4+40s^3+600s^2+4000s+10000} \end{aligned} \right\} \in \mathfrak{RH}_\infty. \quad (4.2.22)$$

Así, utilizando (3.5.12) se fija el parámetro libre r_e resolviendo el problema de sensibilidad mezclada para el esquema de control maestro-esclavo de un parámetro de la Fig. 3.1. Como el elemento A_{21i} es singular, su inversa $A_{21i}^{-1} \rightarrow \infty$, por lo tanto, se propone el siguiente parámetro libre del esquema de control *maestro-esclavo* de un parámetro,

$$r_e = 0. \quad (4.2.23)$$

De manera que, sustituyendo (4.2.23) y (4.2.22) en (2.3.10), se obtiene el controlador estabilizante de un parámetro para el esquema de control *maestro-esclavo* de la Fig. 3.1,

$$K_e(s) = \frac{s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10000}{s^4 + 2040s^3 + 90600s^2 + 1600000s + 6000000} \begin{bmatrix} 10000 \\ 4000 \end{bmatrix}^T. \quad (4.2.24)$$

Se quiere llevar de la posición o condiciones iniciales $x(t) = 0$ y $y(t) = 0$, a la posiciones deseadas $x_d = 3$ y $y_d = 7$, luego a $x_d = 6$ y $y_d = 14$, y por último llevandolo a la posición $x_d = 12$ y $y_d = 0$. La Fig. 4.2 muestra una visualización del movimiento deseado de la Fig. 4.1, que implican las posiciones deseadas dadas.

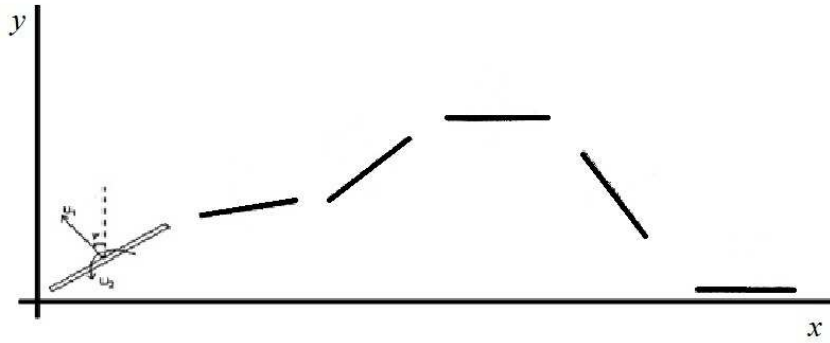


Figura 4.2: Visualización del movimiento deseado para el PVTOL linealizado.

Usando MATLAB Simulink, en la Fig. 4.3 se muestra el esquema de control *maestro-esclavo* de un parámetro con perturbación aditiva a la salida d_o , cuya *d.d.* es $\psi(t)$, y la *d.i.* es $x(t)$. Mientras que la *d.d.* independiente es $y(t)$.

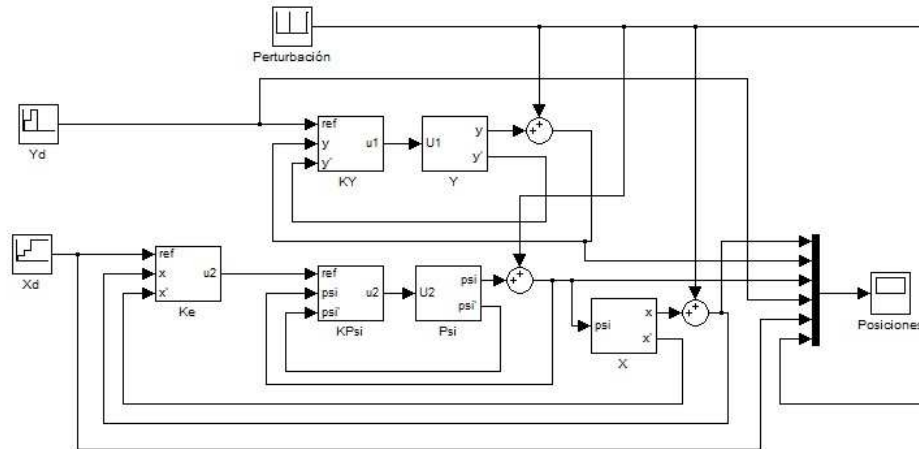


Figura 4.3: Esquema de MATLAB Simulink, simulación del PVTOL linealizado.

Se muestra a continuación en la Fig. 4.4 la simulación realizada para este ejemplo de cadena de integradores, como caso lineal del PVTOL en el esquema de simulación de la Fig. 4.3, dadas las

posiciones deseadas semejante al movimiento de la Fig. 4.2, con perturbaciones a la salida d_o .

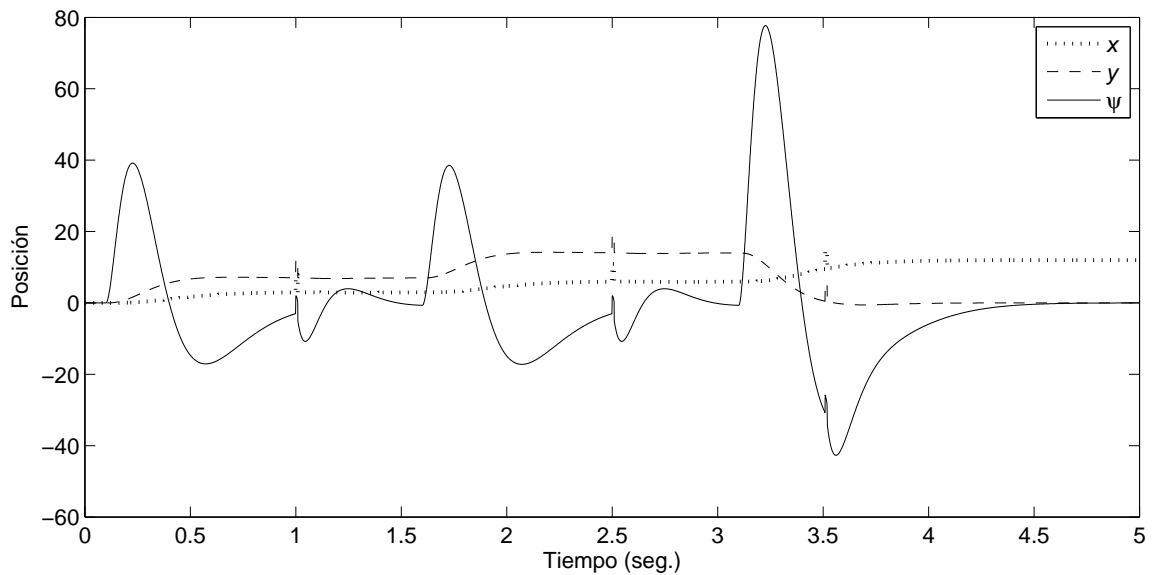


Figura 4.4: Simulación de posiciones deseadas del PVTOL linealizado.

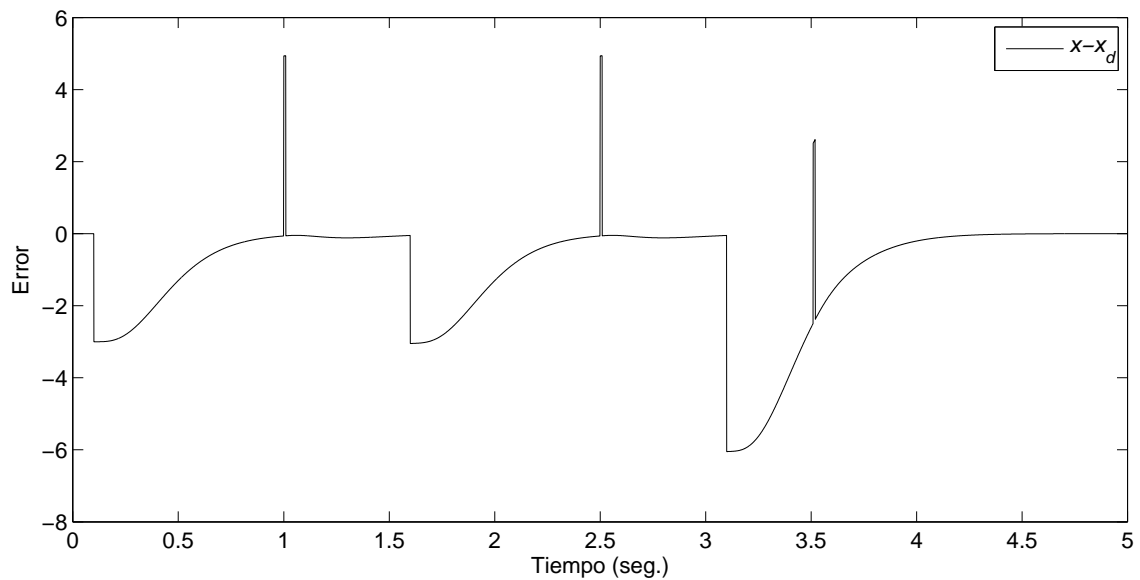


Figura 4.5: Simulación del error de la posición x del PVTOL linealizado.

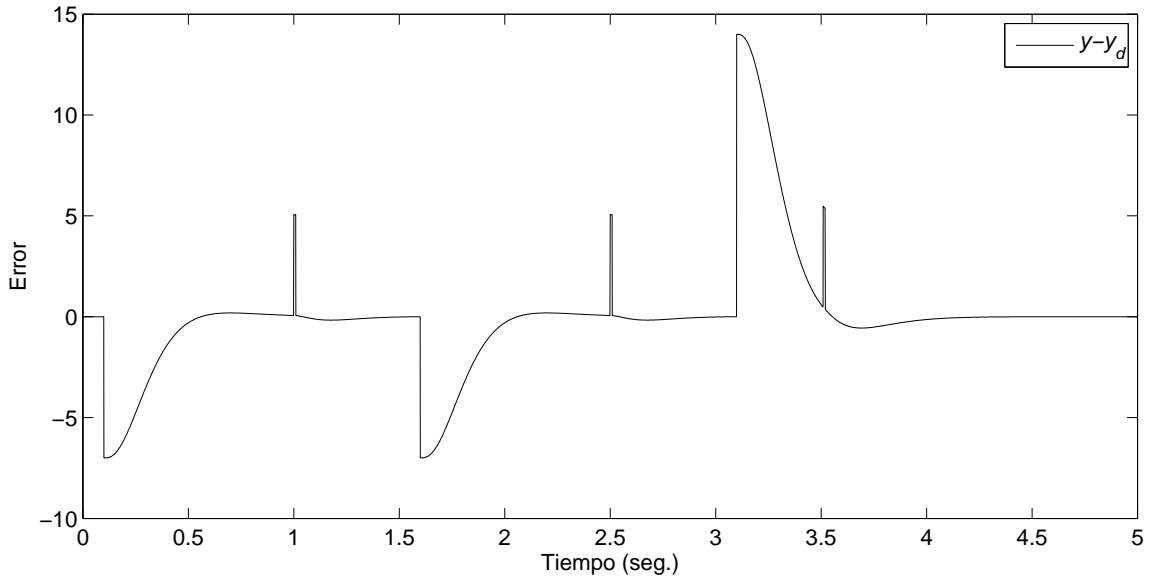


Figura 4.6: Simulación del error de la posición y del PVTOL linealizado.

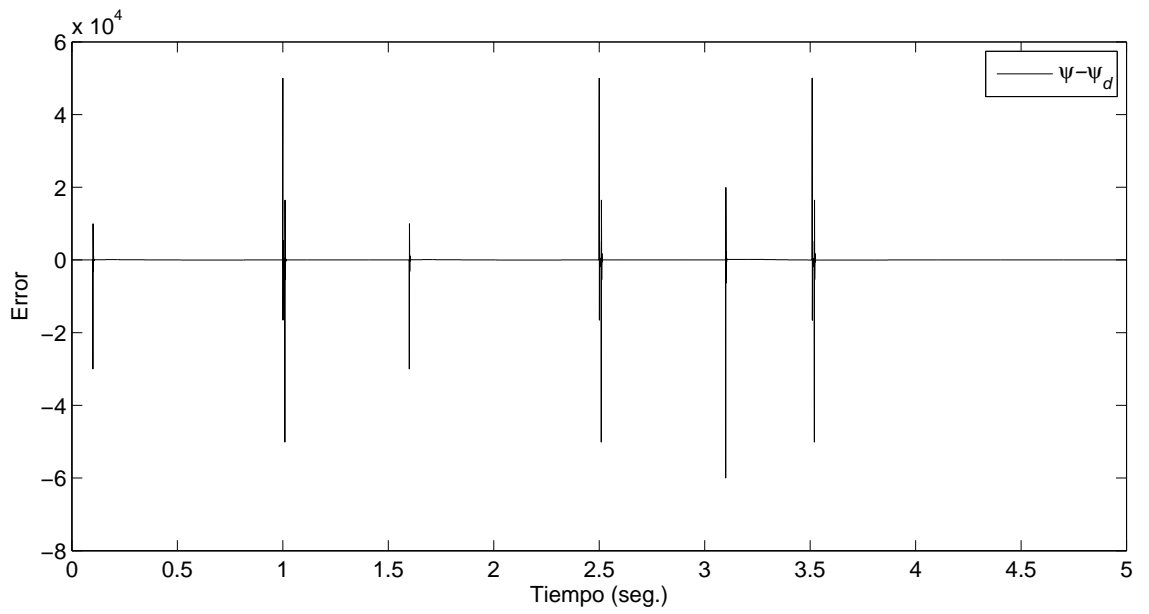


Figura 4.7: Simulación del error de la posición ψ del PVTOL linealizado.

En la Fig. 4.4, se observa que efectivamente se siguen las referencias de $x(t)$, $y(t)$ y $\psi(t)$. Siendo las *d.d.* $y(t)$ y $\psi(t)$, y la *d.i.* $x(t)$ controlada por la *d.d.* $\psi(t)$ con un controlador estabilizante en el esquema *maestro-esclavo* de un parámetro, aplicado en la Fig. 4.3, resolviendo un problema de sensibilidad mezclada para obtener desempeño y estabilidad, atenuando la perturbación aditiva a la salida d_o .

En las Figs. 4.5, 4.6 y 4.7, se observa el error de las posiciones $x(t)$, $y(t)$ y $\psi(t)$ respectivamente. La adición de una perturbación a la salida de la planta y al cambiar las referencias a las posiciones deseadas, el error se presenta pero converge a cero, debido a los controladores estabilizantes y a la sensibilidad mezclada.

Si se incrementa a , la velocidad de respuesta del controlador en el sistema es más rápida y demanda más energía en los actuadores, por lo cual, se deja a criterio el valor deseado de a del sistema dependiendo de las características admisibles del sistema.

En la siguiente sección, se aborda otro ejemplo para esta tesis, donde se aplican los resultados del capítulo 3 para controlar al sistema no lineal Pendubot.

4.3. Pendubot

4.3.1. Introducción

En este capítulo, se abordará el ejemplo del sistema electromecánico subactuado denominado Pendubot, ya que este sistema cuenta con el acoplamiento entre dos eslabones; el primer eslabón está conectado al actuador y el segundo eslabón depende de la posición y movimiento del anterior.

Debido a que se desea un alcanzar punto de operación inestable, el Pendubot es un ejemplo más de estudio para aplicar la teoría de control. Se procederá en aplicar la transformación del modelo E-L de la sección 3.2, en el modelo E-L para subactuados dado en el capítulo 2 de Antecedentes.

Posteriormente se aplican los resultados sobre sensibilidad mezclada de la sección 3.4, el esquema *maestro-esclavo* para la *d.d.* y la *d.i.* de la sección 3.5 y la obtención de los controladores estabilizantes de dos parámetros de la sección 3.3, con el fin de obtener desempeño y regulación. El objetivo es llevar ambos eslabones desde Bottom Position (Posición Inferior) ($q_1 = \frac{-\pi}{2}$ y $q_2 = 0$) a Top Position (Posición Superior) ($q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$) con respecto a la Fig. 4.8.

Finalmente, mostrar los resultados obtenidos en la simulación, observando el comportamiento del controlador lineal diseñado en el sistema no lineal. En la Fig. 4.8 se muestra el diagrama utilizado del sistema Pendubot (ver [4]).

4.3.2. Desarrollo

Se da la ecuación dinámica dada en [4] en la forma E-L dada por la ecuación (2.2.3), donde

$$M(q(t)) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2(t) & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

$$C(q(t), \dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin(q_2(t))\dot{q}_2(t) & -\theta_3 \sin(q_2(t))\dot{q}_2(t) - \theta_3 \sin(q_2(t))\dot{q}_1(t) \\ \theta_3 \sin(q_2(t))\dot{q}_1(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

$$G(q(t)) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1(t) + \theta_5 g \cos(q_1(t) + q_2(t)) \\ \theta_5 g \cos(q_1(t) + q_2(t)) \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

siendo,

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0761 \\ 0.0662 \\ 0.0316 \\ 0.9790 \\ 0.3830 \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

donde $\theta_1 := m_1 L_{c1}^2 + m_2 L_1^2 + I_1$, $\theta_2 := m_2 L_{c2}^2 + I_2$, $\theta_3 := m_2 L_1 L_{c2}$, $\theta_4 := m_1 L_{c1} + m_2 L_1$ y $\theta_5 := m_2 L_{c2}$, m_i es la masa del eslabón i ; L_i es la longitud total del eslabón i ; L_{ci} es la distancia al

centro de masa del eslabón i ; I_i es el momento de inercia del eslabón i , alrededor de este centroide y g la aceleración de la gravedad.

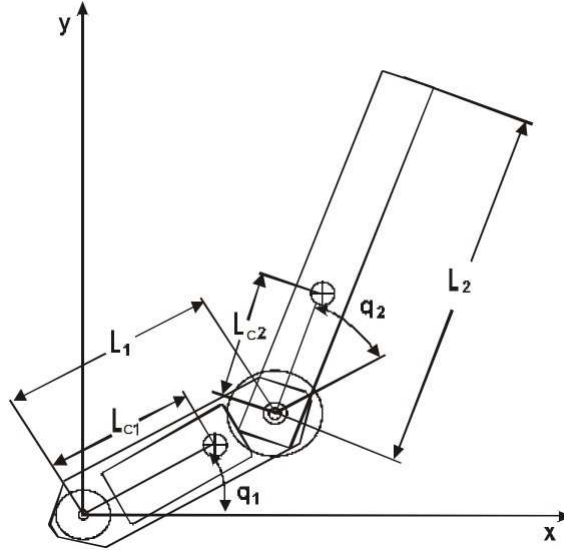


Figura 4.8: Pendubot.

Se obtiene el modelo E-L transformado para subactuados, usando la matriz de transformación dada por (3.2.6), obtenida a partir de la linealización en los puntos de equilibrio de Top Position (Posición Superior) del elemento $M^{-1}(q(t))\tau(t)$, esto es,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2} & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(\theta_2 + \theta_3)}{\theta_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

y el modelo E-L transformado subactuado dado en (3.2.9) linealizado en los puntos de equilibrio de Top Position (Posición Superior) ($q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$) a partir de (4.3.5), queda como sigue,

$$\ddot{\bar{q}}_1(t) = \frac{-(g)(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \bar{q}_1(t) - \frac{(g)(\theta_3\theta_5)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \bar{q}_2(t) + \frac{\theta_2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \tau_1(t) \quad (4.3.6)$$

$$\ddot{\bar{q}}_2(t) = \frac{-(g)(\theta_3^2\theta_5 - \theta_1\theta_2\theta_5)}{\theta_2(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)} \bar{q}_1(t) - \frac{(g)(\theta_3^2\theta_5 - \theta_1\theta_2\theta_5)}{\theta_2(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)} \bar{q}_2(t). \quad (4.3.7)$$

Entonces, la representación en variables de estado del sistema asociado a la *d.d.* dada por (4.3.6), se desarrolla como sigue: se propone $\tau_1(t)$ de manera que cancele una parte de la dinámica de $\bar{q}_2(t)$

en (4.3.6), esto es,

$$\tau_1(t) = \frac{(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)\tilde{\tau}_1(t)}{\theta_2} + \frac{(g)(\theta_3\theta_5)}{\theta_2}\bar{q}_2(t). \quad (4.3.8)$$

Así, sustituyendo (4.3.8) en (4.3.6), se tiene que,

$$\ddot{\bar{q}}_1(t) = \frac{-(g)(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2}\bar{q}_1(t) + \tilde{\tau}_1(t). \quad (4.3.9)$$

Definiendo para la *d.d.* dada por (4.3.9)

$$\begin{aligned} x_{1d}(t) &:= \bar{q}_1(t) & \iff & \dot{x}_{1d}(t) = x_{2d}(t) \\ x_{2d}(t) &:= \dot{\bar{q}}_1(t) & \iff & \dot{x}_{2d}(t) = \ddot{\bar{q}}_1(t) \end{aligned}, \quad (4.3.10)$$

la representación en variables de estado de la *d.d.* es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1d}(t) \\ \dot{x}_{2d}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(g)(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1d}(t) \\ x_{2d}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\tau}_1(t). \quad (4.3.11)$$

Así, definiendo para la *d.i.* dada por (4.3.7),

$$\begin{aligned} x_{1i}(t) &:= \bar{q}_2(t) & \iff & \dot{x}_{1i}(t) = x_{2i}(t) \\ x_{2i}(t) &:= \dot{\bar{q}}_2(t) & \iff & \dot{x}_{2i}(t) = \ddot{\bar{q}}_2(t) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

la representación en variables de estado de la *d.i.*, en la cual su entrada es la posición de la *d.d.* ($x_{1d}(t)$) del primer eslabón, esto es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1i}(t) \\ \dot{x}_{2i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(g)(\theta_3^2\theta_5 - \theta_1\theta_2\theta_5)}{\theta_2(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-(g)(\theta_3^2\theta_5 - \theta_1\theta_2\theta_5)}{\theta_2(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)} \end{bmatrix} x_{1d}(t), \quad (4.3.13)$$

donde (4.3.11) y (4.3.13), tienen la forma (2.2.2) y cumplen con la condición $n = 2m$.

