

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS APLICADO AL  
ENCRIPTADO DE DATOS

POR

ING. ELIEZER GARZA GONZÁLEZ

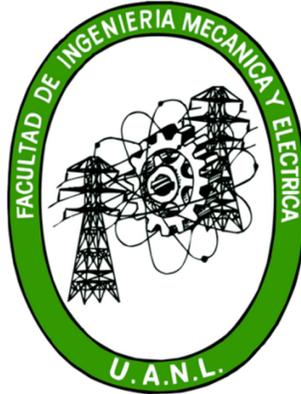
TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN  
CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

DICIEMBRE DEL 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS APLICADO AL  
ENCRIPTADO DE DATOS

POR  
ING. ELIEZER GARZA GONZÁLEZ

TESIS  
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN  
CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

DICIEMBRE DEL 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS APLICADO AL ENCRIPTADO DE DATOS**” realizada por el alumno **Ing. Eliezer Garza González**, matrícula 1143335 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis

---

Asesor  
Dr. Cornelio Posadas Castillo

---

Coasesor:  
Dr. Efraín Alcorta García

---

Coasesor:  
Dr. César Cruz Hernández

---

Vo. Bo.  
Dr. Moisés Hinojosa Rivera  
División de Estudios de Posgrado

Cd. Universitaria, a Diciembre del 2011

*Este trabajo se lo dedico a mi familia, por haberme impulsado todo este tiempo hacia adelante; y a Dios, por haberme dado la fuerza cuando más la necesité.*

# Agradecimientos

En la preparación de esta tesis recibí la ayuda y aliento de muchas personas. No tendría suficiente espacio para mencionar a todos; pero si quisiera agradecer el valioso apoyo de:

El Dr. Cornelio Posadas Castillo de quien recibí, no sólo transferencia de conocimientos, sino también apoyo, confianza y paciencia. Debo agradecerle todo el esfuerzo y tiempo que invirtió en mi, así como todas sus experiencias que hicieron que mi camino por la tesis fuera más ameno; pero sobre todo, gracias por su amistad.

Mis co-asesores el Dr. Efraín Alcorta García y el Dr. César Cruz Hernández, así como del Dr. Marco Tulio Mata Jiménez y el Dr. Alberto Cavazos González, por sus buenos consejos, no sólo en el terreno de lo académico, sino también en lo personal; que me hicieron ver el futuro con otros ojos.

Mis padres Eliezer e Irene, que nunca dejaron de confiar en mi y en mis capacidades. Su apoyo incondicional me dio valentía para afrontar los problemas del futuro y me dio una guía para hacerlo de la manera más humana y moralmente correcto. Con ustedes tengo una deuda de gratitud que no es fácilmente asequible. Espero que estén orgullosos de mi y de lo que he logrado, así como estoy orgulloso de ser su hijo.

Mi hermana Lucy, porque tus palabras y acciones siempre estuvieron cargados de amor y te encargaste de siempre regalarme una sonrisa que iluminaba los lugares más oscuros; pero sobre todo gracias por aguantarme en mis momentos más humanos.

Mis compañeros de maestría Alma, Cutberto, Edgar, Carlos, Alfredo, y Álvaro, así como el resto de mis compañeros del DIE y amigos, por haber compartido juntos esta etapa llena de presiones, angustias, sinsabores, desvelos, alegrías, emociones y muchos otros sentimientos más.

La UANL y del Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por las facilidades brindadas y por la beca otorgada para mi sostenimiento económico durante la realización de este proyecto.

# Índice general

Índice general	v
Índice de tablas	viii
Índice de figuras	ix
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación . . . . .	1
1.1.1 Caos . . . . .	1
1.1.2 Sincronía . . . . .	4
1.1.3 Redes . . . . .	6
1.1.4 Aplicación en transmisión encriptada de datos . . . . .	8
1.2 Objetivos . . . . .	10
1.3 Organización del trabajo . . . . .	12
<b>2 Caos y Sincronía</b>	<b>14</b>
2.1 Caos . . . . .	14
2.1.1 Características principales . . . . .	15
2.2 Sincronía . . . . .	18
2.2.1 Definición formal de la sincronización . . . . .	18
2.3 Introducción a la sincronización de osciladores caóticos . . . . .	20
2.3.1 Escenarios de acoplamiento . . . . .	21
2.3.2 Tipos de sincronización . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Redes Complejas</b>	<b>24</b>
3.1	Topología de redes complejas . . . . .	25
3.1.1	Redes complejas irregulares . . . . .	25
3.1.2	Redes complejas regulares . . . . .	28
3.2	Sincronización de redes complejas . . . . .	32
3.2.1	Dinámica de redes complejas . . . . .	33
3.2.2	Condiciones de sincronización . . . . .	34
3.2.3	Estabilidad de redes complejas . . . . .	35
3.3	Ejemplos de sincronización de osciladores caóticos . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Sistemas en forma Hamiltoniana generalizada</b>	<b>44</b>
4.1	Sistemas en forma Hamiltoniana generalizada . . . . .	45
4.2	Diseño no lineal de observadores en forma Hamiltoniana generalizada . . . . .	46
4.3	Ejemplos de sincronización usando la forma Hamiltoniana generalizada . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Red de osciladores en forma Hamiltoniana</b>	<b>52</b>
5.1	Dinámica de una Red de osciladores caóticos en forma Hamiltoniana . . . . .	53
5.2	Ejemplo 1: Sincronización de una red de osciladores de Lorenz en forma Hamiltoniana . . . . .	54
5.3	Ejemplo 2: Sincronización de una red de osciladores de Rössler en forma Hamiltoniana . . . . .	61
5.4	Ejemplo 3: Sincronización de una red de osciladores de Histéresis en forma Hamiltoniana . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Transmisión de información encriptada usando caos</b>	<b>74</b>
<b>7</b>	<b>Ejemplos prácticos de la transmisión de información encriptada usando caos</b>	<b>78</b>
7.1	Encriptando una imagen usando 12 nodos Rössler en red . . . . .	79
7.2	Encriptado de un mensaje de audio usando 5 nodos Histéresis en red . . . . .	88
7.3	Encriptando un video usando 3 nodos Lorenz en red . . . . .	95
7.4	Conclusiones . . . . .	102

<b>8 Conclusiones</b>	<b>103</b>
8.1 Principales contribuciones de este trabajo de tesis . . . . .	104
8.2 Trabajo futuro . . . . .	105
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>

# Índice de tablas

- 2.1 Tabla de osciladores caóticos 1 . . . . . 15
- 2.2 Tabla de osciladores caóticos 2 . . . . . 16
  
- 7.1 Resumen de ejemplos de encriptado caótico . . . . . 102

# Índice de figuras

1.1	A la izquierda, gráfica del oscilador caótico de Lorenz. A la derecha, su descubridor Edward Norton Lorenz (1917-2008). . . . .	2
1.2	Dibujo original de Christiaan Huygens donde observaba la sincronía en un par de relojes de péndulo. . . . .	5
1.3	Mapa de Königsberg de la época de Euler. . . . .	7
1.4	a) Ejemplo de escítala. b) Disco cifrador que usa el polialfabeto creado por León Battista Alberti en 1465. c) Fotografía de la máquina “Enigma”. d) Fotografía de la versión americana del decodificador “Bombe”. . . . .	9
2.1	Estados $x_1$ de dos atractores caóticos de Lorenz ( $A$ y $B$ ) graficados contra el tiempo. La línea sólida representa la dinámica del estado $x_1$ del oscilador $A$ , que tiene como condiciones iniciales $x_A(0) = (1; 0; 0)$ , y la línea discontinua, representa la dinámica del estado $x_1$ del oscilador $B$ con condiciones iniciales $x_B(0) = (1.1; 0; 0)$ . Aquí se aprecia que si las condiciones iniciales son diferentes, incluso muy cercanas, la evolución de los estados será diferente. . . . .	17
2.2	Acoplamiento unidireccional, también conocido como acoplamiento Maestro-Eslavo. Se observa como la energía fluye del oscilador caótico maestro, al esclavo, pero no viceversa. . . . .	21
2.3	Acoplamiento bidireccional. Se observa como la energía fluye de un oscilador caótico al otro. . . . .	22
3.1	Red de acoplamiento irregular. . . . .	26
3.2	Red de acoplamiento irregular con nodo aislado o maestro. . . . .	28
3.3	Red de acoplamiento global. . . . .	29
3.4	Red de acoplamiento anillo. . . . .	30

3.5 Red de acoplamiento estrella. . . . . 31

3.6 Red con acoplamiento global y nodo 1 como maestro. . . . . 32

3.7 Red global de 7 nodos. . . . . 38

3.8 Estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , contra el tiempo, donde  $i = 1, 2, \dots, 7$ . . . . . 40

3.9 Planos de fase de los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, 7$ . . . . . 41

3.10 Gráficos de error de los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, 7$ . . . . . 42

4.1 Red maestro-observador unidireccional. Aquí el nodo maestro envía información al nodo observador, pero el observador no puede enviarla de vuelta al nodo maestro. 49

4.2 Estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , contra el tiempo, donde  $i = 1, 2$ . . . . . 50

4.3 Planos de fase entre los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , donde  $i = 1, 2$ . . . . . 51

4.4 Gráficos de error entre los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , donde  $i = 1, 2$ . . . . . 51

5.1 Red de cinco nodos caóticos en arreglo global. . . . . 55

5.2 Estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . . 58

5.3 Planos de fase entre estados  $x_{i1}$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . . 59

5.4 Gráficos de error de sincronía entre estados  $x_{i1}$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . . 60

5.5 Red de acoplamiento global con nodo maestro (N1). . . . . 61

5.6 Estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . . 64

5.7 Planos de fase entre estados  $x_{i1}$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . . 65

5.8 Gráficos de error de sincronía entre estados  $x_{i1}$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . . 65

5.9 Red irregular de 12 nodos. . . . . 66

5.10 Estados  $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ . . . . . 71

5.11 Planos de fase entre los estados  $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ . . . . . 72

5.12 Gráficos de error entre los estados  $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ . . . . . 73

6.1 Diagrama de bloques de un sistema de transmisión encriptado. . . . . 75

6.2 Diagrama de bloques del encriptamiento aditivo. . . . . 76

6.3 Ejemplo de encriptamiento por conmutación entre atractores caóticos. . . . . 76

7.1 Ampliación de un dibujo donde se aprecian los pixeles. . . . . 79

7.2	Mensaje original, en este caso una fotografía . . . . .	80
7.3	Señal recuperada de la fotografía. . . . .	81
7.4	Modelo de la red irregular de 12 nodos. . . . .	81
7.5	Se muestran los estados $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ de los nodos del 1 al 12, donde $i = 1, 2, \dots, 12$ . Note como está incluido la señal obtenida de la imagen como referencia comparativa de la magnitud. . . . .	84
7.6	Planos de fase los estados $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ de los nodos del 1 al 12, donde $i = 1, 2, \dots, 12$ .	85
7.7	Aquí se muestra el mensaje original $m$ , el mensaje encriptado o transmitido $S$ , y los mensajes recuperados $m^*$ en cada uno de los 12 nodos en forma de señal. La letra “M” significa mensaje, y la letra “R” significa recuperado. . . . .	86
7.8	En la figura se muestra la imagen original, las imágenes encriptadas obtenidas de las señales $S$ en los nodos 2 y 3, y las imágenes recuperadas de las señales $m^*$ de los nodos 2 al 12. . . . .	87
7.9	Ejemplo de un encriptamiento fallido debido a la proporcionalidad de la señal caótica con respecto al mensaje a encriptar, en donde el mensaje es proporcionalmente mayor. . . . .	87
7.10	Mensaje original. La grabación dice: “uno, dos, tres, probando, probando, uno, dos, tres”. . . . .	88
7.11	Modelo de la red irregular de 5 nodos. . . . .	89
7.12	Se muestran los estados $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ donde $i = 1, 2, \dots, 5$ . Note como está incluido la señal obtenida de la imagen como referencia comparativa de la magnitud. . . . .	91
7.13	Planos de fase y gráficos de error que muestran sincronía en la red. . . . .	92
7.14	Grabación de audio original $m$ , grabación encriptada o transmitida $S$ , y grabaciones recuperadas $m^*$ en cada uno de los 5 nodos. . . . .	93
7.15	Error entre el mensaje original y el mensaje recuperado en cada nodo $e = m - m^*$ . Se obtuvo al restarlos, dejando ver que después del transitorio, los mensajes recuperados son idénticos al original. . . . .	94

7.16	Ejemplo de un encriptamiento fallido debido a que la señal caótica es proporcionalmente menor con respecto al mensaje a encriptar. Se han circulado las secciones donde claramente se observa el mensaje sobre la señal caótica, el resto no es obvio. Sin embargo, al recuperar la grabación, imposible de presentar en un medio por escrito, el mensaje se escucha claramente, con un ligero ruido, causado por la señal caótica. . . . .	94
7.17	Mensaje original. Video de la entrada a la FIME (fragmento) . . . . .	95
7.18	Diagrama de bloques de la red regular de 3 nodos. . . . .	97
7.19	Se muestran los estados $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ de los nodos del 1 al 3, donde $i = 1, 2, 3$ , del primer cuadro. Note como está incluido la señal obtenida del video como referencia comparativa de la magnitud. . . . .	98
7.20	Planos de fase y gráficos de error que muestran sincronía en la red. . . . .	99
7.21	Aquí se muestra el video original $m$ , el video encriptado o transmitido $S$ , y los videos recuperados $m^*$ en cada uno de los 3 nodos. . . . .	100
7.22	Error entre el mensaje original y el mensaje recuperado en cada nodo. Se obtuvo al restarlos, dejando ver que después del transitorio, los mensajes recuperados son idénticos al original. . . . .	101
7.23	a) Es una imagen del video original, b) es una imagen del video encriptado, c) y d) son imágenes del video desencriptado de los nodos 2 y 3 respectivamente. b), c), d) son ejemplos con un acoplamiento de 2, donde existe sincronía. e) es una imagen encriptada del video, f) y g) son imágenes del video de los nodos 2 y 3 respectivamente. e), f) y g) son imágenes obtenidas del ejemplo donde existe bajo acoplamiento, es decir donde no hay sincronía completa. . . . .	101

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación

El presente trabajo tiene como objetivo el de contribuir a la solución del problema de sincronizar osciladores caóticos. La propiedad de la sincronía, la teoría del caos, la teoría de grafos y la criptología, son sólo algunos de los temas esenciales para lograr nuestro objetivo. Esta variedad de teorías y aplicaciones en conjunto, y ver como todas estas convergen entre sí para dar un producto o resultado, enriquecen a la ciencia y al entendimiento humano.

#### 1.1.1 Caos

Alejándonos del significado literal de la palabra caos, que significa impredecible o desorden; el caos es un comportamiento determinístico, aperiódico, muy sensible a las condiciones iniciales. Más propiamente dicho, en un sistema caótico, existe un atractor por el cual las trayectorias del sistema se ven atraídos, y al mismo tiempo existen fuerzas que lo repelen de este. Esto da como resultado, que el sistema caótico permanezca entre un máximo y mínimo; es decir, confinado a una zona de su espacio de estados, pero sin tender a un atractor fijo. Un atractor es el conjunto al que el sistema evoluciona después de un tiempo suficientemente largo.

Aunque fue cuestionado y pensado por Henri Poincaré a finales del siglo XIX, el crédito al descubrimiento y la acuñación del nombre de caos, se le otorga a Edward Lorenz debido a su trabajo “Deterministic Nonperiodic Flow”, publicado en 1963. Lorenz, construyó un modelo matemático, tratando de pronosticar el clima. Observó, que el sistema tendía a evolucionar dentro de una zona concreta del espacio de fases; pero no era al azar. También, que cualquier diferencia, aunque sea infinitesimal, en las condiciones iniciales, las simulaciones o resultados cambiaban drásticamente. Estos cambios minúsculos fueron de gran importancia para Lorenz.

La dependencia a las condiciones iniciales fue investigada, y dio origen a la teoría del caos. Publicó la descripción de un sistema relativamente simple de ecuaciones; un sistema caótico que sería posteriormente llamado el atractor de Lorenz. En la figura 1.1 se aprecia una fotografía del investigador Edward Lorenz y su famoso atractor.

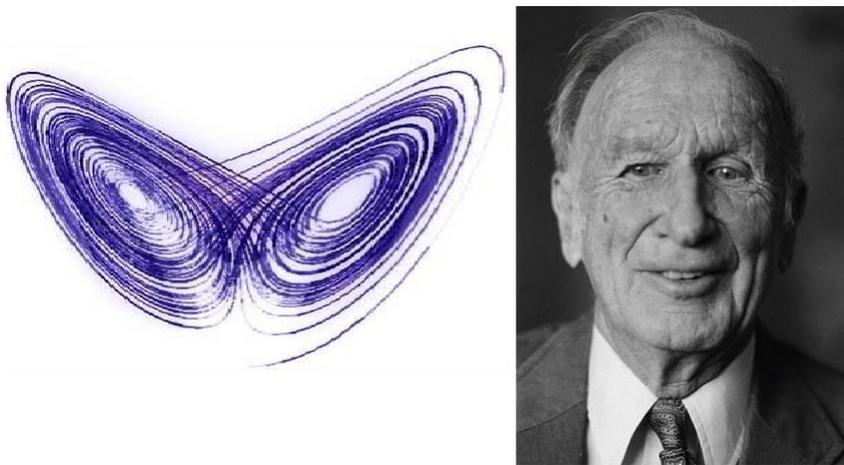


Figura 1.1: A la izquierda, gráfica del oscilador caótico de Lorenz. A la derecha, su descubridor Edward Norton Lorenz (1917-2008).

La teoría del caos, es estudiada no sólo por el campo de la matemática, sino también en otros campos. Se ha observado aplicaciones en matemática pura, programación, microbiología, biología y química (Tel T., Nishikawa T., Motter A.E., Grebogi C., and Toroczkai Z. 2004;

Motter A.E., Y.-C., Lai, and Grebogi C. 2003), ciencia computacional, economía (Day R. H., 1983; Kyrtsov C., Labys W., 2006), ingeniería (Abel A. and Schwarz W., 2002), finanzas, filosofía, física, política, dinámica de población (Constantino R. F. et al 1997), psicología, robótica, meteorología, e incluso en la música y el cine.

El comportamiento caótico, se ha aplicado en circuitos electrónicos (circuito de Chua), láseres (Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutierrez R. M., 2008), reacciones químicas oscilantes, dinámica de fluidos en régimen turbulento, en aparatos mecánicos o mecánico-magnéticos, en la dinámica de algunos satélites artificiales (Fradkov A. et al. 2004), en simulaciones computacionales, en generadores de números aleatorios (random number generators), en sistemas encriptados (Drachsel F. and Schwarz W., 2001), etc.

En la naturaleza, se ha observado en el comportamiento del clima (Lorenz, 1963), dinámicas de los satélites en el sistema solar, en la evolución de los cuerpos magnéticos de cuerpos celestes, en dinámica poblacional visto en ecología (Constantino R. F., 1997), dinámicas de la acción de potenciales en neuronas, vibraciones moleculares, en la predicción de epilepsia, en el movimiento de las placas tectónicas, en las figuras creadas en conchas marinas, etc.

Por tantos ejemplos, y aún más que están esperando a ser descubiertas, es muy importante el estudio de la teoría del caos. Muy recientemente han aparecido la teoría cuántica del caos (quantum chaos theory), que estudia la correspondencia entre mecánica cuántica y mecánica clásica en el contexto de sistemas caóticos (Berry M., 2003); y el caos relativístico (relativistic chaos), que emergió para intentar describir sistemas caóticos que siguen las leyes generales de la relatividad (A. E. Motter, 2003).

### 1.1.2 Sincronía

La sincronía ocurre cuando existe una coincidencia o simultaneidad de dos o más hechos, movimientos, o fenómenos. En (Cruz-Hernández, 2001), la sincronización es la propiedad que presenta un conjunto de objetos de naturaleza distinta, o no, de manifestar un ritmo uniforme de coexistencia, generalmente distinto a sus ritmos individuales, debido a la presencia de una conexión o de un medio físico de acoplamiento entre ellos, el cual en la mayoría de los casos es extremadamente débil. En el caso específico de osciladores, se dice que dos osciladores sincronizan, si la diferencia entre sus estados correspondientes converge a cero, a medida que el tiempo tiende a infinito.

La primera descripción de este fenómeno, formalmente documentada, fue realizada por el holandés *Christiaan Huygens* (Bennett M. et. al. 2002). Él descubrió, a mediados del siglo XVII, que al encontrarse un par de relojes de péndulo suspendidos en una viga de madera (ver figura 1.2), el vaivén independiente de cada péndulo llegaban a sincronizar. Las oscilaciones de los péndulos, coincidían exactamente moviéndose en dirección opuesta. En el caso de que los péndulos se perturbaran artificialmente, y la sincronía se perdía, después de un periodo de tiempo la sincronía regresaba.

Esta propiedad, puede verse estudiada en diferentes campos de la ciencia, así como matemáticas, física, ciencias sociales, psicología, biología, neurobiología, sistemas computacionales, astronomía, mecánica, etc. En la naturaleza, la sincronía puede observarse en células cardíacas, a la hora de hacer que el corazón palpite; en el movimiento de un cardumen de peces; en el destellar de las luciérnagas (Cabeza C., Rubido N., Kahan S., Marti A. C., 2010), que lo hacen al unísono; la floración de muchas especies de plantas, como el bambú (Keeley J. E., Bond W. J., 1999), que florecen a ciclos muy variables pero al mismo tiempo en todo el rango de distribución de la especie; en los ciclos menstruales de grupos de mujeres; etc. Estimado lector, haga

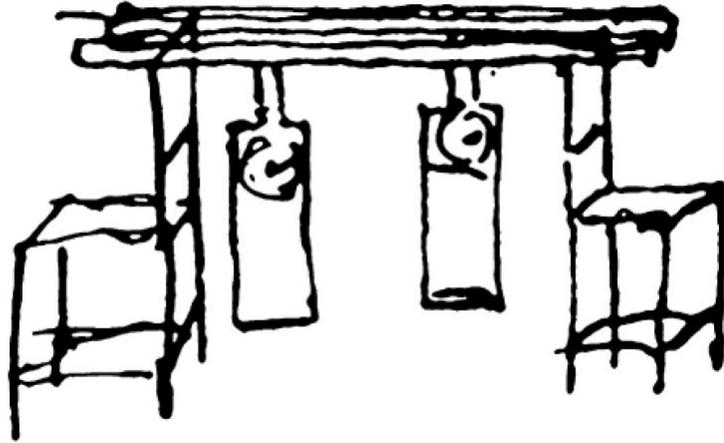


Figura 1.2: Dibujo original de Christiaan Huygens donde observaba la sincronía en un par de relojes de péndulo.

la prueba y observe la Luna por un periodo largo de días. Incluso si ésta mengua, seguramente seguirá observando los mismos cráteres, montañas y mares lunares; noche tras noche. Esto es un fenómeno astronómico, llamado rotación síncrona, y describe el movimiento de un cuerpo que tarda el mismo tiempo en girar sobre sí mismo, que en completar una órbita alrededor del cuerpo central; por lo tanto, mantiene siempre el mismo hemisferio apuntando al cuerpo al que orbita. Esta propiedad es muy común en muchos de los satélites naturales de nuestro sistema solar; debido a un efecto gravitatorio llamado acoplamiento de marea o “Tidal lock” (Gladman B. et al. 1996) en inglés.

La sincronía ha estudiado en sistemas acústicos y electroacústicos; en sistemas eléctricos y electromagnéticos, como la sincronía en dos generadores con pequeñas diferencias en sus frecuencias de operación (Pikovsky et. al, 2001); en generadores cuánticos de radio frecuencia; entre robots, para realizar alguna tarea en común; entre láseres (Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. and López-Gutierrez R. M., 2008); en vibroexcitadores mecánicos; etc.

### 1.1.3 Redes

Inherentemente, para que exista la sincronía, debe haber una conexión o acoplamiento, es por ello que también se debe estudiar la teoría de redes. Una red, es un conjunto de nodos interconectados (dos o más), donde un nodo es la unidad fundamental o elemento básico. Un nodo puede representar muchas cosas, como por ejemplo a una persona en una red social (Wasserman y Faust, 1994); un servidor o “router” en internet; también pueden ser artículos científicos conectados por las citas a otros artículos (Redner, 1998); una neurona en el cerebro o para crear una Red Neural Compleja (CNN, Complex Neural Network); etc. Los sistemas biológicos y artificiales complejos, pueden ser constituidos por miles, o millones, de unidades individuales de nodos, de las que se pueden o no conocer su comportamiento individual (Green y Bossomaier 1993; Yaneer 1997; Watts 2003; Dieter 2005).

Históricamente, el estudio de las redes ha sido parte de la rama de las matemáticas llamada teoría de grafos. Leonard Euler publicó la solución al problema de los siete puentes de Königsberg en 1736, naciendo así la teoría de grafos. El problema de los siete puentes consiste en encontrar una ruta para pasar por cada uno de los puentes de la ciudad de Königsberg una sola vez y regresar al punto de partida. Euler representó cada isla con un punto y cada puente por una línea, ver figura 1.3, demostró que no era posible, ya que el número de líneas que inciden en cada punto no es par.

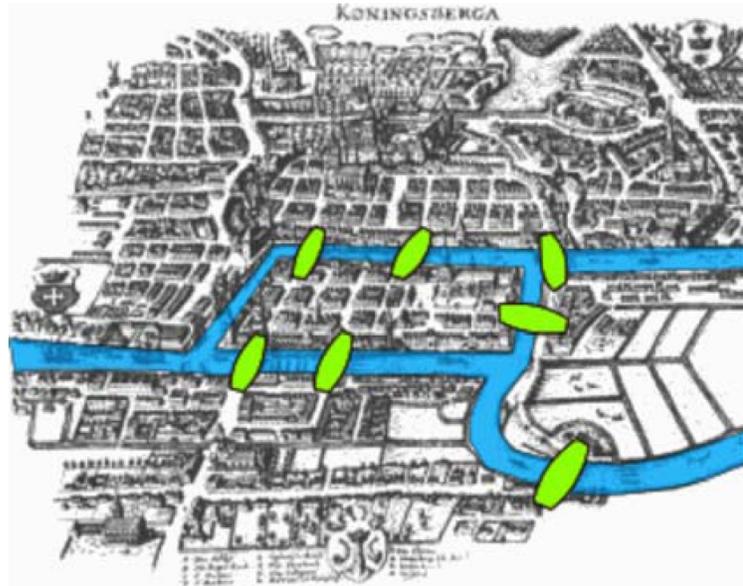


Figura 1.3: Mapa de Königsberg de la época de Euler.

En la teoría de redes, no sólo se trata de conocer el comportamiento individual de cada nodo, ya que, al estar interconectados existen propiedades emergentes. Es por este comportamiento colectivo, por lo que la importancia de reconocer las dinámicas de las redes se vuelve todo un reto. Más aún, refiriéndonos a la sincronización, a lo aleatorio que aparenta ser un sistema caótico como nodo y a la topología de conexión de los nodos; es que en este trabajo acuñaremos el término redes complejas.

El término complejo, se debe de comprender en dos instancias, porque se refiere a las características de los nodos por sí mismos, y a la estructura de la red (Posadas-Castillo C., 2008). Empezaremos con las características de los nodos. Entender la naturaleza de los nodos, es importante, porque compete a varias propiedades que darán complejidad. Su naturaleza puede ser discreta o continua (modelada por un conjunto de ecuaciones en diferencias o ecuaciones diferenciales, respectivamente); puede representarse por un sistema no lineal, el cual puede exhibir equilibrios múltiples, ciclos límites y caos. Y es la bifurcación de estos equilibrios los

que pueden cambiar el comportamiento de los nodos así como sus propiedades de estabilidad; llevando a estos sistemas a comportamientos caóticos o hipercaótico.

Ahora nos referiremos a lo complejo de una red por medio de su topología de acoplamiento, es decir, al patrón regular o irregular, en que están conectados o acoplados los nodos. Lo anterior, será explicado a detalle en el Capítulo 3.

#### **1.1.4 Aplicación en transmisión encriptada de datos**

Dentro de sus muchas aplicaciones, una de ellas es en la criptología. La criptología, es la ciencia que estudia la seguridad en el intercambio de mensajes en clave, y ha sido parte del ser humano desde hace cientos, quizá miles de años. Ha sido usada mayormente para resguardar secretos o mensajes militares. El sentido de información confidencial, ha creado un intenso esfuerzo para crear un mejor método de encriptado cada vez. Desde el cifrado usando la “Escítala” en el siglo V antes de Cristo (Thomas Kelly, 1998), pasando por la substitución polialfabética de León Battista Alberti en 1465, hasta la famosa máquina alemana “Enigma” usada en la segunda guerra mundial (Cipher A. Deavours, 1997); todos han sido esfuerzos para ocultar información de los enemigos o curiosos. Pero estos sistemas de encriptado se hicieron obsoletos, debido a la aparición de su enemigo natural, el decodificador; como la “Bombe” americana (Donald Davies, 1999), que contrarrestaba directamente al “Enigma”. Esto dio paso a una batalla intelectual sin cuartel, para crear mejores y más seguros sistemas de encriptado, y desde luego descifrado. En la figura 1.4 se muestran algunos ejemplos de los cifradores y descifradores mencionados anteriormente.

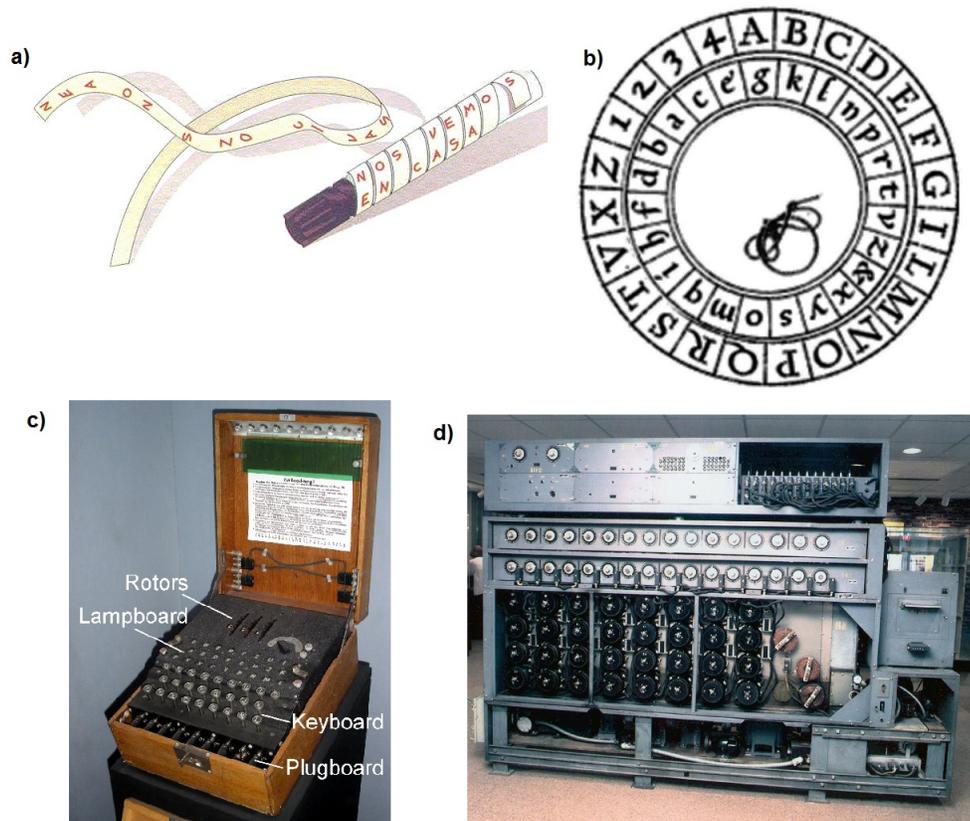


Figura 1.4: a) Ejemplo de escítala. b) Disco cifrador que usa el polialfabeto creado por León Battista Alberti en 1465. c) Fotografía de la máquina “Enigma”. d) Fotografía de la versión americana del decodificador “Bombe”.