Resolviendo el problema de sensibilidad mezclada para fijar los parámetros r y q dados por (3.4.3) y (3.4.4) respectivamente, ambos definidos en (3.4.2), para el controlador de dos parámetros dado en (2.3.10) en el esquema de control de la Fig. 2.2, para la *d.d.* dada por (4.3.11), con un $a = 80$ y una $\omega_h = 1000$, se tiene que,

$$r_d = -6487.7 \quad (4.3.14)$$

y

$$q_d = 864.8649 \quad (4.3.15)$$

La *f.c.d.* y la *f.c.i.* dadas por (2.3.8) y (2.3.9) respectivamente, y la solución de la ecuación Diophantina dada por (2.3.11) de la *d.d.* dada por (4.3.11) es,

$$\left. \begin{aligned} N_d(s) = \tilde{N}_d(s) &= \frac{1}{(s+80)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} & D_d(s) &= \frac{s^2-127.9}{(s+80)^2} \\ \tilde{D}_d(s) &= \frac{s^2-127.9}{(s+80)^2} I_2 \\ X_d(s) &= \begin{bmatrix} 6527.9 & 160 \end{bmatrix} & Y_d(s) &= 1 \end{aligned} \right\} \mathcal{RH}_\infty, \quad (4.3.16)$$

y la *f.c.d.* y la *f.c.i.* dadas por (2.3.8) y (2.3.9) respectivamente, y la solución de la ecuación Diophantina dada por (2.3.11) de la *d.i.* dada por (4.3.13) es,

$$\left. \begin{aligned} N_i(s) &= \frac{1}{(s+80)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} & D_i(s) &= \frac{0.01763s^2-1}{(s+80)^2} \\ \tilde{D}_i(s) &= \frac{s^2-56.72}{(s+80)^2} I_2 & \tilde{N}_i(s) &= \frac{1}{(s+80)^2} \begin{bmatrix} 56.721 \\ 56.721s \end{bmatrix} \\ X_i(s) &= \begin{bmatrix} 6456.7 & 160 \end{bmatrix} & Y_i(s) &= 56.7210 \end{aligned} \right\} \mathcal{RH}_\infty. \quad (4.3.17)$$

Utilizando (4.3.16), (4.3.14) y (4.3.15) en (2.3.10) del esquema de la Fig. 2.2, se obtienen los controladores dos parámetros para la *d.d.*,

$$K_d(s) = \begin{bmatrix} \frac{40.25s^2+1044000s+42610000}{s^2+160s+12890} & \frac{160s^2+25600s+1024000}{s^2+160s+12890} \end{bmatrix} \quad (4.3.18)$$

y

$$K_{rd}(s) = \begin{bmatrix} \frac{864.9s^2+138400s+5535000}{s^2+160s+12890} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.19)$$

La función sensibilidad complementaria de dos parámetros está dada por (3.2.17), la *d.d.* por (4.3.11) y el parámetro libre por (4.3.15) utilizados en el esquema de control *maestro-esclavo* de dos parámetros de la Fig. 3.2, donde se resuelve el problema de sensibilidad mezclada para el esquema *maestro-esclavo* de dos parámetros. Entonces, la función de sensibilidad complementaria de dos

parámetros de la *d.d.* en el esquema de la Fig. 2.2, es,

$$T_o(s) = \frac{864.9}{(s+80)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.20)$$

De (4.3.20) se toma el elemento $T_{o(1,1)}$, ya que es la información que brinda la posición del eslabón $q_1(t)$, y que se pueda multiplicar por la *f.c.d.* y la *f.c.i.* de la *d.i.* (4.3.17), puesto que los demás elementos de (4.3.20) contienen información de la derivada de la posición y su referencia es considerada cero, esto es,

$$T_{o(1,1)}(s) = \frac{864.9}{(s+80)^2}. \quad (4.3.21)$$

Los parámetros libres r_e y q_e dados por (3.5.12) y (3.5.13) respectivamente, en el esquema de control *maestro-esclavo* de dos parámetros de la Fig. 3.2, con los mismos valores de $a = 80$ y $\omega_h = 1000$, son,

$$r_e = 10847000 \quad (4.3.22)$$

y

$$q_e = 39348000. \quad (4.3.23)$$

Del esquema de la Fig. 3.2, se obtiene $P_n(s)$ dado por (3.2.18) a partir de (4.3.21) y $P_i(s)$ de la *f.c.d.* y la *f.c.i.* de la *d.i.*. Por lo tanto, la *f.c.d.* y la *f.c.i.* dados por (3.3.11) de $P_n(s)$ y la solución de la ecuación Diophantina propuesta en (3.3.12) son,

$$\left. \begin{aligned} N_e(s) &= \frac{1}{s^4+320s^3+38400s^2+2048000s+40960000} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\ D_e(s) &= \frac{0.00002038s^2-0.001156}{(s+80)^2} \\ \tilde{N}_e(s) &= \frac{49060}{s^4+320s^3+38400s^2+2048000s+40960000} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\ \tilde{D}_e(s) &= \frac{s^2-56.72}{(s+80)^2} I_2 \\ X_e &= \begin{bmatrix} 43141000 & 2066000 \end{bmatrix} \\ Y_e &= \frac{49060s^2+15700000s+1887000000}{(s+80)^2} \end{aligned} \right\} \mathcal{RH}_\infty. \quad (4.3.24)$$

Así, sustituyendo (4.3.24) en (2.3.10) se obtienen los controladores estabilizantes de dos parámetros en el esquema de control maestro-esclavo de la Fig. 3.2, para el modelo lineal transformado (4.3.6) y (4.3.7), estos son,

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{1101s^4 + 3.168 \times 10^5 s^3 + 3.517 \times 10^7 s^2 + 1.799 \times 10^9 s + 3.594 \times 10^{10}}{s^4 + 480s^3 + 9.606 \times 10^4 s^2 + 8.201 \times 10^6 s + 2.353 \times 10^8} \\ \frac{42.12s^4 + 1.348 \times 10^4 s^3 + 1.617 \times 10^6 s^2 + 8.626 \times 10^7 s + 1.725 \times 10^9}{s^4 + 480s^3 + 9.606 \times 10^4 s^2 + 8.201 \times 10^6 s + 2.353 \times 10^8} \end{bmatrix}^T \quad (4.3.25)$$

y

$$K_{re}(s) = \begin{bmatrix} \frac{802.1s^4 + 2.567 \times 10^5 s^3 + 3.08 \times 10^7 s^2 + 1.643 \times 10^9 s + 3.285 \times 10^{10}}{s^4 + 480s^3 + 9.606 \times 10^4 s^2 + 8.201 \times 10^6 s + 2.353 \times 10^8} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.26)$$

En la Fig. 4.9, se muestra la implementación del esquema de control maestro-esclavo de dos parámetros en el programa de MATLAB Simulink. En la Fig. 4.10 se muestra la simulación correspondiente a las posiciones de los eslabones q_1 y q_2 , y con una perturbación a la salida de q_2 , y en la Fig. 4.13 se muestra la animación de [4] del Pendubot.

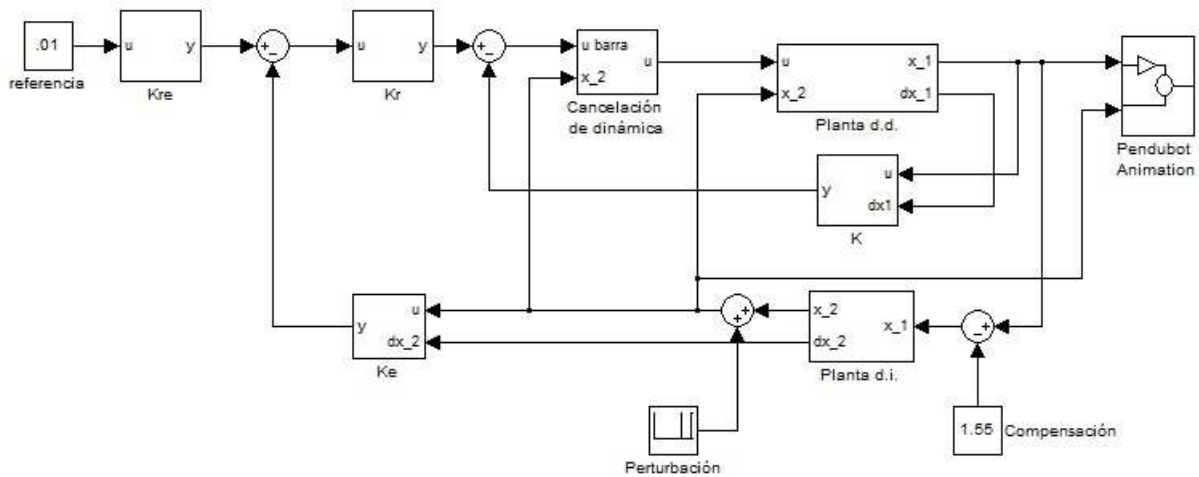


Figura 4.9: Sistema de control *maestro-esclavo* de dos parámetros del modelo lineal del Pendubot.

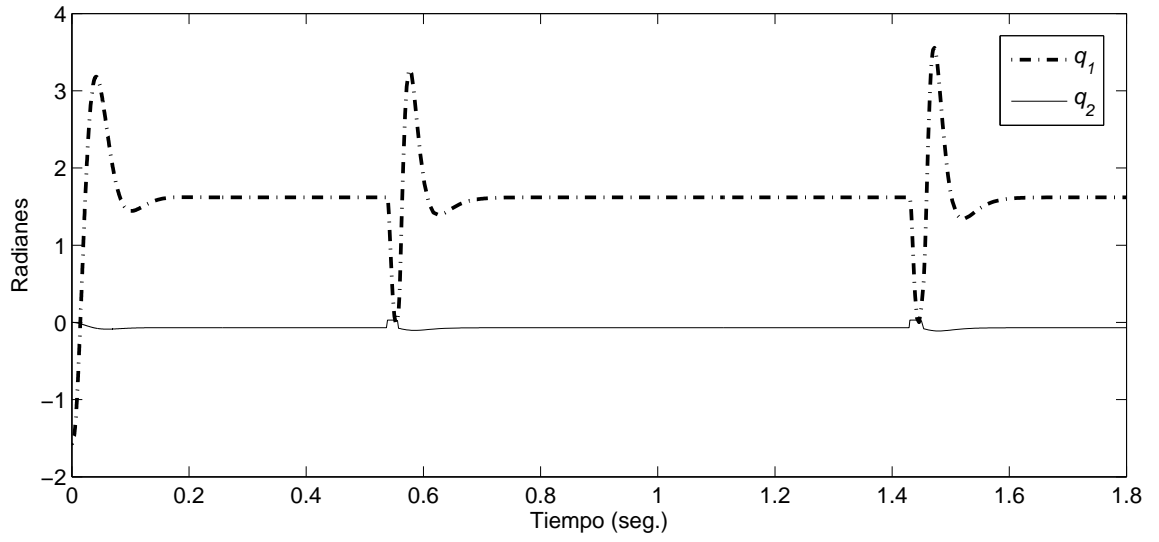


Figura 4.10: Posiciones de los eslabones q_1 y q_2 del modelo lineal del Pendubot.

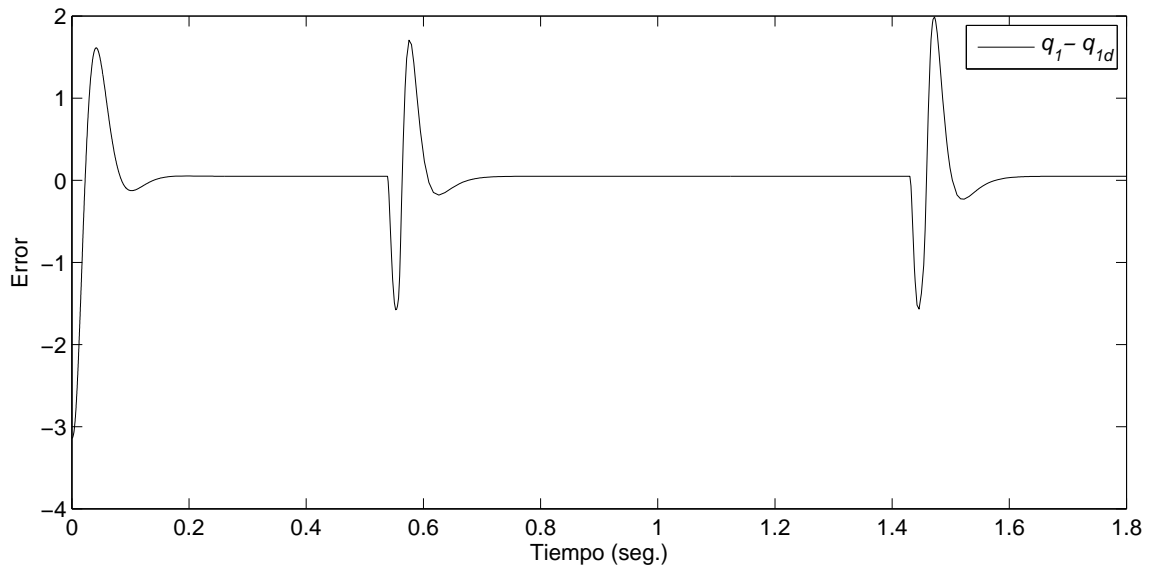


Figura 4.11: Error de posición del eslabón q_1 del modelo lineal del Pendubot.

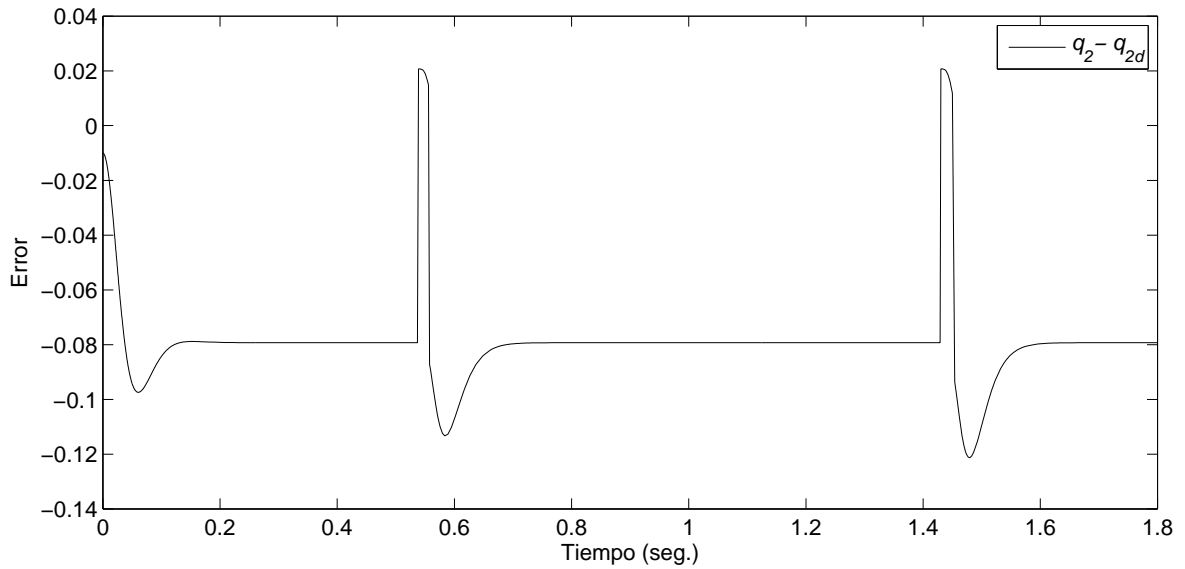


Figura 4.12: Error de posición del eslabón q_2 del modelo lineal del Pendubot.

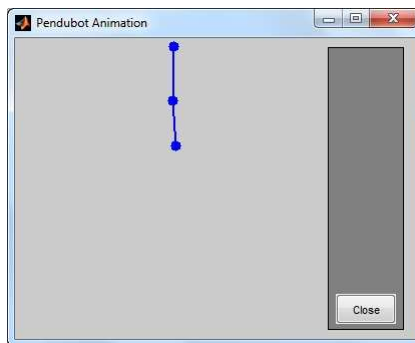


Figura 4.13: Animación del modelo lineal del Pendubot.

En el esquema de la Fig. 4.9, se observa que se quita una compensación a la entrada de $q_2(t)$ correspondiente a la *d.i.*, ya que sin esta compensación el eslabón q_2 no sigue a la referencia deseada q_{2d} , sino a la referencia $q_1 \approx \frac{\pi}{2}$. En la Fig. 4.10, se observa que la perturbación en q_2 es atenuada gracias a que el problema de sensibilidad mezclada es resuelto. Como se puede observar en las Figs. 4.11, 4.12 y 4.13, existe un error en estado estacionario, puesto que (3.5.13) no es la única solución,

se propone aplicar una ganancia heurística obtenida experimentalmente a (4.3.23) para obtener una mejor regulación, esto es,

$$q_e = 5 * (39348000), \quad (4.3.27)$$

con lo cual,

$$K_{re}(s) = \begin{bmatrix} \frac{5(802.1s^4 + 2.567 \times 10^5 s^3 + 3.08 \times 10^7 s^2 + 1.643 \times 10^9 s + 3.285 \times 10^{10})}{s^4 + 480s^3 + 9.606 \times 10^4 s^2 + 8.201 \times 10^6 s + 2.353 \times 10^8} \\ 0 \end{bmatrix}^T. \quad (4.3.28)$$

Se observa mejoría en las posiciones de los eslabones ($q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$) del modelo lineal del Pendubot en las gráficas de las Figs. 4.14, 4.15, 4.16 y 4.17, debido a que el parámetro que afecta a la regulación q_e es más grande y a la compensación substraída a la entrada de la planta del eslabón $q_2(t)$.

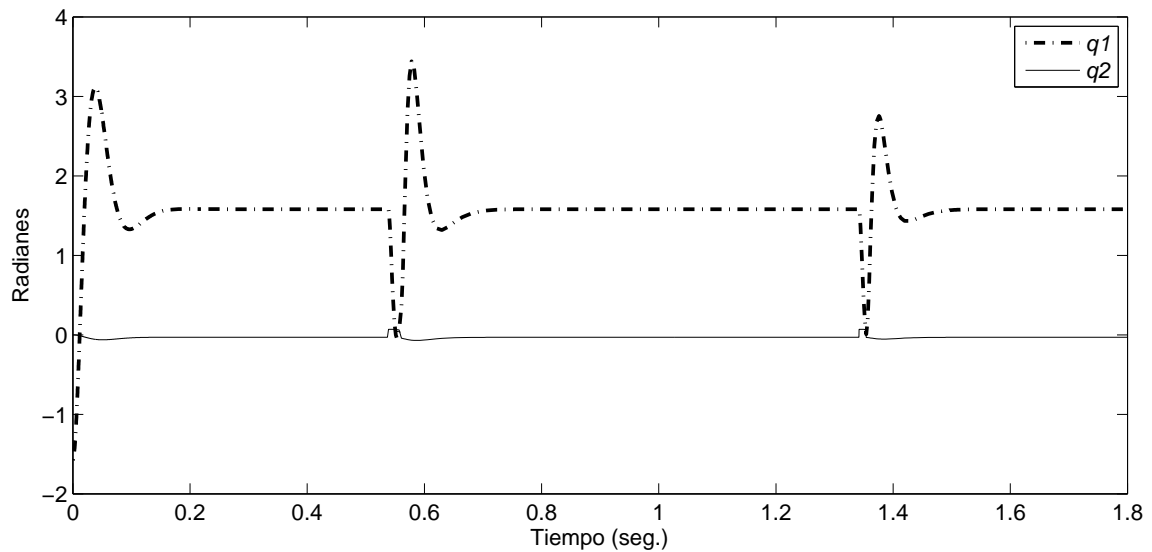


Figura 4.14: Posiciones de los eslabones q_1 y q_2 del modelo lineal del Pendubot, en Top Position.

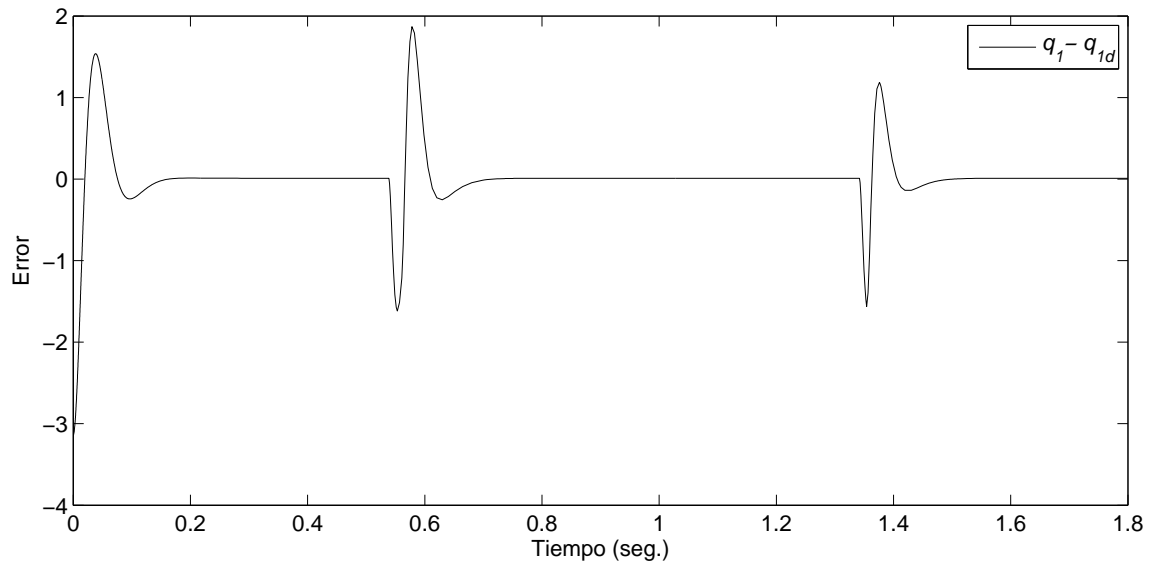


Figura 4.15: Error de posición del eslabón q_1 del modelo lineal del Pendubot, en Top Position.

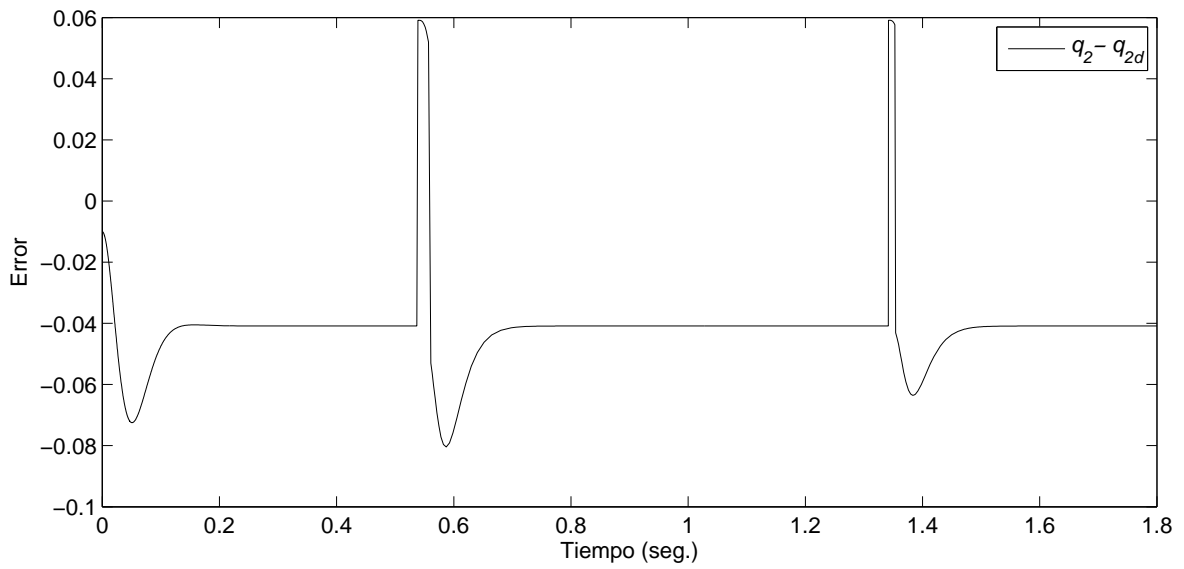


Figura 4.16: Error de posición del eslabón q_2 del modelo lineal del Pendubot, en Top Position.

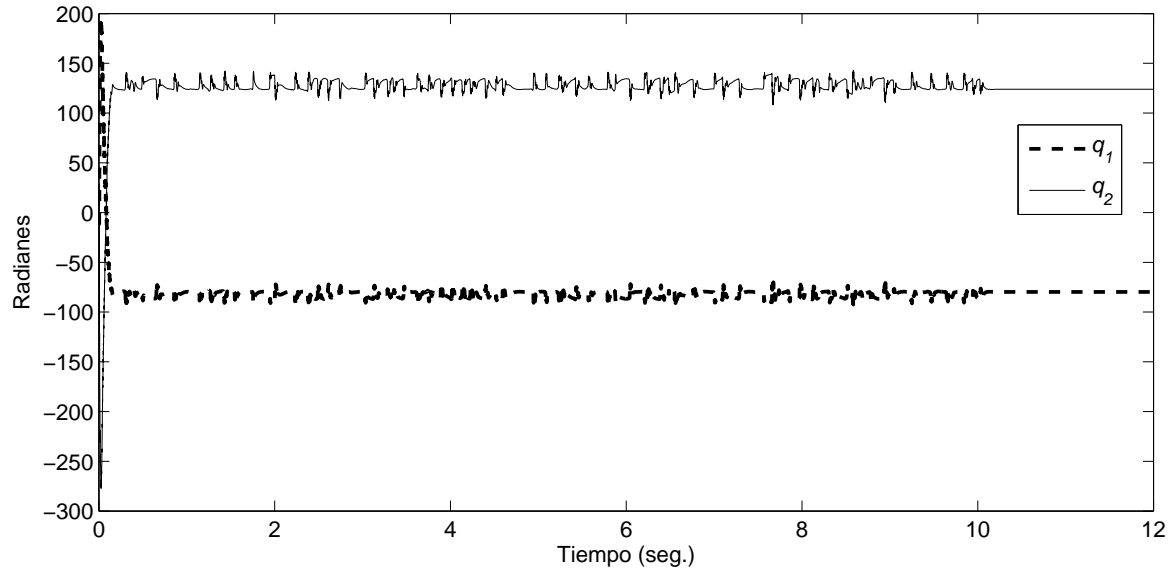


Figura 4.19: Posiciones de los eslabones q_1 y q_2 del modelo no lineal del Pendubot.

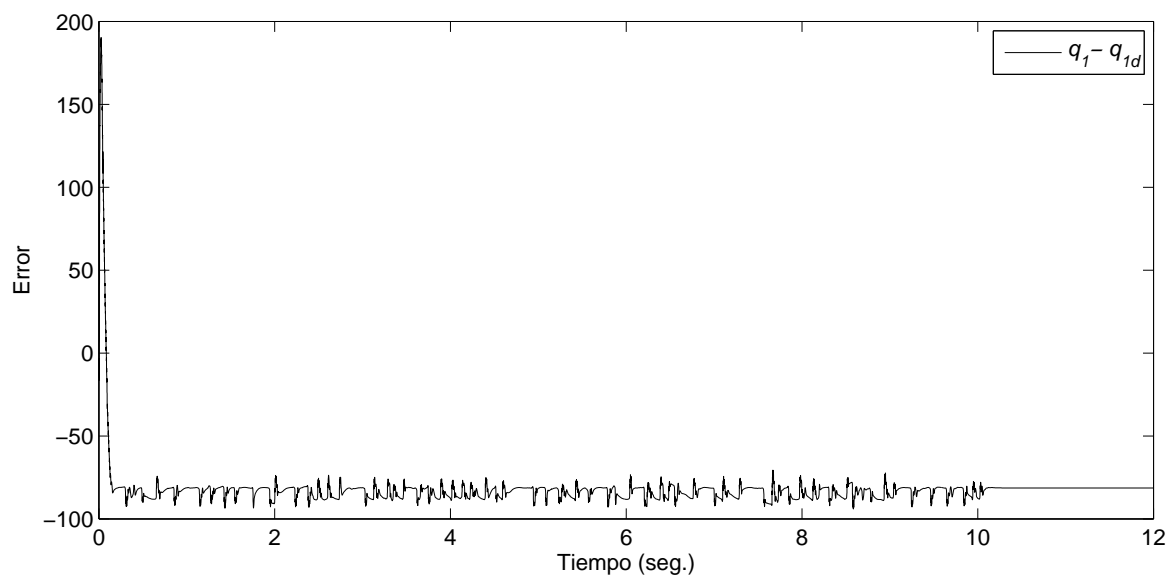


Figura 4.20: Error de posición del eslabón q_1 del modelo no lineal del Pendubot.

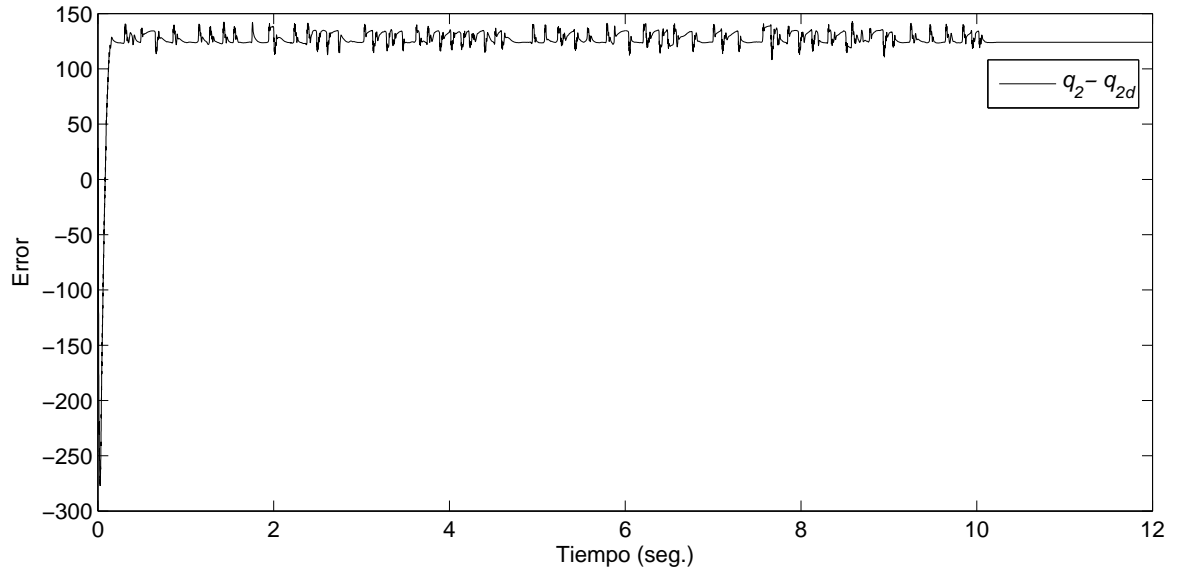


Figura 4.21: Error de posición del eslabón q_2 del modelo no lineal del Pendubot.

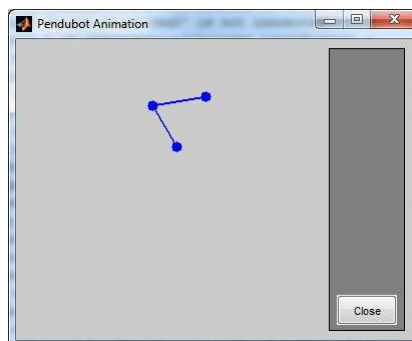


Figura 4.22: Animación del modelo no lineal del Pendubot.

Como se muestra en las gráficas de las Figs. 4.19, 4.20, 4.21 y 4.22, no se obtiene un resultado admisible, puesto que en la Fig. 4.22 el Pendubot tiene una posición no realizable, ya que el eslabón $q_2(t)$ es no actuado y no puede tener esa posición, aunque la animación así lo presente. De manera que se opta por mejorar la regulación, aplicando una ganancia heurística obtenida similarmente al modelo

lineal para obtener un resultado admisible, de manera que,

$$q_e = 15.35 * (39348000), \quad (4.3.29)$$

para el cual,

$$K_{re}(s) = \begin{bmatrix} \frac{15,35(802.1s^4 + 2.567 \times 10^5 s^3 + 3.08 \times 10^7 s^2 + 1.643 \times 10^9 s + 3.285 \times 10^{10})}{s^4 + 480s^3 + 9.606 \times 10^4 s^2 + 8.201 \times 10^6 s + 2.353 \times 10^8} \\ 0 \end{bmatrix}^T. \quad (4.3.30)$$

Por lo que se observa una mejoría en las posiciones en las gráficas de las Figs. 4.23 y 4.26, gracias a que el parámetro q_e afecta a la regulación es más grande (4.3.29). Una desventaja, es que en el modelo no lineal del Pendubot, los controladores tardan más tiempo en llevar al sistema a los puntos de referencia deseados con respecto a la Fig. 4.14, aunque en la Fig. 4.26 se visualiza la posición deseada Top Position (Posición superior) ($q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$), no es la referencia de los puntos de equilibrio deseado ($q_1 = 523.0447$ y $q_2 = -766.5078$), pero se logra la posición Top Position (Posición superior).

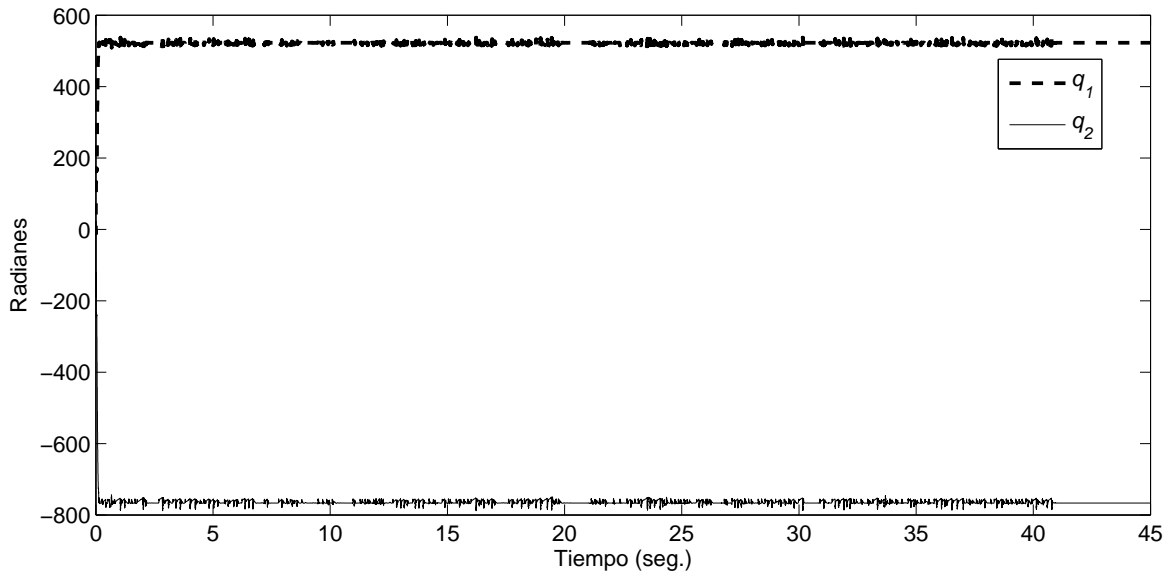


Figura 4.23: Posiciones de los eslabones q_1 y q_2 del modelo no lineal del Pendubot, en Top Position.

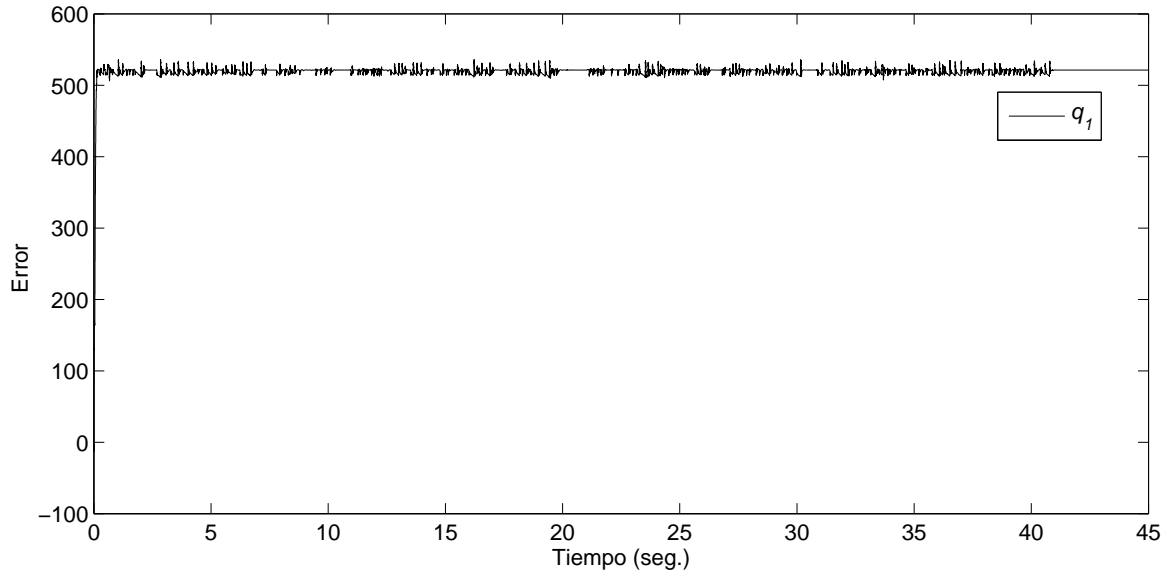


Figura 4.24: Error de posición del eslabón q_1 del modelo no lineal del Pendubot, en Top Position.

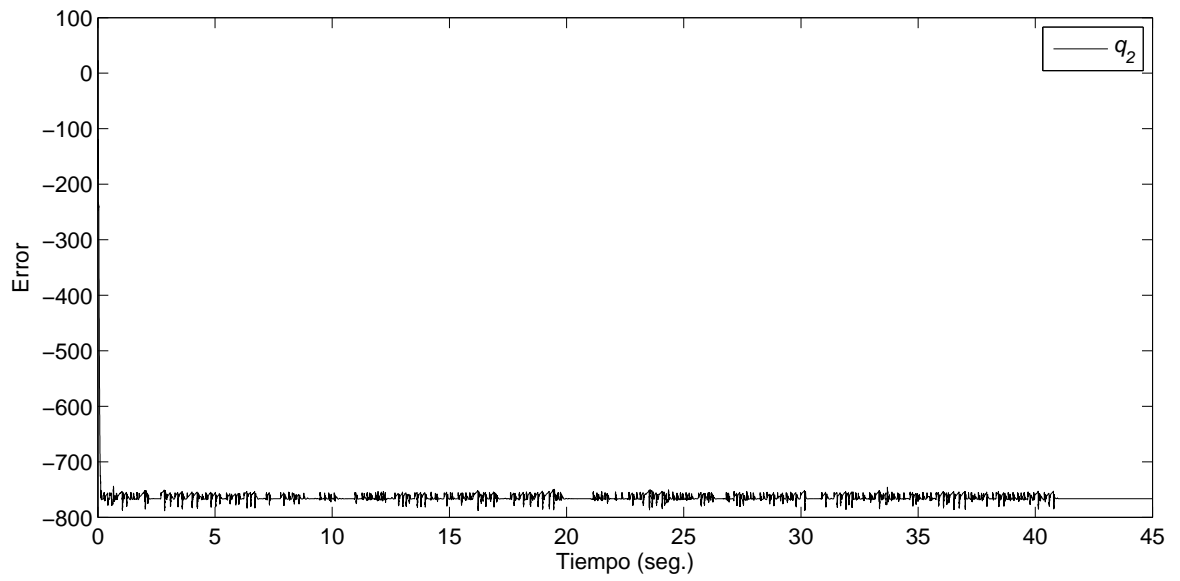


Figura 4.25: Error de posición del eslabón q_2 del modelo no lineal del Pendubot, en Top Position.

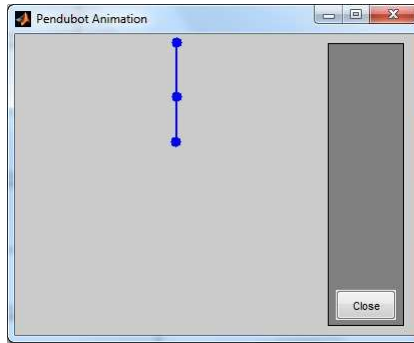


Figura 4.26: Animación del modelo no lineal del Pendubot, en Top Position.

En las Figs. 4.19 y 4.23, se preserva la estabilidad del sistema en lazo cerrado a pesar de las dinámicas no lineales, debido a la solución del problema de sensibilidad mezclada y de la parametrización de los controladores estabilizantes.

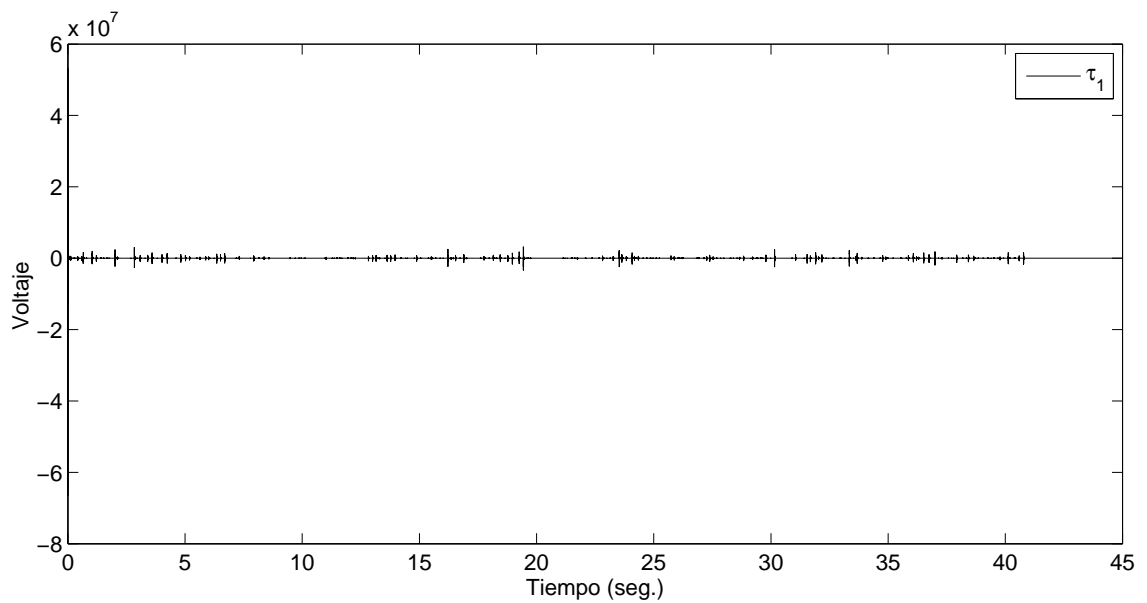


Figura 4.27: Energía aplicada a eslabón q_1 de τ_1 .

De la Fig. 4.27, se observa la cantidad de energía requerida por los controladores que necesita el

motor del eslabón q_1 , por lo cual es inadmisibile. Esto se debe al valor elevado del parámetro a , y dado que este valor elevado se requiere para el desempeño, el controlador es teóricamente aplicable globalmente, pero no lo es prácticamente. Es indispensable un controlador no lineal o un lineal variante en el tiempo que lo acerque al punto de equilibrio, para luego conmutar al controlador diseñado en esta tesis cerca de los puntos de operación deseados.

En el siguiente capítulo, se presentan las conclusiones de toda la tesis, así como de los resultados obtenidos, y también de los ejemplos mostrados y sus respectivas simulaciones.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

Se consideran sistemas MEMS, de parámetros concentrados, LIT y fuertemente estabilizables con una realización estabilizable. En particular, se consideran sistemas linealizados Euler-Lagrange completamente actuados. Los estados están dados por las coordenadas generalizadas de posición y de velocidad.

Esta clase de sistemas se requiere transformar para sistemas subactuados, tal que en un esquema maestro-esclavo cada parte tenga una estructura de la representación en variables de estado dada.

El enfoque utilizado es aplicar resultados algebraicos sobre una planta en términos de su realización en espacio de estados. Se presentan factorizaciones coprimas derecha e izquierda sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables. Además, se propone una solución de la ecuación Diophantina para sistemas con información completa del estado, y expresiones analíticas para la familia de controladores estabilizantes de dos parámetros, para el esquema de control *maestro-esclavo*.

En este esquema el maestro está asociado a dinámicas que se controlan directamente, y estas variables se utilizan para controlar las dinámicas indirectas asociadas al esclavo. Se dan condiciones para obtener un controlador estable. Además, se presentan expresiones analíticas para los parámetros libres, resolviendo un criterio de sensibilidad mezclada para sistemas actuados con información

completa del estado y sistemas subactuados en el esquema de control *maestro-esclavo*.

Los resultados muestran que se logra desempeño y estabilidad mediante sensibilidad mezclada estabilizando al sistema a pesar de las perturbaciones a la entrada de la planta de la *d.i.* e incertidumbres que son atenuadas, y se tiene un pequeño valor del error en estado estacionario en la salida regulada; en el caso del Pendubot el error es mucho mayor, a pesar de que se logra la posición deseada y el desempeño no es del todo favorable. En las simulaciones se observó que si se asigna una dinámica más rápida con el parámetro a a los controladores estabilizantes, se obtiene una respuesta más rápida y con menor error en estado estacionario, esto demandaría más energía para los actuadores de los sistemas subactuados y generaría más desgaste de los mismos. Se recomienda asignar una dinámica con el parámetro a que proporcione una velocidad de respuesta aceptable, de manera que no se provoque desgaste innecesario para los actuadores. Al simular los controladores estabilizantes lineales robustos en los sistemas no lineales subactuados, se observó que se logran las posiciones deseadas a pesar de dinámicas no lineales e incertidumbres, gracias a que son globales y no necesitan conmutación entre controladores, gracias a los resultados dados en esta tesis que dan solución al problema de control para sistemas LIT subactuados.

5.1. Trabajos futuros

- Obtener la parametrización de los controladores estabilizantes y la solución del problema de sensibilidad mezclada para sistemas lineales variantes en el tiempo, para que los parámetros se auto-ajusten conforme evolucione el comportamiento del sistema en el tiempo.
- Transformar los resultados propuestos en el dominio discreto, para implementarlo a la aplicación de laboratorio del sistema Pendubot.
- Proponer una inversión de matrices para sistemas MEMS que no cumplan con la condición $n = 2m$.

- Se puede utilizar un controlador no-lineal o un controlador lineal variante en el tiempo inicialmente y conmutar al control lineal propuesto cerca de Top Position mejorando el desempeño en particular del control lineal aplicado al modelo no lineal.
- Solución general de la ecuación Diophantina y del problema de sensibilidad mezclada para sistemas MEMS subactuados en un esquema de control *maestro-esclavo*.
- Formalizar la compensación heurística propuesta para el problema de regulación de sistemas subactuados en el esquema de control *maestro-esclavo*.

Bibliografía

- [1] Galindo R., Lozano R., “Control of Under Actuated Systems. Application to a Tandem Fan in a 3-d.o.f.-Platform”, *Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 686-691, (2000).
- [2] Galindo R., “Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity”, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, vol. 223 (I7), pp. 957-971, (2009).
- [3] Galindo R., “Tuning of a Non-conventional Mixed Sensitivity \mathcal{H}_∞ control”, In the book *Emerging Technologies, Robotics and Control Systems*, second ed., InternationalSAR, and also in *Int. J. of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, vol. 2, pp. 141-149 and pp. 15-23, (2008).
- [4] Jerome D., “Mechanical design and control of the Pendubot”, Tesis de maestría de la Universidad de Illinois, (1996).
- [5] Vidyasagar M., *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, Massachusetts: The MIT Press Cambridge, (1985).
- [6] Zhou K., Doyle J. C. and Glover K., *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, (1996).
- [7] Desoer C. A., Liu R., Murray J. y Saeks R., “Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis”, *IEEE Trans. Automatic Control*, pp. 399–412, (1980).

- [8] Kučera V., *Discrete linear control, The polynomial equation approach*, Wiley, Chichester, (1979).
- [9] Youla D. C., Jabr H. A. Bongiorno J. J., “Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case”, *IEEE Trans. Automatic Control*, pp. 319–338, (1976).
- [10] Youla D. C., Bongiorno J. J. and Lu C. N., “Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants”, *Automatica*, pp. 159–173, (1974).
- [11] Nett C. N., Jacobson C. A. and Balas M. J., “A connection between state-space and doubly coprime fractional representations”, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 29, no. 9, pp. 831-832, (1984).
- [12] Wojciech Blajer, Krzysztof Kolodziejczyk, “Modeling of underactuated mechanical systems in partly specified motion”, *Journal of Theoretical and applied mechanics*, 46, 2, pp. 383-394, Warsaw, (2008).
- [13] Andrew R. Teel, Oliver E. Kaiser, Richard M. Murray, “Uniting Local and Global Controllers for the Caltech Ducted Fan”, *American Control Conference*, 1539 - 1543 vol.3, (1997).
- [14] James N. Rozak, Asok Ray, “Robust Multivariable Control of Rotorcraft in Forward Flight”, *Journal of the American Helicopter Society*, pp. 149-160, (1997).
- [15] Spong M.W., “The Swing Up Control Problem For The Acrobot”, *IEEE Control Systems*, pp. 49-55, (1995).
- [16] Doyle J. C., Francis B. A. y Tannenbaun A. R., *Feedback Control Theory*, McMillan, (1992).
- [17] Nehari Z., “On bounded bilinear forms”, *Ann. Math*, 65, 153-162, (1957).
- [18] Doyle J. C., Stein G., “Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis”, *IEEE Trans. Automatic Control*, 26, 4-16, (1981).

- [19] Francis B. A., Doyle J. C., “Linear control theory with an H_∞ optimality criterion”, *SIAM J. Control and Optimization*, 25, 815-844, (1987).
- [20] Glover K. “All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their \mathcal{L}_∞ -error bounds”, *Int. J. Control*, 39, 1115-1193, (1984).
- [21] Galindo R., Malabre M., Kučera V., “ \mathcal{H}_∞ control for LTI systems”, In Proceedings of Conference on *Decision and Control (CDC)*, 1331-1336, (2004).
- [22] Maciejowski J. M., “Multivariable Feedback Design”, *Addison Wesley*, 267-273, (1989).
- [23] Teel A., “Global Stabilization and Restricted Tracking for Multiple Integrators with Bounded Controls”, *Syst. and Control Letters*, vol. 18, 165-171, (1992).
- [24] Pérez Muñoz E., “Control Robusto de Bajo Orden Dinámico para Sistemas MIMO LTI Aplicación a un Pendubot”, *UANL*, (2004).
- [25] Galindo R., Carrasco L., Bonilla A. y Conejo C. D., “Analytic expression of the doubly coprime factorisation for square systems and mixed sensitivity”, *International Journal of Systems Science*, February, (2011).
- [26] Horowitz I., “Synthesis of Feedback Systems”, *Academic Press*, (1963).