En 1990, Pecora y Carroll propusieron una alternativa de encriptado, utilizando la sincronización de osciladores caóticos. Con ello, cambió la tendencia del momento (que eran algoritmos matemáticos, curvas elípticas, etc.) y en cambio se abrió las puertas a la investigación de los sistemas caóticos para esta aplicación. Con los diferentes osciladores caóticos del momento, usados como nodos y la sincronización caótica vista con anterioridad (Fujisaka y Yamada, 1983; Pikovsky, 1984; Afraimovich et al., 1986; Pecora y Carroll, 1990), se abordaron varias técnicas como lo son, el encriptado caótico aditivo (Cuomo et al., 1993), encriptado por

modulación paramétrica (Yang y Chua, 1996), encriptado por conmutación entre dos atractores caóticos (Cuomo et al. 1993; Parlitz et al., 1992; Dedieu et al., 1993), etc. Intentos para decodificarlos en trabajos posteriores, por ejemplo: (Short, 1994; Pérez y Cerdeira, 1995; Tao y Du, 2003) conocidas como técnicas de “ataque”, fueron encontrados. De igual manera, se ha explorado para incrementar el nivel de seguridad en el encriptamiento de datos, por ejemplo (Yang et al., 1997; Serrano-Guerrero y Cruz-Hernández, 2002a; 2002b; Meranza-Castillón y Cruz-Hernández, 2002a; 2002b; Gámez-Guzmán, 2004; Sira-Ramírez y Cruz-Hernández, 2000; López-Mancilla, Cruz-Hernández y Posadas-Castillo, 2001).

## 1.2 Objetivos

El objetivo general de este trabajo de tesis, es el siguiente:

*Extender la metodología de sincronización de osciladores caóticos en formas Hamiltonianas a redes complejas compuestas por  $N$  nodos o células (sistemas con dinámicas complejas); empleando las características y propiedades de los sistemas cooperativos; y aplicando la propiedad de sincronía al cifrado de información.*

Los objetivos particulares de esta tesis son:

1. Explorar las diferentes técnicas y aplicaciones para sincronizar redes complejas, formadas por nodos caóticos con dinámicas complejas.
2. Sincronizar redes complejas dispuestas en una topología de acoplamiento regular (acoplamiento global, estrella, y anillo) e irregular (redes con patrón de acoplamiento no definido), formadas por nodos caóticos (redes neuronales caóticas, circuitos electrónicos y sistemas caóticos).
3. Aplicar la sincronización de redes en el encriptado de información: cifrado caótico aditivo,

por conmutación entre atractores caóticos, o por técnicas de modulación paramétrica.

Como contribución a la sincronización de redes complejas, en este trabajo se propuso una extensión del método de sincronización de osciladores caóticos en formas Hamiltonianas (Sira-Ramírez y Cruz-Hernández, 2001). Este método toma en cuenta únicamente a dos osciladores, y es extendido a tres o más osciladores en alguna configuración de acoplamiento de red. La propuesta utiliza la metodología de redes visto en (X.F. Wang y G. Chen, 2002; X.F. Wang, 2002) perteneciente a la teoría de grafos, y aprovechar sus características, con la metodología creada por Sira-Ramírez y Cruz-Hernández en el 2001. Estos resultados de sincronización serán utilizados para el encriptamiento caótico. En este trabajo se pretende encriptar imagen, sonido y video.

La justificación de utilizar la metodología de (Sira-Ramírez y Cruz-Hernández, 2001), es precisamente por las siguientes ventajas:

- La sincronía se obtiene de manera sistemática y permite conocer la señal de acoplamiento apropiada.
- Muchos osciladores caóticos se pueden expresar en forma Hamiltoniana.
- Puede aplicarse a muchos sistemas caóticos e hipercaóticos, tanto en el contexto continuo como discreto.
- Puede aplicarse a sistemas idénticos y no idénticos (López y Cruz-Hernández, 2005a; 2005b; López, 2005).
- No es necesario el cálculo de exponentes de Lyapunov.
- No requiere que las condiciones iniciales pertenezcan a la misma región de atracción.

## 1.3 Organización del trabajo

El contenido de la presente tesis está organizado de la siguiente manera: en el **Capítulo 2** se presentarán conceptos básicos del caos, la sincronía y la sincronización de osciladores caóticos; como lo son antecedentes históricos, ejemplos observados en la naturaleza, terminología, acoplamiento y bases matemáticas.

En el **Capítulo 3**, presentaremos antecedentes matemáticos con respecto a redes, donde participan 3 o más nodos. Se observarán las diferentes topologías existentes, así como los diferentes casos resultado de la presencia o no, de nodo maestro. Se introducirá el concepto de la ley de control usado para la sincronización de redes complejas, así como sus condiciones de uso y estabilidad según el caso.

En el **Capítulo 4**, introduciremos la idea matemática detrás de los sistemas en forma Hamiltoniana generalizada, seguido de la construcción de sus observadores, y finalizando con un ejemplo clásico.

En el **Capítulo 5**, se estudiará la propuesta hecha de extender la metodología de sistemas en forma Hamiltoniana generalizada de (Sira-Ramírez y Cruz-Hernández, 2001), a redes complejas, utilizando la metodología de redes (X.F. Wang y G. Chen, 2002; X.F. Wang, 2002). Se propondrá una dinámica que contiene ambas bases matemáticas y una breve explicación de cada uno de sus componentes. Al final del capítulo, presentaremos resultados de sincronía de redes caóticas en forma Hamiltoniana generalizada con tres osciladores caóticos distintos, dispuestos en dos clases distintas de acoplamiento, regular e irregular, y sólo uno de estos conteniendo a un nodo maestro.

En el **Capítulo 6**, mencionaremos los principales tipos de encriptado de información usando caos, pasando por una breve introducción a los antecedentes históricos, para después dar a

conocer los diagramas de bloques de cada uno de ellos.

En el **Capítulo 7**, presentaremos resultados, de la transmisión de información encriptada usando osciladores caóticos y sus problemas prácticos resultado de la implementación. Aquí se verán tres ejemplos, donde, se aplica el encriptamiento aditivo, se encriptará una fotografía, una grabación de audio, y un video. Cada uno de estos utilizando diferentes osciladores caóticos, cantidad de nodos y acoplamiento, para reconocer la versatilidad del método extendido.

Finalmente, en el **Capítulo 8**, mencionaremos algunas conclusiones generales, referentes a los resultados expuestos en este trabajo. Recomendaciones, relativas a los problemas abiertos para un trabajo futuro son expuestas.

# Capítulo 2

## Caos y Sincronía

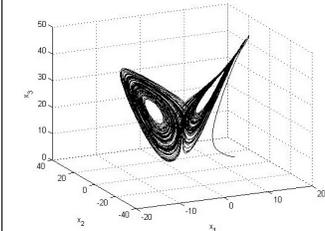
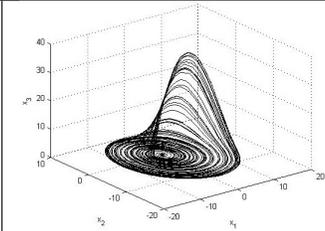
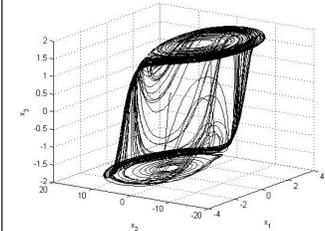
Como ya se ha mencionado antes, esta tesis versa sobre un conjunto de leyes, fenómenos, aplicaciones y propiedades; que en conjunto nos ayudarán a contribuir con la sincronización de redes complejas. Por consiguiente, habría que estudiar las principales características de cada elemento por separado, para su mejor entendimiento en conjunto. Es por ello que empezaremos por comprender dos conceptos esenciales: el caos y la sincronía. Comenzaremos por sus definiciones básicas, principales características, ejemplos en la naturaleza y aplicaciones tecnológicas, un poco de su matemática esencial; para finalizar con la importancia de ambos conceptos en conjunto.

### 2.1 Caos

En este trabajo, un concepto necesario, es la noción del caos; o más específicamente, las principales características de un sistema caótico. Para el caos, no existe una definición universalmente aceptada, pero existen al menos tres factores en los cuales todos los científicos están de acuerdo:

1. Las trayectorias, si tienen condiciones iniciales diferentes, se separarán exponencialmente cuando el tiempo tienda a infinito.

Tabla 2.1: Tabla de osciladores caóticos 1

Oscilador caótico de Lorenz	Atractor
$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1)$ $\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_2$ $\dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3$ $(\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3})$	
Oscilador caótico de Rössler	Atractor
$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3$ $\dot{x}_2 = x_1 + ax_2$ $\dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c)$ $(a = 0.4, b = 2, c = -4)$	
Oscilador caótico de Histéresis	Atractor
$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma x_1 + cx_3$ $\dot{x}_2 = -wx_1 - \delta x_2$ $\epsilon \dot{x}_3 = (1 - x_3^2)(sx_1 + x_3) - \beta x_3$ $(\gamma = 0.2, c = 2, w = 10, \delta = 0.001,$ $s = 1.667, \beta = 0.001, \epsilon = 0.3)$	

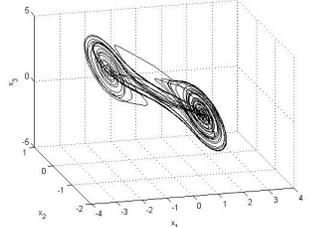
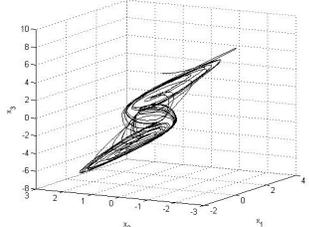
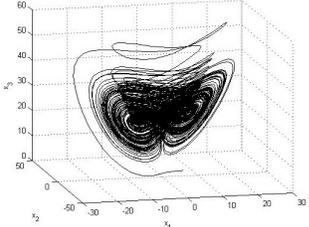
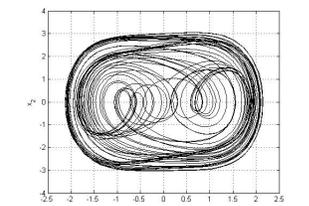
2. El sistema es determinista.
3. Las trayectorias no se ajustan a un punto fijo, órbita periódica o cuasiperiódica cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En las tablas 2.1 y 2.2 se pueden observar algunos osciladores caóticos, sus ecuaciones (izquierda) y sus atractores en el espacio de estados (derecho).

### 2.1.1 Características principales

Un sistema caótico, se rige por ecuaciones diferenciales o en diferencias no lineales. Su comportamiento dinámico aparenta ser aleatorio; sin embargo es determinístico. Las variables de

Tabla 2.2: Tabla de osciladores caóticos 2

<p style="text-align: center;"><b>Oscilador caótico de Chua</b></p> $\dot{x}_1 = p(x_2 - x_1 - f(x))$ $\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3$ $\dot{x}_3 = -qx_2$ $f(x) = m_0x + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)( x + 1  -  x - 1 )$ <p style="text-align: center;">(<math>p=10, q = 14.87, m_0 = -0.68, m_1 = -1.27</math>)</p>	<p style="text-align: center;">Atractor</p> 
<p style="text-align: center;"><b>Oscilador caótico de un CNN 3D</b></p> $\dot{x}_1 = -x_1 + T_{11} \tanh(x_1) + T_{12} \tanh(x_2) + T_{13} \tanh(x_3)$ $\dot{x}_2 = -x_2 + T_{21} \tanh(x_1) + T_{22} \tanh(x_2) + T_{23} \tanh(x_3)$ $\dot{x}_3 = -x_3 + T_{31} \tanh(x_1) + T_{32} \tanh(x_2) + T_{33} \tanh(x_3)$ <p style="text-align: center;">(<math>T_{11}=1.49, T_{12}=2, T_{13}=1, T_{21}=-2,</math> <math>T_{22}=1.7, T_{23}=0, T_{31}=4, T_{32}=-4, T_{33}=2</math>)</p>	<p style="text-align: center;">Atractor</p> 
<p style="text-align: center;"><b>Oscilador caótico de Chen</b></p> $\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1)$ $\dot{x}_2 = (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2$ $\dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3$ <p style="text-align: center;">(<math>a=35, b=3, c=28</math>)</p>	<p style="text-align: center;">Atractor</p> 
<p style="text-align: center;"><b>Oscilador caótico de Duffing</b></p> $\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = -p_2x_1 - p_3x_1^3 - p_1x_2 + q \cos(wt)$ <p style="text-align: center;">(<math>w=1.8, p_1=0.4, p_2=-1.1, p_3=1, q=2.1</math>)</p>	<p style="text-align: center;">Atractor</p> 

estado se mueven en un espacio acotado. Su característica principal, es la sensibilidad a las condiciones iniciales; lo que significa que si las condiciones iniciales son diferentes, incluso siendo “extremadamente cercanas”, se producen trayectorias que divergen de manera exponencial al evolucionar el sistema en el tiempo. Obsérvese la figura 2.1. En ella se aprecia que dos osciladores de Lorenz,  $A$  y  $B$ , con condiciones iniciales muy próximas, como lo son  $x_A(0) = (1; 0; 0)$  y  $x_B(0) = (1.1; 0; 0)$ , provocan dinámicas en la evolución de los estados muy diferentes; en este caso se muestran los estados  $x_1$ .

El sistema caótico presenta múltiples órbitas periódicas, y eso provoca que tenga inherentemente un espectro frecuencial característico; similar al de una señal aleatoria o ruido.

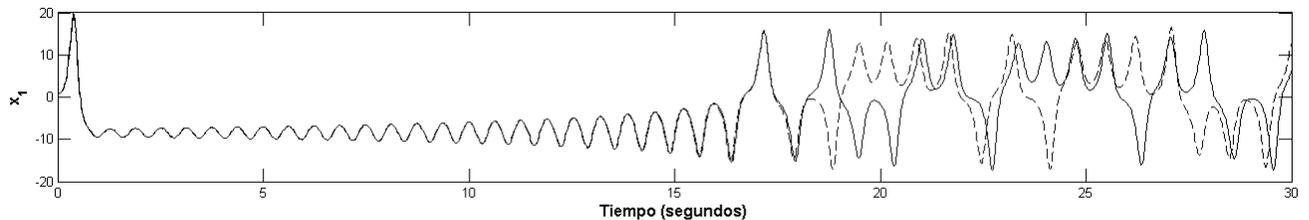


Figura 2.1: Estados  $x_1$  de dos atractores caóticos de Lorenz ( $A$  y  $B$ ) graficados contra el tiempo. La línea sólida representa la dinámica del estado  $x_1$  del oscilador  $A$ , que tiene como condiciones iniciales  $x_A(0) = (1; 0; 0)$ , y la línea discontinua, representa la dinámica del estado  $x_1$  del oscilador  $B$  con condiciones iniciales  $x_B(0) = (1.1; 0; 0)$ . Aquí se aprecia que si las condiciones iniciales son diferentes, incluso muy cercanas, la evolución de los estados será diferente.

Se entiende por un atractor, a una región del espacio de estados hacia la cual convergen las trayectorias posibles de un sistema. Al tratarse de un sistema caótico, el atractor se le denomina atractor extraño; ya que sus trayectorias realizan un recorrido formado imágenes de geometría complicada y con dimensión fractal.

Un exponente de Lyapunov, da información sobre la tasa de cambio promedio de las trayectorias en un atractor. Es decir, que se utilizan para cuantificar la expansión y contracción de

trayectorias vecinas en un sistema dinámico. En otras palabras dan una medida de la proporción exponencial; en la cual, órbitas cercanas se van apartando o acercando. Esto determina la complejidad de un sistema no lineal.

Cuando existe un exponente de Lyapunov negativo, existe una convergencia en las trayectorias a lo largo de una dirección en un espacio de estados. Por otra parte, en un exponente de Lyapunov positivo, las trayectorias divergen. El valor absoluto de estos exponentes, cuantifica la velocidad de convergencia de trayectorias. Como condición necesaria, un sistema caótico presenta al menos un exponente de Lyapunov positivo. Cuando exista más de un exponente de Lyapunov positivo, y exista una solución acotada del mismo, entonces el sistema se le denomina hipercaótico; y representa una mayor velocidad de divergencia de las trayectorias.

## 2.2 Sincronía

La sincronía ocurre, según el significado de la palabra, cuando existe una coincidencia o simultaneidad de dos o más hechos, movimientos, o fenómenos. Según (Aguilar-Bustos A.Y., 2005), la sincronización es la propiedad que presenta un conjunto de “objetos” de naturaleza distinta (o no) de manifestar un ritmo uniforme de coexistencia, generalmente distinto a sus ritmos individuales, debido a la presencia de una conexión o de un medio físico de acoplamiento entre ellos, el cual en la mayoría de los casos es extremadamente “débil”.

### 2.2.1 Definición formal de la sincronización

La sincronización es un fenómeno que ha sido ligado a los movimientos periódicos u oscilatorios; como cuando dos relojes de pared se sincronizan, por las vibraciones que cada uno provoca y recibe. En este caso, se dice que dos señales periódicas sincronizan si sus periodos son idénticos. Posteriormente en este trabajo, se revelará que el tema de interés se enfoca en la sincronía

de sistemas caóticos o hipercaóticos. En particular para este caso, la sincronía se dará si al transcurrir un periodo determinado de tiempo, las señales son idénticas, por lo menos de manera asintótica. Para cualquier oscilador periódico, incluido el oscilador caótico, la sincronización, de manera formal, se establece como sigue:

**Definición de sincronización.** Considérese un sistema dado por  $\dot{x} = f(x)$  y otro por  $\dot{\hat{x}} = g(\hat{x})$ , donde  $f$  y  $g$  son campos vectoriales definidos en  $R^n$ , se dice que ambos sistemas sincronizan si se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0, \quad \forall t \geq \tau, \quad x(0) \neq \hat{x}(0), \quad (2.2.1)$$

donde  $x(t)$  y  $\hat{x}(t)$  representan el estado de los osciladores y  $\tau$  es el tiempo de sincronía. También se reconoce al **vector error de sincronía**, y se define por la expresión:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad x, \hat{x} \in R^n, \quad (2.2.2)$$

Cuando existe sincronía, el vector error debe ser cero.

$$e(t) = 0. \quad (2.2.3)$$

Para el caso real, la sincronización de osciladores podría tener perturbaciones o ruido. En este caso, el error de sincronía podría no ser cero. En el mejor de los casos, el error de sincronía, permanece uniformemente acotado por un valor positivo  $\rho \in R$ . Es decir, quedaría como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \rho. \quad (2.2.4)$$

Para que estos sistemas lleguen a la sincronización, deben, de alguna manera, compartir información o energía. Eso se observa según su acoplamiento, lo cual se estudiará más adelante en la subsección 2.3.1, “Escenarios de acoplamiento” en la página 21.

## 2.3 Introducción a la sincronización de osciladores caóticos

En este punto, ya tenemos una idea clara de lo que un sistema caótico, y lo que es la sincronización. En base a los objetivos de este trabajo, es de nuestro interés el de sincronizar osciladores caóticos. El interés por sincronizar dos o más sistemas caóticos, no es nuevo. No fue sino hasta principios de la década de los noventa, cuando el trabajo de (Pecora y Carroll, 1990), causó un gran interés en la sincronización de osciladores caóticos; empezando por su método de descomposición de subsistemas. Otros métodos han aparecido, como la sincronización por construcción de un sistema inverso (Kokarev et al., 1992; Halle et al., 1992 Chua et al., 1993; Feldman et al., 1996); la sincronización por retroalimentación del error (Chen y Dong, 1993a, 1993b); sincronización por observador (Ushio, 1996; Nijmeijer y Mareels, 1997; Fradkov et al., 1999); y sincronización por formas Hamiltonianas y observadores (Sira-Ramírez y Cruz Hernández, 2001; Cruz-Hernández y Posadas, 2001; Cruz-Hernández et al., 2001), entre otros, según (Lopez-Mancilla D.,2005). También causó un gran interés debido a sus múltiples posibles aplicaciones; entre los que destacan el encriptado de datos aplicado a la comunicación privada (Cuomo, Oppenheim y Strogaz, 1993); también uno de los objetivos y temas de interés de esta tesis.

La sincronización de dos o más osciladores caóticos, ocurre cuando sus oscilaciones coinciden para todo tiempo, después de transcurrido un transitorio. Ésta es su mejor definición, si consideramos que la frecuencia y fase de un sistema caótico, no están completamente definidas. Por otra parte, la definición formal de la sincronización, ecuación (2.2.1), aplica para la sincronización de osciladores caóticos. A partir de ahora, todas las menciones a la sincronización, serán referente a la sincronización de osciladores caóticos; el cual es nuestro objetivo primordial.

### 2.3.1 Escenarios de acoplamiento

Los osciladores, sean caóticos o no, para sincronizar deben tener alguna clase de conexión entre sí. Con esta conexión se asegura un flujo de energía o comunicación, la cual es necesaria para que ambos interactúen y entren en sincronía. A esta conexión se le llama acoplamiento. Con ello damos a entender, que existen dos configuraciones de acoplamiento: el acoplamiento unidireccional y el bidireccional.

El **acoplamiento unidireccional** (Parlitz y Kokarev, 1998; Hasler, 1995), también es conocido por **configuración maestro-esclavo** por (Pecora y Carroll, 1990). Este acoplamiento se presenta cuando el oscilador maestro tiene influencia sobre el oscilador esclavo. Bajo estas condiciones, el sistema maestro impone su dinámica al sistema esclavo, transmitiéndole energía. Sin embargo, el oscilador esclavo, no transmite energía de vuelta al oscilador maestro, de tal manera que no puede influenciarlo. Obsérvese en la figura 2.2.



Figura 2.2: Acoplamiento unidireccional, también conocido como acoplamiento Maestro-Esclavo. Se observa como la energía fluye del oscilador caótico maestro, al esclavo, pero no viceversa.

En el caso de un **acoplamiento bidireccional** (Schuster, 1995), también conocida como sincronización mutua, se presenta cuando un oscilador, tiene influencia sobre el otro y viceversa. Con ello, la energía fluye libremente en ambos sentidos; y como resultado ambos osciladores tienden a sincronizar a una dinámica nueva, que puede o no, ser diferente a la dinámica de alguna de los osciladores. Se puede observar mejor en la figura 2.3.

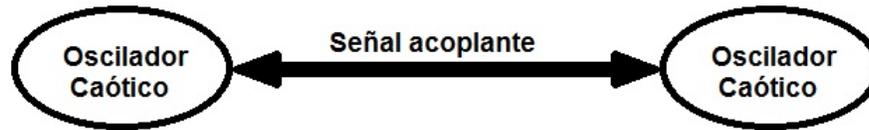


Figura 2.3: Acoplamiento bidireccional. Se observa como la energía fluye de un oscilador caótico al otro.

### 2.3.2 Tipos de sincronización

En la literatura, se reportan muchos tipos de sincronización. Los siguientes términos, según (Lopez-Mancilla D., 2005), son correctos para el caso de la sincronización de dos osciladores, mas no necesariamente siempre para el caso de redes. Algunos tipos de sincronización son:

- **Osciladores caóticos idénticos:** Esto se refiere a que los osciladores implicados o acoplados son idénticos, del mismo tipo o estructuralmente equivalentes. Los tipos de sincronización que se pueden encontrar en este caso son:
  1. *Sincronización idéntica o completa:* Se presenta cuando cada estado de un sistema, tiende a sincronizar con su estado correspondiente de otro sistema. Puede presentarse en acoplamiento unidireccional o bidireccional.
  2. *Sincronización no idéntica de osciladores idénticos:* Ocurre únicamente en configuración maestro-esclavo (unidireccional) en donde los estados del esclavo no sincronizan con los del maestro, sino a un tercer estado. (Parlitz y Kokarev, 1998).
- **Osciladores caóticos no idénticos:** Esto se refiere a que el acoplamiento es entre osciladores no idénticos, es decir, que son diferentes o estructuralmente no equivalentes (Boccaletti et al., 2000). Los tipos de sincronización que se pueden encontrar, para este caso, son:

1. ***Sincronización generalizada:*** Se lleva a cabo sólo entre osciladores acoplados unidireccionalmente, y existe si en el esclavo se mapea una función del estado del maestro, tal que los estados del maestro y los del esclavo (aunque permanezcan diferentes), estén relacionados por esta función mapeada y la diferencia entre los estados del esclavo y la función mapeada tiende a cero después del transitorio (Afraimovich et al.,1986; Rulkov et al., 1995).
2. ***Sincronización parcial:*** Se presenta cuando sólo una parte de los estados de los osciladores acoplados sincronizan. Puede darse en acoplamiento unidireccional o bidireccional (Pyragas, 1996; Hasler et al., 1998).
3. ***Sincronización de fase:*** Si es posible definirse una variable de fase en ambos osciladores acoplados unidireccionalmente, la cual crezca o decrezca monotónicamente, se puede observar sincronización de fase si la diferencia entre las fases correspondientes están acotadas por alguna constante (Rosenblum et al., 1996).

En este trabajo, se pretende abordar la sincronización de osciladores caóticos idénticos, considerando únicamente el caso ideal, es decir, sin perturbaciones y el caso continuo, es decir, no discretizado. En el capítulo 3, se abordará el concepto de red y su importancia. Una vez visto este concepto, se introducirá el concepto de sincronización de redes complejas en la sección 3.2 en la página 32, utilizando nodos caóticos en un concepto matemático y enfocado al objetivo de la tesis.

# Capítulo 3

## Redes Complejas

En el capítulo anterior, se observó la importancia de los sistemas caóticos y de la sincronización entre ellos. Como ya fue mencionado antes, los sistemas caóticos no pudieran sincronizar por sí solos, a no ser de una conexión o acoplamiento entre ellos. Y dependiendo del acoplamiento, o forma en la que los sistemas estén conectados, será la dinámica resultante del sistema. Si existe un número mayor a dos osciladores caóticos, la sincronización y la dinámica resultante, debería ser estudiada en base a redes.

A lo largo de este capítulo, se revisará la teoría de grafos en busca de antecedentes matemáticos esenciales para la construcción de redes y su entendimiento; en especial para la creación de la matriz de acoplamiento (matriz que dicta qué nodo está acoplado a la red y de qué forma). Reconoceremos las diferentes topologías o estructuras de una red. Además, de sus acoplamientos con nodo maestro o sin él. Para finalizar con una sección completa acerca de la sincronización de redes complejas tomando en consideración la topología, con o sin nodo maestro, y dando a conocer los teoremas que condicionan tanto su sincronización como su estabilidad.

## 3.1 Topología de redes complejas

Con topología, nos referimos a la configuración de acoplamiento en los nodos de la red, o dicho en otras palabras, a la forma en la que están conectados los nodos que conforman una red. Se consideran dos grupos principales dentro de las redes dinámicas complejas: las redes complejas regulares y las redes complejas irregulares (Posadas-Castillo C., 2008).

También se consideran para este trabajo, las redes con nodos maestros o aislados y sin nodos maestros o aislados. Esto último queda ilustrado en la sección 2.3.1, “Escenarios de acoplamiento” en la página 21, previamente en el capítulo 2. Se considera una red sin nodo maestro a una red con acoplamiento bidireccional en todos sus elementos o nodos. Por el contrario, si existe un nodo maestro en la red, este nodo, al no poder ser influenciado por el resto de la red, tiene conexiones unidireccionales. Esto quiere decir, que únicamente el nodo maestro tiene conexiones unidireccionales, y el resto de la red presenta conexiones bidireccionales entre sí. Esto se aprecia mejor en la figura 3.2, donde se observa una red irregular, y un nodo maestro (nodo 1). Para este trabajo, la investigación se limita a un sólo nodo maestro por red, según sea el caso.

### 3.1.1 Redes complejas irregulares

Las redes irregulares tienen una complejidad estructural mayor, porque su estructura no sigue un patrón o regla específica en la forma en que sus nodos están conectados (Wang X. F., Chen G., 2003). Ejemplos de estos, pueden ser las redes de “mundo pequeño” (small world networks), redes de libre escala (free-scale networks), redes aleatorias, etc. Un ejemplo de esta clase de redes se observa en la figura 3.1.

Sea  $G = (V, E)$  un grafo, que consiste de  $N = |V|$  nodos, con  $V = V(G) = v_1, v_2, \dots, v_N$  el conjunto de nodos y  $M = |E|$  conexión entre nodos, donde  $E = E(G) = e_1, e_2, \dots, e_M$  representa

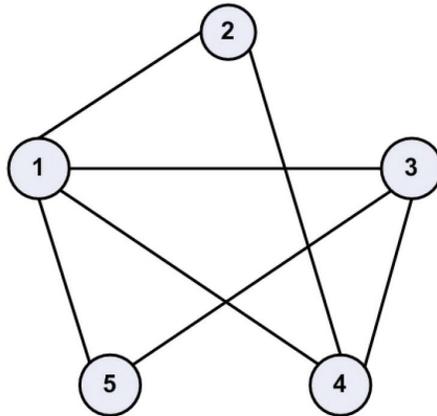


Figura 3.1: Red de acoplamiento irregular.

el conjunto de conexiones.

Existen dos matrices de principal interés: *i) la matriz de adyacencia* y *ii) la matriz de grado*.

*i) Matriz de adyacencia*  $A(G)$ : matriz  $N \times N$ . Los elementos  $a_{ij}$  se dan por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j) \in E(G), \\ 0, & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

donde  $(i, j) \in E(G)$  significa que el nodo  $i$  está conectado con el nodo  $j$ .  $A(G)$  debe tener 0 en la diagonal para un grafo simple sin autoconexiones.

*ii) Matriz de grado*  $D(G)$ : matriz diagonal  $N \times N$ . Los elementos  $d_{ij}$  se dan por:

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

donde  $d_i$  es el grado del nodo  $i$  y dado que cada nodo  $i$  está conectado sin patrón definido (irregular), entonces  $d_i$  es la suma de los elementos de la fila  $i$  de la matriz de adyacencia  $A(G)$ .

Con las dos matrices anteriores se puede calcular la siguiente matriz, la matriz Laplaciana. La **matriz Laplaciana**  $L(G)$  con  $N$  nodos,  $N \times N$  se da con  $L(G) = D(G) - A(G)$ , con

elementos  $l_{ij}$  determinado como:

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j) \in E(G), \\ d_i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Cuando la red es irregular, con o sin maestro, la matriz Laplaciana  $L(G)$  no toma forma definida, por lo tanto sus propiedades son diferentes para cada configuración de acoplamiento.

Por ejemplo, si se quisiera obtener la matriz Laplaciana de la figura 3.1, la siguiente matriz sería el resultado:

$$\begin{aligned} L(G) &= D(G) - A(G) \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

### Caso de redes irregulares con nodo maestro

Cuando la red tiene un nodo aislado o nodo maestro, significa que este nodo no recibe información o influencia del resto de la red, es decir, únicamente tiene salidas y no entradas. Si la sincronización llega a realizarse, muchas veces impone su dinámica al resto de la red. Se puede observar una red irregular con nodo maestro en la figura 3.2.

La matriz Laplaciana de la figura 3.2, resultaría muy similar a la matriz obtenida en (3.1.4),

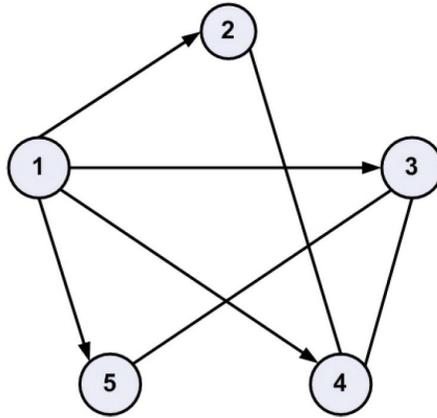


Figura 3.2: Red de acoplamiento irregular con nodo aislado o maestro.

solamente que se pondrían ceros en la fila que corresponde al nodo maestro, en este caso el nodo 1. Lo anterior se observa en la ecuación (3.1.5)

$$\begin{aligned}
 L(G) &= D(G) - A(G) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

### 3.1.2 Redes complejas regulares

Las redes regulares siguen un patrón definido en la forma en que sus nodos están conectados, y tienen estructuras, propiedades y características muy definidas (Wang X. F., 2008). Se trata de un caso particular de las redes irregulares. Los siguientes tres tipos son ejemplos de redes regulares:

**1.- Red con acoplamiento global ( $A_{gc}$ ):** Se le llama global, porque cada nodo de la

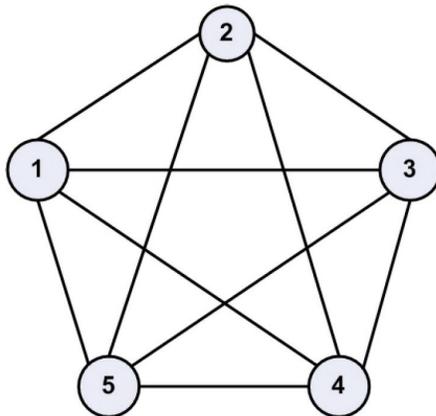


Figura 3.3: Red de acoplamiento global.

red esta conectado con el resto de nodos de la red. Un ejemplo de esta clase de red, se puede observar en la figura 3.3.