PUBLICACIONES

Analytic expression of the doubly coprime factorisation for square systems and mixed sensitivity

R. Galindo^{a*}, L. Carrasco^a, A. Bonilla^a, and C. D. Conejo^a

^a*Av. Universidad s/n, 66450 San Nicolas de los Garza, Nuevo Leon, Mexico; Faculty of Electrical and Mechanical Engineering, Autonomous University of Nuevo Leon*

(v3.3 released February 2011)

An explicit formula of the doubly coprime factorisation for square systems is presented. Multi Input Multi Output (MIMO), strictly proper, lumped and Linear Time Invariant (LTI) systems with a stabilizable and detectable realization are considered. It is assumed that the state dimension is even, the input dimension is half the state dimension, and the plant is strongly stabilizable. Right and left coprime factorisations of the transfer function in terms of the state space realization are proposed, right and left Diophantine equations are solved, and the stabilizing controllers are gotten using Youla parametrisation. Conditions to get strong stability are given and the free parameters of the stabilizing controllers are fixed solving a regulation, a constant disturbance and a mixed sensitivity, problems. The results are illustrated through simulation examples of a two-degrees-of-freedom planar rotational robot and of a chain of integrators.

Keywords: doubly coprime factorisation; Bezout identity; mixed sensitivity; one and two parameter stabilizing controllers; Youla parametrisation; strong stabilization

1. Introduction

The main purpose is to give an explicit formula for the doubly coprime factorisation for square systems, *i.e.*, the output dimension is equal to the input dimension, and to fix their free control parameters solving a mixed sensitivity problem, that is, solving simultaneously robust stability and robust performance (see the book of Zhou et al. (1996)). MIMO, strictly proper, lumped and LTI systems with a stabilizable and detectable realization are considered. It is assumed that the plant satisfies the parity interlacing property to assure that a stable controller exist among the set of stabilizing controllers, *i.e.*, that plant is strongly stabilizable. A stable controller is important for practical interest as loop breaking, failure or to minimize numerical errors.

Mixed sensitivity control Zhou et al. (1996) is a closed loop design method based on the minimization of the \mathcal{H}_∞ -norm of the output sensitivity function, improving the regulation and the attenuation of output additive disturbances, and on the minimization of the \mathcal{H}_∞ -norm of the transfer function from the output to the input of the uncertainty, preserving stability under uncertainties. The method is based on which usually the disturbances are of low frequencies and on which the mathematical models are more exact and accurate in low frequencies, neglecting generally the high frequency dynamics.

*Corresponding author. Email: rgalindo@gama.fime.uanl.mx

The parametrisation of all stabilizing controllers gives a solution to the synthesis problem of LTI controllers as proposed by Desoer et al. (1980), Kučera (1979), Vidyasagar (1985) and Youla et al. (1976). The controllers stabilize a given plant and the performance problems can be solved by means of the correct election of their free parameters. There are few algorithms to get analytic expressions of the stabilizing controllers. Explicit formulas for a doubly coprime fractional representation are given in Nett et al. (1984). These formulas provide a connection between state space methods and factorisation theory. First the plant is stabilized by static estimated state feedback and then the Bezout identity is solved. The computer algorithms of Chiang et al. (1992) that use these formulas can produce high order controllers. This solution has been used in the \mathcal{H}_∞ strong stabilization problem in Campos et al. (2001) and Zeren et al. (1999). In section IV algebraic results are applied on a plant in terms of its state space realization. First, right and left coprime factorisations (r.c.f. and l.c.f., respectively) of the transfer function over the set of proper and stable rational functions are gotten, as has been done by Desoer et al. (1980). Then, the Diophantine equations (see the book of Vidyasagar (1985)) are solved and finally the family of all stabilizing controllers is available through Youla parametrisation as proposed by Kučera (1979) and Youla et al. (1976). The proposed solution to the doubly coprime factorisation and of the parametrisation of all stabilizing controllers for strictly proper and full state information systems, respectively, of Section IV, are less complex with respect to the ones of Galindo (2009). The change of coordinates used in Galindo (2009) to assure that the factorisations belong to the set of proper and stable rational functions, is not needed for the proposed factorisations, diminishing the control parameter and the computational effort. Also, the full state information assumption of Galindo (2009) is relaxed in Section IV, considering strictly proper plants.

The strong stabilization and the parametrisation of all one and two parameter stabilizing controllers are reviewed in Section II. The considered class of systems is given in Section III. The main results are presented in Section IV. Also, the free parameters of the stabilizing controllers are fixed solving a regulation, a rejection of constant disturbance, and a mixed sensitivity problems, as have been done by Galindo (2008). In all the cases explicit formulas for the free parameters are presented. The results are illustrated by simulation examples of a two-degrees-of-freedom planar rotational robot and of a chain of integrators in Section V.

Notation. $\mathfrak{R}(s)$ denotes the set of all rational functions of the complex variable s with real coefficients; \mathfrak{RH}_∞ the set of proper stable rational functions; \mathfrak{R} the set of real numbers; $A_l := \lim_{s \rightarrow 0} A(s)$ and $A_h := \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ are the asymptotic approximations of a matrix $A(s) \in \mathfrak{R}(s)$, in low and high frequencies, respectively; and I_p the identity matrix of dimension p by p .

2. Background

The strong stabilization problem was tackled by Youla et al. (1974) for single input single output plants and Vidyasagar (1985) extended this result to MIMO plants, given the following parity interlacing property (p.i.p.),

Theorem 2.1: *A given plant $P(s)$ is strongly stabilizable if the number of poles of $P(s)$ (counted according to their McMillan degrees) between any pair of real blocking zeros, including the infinite, in the right half plane, is even.*

The strong stabilization problem is important for practical interest, as loop breaking, failures or to minimize numerical errors.

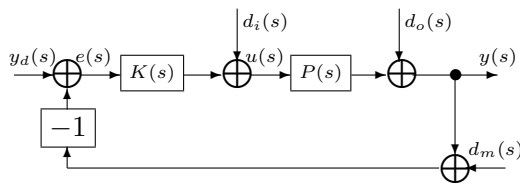


Figure 1. Feedback system with one-parameter controller.

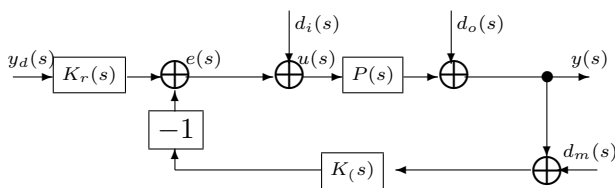


Figure 2. Feedback system with two-parameter controller.

One-parameter control configuration is shown in Fig. 1, where $P(s)$ represents the plant; $K(s)$ the controller; $u(s)$ and $y(s)$ are the plant input and output, respectively; $y_d(s)$ is the reference input; $e(s)$ is the error signal; and, $d_i(s)$, $d_o(s)$ and $d_m(s)$ are external disturbances at the input, the output and the measurement of the plant, respectively. It is assumed in what follows that the \mathcal{H}_2 norm of the disturbances are bounded. The control law $u(s)$ is generated only by the difference between the reference input $y_d(s)$ and the plant output $y(s)$, which is the error signal $e(s) = y_d(s) - y(s)$, being $u(s) = K(s)e(s)$. The parametrisation of all stabilizing controllers of one parameter as proposed by Desoer et al. (1980), Kučera (1979), Vidyasagar (1985) and Youla et al. (1976), is given by,

Theorem 2.2: Suppose $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ and $K(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}(s)$ in the feedback configuration of Fig. 1. Let $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$ and $P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ be any right and any left coprime factorisations of $P(s)$ with $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{D}(s)$ and $\tilde{N}(s)$ belonging to \mathcal{RH}_∞ . Then, the set of all controllers that stabilizes $P(s)$ is given by,

$$\begin{aligned} K(s) &= \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) \\ \tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

where $R(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ is the free parameter satisfying $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$, and $X(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ and $Y(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ are the solution of the Diophantine equation,

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m \quad (2)$$

One version of the two-parameter control configuration is shown in Fig. 2 (see Horowitz (1963) and Vidyasagar (1985)). In contrast with the one-parameter controller, $u(s)$ is generated by two different independent signals, being $u(s) = K_r(s)y_d(s) - K(s)y(s)$. If $K_r(s) = K(s)$, then the standard feedback configuration of Fig. 1 is gotten. The parametrisation of all two-parameter stabilizing controllers as proposed by Vidyasagar (1985), is given by,

Theorem 2.3: Suppose $K_r(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}(s)$, $K(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}(s)$ in the feedback configuration of Fig. 2 and let $P(s)$, $\tilde{D}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ and $R(s)$ be as in Theorem 2.2. Then, the set of all

controllers that stabilize $P(s)$ is given by,

$$[K_r(s) \ K(s)] = \tilde{D}_k^{-1}(s) [Q(s) \ \tilde{N}_k(s)] \quad (3)$$

where $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ is another free parameter, $\tilde{N}_k(s) = X(s) + R(s)\tilde{D}(s)$ and $\tilde{D}_k(s) = Y(s) - R(s)\tilde{N}(s)$.

The roll of $K(s)$ in Fig. 1 is to guarantee internal stability and to improve the performance; while, in Fig. 2 the controller $K_r(s)$ is used to improve the regulation or tracking and the controller $K(s)$ satisfies closed loop requirements. If $K_r(s)$ is unstable, its output grows without bounded, an alternative is to get a common coprime denominator, $\tilde{D}_k(s)$, of both controllers (see Vidyasagar (1985)), that is, $K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s)$ and $K_r(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_{kr}(s)$.

In Section IV an analytic solution of the doubly coprime factorisation and of the parametrisation of all stabilizing controllers for strictly proper and full state information systems, respectively, are presented for the class of systems given in the following section.

3. System description

Consider a causal, linear, time invariant realization (F, G, H) of a system. For proper plants, quadruples into and extended triples can be transformed, following a classical trick as presented by Basile et al. (1992). Also, using the work of Gilbert (1963) and Kalman (1963), (F, G, H) can be decomposed by a change of basis into controllable and observable, controllable and unobservable, uncontrollable and observable, and neither controllable nor observable, realizations. Suppose that (F, G, H) is a stabilizable and detectable realization, that is, the uncontrollable subsystem is stable. Let consider in what follows the realization of the controllable and observable subsystem, *i.e.*, the minimal realization. Moreover, since all the entries of $u(t)$ are linearly independent, without loss of generality, a change of basis can be selected, getting the realization $(A, [0 \ B_m^T]^T, C)$ of the controllable and observable subsystem in new coordinates, where $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix. Also, it is assumed that the dimension of the plant state n is even, the dimension of the plant input $m = n/2$, the dimension of the plant output $p = m$, and that $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ is partitioned accordingly to the block partition of $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, where $A_{11} = 0$, A_{12} is a non-singular matrix, and either C_{11} or C_{12} is a non-singular matrix, that is,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

As shown by Galindo (2009), the full state information and fully actuated Euler-Lagrange formulation,

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + C_o(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + G(q(t)) = u(t) \quad (5)$$

is a class of non-linear dynamic systems that has a linearized realization of the form (4), where $M(q(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ denotes the inertia, $C(q(t), \dot{q}(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ the centripetal-Coriolis, $G(q(t)) \in \mathfrak{R}^m$ the gravitational forces, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ the generalized forces and $q(t) \in \mathfrak{R}^m$, $\dot{q}(t) \in \mathfrak{R}^m$ and $\ddot{q}(t) \in \mathfrak{R}^m$ the generalized coordinates of position, velocity and acceleration, respectively.

The structure of the state space realization given by (4) is required for the proposed factorisations and for the main results presented in the next section.

4. Stabilizing controllers and doubly coprime factorisation

First, full state information systems are considered to get left and right coprime factorisations of the plant and an analytic solution of the Diophantine equation in,

Lemma 4.1: *Consider the state space realization given by Eq. (4) satisfying $n = 2m$ where n is the state dimension and m is the input dimension. Then, proposed left and right coprime factorisations, l.c.f. and r.c.f., respectively, of the transfer function $(sI_n - A)^{-1}B$ over \mathfrak{RH}_∞ are,*

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s)A_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \quad \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ sB_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} A_{12} \\ sI_m \end{bmatrix}, \quad D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \quad (7)$$

respectively, where $0 < a \in \mathfrak{R}$, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ and A_{12} are non-singular matrices and,

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2I_m - sA_{22} - A_{21}A_{12}) \quad (8)$$

Also, an analytic solution to the Diophantine Eq. (2) for the r.c.f. of Eq. (7) over \mathfrak{RH}_∞ is,

$$\begin{aligned} X(s) &= [a^2A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M] \\ Y(s) &= B_m \end{aligned} \quad (9)$$

where $M := 2aI_m + A_{22}$.

Proof: Multiplying $(sI_n - A)^{-1}$ by B and using (see Zhou et al. (1996)),

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} * & -N_{11}^{-1}N_{12}\Phi^{-1} \\ * & \Phi^{-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

where $*$ denotes any finite value, and N_{11} and $\Phi := N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12}$ are non-singular matrices. Then,

$$(sI_n - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^2}A_{12}\Gamma^{-1}(s)B_m \\ \frac{s}{(s+a)^2}\Gamma^{-1}(s)B_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

Consider the bilinear transformation used in Doyle et al. (1992) and Zhou et al. (1996), $s = (1/\lambda) - a$, that simplifies the factorisation of $P(s)$ and the solution of the Diophantine equation in the ring of polynomials in λ , also, the solution in s belongs to \mathfrak{RH}_∞ . So,

$$(sI_n - A)^{-1}B \Big|_{s=\frac{1}{\lambda}-a} = \begin{bmatrix} \lambda^2 A_{12} \Gamma^{-1}(\lambda) B_m \\ \lambda (1 - a\lambda) \Gamma^{-1}(\lambda) B_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

where $\Gamma(\lambda) := \lambda^2 (a^2 I_m + a A_{22} - A_{21} A_{12}) - \lambda M + I_m$. Hence, proposed l.c.f. and r.c.f. of Eq.

(12) are,

$$\tilde{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Gamma(\lambda)A_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma(\lambda) \end{bmatrix}, \tilde{N}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 B_m \\ \lambda(1-a\lambda) B_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 A_{12} \\ \lambda(1-a\lambda) I_m \end{bmatrix}, D(\lambda) = B_m^{-1} \Gamma(\lambda) \quad (14)$$

respectively. So, an analytic solution to $X(\lambda)N(\lambda) + Y(\lambda)D(\lambda) = I_m$ for Eq. (14) is,

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= [a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M] \\ Y(\lambda) &= B_m \end{aligned} \quad (15)$$

Since $\tilde{D}(\lambda)$, $\tilde{N}(\lambda)$, $N(\lambda)$ and $D(\lambda)$ are polynomials in λ , then $\tilde{D}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $N(s)$ and $D(s)$ belongs to \mathfrak{RH}_∞ . Applying $\lambda = 1/(s+a)$ to Eq. (13), Eq. (14) and Eq. (15), the results of Eq. (6), Eq. (7) and Eq. (9) follow. \square

The results of Lemma 4.1 are less complex with respect to the ones of Galindo (2009). In the proof of Lemma 4.1 the plant $P(s)$ is inverted before the bilinear transformation $s = (1/\lambda) - a$, is applied. So, the factorisations belong to \mathfrak{RH}_∞ and the change of coordinates used in Galindo (2009) is not needed, diminishing the control parameter and the computational effort for the factorisations of Lemma 4.1.

If A_{11} in the state matrix A is not zero and is not a diagonal matrix, then Φ in (10) will has a term $sI_m - A_{11}$ that prohibits getting the l.c.f. of $P(s)$.

Based on Lemma 4.1 the parametrisation of all one and two parameter stabilizing controllers is given by,

Theorem 4.2: *Consider the state space realization given by Eq. (4) in the feedback configurations of Figures 1 and 2, satisfying $n = 2m$ where n is the state dimension and m is the input dimension. Then, the sets of all one and two parameter controllers that stabilize Eq. (4) are,*

$$K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s) \tilde{N}_k(s) \quad (16)$$

and

$$[K_r(s) \quad K(s)] = \tilde{D}_k^{-1}(s) [Q(s) \quad \tilde{N}_k(s)] \quad (17)$$

respectively, where

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k(s) &= \left(I_m - \frac{1}{(s+a)^2} (R_1(s) + sR_2(s)) \right) B_m \\ \tilde{N}_k(s) &= \\ & [a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} + R_1(s) \Gamma(s) A_{12}^{-1} \quad M + R_2(s) \Gamma(s)] \\ Q(s) &= [Q_1(s) \quad Q_2(s)] \end{aligned} \quad (18)$$

being $R_i(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ satisfying $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$ and $Q_i(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$, $i = 1, 2$, free parameters, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ a non-singular matrix, $0 < a \in \mathfrak{R}$ $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2) (s^2 I_m - sA_{22} - A_{21}A_{12})$, $i = 1, 2$, and $M := 2aI_m + A_{22}$.

Moreover, suppose that $(sI_n - A)^{-1}B$ satisfies the p.i.p. and,

$$\det(s^2I_m + s(2aI_m - R_2(s)) + a^2I_m - R_1(s)) \quad (19)$$

is a Hurwitz polynomial, then Eq. (16) and Eq. (17) are stable, i.e., the controllers $K(s)$ and $K_r(s)$ belongs to \mathfrak{RH}_∞ .

Proof: Let $R(s) := [R_1(s) \ R_2(s)] \in \mathfrak{RH}_\infty$. The results of Eq. (16) and Eq. (17) follow directly from Eq. (1) and Eq. (3) replacing Eq. (6), Eq. (7) and Eq. (9). Since $(sI_n - A)^{-1}B$ satisfies the p.i.p. then, there are stable controllers $K(s)$ and $K_r(s)$ into the family of stabilizing controllers given by Eq. (16) and Eq. (17). If $\det(\tilde{D}_k(s))$ is a Hurwitz polynomial then $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ and $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$. Since $s = -a$ is a stable pole and B_m is a non-singular matrix, $K(s)$ and $K_r(s)$ are stable if (19) is a Hurwitz polynomial. \square

The stability of the one and two parameter controllers depends on a and $R_i(s)$, $i = 1, 2$. In particular if $R_i(s)$, $i = 1, 2$ are $r_i I_m$ where $r_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2$, then, (19) is a Hurwitz polynomial if,

$$r_1 < a^2 \text{ and } r_2 < 2a \quad (20)$$

If the state is measured or estimated $\tilde{N}(s)$ is a large matrix of dimension $n \times m$, then, $\tilde{N}(s)$ does not have a right inverse and hence the left Diophantine equation $\tilde{N}(\lambda)\tilde{X}(\lambda) + \tilde{D}(\lambda)\tilde{Y}(\lambda) = I$ does not have a solution. However, as will be shown in the following, for square systems this Diophantine equation has a solution arriving to a solution to the doubly coprime factorisation or Bezout identity.

Two cases are considered for the state space realization given by Eq. (4), when either C_{11} or C_{12} is a non-singular matrix. Since the high frequency approximation of the plant $P(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ is $P_h = (1/w_h)CB$ where w_h is a fixed frequency in the high frequency bandwidth of $P(s)$, if $C_{11} = 0$ and C_{12} is a non-singular matrix, then $P_h = (1/w_h)C_{12}B_m$, while if $C_{12} = 0$ and C_{11} is a non-singular matrix, then $P_h = 0$. In the first case $P_h = (1/w_h)C_{12}B_m$ is a non-singular matrix that is equivalent to the relative degree equal to 1 or the orders of the zeros at infinity are all equal to 1. Roughly speaking the system behaves as several independent first order SISO systems (indeed in this case the system is row by row decouplable).

A solution to the doubly coprime factorisation is proposed by,

Lemma 4.3: Consider the state space realization given by Eq. (4) satisfying $n = 2m$ where n is the state dimension and m is the input dimension, and the doubly coprime factorisation or Bezout identity given by,

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ \tilde{D}(s) & -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & \tilde{Y}(s) \\ D(s) & -\tilde{X}(s) \end{bmatrix} = I_{2m} \quad (21)$$

Suppose that $0 < a \in \mathfrak{R}$, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ and A_{12} are non-singular matrices, and $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2)(s^2I_m - sA_{22} - A_{21}A_{12})$. If $C_{12} = 0$ and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, a solution of the doubly coprime factorisation over \mathfrak{RH}_∞ is,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \Gamma(s)A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}, & \tilde{N}(s) &= \frac{1}{(s+a)^2}B_m \\ N(s) &= \frac{1}{(s+a)^2}C_{11}A_{12}, & D(s) &= B_m^{-1}\Gamma(s) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_d s + Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_d) B_m \\
\tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_d s + A_{21} A_{12} Y_d + a^3 I_m) \\
\tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (s I_m + Y_d)
\end{aligned} \tag{23}$$

where $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$ and $Y_d := A_{22} + 3a I_m$. If $C_{11} = 0$, and A_{21} and $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ are non-singular matrices, a solution of the doubly coprime factorisation over \mathfrak{RH}_∞ is,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(s) &= \Gamma(s) C_{12}^{-1}, \quad \tilde{N}(s) = \frac{s}{(s+a)^2} B_m \\
N(s) &= \frac{s}{(s+a)^2} C_{12}, \quad D(s) = B_m^{-1} \Gamma(s)
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m) C_{12}^{-1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_r) B_m \\
\tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m) \\
\tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{12} (s I_m + Y_r)
\end{aligned} \tag{25}$$

where $X_r := A_{22} - Y_r + 3a I_m$ and $Y_r := -a^3 A_{12}^{-1} A_{21}^{-1}$.

Proof: If $C_{12} = 0$ and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, from Eq. (11),

$$P(s) = \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \tag{26}$$

Since by assumption C_{11} and A_{12} are non-singular matrices, then, the results of Eq. (22) follow. Let,

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_d s + X_0) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \in \mathfrak{RH}_\infty \\
Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_d) B_m \in \mathfrak{RH}_\infty \\
\tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (\tilde{X}_1 s + \tilde{X}_0) \in \mathfrak{RH}_\infty \\
\tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (s I_m + \tilde{Y}_0) \in \mathfrak{RH}_\infty
\end{aligned} \tag{27}$$

where $X_d, X_0, \tilde{X}_1, \tilde{X}_0, Y_d$ and \tilde{Y}_0 are constant matrices that can be determined algebraically equating terms from the cubic polynomials of the Diophantine equations. Hence, the Diophantine equations $X(s) N(s) + Y(s) D(s) = I_m$ and $\tilde{N}(s) \tilde{X}(s) + \tilde{D}(s) \tilde{Y}(s) = I_m$ for Eq. (22) are,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s+a)^3} (X_d s + X_0) + \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_d) \Gamma(s) &= I_m \text{ and} \\
\frac{1}{(s+a)^3} (\tilde{X}_1 s + \tilde{X}_0) + \frac{1}{s+a} \Gamma(s) (s I_m + \tilde{Y}_0) &= I_m
\end{aligned} \tag{28}$$

respectively. Then, analytic solutions to the Diophantine equations are,

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_0 &= Y_d, \quad \tilde{X}_1 = X_d \\
X_0 &= Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m \\
\tilde{X}_0 &= A_{21} A_{12} \tilde{Y}_0 + a^3 I_m
\end{aligned} \tag{29}$$

where $Y_l A_{22} = A_{22} \tilde{Y}_0$ is used. So, from Eq. (27) the result of Eq. (23) follows. If $C_{11} = 0$, and

A_{21} and $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ are non-singular matrices, from Eq. (11),

$$P(s) = \frac{s}{(s+a)^2} C_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \quad (30)$$

Hence, the results (24) and (25) follows analogously letting $X(s) = (1/(s+a))(X_r s + X_0) C_{12}^{-1} \in \mathfrak{RH}_\infty$, $Y(s) = (1/(s+a))(sI_m + Y_r) B_m \in \mathfrak{RH}_\infty$, $\tilde{X}(s) = (1/(s+a)) B_m^{-1} (X_r s + X_0) \in \mathfrak{RH}_\infty$ and $\tilde{Y}(s) = (1/(s+a)) C_{12} (sI_m + Y_r) \in \mathfrak{RH}_\infty$ where $X_0 = Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$. \square

In the proof of Lemma 4.3 the Diophantine equations are solved directly in \mathfrak{RH}_∞ without the bilinear transformation $\lambda = 1/(s+a)$, since the solutions in the ring of polynomials in λ are more involved.

Based on Lemma 4.3 the parametrisation of all one and two parameter stabilizing controllers is given by,

Theorem 4.4: *Consider the state space realization given by Eq. (4) in the feedback configurations of Figures 1 and 2, satisfying $n = 2m$ where n is the state dimension and m is the input dimension. Then, the sets of all one and two parameter controllers that stabilize Eq. (4) are,*

$$K(s) = \hat{D}_k^{-1}(s) \hat{N}_k(s) \quad (31)$$

and

$$[K_r(s) K(s)] = \hat{D}_k^{-1}(s) [Q(s) \hat{N}_k(s)] \quad (32)$$

respectively, where $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ satisfying $\det(\hat{D}_k(s)) \neq 0$ and $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ are free parameters. Let $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ be a non-singular matrix, $0 < a \in \mathfrak{R}$, and $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2)(s^2 I_m - sA_{22} - A_{21} A_{12})$. If $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ and A_{12} are non-singular matrices,

$$\begin{aligned} \hat{D}_k(s) &:= \left(sI_m + Y_d - \frac{1}{s+a} R(s) \right) B_m \\ \hat{N}_k(s) &:= \\ &[X_d s + Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m + (s+a) R(s) \Gamma(s)] A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \end{aligned} \quad (33)$$

where $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$ and $Y_d := A_{22} + 3a I_m$. If $C_{11} = 0$, and A_{21} and $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ are non-singular matrices,

$$\begin{aligned} \hat{D}_k(s) &:= \left(sI_m + Y_r - \frac{s}{s+a} R(s) \right) B_m \\ \hat{N}_k(s) &:= \\ &[X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m + (s+a) R(s) \Gamma(s)] C_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

where $X_r := A_{22} - Y_r + 3a I_m$ and $Y_r := -a^3 A_{12}^{-1} A_{21}^{-1}$.

Moreover, suppose that $P(s) = (sI_n - A)^{-1} B$ satisfies the p.i.p. and,

$$\begin{aligned} &\det(s^2 I_m + (aI_m + Y_d) s + aY_d - R(s)), \text{ and} \\ &\det(s^2 I_m + (aI_m + Y_r - R(s)) s + aY_r), \end{aligned} \quad (35)$$

are Hurwitz polynomials, then Eq. (31) and Eq. (32) are stable, i.e., the controllers $K(s)$ and $K_r(s)$ belongs to \mathfrak{RH}_∞ , respectively.

Proof: Let,

$$\hat{D}_k(s) := (s + a) \tilde{D}_k(s), \text{ and } \hat{N}_k(s) := (s + a) \tilde{N}_k(s) \quad (36)$$

then, the results of Eq. (31) and Eq. (32) follow directly from Eq. (1) and Eq. (3) replacing Eq. (22), Eq. (23) and (25). Since $P(s)$ satisfies the p.i.p. then, there are stable controllers $K(s)$ and $K_r(s)$ into the families of stabilizing controllers given by Eq. (31) and Eq. (32). If $\det(\tilde{D}_k(s))$ is a Hurwitz polynomial then $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ and $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$. Since $s = -a$ is a stable pole and B_m is a non-singular matrix, $K(s)$ and $K_r(s)$ are stable if the polynomials of Eq. (35) are Hurwitz. \square

As shown by Eq. (35) of Theorem 4.4 the stability of the stabilizing controllers can be accomplished selecting a and $R(s)$ if $C_{12} = 0$, however it can be a more difficult task if $C_{11} = 0$. So, if $K_r(s)$ is unstable in the feedback configuration with two-parameter controller, it must be implemented getting a common coprime denominator, $\tilde{D}_k(s)$, of both controllers.

4.1. Regulation control problem

The regulation control problem is to keep $y(t)$ close to a given $y_d(t) = k \in \mathfrak{R}$. The following corollaries propose a solution to this problem.

Corollary 4.5: Consider a one parameter stabilizing controller in the feedback configuration of Fig. 1. Let the reference input of position be a constant value and the reference input of velocity be zero. Under the assumptions and definitions of Theorem 4.2, free parameters of Eq. (16), solving the regulation control problem, are,

$$\begin{aligned} R_{1l} &= a^2 I_m \\ R_{2l} &= a^2 M A_{12}^{-1} A_{21}^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

being A_{12} and A_{21} non-singular matrices and $M := 2aI_m + A_{22}$, while under the assumptions and definitions of Theorem 4.4, if $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, a free parameter of Eq. (31) solving the regulation control problem is,

$$R_l = aY_d \quad (38)$$

where $Y_d := A_{22} + 3aI_m$.

Proof: From Fig. 1, $e(s) := y_d(s) - y(s)$ and $y(s) = (I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s)r(s)$. Therefore, using the identity $(I + P(s)K(s))^{-1} P(s) = N(s) \tilde{D}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)) of the parametrisation of all stabilizing controllers,

$$e(s) = \left(I - N(s) \tilde{N}_k(s) \right) y_d(s) \quad (39)$$

and $N(s) \tilde{N}_k(s) = I$ achieves $e(s) = 0$. Analysing at low frequencies, using classical asymptotic Bode approximations of a matrix,

$$N_l \tilde{N}_{kl} = I \quad (40)$$

From Lemma 4.1, $N_l = (1/a^2) [A_{12} \ 0]^T$, and from Theorem 4.2, $\Gamma_l = (-1/a^2) A_{21}A_{12}$ and $\tilde{N}_{kl} = [a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} - (1/a^2) R_{1l}A_{21} \quad M - (1/a^2) R_{2l}A_{21}A_{12}]$. Note that N_l is full column rank, so, multiplying Eq. (40) from the left by $a^2 [A_{12}^{-1} \ 0]$,

$$\tilde{N}_{kl} = [a^2 A_{12}^{-1} \ 0] \quad (41)$$

and solving for R_l , the necessity of result of Eq. (37) is gotten. To prove the sufficiency, \tilde{N}_{kl} is given by Eq. (41) under Eq. (37), so, from Eq. (41) and Eq. (39),

$$e_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} y_d \quad (42)$$

Since $x(t) = [q(t) \ \dot{q}(t)]^T$, and the reference input of position is a constant value, then $\dot{q}(t) \rightarrow 0$ when $q(t)$ achieves the steady state. So, without loss of generality the reference input of velocity can be zero and the solution regulates the position subsystem. On the other hand, from Lemma 4.3, if $C_{12} = 0$, then $N_l = (1/a^2) C_{11}A_{12}$, from Theorem 4.4, $\tilde{N}_{kl} = (1/a) \hat{N}_{kl} = (1/a) [Y_d A_{21} + a^3 A_{12}^{-1} - (1/a) R_l A_{21}] C_{11}^{-1}$, and from (40) the necessary and sufficient condition of the result (38), is gotten. \square

The transfer function from $y_d(t)$ to $e(t)$ is equal to the transfer function from $d_o(t)$ to $y(t)$. So, if the free parameters are fixed using the results of Corollary 4.5 and this disturbance is constant, then, there are any effects at $y(t)$ in low frequencies, that is, the disturbance is rejected at $y(t)$.

If $C_{11} = 0$, then, from Lemma 4.3, $N_l = 0$, and from Eq. (40), the regulation control problem does not have a solution. Alternatively, if $N(s)$ is approximated in low frequencies to $N_l = (w_l/a^2) C_{12}$, where w_l is a fixed frequency in the low frequency bandwidth of $P(s)$, then a free parameter R_l can be determined such that Eq. (40) is satisfied, but the transfer function from $y_d(t)$ to $y(t)$, that is, $N(s)\tilde{N}_k(s)$ still have a zero at the origin that prohibit the regulation. Also, this free parameter has a high value as $w_l \rightarrow 0$, that become into numerical problems. So, in this case external loops including integrators must be added. As it will be shown, the same problem arises for the feedback configuration of two-parameter.

Corollary 4.6: *Consider a two-parameter stabilizing controller in the feedback configuration of Fig. 2. Let the reference input of position be a constant value and the reference input of velocity be zero. Under the assumptions and definitions of Theorem 4.2, a free parameter of Eq. (17), solving the regulation control problem, is,*

$$Q_l = [a^2 A_{12}^{-1} \ 0] \quad (43)$$

while under the assumptions and definitions of Theorem 4.4, if $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, a free parameter of Eq. (31) solving the regulation control problem is,

$$Q_l = a^2 A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \quad (44)$$

Proof: From Fig. 2, $\epsilon(s) := y_d(s) - y(s)$. So, $y(s) = (I_n + P(s)K(s))^{-1} P(s)K_r(s)y_d(s)$. Therefore, using the identity $(I_n + P(s)K(s))^{-1} P(s) = N(s)\tilde{D}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)) of the parametrisation of all stabilizing controllers, $y(s) = N(s)Q(s)y_d(s)$. Thus,

$$\epsilon(s) = (I_n - N(s)Q(s))y_d(s) \quad (45)$$

and $N(s)Q(s) = I_n$ achieves $\epsilon(s) = 0$. Analysing at low frequencies, using the classical asymptotic Bode approximations of a matrix,

$$N_l Q_l = I_n \quad (46)$$

From Theorem 4.2, $N_l = (1/a^2) [A_{12} \ 0]^T$, and $Q_l = [Q_{1l} \ Q_{2l}]$. Multiplying Eq. (46) from the left by $a^2 [A_{12}^{-1} \ 0]$, the free parameter Q_l , Eq. (43), is obtained, proving the necessity of the result. To prove the sufficiency, using N_l , Q_l and Eq. (43), from Eq. (45), $\epsilon_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} y_{dl}$. Since $x(t) = [q(t) \ \dot{q}(t)]^T$, the reference input of position is a constant value and the reference input of velocity is zero, then, the solution regulates the position subsystem. On the other hand, from Lemma 4.3, if $C_{12} = 0$, then, $N_l = (1/a^2) C_{11} A_{12}$, and from Eq. (46), the necessary and sufficient conditions of the result (44) are gotten. \square

4.2. Rejection of constant disturbance

The problem of rejection of constant disturbance at the plant input, is tackled. The free parameters of the stabilizing controllers are fixed such that this disturbance does not have any effect in low frequencies over the output.

Corollary 4.7: *Consider the feedback configurations of Figures 1 and 2. Suppose that $d_i(t)$ is $k_{d_i} \in \mathfrak{R}, \forall t$. Then, the free parameter $R_1(s)$ of Eq. (16) and Eq. (17) of Theorem 4.2 that solves the problem of rejection of constant disturbance at the plant input is,*

$$R_{1l} = a^2 I_m \quad (47)$$

and, under the assumptions and definitions of Theorem 4.4, if $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, the free parameter $R(s)$ of Eq. (31) and Eq. (32) that solves the problem of rejection of constant disturbance at the plant input is,

$$R_l = a Y_d \quad (48)$$

where $Y_d := A_{22} + 3aI_m$. If $C_{11} = 0$, and A_{21} and $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ are non-singular matrices, the problem of rejection of constant disturbance at the plant input is solved $\forall R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$.

Proof: The transfer functions from $d_i(t)$ to $y(t)$ in the feedback configurations of Figures 1 and 2 are $(I_n + P(s)K(s))^{-1} P(s)$ in both configurations. Therefore, using the identity $(I_n + P(s)K(s))^{-1} P(s) = N(s) \tilde{D}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)) of the parametrisation of all stabilizing controllers, and analysing at low frequencies, using the classical asymptotic Bode approximations of a matrix, if,

$$N_l \tilde{D}_{kl} = 0 \quad (49)$$

then, the constant disturbance is rejected at the output. From Theorem 4.2, $N_l = (1/a^2) [A_{12} \ 0]^T$ and $\tilde{D}_{kl} = (I_m - (1/a^2) R_{1l}) B_m$, so, the result (47) follows directly from (49). If $C_{12} = 0$, from Lemma 4.3 and Theorem 4.4, $N_l = (1/a^2) C_{11} A_{12}$ and $\tilde{D}_{kl} = (1/a) \hat{D}_{kl} = (1/a) (Y_d - (1/a) R_l) B_m$, hence, from Eq. (49), the result (48), is gotten, while if $C_{11} = 0$, from Lemma 4.3 and Theorem 4.4, $N_l = 0$ and Eq. (49) is satisfied $\forall R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$. \square

4.3. Mixed sensitivity problem

The minimization of the \mathcal{H}_∞ -norm of a low frequency approximation of the output sensitivity function $\|S_{ol}\|_\infty$ subject to an algebraic equation of restriction that assigns the same value to the \mathcal{H}_∞ -norms of the low and high frequency approximations of the output sensitivity function and of the transfer function from the output to the input of the uncertainty $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$, respectively, is considered (see the work of Galindo (2008)). This mixed sensitivity problem involves the simultaneous minimization of $\|S_{ol}\|_\infty$ and of $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$, that is, $\min_{K(s)} \|S_{ol}\|_\infty$ subject to $\|S_{ol}\|_\infty = \|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$. So, one part of the problem consists of solving the algebraic equation,

$$\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty \quad (50)$$

For output multiplicative Δ models, $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$ becomes $T_o(s) := S_o(s)P(s)K(s)$. Also, for strictly proper plants $T_{oh} \cong L_{oh}$.

This mixed sensitivity problem is solved fixing the free parameters of the stabilizing controllers, when the reference input of velocity is zero. An exact solution to (50) for full state information systems, is proposed by,

Theorem 4.8: Consider state space realization given by Eq. (4) of the plant $(sI_n - A)^{-1}B$ in the schemes of Figures 1 and 2. Suppose that $K(s)$ and $K_r(s)$ are given by Theorem 4.2. Let the state reference input be $y_d(t) = [y_{d1}(t) \ 0]^T$, the free parameter $R_1(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ be rI_m , $R_2(s) = 0 \in \mathfrak{RH}_\infty$, $Q_1(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ be qA_{12}^{-1} and $Q_2(s) = 0 \in \mathfrak{RH}_\infty$. Then, the optimal values of r and q for an output multiplicative uncertainty model are,

$$r = \frac{a^2 (\|A_{12}A_{21}\|_\infty - a^2b)}{a^4m + \|A_{12}A_{21}\|_\infty} \quad (51)$$

and,

$$q = \frac{a^2w_h}{a^2\|A_{12}^{-1}\|_\infty + w_h} \quad (52)$$

respectively, where,

$$\begin{aligned} b &:= \frac{1}{w_h} \|a^2A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty \\ m &:= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{w_h} \|2a^2A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty - b \right) \end{aligned} \quad (53)$$

Proof: The transfer function from the reference input $y_d(t)$ to the output $y(t)$ is given by $T_o(s) = N(s)\tilde{N}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)), in the one-parameter feedback configuration shown in Fig. 1 where $N(s)$ and $\tilde{N}_k(s)$ are given by Eq. (7) and Eq. (18), respectively. Since $R_1(s)$ is rI_m , $R_2(s) = 0$, and $\Gamma_h = I_m$, then,

$$T_{oh} = \frac{1}{w_h} \begin{bmatrix} \frac{1}{w_h}A_{12} \\ I_m \end{bmatrix} \left[(a^2 + r)A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M \right] \quad (54)$$

where w_h is a fixed frequency in the high frequency bandwidth of $P(s)$ and $M = 2aI_m + A_{22}$.

So, T_{oh} can be approximated in high frequencies to,

$$T_{oh} = \frac{1}{w_h} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (a^2 + r) A_{12}^{-1} + A_{21} & M \end{bmatrix} \quad (55)$$

On the other hand, since $R_1(s)$ is rI_m , $R_2(s) = 0$, and from Eq. (8) $\Gamma_l = (-1/a^2) A_{21}A_{12}$, then, the low frequency approximation of $T_o(s)$ is,

$$T_{ol} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} A_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 A_{12}^{-1} + (1 - \frac{r}{a^2}) A_{21} & M \end{bmatrix} \quad (56)$$

Thus the output sensitivity function $S_{ol} = I_n - T_{ol}$ is,

$$S_{ol} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} A_{12} (\frac{r}{a^2} - 1) A_{21} & -\frac{1}{a^2} A_{12} M \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (57)$$

The reference input is $y_d(t) = [y_{d1}(t) \ 0]^T$, then the elements (2, 1) of Eq. (55) and (1, 1) of Eq. (57), respectively, are considered in order to solve (50), that is,

$$\begin{aligned} \|T_{oh(2,1)}\|_\infty &= \frac{1}{w_h} \|(a^2 + r) A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty \\ \|S_{ol(1,1)}\|_\infty &= \frac{1}{a^2} \left| \frac{r}{a^2} - 1 \right| \|A_{12} A_{21}\|_\infty \end{aligned} \quad (58)$$

where $w_h > 0$. It is considered that $a > 0$, then the equation of restriction $\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ has a solution in the intersection point of the two straight lines of Fig. 3, that is, from Fig. 3,

$$mr + b = \frac{-1}{a^4} \|A_{12} A_{21}\|_\infty r + \frac{1}{a^2} \|A_{12} A_{21}\|_\infty \quad (59)$$

this implies the result (51). Also, $T_o(s) = N(s)Q(s)$ (see Vidyasagar (1985)) in the two-parameter feedback configuration shown in Fig. 2. Since $Q_1(s)$ is qI_m and $Q_2(s) = 0$, then, from (7) the high and low frequency approximations of $T_o(s)$ and $S_o(s) := I_n - T_o(s)$ are,

$$T_{oh} = \frac{1}{w_h} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ qA_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

and

$$S_{ol} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{q}{a^2}) I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (61)$$

respectively. Thus,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{1}{w_h} |q| \|A_{12}^{-1}\|_\infty, \quad \|S_{ol(1,1)}\|_\infty = \left| 1 - \frac{q}{a^2} \right| \quad (62)$$

So, $\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ has a solution in the intersection point of the two straight lines

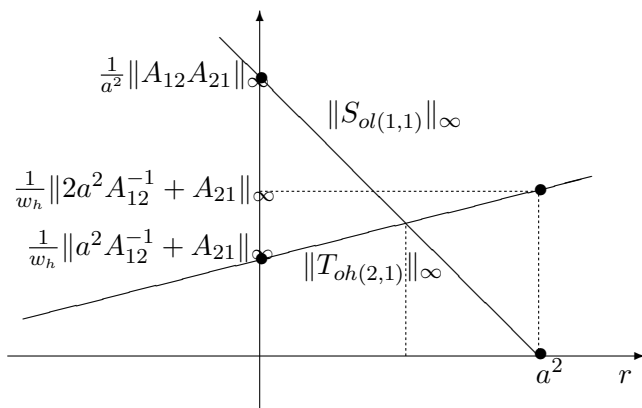


Figure 3. Intersection function for one parameter configuration

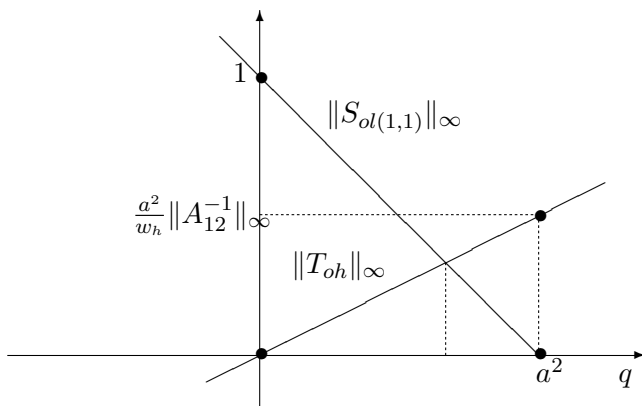


Figure 4. Intersection function for two parameter configuration

of Fig. 4, *i.e.*, from Fig. 4,

$$\frac{1}{w_h} \|A_{12}^{-1}\|_\infty q = \frac{-1}{a^2} q + 1 \quad (63)$$

that implies the result (52). □

Theorem 4.8 shows that the tuning of the parameter is more complex for the one-parameter configuration and numerical errors increase the dimension of the controller.

In Theorem 4.8, $R_1(s)$ is rI_m , of course, another selections can be done, for instance if $A_{12} = I_m$, A_{21} is a non-singular matrix and $R_1(s)$ be $rA_{21}^{-1} + a^2I_m$, then $\|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ in (58) will not be in terms of $\|A_{21}\|_\infty$ that is desired for some applications, assuring that the stationary state error converge to zero. On the other hand, if a feedback linearization is applied to a non-linear system or if a change of coordinates is applied getting the Brunousky canonical form, then, the design system is a chain of integrators that has $A_{21} = 0$. So, the selection of $R_1(s)$ in Theorem 4.8, allows to solve the mixed sensitivity problem for a chain of integrators. Although the solution is not unique, the proposed solution assures that a cross point exist in Figures 3 and 4, since $\|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ reach its minimum value as r increase. Also, for the proposed r and q ,

$\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ and $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty$, respectively, that as will be shown, can be simultaneously minimized by the appropriate choice of the control parameters a and w_h .

From (51) and (58),

$$\|S_{ol(1,1)}\|_\infty = \frac{(b + a^2 m) \|A_{12} A_{21}\|_\infty}{a^4 m + \|A_{12} A_{21}\|_\infty} \quad (64)$$

So, from (53),

$$\|S_{ol(1,1)}\|_\infty = \frac{\|2a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty \|A_{12} A_{21}\|_\infty}{a^2 (\|2a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty - \|a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty) + \|A_{12} A_{21}\|_\infty w_h} \quad (65)$$

in the one-parameter feedback configuration. Also, from (52) and (62),

$$\|S_{ol(1,1)}\|_\infty = \frac{a^2 \|A_{12}^{-1}\|_\infty}{a^2 \|A_{12}^{-1}\|_\infty + w_h} \quad (66)$$

in the two-parameter feedback configuration. If $w_h \gg a^2 (\|2a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty - \|a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty) / \|A_{12} A_{21}\|_\infty$, then, from (65) both $\|T_{oh(2,1)}\|_\infty$ and $\|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ tend to $\|2a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty / w_h$ in the feedback configuration of Fig. 1. Also, if $w_h \gg a^2 \|A_{12}^{-1}\|_\infty$, then from (66) both $\|T_{oh}\|_\infty$ and $\|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ tend to $a^2 \|A_{12}^{-1}\|_\infty / w_h$ in the feedback configuration of Fig. 2. However, if $w_h \rightarrow \infty$, then $b \rightarrow 0$ and $m \rightarrow 0$, so, $r \rightarrow a^2$ and from Theorem 4.2, if $r \rightarrow a^2$, the controllers becomes unstable. Therefore, for small enough a such that the stability of the controllers is preserved, the mixed sensitivity problem is solved increasing w_h .

An exact solution to (50) for strictly proper systems, is proposed by,

Theorem 4.9: Consider state space realization given by Eq. (4) of the plant $C(sI_n - A)^{-1}B$ in the feedback configurations of Figures 1 and 2. Suppose that $K(s)$ and $K_r(s)$ are given by Theorem 4.4. If $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, let the free parameter $R(s) \in \mathbb{RH}_\infty$ be $(rI_m + A_{22})$, and $Q(s) \in \mathbb{RH}_\infty$ be $qa^2 A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}$. Then, the optimal values of r and q for an output multiplicative uncertainty model are,

$$r = \frac{a (3 \|C_{11} A_{12} A_{21} C_{11}^{-1}\|_\infty - a^2 b)}{a^3 m + \|C_{11} A_{12} A_{21} C_{11}^{-1}\|_\infty} \quad (67)$$

and,

$$q = \frac{w_h^2}{a^2 + w_h^2} \quad (68)$$

respectively, where,

$$\begin{aligned} b &:= \frac{1}{w_h^2} \|C_{11} A_{12} (X_d + a A_{22}) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}\|_\infty \\ m &:= \frac{1}{3aw_h^2} (\|C_{11} A_{12} (X_d + a Y_d) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}\|_\infty - w_h^2 b) \end{aligned} \quad (69)$$

being $Y_d := A_{22} + 3aI_m$ and $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$.