Para el caso de redes regulares, la matriz de adyacencia y la matriz de grado, se calculan de la misma manera que como en el caso de redes irregulares, con (3.1.1) y (3.1.2), respectivamente. En este caso cada nodo  $i$  está conectado con  $N - 1$  nodos. Los elementos de matriz Laplaciana  $L(G)$  son iguales que en (3.1.3), aunque en este caso  $d_1 = d_2 = \dots = d_N = N - 1$ ; por lo que la matriz Laplaciana  $L(G)$  queda como:

$$A_{gc} = L(G) = \begin{bmatrix} N-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & N-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & N-1 \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

Nótese que la suma de los elementos de las columnas de la matriz Laplaciana es cero.

**2.- Red con acoplamiento anillo ( $A_{nc}$ ):** Consiste en  $N$  nodos acoplados en anillo, y cada nodo  $i$  es adyacente a los nodos vecinos  $i \pm 1, i \pm 2, i \pm k/2$  con  $k$  un número par. Cada nodo sólo tiene una conexión de entrada y una de salida y esto se observa claramente en la figura 3.4.

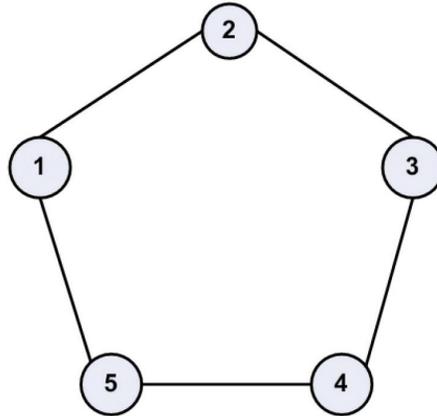


Figura 3.4: Red de acoplamiento anillo.

Las matrices  $A(G)$  y  $D(G)$  se calculan igual que antes, con (3.1.1) y (3.1.2). La matriz Laplaciana  $L(G) = D(G) - A(G)$  visto en (3.1.3) quedaría como caso particular de  $k = 2$ , entonces  $d_1 = d_2 = \dots = d_N = k$ , entonces:

$$A_{nc} = L(G) = \begin{bmatrix} k & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & k & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & k \end{bmatrix}. \quad (3.1.7)$$

La suma de los elementos de la matriz  $L(G)$  es 0.

**3.- Red con acoplamiento estrella ( $A_{st}$ ):** Este tipo existe cuando sólo un nodo está conectado al resto de los nodos. Es decir, que todos los nodos se acoplan a un sólo nodo central. Un ejemplo de esta clase de red, se puede observar en la figura 3.5.

Las matrices  $A(G)$  y  $D(G)$  se calculan de la misma manera. Entonces  $L(G) = D(G) - A(G)$ ,

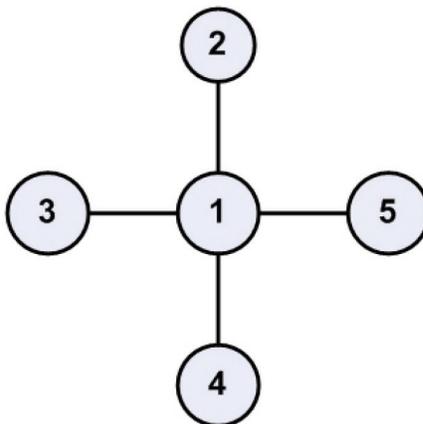


Figura 3.5: Red de acoplamiento estrella.

donde  $d_1 = N - 1$ ,  $d_2 = \dots = d_N = 1$ , queda como:

$$A_{st} = L(G) = \begin{bmatrix} -N + 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.8)$$

La suma de elementos en  $L(G)$  da cero.

### Caso de redes regulares con nodo maestro

Como fue mencionado, si la red tiene algún nodo maestro, este no recibe influencia o información alguna de otros nodos de la red. Si existe sincronía, este nodo maestro puede, al igual que el caso irregular, imponer su propia dinámica al resto de la red. Este caso, sigue los mismos pasos que su contraparte de redes irregulares. Para calcularlo, a la matriz Laplaciana se le reemplazará por ceros la fila donde se encuentre el nodo maestro. Se puede apreciar una red global con nodo maestro en el nodo 1 en la figura 3.6.

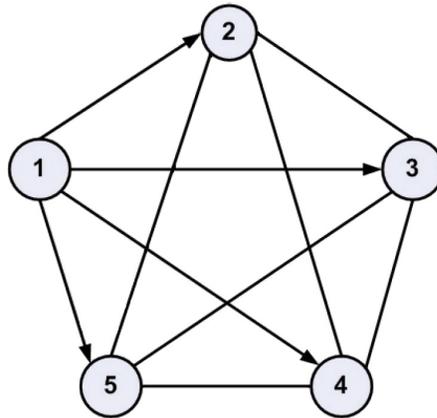


Figura 3.6: Red con acoplamiento global y nodo 1 como maestro.

Para este caso, la matriz Laplaciana quedaría como sigue:

$$L(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.1.9)$$

## 3.2 Sincronización de redes complejas

Una vez visto las topologías y algunas características de redes complejas, pasemos a la sincronía de las redes complejas. Se describirán las dinámicas de los nodos en red, y la ley de control mejor explicada por (Wang X. F., Chen G., 2002; Wang X. F., 2002) proveniente de la teoría de grafos. Se abordarán las condiciones necesaria para la sincronización y el análisis de estabilidad según la teoría de Lyapunov.

### 3.2.1 Dinámica de redes complejas

Considere una red compleja de  $N$  nodos idénticos acoplados linealmente a través de la primera variable de estados de cada nodo (Wang X. F., 2002). En esta red dinámica, cada nodo constituye un sistema dinámico de dimensión  $n$ , descrita como sigue:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (3.2.1)$$

donde  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$  son las variables de estado del modo  $i$ . Mientras que

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2.2)$$

La  $c > 0$  representa el grado de acoplamiento de los nodos de la red dinámica.  $\Gamma \in R^{n \times n}$  es la matriz de conexiones que conecta a las variables que están en los nodos acoplados. Por simplicidad,  $\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$  matriz diagonal con  $r_i = 1$  para una  $i$  en particular y  $r_j = 0$  para  $i \neq j$ .

$$A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}, \quad (3.2.3)$$

es la matriz de acoplamiento y representa la configuración de acoplamiento de los nodos en la red dinámica. Si hay conexión entre nodo  $i$  y el  $j$ , entonces la entrada  $a_{ij} = 1$ ; de lo contrario  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.4)$$

Si el grado del nodo  $i$  es  $d_i$ , entonces

$$a_{ii} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.5)$$

Suponiendo que la red dinámica no hay nodos aislados, entonces  $A$  es la matriz simétrica irreducible. En este caso cero es un valor propio de  $A$ , con multiplicidad 1 y el resto de los valores son estrictamente negativos. Si  $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t)$ , cuando  $t \rightarrow 0$  la red dinámica sincroniza.

La sincronización de estados corresponde a una solución  $s(t) \in R^n$ , de un nodo aislado, satisfaciendo

$$\dot{s}(t) = f(s(t)), \quad (3.2.6)$$

donde  $s(t)$  puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. Por lo que, la estabilidad, es decir

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t), \quad (3.2.7)$$

está determinada por la dinámica de un nodo aislado, de la función no lineal  $f$  y de su solución  $s(t)$ , del grado de acoplamiento  $c$ , de la matriz de conexiones  $\Gamma$  y de la matriz de acoplamiento  $A$ .

### 3.2.2 Condiciones de sincronización

**Teorema 1** (Wang X. F., Chen G., 2002; Wang X. F., 2002): Considere la red dinámica (3.2.1)-(3.2.2). Sean

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N, \quad (3.2.8)$$

los valores propios de  $A$ . Suponiendo que existe una matriz  $diag(n \times n)$   $\mathbf{D} > 0$  y dos constantes  $\bar{d} < 0$  y  $\tau > 0$  tales que

$$[Df(s(t)) + d\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}[Df(s(t)) + d\Gamma] \leq -\tau \mathbf{I}_n, \quad (3.2.9)$$

para todo  $d \leq \bar{d}$ .

Si se cumple  $c\lambda_2 \leq \bar{d}$  entonces la sincronización  $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t)$  es exponencialmente estable ya que  $\lambda_2 < 0$  y  $\bar{d} < 0$ , entonces

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right|. \quad (3.2.10)$$

Dado que  $|\lambda_2|$  puede ser grande, la red dinámica puede sincronizar con una  $c$  pequeña. Así la sincronización de la red dinámica (3.2.1)-(3.2.2) con respecto a una configuración particular de acoplamiento (regular o irregular), se puede determinar por el segundo valor propio más grande de la matriz de acoplamiento  $A$ .

### 3.2.3 Estabilidad de redes complejas

En esta sección, se presenta un estudio de estabilidad basada en la teoría de Lyapunov y describe las condiciones que garantizan estabilidad del error de sincronía de una red compleja definida por (3.2.1)-(3.2.2), contemplando los siguientes casos (Posadas-Castillo C., 2008):

1) El caso de una red compleja que no tenga un nodo aislado. En este caso, la dinámica resultante de la red corresponde a un nuevo estado caótico. 2) El caso de una red compleja con nodo aislado, también llamado nodo maestro. En este caso, la dinámica resultante corresponde a la del maestro.

#### Caso 1.- Sin Nodo Maestro

Considerando una red compleja compuesta de  $N$  sistemas caóticos (nodos) que están acoplados con una función

$$\dot{x}_i = f(x_i) + v_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2.11)$$

donde,  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$  representa el vector de estados del  $i$ -ésimo nodo  $f : R^n \rightarrow R^n$  es una función no lineal del estado  $v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$  es una función de acoplamiento. Cuando tenemos sistemas idénticos como nodos, los estados de los sistemas tienen la misma dimension. Es decir,  $v_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$ .

Si  $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , implica que cualquier solución de  $x_i(t)$  de un nodo aislado, es también salida de (3.2.11). Los estados de cualquiera dos nodos caóticos

$x_i(t)$ ,  $x_j(t)$  de la red satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad i \neq j. \quad (3.2.12)$$

Si se le define al error de sincronía por  $e_i = x_i - x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , entonces podemos obtener el siguiente sistema dinámico del error de sincronía:

$$\dot{e}_i = \tilde{f}(x_i, x_{i+1}) + \tilde{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3.2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_i, x_{i+1}) &= f(x_i) - f(x_{i+1}), \\ \tilde{v}_i &= v_i(x_1, x_2, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Proponiendo que

$$\tilde{v}_i = -\tilde{f}(x_i, x_{i+1}) - \alpha e_i, \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.2.15)$$

Entonces (3.2.13) es globalmente asintóticamente estable alrededor de 0, es decir,

$$e_i(t) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.2.16)$$

## Caso 2.- Con Nodo Maestro

Si la función de acoplamiento es  $v_k = 0$ , entonces es de la forma:

$$v_i = f(x_k) - f(x_i) + \alpha(x_k - x_i), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.2.17)$$

Esto implica que el nodo desacoplado  $k$  se toma como maestro y todos los nodos sincronizan con  $k$ , es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_k(t)\| = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.18)$$

Esto significa, que se puede garantizar que los estados de la red sincronizan con los estados arbitrarios de un nodo desacoplado  $k$ . En particular, se requiere que los estados de los nodos de la red compleja, sincronizen con el estado del nodo maestro  $s(t)$ , que satisface

$$\dot{s}(t) = f(s(t)). \quad (3.2.19)$$

Esta dinámica del nodo aislado o maestro, puede ser un punto equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. Se escoge una función de acoplamiento de la forma

$$v_i = f(s) - f(x_i) + \alpha(s - x_i), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3.2.20)$$

tal que satisfaga (3.2.18) y que por lo tanto garantice la sincronización asintótica y global.

Las condiciones aquí descritas, estaban a manera de resumen. Si el lector está interesado en profundizar en el contenido del epígrafe del presente capítulo, relativo a la estabilidad de redes complejas, puede consultar las referencias (Wu y Chua 1995; Li y Chen 2004).

### 3.3 Ejemplos de sincronización de osciladores caóticos

Suponga que existe una red de 7 osciladores caóticos del circuito de Chua, con un arreglo global como el que se observa en la figura 3.7. Se pretende sincronizar cada nodo caótico utilizando (3.2.1)-(3.2.2). Nuestros nodos están formados por osciladores caóticos de Chua (Lopez-Mancilla D., 2005), expresado por las siguientes ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p(x_2 - x_1 - f(x)), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -qx_2, \\ f(x) &= m_0x + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x + 1| - |x - 1|). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

El oscilador es caótico con los siguientes parámetros:  $p = 10$ ,  $q = 14.87$ ,  $m_0 = -0.68$ ,  $m_1 = -1.27$

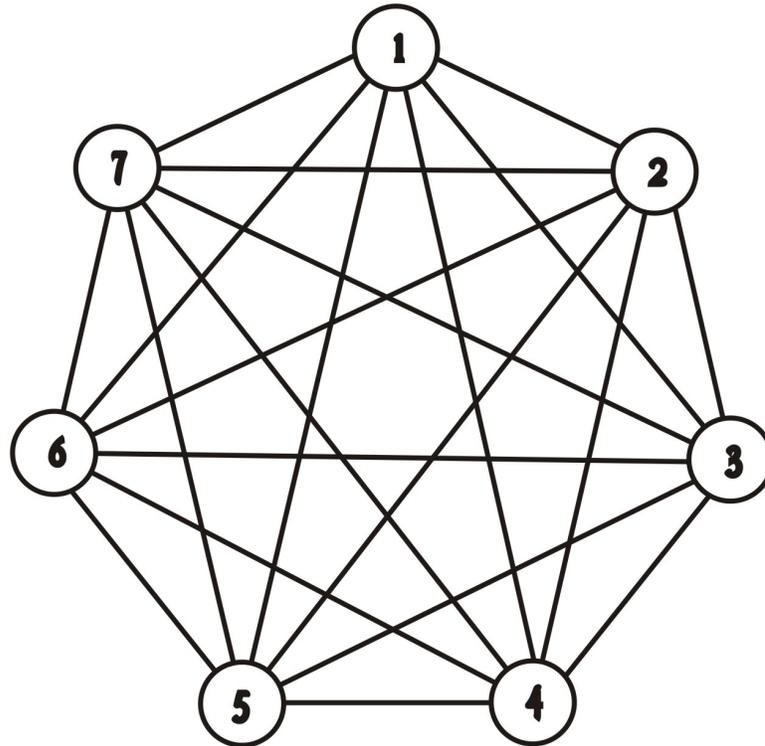


Figura 3.7: Red global de 7 nodos.

La matriz de acoplamiento se obtiene con la ecuación (3.2.3) u obteniendo la matriz Laplaciana y multiplicarlo por  $-1$ , la cual queda como sigue:

$$A_{gc} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Usando el procedimiento antes descrito en (3.2.1)-(3.2.2), el arreglo y la ley de control para

cada nodo quedaría como sigue:

$$\begin{array}{l}
 N1 \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{11} = p(x_{12} - x_{11} - f(x_{11})) + u_1, \\ \dot{x}_{12} = x_{11} - x_{12} + x_{13}, \\ \dot{x}_{13} = -qx_{12}, \\ f(x_{11}) = m_0x_{11} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x_{11} + 1| - |x_{11} - 1|), \end{array} \right. \\
 \\
 N2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{21} = p(x_{22} - x_{21} - f(x_{21})) + u_2, \\ \dot{x}_{22} = x_{21} - x_{22} + x_{23}, \\ \dot{x}_{23} = -qx_{22}, \\ f(x_{21}) = m_0x_{21} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x_{21} + 1| - |x_{21} - 1|), \end{array} \right. \\
 \\
 \vdots \\
 \\
 N7 \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{71} = p(x_{72} - x_{71} - f(x_{71})) + u_7, \\ \dot{x}_{72} = x_{71} - x_{72} + x_{73}, \\ \dot{x}_{73} = -qx_{72}, \\ f(x_{71}) = m_0x_{71} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x_{71} + 1| - |x_{71} - 1|), \end{array} \right.
 \end{array}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -6x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71}, \\
 u_2 &= x_{11} - 6x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71}, \\
 u_3 &= x_{11} + x_{21} - 6x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71}, \\
 u_4 &= x_{11} + x_{21} + x_{31} - 6x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71}, \\
 u_5 &= x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} - 6x_{51} + x_{61} + x_{71}, \\
 u_6 &= x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} - 6x_{61} + x_{71}, \\
 u_7 &= x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} - 6x_{71}.
 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales para los respectivos nodos son:  $x_1(0) = (0.1, 1, -3.5)$ ;  $x_2(0) = (2.1, -.71, 1)$ ;  $x_3(0) = (-0.8, 1.4, 9.7)$ ;  $x_4(0) = (1, 3.2, 1)$ ;  $x_5(0) = (2.3, 4, 0.5)$ ;  $x_6(0) = (-3.3, -2, 2)$ ;  $x_7(0) = (-6, -.9, -7.5)$ . Para este ejemplo, se utilizó un acoplamiento de  $c = 3$ . Se tiene sincronía con un menor acoplamiento, pero se escogió ésta, para un tiempo de sincronía de aproximadamente 30 segundos, y poder apreciar la convergencia de las señales a pesar de los diferentes condiciones iniciales. Con condiciones iniciales diferentes, muy cerca entre sí, se puede disminuir el acoplamiento y mantener un tiempo de sincronía adecuado.

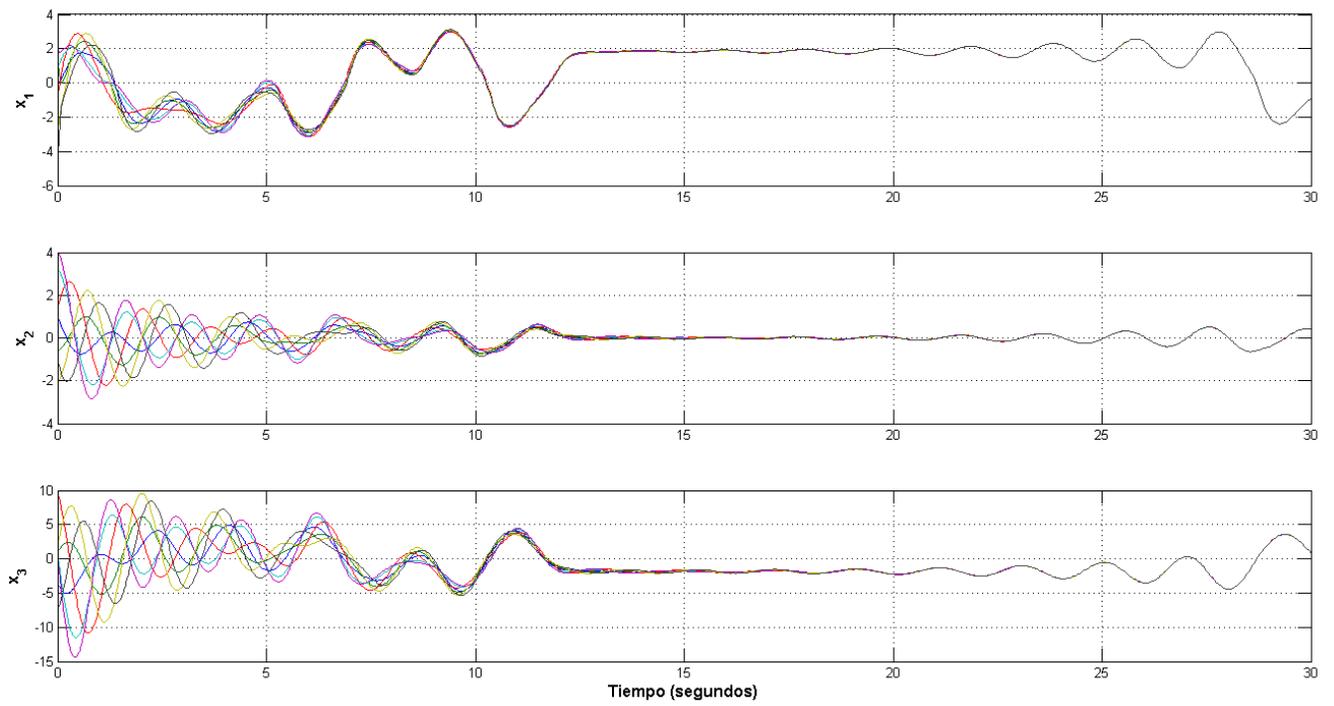


Figura 3.8: Estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , contra el tiempo, donde  $i = 1, 2, \dots, 7$ .

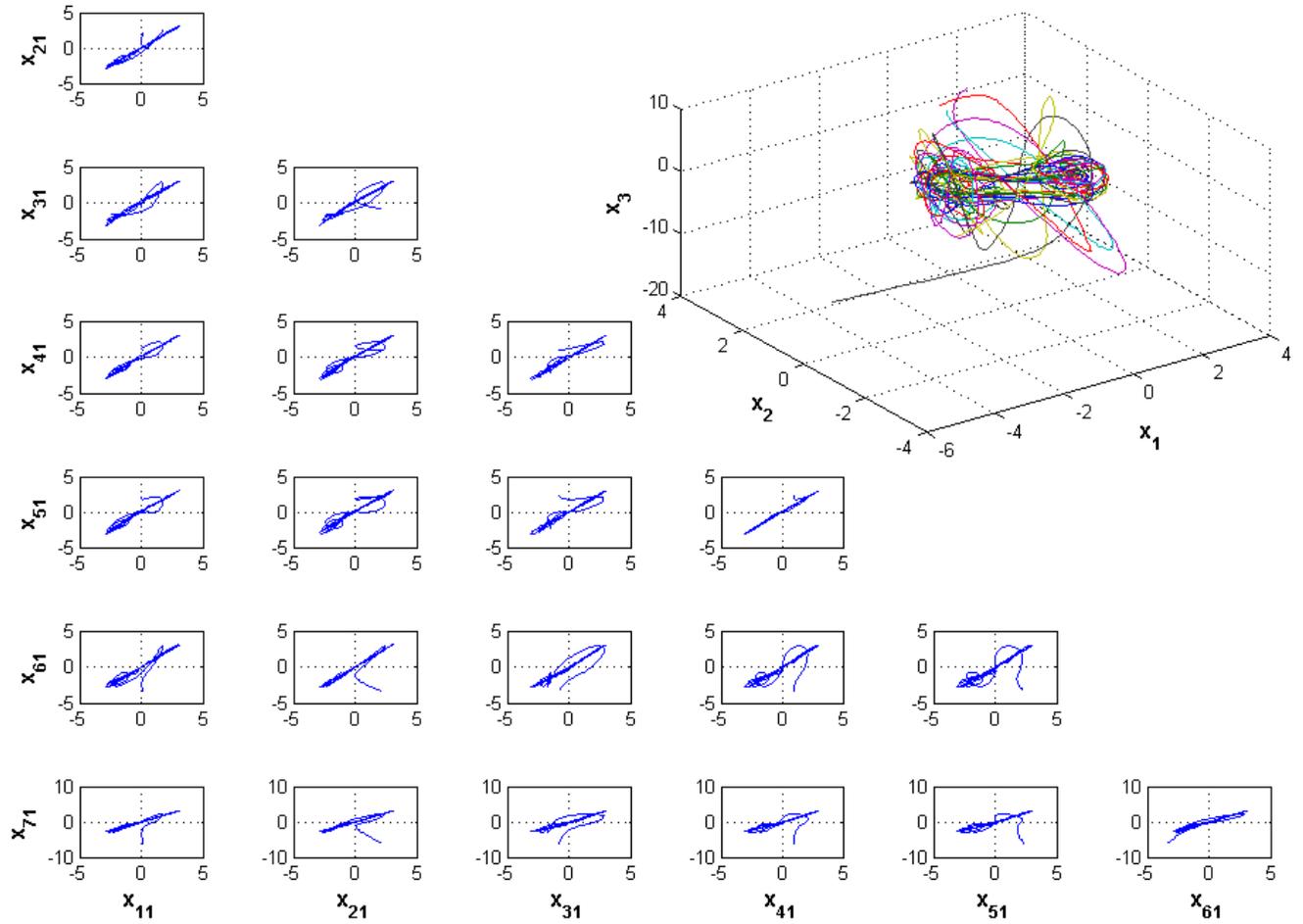


Figura 3.9: Planos de fase de los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, 7$ .

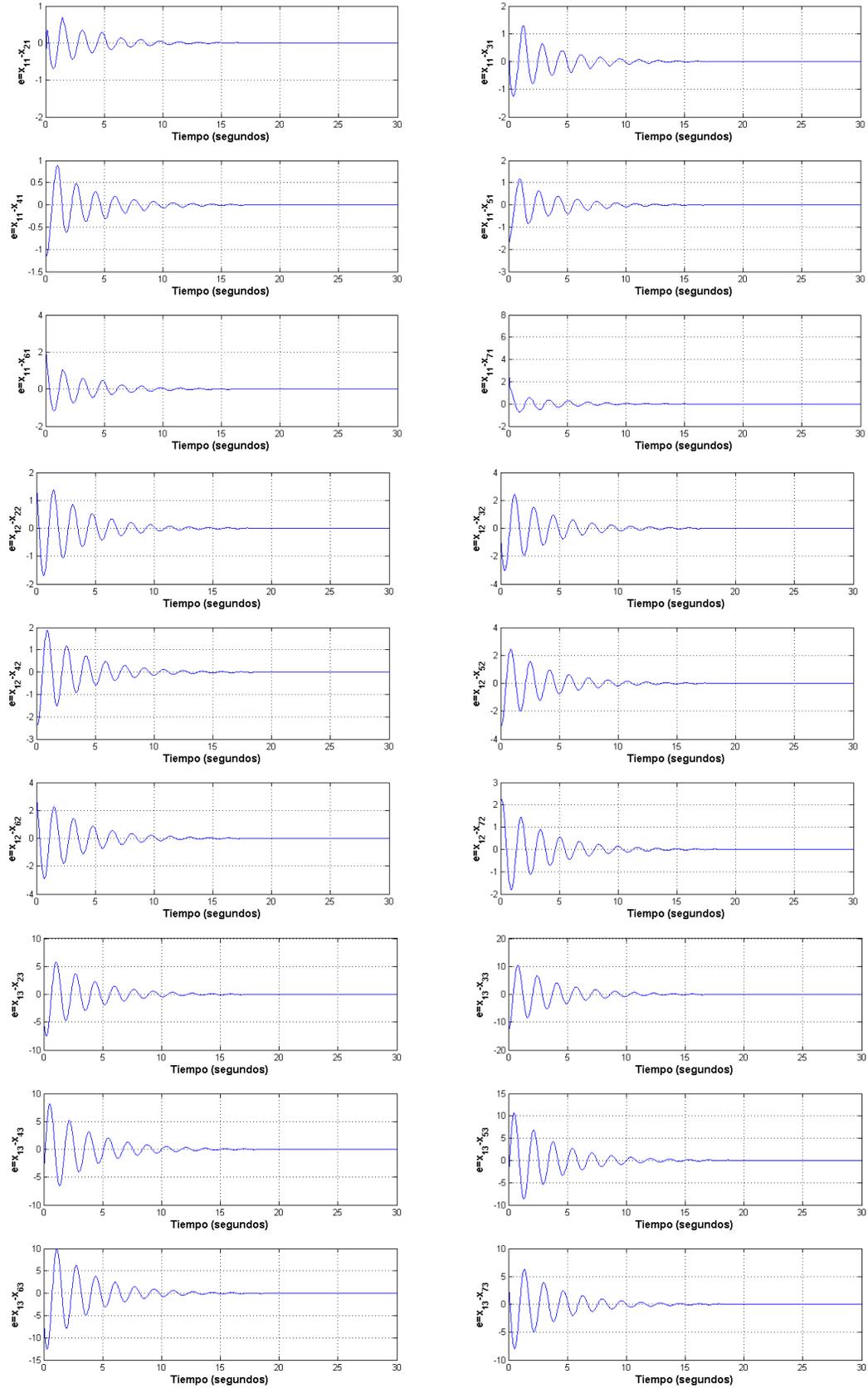


Figura 3.10: Gráficos de error de los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, 7$ .

Nótese que en la figura 3.8 los estados sincronizan aproximadamente en 25 segundos. Las condiciones iniciales fueron escogidas para ser lo más diferentes los unos a los otros. En la figura 3.9 se aprecia el atractor caótico del circuito de Chua, en la parte superior derecha; y los planos de fase, donde se están comparando todos los estados entre sí. Los planos de fase crean una línea de 45 grados, lo que representa sincronía; después de un periodo transitorio. Se incluye una gráfica de error en la figura 3.10; en la que se observa que el error tiende a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ .

## Capítulo 4

# Sistemas en forma Hamiltoniana generalizada

En esta tesis, se revisó varias técnicas de sincronización de osciladores caóticos. De entre ellas, se observó que la forma Hamiltoniana generalizada poseía muchas ventajas, como lo son:

- La sincronización se logra en forma sistemática,
- muchos osciladores caóticos e hipercaóticos se pueden expresar en forma hamiltoniana,
- este método no requiere el cálculo de ningún exponente de Lyapunov,
- y no requiere que las condiciones iniciales pertenezcan a la misma cuenca de atracción.

También, la reconstrucción del vector de estado a partir de una señal de salida definida, se puede evaluar, a partir de la observabilidad o, en su defecto, la detectabilidad de un par de matrices constantes (Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., 2001). La estructura Hamiltoniana generalizada de muchos sistemas caóticos conocidos, permiten poder decidir en la naturaleza de la señal de salida de sincronización, basándose en el sistema de disipación, en el manejo de la energía conservativa y en la necesidad de eliminación, en el receptor, del localmente o globalmente campo vectorial desestabilizante.

Como se verá más adelante, existe una condición para llegar a sincronizar utilizando este método y el método por observador en forma Hamiltoniana generalizada. Cabe recordar que parte de los objetivos es crear un método que pueda sincronizar una red de sistemas caóticos en forma Hamiltoniana, ya que como se observará en adelante, esto no es posible.

## 4.1 Sistemas en forma Hamiltoniana generalizada

Si se considera un sistema no lineal suave, su forma canónica Hamiltoniana generalizada queda como sigue:

$$\dot{x} = \mathcal{J}(x) \frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{S} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in R^n. \quad (4.1.1)$$

donde:

- $H(x)$  es una función de energía suave y es globalmente definido positivo en  $R^n$ ,
- $\partial H/\partial x$  es el vector gradiente  $H$  y se asume que existe. Frecuentemente se usa funciones de energía cuadrática de la forma,

$$H(x) = \frac{1}{2} x^T \mathcal{M} x, \quad (4.1.2)$$

siendo  $\mathcal{M}$  una matriz simétrica definida positiva y constante. En este caso

$$\partial H/\partial x = \mathcal{M} x. \quad (4.1.3)$$

- $\mathcal{J}(x)$  y  $\mathcal{S}(x)$  deben satisfacer las siguientes propiedades:

$$\mathcal{J}(x) + \mathcal{J}^T(x) = 0, \quad \mathcal{S}(x) = \mathcal{S}^T(x). \quad (4.1.4)$$

- $\mathcal{J}(x) \frac{\partial H}{\partial x}$  es un campo vectorial y es la parte conservativa del sistema.
- $\mathcal{S}$  es una matriz constante simétrica y representa la parte no conservativa del sistema. En algunos casos,  $\mathcal{S}$  es negativa definida o negativa semidefinida, por lo que se le puede

llamar la parte disipativa del sistema, en esos casos. Si por el contrario,  $\mathcal{S}$  es positiva definida, positiva semidefinida, o indefinida, representa la parte global, semiglobal, o local, respectivamente, desestabilizante del sistema.

En el contexto de diseño de observadores, el sistema antes mencionado se reescribirá de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \mathcal{J}(x) \frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{S} \frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{F}(x), \quad (4.1.5)$$

donde:

- $\mathcal{F}(x)$  representa el vector localmente desestabilizante.
- $\mathcal{S}(x)$  es una matriz simétrica. Su signo no necesariamente es definido.

## 4.2 Diseño no lineal de observadores en forma Hamiltoniana generalizada

Si consideramos una clase de sistema con campos vectoriales desestabilizante y un mapeo de salida lineal,  $y$ , dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{J}(x) \frac{\partial H}{\partial x} + (\mathcal{I} + \mathcal{S}) \frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{F}(y), \quad x \in R^n, \\ y &= \mathcal{C} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad y \in R^m, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

donde:

- $\mathcal{S}$  es una matriz simétrica constante, no necesariamente de signo definido.
- $\mathcal{I}$  es una matriz constante antisimétrica.
- $y$  es un vector variable y se refiere a la salida.