Proof: The transfer function from the reference input $y_d(t)$ to the output $y(t)$ is given by $T_o(s) = N(s) \tilde{N}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)), in the one-parameter feedback configuration shown in Fig. 1 where $N(s)$ and $\tilde{N}_k(s)$ are given by (22) and (34), respectively. The high and low frequency approximations of $\Gamma(s)$ are $\Gamma_h = I_m$ and $\Gamma_l = (-1/a^2) A_{21}A_{12}$, respectively. To assure that $\|S_{ol}\|_\infty = 0$ for certain value of r , if $C_{12} = 0$, then $R(s)$ is proposed to be $a(rI_m + A_{22})$, so,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{1}{w_h^2} \|C_{11}A_{12}(X_d + a(rI_m + A_{22}))A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (70)$$

where $w_h > 0$ is a fixed frequency in the high frequency bandwidth of $P(s)$. On the other hand, the low frequency approximation of $T_o(s)$ is,

$$T_{ol} = I_m + \frac{3a - r}{a^3} C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1} \quad (71)$$

Thus, since $a > 0$, the \mathcal{H}_∞ -norm of $S_{ol} = I_m - T_{ol}$ is,

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{|r - 3a|}{a^3} \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (72)$$

The equation of restriction $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$ has a solution in the intersection point of the two straight lines of Fig. 5, that is, from Fig. 5,

$$mr + b = \left(\frac{-1}{a^3}r + \frac{3}{a^2} \right) \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (73)$$

this implies the result (67). Also, $T_o(s) = N(s)Q(s)$ (see Vidyasagar (1985)) in the two-parameter feedback configuration shown in Fig. 2. If $C_{12} = 0$, then $Q(s)$ is $qa^2A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}$, so, from (22), the \mathcal{H}_∞ -norms of the high and low frequency approximations of $T_o(s)$ and $S_o(s) := I_n - T_o(s)$ are,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{a^2}{w_h^2} |q| \quad \text{and} \quad \|S_{ol}\|_\infty = |1 - q| \quad (74)$$

respectively. Hence, $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$ has a solution in the intersection point of the two straight lines of Fig. 6, *i.e.*, from Fig. 6,

$$\frac{a^2}{w_h^2} q = -q + 1 \quad (75)$$

that implies the result (68). □

If $C_{12} = 0$, from (67) and (72),

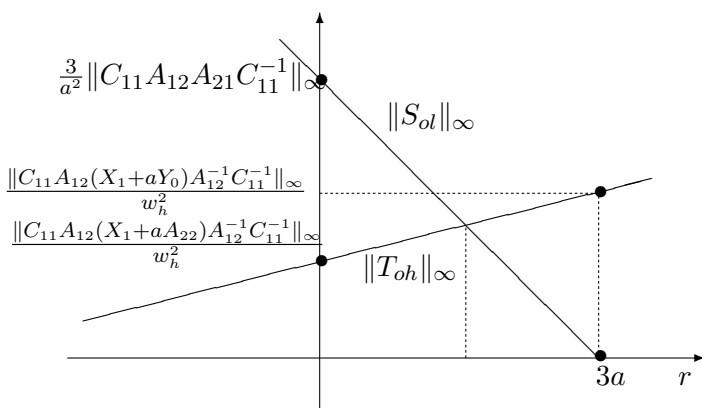


Figure 5. Intersection function for one parameter configuration

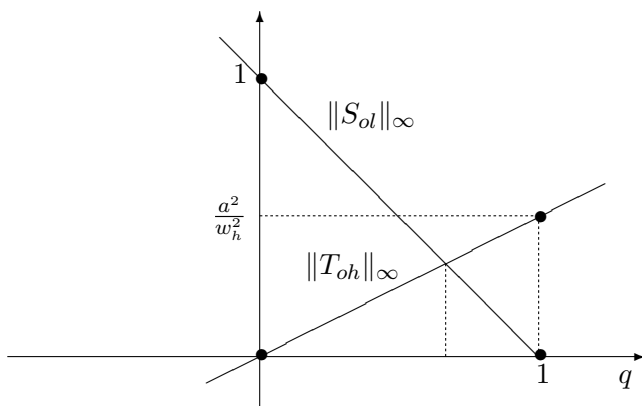


Figure 6. Intersection function for two parameter configuration

$$\|S_{ol}\|_{\infty} = \frac{(b + 3am) \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_{\infty}}{a^3m + \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_{\infty}} \quad (76)$$

in the one-parameter feedback configuration. Also, from (68) and (74),

$$\|S_{ol}\|_{\infty} = \frac{a^2}{a^2 + w_h^2} \quad (77)$$

in the two-parameter feedback configuration. If $w_h \rightarrow \infty$, then, from (69), $m \rightarrow 0$ and $b \rightarrow 0$, so, from (76) both $\|T_{oh}\|_{\infty}$ and $\|S_{ol}\|_{\infty}$ tend to zero in the feedback configuration of Fig. 1. Also, if $w_h \gg a^2$, then from (77) both $\|T_{oh}\|_{\infty}$ and $\|S_{ol}\|_{\infty}$ tend to a^2/w_h^2 in the feedback configuration of Fig. 2. However, if $b \rightarrow 0$ and $m \rightarrow 0$, then $r \rightarrow 3a$ and from (35), if $r \rightarrow 3a$, the controllers becomes unstable. Therefore, for small enough a such that the stability of the controllers is preserved, the mixed sensitivity problem is solved increasing w_h .

As for the regulation problem, if $C_{11} = 0$, then from Lemma 4.3, $N_l = 0$ and this mixed sensitivity problem does not have a solution.

The results are illustrated by simulation examples of a two-degrees-of-freedom planar rotational robot and of a chain of integrators in the next section.

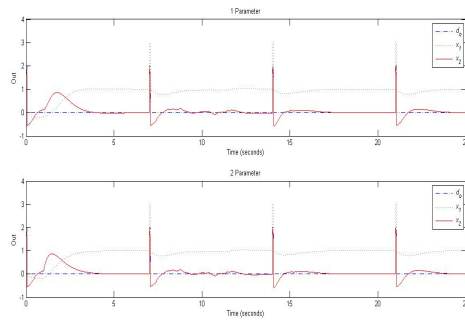


Figure 7. Step response for one and two parameter controllers under $d_o(t)$ and $d_m(t)$

5. Examples

5.1. Chain of integrators

Consider the chain of integrators,

$$P(s) = \frac{1}{s^2} \quad (78)$$

The A and B matrices in the linearized model are given by Eq. (4), where $A_{11} = 0$, $A_{12} = 1$, $A_{22} = 0$ and,

$$A_{21} = 0, \quad B_m = 1 \quad (79)$$

where it is assumed that the state is measurable or can be estimated. The unstable plant $P(s)$ satisfies the p.i.p.. Let the control parameters $a = 2$ and $w_h = 1000$. Based on Eq. (51) and Eq. (52) from Theorem 4.8, the free parameters that solve the mixed sensitivity problem for the one and two parameter feedback configurations are,

$$r = -4 \quad \text{and} \quad q = 3.9683 \quad (80)$$

respectively. Since $A_{21} = 0$ and the plant is a chain of integrators, then from (58), $\|S_{ol(1,1)}\|_\infty = 0$, $\forall r$, and from Eq. (51) $r = -a^2$, $\forall w_h$, implying that $\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = 0$. The regulation control problem is solved in spite of the different value given by Corollary 4.5, that is, from Corollary 4.5, $r = a^2$, that is the same value given by Corollary 4.7 for rejection of constant disturbance at the input of the plant.

Using MatLab-Simulink the outputs are shown in Figures 7 and 8. These were realized using the one and two parameter stabilizing controllers given by Eq. (16) and by Eq. (17) of Theorem 4.2, for the chain of integrators in the feedback configurations of Figures 1 and 2 with the free parameter of Eq. (80), the reference input $y_d(t) = [1 \ 0]^T$ and the initial condition $x(0) = 0$, under the additive disturbances at the measure $d_m(t) = 0.2 \sin(1000t)$, and at the output $d_0(t)$ as shown by Fig. 7.

Figures 7 and 8 show that the mixed sensitivity problem is solved and the stabilization of the plant is accomplished, thanks to the control parameter of the stabilizing controllers. As expected the disturbance at the output $d_o(t)$ is attenuated, and a small value of the stationary state error is having. The disturbance at the measure $d_m(t)$ has a frequency bigger than w_h , so, it is attenuated at the regulated output and remains as very small oscillations that are bigger in the plant input as shown by Fig. 8. For this example the performance is almost the same in the

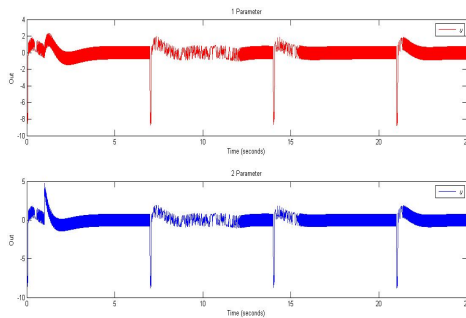


Figure 8. Plant input $u(t)$ for one and two parameter controllers under $d_o(t)$ and $d_m(t)$

one or two parameter feedback configurations. A small time response and a smooth response can be achieved, increasing the value of a , of course it increase the magnitude of the plant input.

5.2. Planar rotational robot

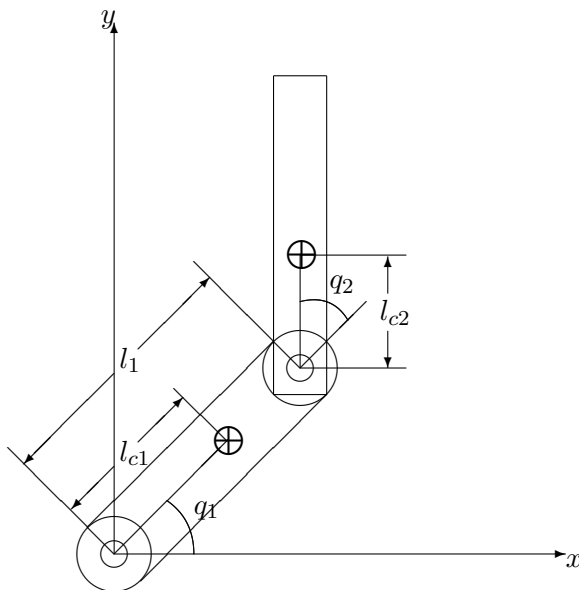


Figure 9. Coordinate description of the robot with 2 degrees of freedom

Consider the two degrees-of-freedom (d.o.f.) planar rotational robot shown in Fig. 9. Eq. (5) gives the Euler-Lagrange equations of motion for this robot, where $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$,

$$M(q(t)) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3(\cos q_2(t)) & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$C(q(t), \dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} -\theta_3(\sin q_2(t))\dot{q}_2(t) - \theta_3(\sin q_2(t))(\dot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t)) \\ \theta_3(\sin q_2(t))\dot{q}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$G(q(t)) = \begin{bmatrix} g\theta_4 \cos q_1(t) + g\theta_5 \cos(q_1(t) + q_2(t)) \\ g\theta_5 \cos(q_1(t) + q_2(t)) \end{bmatrix} \quad (83)$$

being $q_i(t)$, $i = 1, 2$ the joint angular positions, $\theta_1 := m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1$, $\theta_2 := m_2 l_{c2}^2 + I_2$, $\theta_3 := m_2 l_1 l_{c2}$, $\theta_4 := m_1 l_{c1} + m_2 l_1$, $\theta_5 := m_2 l_{c2}$, where m_i , $i = 1, 2$ are the total mass of link i , l_1 is the length of link one, l_{ci} , $i = 1, 2$ are the distance to the centre of mass of link i , I_i , $i = 1, 2$ are the moment of inertia of link i , and g is the acceleration of gravity.

The top balancing position is at the upright position with $q_{1e} = \pi/2$, $q_{2e} = 0$, $u_{ie} = 0$, $i = 1, 2$. The parameter values are given by Kelly et al. (2003), *i.e.*, $l_1 = 0.450$ m, $l_{c1} = 0.091$ m, $l_{c2} = 0.048$ m, $m_1 = 23.902$ kg, $m_2 = 3.88$ kg, $I_1 = 1.266$ kg m², $I_2 = 0.093$ kg m² and $g = 9.81$ m/s².

The A and B matrices in the linearized model are given by Eq. (4), where $A_{11} = 0$, $A_{12} = I_m$, $A_{22} = 0$ and,

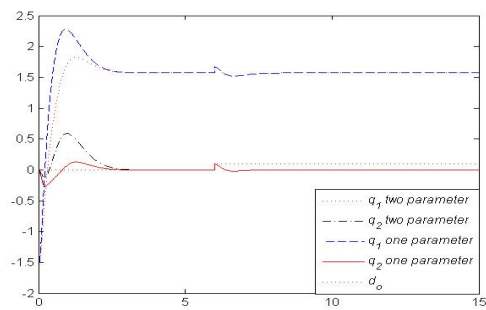
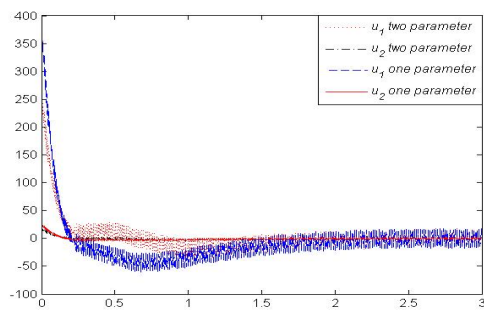
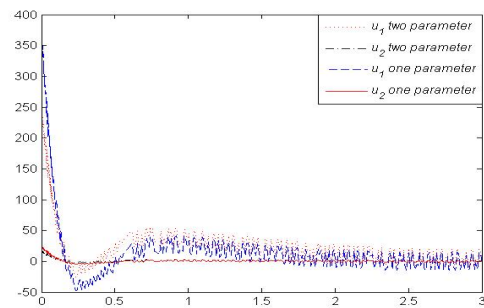
$$A_{21} = \begin{bmatrix} 16.950 & -0.688 \\ -12.963 & 19.177 \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0.458 & -0.835 \\ -0.835 & 11.332 \end{bmatrix}$$

are non-singular matrices. The poles of $P(s)$ are at -4.6101 , -3.8568 , 4.6101 and 3.8568 , and $P(s)$ has any transmission zeros, so the unstable plant $P(s)$ satisfies the p.i.p.

Suppose that the state is measurable or can be estimated. Let the control parameter be $a = 2$ and $w_h = 300$, getting stable controllers. Eq. (37) of Corollary 4.5 and Eq. (43) of Corollary 4.6 give the free parameters that solve the regulation control problem for a constant reference input in the one and two parameter feedback configurations, respectively. Also, Eq. (51) and Eq. (52) of Theorem 4.8 give the free parameters that solve the mixed sensitivity problem. The linear and non-linear models of the robot are stabilized, however, the performance of the non-linear model is ameliorated in the feedback configurations of Figures 1 and 2. So, in order to improve the performance, compensating the fast dynamics of the non-linear model, the control parameter must be increased to $a = 4$ and $w_h = 600$. The small gain Theorem (see Zhou et al. (1996)) for an output multiplicative uncertainty model is $\|T_o(s)\|_\infty \gamma(\Delta) < 1$, where $\gamma(\Delta)$ is the finite gain of the non-linear uncertainty Δ . Thus, stability is guaranteed under Δ , minimizing $\|T_o(s)\|_\infty$ as is done increasing the values of the control parameter a and w_h , setting the non-linear uncertainties under the set of allowable uncertainties. Using MatLab-Simulink the outputs are shown in Figures 10 and 11 for the regulation control problem and in Figures 12 and 13 for the mixed sensitivity problem. These were realized using the one and two parameter stabilizing controllers given by Eq. (16) and by Eq. (17) of Theorem 4.2, for the non-linear model of the two d.o.f. planar rotational robot, in the feedback configurations of Figures 1 and 2. The reference input is $y_d(t) = [\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ and the initial condition $x(0) = [-\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, under the additive disturbances at the measure $d_m(t) = 0.1 \sin(1000t)$, and at the output $d_o(t) = 0.1$ for $t > 6$.

Figures 10 and 12 show that the regulation and mixed sensitivity problems are solved stabilizing the non-linear model of the robot, in spite of the disturbances and uncertainties that are attenuated at the regulated output. As expected the disturbance at the output $d_o(t)$ is well attenuated for the regulation problem (see Fig. 10), and generates a small stationary state error

Figure 10. Step response for one and two parameter controllers, under $d_0(t)$ and $d_m(t)$ Figure 11. Plant input $u(t)$ for one and two parameter controllers under $d_0(t)$ and $d_m(t)$ Figure 12. Step response for one and two parameter controllers, under $d_0(t)$ and $d_m(t)$ Figure 13. Plant input $u(t)$ for one and two parameter controllers under $d_0(t)$ and $d_m(t)$

for the mixed sensitivity problem (see Fig. 12), while the disturbance at the measurement $d_m(t)$ is well attenuated in Fig. 13 than in Fig. 11. In both problems, as shown by Figures 11 and 13 the magnitude of the plant input is smaller for the two-parameter feedback configuration than for the one-parameter feedback configuration. Figures 10 and 12 show that the overshoot of $q_1(t)$ and $q_2(t)$ are smaller and bigger, respectively, for the two-parameter feedback configuration than for the one-parameter feedback configuration. The stationary state error of Fig. 12 can be diminished as w_h increase, the price to pay is a small high frequency bandwidth for attenuation of $d_m(t)$. Also, the magnitude of the plant input can be diminished, as the value of a decrease, but the time response, and the set of allowable uncertainties are diminished.

If the state is not measurable or cannot be estimated, and if $C_{12} = 0$, then, the free parameters that solve the mixed sensitivity problem are given by Eq. (67) and Eq. (68) of Theorem 4.9, for the one and two parameter feedback configurations, respectively. Let $a = 4$ and $w_h = 600$, using MatLab-Simulink the outputs are shown in Figures 14 and 15. These were realized using the one and two parameter stabilizing controllers given by Eq. (31) and by Eq. (32) of Theorem 4.4, for the non-linear model of the two d.o.f. planar rotational robot, in the feedback configurations of Figures 1 and 2. The reference input is $y_d(t) = [\pi/2 \ 0]^T$ and the initial condition $x(0) = [-\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, under $d_m(t) = 0.1 \sin(1000t)$ and $d_0(t) = 0.1$ for $t > 6$.

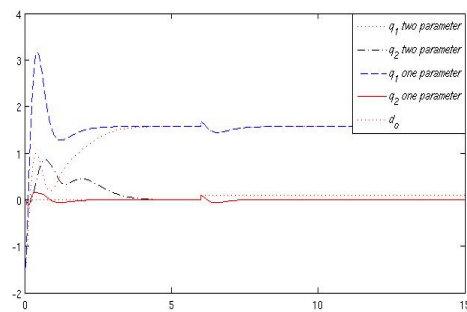


Figure 14. Step response for one and two parameter controllers, under $d_0(t)$ and $d_m(t)$

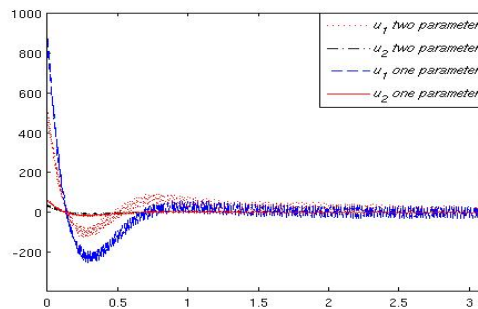


Figure 15. Step response for two parameter controller, under $d_0(t)$ and $d_m(t)$

Fig. 14 shows that the mixed sensitivity problem is solved and the stabilization of the plant is accomplished under the non-linear uncertainties of the robot. Also, the disturbances $d_0(t)$ and $d_m(t)$ are well attenuated at the regulated output $y(t)$, having a small stationary state error. In the one-parameter feedback configuration, the overshoot of $q_1(t)$ and $q_2(t)$ is bigger and lower, respectively, for almost the same time response, than in the two-parameter feedback

configuration. Figures 11, 13 and 15 show that the magnitude of the plant input $u(t)$ is bigger if $C_{12} = 0$ than for full state information.

6. Conclusions

MIMO, strictly proper, lumped, LTI and strongly stabilizable systems with a stabilizable and detectable realization are considered. In particular, fully actuated Euler-Lagrange systems expressed in state space equations are considered. The states are given by the generalized coordinates of position and velocity, this implies that the dimension of the state is even and the dimension of the input is half the dimension of the state. The used approach is to apply algebraic results on a plant in terms of its state space realization. Right and left coprime factorisations over the set of proper and stable rational functions are presented. Also, a solution to the doubly coprime factorisation for strictly proper systems, of the Diophantine equation for full state information systems, and analytic expression for the family of all one and two parameter stabilizing controllers, are proposed. Conditions to get stable controllers are given. Also, analytic expressions for the free parameters are presented, regulating the generalized coordinates of position, rejecting constant disturbance at the input of the plant and solving a mixed sensitivity criterion. The results show that the tuning of the parameter is more complex for the one-parameter configuration and numerical errors increase the dimension of the controller. Regulation and mixed sensitivity are accomplished stabilizing the system in spite of the disturbance and uncertainties that are attenuated, and a small value of the stationary state error is having, at the regulated output. The magnitude of the plant input is smaller for the two-parameter feedback configuration and for full state information than for the one-parameter configuration and when the state is not measurable or cannot be estimated.

References

- Basile G. and Marro G. (1992), *Controlled and Conditioned Invariants in Linear Systems Theory*, Prentice Hall.
- Campos-Delgado D. U. and Zhou K. (2001), “ \mathcal{H}_∞ strong stabilization,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, 1968–1972.
- Chiang R.Y. and Safonov M.G. (1992), *Matlab Robust Control Toolbox User’s Guide*, version 2, Math Works Inc..
- Desoer C. A., Liu R., Murray J. and Sacks R. (1980), “Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, 399–412.
- Doyle J. C., Francis B. A. and Tannenbaum A. R. (1992), *Feedback Control Theory*, McMillan.
- Galindo R. (2009), “Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity,” *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, vol. 223 (17), 957–971.
- Galindo R. (2008), “Tuning of a Non-conventional Mixed Sensitivity \mathcal{H}_∞ control,” in the book *Emerging Technologies, Robotics and Control Systems*, second ed., InternationalSAR, and also in *Int. J. of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, vol. 2, 141–149 and 15–23.
- Gilbert E. (1963), “Controllability and Observability in Multivariable Control Systems,” *SIAM Journal of Control*, vol. 1, 128–151.
- Horowitz I. (1963), *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press.

- Kalman R.E. (1963), "Mathematical Description of Linear Systems," *SIAM Journal of Control*, vol. 1, 152–192.
- Kelly R. and Santibaez V. (2003), *Control de Movimientos de Robots Manipuladores*, Pearson Prentice Hall.
- Kučera V. (1979), *Discrete linear control, The polynomial equation approach*, Wiley, Chichester.
- Nett C. N., Jacobson C. A. and Balas M. J. (1984), "A connection between state-space and doubly coprime fractional representations," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 29, no. 9, 831–832.
- Vidyasagar M. (1985), *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, Massachusetts: The MIT Press Cambridge.
- Youla D. C., Bongiorno J. J. and Lu C. N. (1974), "Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants," *Automatica*, 159–173.
- Youla D. C., Jabr H. A. Bongiorno J. J. (1976), "Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 319–338.
- Zeren M. and Özbay H. (1999), "On the synthesis of stable \mathcal{H}_∞ controllers," *Trans. on Automatic Control*, vol. 44, no. 2, 431–435.
- Zhou K., Doyle J. C. and Glover K. (1996), *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall.

Control lineal estabilizante para sistemas subactuados aplicado al Pendubot

C. D. Conejo, R. Galindo, L. Carrazco

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León
San Nicolas de los Garza, Nuevo Leon 66450, Mexico

Resumen—Se presentan fórmulas explícitas de la parametrización de controladores estabilizantes de uno y dos parámetros para sistemas subactuados con información completa del estado. Se consideran sistemas Multi Entrada Multi Salida (MEMS), estrictamente propios, de parámetros concentrados y Lineales Invariantes en el Tiempo (LIT) con una realización estabilizable. Se asume que la planta es fuertemente estabilizable. Se proponen factorizaciones coprimas derecha e izquierda de la función de transferencia en términos de la realización en espacio de estado, se resuelve la ecuación Diophantina, y los controladores estabilizantes se obtienen usando la parametrización de Youla. Se dan condiciones para obtener estabilidad fuerte y se fijan los parámetros libres de los controladores estabilizantes, resolviendo los problemas de regulación, estabilidad y desempeño mediante un criterio de sensibilidad mezclada para sistemas subactuados. En el esquema de control maestro-esclavo utilizado, un número de variables de estado igual al número de entradas es controlado “directamente”, y estas variables son utilizadas como entradas para controlar “indirectamente” al resto de las variables de estado. Los resultados se aplican al sistema subactuado Pendubot.

Palabras clave: Controladores estabilizantes de uno y dos parámetros, parametrización de Youla, sensibilidad mezclada, estabilidad fuerte, sistemas subactuados, Pendubot.

I. INTRODUCCIÓN

El propósito principal es dar una fórmula explícita de la parametrización de controladores estabilizantes de dos parámetros para sistemas subactuados con información completa del estado, y fijar sus parámetros de control resolviendo un problema de sensibilidad mezclada, esto es, resolviendo simultáneamente estabilidad robusta y desempeño robusto (ver el libro de (Zhou K., Doyle J. C. and Glover K., 1996)). Se consideran sistemas MEMS, estrictamente propios, de parámetros concentrados y LIT, con una realización estabilizable y características dadas para las matrices de estado A y de entrada B . Se asume que la planta satisface la propiedad de entrelazamiento par, para asegurar que un controlador estable existe dentro del conjunto de controladores estabilizantes, *i.e.*, que la planta es fuertemente estabilizable. Un controlador estable es importante por razones prácticas como rompimiento de lazo, falla o para minimizar errores numéricos.

Los sistemas subactuados son aquellos que tienen menos actuadores que grados de libertad, esto se debe al diseño o a la falla de algún componente. Algunas aplicaciones

son submarinos, robots, vehículos autónomos y satélites (Wojciech Blajer, Krzysztof Kolodziejczyk, 2008), (Galindo R., Lozano R., 2000), (Andrew R. Teel, Oliver E. Kaiser, Richard M. Murray, 1997), (James N. Rozak, Asok Ray, 1997), (Jerome D., 1996) y (Spong M. W., 1995). En el esquema de control *maestro-esclavo* utilizado, un número de variables de estado igual al número de entradas es controlado “directamente”, y estas variables son utilizadas como entradas para controlar “indirectamente” al resto de las variables de estado, gracias al acoplamiento dinámico que existe entre ellas. En este esquema, al sistema *maestro* se le asocia una dinámica directa (*d.d.*) y al sistema *esclavo* una dinámica indirecta (*d.i.*).

El control de sensibilidad mezclada (Zhou K., Doyle J. C. and Glover K., 1996) es un método de diseño de lazo cerrado basado en la minimización de la norma H_∞ de la función de sensibilidad a la salida, mejorando el desempeño y la atenuación de perturbaciones aditivas a la salida, y en la minimización de la norma H_∞ de la función de transferencia de la salida a la entrada de la incertidumbre, preservando estabilidad bajo incertidumbres.

La parametrización de todos los controladores estabilizantes da una solución al problema de síntesis de controladores LIT como lo proponen (Vidyasagar M., 1985), (Desoer C. A., Liu R., Murray J. y Saeks R., 1992), (Kučera V., 1979) y (Youla D. C., Jabr H. A. Bongiorno J. J., 1976). Los controladores estabilizan una planta dada y los problemas de desempeño pueden resolverse por medio de la correcta elección de sus parámetros libres. Hay pocos algoritmos para obtener expresiones analíticas de los controladores estabilizantes (Nett C. N., Jacobson C. A. and Balas M. J., 1984). En la sección V se aplican resultados algebraicos sobre una planta en términos de su realización en espacio de estado. Primero, se obtienen factorizaciones coprimas derecha e izquierda (f.c.d. y f.c.i., respectivamente) de la función de transferencia sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables, como lo ha hecho (Desoer C. A., Liu R., Murray J. y Saeks R., 1992). Entonces, se resuelve la ecuación Diophantina derecha (ver el libro de (Vidyasagar M., 1985)) y finalmente se dispone de la familia de todos los controladores estabilizantes a través de la parametrización de Youla como lo proponen (Kučera V., 1979) y (Youla D. C., Jabr H. A. Bongiorno J. J., 1976). La solución propuesta de la parametrización de todos los controladores estabilizantes

para sistemas con información completa del estado de la sección V, es menos compleja con respecto a la de (Galindo R., 2009). El cambio de coordenadas usado en (Galindo R., 2009) para asegurar que la factorización pertenece al conjunto de funciones racionales propias y estables, no se requiere para la factorización propuesta, disminuyendo los parámetros de control y el esfuerzo computacional.

La estabilización fuerte y la parametrización de todos los controladores estabilizantes de dos parámetros se revisa en la sección II. La clase de sistemas considerada está dada en las secciones III y IV. En la sección IV se propone una transformación del modelo de Euler-Lagrange para subactuados tal la d.d. y la d.i. cumplan con la condición de que la dimension del estado sea par y sea el doble de la dimension de la entrada, y el esquema *maestro-esclavo* para las d.d. y las d.i.. Los resultados principales se presentan en la sección V. Además, se fijan los parámetros libres r y q de los controladores estabilizantes de uno y dos parámetros, resolviendo un problema de sensibilidad mezclada de forma explícita. Los resultados se aplican al sistema subactuado Pendubot en la sección VI.

Notacion. $\mathfrak{R}(s)$ y $\mathfrak{RH}_\infty(s)$ denotan los conjuntos de funciones racionales de la variable compleja s con coeficientes reales y de propias y estables, respectivamente; \mathfrak{R} el conjunto de números reales; $A_l := \lim_{s \rightarrow 0} A(s)$ y $A_h := \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ son las aproximaciones asintóticas de una matriz $A(s) \in \mathfrak{R}(s)$, en bajas y altas frecuencias, respectivamente; $e I_p$ la matriz identidad de dimensión p por p .

II. ANTECEDENTES

El problema de estabilización fuerte fue atacado por (Youla D. C., Bongiorno J. J. and Lu C. N., 1974) para plantas con una entrada y una salida, y (Vidyasagar M., 1985) extendió estos resultados a plantas MEMS, dando la siguiente propiedad de entrelazamiento par (p.e.p.),

Teorema 1. Una planta dada $P(s)$ es fuertemente estabilizable si el número de polos de $P(s)$ (contados de acuerdo a su grado McMillan) entre cada par de ceros reales, incluyendo los ceros al infinito, en el semiplano derecho, es par.

El problema de estabilización fuerte es importante por razones prácticas, como rompimiento de lazo, fallas o para minimizar errores numéricos.

La configuración de control de un parámetro se muestra en la Fig. 1 (ver (Horowitz I., 1963) y (Vidyasagar M., 1985)), donde $P(s)$ representa la planta, $u(s)$ y $y(s)$ son la entrada y salida de la planta, $e(s)$ es la señal de error, y $d_i(s)$, $d_o(s)$ y $d_m(s)$ son perturbaciones externas a la entrada, a la salida y en la medición de la planta, respectivamente. Se asume en lo que sigue que la norma \mathcal{H}_2 de las perturbaciones es acotada. La entrada de la planta $u(s)$ es generada por una señal independiente, $u(s) = K(s)e(s)$, donde $K(s)$ es el controlador de un parámetro. Una versión de configuración de control de dos parámetros se muestra en la Fig. 2 (ver (Horowitz I., 1963) y (Vidyasagar M., 1985)),

donde $u(s)$ es generada por dos señales independientes diferentes, $u(s) = K_r(s)y_d(s) - K(s)y(s)$, donde $y_d(s)$ es la entrada de referencia y $\begin{bmatrix} K(s) & K_r(s) \end{bmatrix}$ es el controlador de dos parámetros,

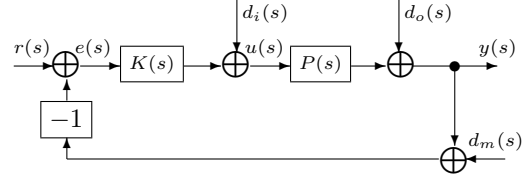


Figura 1. Sistema de lazo cerrado con controlador de un parámetro.

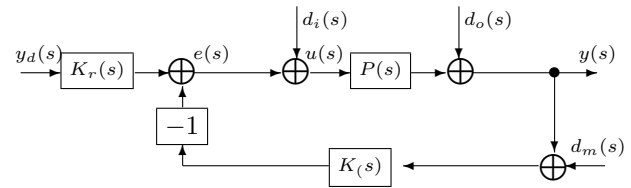


Figura 2. Sistema de lazo cerrado con controlador de dos parámetros.

La parametrización de todos los controladores estabilizantes de dos parámetros como lo propone (Vidyasagar M., 1985), está dada por,

Teorema 2. Suponga que $P(s) \in \mathfrak{R}^{p \times m}(s)$, $K_r(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ y $K(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ en la configuración retroalimentada de la Fig. 2. Sean $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$ y $\tilde{P}(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ cualesquier f.c.d. y f.c.i. de $P(s)$ con $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{D}(s)$ y $\tilde{N}(s)$ perteneciendo a \mathfrak{RH}_∞ . Entonces, el conjunto de todos los controladores que estabilizan $P(s)$ está dado por,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} &= \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_k(s) \end{bmatrix} \\ \tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son parámetros libres satisfaciendo $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$, y $X(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $Y(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son la solución de la ecuación Diophantina,

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m \quad (2)$$

En la Fig. 2 el controlador $K_r(s)$ es usado para mejorar la regulación o el seguimiento y el controlador $K(s)$ garantiza estabilidad interna en las Fig. 1 y Fig. 2. Si $K_r(s)$ es inestable, su salida crece sin límite, una alternativa es obtener un denominador coprimo común, $\tilde{D}_k(s)$, de ambos controladores (ver (Vidyasagar M., 1985)), ésto es, $K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s)$ y $K_r(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)Q(s)$.

En la sección V se presenta una solución analítica de la parametrización de todos los controladores estabilizantes para sistemas con información completa del estado, aplicable a la clase de sistemas dada en la siguiente sección.

III. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

Considere una realización causal, LIT y estabilizable (F, G, H) de un sistema, ésto es, el subsistema no controlable es estable. Considere en lo que sigue el subsistema controlable, *i.e.*, la realización mínima. Más aún, dado que todas las entradas de $u(t)$ son linealmente independientes, sin pérdida de generalidad, un cambio de base puede seleccionarse, obteniendo la realización $(A, [0 \ B_m^T]^T, C)$ en nuevas coordenadas, donde $B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular. Además, se asume que el estado es medible o se puede estimar, que $n = 2m$ y que se particiona $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de acuerdo a la partición a bloques de $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, donde $A_{11} = 0$ y A_{12} es una matriz no singular, ésto es,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \\ C &= I_n \end{aligned} \quad (3)$$

donde $A_{12} = I_m$ es modificado a diferencias de como se muestra por (Galindo R., 2009), debido a que se usa una representación en variables de estado conveniente para la formulación E-L con información completa del estado y completamente actuada, es una clase de sistemas dinámicos no lineales que tiene una realización linealizada de la forma (3) satisfaciendo $n = 2m$, donde n es la dimension del estado y m es la dimension de la entrada, mientras que la formulación E-L para sistemas subactuados es,

$$\ddot{q}(t) = M^{-1}(q(t)) \left(\begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} - C(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) - G(q(t)) \right) \quad (4)$$

donde $M(q(t)) \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$ denota la inercia, $C(q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$ la matriz de Coriolis-centrípeta, $G(q(t)) \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}}$ la fuerza de gravedad, $\tau(t) \in \mathbb{R}^m$ la fuerza generalizada, siendo $m \leq \frac{n}{2}$ y $q(t) \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}}$, $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}}$ y $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}}$ las coordenadas generalizadas de posición, velocidad y aceleración, respectivamente.

La formulación para sistemas subactuados no cumple con $n = 2m$, por esto, se propone en la siguiente sección una transformación para (4) y así obtener la estructura de la realización en espacio de estados para las *d.d.* y para las *d.i.* que tienen la estructura dada por (3), satisfaciendo cada una $n = 2m$, lo cual se requiere para las factorizaciones propuestas y para los resultados principales presentados en seguida.

IV. MODELO E-L PARA SUBACTUADOS

Se transforma el modelo (4), ya que se necesita la representación en variables de estado de la forma (3). Para esto, se propone una matriz de transformación, que haga cero el elemento de *d.i.*. En el caso $n = 2$ y $m = 1$ de acuerdo a $n = 2m$, la submatriz de la transformación multiplica a la ecuación de q_2 , y deja como entrada de control la salida de q_1 , para después poder separar al sistema en uno con *d.d.* (q_1) que controle a la *d.i.* (q_2).

A continuación, se particiona $M^{-1}(q(t))$ acorde a las dimensiones de $\tau(t)$,

$$M^{-1}(q(t)) \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q(t)) & M_{12}(q(t)) \\ M_{21}(q(t)) & M_{22}(q(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$M^{-1}(q(t)) \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q(t))\tau(t) \\ M_{21}(q(t))\tau(t) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Como $\tau(t)$ se presenta para las *d.i.*, se propone T tal que $M_{21}(q(t))\tau(t) = 0$, linealizando primero $M^{-1}(q(t))$ alrededor del punto de equilibrio q_e , solamente para obtener la matriz de transformación constante $q(t) = T^{-1}\bar{q}(t)$ que se aplica a (4), quedando representados en la forma (3) la *d.d.* y la *d.i.*,

$$M^{-1}(q(t))|_{q_e} = \begin{bmatrix} M_{11}(q_e) & M_{12}(q_e) \\ M_{21}(q_e) & M_{22}(q_e) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M_{21}(q_e)M_{11}^{-1}(q_e) & I \end{bmatrix}, \quad (8)$$

así,

$$TM^{-1}(q_e) \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q_e)\tau(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

El modelo (4) transformado es,

$$\ddot{\bar{q}}(t) = TM^{-1}(T^{-1}\bar{q}(t)) \left(\begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} - C(T^{-1}\bar{q}(t), T^{-1}\dot{\bar{q}}(t))T^{-1}\dot{\bar{q}}(t) - G(T^{-1}\bar{q}(t)) \right) \quad (10)$$

$$\ddot{\bar{q}}(t) = \hat{M}(q(t)) \left(\begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} - \hat{C}(q(t), \dot{q}(t))\dot{\bar{q}}(t) - \hat{G}(q(t)) \right), \quad (11)$$

donde $\hat{M}(q(t)) = TM^{-1}(q(t))$, $\hat{C}(q(t), \dot{q}(t)) = C(q(t), \dot{q}(t))T^{-1}$ y $\hat{G}(q(t)) = G(q(t))$. La matriz de transformación (8) es constante e invertible, por lo tanto $q(t) = T^{-1}\bar{q}(t)$ y $\bar{q}(t) = Tq(t)$, que es utilizado para obtener (11). Lo que se logra se observa en la sección VI en la cual, después de linealizar en los puntos de equilibrio ($q_e = cte.$ y $\dot{q}_e = 0$) y cancelar el acoplamiento dinámico por retroalimentación en las *d.d.*, donde la representación en variables de estado de la *d.d.* y de la *d.i.* se definen a partir de,

$$\begin{bmatrix} x_{1d}(t) \\ x_{2d}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_d(t) \\ \dot{\bar{q}}_d(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

y

$$\begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_i(t) \\ \dot{\bar{q}}_i(t) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Obteniendo representaciones en variables de estado, que cumplen con la condición $n = 2m$ y la forma (3). Por lo tanto, la matriz de transformación propuesta (8), lleva a la representación del sistema en la forma (3). Las funciones

complementarias de un parámetro de la Fig. 1 y dos parámetros de la Fig. 2 en (Vidyasagar M., 1985) son

$$T_o(s) = N(s)\tilde{N}_k(s) \quad (14)$$

$$T_o(s) = N(s)Q(s) \quad (15)$$

respectivamente. Se muestra el esquema maestro-esclavo en la Fig. 3, donde $T_o(s)$ representa la función complementaria de un parámetro (14) del esquema de la *d.d.* en la Fig. 1. Sea $P_i(s)$ la función de transferencia de la representación en variables de estado de la *d.i.* (13), y

$$P_n(s) = P_i(s)T_o(s). \quad (16)$$

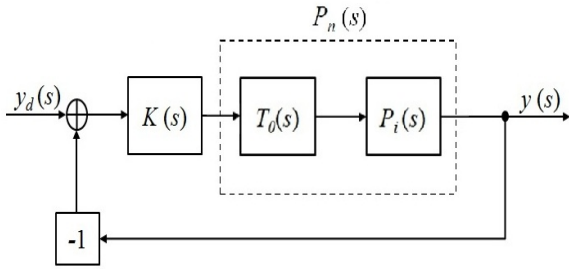


Figura 3. Esquema maestro-esclavo de un parámetro.

Así, el esquema maestro-esclavo en la Fig. 4, donde $T_o(s)$ representa la función complementaria de dos parámetros (15) del esquema de la *d.d.* en la Fig. 2 y sea (16) la función de transferencia de la representación en variables de estado de la *d.i.* (13).

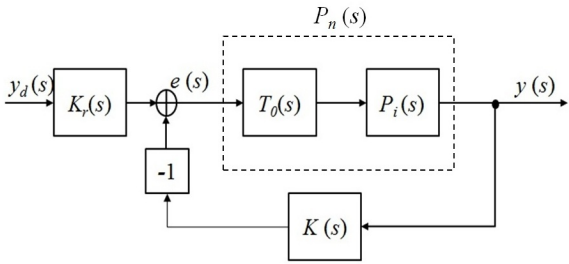


Figura 4. Esquema maestro-esclavo de dos parámetros.

En la siguiente sección se obtienen las formulaciones de la familia de controladores estabilizantes.

V. CONTROLADORES ESTABILIZANTES

f.c.i. y f.c.d. de la planta y una solución analítica de la ecuación Diophantina se presentan en,

Lema 1. Considere la realización en espacio de estado dada por la Ec. (3) satisfaciendo $n = 2m$ donde n es la dimensión del estado y m es la dimensión de la

entrada. Entonces, f.c.i. y f.c.d. propuestas, de la función de transferencia $(sI_n - A)^{-1}B$ sobre \mathfrak{RH}_∞ son,

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ sB_m \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix}, D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \quad (18)$$

respectivamente, donde $0 < a \in \mathfrak{R}$, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ y I_m son matrices no singulares y,

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2I_m - sA_{22} - A_{21}) \quad (19)$$

Además, una solución analítica de la Ec. Diophantina (2) para la f.c.d. de la Ec. (18) sobre \mathfrak{RH}_∞ es,

$$X(s) = [a^2I_m^{-1} + I_m \quad M] \text{ y } Y(s) = B_m \quad (20)$$

donde $M := 2aI_m + A_{22}$.

Prueba. Multiplicando $(sI_n - A)^{-1}$ por B y usando (ver (Zhou K., Doyle J. C. and Glover K., 1996)),

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} * & -N_{11}^{-1}N_{12}\Phi^{-1} \\ * & \Phi^{-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde $*$ denota cualquier valor finito, y N_{11} y $\Phi := N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12}$ son matrices no singulares. Entonces,

$$(sI_n - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^2}\Gamma^{-1}(s)B_m \\ \frac{s}{(s+a)^2}\Gamma^{-1}(s)B_m \end{bmatrix} \quad (22)$$

Considere la transformación bilineal usada en (Doyle J. C., Francis B. A. y Tannenbaun A. R., 1992) y (Zhou K., Doyle J. C. and Glover K., 1996), $s = (1/\lambda) - a$, que simplifica las factorizaciones de $P(s)$ y la solución de la Ec. Diophantina en el anillo de polinomios en λ , además, la solución en s pertenece a \mathfrak{RH}_∞ . Así,

$$(sI_n - A)^{-1}B \Big|_{s=\frac{1}{\lambda}-a} = \begin{bmatrix} \lambda^2\Gamma^{-1}B_m \\ \lambda(1-a\lambda)\Gamma^{-1}(\lambda)B_m \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde $\Gamma(\lambda) := \lambda^2(a^2I_m + aA_{22} - A_{21}) - \lambda M + I_m$. Por lo tanto, f.c.i. y f.c.d. de la Ec. (23) son,

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \tilde{N}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^2}B_m \\ \frac{s}{(s+a)^2}B_m \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^2}I_m \\ \frac{s}{(s+a)^2}I_m \end{bmatrix}, D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \quad (25)$$

respectivamente. Así, una solución analítica de $X(\lambda)N(\lambda) + Y(\lambda)D(\lambda) = I_m$ para la Ec. (25) es,

$$X(s) = [a^2I_m^{-1} + I_m \quad M] \text{ y } Y(s) = B_m \quad (26)$$

Dado que $\tilde{D}(\lambda)$, $\tilde{N}(\lambda)$, $N(\lambda)$ y $D(\lambda)$ son polinomios en λ , entonces $\tilde{D}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $N(s)$ y $D(s)$ pertenecen a \mathfrak{RH}_∞ . Aplicando $\lambda = 1/(s+a)$ a las Ec. (24), Ec. (25) y Ec. (26), se siguen los resultados de las Ec. (17), Ec. (18) y Ec. (20).

Los resultados del Lema 1 son menos complejos con respecto a los de (Galindo R., 2009). En la prueba del Lema 1 se invierte la planta $P(s)$ antes de aplicar la transformación bilineal $s = (1/\lambda) - a$. Así, las factorizaciones pertenecen a \mathfrak{RH}_∞ y no se necesita el cambio de coordenadas usado en (Galindo R., 2009), disminuyendo los parámetros de control y el esfuerzo computacional para las factorizaciones del Lema 1.

Si A_{11} en la matriz de estado A no es cero, entonces Φ en (21) tendrá un término $sI_m - A_{11}$ que impide obtener la f.c.i. de $P(s)$.

Basándose en el Lema 1 la parametrización de todos los controladores estabilizantes de dos parámetros está dada por,

Teorema 3. *Considere la realización en espacio de estado dada por la Eq. (3) en la configuración retroalimentada de la Fig. 2, satisfaciendo $n = 2m$ donde n es la dimensión del estado y m es la dimensión de la entrada. Entonces, el conjunto de todos los controladores de dos parámetros que estabilizan la Ec. (3) es,*

$$\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} = \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_k(s) \end{bmatrix} \quad (27)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k(s) &= \left(I_m - \frac{1}{(s+a)^2} (R_1(s) + sR_2(s)) \right) B_m \\ \tilde{N}_k(s) &= \\ \begin{bmatrix} a^2 I_m^{-1} + A_{21} + R_1(s)\Gamma(s) & M + R_2(s)\Gamma(s) \end{bmatrix} \\ Q(s) &= \begin{bmatrix} Q_1(s) & Q_2(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

siendo $R_i(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ satisfaciendo $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$ y $Q_i(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$, $i = 1, 2$, parámetros libres, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ una matriz no singular, $0 < a \in \mathfrak{R}$ $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2) (s^2 I_m - sA_{22} - A_{21})$, $i = 1, 2$, y $M := 2aI_m + A_{22}$. Más aún, suponga que $(sI_n - A)^{-1}B$ satisface la p.e.p. y,

$$\det(s^2 I_m + s(2aI_m - R_2(s)) + a^2 I_m - R_1(s)) \quad (29)$$

es un polinomio Hurwitz, entonces la Ec. (27) es estable, i.e., el controlador $\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix}$ pertenece a \mathfrak{RH}_∞ .

Prueba. Sea $R(s) := \begin{bmatrix} R_1(s) & R_2(s) \end{bmatrix} \in \mathfrak{RH}_\infty$. El resultado de las Ec. (27) se sigue directamente de la Ec. (1) reemplazando la Ec. (17), Ec. (18) y Ec. (20)

Dado que $(sI_n - A)^{-1}B$ satisface la p.e.p. entonces, existe un controlador estable $\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix}$ dentro de la familia de controladores estabilizantes. Si $\det(\tilde{D}_k(s))$ es un polinomio Hurwitz entonces $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$. Dado que $s = -a$ es un polo estable y B_m es una matriz no singular, $K(s)$ y $K_r(s)$ son estables si (29) es un polinomio Hurwitz. ■

La estabilidad del controlador de dos parámetros depende de a y $R_i(s)$, $i = 1, 2$. En particular si $R_i(s)$, $i = 1, 2$ son $r_i I_m$ donde $r_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2$, entonces, (29) es un polinomio Hurwitz si,

$$r_1 < a^2 \text{ y } r_2 < 2a \quad (30)$$

Dado que $\tilde{N}(s)$ es una matriz larga de dimensión $n \times m$, entonces, $\tilde{N}(s)$ no tiene una inversa a la derecha y por lo tanto la Eq. Diophantina izquierda $\tilde{N}(\lambda)\tilde{X}(\lambda) + \tilde{D}(\lambda)\tilde{Y}(\lambda) = I$ no tiene una solución.