- $\mathcal{C}$  es una matriz constante.

El dejar una serie de ecuaciones en forma Hamiltoniana generalizada, nos proporciona las matrices:  $\mathcal{J}, \mathcal{I}, \mathcal{S}$  y  $\mathcal{F}$ ; cada matriz con sus propias características (simétrica, antisimétrica, definida o semidefinida positiva o negativa, etc). Al construir un observador o estimador, se denota el estado estimado con la variable  $\xi$ . De igual manera que  $\eta$  será el estimado de la  $y$  o salida, y es generado a partir de términos de  $\xi$ . El vector gradiente  $\frac{\partial H}{\partial \xi}$ , es de la forma  $\mathcal{M}\xi$ , donde  $\mathcal{M}$  es una matriz constante, simétrica, y definida positiva. La dinámica no lineal del observador queda como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \mathcal{J}(y) \frac{\partial H}{\partial \xi} + (\mathcal{I} + \mathcal{S}) \frac{\partial H}{\partial \xi} + \mathcal{F}(y) + K(y - \eta), \\ \eta &= \mathcal{C} \frac{\partial H}{\partial \xi},\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

donde  $K = k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in R^n$  es un vector constante y es conocido como la ganancia del observador. Las matrices  $\mathcal{J}, \mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{C}$  y  $H$  tienen las mismas propiedades y son iguales a las del sistema original en (4.2.1), salvo que  $x$  está estimada como  $\xi$ . Aquí, el observador (4.2.2) funge como el oscilador esclavo.

Nótese que existe  $K(y - \eta)$ , esto es para indicar que no sólo el estimador es un segundo sistema, sino para hacer que este segundo sistema (observador) (4.2.2) tienda al original (4.2.1). Esto se logra restando la salida del sistema original y la del observador (“ $y - \eta$ ”). Eso se consideraría nuestra retroalimentación. La matriz  $K$ , que es una matriz constante, indica la ganancia del observador, y con ello se puede controlar la velocidad a la que el sistema observador y el original tiendan a ser iguales.

El error entre los estados originales y observados se define como  $e = x - \xi$  y el error de salida se define como  $e_y = y - \eta$  y se gobierna por:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \mathcal{J}(y) \frac{\partial H}{\partial e} + (\mathcal{I} + \mathcal{S} - \mathcal{K}\mathcal{C}) \frac{\partial H}{\partial e}; \quad e \in R^n, \\ e_y &= \mathcal{C} \frac{\partial H}{\partial e},\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

donde el vector  $\frac{\partial H}{\partial e}$  es el vector gradiente de la función de energía modificada y quedaría como:

$$\frac{\partial H}{\partial e} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \xi} = \mathcal{M}(x - \xi) = \mathcal{M}e. \quad (4.2.4)$$

Se dice que el sistema observador sincronizará con el sistema maestro, si  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El análisis de estabilidad para el error de estimación de estado, está dado por los siguientes teoremas. Nótese que se usará  $I + S = W$  cuando se necesite.

**Teorema 1** (Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., 2001): El estado  $x$  del sistema no lineal, (4.2.1), es global, exponencial, y asintóticamente observado por el estado  $\xi$  de un observador en la forma (4.2.2), si el par de matrices  $(C, W)$ , o el par  $(C, S)$ , es observable, o al menos, detectable.

Una condición de observabilidad en cada uno de los pares  $(C, W)$ , o  $(C, S)$ , es claramente una condición suficiente, mas no necesaria, para una reconstrucción asintótica del estado.

**Teorema 2** (Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., 2001): El estado  $x$  del sistema no lineal (4.2.1) es global, exponencial, y asintóticamente estimado por el estado  $\xi$  de un observador en la forma (4.2.2), si, y sólo si, existe una matriz constante  $K$  tal que la matriz simétrica

$$[W - KC] + [W - KC]^T = [S - KC] + [S - KC]^T = 2[S - \frac{1}{2}(KC + C^T K^T)], \quad (4.2.5)$$

es definida negativa.

### 4.3 Ejemplos de sincronización usando la forma Hamiltoniana generalizada

Se desea sincronizar dos osciladores caóticos de Chen, utilizando el método Hamiltoniano, acoplados como se muestra en la figura 4.1. Las ecuaciones no lineales del oscilador de Chen

(Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., 2001), son:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3.\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

Con los parámetros  $a = 35$ ,  $b = 3$ , y  $c = 28$ , el oscilador (4.3.1) exhibe una dinámica caótica. Debido a que se trata de una red de dos osciladores en acoplamiento unidireccional, la red se vería como en la figura 4.1; donde el nodo maestro impone su dinámica al nodo observador, en esta configuración al observador se le conoce como esclavo.



Figura 4.1: Red maestro-observador unidireccional. Aquí el nodo maestro envía información al nodo observador, pero el observador no puede enviarla de vuelta al nodo maestro.

El oscilador de Chen se puede escribir fácilmente en la forma Hamiltoniana generalizada, teniendo como función de energía Hamiltoniana:

$$H(x) = \frac{1}{2} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2].\tag{4.3.2}$$

Tomando en cuenta (4.3.2), el sistema (4.3.1) expresado en forma Hamiltoniana es:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a - \frac{c}{2} & 0 \\ -a + \frac{c}{2} & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} -a & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}.\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

El diseño del observador para (4.3.3) queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a - \frac{c}{2} & 0 \\ -a + \frac{c}{2} & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi} + \begin{bmatrix} -a & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi} + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} (x_1 - \xi_1).\tag{4.3.4}$$

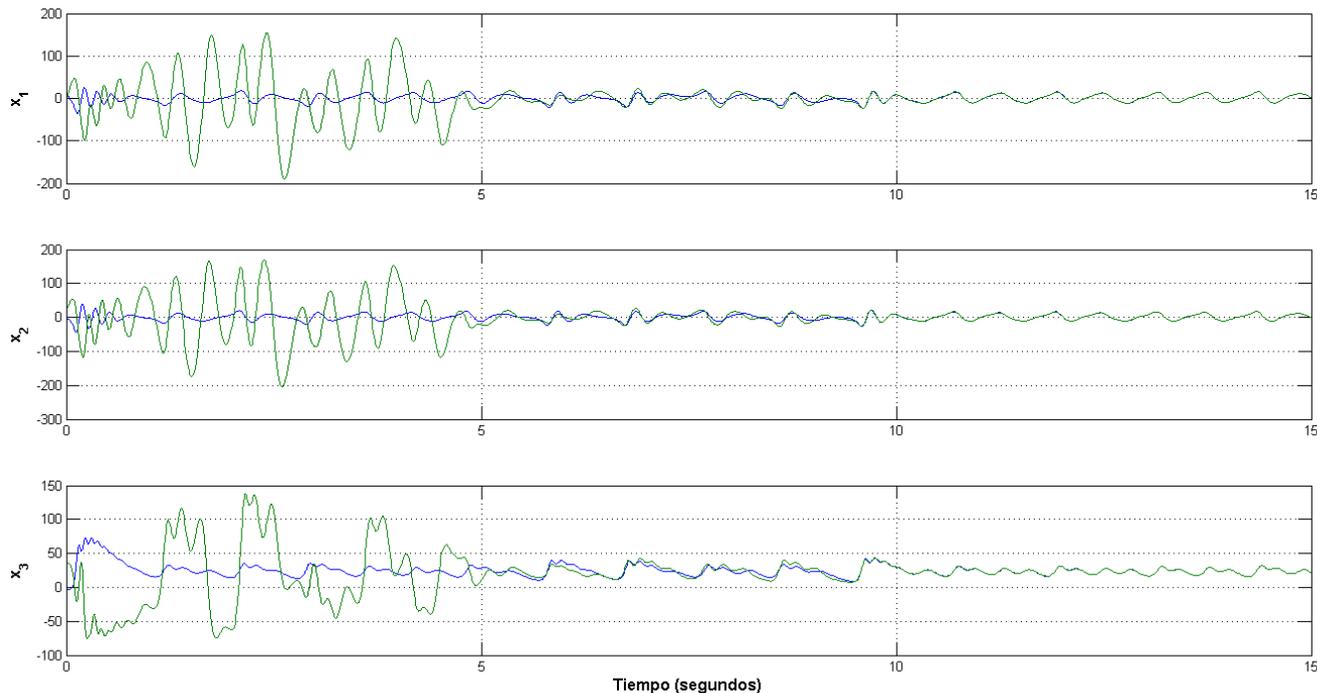


Figura 4.2: Estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , contra el tiempo, donde  $i = 1, 2$ .

Las condiciones iniciales para los respectivos nodos son:  $x(0) = (15, -2, -2)$ ;  $\xi(0) = (-8, 21, 32)$ ; Para este ejemplo, se utilizó unas ganancias constantes de  $K_1 = 0.5$ ,  $K_2 = 25$ ,  $K_3 = 0$ . Con estas ganancias se alcanza sincronía en un tiempo de aproximadamente 15 segundos, y también se observa la convergencia de las señales a pesar de los diferentes condiciones iniciales.

Nótese que en la figura 4.2 los estados sincronizan aproximadamente en 15 segundos. Las condiciones iniciales fueron escogidas para ser lo más diferentes los unos a los otros. En la figura 4.3 se aprecia el atractor caótico de Chen, en la parte derecha; y los planos de fase, donde se están comparando todos los estados entre sí. Los planos de fase crean una línea de 45 grados, lo que representa sincronía después de un periodo transitorio. En algunos casos el periodo transitorio puede opacar u ocultar esta línea; es por ello que se incluye una gráfica de error en la figura 4.4; en la que se observa que el error tiende a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ .

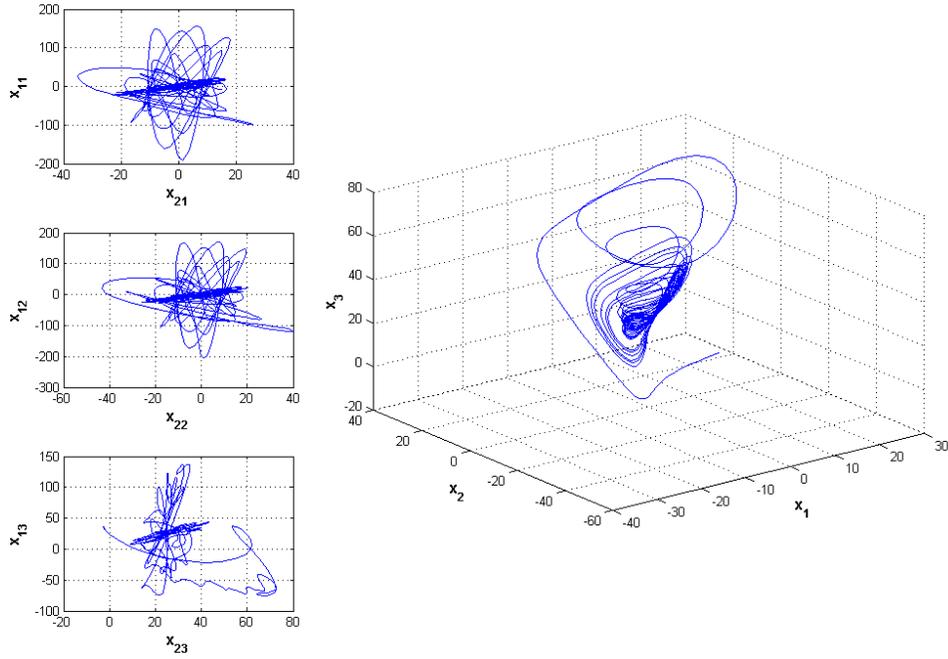


Figura 4.3: Planos de fase entre los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , donde  $i = 1, 2$ .

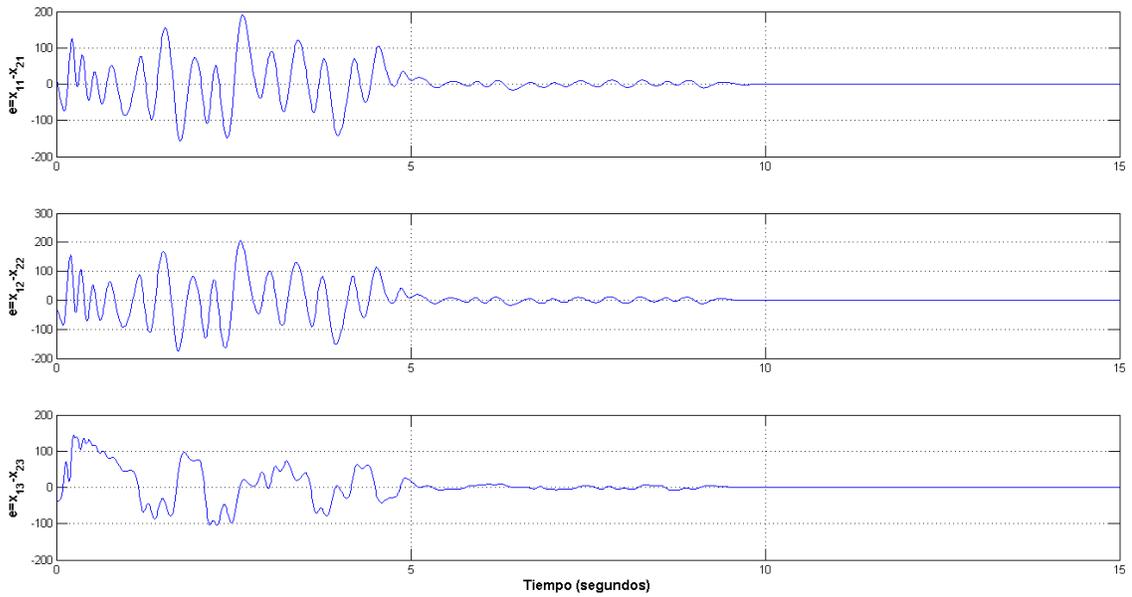


Figura 4.4: Gráficos de error entre los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , donde  $i = 1, 2$ .

## Capítulo 5

# Red de osciladores en forma Hamiltoniana

Hasta ahora, se ha planteado la sincronización de osciladores caóticos, desde el punto de vista de la teoría de grafos, basándonos en (Wang X. F., Chen G., 2002; Wang X. F., 2002); y utilizando el método del diseño de un observador forma canónica Hamiltoniana (Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., 2001).

Analizando ambos métodos, podemos concluir varias instancias. Primero, la sincronización de osciladores caóticos según (Wang X. F., Chen G., 2002; Wang X. F., 2002), aplicado a redes, toma de referencia las ecuaciones no lineales de osciladores caóticos como nodos, y no en forma Hamiltoniana. Segundo, el diseño de observadores en forma Hamiltoniana generalizada, para la sincronización de osciladores caóticos, está únicamente limitado a dos osciladores; es decir, el oscilador original o maestro, y observador o esclavo. Podemos concluir que el método no es aplicable a más nodos, a excepción de una red regular de nodos con acoplamiento de anillo, donde el nodo central fuese el maestro. Para una red de osciladores caóticos en forma Hamiltoniana generalizada, donde existan más de dos nodos y la posibilidad de ser una red irregular, este método no es suficiente.

Se eligió la metodología vista en (Wang X. F., Chen G., 2002; Wang X. F., 2002), propia de teoría de grafos, aplicándolo con un enfoque a nodos en forma Hamiltoniana generalizada.

La siguiente metodología fue dispuesta.

## 5.1 Dinámica de una Red de osciladores caóticos en forma Hamiltoniana

Considere un caso en el que existe una red de osciladores dispuestos en red, y además los nodos están en forma Hamiltoniana. Considere que cada ecuación está en forma Hamiltoniana generalizada, y que representaría un nodo de la red. Esto se indica para cada variable de estado. Comúnmente se hace con la  $i$  como se verá posteriormente. A cada nodo se considera la suma de la ley de control usada en teoría de redes según (Wang X. F., 2002). La dinámica queda como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \mathcal{J}(y_i) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} + (\mathcal{I} + \mathcal{S}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathcal{F}(y_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, & x_i \in R^n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ y_i &= \mathcal{C} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i}, & y_i \in R^m, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

donde:

- $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^T \in R^n$  es el vector al cual pertenecen las variables de estado del nodo  $i$ .
- $i = 1, 2, 3, \dots, N$  e indica el nodo al cual nos referimos.
- $\mathcal{S}$  es una matriz constante simétrica.
- $\mathcal{I}$  es una matriz antisimétrica.
- $y$  es la salida.
- $\mathcal{C}$  es una matriz constante.
- $\mathcal{F}$  es un vector desestabilizante.

- $c > 0$  es el grado de acoplamiento.
- $\Gamma \in R^{n \times n}$  es la matriz de conexiones.

$$\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n); \quad r_i = 1; \quad r_j = 0; \quad i \neq j, \quad (5.1.2)$$

- $A$  es la matriz de acoplamiento, de donde obtenemos cada valor  $a_{ij}$ .
- $H$  es la función de energía Hamiltoniana. Recordemos que  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  será tomada como vector. En el caso de las redes se tendrá que tomar en cuenta a qué nodo nos estamos refiriendo, por lo cual usaremos la siguiente notación para  $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ :

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_{i1}} \\ \frac{\partial H}{\partial x_{i2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x_{in}} \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

Ejemplos descriptivos de esta metodología y de la notación:

## 5.2 Ejemplo 1: Sincronización de una red de osciladores de Lorenz en forma Hamiltoniana

Suponga que se desea sincronizar una red global de 5 osciladores caóticos de Lorenz en forma Hamiltoniana, como se observa en la figura 5.1.

Los nodos son osciladores caóticos de Lorenz (Lorenz, 1963), expresado por las siguientes

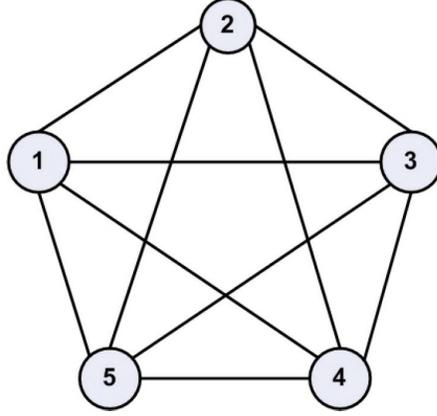


Figura 5.1: Red de cinco nodos caóticos en arreglo global.

ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\
 \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_2, \\
 \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3,
 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

y con los parámetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = \frac{8}{3}$  exhiben un comportamiento caótico.

El oscilador de Lorenz se puede escribir en forma Hamiltoniana generalizada, teniendo como función de energía Hamiltoniana la siguiente función:

$$H(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right]. \tag{5.2.2}$$

La forma Hamiltoniana generalizada es:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \begin{bmatrix} -\sigma^2 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \\
 \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}.
 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

El procedimiento anterior, se puede verificar en (Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., 2001). Recordemos que  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  es un vector y usaremos la notación en (5.1.3). Aplicándolo a este

ejemplo en particular, usando el primer nodo ( $N_1$ ), tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_{11}} \\ \frac{\partial H}{\partial x_{12}} \\ \frac{\partial H}{\partial x_{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.2.4)$$

Se debe usar esta metodología para cada uno de los nodos. La matriz de acoplamiento se obtiene con la ecuación (3.2.3) u obteniendo la matriz Laplaciana y multiplicarlo por  $-1$ , la cual queda como sigue:

$$A_{gc} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \quad (5.2.5)$$

Apelando al procedimiento descrito en (5.1.1). El arreglo y la ley de control para cada nodo quedaría como sigue:

$$N_1 \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_{11} \\ 0 & x_{11} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} + \begin{bmatrix} -\sigma^2 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ r x_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} c(-4x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\},$$

$$N_2 \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_{21} \\ 0 & x_{21} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_2} + \begin{bmatrix} -\sigma^2 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ r x_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} c(x_{11} - 4x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\},$$

$$\begin{aligned}
N_3 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \\ \dot{x}_{33} \end{array} \right] \\ \\ \end{array} \right. &= \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_{31} \\ 0 & x_{31} & 0 \end{array} \right] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_3} + \left[ \begin{array}{ccc} -\sigma^2 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{array} \right] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_3} + \left[ \begin{array}{l} 0 \\ rx_{31} \\ 0 \end{array} \right] \\ \\ + \left[ \begin{array}{l} c(x_{11} + x_{21} - 4x_{31} + x_{41} + x_{51}) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} , \\
N_4 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_{41} \\ \dot{x}_{42} \\ \dot{x}_{43} \end{array} \right] \\ \\ \end{array} \right. &= \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_{41} \\ 0 & x_{41} & 0 \end{array} \right] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_4} + \left[ \begin{array}{ccc} -\sigma^2 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{array} \right] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_4} + \left[ \begin{array}{l} 0 \\ rx_{41} \\ 0 \end{array} \right] \\ \\ + \left[ \begin{array}{l} c(x_{11} + x_{21} + x_{31} - 4x_{41} + x_{51}) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} , \\
N_5 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_{51} \\ \dot{x}_{52} \\ \dot{x}_{53} \end{array} \right] \\ \\ \end{array} \right. &= \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_{51} \\ 0 & x_{51} & 0 \end{array} \right] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_5} + \left[ \begin{array}{ccc} -\sigma^2 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{array} \right] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_5} + \left[ \begin{array}{l} 0 \\ rx_{51} \\ 0 \end{array} \right] \\ \\ + \left[ \begin{array}{l} c(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} - 4x_{51}) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} .
\end{aligned}$$

Las condiciones iniciales para cada nodo son:  $x_1(0) = (16, 0.65, 0.5)$ ;  $x_2(0) = (-0.1, 2.6, 8)$ ;  $x_3(0) = (3, -1.5, 9)$ ;  $x_4(0) = (-13, 0.19, 2)$ ;  $x_5(0) = (-6.5, 3.5, 0.1)$ . Se utiliza un acoplamiento de  $c = 2.5$ ; para que se observara que los diferentes condiciones iniciales de cada nodo y la evolución de su señal para un tiempo de sincronía de 20 segundos.

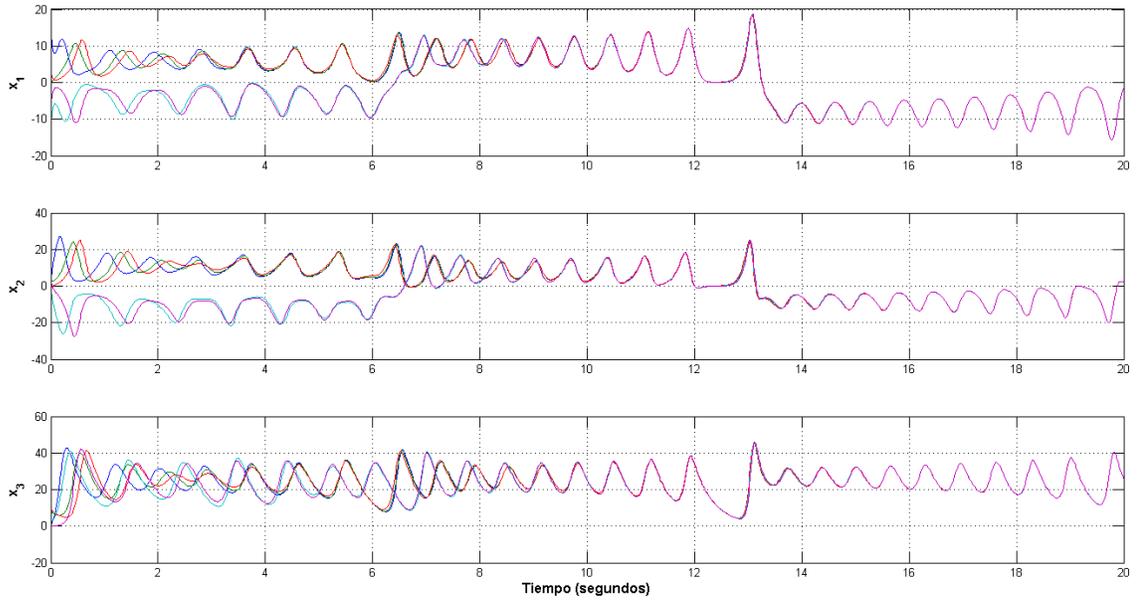


Figura 5.2: Estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

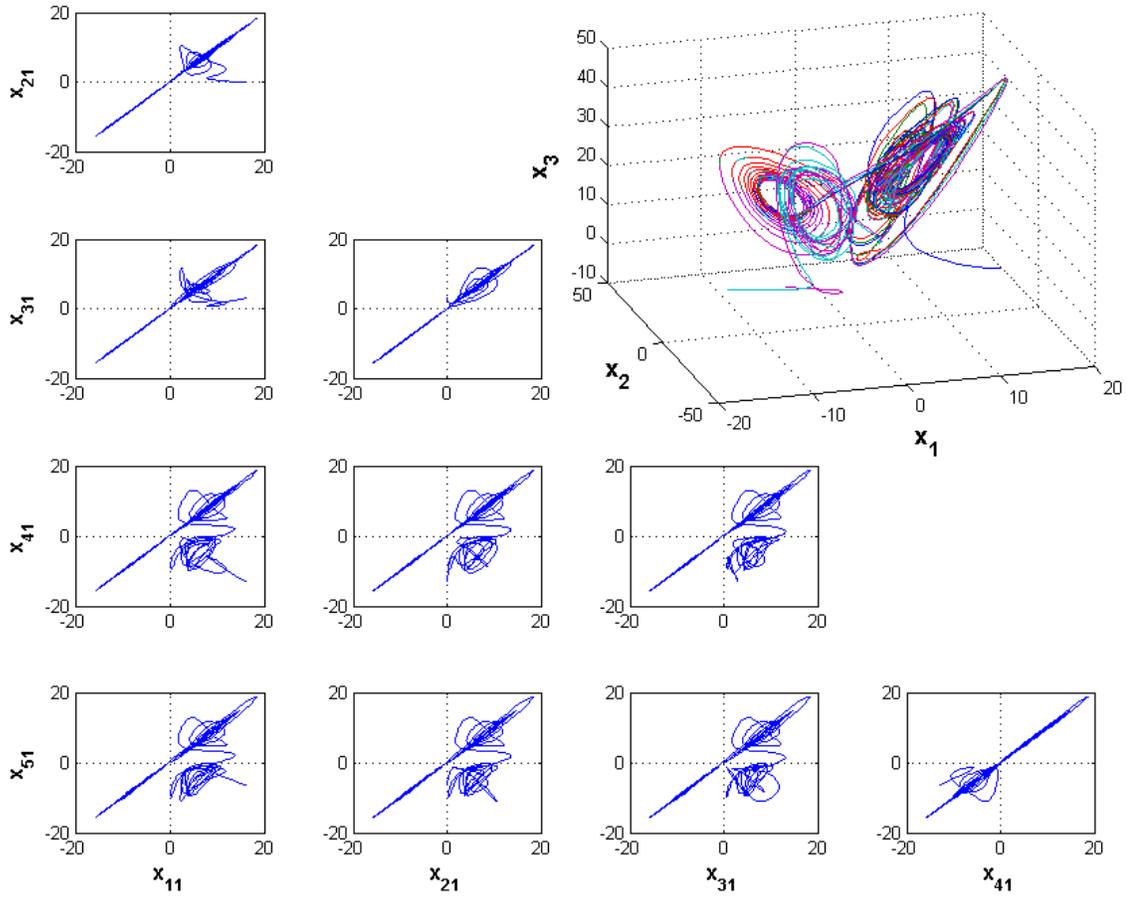


Figura 5.3: Planos de fase entre estados  $x_{i1}$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

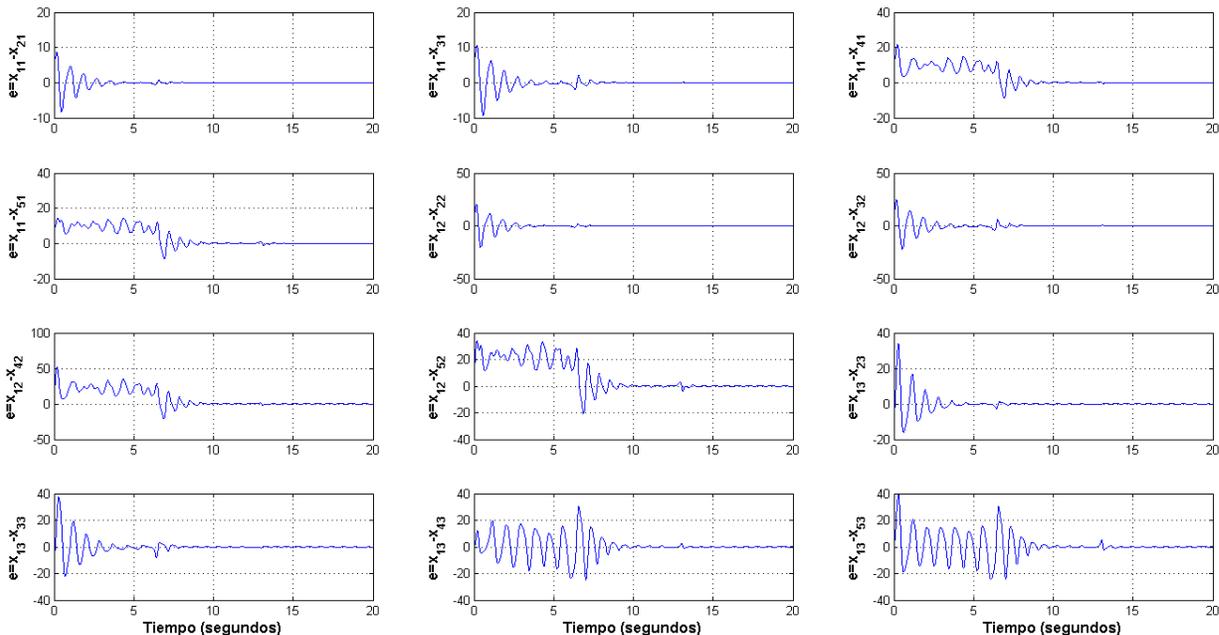


Figura 5.4: Gráficos de error de sincronía entre estados  $x_{i1}$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Nótese que en la figura 5.2 los estados sincronizan aproximadamente en 15 segundos. Las condiciones iniciales fueron escogidas para ser lo más diferentes los unos a los otros. En la figura 5.3 se aprecia la forma de mariposa tradicional de un sistema de Lorenz, en la parte superior derecha; y los planos de fase, donde se están comparando todos los estados entre sí. Los planos de fase forman una línea de 45 grados, lo que representa sincronía. En algunos casos el periodo transitorio puede opacar u ocultar esta línea; es por ello que se incluye una gráfica de error en la figura 5.4 para que se observe que el error tiende a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ . Tanto la gráfica de error graficado contra el tiempo, en la figura 5.4, como la gráfica de los estados  $x_{i1}$  contra el tiempo, figura 5.2, únicamente se graficaron los primeros 20 segundos, debido a que durante este tiempo se alcanza la sincronía. En la figura 5.3, se graficó hasta 200 segundos.

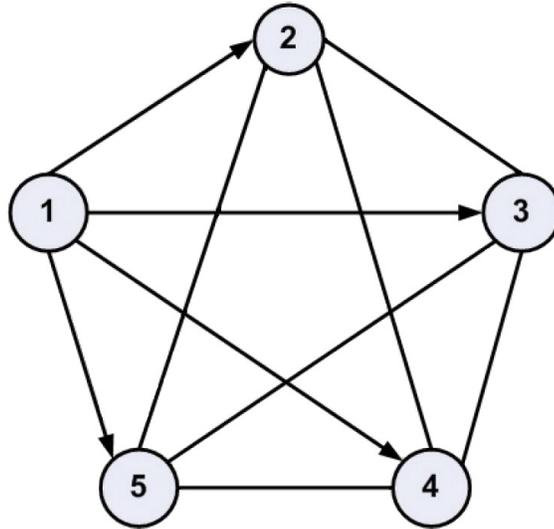


Figura 5.5: Red de acoplamiento global con nodo maestro (N1).

### 5.3 Ejemplo 2: Sincronización de una red de osciladores de Rössler en forma Hamiltoniana

Suponga que se desea sincronizar una red global de 5 osciladores caóticos de Lorenz en forma Hamiltoniana, siendo el nodo 1 un nodo maestro como se observa en la figura 5.5. Los nodos son osciladores caóticos de Rössler (Pecora and Carroll, 1991), expresado por las siguientes ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - g), \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

y los parámetros  $a = 0.4$ ,  $b = 2$ ,  $g = -4$  exhiben un comportamiento caótico.

El oscilador de Rössler se puede escribir en forma Hamiltoniana generalizada, teniendo como función de energía Hamiltoniana la siguiente función:

$$H(x) = \frac{1}{2} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]. \tag{5.3.2}$$

La forma Hamiltoniana generalizada es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -g \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + x_1 x_3 \end{bmatrix}, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

El procedimiento anterior, se puede verificar en (Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., 2001). Recordemos que  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  es un vector y usaremos la notación en (5.1.3) para identificarlo. Aplicándolo a este ejemplo en particular, usando el primer nodo ( $N_1$ ), tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_{11}} \\ \frac{\partial H}{\partial x_{12}} \\ \frac{\partial H}{\partial x_{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.3.4)$$

Se debe usar esta metodología para cada uno de los nodos. La matriz de acoplamiento se obtiene con la ecuación (3.2.3) u obteniendo la matriz Laplaciana y multiplicarlo por  $-1$ , la cual queda como sigue:

$$A_{gc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \quad (5.3.5)$$

Utilizando el procedimiento descrito en (5.1.1), el arreglo y la ley de control para cada nodo quedaría como sigue:

$$N_{1(\text{maestro})} \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -g \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + x_{11} x_{13} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. ,$$

$$\begin{aligned}
N_2 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{23} \end{array} \right] \\ \\ \end{array} \right. &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -g \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + x_{21}x_{23} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} c(x_{11} - 4x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \\
N_3 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \\ \dot{x}_{33} \end{array} \right] \\ \\ \end{array} \right. &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -g \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_3} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + x_{31}x_{33} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} c(x_{11} + x_{21} - 4x_{31} + x_{41} + x_{51}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \\
N_4 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_{41} \\ \dot{x}_{42} \\ \dot{x}_{43} \end{array} \right] \\ \\ \end{array} \right. &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_4} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -g \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_4} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + x_{41}x_{43} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} c(x_{11} + x_{21} + x_{31} - 4x_{41} + x_{51}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \\
N_5 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_{51} \\ \dot{x}_{52} \\ \dot{x}_{53} \end{array} \right] \\ \\ \end{array} \right. &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_5} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -g \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_5} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + x_{51}x_{53} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} c(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} - 4x_{51}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

Las condiciones iniciales para los nodos son:  $x_1(0) = (1.5, 2, 0.5)$ ;  $x_2(0) = (8, -4, -9)$ ;  $x_3(0) = (-13, -0.1, 26)$ ;  $x_4(0) = (-7, -5, 9)$ ;  $x_5(0) = (5, 9, -3)$ . Se utilizó una  $c = 0.34$ ; para que se observase la diferencia de señales entre nodos a un tiempo de sincronía de 20 segundos.

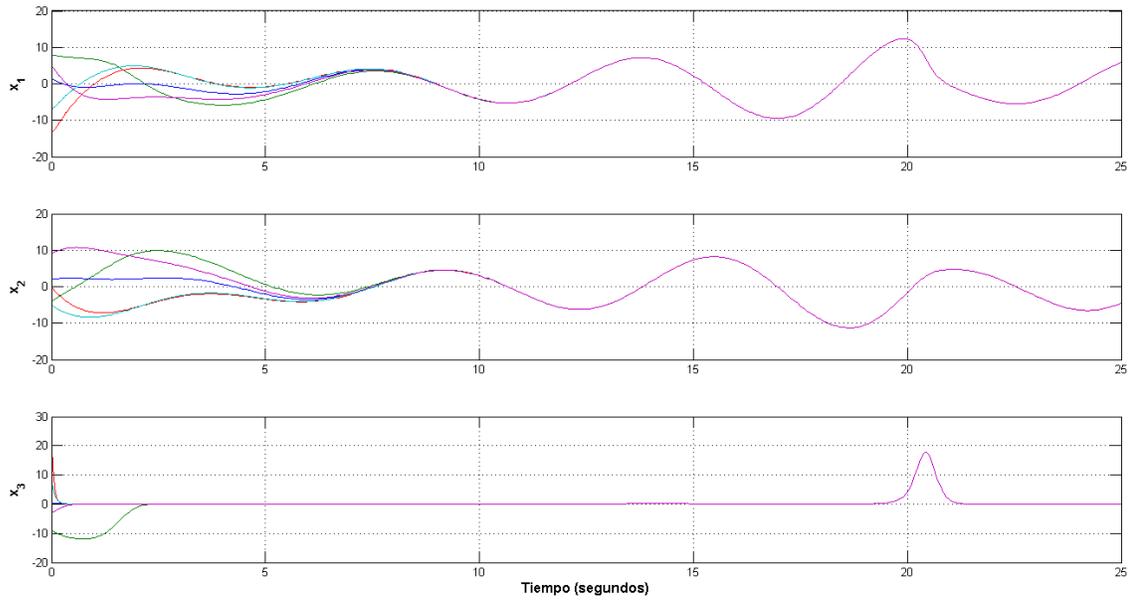


Figura 5.6: Estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

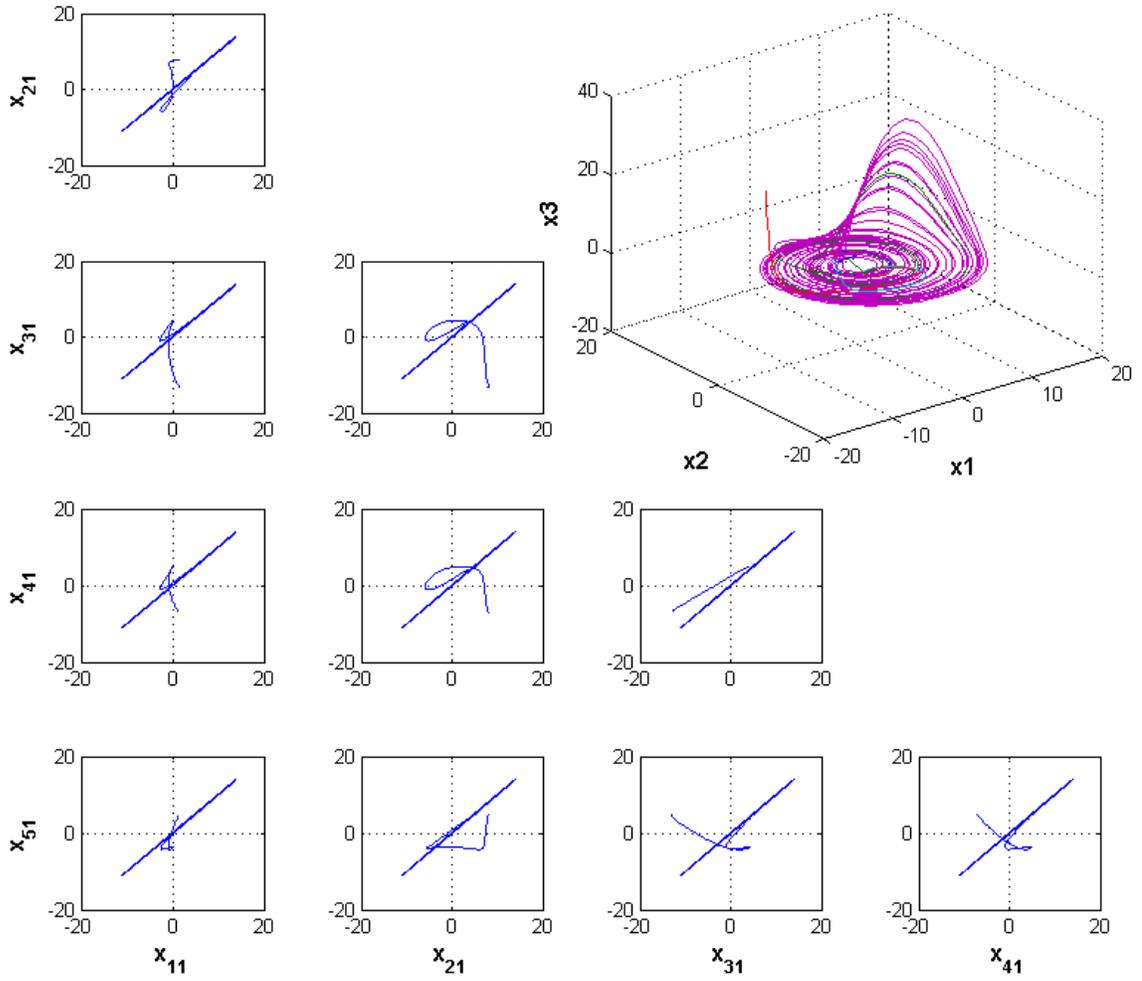


Figura 5.7: Planos de fase entre estados  $x_{i1}$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

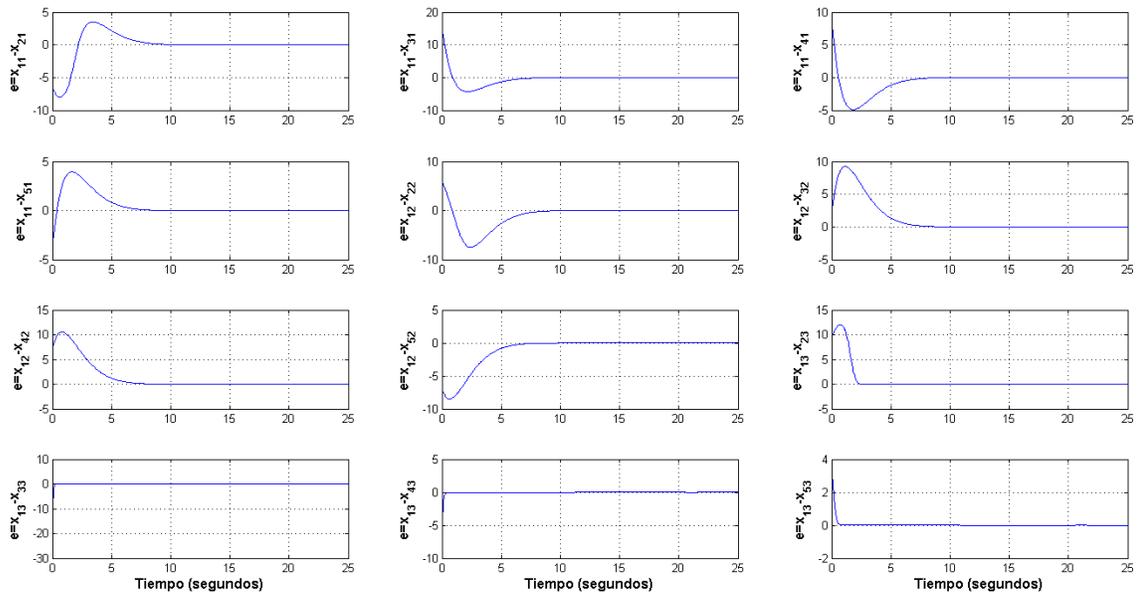


Figura 5.8: Gráficos de error de sincronía entre estados  $x_{i1}$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

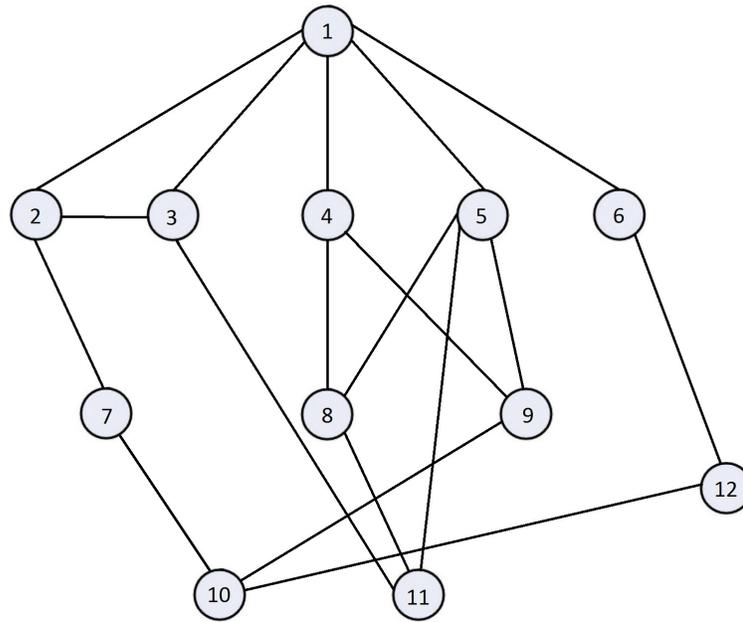


Figura 5.9: Red irregular de 12 nodos.

Nótese que en la figura 5.6 los estados sincronizan en 10 segundos. En la parte superior derecha de la figura 5.7 se aprecia la forma en tres dimensiones del atractor de Rössler. También en la figura 5.7 se observan los planos de fase, donde se están comparando todos los estados  $x_{i1}$  de los nodos, entre sí. Una línea de 45 grados, representa sincronía. Se incluye una gráfica de error en la figura 5.8 para externar que el error tiende a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ .

### 5.4 Ejemplo 3: Sincronización de una red de osciladores de Histéresis en forma Hamiltoniana

Suponga que se desea sincronizar una red de 12 osciladores caóticos del circuito histéresis en forma Hamiltoniana, con el arreglo irregular que se observa en la figura 5.9. Nuestros nodos están formados por osciladores caóticos del circuito histéresis (Pecora and Carroll, 1991),

expresado por las siguientes ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \gamma x_1 + g x_3, \\ \dot{x}_2 &= -w x_1 - \delta x_2, \\ \epsilon \dot{x}_3 &= (1 - x_3^2)(s x_1 + x_3) - \beta x_3,\end{aligned}\tag{5.4.1}$$

y con los parámetros  $\gamma = 0.2$ ,  $g = 2$ ,  $w = 10$ ,  $\sigma = 0.001$ ,  $s = 1.667$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\epsilon = 0.3$  exhiben un comportamiento caótica.

El circuito de histéresis se puede escribir en forma Hamiltoniana generalizada, teniendo como función de energía Hamiltoniana la siguiente función:

$$H(x) = \frac{1}{2} [x_1^2 + x_2^2 + \epsilon x_3^2].\tag{5.4.2}$$

La forma generalizada de Hamilton es:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1+w) & \frac{1}{2\epsilon}(g-s) \\ -\frac{1}{2}(1+w) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\epsilon}(g-s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \\ &+ \begin{bmatrix} \gamma & \frac{1}{2}(1-w) & \frac{1}{2\epsilon}(g+s) \\ \frac{1}{2}(1-w) & -\delta & 0 \\ \frac{1}{2\epsilon}(g+s) & 0 & -\frac{1}{\epsilon^2}(\beta-1) \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_3^2(x_3 + s x_1) \end{bmatrix}, \\ y &= [y_1, y_2]^T = [x_1, \epsilon x_3].\end{aligned}\tag{5.4.3}$$

Ya que el vector desestabilizante requiere dos señales para una cancelación completa, el vector salida se escoge como se vio anteriormente. Las matrices  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{S}$  quedan como sigue:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\tag{5.4.4}$$

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{1}{2}(1-w) & \frac{1}{2\epsilon}(g+s) \\ \frac{1}{2}(1-w)\epsilon & -\delta & 0 \\ \frac{1}{2\epsilon}(g+s) & 0 & -\frac{1}{\epsilon^2}(\beta-1) \end{bmatrix}.\tag{5.4.5}$$

El par de matrices  $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$  es observable y detectable, y para alcanzar un comportamiento caótico,  $\beta$  es, en genera, un número pequeño. la matriz  $\mathcal{S}$  es por lo tanto de signo indefinido.

Para evadir una situación multivariable, tan sólo observando que  $\mathcal{C}_\infty, \mathcal{S}$  es también un par de matrices observables. Si enfocamos la atención en sincronizar solamente  $x_1$  es suficiente para obtener una trayectoria de convergencia asintóticamente estable. Esto, puede ser de utilidad para crear un sistema minimalista de encriptación de datos, donde con tan sólo una salida, o estado, se puede sincronizar todo el sistema. El procedimiento anterior, se puede verificar en (Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., 2001).

Recordemos que  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  es un vector y usaremos la notación para identificarlo. Aplicándolo a este ejemplo en particular, usando el primer nodo ( $N1$ ), tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_{11}} \\ \frac{\partial H}{\partial x_{12}} \\ \frac{\partial H}{\partial x_{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.4.6)$$

Se debe usar esta metodología para cada uno de los nodos. La matriz de acoplamiento se obtiene con la ecuación (3.2.3) u obteniendo la matriz Laplaciana y multiplicarlo por  $-1$ , la cual queda como sigue:

$$A_{gc} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (5.4.7)$$

En este ejercicio se usarán más de diez nodos. Para evitar confuciones, usaremos una coma para separar el número de nodos y el número de estado de la  $x$ , por ejemplo el estado 3 del nodo 12 será  $x_{12,3}$ . Usando el procedimiento antes descrito en (5.1.1), el arreglo y la ley de control para cada nodo quedaría como sigue:

$$N_1 \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1,1} \\ \dot{x}_{1,2} \\ \dot{x}_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1+w) & \frac{1}{2\epsilon}(g-s) \\ -\frac{1}{2}(1+w) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\epsilon}(g-s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} \\ + \begin{bmatrix} \gamma & \frac{1}{2}(1-w) & \frac{1}{2\epsilon}(g+s) \\ \frac{1}{2}(1-w) & -\delta & 0 \\ \frac{1}{2\epsilon}(g+s) & 0 & -\frac{1}{\epsilon^2}(\beta-1) \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{1,3}^2(x_{1,3} + sx_{1,1}) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} c(-5x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} + x_{5,1} + x_{6,1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
N_2 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_{2,1} \\ \dot{x}_{2,2} \\ \dot{x}_{2,3} \end{array} \right] \\ \\ \\ \end{array} \right. &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1+w) & \frac{1}{2\epsilon}(g-s) \\ -\frac{1}{2}(1+w) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\epsilon}(g-s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_2} \\
&+ \begin{bmatrix} \gamma & \frac{1}{2}(1-w) & \frac{1}{2\epsilon}(g+s) \\ \frac{1}{2}(1-w) & -\delta & 0 \\ \frac{1}{2\epsilon}(g+s) & 0 & -\frac{1}{2}(\beta-1) \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{2,3}^2(x_{2,3} + sx_{2,1}) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} c(x_{1,1} - 3x_{2,1} + x_{3,1} + x_{7,1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
N_{12} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_{12,1} \\ \dot{x}_{12,2} \\ \dot{x}_{12,3} \end{array} \right] \\ \\ \\ \end{array} \right. &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1+w) & \frac{1}{2\epsilon}(g-s) \\ -\frac{1}{2}(1+w) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\epsilon}(g-s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_{12}} \\
&+ \begin{bmatrix} \gamma & \frac{1}{2}(1-w) & \frac{1}{2\epsilon}(g+s) \\ \frac{1}{2}(1-w) & -\delta & 0 \\ \frac{1}{2\epsilon}(g+s) & 0 & -\frac{1}{2}(\beta-1) \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_{12}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{12,3}^2(x_{12,3} + sx_{12,1}) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} c(x_{6,1} + x_{10,1} - 2x_{12,1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Las condiciones iniciales para los respectivos nodos son:  $x_1(0) = (5.1, 0.2, 2.5)$ ;  $x_2(0) = (0.8, -25, 1)$ ;  $x_3(0) = (-5.3, -0.1, 2.6)$ ;  $x_4(0) = (20, 10, 1)$ ;  $x_5(0) = (-6.5, -9, -3)$ ;  $x_6(0) = (-9, -1.2, 3.57)$ ;  $x_7(0) = (-3.7, 1, 1)$ ;  $x_8(0) = (4.5, -11, -6)$ ;  $x_9(0) = (1, 0.01, -1)$ ;  $x_{10}(0) = (5.7, 7.9, 3.1)$ ;  $x_{11}(0) = (0, -9, 0)$ ;  $x_{12}(0) = (0.19, 22, 7.5)$ . Para este ejemplo, se utilizó un acoplamiento de  $c = 10$ . Se alcanza sincronía con un acoplamiento menor, pero se escogió ésta, para un tiempo de sincronía de aproximadamente 20 segundos, y que se alcance a ver la convergencia de los estados a pesar de los diferentes condiciones iniciales. Con condiciones iniciales diferentes, muy cerca entre sí, se puede disminuir el acoplamiento y mantener un tiempo de sincronía.

Nótese que en la figura 5.10 los estados sincronizan aproximadamente en 20 segundos. Las condiciones iniciales fueron escogidas para ser lo más diferentes los unos a los otros. En la figura

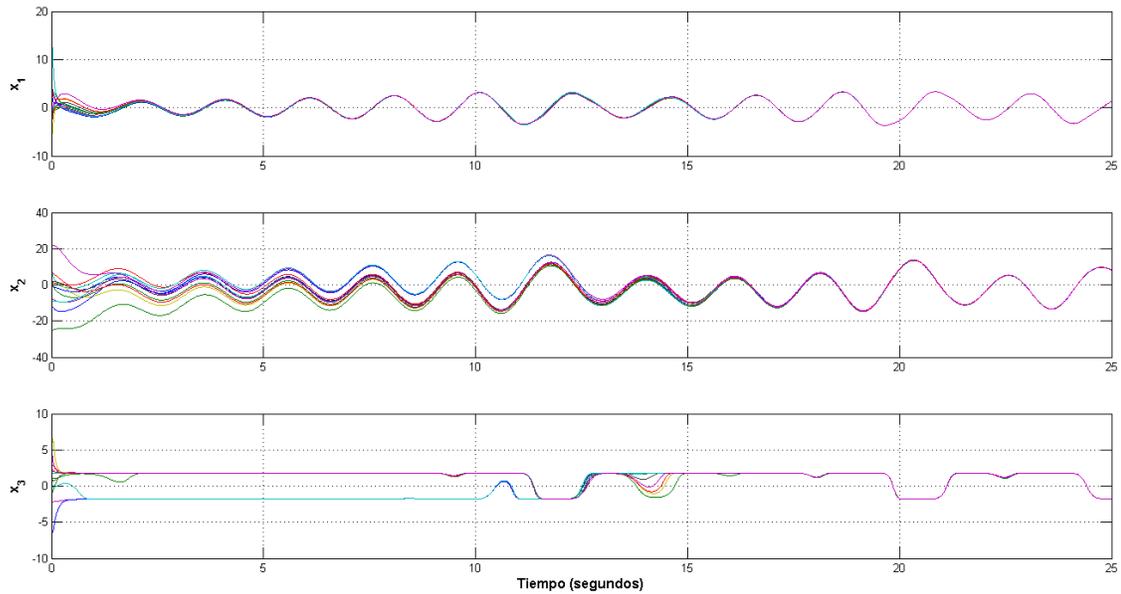


Figura 5.10: Estados  $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ .

5.11 se aprecia el atractor caótico del circuito de Histéresis, en la parte superior derecha; y los planos de fase, donde se están comparando todos los estados  $x_{i1}$  entre sí. Los planos de fase crean una línea de 45 grados, lo que representa sincronía, después de un periodo transitorio. Se incluye una gráfica de error en la figura 5.12; en la que se observa que el error tiende a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ .

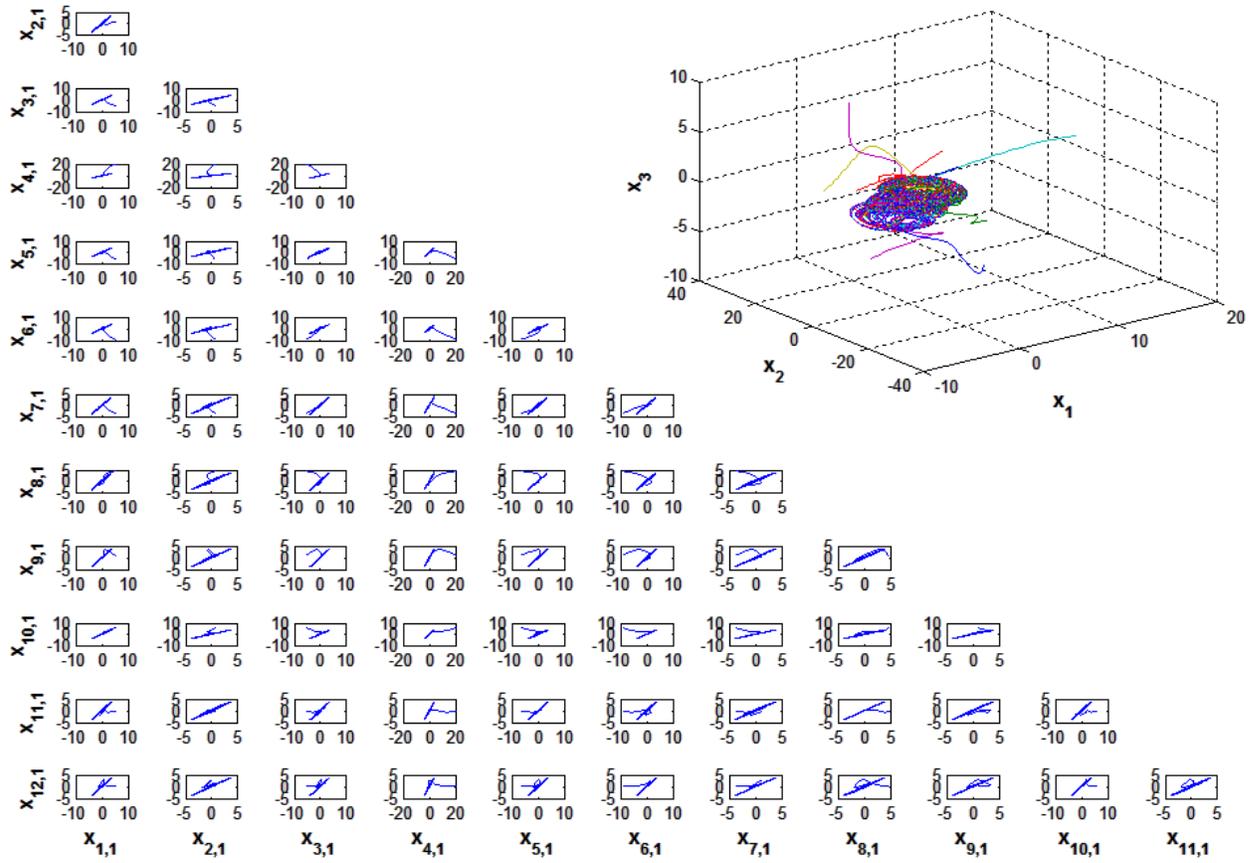


Figura 5.11: Planos de fase entre los estados  $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ .

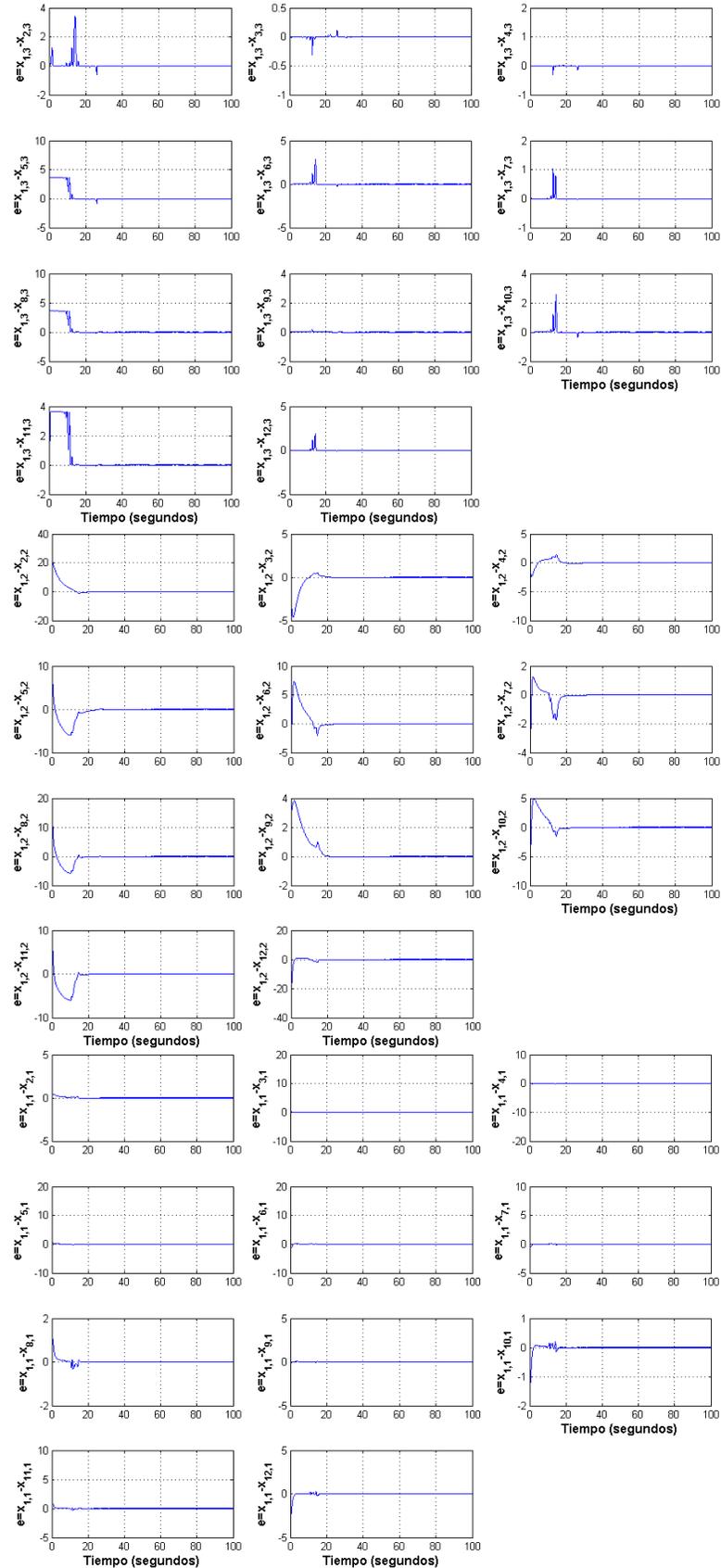


Figura 5.12: Gráficos de error entre los estados  $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}$ , contra el tiempo en segundos, donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ .

## Capítulo 6

# Transmisión de información encriptada usando caos

A través de la historia, encriptar o codificar mensajes ha sido esencial para actividades humanas, como el espionaje o la guerra. Mientras que ahora, la tecnología ofrece adelantos sustanciales y benéficos, la codificación de datos aún es importante para asegurar toda clase de información, como cuentas de banco, archivos personales, comunicación segura, etc. Con la aparición de la “caja enigma” en la segunda guerra mundial, el encriptado tomó un rumbo tecnológico más avanzado y complejo. En la actualidad, el encriptado de datos ya no sólo se limita a mensajes, sino puede ser aplicada a imágenes, sonido, e incluso video. Es decir, ahora se ofrece nuevos conductos de información, y por ello nuevas formas de encriptar aparecen. En años recientes, se ha tratado el tema de encriptar de datos por medio del uso de la teoría del caos (Abel A. and Schwarz W., 2002; Drachselt F. and Schwarz W., 2001).

Lo que se desea en el encriptamiento de información, es que ningún intruso, pueda obtener la información transmitida entre un emisor a un receptor, lo cual se puede observar en la figura 6.1. Hasta ahora en este trabajo, se ha tratado el tema de la sincronía de redes complejas. Una aplicación de estos temas sería precisamente, el encriptamiento de datos. Imaginemos algún sistema de comunicación, y entonces tenemos una red de aparatos transmisores y receptores.

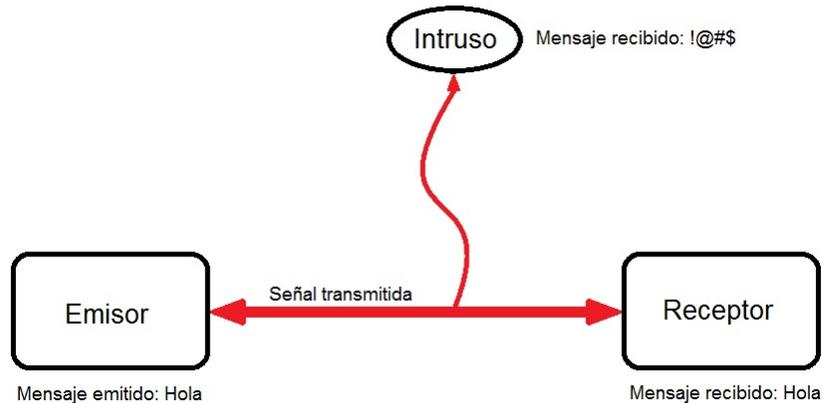


Figura 6.1: Diagrama de bloques de un sistema de transmisión encriptado.