V-A. Controladores estabilizantes del esquema maestro-esclavo

A partir de la función complementaria de un parámetro (14) de (Vidyasagar M., 1985) de la d.d. de (28) en el esquema de la Fig. 3, se tiene que

$$T_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^2} I_m \\ \frac{s}{(s+a)^2} I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) + R_1(s)\tilde{D}(s) \end{bmatrix} \quad (31)$$

donde (31) es una matriz con entradas y salidas de posición y su derivada (velocidad), y sólo se requiere la información de posición que brinda el elemento $T_{o(1,1)}(s)$ de (14), ya que la derivada (velocidad) es cero; de (31) se tiene

$$T_{o(1,1)}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} (a^2 I_m + A_{21} + R_1(s)\Gamma_d(s)). \quad (32)$$

Del esquema maestro-esclavo de un parámetro de la Fig. 3, se tienen la f.c.i. y la f.c.d. de $P_n(s)$ de los resultados del Lema 1, sean \tilde{N}_i , \tilde{D}_i Γ_i de la d.i. y Γ_d de la d.d.,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_e(s) &= \tilde{D}_i(s), \\ \tilde{N}_e(s) &= \tilde{N}_i(s) (a^2 I_m + A_{21} + R_1(s)\Gamma_d(s)) \\ N_e(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^4} I_m \\ \frac{s}{(s+a)^4} I_m \end{bmatrix}, \\ D_e(s) &= (a^2 I_m + A_{21} + R_1(s)\Gamma_d(s))^{-1} B_{mi}^{-1} \Gamma_i(s) \end{aligned} \quad (33)$$

Así, de (33), se obtiene la solución de la Ecuación de Diophantina para la Fig. 3, donde los sistemas de d.d. y d.i. de la forma (3) sus elementos se consideran escalares, de manera que

$$\begin{aligned} X_e(s) &= \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \end{bmatrix} \\ Y_e(s) &= \\ \left(I_m + \frac{y_1}{(s+a)} + \frac{y_2}{(s+a)^2} \right) B_{mi} (a^2 I_m + A_{21} + R_1\Gamma_d(s)) \end{aligned}, \quad (34)$$

donde

$$x_0 = 6a^2 A_{21} + 4aA_{21}A_{22} + A_{21}^2 + A_{21}A_{22}^2 + a^4 I_m \quad (35)$$

$$x_1 = 6a^2 A_{22} + 4aA_{22}^2 + 4A_{21}a + A_{22}^3 + 2A_{21}A_{22} + 4a^3 I_m \quad (36)$$

$$y_1 = A_{22} + 2aI_m \quad (37)$$

$$y_2 = 3aA_{22} + A_{22}^2 + A_{21} + 3a^2 I_m \quad (38)$$

siendo $\Gamma_d(s)$ el complemento de Shur de (14) de la d.d. y $\Gamma_i(s)$ el complemento de Shur de la d.i., y así aplicar (33) y (34), en (28) y (27) para obtener los controladores estabilizantes de un parámetro de la Fig. 3.

Respecto a los controladores de dos parámetros (15) (ver (Vidyasagar M., 1985)) de la *d.i.* de (28) del esquema de la Fig. 4, se tiene que

$$T_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^2} I_m \\ \frac{s}{(s+a)^2} I_m \end{bmatrix} [Q_1(s) \quad Q_2(s)] \quad (39)$$

donde (39) es una matriz con entradas y salidas de posición y su derivada (velocidad), y sólo se requiere la información de posición que brinda el elemento $T_{o(1,1)}(s)$ de (15), ya que la derivada (velocidad) es cero; de (39) se tiene

$$T_{o(1,1)}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} Q_1(s) \quad (40)$$

Del esquema maestro-esclavo de dos parámetros de la Fig. 4, se tienen la f.c.i. y la f.c.d. de $P_n(s)$ de los resultados del Lema 1, sean $\tilde{N}_i, \tilde{D}_i, D_i$ de la *d.i.* y Γ_d de la *d.d.*,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_e(s) &= \tilde{D}_i(s), \\ \tilde{N}_e(s) &= \tilde{N}_i(s) Q_1(s) \frac{1}{(s+a)^2}, \\ N_e(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^4} I_m \\ \frac{s}{(s+a)^4} I_m \end{bmatrix}, \\ D_e(s) &= Q_1^{-1}(s) D_i(s) \end{aligned} \quad (41)$$

Así, de (41), se obtiene la solución de la Ecuación de Diophantina para la Fig. ??, donde los sistemas de *d.d.* y *d.i.* de la forma (3) sus elementos se consideran escalares, de manera que

$$\begin{aligned} X_e(s) &= [x_0 \quad x_1] \\ Y_e(s) &= \left(I_m + y_1 \frac{1}{(s+a)} + y_2 \frac{1}{(s+a)^2} \right) B_{mi} Q_1(s) \end{aligned} \quad (42)$$

donde

$$x_0 = 6a^2 A_{21} + 4a A_{21} A_{22} + A_{21}^2 + A_{21} A_{22}^2 + a^4 I_m \quad (43)$$

$$x_1 = 6a^2 A_{22} + 4a A_{22}^2 + 4A_{21} a + A_{22}^3 + 2A_{21} A_{22} + 4a^3 I_m \quad (44)$$

$$y_1 = A_{22} + 2a I_m \quad (45)$$

$$y_2 = 3a A_{22} + A_{22}^2 + A_{21} + 3a^2 I_m \quad (46)$$

y así aplicar (41) y (42), en (28) y (27) para obtener los controladores estabilizantes de dos parámetros de la Fig. 4.

V-B. Problema de sensibilidad mezclada

Se considera la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ de una aproximación de bajas frecuencias de la función de sensibilidad a la salida $\|S_{ol}\|_\infty$ y altas frecuencias de la función de transferencia de la salida a la entrada de la incertidumbre $\|T_{u\Delta y\Delta h}\|_\infty$, respectivamente, (ver (Galindo R., 2008)). Este problema involucra la minimización simultánea de $\|S_{ol}\|_\infty$ y de $\|T_{u\Delta y\Delta h}\|_\infty$, esto es, $\min_{K(s)} \|S_{ol}\|_\infty$ sujeto a,

$$\|T_{u\Delta y\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty \quad (47)$$

Este problema es resuelto fijando los parámetros libres r y q de los controladores estabilizantes, cuando la entrada de referencia de velocidad es cero. Una solución exacta a (47) para sistemas con información completa del estado, donde $A_{12} = I_m$ en (3), se propone en,

Teorema 4. *Considere la realización en espacio de estado dada por la Ec. (3) de la planta $(sI_n - A)^{-1} B$ en el esquema de la Fig. 1 y 2. Suponga que $K(s)$ está dado por el Teorema 3. Sea la entrada de referencia del estado $y_d(t) = [y_{d1}(t) \quad 0]^T$, el parámetro libre $R_1(s) = rI_m \in \mathfrak{RH}_\infty$, $R_2(s) = 0 \in \mathfrak{RH}_\infty$, $Q_1(s) = qI_m \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $Q_2(s) = 0 \in \mathfrak{RH}_\infty$. Entonces, los valores óptimos de r y q para un modelo de la incertidumbre multiplicativo a la salida son,*

$$r = \frac{a^2 (\|A_{21}\|_\infty - a^2 b)}{a^4 m + \|A_{21}\|_\infty} \quad (48)$$

y

$$q = \frac{a^2 w_h}{a^2 + w_h} \quad (49)$$

respectivamente donde $b = \frac{1}{w_h} \|a^2 I_m + A_{21}\|_\infty$ y $m = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{w_h} \|2a^2 I_m + A_{21}\|_\infty - b \right)$.

Prueba. La función de transferencia $T_o(s)$ está dada por (14) (ver (Vidyasagar M., 1985)) en la configuración retroalimenta de un parámetro de la Fig. 1. Dado que $R_1(s)$ es rI_m y $R_2(s) = 0$, entonces, de (18) las aproximaciones de altas y bajas frecuencias de $T_o(s)$ y $S_o(s) := I_n - T_o(s)$ son,

$$T_{oh} = \frac{1}{w_h} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a^2 I_m + A_{21} + R_1 & 2a I_m + A_{22} \end{bmatrix} \quad (50)$$

y

$$S_{ol} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a^2} (I_m - \frac{1}{a^2} R_1) A_{21} & \frac{-2}{a} I_m - \frac{1}{a^2} A_{22} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (51)$$

respectivamente. Dado que $Q_1(s)$ es qI_m y $Q_2(s) = 0$, entonces, de (18) las aproximaciones de altas y bajas frecuencias de $T_o(s)$ y $S_o(s) := I_n - T_o(s)$ son,

$$T_{oh} = \frac{1}{w_h} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q I_m & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

y

$$S_{ol} = \begin{bmatrix} I_m - \frac{q}{a^2} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (53)$$

Por lo tanto, de (50) y (51)

$$\begin{aligned} \|T_{oh(2,1)}\|_\infty &= \frac{1}{w_h} \|a^2 I_m + A_{21} + R_1\|_\infty, \\ \|S_{ol(1,1)}\|_\infty &= \left\| \frac{-1}{a^2} (I_m - \frac{1}{a^2} R_1) A_{21} \right\|_\infty \end{aligned} \quad (54)$$

y de (52) y (53)

$$\begin{aligned} \|T_{oh(2,1)}\|_\infty &= \frac{1}{w_h} |q|, \\ \|S_{ol(1,1)}\|_\infty &= \left| 1 - \frac{q}{a^2} \right|. \end{aligned} \quad (55)$$

Así, $\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ tiene una solución en el punto de intersección de las dos líneas rectas en las Fig. 5 y 6, *i.e.*, de la Fig. 5, implica el resultado de la Ec. (48), y de la Fig. 6, implica el resultado de la Ec. (49).

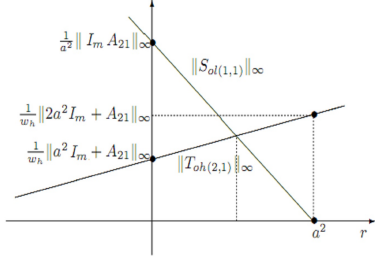


Figura 5. Sensibilidad mezclada del parámetro r .

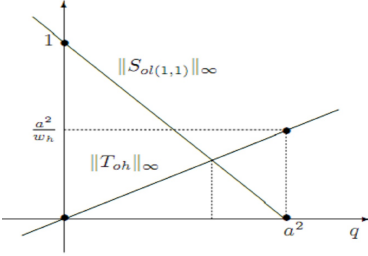


Figura 6. Sensibilidad mezclada del parámetro q .

Aunque la solución del Teorema 4 no es única, la solución propuesta asegura que existe un punto de cruce en las Figs. 5 y 6, dado que $\|S_{ol(1,1)}\|_{\infty}$ alcanza su mínimo valor conforme r y q se incrementan. Además, para la r y q propuestas, $\|T_{oh}\|_{\infty} = \|S_{ol(1,1)}\|_{\infty}$, que como se mostrará, puede minimizarse simultáneamente por la selección apropiada de los parámetros de control a y w_h .

De las Ec. (48) y (54)

$$\|S_{ol(1,1)}\|_{\infty} = \left\| \frac{-1}{a^2} \left(I_m - \frac{\|A_{21}\|_{\infty} - a^2 b}{a^4 + \|A_{21}\|_{\infty}} \right) A_{21} \right\|_{\infty}, \quad (56)$$

y de la Ec. (49) y (55)

$$\|S_{ol(1,1)}\|_{\infty} = \left| 1 - \frac{w_h}{a^2 + w_h} \right|, \quad (57)$$

en la configuración retroalimentada de uno y dos parámetros respectivamente. Si $w_h \rightarrow \infty$, entonces $b \rightarrow 0$ y $m \rightarrow 0$, así, $r \rightarrow a^2$ y del Teorema 3, si $r \rightarrow a^2$, los controladores son inestables. Por lo tanto, para a suficientemente pequeña tal que se preserve la estabilidad de los controladores, el problema de sensibilidad mezclada se resuelve incrementando w_h .

Los resultados se aplican al Pendubot en la siguiente sección.

VI. EJEMPLO (PENDUBOT)

Se abordará al ejemplo del sistema electromecánico subactuado denominado Pendubot, ya que este sistema cuenta con el acoplamiento entre dos eslabones; el primer eslabón está conectado al actuador y el segundo eslabón depende de la posición y movimiento del anterior. Debido a esto, el Pendubot es un ejemplo más de estudio para aplicar la

teoría de control. Se procederá a hacer una transformación al modelo matemático del Pendubot, para así poder aplicar la herramienta matemática obtenida (sensibilidad mezclada y la parametrización de controladores estabilizantes). Con el fin de poder llevar ambos eslabones a Top Position ($q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$) desde Bottom Position ($q_1 = -\frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$) en la Fig. 7. En las próximas subsecciones, se mostrará el modelo matemático y parámetros del Pendubot, la transformación del mismo para linealizar el sistema, aplicar los resultados y diseñar el controlador. También, se empleará el controlador obtenido para simularlo con el sistema no lineal y observar su comportamiento.

VI-A. Modelo del Pendubot.

A continuación, se muestra el diagrama utilizado del sistema Pendubot (Jerome D., 1996),

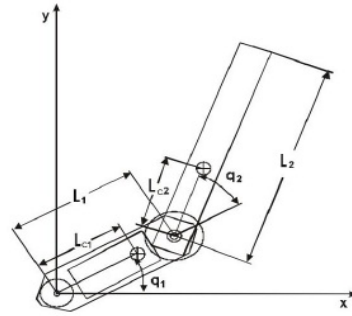


Figura 7. Pendubot.

Se presenta la ecuación dinámica de la forma E-L dada por la ecuación (4)

$$M(q(t)) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2(t) & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$C(q(t), \dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin(q_2(t)) \dot{q}_2(t) \\ \theta_3 \sin(q_2(t)) \dot{q}_1(t) \\ -\theta_3 \sin(q_2(t)) \dot{q}_2(t) - \theta_3 \sin(q_2(t)) \dot{q}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$G(q(t)) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1(t) + \theta_5 g \cos(q_1(t) + q_2(t)) \\ \theta_5 g \cos(q_1(t) + q_2(t)) \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$q(t) = [q_1(t) \quad q_2(t)]^T \quad (61)$$

siendo, $\theta_1 := m_1 L_{c1}^2 + m_2 L_1^2 + I_1$; $\theta_2 := m_2 L_{c2}^2 + I_2$; $\theta_3 := m_2 L_1 L_{c2}$; $\theta_4 := m_1 L_{c1} + m_2 L_1$; $\theta_5 := m_2 L_{c2}$; m_i es la masa del eslabón i ; L_i es la longitud total del eslabón i ; L_{ci} es la distancia al centro de masa del eslabón i ; I_i es el momento de inercia del eslabón i , alrededor de este centroide y g la aceleración de la gravedad. Los valores de estos parámetros son: $\theta_1 = 0,0761$, $\theta_2 = 0,0662$, $\theta_3 = 0,0316$, $\theta_4 = 0,9790$ y $\theta_5 = 0,3830$.

VI-B. Linealización del modelo transformado.

Se procede a linealizar por aproximación de Taylor el sistema transformado dado por la Ec. (11) en los puntos de equilibrio $q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$, y se obtiene

$$\ddot{\bar{q}}_1(t) = \frac{-g(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \bar{q}_1(t) - \frac{g(\theta_3\theta_5)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \bar{q}_2(t) + \frac{\theta_2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \tau_1(t) \quad (62)$$

$$\ddot{\bar{q}}_2(t) = \frac{-g(\theta_3^2\theta_5 - \theta_1\theta_2\theta_5)}{\theta_2(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)} \bar{q}_1(t) - \frac{g(\theta_3^2\theta_5 - \theta_1\theta_2\theta_5)}{\theta_2(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)} \bar{q}_2(t) \quad (63)$$

Entonces la representación en variables de estado del sistema con *d.d.* se desarrolla como sigue: se propone $\tau_1(t)$ tal que se cancela la dinámica de \bar{q}_2

$$\tau_1(t) = \frac{(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)\tilde{\tau}_1(t)}{\theta_2} + \frac{g(\theta_3\theta_5)}{\theta_2} \bar{q}_2(t) \quad (64)$$

Así, sustituyendo (64) en (62), se tiene que

$$\ddot{\bar{q}}_1(t) = \frac{-g(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \bar{q}_1(t) + \tilde{\tau}_1(t) \quad (65)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} x_{1d}(t) &:= \bar{q}_1(t) \\ x_{2d}(t) &:= \dot{\bar{q}}_1(t) \end{aligned} \iff \begin{aligned} \dot{x}_{1d}(t) &= x_{2d}(t) \\ \dot{x}_{2d}(t) &= \ddot{\bar{q}}_1(t) \end{aligned} \quad (66)$$

La representación en variables de estado de (65) es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1d}(t) \\ \dot{x}_{2d}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1d}(t) \\ x_{2d}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\tau}_1(t) \quad (67)$$

Ahora, definiendo

$$\begin{aligned} x_{1i}(t) &:= \bar{q}_2(t) \\ x_{2i}(t) &:= \dot{\bar{q}}_2(t) \end{aligned} \iff \begin{aligned} \dot{x}_{1i}(t) &= x_{2i}(t) \\ \dot{x}_{2i}(t) &= \ddot{\bar{q}}_2(t) \end{aligned} \quad (68)$$

La representación en variables de estado de la *d.i.*, para la cual su entrada ahora es la posición q_1 del primer eslabón, de (63)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1i}(t) \\ \dot{x}_{2i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(g(\theta_3^2\theta_5 - \theta_1\theta_2\theta_5))}{\theta_2(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-g(\theta_3^2\theta_5 - \theta_1\theta_2\theta_5)}{\theta_2(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)} \end{bmatrix} x_{1d}(t) \quad (69)$$

donde (67) y (69), tienen la forma (3) y cumplen con la condición $n = 2m$.

VI-C. Resultados

Se obtienen las *f.c.i.* (17), *f.c.d.* (18) y la solución de la *Ec. Diophantina* (20), así como también, se fijan los parámetros r (48) y q (49) de sensibilidad mezclada en (28) para el controlador de dos parámetros (27). Lo anterior se aplica para la *d.d.* (67) y la *d.i.* (69), con una $a = 25$ y $\omega_h = 1000$, debido a la velocidad de respuesta admisible del sistema.

Se muestran las siguientes gráficas con los resultados obtenidos en Matlab, aplicando los controladores lineales de dos parámetros en el modelo del Pendubot no lineal desde condiciones iniciales de Bottom Position a la referencia deseada de Top Position. Una adición de una señal de compensación constante con valor de $0,62rad$ a la entrada de la planta de la *d.i.*, y una ganancia al parámetro $Q(s)$ para mejorar la regulación de la *d.i.*, pues el esquema maestro-esclavo de la Fig. 4 favorece la regulación de la *d.d.* más que a la *d.i.* y es como necesita ser compensada la regulación de la *d.i.*.

$$R_d = [-412,9890 \quad 0], R_i = [-516,0360 \quad 0] \quad (70)$$

$$Q_d = [384,6154 \quad 0], Q_i = [2175 \quad (384,6154) \quad 0] \quad (71)$$

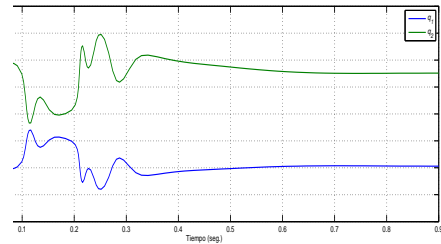


Figura 8. Gráfica de posiciones de q_1 y q_2 del Pendubot.

En la Fig. 8, se visualizan oscilaciones en el transitorio y en estado estacionario $q_1 = -4,708rad$ equivalente a $-1,4986$ vueltas y $q_2 = 12,57rad$ equivalente a $4,0012$ vueltas. Gracias a la sensibilidad mezclada de uno y dos parámetros, se obtiene un buen desempeño y seguimiento de los controladores estabilizantes lineales aplicados al sistema no lineal Pendubot.

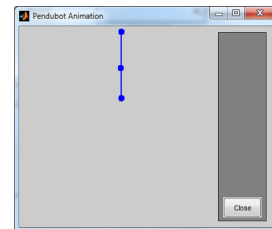


Figura 9. Animación Pendubot.

En la Fig. (9), se muestra una gráfica de una animación (Jerome D., 1996) en estado estacionario, y efectivamente se logra llevar a Top Position. Las Figs. 8 y 9 muestran que se preserva la estabilidad a pesar de la incertidumbre no lineal.

VII. CONCLUSIONES

Se consideran sistemas MEMS, de parámetros concentrados, LIT y fuertemente estabilizables con una realización estabilizable. En particular, se consideran sistemas subactuados Euler-Lagrange. Los estados están dados por las coordenadas generalizadas de posición y de velocidad. Esta clase de sistemas se requiere transformar, tal que en un esquema maestro-esclavo cada parte cumpla con la condición $n = 2m$ y una estructura de la representación en variables de estado del sistema linealizado, donde m es la dimensión de la entrada y n es la dimensión del estado. El enfoque utilizado es aplicar resultados algebraicos sobre una planta en términos de su realización en espacio de estados. Se presentan factorizaciones coprimas derecha e izquierda sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables. Además, se proponen una solución de la ecuación Diophantina para sistemas con información completa del estado, y expresiones analíticas para la familia de controladores estabilizantes de dos parámetros, para el esquema *maestro-esclavo*. En este esquema el maestro está asociado a dinámicas que se controlan directamente, y estas variables se utilizan para controlar las dinámicas indirectas asociadas al esclavo. Se dan condiciones para obtener un controlador estable. Además, se presentan expresiones analíticas para los parámetros libres y resolviendo un criterio de sensibilidad mezclada. Los resultados muestran que se logra la regulación y desempeño mediante sensibilidad mezclada estabilizando al sistema a pesar de las perturbaciones e incertidumbres que son atenuadas, y se tiene un pequeño valor del error en estado estacionario en la salida regulada. Alternativamente se puede utilizar un controlador no-lineal inicialmente y conmutar al control lineal propuesto cerca de Top Position, mejorando el desempeño.

REFERENCIAS

- Jerome D., (1996), *Mechanical design and control of the Pendubot*, Tesis de maestría de la Universidad de Illinois.
- Desoer C. A., Liu R., Murray J. y Saeks R., (1992), *Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis*, TAC pp. 399-412.
- Doyle J. C., Francis B. A. y Tannenbaum A. R., (1992), *Feedback Control Theory*, McMillan.
- Galindo R., (2009), *Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed state sensitivity*, Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering vol. 223 (I7) pp. 957-971.
- Galindo R., (2008), *Tuning of a Non-conventional Mixed Sensitivity \mathcal{H}_∞ control*, Emerging Technologies, Robotics and Control Systems second ed. InternationalSAR and also in *Int. J. of Factory Automation, Robotics and Soft Computing* pp. 141-149 and pp. 15-23.
- Horowitz I., (1963), *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press.
- Kučera V., (1979), *Discrete linear control, The polynomial equation approach*, Wiley, Chichester.
- Nett C. N., Jacobson C. A. and Balas M. J., (1984), *A connection between state-space and doubly coprime fractional representations*, TAC, vol. 29, no. 9, pp. 831-832.
- Spong M. W., (1995), *The Swing Up Control Problem For The Acrobot*, IEEE Control Systems, pp. 49-55.
- Vidyasagar M., (1985), *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, Massachusetts: The MIT Press Cambridge.
- Youla D. C., Bongiorno J. J. and Lu C. N., (1974), *Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants*, Automatica, pp. 159-173.
- Youla D. C., Jabr H. A. Bongiorno J. J., (1976), *Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case*, TAC, pp. 319-338.
- Zhou K., Doyle J. C. and Glover K., (1996), *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall.
- Galindo R., Lozano R., (2000), *Control of Under Actuated Systems. Application to a Tandem Fan in a 3-d.o.f.-Platform*, Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications pp. 686-691.
- Wojciech Blajer, Krzysztof Kolodziejczyk, (2008), *Modeling of under-actuated mechanical systems in partly specified motion*, Journal of Theoretical and applied mechanics pp. 383-394.
- James N. Rozak, Asok Ray, (1997), *Robust Multivariable Control of Rotorcraft in Forward Flight*, Journal of the American Helicopter Society pp. 149-160.
- Andrew R. Teel, Oliver E. Kaiser, Richard M. Murray, (1997), *Uniting Local and Global Controllers for the Caltech Ducted Fan*, American Control Conference.