Sin importar la clase de red, cada nodo transmitiría y recibiría información. Sería correcto asumir, que la señal obtenida por un nodo o circuito caótico se interpretaría como ruido para un receptor cualquiera o intruso. Sin embargo, esta señal caótica se diferencia del ruido común, por ser determinística, y por lo tanto se puede replicar y controlar. Al tener esta clase de señales, se pudiera crear sistemas que usaran la señal caótica como medio de trasmisión. Como en el caso de el encriptamiento aditivo, que prácticamente se mezcla el mensaje con la señal caótica; haciendo así difícil su interpretación directa; esto de entre otros métodos. Esto sucedería si la señal caótica es proporcionalmente superior al mensaje. Si el receptor tiene la capacidad de aplicar las características ya mencionadas del caos, y sincronizar con el emisor, se podría suprimir parcial o completamente todo rastro de señal caótica enviada, dando por resultado el mensaje. Dando paso así a los primeros y más básicos sistemas de encriptado con este sistema. Algunos tipos de encriptamiento son:

**Encriptamiento caótico aditivo:** El mensaje original a encriptar se le suma a una señal caótica usada como transmisión y se convierte en un mensaje encriptado. El mensaje oculto o encriptado, se recupera mediante la diferencia entre el mensaje encriptado, y la señal caótica original. Para que otro oscilador, el receptor, tenga la misma señal caótica, se usa la sincronización caótica, para luego pasar a restar la señal caótica al mensaje encriptado. En la

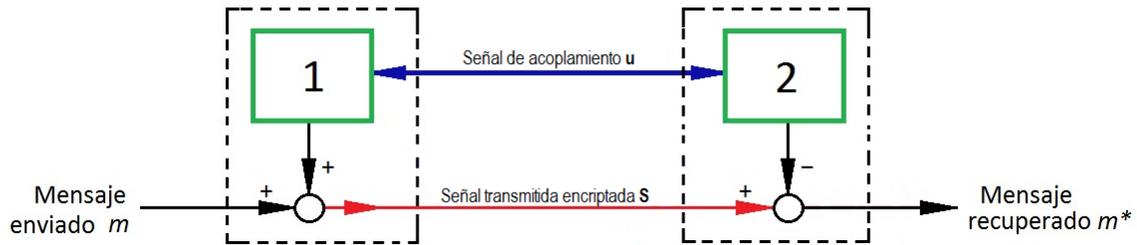


Figura 6.2: Diagrama de bloques del encriptamiento aditivo.

figura 6.2 se observa el caso cuando existe 2 canales de transmisión.

**Encriptamiento por conmutación entre atractores caóticos:** Es usada únicamente para encriptar señales binarias. El mensaje binario se encripta haciendo que éste sea uno o más parámetros del transmisor. Siendo así que cuando el valor del mensaje binario sea cero, los parámetros no sean afectados y que exista sincronía, interpretado por el receptor como un cero lógico. Y cuando el valor del mensaje binario sea uno, los parámetros cambien y se pierda la sincronía, interpretándose así por el receptor como un uno lógico. Este proceso también puede ser a la inversa según sea tratado. Véase la figura 6.3, que tenemos el caso de 2 vías de transmisión.

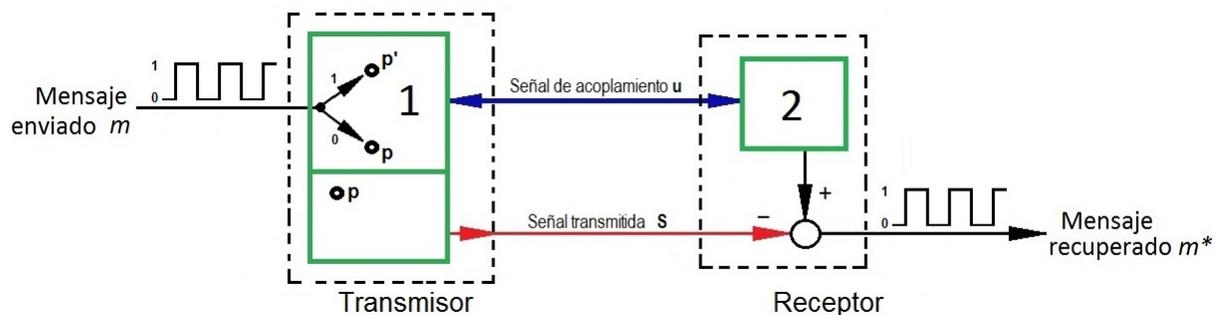


Figura 6.3: Ejemplo de encriptamiento por conmutación entre atractores caóticos.

Este capítulo está dedicado a la transmisión de información encriptada usando caos. En particular, se retomarán esquemas básicos de transmisión propuestos desde los finales de la década

del siglo pasado. Para este trabajo en particular, usaremos únicamente la sincronización de redes con nodos caóticos usando formas Hamiltonianas, aplicando el método de encriptamiento aditivo de dos canales de transmisión.

# Capítulo 7

## Ejemplos prácticos de la transmisión de información encriptada usando caos

En los siguientes ejercicios, se utilizarán tres redes, dos irregulares y una regular, de osciladores caóticos puestos en forma Hamiltoniana generalizada. Usando la dinámica en (5.1.1), se pretende llegar a la sincronía entre osciladores, y aplicarlo directamente en el encriptamiento de datos. Se usará el encriptamiento aditivo para encriptar los siguientes mensajes.

- Se encriptará una fotografía utilizando una red de 12 osciladores Rössler con acoplamiento como se muestra en la figura 7.4.
- Se encriptará una grabación de audio de 5 segundos utilizando una red de 5 osciladores Histéresis en regimen caótico y con el acoplamiento como se muestra en la figura 7.11.
- Se encriptará un video de 2 segundos utilizando una red de 3 osciladores caóticos de Lorenz como se observa en la figura 7.18.

Para esta tesis, se usará sincronía entre atractores idénticos, sin considerar perturbaciones de ningún tipo, es decir, únicamente se considera el caso ideal. Como salida  $y$ , se tomará a  $x_1$ .

## 7.1 Encriptando una imagen usando 12 nodos Rössler en red

En el siguiente ejercicio, se encriptará una imagen utilizando el método de encriptamiento aditivo aplicando la sincronía por medio de la extensión a redes en forma Hamiltoniana generalizada. La imagen en este caso será una fotografía, que se observa en la figura 7.2, es de aproximadamente 134 x 100 pixeles, en formato PNG que es de 36.2 Kb. Las dimensiones del pixelaje, son esenciales para el encriptamiento. La razón de esto, es que una imagen o fotografía digital, está creada a partir de pixeles. Un píxel es la menor unidad homogénea en color que forma parte de una imagen digital, esto se observa en la figura 7.1.

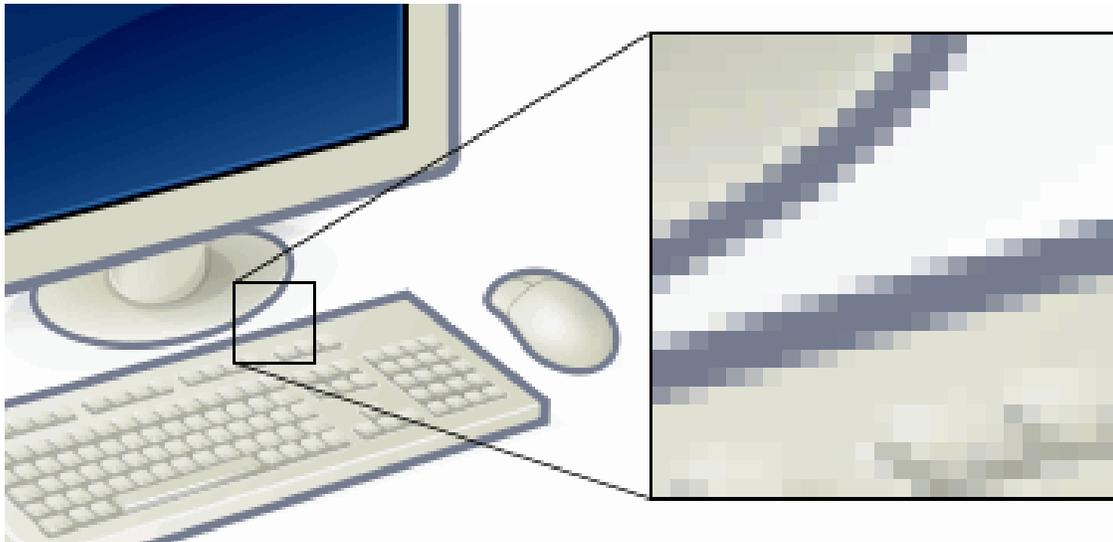


Figura 7.1: Ampliación de un dibujo donde se aprecian los pixeles.

Para manipular la imagen, dependiendo el formato, se debe entender lo siguiente: si la imagen está en escala de grises, los datos que se pueden obtener serán la de una matriz de  $M \times N$  o de dimension 2, donde los únicos colores, serán el blanco y el negro. Al tratarse de una imagen a color, la matriz se convierte a una de 3 dimensiones o de  $M \times N \times P$ , donde

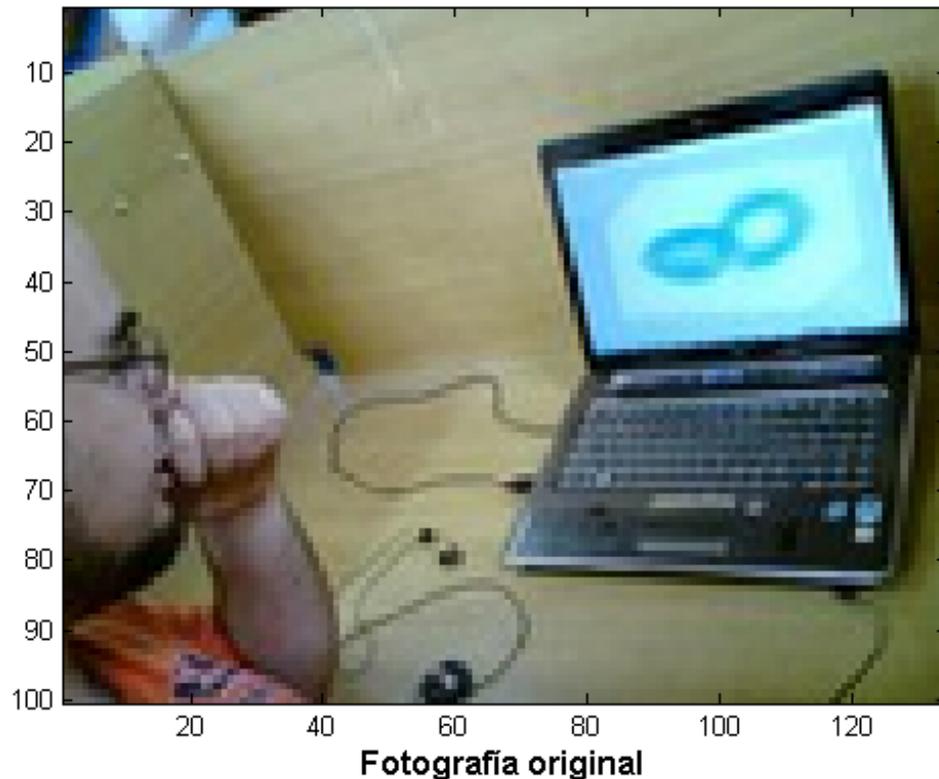


Figura 7.2: Mensaje original, en este caso una fotografía

$P$  da información acerca del color, y  $P$  sería 3 ó 4 caracteres, según el formato de la imagen. Básicamente se reformó la matriz  $M \times N \times P$ , por un vector de información o matriz de  $[M * N * P \ 1]$ , como lo visto en la primera señal o mensaje original de la figura 7.3. Ese vector será posteriormente sumado a una señal caótica, como parte del encriptamiento aditivo.

Todas las simulaciones que se han hecho hasta ahora son computacionales, utilizando el software Matlab. El tiempo de computo lo determina la capacidad del procesamiento de la computadora, y del tamaño de pixeles de la imagen. Existiendo una relación de, a mayor pixelaje, mayor procesamiento se señal, y por lo tanto mayor tiempo de computo. El tiempo de procesamiento podría ser menor, si se tratara de un encriptador hecho en tablilla electrónica. Se comprende ahora que el tamaño de la fotografía y de las dimensiones de la misma, sean de

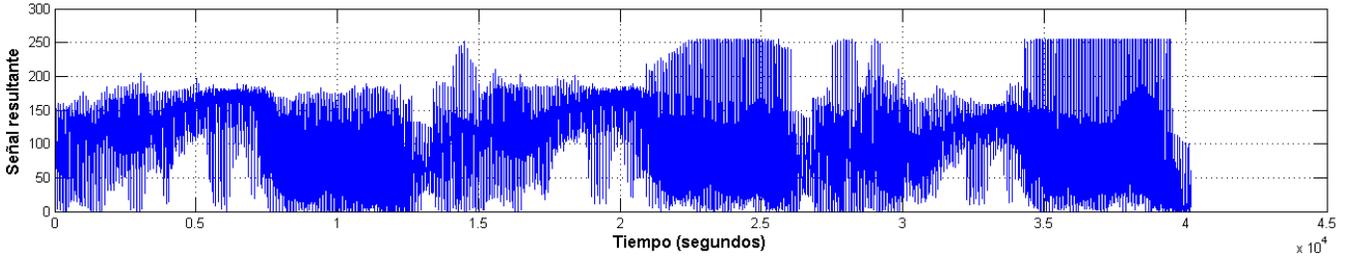


Figura 7.3: Señal recuperada de la fotografía.

relativamente baja resolución, comparado con cámaras actuales y tecnologías recientes.

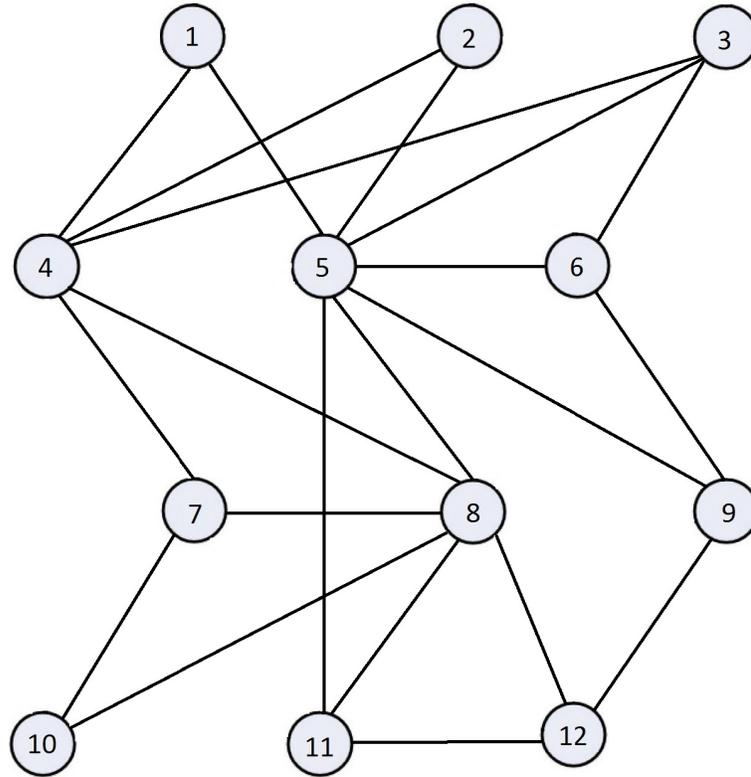


Figura 7.4: Modelo de la red irregular de 12 nodos.

Usando la metodología extendida según la dinámica en (5.1.1), se utilizará el primer estado de cada nodo  $(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \dots, x_{12,1})$ , para conectar a cada nodo, y obtener como resultado

sincronía. Note como se pone una coma entre el nodo y el estado en  $x_{i,1}$ , esto debido a que se refiere a más de 10 nodos, y el doble dígito pudiera causar confusión con el número de estado. Una vez realizado esto, se considera un valor de acoplamiento  $c$  adecuado para la señal de control  $u$ . Nuestro mensaje es en este caso una fotografía; o más específicamente, el vector resultante al reformar la matriz  $M \times N \times P$ . Después se suma con el primer estado del nodo 1, es decir,  $S = x_{1,1} + m$ . A esta nueva señal, se le considera nuestro mensaje encriptado o señal transmitida  $S$ . Hay que recordar, que el mensaje debe ser proporcionalmente menor a la señal caótica  $x_{1,1}$ , es decir

$$m(k) \ll \alpha x_{1,1}(k), \quad (7.1.1)$$

donde  $\alpha$  es la proporción. De lo contrario, nuestro mensaje no estará oculto correctamente, y podría identificarse fácilmente, aunque parezca contener distorsión, como se aprecia en la figura 7.9. Ello no tiene nada que ver con una falta de sincronía en el sistema, y por lo tanto, es un fallo en el encriptamiento aditivo. Por dicha razón, la señal caótica fue multiplicada por 2 ( $\alpha = 2$ ). En la figura 7.9, se muestra esta característica, y para lograrlo la señal caótica fue multiplicada por 0.2 ( $\alpha = 0.2$ ); con ello se observa, que en la imagen recuperada de la señal encriptada, la imagen original; lo cual no es lo que se quiere.

Una vez obtenido nuestra señal encriptada  $S$ , se pasa a la recuperación del mensaje restando la señal caótica del primer estado de cada nodo respectivamente. Es decir el mensaje recuperado en el nodo 2 es  $m_2^* = S - x_{2,1}$ ; el mensaje recuperado en el nodo 3 es  $m_3^* = S - x_{3,1}$ ; y así para cada nodo. Si la señal está correctamente sincronizada, el mensaje recuperado  $m^*$  en los nodos, será idéntico al original. Con esto se quiere decir que  $m = m^*$  o que el error entre ambos es cero.

$$e(k) = m(k) - m^*(k) = 0. \quad (7.1.2)$$

El procedimiento se repite para el resto de los nodos. Se puede observar mejor en la figura 7.18, con el ejemplo de 3 nodos. En casos reales, el error de sincronía no tiende a cero, pero en el

mejor de los casos, permanece uniformemente acotado por un valor positivo  $\rho$  (que pertenece a  $R$ ).

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|m(k) - m^*(k)\| \leq \rho. \quad (7.1.3)$$

Para este ejercicio, se utilizaron 12 nodos caóticos basados en el oscilador de Rössler. Las condiciones iniciales para los respectivos nodos son:  $x_1(0) = (0.51, 0.2, 0.5)$ ;  $x_2(0) = (0.8, 0.25, 1)$ ;  $x_3(0) = (0.53, 0.1, 0.26)$ ;  $x_4(0) = (1, 0, 1)$ ;  $x_5(0) = (0.65, 0.9, 0.3)$ ;  $x_6(0) = (0.9, 0.12, 0.57)$ ;  $x_7(0) = (0.7, 1, 1)$ ;  $x_8(0) = (0.5, 0.11, 0.6)$ ;  $x_9(0) = (1, 0.01, 0.1)$ ;  $x_{10}(0) = (0.57, 0.79, 0.31)$ ;  $x_{11}(0) = (0, 0.09, 0)$ ;  $x_{12}(0) = (0.19, 0.22, 0.75)$ . Para este ejemplo, se utilizó un acoplamiento de  $c = 0.5$ . Como fue mencionado anteriormente, los estados de las señales caóticas del oscilador Rössler fueron proporcionalmente aumentados por 2 ( $\alpha = 2$ ) y en el caso de la figura 7.9, fueron multiplicados por 0.2 ( $\alpha = 0.2$ ), lo anterior sin cambiar el acoplamiento o las condiciones iniciales.

En la figura 7.5 se observan los estados  $x_{i1}$ ,  $x_{i2}$ ,  $x_{i3}$ , de los nodos 1 al 12, sincronizar. Como nota comparativa, se incluyó la señal obtenida de la imagen, para compararlo con la magnitud. Los planos de fase, se pueden observar en la figura 7.6, y se observa una línea de 45 grados, es decir sincronía. Los planos se realizaron para cada estado de cada nodo. En la figura 7.7 se muestra el mensaje original, el mensaje encriptado y los mensajes recuperados de cada uno de los 12 nodos, comparados contra el tiempo. La figura 7.8, muestra la imagen original, imagen encriptada, y las imagenes recuperadas de todos los nodos.

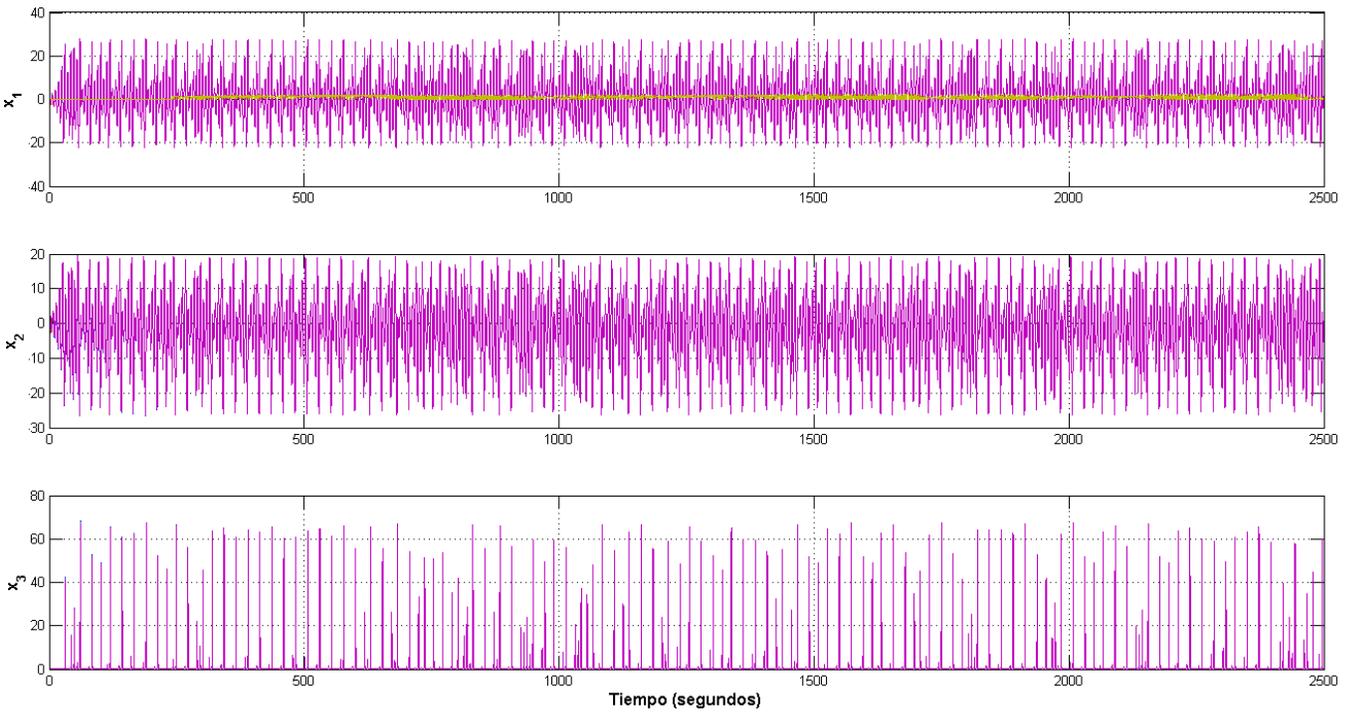


Figura 7.5: Se muestran los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$  de los nodos del 1 al 12, donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ . Note como está incluido la señal obtenida de la imagen como referencia comparativa de la magnitud.

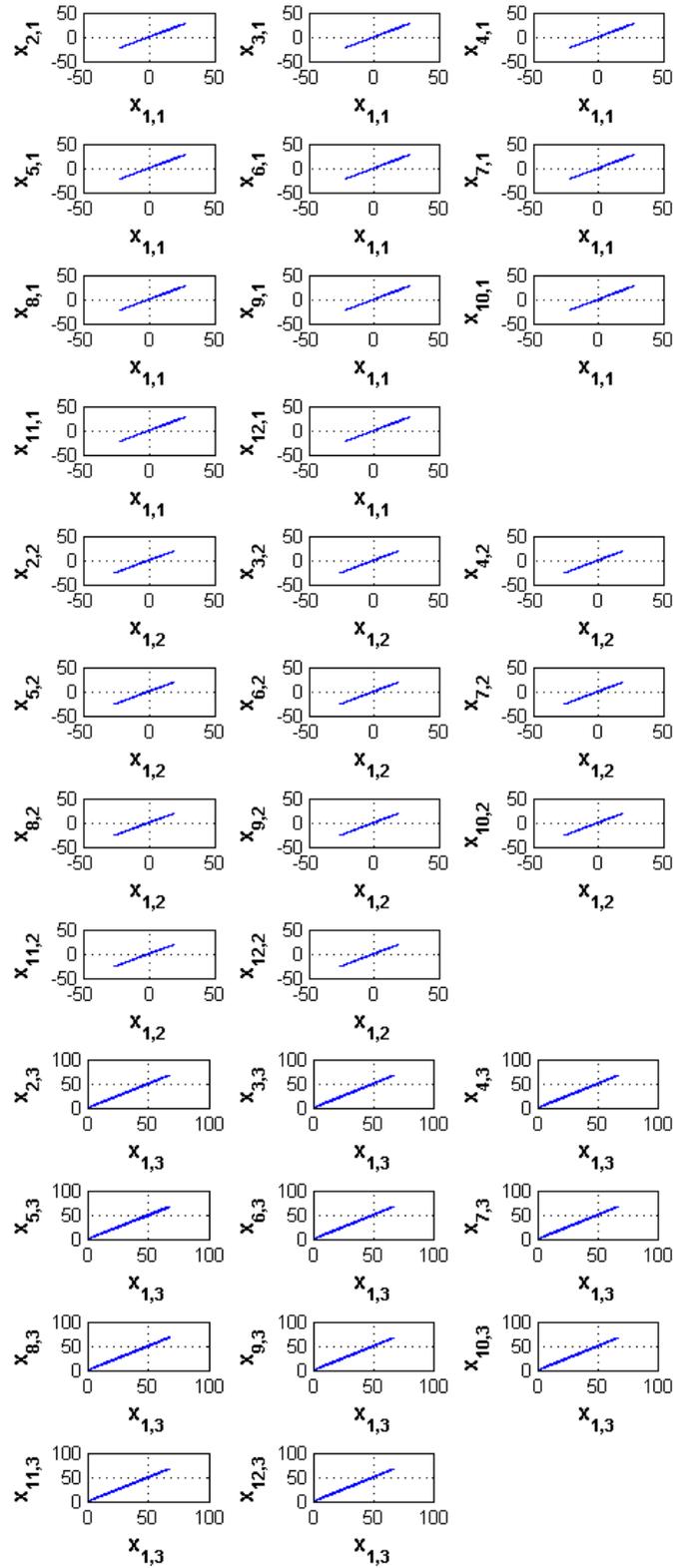


Figura 7.6: Planos de fase los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$  de los nodos del 1 al 12, donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ .

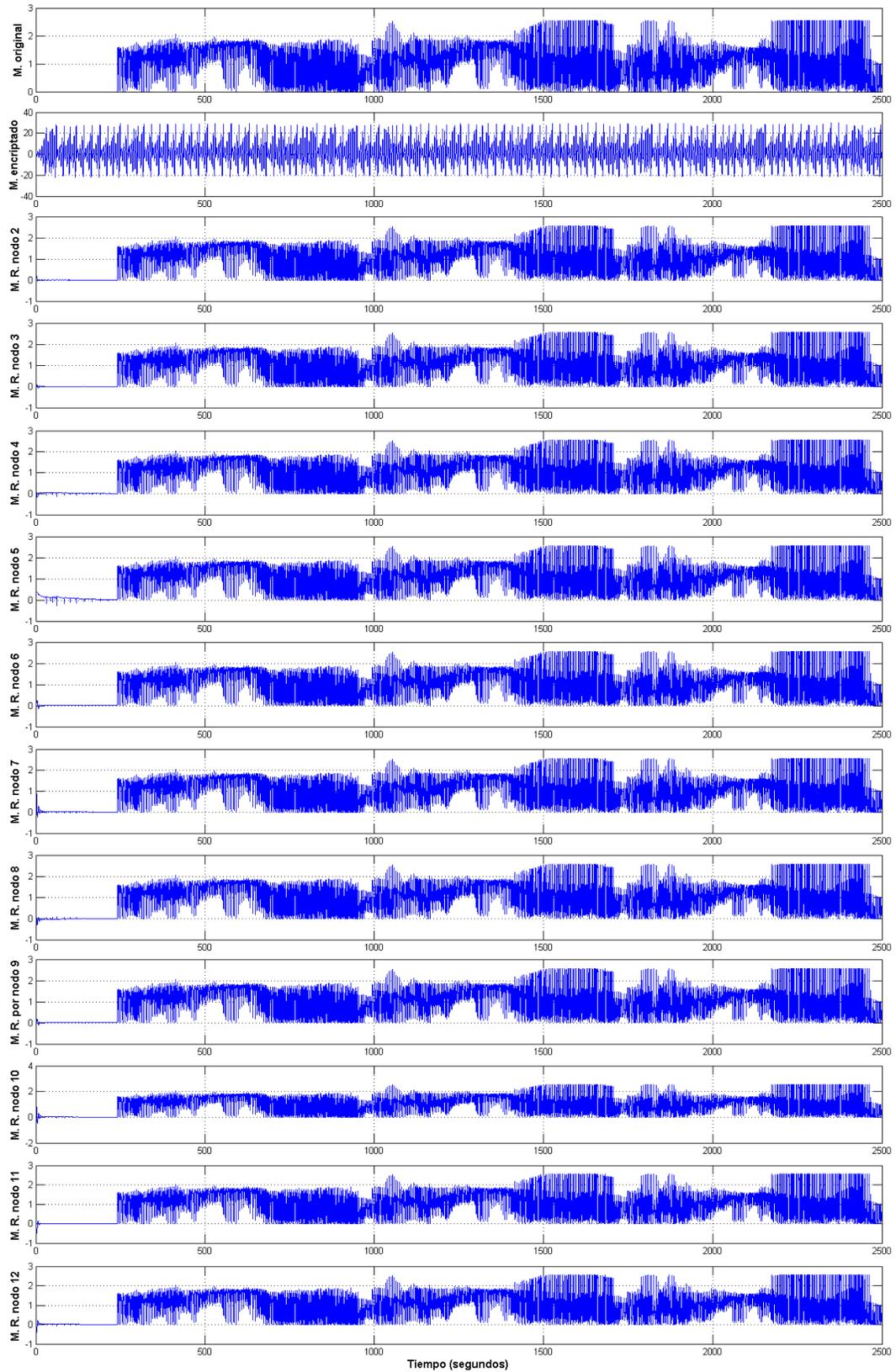


Figura 7.7: Aquí se muestra el mensaje original  $m$ , el mensaje encriptado o transmitido  $S$ , y los mensajes recuperados  $m^*$  en cada uno de los 12 nodos en forma de señal. La letra “M” significa mensaje, y la letra “R” significa recuperado.

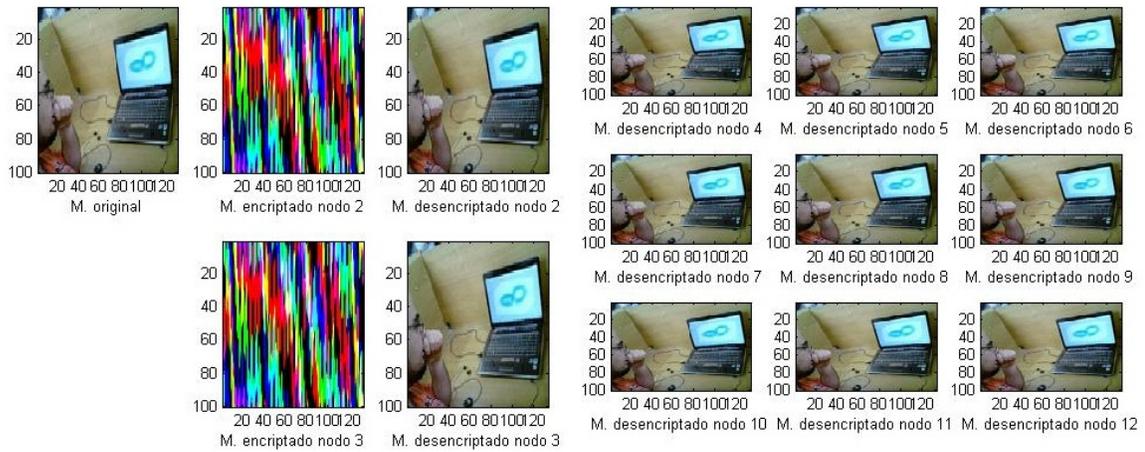


Figura 7.8: En la figura se muestra la imagen original, las imágenes encriptadas obtenidas de las señales  $S$  en los nodos 2 y 3, y las imágenes recuperadas de las señales  $m^*$  de los nodos 2 al 12.

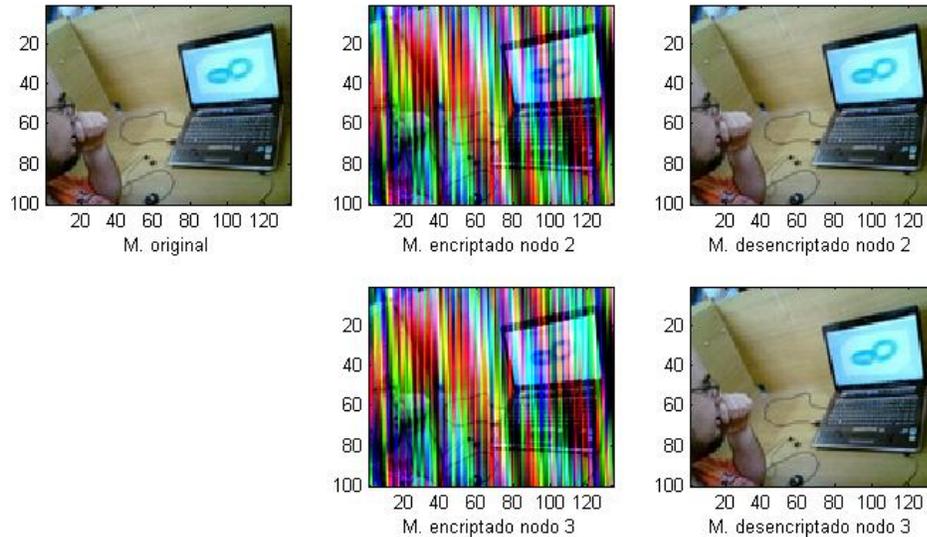


Figura 7.9: Ejemplo de un encriptamiento fallido debido a la proporcionalidad de la señal caótica con respecto al mensaje a encriptar, en donde el mensaje es proporcionalmente mayor.

## 7.2 Encriptado de un mensaje de audio usando 5 nodos Histéresis en red

Aquí tenemos un ejemplo de encriptado de un mensaje de audio. Se utilizará el método de encriptamiento aditivo. Esta grabación, dura aproximadamente 5 segundos, y es de 40 Kb. La grabación cita como sigue: “uno, dos, tres, probando, probando, uno, dos, tres”. Se puede observar en la figura 7.10. Este ejercicio también fue intentado usando notas de piano y violín, pero con esta grabación se aprecia mucho mejor el encriptamiento fallido por la proporción del mensaje contra la señal caótica. Matlab, regresa la grabación, como un vector de datos, donde está almacenado el sonido, y otros aspectos del mismo, así como la tasa de muestreo en Hertz (sample rate o  $F_s$ ), y bits por muestra (bits per sample o Nbits). Estos últimos datos, son esenciales para reconstruir la señal a partir de una señal encriptada, sobretodo la tasa de muestreo o  $F_s$ .

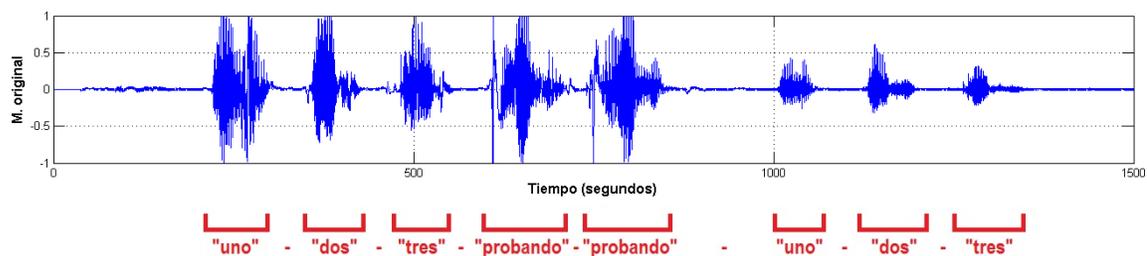


Figura 7.10: Mensaje original. La grabación dice: “uno, dos, tres, probando, probando, uno, dos, tres”.

El procedimiento fue el siguiente:

1. Se sincronizó la red utilizando el método de la forma Hamiltoniana generalizada con extensión a redes.
2. Se logró modificar el audio a señal numérica con un algoritmo de Matlab, y se obtuvo la

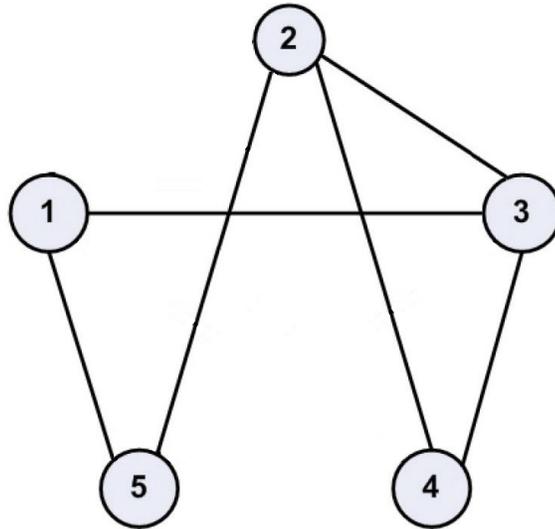


Figura 7.11: Modelo de la red irregular de 5 nodos.

tasa de muestreo.

3. Para evitar que la señal ocurriera durante un periodo transitorio, donde los estados aún no alcanzan sincronía, se le agregó ceros al principio de la grabación, para que ésta iniciase después de la sincronía.
4. Inmediatamente después, se procedió a hacer el encriptado aditivo, donde el mensaje y la señal caótica del estado  $x_1$  del nodo 1 se suman,  $S = m + x_{11}$ .
5. Al mensaje encriptado resultante, se le resta la señal caótica del estado  $x_1$  de los nodos restantes, es decir,  $m_2^* = S - x_{21}$ , en el caso del nodo 2, etc.
6. Los resultados se grafican para obtener prueba de sincronía en el encriptamiento y error entre mensaje original y mensaje recuperado,
7. Procede a recuperar las grabaciones encriptadas y desencriptadas según su nodo, aquí se usa la tasa de muestreo. En este punto se le puede controlar el volumen de la grabación, multiplicando la señal resultante desencriptada, por la proporción deseada.

Aquí existe una proporción que dicta que a mayor tiempo de grabación, mayor tiempo computacional para encriptarlo. El mal encriptamiento por tener un mensaje comparablemente grande relativo a la señal caótica usada para encriptar, también tiene su influencia en este ejemplo, como se ve en la figura 7.16, donde se ha circulado las secciones donde claramente se observa el mensaje sobre la señal caótica. En las grabaciones recuperadas, imposible de mostrar por este medio, se escucha claramente el mensaje, superpuesto sobre un ruido, causado por la señal caótica.

Para el siguiente ejemplo, se utilizaron 5 nodos caóticos basados en el oscilador de Histéresis. Las condiciones iniciales para los respectivos nodos son:  $x_1(0) = (-0.95, 0.2, 0.5)$ ;  $x_2(0) = (0, 0, 1)$ ;  $x_3(0) = (0.5, 0.1, 0.26)$ ;  $x_4(0) = (1, 0, 1)$ ;  $x_5(0) = (0.65, 0.9, 0.3)$ . Para el control, se usó un acoplamiento de  $c = 0.5$ . Los estados de las señales caóticas del oscilador Histéresis fueron proporcionalmente aumentados por 2 ( $\alpha = 2$ ) y en el caso que se observa en la figura 7.16, fueron multiplicados por 0.2 ( $\alpha = 0.2$ ), lo anterior sin cambiar el acoplamiento o las condiciones iniciales.

En la figura 7.12 se observa la sincronía de los estados  $x_{i1}$ ,  $x_{i2}$ ,  $x_{i3}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, 5$ , de los nodos 1 al 5. Como nota comparativa, se incluyó la señal obtenida de la imagen, para compararlo con la magnitud. Los planos de fase y las gráficas de error, se pueden observar en la figura 7.13, y se observa una línea de 45 grados (derecha), lo que revela una sincronía. En la figura 7.14 se muestra el mensaje original, en mensaje encriptado y los mensajes recuperados de cada uno de los 5 nodos, comparados contra el tiempo. La figura 7.15 muestra el error entre el mensaje original y el mensaje recuperado en cada nodo. Como resultado obtuvimos que el mensaje recuperado era idéntico al original, y esto es esencial, debido a que no se puede mostrar una grabación por este medio escrito. La figura 7.16, muestra la grabación original y la grabación encriptada, donde se observa claramente la señal de sonido, sobre la señal caótica. Para hacer más evidente esta relación, se circuló las partes más sobresalientes.

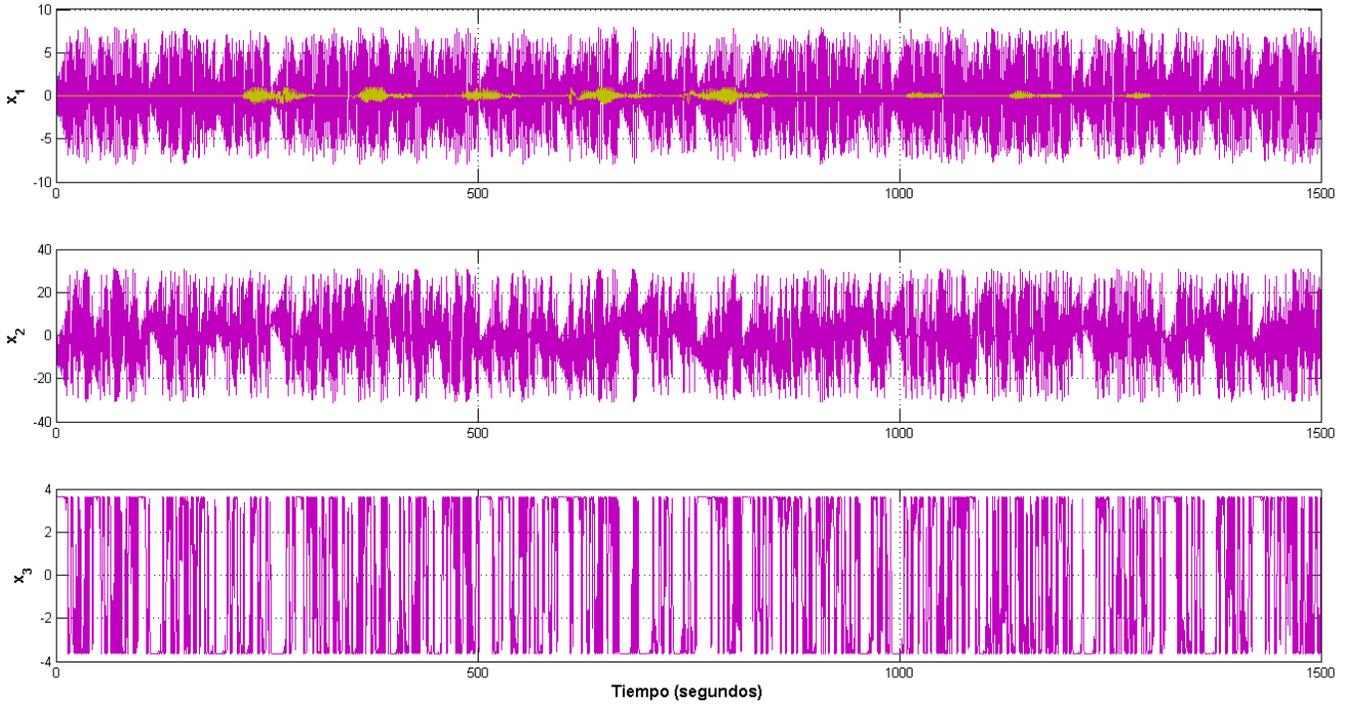


Figura 7.12: Se muestran los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$  donde  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Note como está incluido la señal obtenida de la imagen como referencia comparativa de la magnitud.

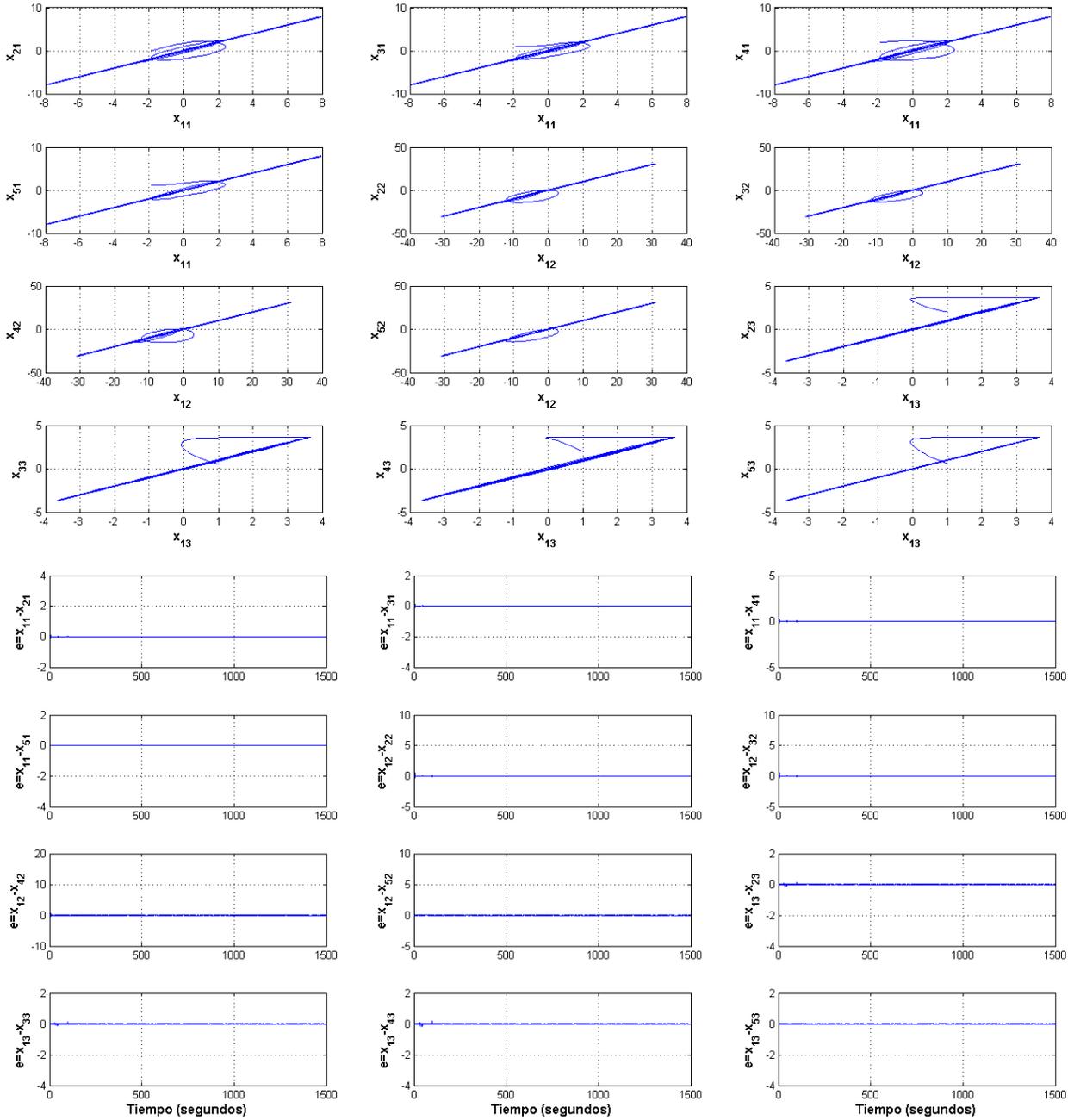


Figura 7.13: Planos de fase y gráficos de error que muestran sincronía en la red.

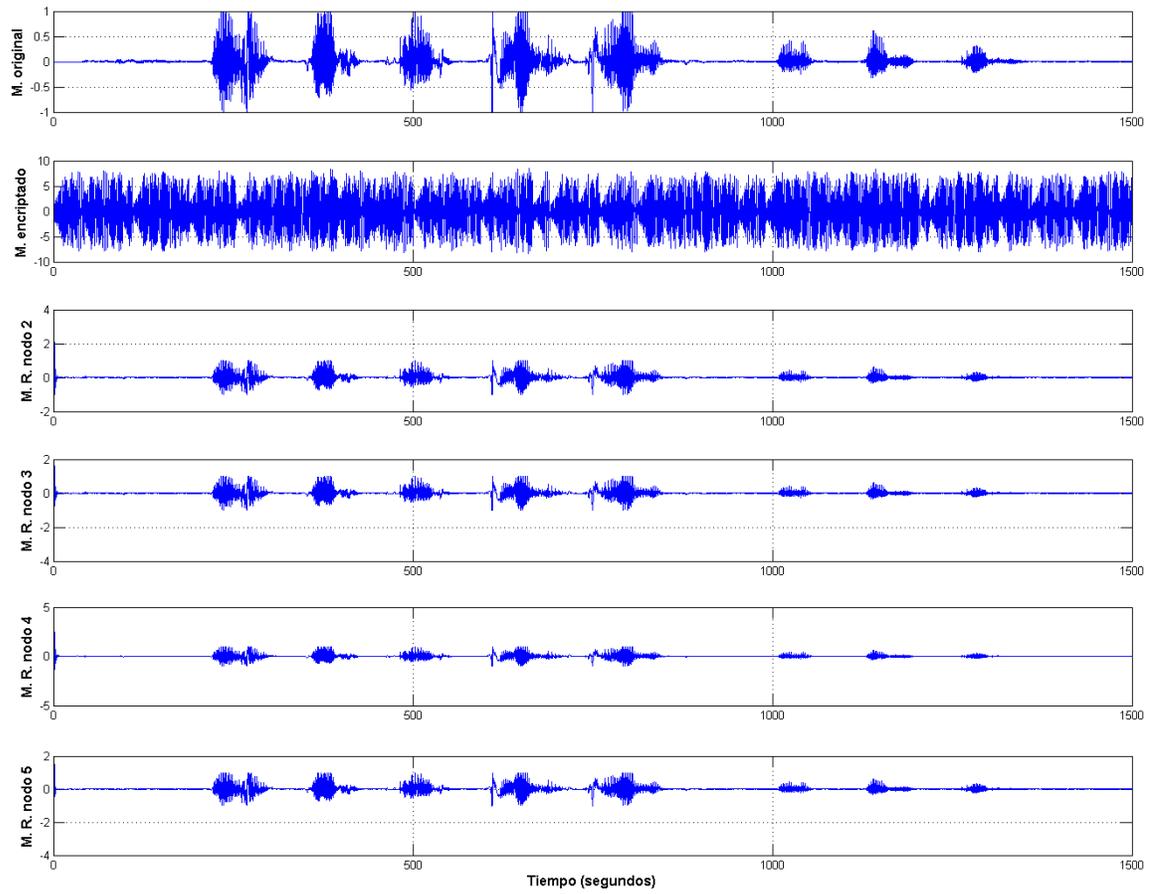


Figura 7.14: Grabación de audio original  $m$ , grabación encriptada o transmitida  $S$ , y grabaciones recuperadas  $m^*$  en cada uno de los 5 nodos.

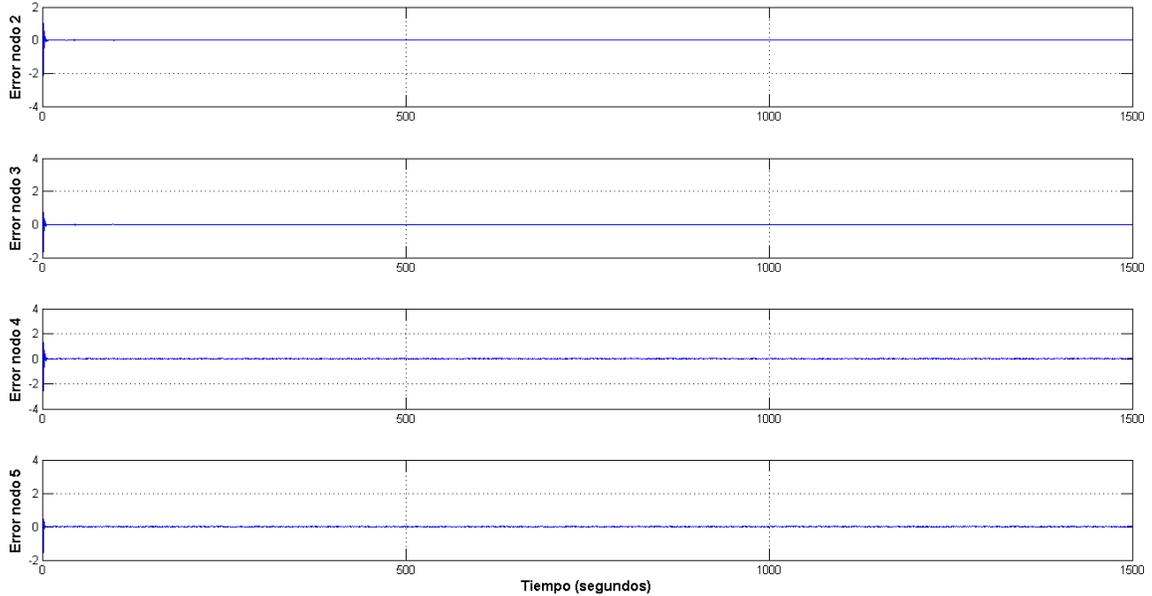


Figura 7.15: Error entre el mensaje original y el mensaje recuperado en cada nodo  $e = m - m^*$ . Se obtuvo al restarlos, dejando ver que después del transitorio, los mensajes recuperados son idénticos al original.

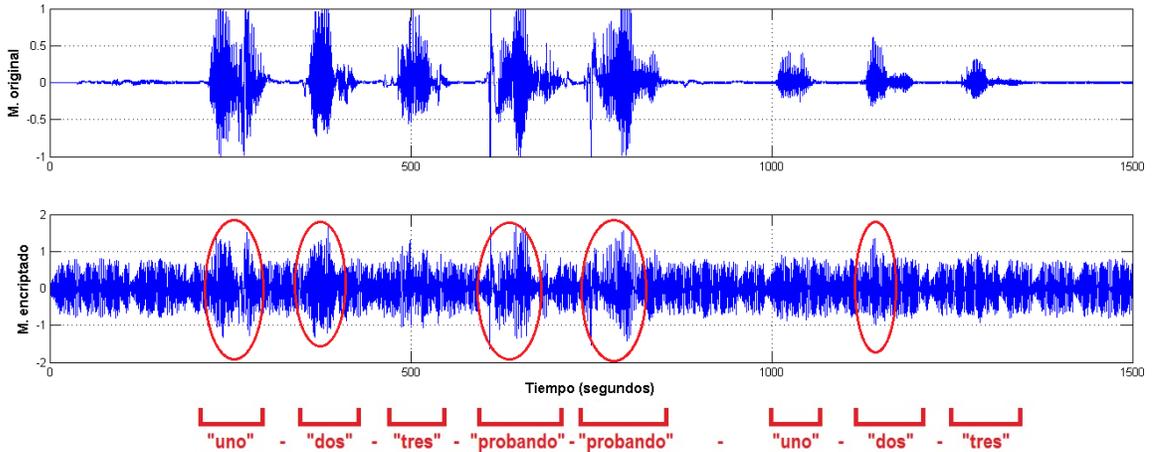


Figura 7.16: Ejemplo de un encriptamiento fallido debido a que la señal caótica es proporcionalmente menor con respecto al mensaje a encriptar. Se han circulado las secciones donde claramente se observa el mensaje sobre la señal caótica, el resto no es obvio. Sin embargo, al recuperar la grabación, imposible de presentar en un medio por escrito, el mensaje se escucha claramente, con un ligero ruido, causado por la señal caótica.

### 7.3 Encriptando un video usando 3 nodos Lorenz en red

Como se habrá notado, en esta serie de tres ejemplos se ha usado el encriptamiento aditivo para encriptar mensajes en forma de imagen y sonido (fotografía y grabación de audio) reduciendo el número de nodos cada vez. Esto no es mera coincidencia, se hizo así para reducir también el tiempo computacional. Este ejemplo tiene una serie de complicaciones meramente computacional. Se logró el encriptamiento de un video en formato digital AVI. El video dura 5 segundos, pero la simulación y encriptado de dicho video, tardó aproximadamente 11 horas. Esto pudiera tener varias razones. El video de 5 segundos fue recortado de un video de mayor duración, donde se graba la entrada a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME).



Figura 7.17: Mensaje original. Video de la entrada a la FIME (fragmento)

El video es de 116 Mb y es de  $320 \times 240$  pixeles, con una resolución baja de 15 cuadros por

segundo, de los cuales sólo se aprecian 75 cuadros. El video no es de alta calidad comparado con los sistemas actuales, pero fue seleccionado de una serie de videos precisamente por su baja calidad, esperando que esto, reduzca lo más posible el tiempo de cómputo. Como fue mencionado antes, el encriptamiento tardó exactamente 11 hr 20 min para el ejemplo con sincronía y 11 hr 17 min para el ejemplo sin sincronía. El encriptamiento fue creado en una computadora con procesador Intel Core i7, del cual se usó un máximo del 37% de su capacidad; y con una memoria RAM de 6 Gb, del cual fue usado alrededor del 75%. La forma de adquirir la información es relativamente similar a la de una fotografía o imagen. Una imagen está conformada por tres dimensiones  $M \times N \times P$ , donde  $M \times N$  dan vida a la la imagen y  $P$  es relativo al color. En un video, se trata de cuatro dimensiones  $M \times N \times P \times K$ , donde  $M \times N \times P$  da a relucir la información por cada cuadro de video (imagen a color), y  $K$  da la información del número de cuadro en la secuencia. Es decir que cuando  $K = 1$  se trata del primer cuadro, cuando  $K = 2$  del segundo cuadro, y así sucesivamente hasta terminar con los 75 cuadros del video.

El principio para encriptarlo, es casi el mismo que el de los dos ejemplos anteriores. Se realizó una sincronía con la red que se observa en la figura 7.18 usando la extension al método de la forma Hamiltoniana generalizada a redes (5.1.1). Se leyó cada cuadro del video, y este fue posteriormente cambiado a una señal de tiempo, o si se desea decirlo así, a un vector de datos, un cuadro a la vez, uno después de otro. Para ser posteriormente guardados en forma de video, se creó una estructura para Matlab, que guardaría la información de cada variable una vez terminara el proceso de encriptado. Se le agregó un vector de ceros, para evitar que la señal se contaminara con el tiempo de sincronía. Se procedió a hacer el encriptamiento aditivo sumando la señal caótica del nodo 1 para posteriormente restarla usando la señal caótica de los nodos 2 y 3 respectivamente (se observa mejor en la figura 7.18). Con la recuperación del mensaje en forma de señal o vector, se procede a identificar, según  $K$ , cada cuadro independientemente y ponerlo en orden. El mismo procedimiento se hizo con la señal transmitida encriptada pero

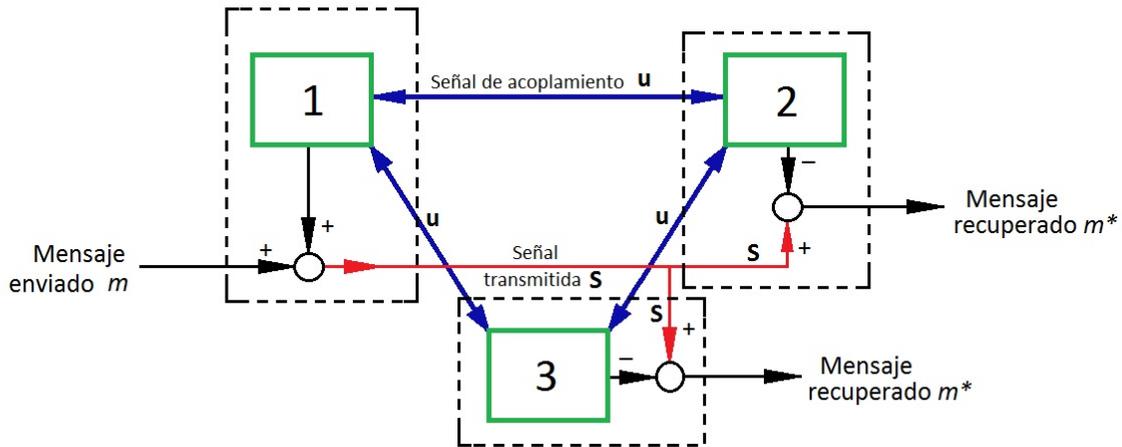


Figura 7.18: Diagrama de bloques de la red regular de 3 nodos.

para observar precisamente el encriptamiento. Para finalizar, se hacen las gráficas pertinentes de prueba de sincronía y encriptamiento, se reproducen los videos y se guardan en un archivo.

El problema del encriptamiento fallido por tener una señal mensaje relativamente mayor a la de la señal encriptante o medio, también podría darse. En este caso, la señal de Lorenz fue lo suficientemente grande, como para no necesitar aumentar su señal o reducir la señal del mensaje. Por otro lado se intentó desarrollar la falta de sincronía, donde los nodos no sincronizan completamente debido a un bajo acoplamiento  $c$ . El resultado sigue siendo una encriptación exitosa, pero el mensaje es contaminado con ruido de la señal caótica. Aun así, el mensaje es claramente visto. En una versión más actualizada de Matlab, permite separar un video en sus componentes de imagen y audio; dicho esto, los ejemplos presentados aquí, no tienen audio por la versión usada de Matlab.

Para este ejercicio, se utilizaron 3 nodos caóticos basados en el oscilador de Lorenz. Las condiciones iniciales para los respectivos nodos son:  $x_1(0) = (6, 0.65, 0.5)$ ;  $x_2(0) = (-0.1, 2.6, 8)$ ;  $x_3(0) = (3, 1.5, 9)$ . Para este ejemplo, se utilizó un acoplamiento de  $c = 3$ . Las gráficas siguientes muestran únicamente el ejemplo en el primer cuadro del video.

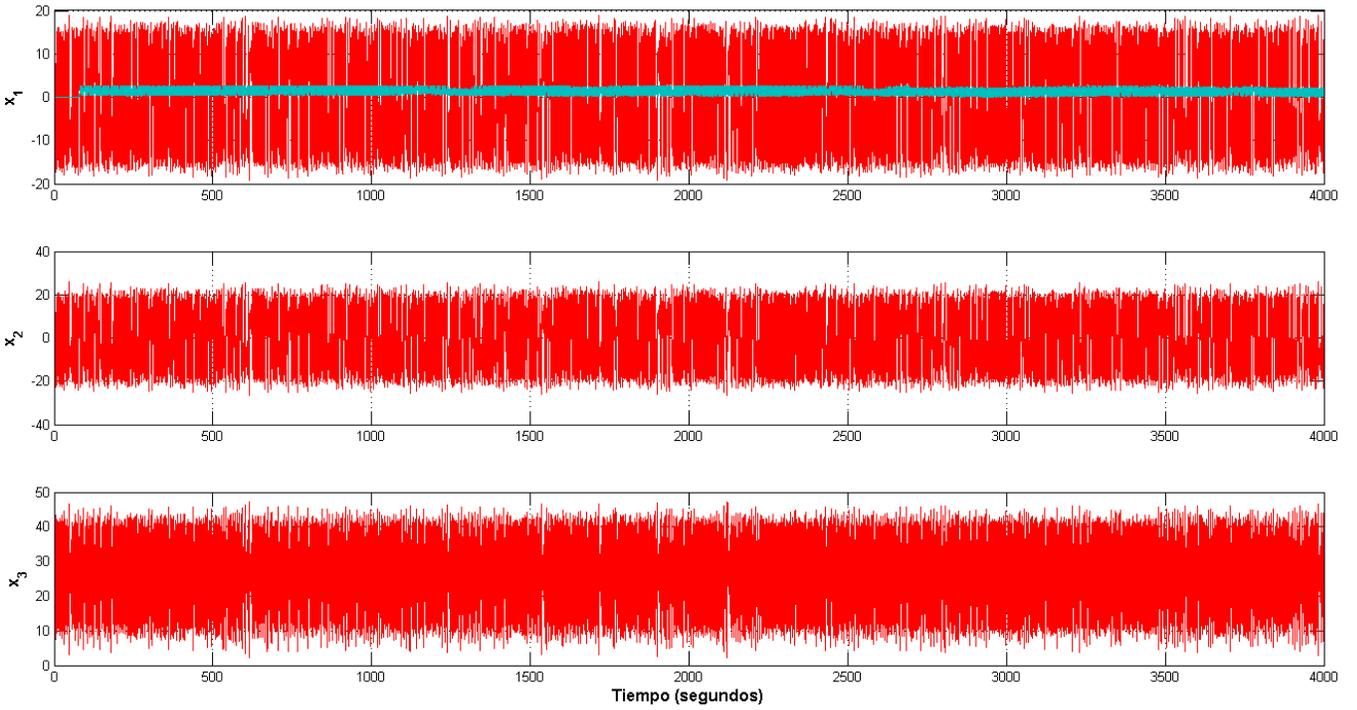


Figura 7.19: Se muestran los estados  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$  de los nodos del 1 al 3, donde  $i = 1, 2, 3$ , del primer cuadro. Note como está incluido la señal obtenida del video como referencia comparativa de la magnitud.

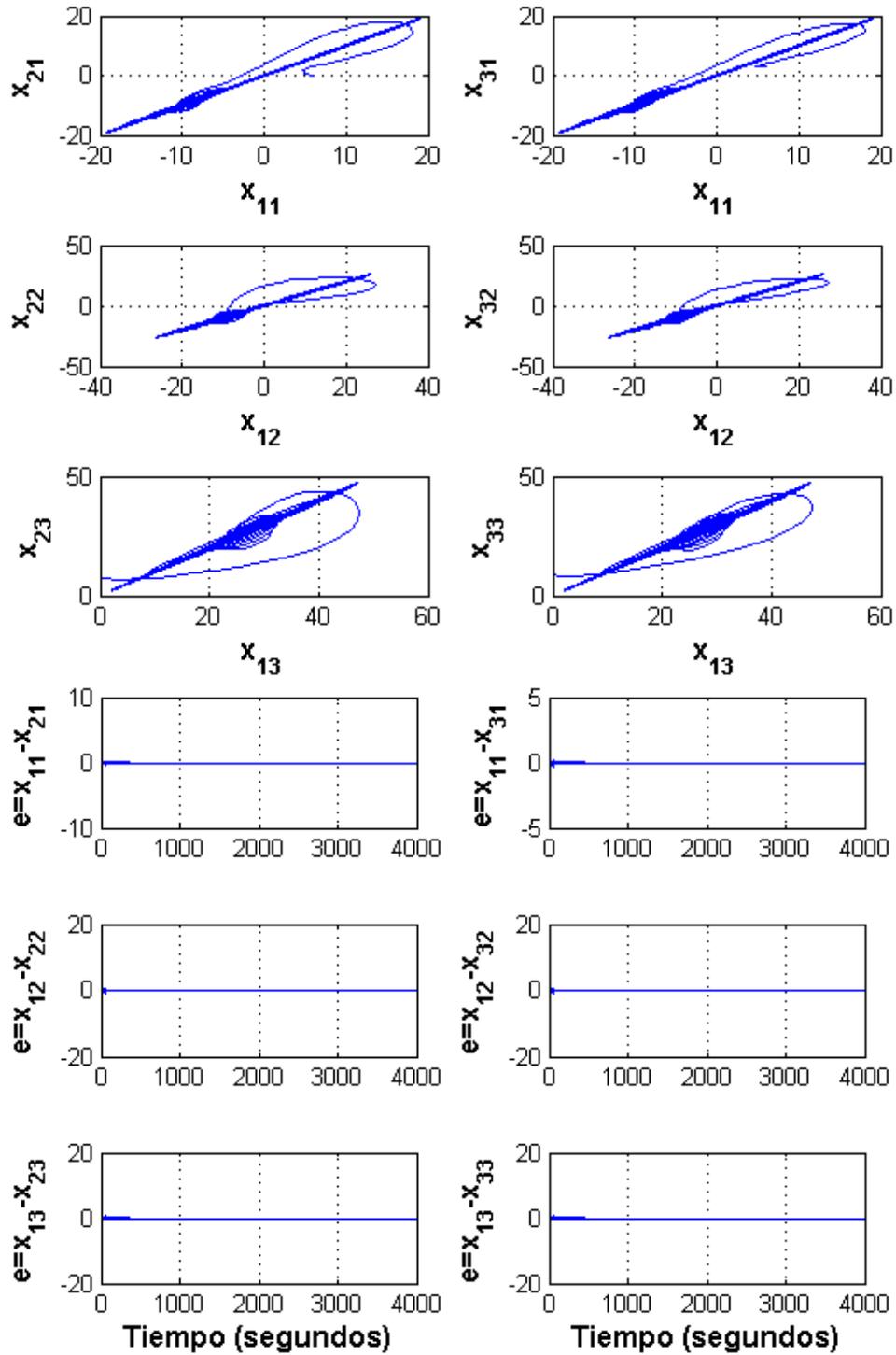


Figura 7.20: Planos de fase y gráficos de error que muestran sincronía en la red.

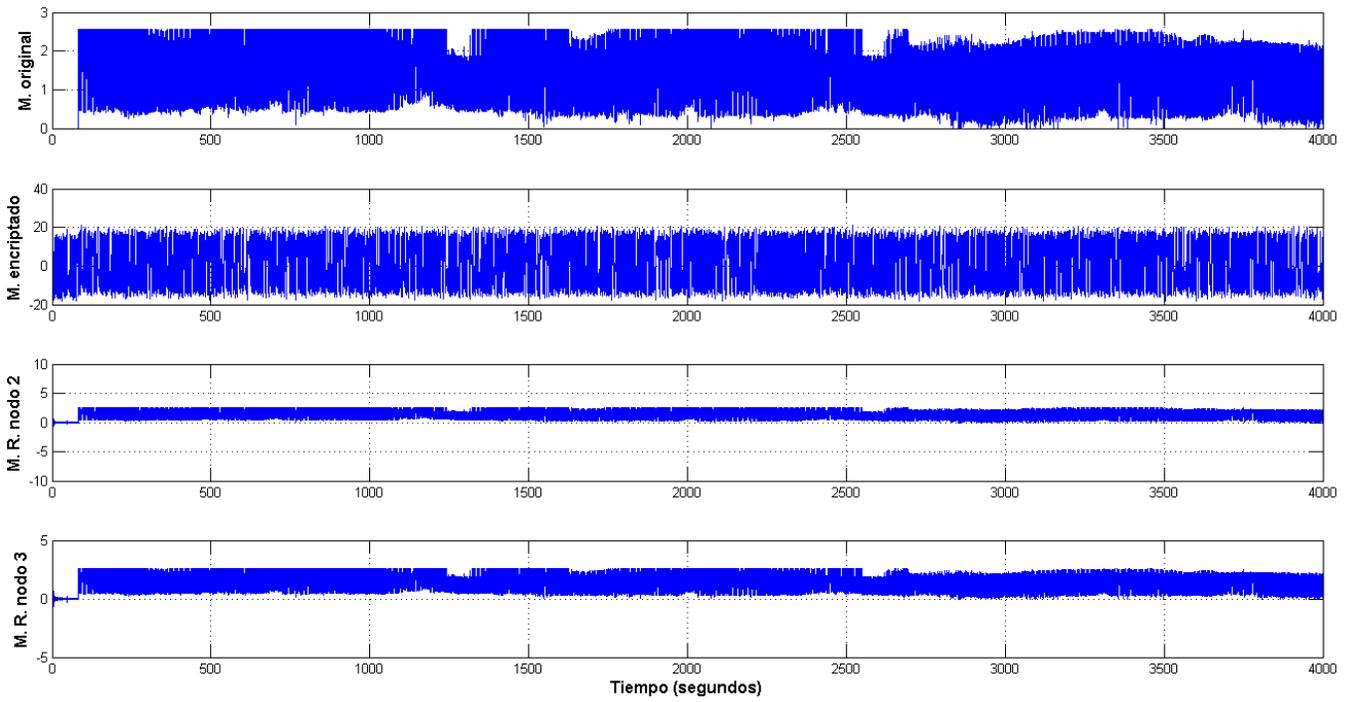


Figura 7.21: Aquí se muestra el video original  $m$ , el video encriptado o transmitido  $S$ , y los videos recuperados  $m^*$  en cada uno de los 3 nodos.

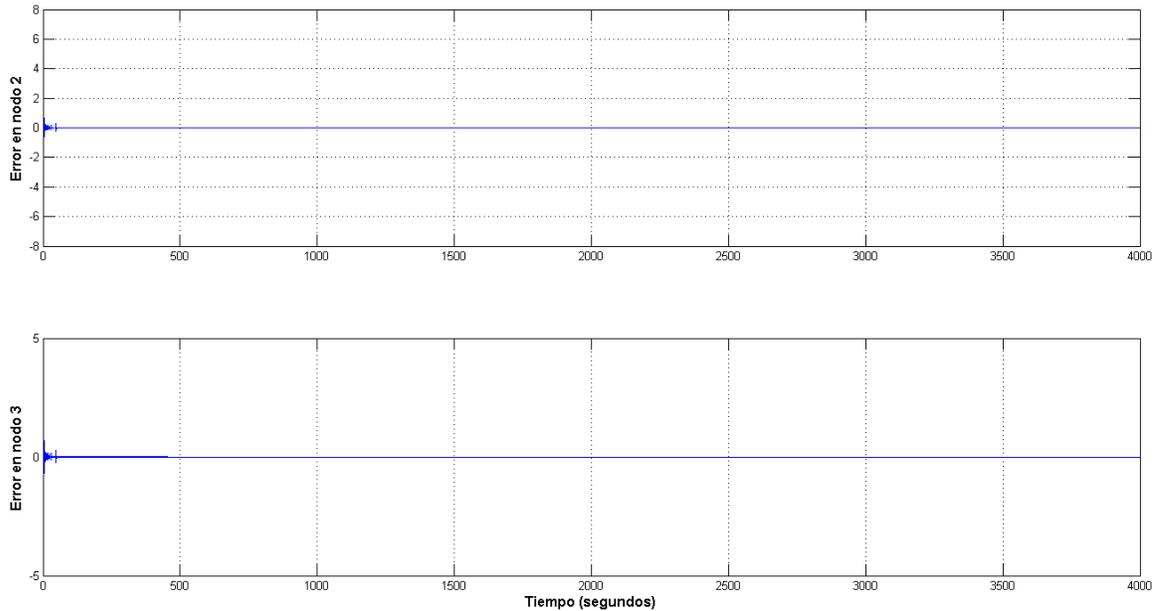


Figura 7.22: Error entre el mensaje original y el mensaje recuperado en cada nodo. Se obtuvo al restarlos, dejando ver que después del transitorio, los mensajes recuperados son idénticos al original.

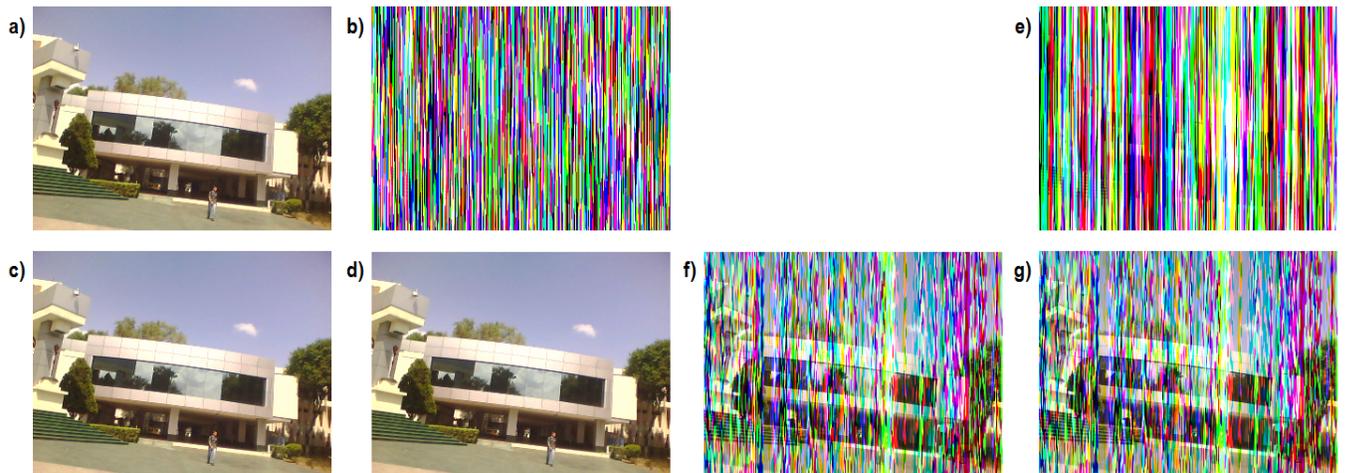


Figura 7.23: a) Es una imagen del video original, b) es una imagen del video encriptado, c) y d) son imágenes del video desencriptado de los nodos 2 y 3 respectivamente. b), c), d) son ejemplos con un acoplamiento de 2, donde existe sincronía. e) es una imagen encriptada del video, f) y g) son imágenes del video de los nodos 2 y 3 respectivamente. e), f) y g) son imágenes obtenidas del ejemplo donde existe bajo acoplamiento, es decir donde no hay sincronía completa.

## 7.4 Conclusiones

En este capítulo, se realizó un encriptamiento aditivo de tres tipos de información: imagen, sonido, y video. Con los ejemplos en el capítulo 6, se concluyó que la sincronía de osciladores caóticos en forma Hamiltoniana generalizada, es alcanzable usando (5.1.1). Específicamente para este capítulo, se concluye que una aplicación directa, como lo es el encriptamiento aditivo, es posible. Se verificaron las condiciones en las cuales el encriptamiento aditivo es posible, es decir, se encontró que cuando el mensaje a encriptar es más grande que la señal caótica utilizada para ocultar la información, el encriptado de la información falla.

Un resumen de lo alcanzado en el capítulo, se puede observar en la siguiente tabla:

Tipo de mensaje	Oscilador caótico	Número de nodos	Acoplamiento	Tiempo de cómputo
Imagen	Rössler	12	figura 7.4	29.8 seg
Sonido	Histéresis	5	figura 7.11	24.5 seg
Video	Lorenz	3	figura 7.18	11 hr 20 min

Tabla 7.1: Resumen de ejemplos de encriptado caótico

# Capítulo 8

## Conclusiones

En este trabajo de tesis, se presentó el problema de sincronización de redes complejas, compuestas por osciladores caóticos. Se empleó una metodología que permite sincronizar una red compleja de nodos en formas Hamiltonianas (esta metodología permite controlar el tiempo de sincronía). Para ello se revisó la metodología empleada por Wang y Chen (Wang X. F., Chen G., 2002; Wang X. F., 2002) y la metodología de formas Hamiltonianas de (Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., 2001). Mediante simulaciones numéricas se logró mostrar sincronización en osciladores caóticos Lorenz, Rössler, y circuito de Histéresis. Se consideró únicamente la sincronización entre osciladores idénticos. Se logró la sincronización de todos los estados, utilizando una sola salida, en este caso  $x_1$ . Las condiciones iniciales consideradas para muchos ejemplos, fueron prácticamente aleatorias. Se consideran condiciones iniciales diferentes, esto nos permitía observar transitorios (tiempo de sincronización) grandes.

Se empleó la sincronización aditiva para mostrar la aplicación de la metodología. Para lograrlo se presentaron tres ejemplos de sincronización de datos: imagen, sonido, y video. El esquema usado no pretende ser útil para comunicaciones seguras. De hecho, ha sido demostrado que la técnica de encriptamiento aditivo, propuesta por Pecora y Carroll, es decodificable (Short, 1994, 1996; Perez y Cerdeira, 1995). Aunque existe aun la posibilidad de usar esta técnica bajo

esquemas modificados, ciertamente la metodología de sincronización de redes usando nodos en formas Hamiltonianas, tiene la oportunidad de ser usada bajo otros sistemas de encriptamiento.

Para garantizar la sincronización, se mostraron características necesarias que deben de estar presentes en la red para diferentes tipos de acoplamiento. Se reportan condiciones de estabilidad en las redes complejas utilizando la teoría de Lyapunov. Se aplica el encriptamiento aditivo para imágenes, sonido y video con éxito, además, de que se dan condiciones para que este tipo de encriptamiento funcione.

## 8.1 Principales contribuciones de este trabajo de tesis

Un resumen a modo de puntuario, de las principales contribuciones de este trabajo de investigación, se da a continuación:

- Extensión del método de sincronización con nodos en forma Hamiltoniana (estaba originalmente reportada sólo para 2 osciladores) a una red de osciladores caóticos.
- Sincronización de una red compleja con nodos en forma Hamiltoniana, en la cual existe un nodo maestro.
- Sincronización de una red compleja con nodos en forma Hamiltoniana, en la cual no existe un nodo maestro.
- La extensión del método de sincronización en forma Hamiltoniana, se aplicó a diferentes clases de sistemas, mostrando así, una versatilidad del método de sincronización de redes complejas.
- Se aplicó este método de sincronización para redes complejas conformadas desde 2 a 12 e incluso más nodos caóticos (el método de sincronía de redes estaba limitado a 6 nodos caóticos).

- Aludiendo a la robustez del método de sincronización en forma Hamiltoniana, se logró encriptar video, obteniendo resultados aceptables (originalmente se reportaba sólo en encriptado de imágenes y audio).
- Se reportan publicados dos artículos, como memorias en extenso en dos congresos internacionales y uno en revista que actualmente se esta elaborando con los resultados principales de este trabajo.

1. Posadas-Castillo C., Garza-González E., Cruz-Hernández C., Alcorta-García, E., Díaz-Romero D.A. *Chaotic synchronization of complex networks with Rössler oscillators in Hamiltonian form like nodes* The 4th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (CHAOS 2011), 31 may - 4 June 2011, Angios Nicolaos, Crete Greece.
2. Garza-González E., Posadas-Castillo C. Díaz-Romero D.A., Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M., Loya-Cabrera A.E., Castillo-Martínez R. *Synchronization of irregular complex networks with chaotic oscillators in Hamiltonian form like nodes* 2nd International Congress on Instrumentation and Applied Sciences (ICIAS 2011) 5 oct - 8 oct 2011, Puebla, Puebla, México.

## 8.2 Trabajo futuro

Se han encontrado algunos problemas abiertos en relación a este trabajo que pueden mencionarse como trabajo futuro en esta dirección, estos son:

- Investigar la robustez a variaciones paramétricas y a ruido en la señal acoplante ya sea en la simple sincronización, o aplicado al encriptado.
- Observar la metodología de redes con nodos en formas Hamiltonianas, en sistemas caóticos

discretos.

- Aplicar la metodología a la sincronización idéntica de osciladores no idénticos.
- Explorar diferentes topologías teniendo una red con diferentes tipos de nodos, es decir, que entre los nodos se encuentre un nodo maestro, observadores de este, y nodos ajenos a estos dos, pero acoplados.
- Crear un sistema de encriptado que utilice otras propiedades inherentes de la metodología de redes con nodos en formas Hamiltonianas.
- Observar la metodología de redes con nodos de orden fraccionario.
- Aplicar esta metodología a sistemas caóticos con múltiples enrollamientos o con dinámicas caóticas.

# Bibliografía

- [1] Lorenz, Edward N. *Deterministic Nonperiodic Flow* Journal of the Atmospheric Sciences Vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- [2] Pecora, L.M. y Carroll, T.L. *Synchronization in chaotic systems* Phys. Rev. Lett. 64, pp. 821-824, 1990.
- [3] Wang X. F., Chen G. *Synchronization in small-world dynamical networks* Int. J. of Bifurc. Chaos, 12(1), pp. 187-192. 2002.
- [4] Wang X. F. *Complex networks: Topology, dynamics and synchronization* International Journal of Bifurcation and Chaos, 12(5), pp. 885-916. 2002.
- [5] Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H. *Synchronization of Chaotic Systems: A Generalized Hamiltonian System Approach* International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 11(5), pp. 1381-1395. 2001.
- [6] Fradkov, A. y Markov, Yu. *Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method y passification* IEEE Trans. Circuits Syst. I 44(10), 905-917, 1997.
- [7] Albert R. y Barabási A.L. *Statistical mechanics of complex networks* Reviews of modern physics, 74(1), pp. 47-97. 2002.
- [8] Netoff T.I., Clewley R., Arno S., Keck T. y White J.A. *Epilepsy in small-world networks* The Journal of Neuroscience, 24(37), pp. 8075-8083, 2004.
- [9] Newman M.E.J. *Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results* Physical Review E, 64(1), pp. 016131-1 - 016131-8, 2001.
- [10] Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. *Synchronization in a network of Chua's circuits* The Fourth IASTED, International Conference on Circuits, Signals, and Systems, San Francisco, California, USA, 20 al 22 de noviembre, 2006.
- [11] Strogatz S. H. *Exploring complex networks* Nature, 410, pp. 268-276, 2001.
- [12] H. Serrano-Guerrero, C. Cruz-Hernández, R. M. López-Gutierrez, C. Posadas-Castillo y E. Inzunza-Gonzalez *Chaotic Synchronization in Star Coupled Networks of 3D CNNs and Its Application in Communications* International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation ISSN Number: 1565-1339., 2010.

- [13] Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. and López-Gutierrez R. M. *Experimental realization of synchronization in complex networks with Chua's circuits like nodes* Chaos, Solitons and Fractals, 40(2009), pp. 1963- 1975, Elsevier Editorial, ISSN: 0960-0779. doi:10.1016/j.chaos.2007.09.076., 2009.
- [14] Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. and López-Gutierrez R. M. *Synchronization of Chaotic Neural Networks with Delay in Irregular Networks* Applied Mathematics and Computation. 205(2008), 487-496. Elsevier Editorial. ISSN: 0096-3003. doi: 10.1016/j.amc.2008.08.015., 2008.
- [15] Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. and López-Gutierrez R. M. *Synchronization in a Network of Chaotic Solid-State Nd:YAG Lasers* IFAC, Proceedigs of the 17th World Congress, Seoul, Korea, July 6-11, 2008, 10.3182/20080706-5-KR-1001.2795
- [16] Posadas-Castillo C. *Sincrinización de sistemas complejos* Tesis doctoral, 2008.
- [17] Lopez-Mancilla D. *Sincronización de Osciladores Caóticos Perturbados con Aplicacion a Sistemas de Comunicaciones.* Tesis doctoral, 2005.
- [18] Aguilar-Bustos A.Y. *Sincronización de Osciladores Caóticos Discretos* Tesis doctoral, 2005.
- [19] Posadas-Castillo C., Garza-González E., Cruz-Hernández C., Alcorta-García, E., Díaz-Romero D.A. *Chaotic synchronization of complex networks with Rössler oscillators in Hamiltonian form like nodes* The 4th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (CHAOS 2011), 31 may - 4 June 2011, Angios Nicolaos, Crete Greece.
- [20] Garza-González E., Posadas-Castillo C. Díaz-Romero D.A., Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M., Loya-Cabrera A.E., Castillo-Martínez R. *Synchronization of irregular complex networks with chaotic oscillators in Hamiltonian form like nodes* 2nd International Congress on Instrumentation and Applied Sciences (ICIAS 2011) 5 oct - 8 oct 2011, Puebla, Puebla, México.
- [21] Bennett M., Schatz M. F., Rockwood H., and Wiesenfeld K. *Huygen's clocks* Proceedings of the Royal Society, London A (2002) 458, 563-579
- [22] Keeley J. E., Bond W. J. *Mast flowering and Semelparity in Bamboos: The Bamboo Fire Cycle Hypothesis* PAm. Nat. 1999, Vol. 152, pp. 383-391
- [23] Gladman B. et al. *Synchronous Locking of Tidally Evolving Satellites* Icarus 122, Issue 1, pp. 166-192. 1996.
- [24] Cabeza C., Rubido N., Kahan S., Marti A. C. *Synchronization of fireflies using model of light controlled oscillators* International Conference on Chaos and Nonlinear Dynamics Jul 2010
- [25] Fradkov A., Andrievsky B. and Guzenko P. *Energy speed-gradient control of satellite oscillations* IFAC Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Russia, 2004 pp. 417-422

- [26] Constantino R. F., Desharnais R. A., Cushing J. M. and Dennis B. *Chaotic Dynamics in an Insect Population Science* 17 January 1997: Vol. 275 no. 5298 pp. 389-391
- [27] Day R. H. 1983 *The emergence of chaos from classical economy growth Quarterly Journal of Economics* vol. 98 (2) pp. 201-213
- [28] Kyrtsov C., Labys W. *Evidence for chaotic dependence between US inflation and commodity prices Journal of Macroeconomics* 28 (1) pp. 256-266, 2006
- [29] Drachsel F. and Schwarz W. *Chaos and Cryptography Fundamental Theory and applications*, Vol. 48 No. 12, Dec 2001
- [30] Abel A. and Schwarz W. *Chaos Communications - Principles, Schemes, and System Analysis Proceedings of the IEEE* Vol. 90, No. 5, May 2002
- [31] Berry M. *Quantum Chaology "Quantum Chaology,"* pp. 104-115 of *Quantum: a guide for the perplexed* by Jim Al-Khalili (Weidenfeld and Nicolson 2003).
- [32] A. E. Motter *Relativistic chaos is coordinate invariant Phys. Rev. Lett.* 91, 231101 (2003)
- [33] Tel T., Nishikawa T., Motter A.E., Grebogi C., and Toroczkai Z. *Universality in active chaos Chaos* 14, 72 (2004)
- [34] Motter A.E., Y.-C., Lai, and Grebogi C. *Reactive dynamics of inertial particles in nonhyperbolic chaotic flows Phys. Rev. E* 68, 056307 (2003).
- [35] Pikovsky, A., Rosenblum, M. and Kurths, J. (2001) *Synchronization A universal concept in non linear sciences*, Cambridge, United Kingdom.
- [36] Fujisaka H., y Yamada T. 1983. *Stability Theory of Synchronized Motion in coupled-Oscillator Systems*, Prog. Theor. Phys. 69(1), 32-47 p.
- [37] Pikovsky, A.S. 1984 *On the interaction of strange attractors*, Z. Phys. B 55, 149-159 p.
- [38] Afraimovich V.S., Verichev N.N. y Rabinovich M.I. 1986. *Stochastic synchronization of oscillation in dissipative system*, Radiophys. Quantum Electron. 29, 795-803 p.
- [39] Cuomo K.M., Oppenheim y Strogatz S.H. 1993. *Synchronization of Lorenz-based chaotic circuit with applications to communications*, IEEE Trans. Circuits Syst. II 40, 626-633p.
- [40] Yang T. y Chua L.O. 1996. *Secure communication via chaotic parameter modulation*, IEEE Trans. Circuits Syst. I 43, 817-819 p.
- [41] Parlitz U., Chua L.O., Kocarev Lj., Halle K.S. y Shang A. 1992. *Transmission of digital signals by chaotic synchronization*, Int. J. Bifurc. and Chaos 2(4),973-977 p.
- [42] Dedieu H., Kennedy M.P. y Hassler M. 1993. *Chaotic shift keying: Modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits*, IEEE Trans. Circuits Syst. II 40, 634-642 p.

- [43] Short K. 1998. *Unmasking a modulated chaotic communications scheme*, Int. J. Bifurc Chaos, 6(2), 367-375 p.
- [44] Redner, S. 1998. *How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution*, Eur. Phys. J. B4(2), 131-134.
- [45] Wu, C. W. y Chua, L. O. 1995. *Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems*, IEEE Trans. Circuits Syst. I 42(8), 430-447 p.
- [46] Wasserman, S. y Faust, K. 1994. *Social Network Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [47] Watts, D. J. y Strogatz, S. H. 1998. *Collective dynamics of 'small world' networks*, Nature 393, 440-442.
- [48] Watts, D. J. 1999. *Small Worlds: the Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton University Press, Princeton
- [49] Watts, D. J. 2000 *A simple model of fads and cascading failures*, Santa Fe Institute Working Paper 00-12-062.
- [50] Nijmeijer, H. y Mareels, M.Y. 1997. *An observer looks at synchronization*, IEEE Trans. Circ. Syst. I:Fundamental Th. Appl. 44(10), 882-890.
- [51] Ushio, T. 1996. *Synthesis of chaotically synchronized systems based on observers*, Proceedings Int. Conference Nonlinearity Bifurc. Chaos: 251-254 p.
- [52] Tao, C. y Du, G. 2003 *A new approach to breaking down chaotic secure communication*, Int. J. Bifurc. Chaos, 13(9): 2689-2698 p.
- [53] Kocarev, L. Halle, K.S., Eckert, K. Chua, L.O/ y Parlitz U. 1992. *experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization*, Int. J. Bifurc. Chaos, 2(3): 709-713.
- [54] Halle, K.S., Chua, L.O., Anishchenko, V.S. y Safanova, M.A. 1992. *Signal amplification via chaos: Experimental evidence*, Int. J. Bifurc. Chaos, 2(4): 1011-1020.
- [55] Parlitz, U. y Kocarev, L. 1998 *Handbook of Chaos Control*, Ed. Springer-Verlag.
- [56] Perez, G. y Cerdeira, H.A. 1995 *Extracting messages masked by chaos*, Phys. Rev. Lett. 74(11): 1970-1973.
- [57] Lopez Mancilla D. y Cruz-Hernandez, C. 2005a *Output synchronization of chaotic systems: Model-matching approach with applications to secure communication*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 5(2), pp. 141-156.
- [58] Lopez Mancilla D. y Cruz-Hernandez, C. 2005b *Output synchronization of chaotic oscillators and private communication*, Procs. of the 16th IFAC World Congress, Praga, Republica Checa.

- [59] Lopez Mancilla D. 2005 *Sincronizacion de osciladores caotivos perturbados con aplicacion a sistemas de comunicaciones*, Tesis doctoral, CICESE
- [60] Chua, L.O., Wu, C.W., huang, A. y Zhong, G.Q. 1993 *a universal circuit for studying and generating chaos, Part I + II*, IEEE Trans. Circ. Syst. I40(10), 732-761.
- [61] Chen, G. y Dong, X. 1993a *Controlling Chua's circuit*, J. Circuits Syst. Computers 3: 139-149.
- [62] Chen, G. y Dong, X. 1993b *From Chaos to Order: perspectives and methodologies in controlling nonlinear dinamical systems*, Int. J. Bifurc. Chaos 3: 1343-1389
- [63] Feldman, U. Hassler, M. Schwarrz, W. 1996 *Communication by chaotic signals: the inverse system approach*, Int. J. Circ. Theory Applic., 24: 551-579.
- [64] Pyragas, K. 1996 *Weak and strong synchronization of chaos*, Phys. Rev. E 54(5): R4508-R4512.
- [65] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S. y Kurths, J. 1996. *Phase synchronization of chaotic oscillators*, Phys. Rev. Lett. 76: 1804-1807.
- [66] Rosenblum, M. G., Kurths, J., Pikovsky, A., Schäfer, C., Tass, P. y Abel, H. G. 1998. *Synchronization in noisy systems and cardiorespiratory interaction*, IEEE Eng. Med. Bio.: 46-53.
- [67] Serrano-Guerro, H. y Cruz-Hernandez, C. 2002a. *Dos sistemas de encriptamiento con base en la sincronia de circuitos de Chua*, Proceedings of the 2nd International Conference on Automatic Control AUTOMATICA 2002, Santiago de Cuba, Cuba, Julio 2002
- [68] Serrano-Guerro, H. y Cruz-Hernandez, C. 2002b. *Sistema encriptador con base en la sincronia de circuitos de Chua*, Memorias del X Congreso Latinoamericano de contro Automatico CLCA 2002, Guadalajara, Mexico, Diciembre 2002
- [69] Meranza-Castillon, y Cruz-Hernandez, C. 2002a *Estudio experimental de la sincronia de dos circuitos hipercaoticos de Chua*, Proceedings of the 2nd International Conference on Automatic Control AUTOMATICA 2002, Santiago de Cuba, Cuba, Julio 2002
- [70] Meranza-Castillon, y Cruz-Hernandez, C. 2002b *Estudio experimental sobre la comunicacion privada usando sincronia de circuitos hipercaoticos de Chua*, Memorias del X Congreso Latinoamericano de contro Automatico CLCA 2002, Guadalajara, Mexico, Diciembre 2002
- [71] Gamez-Guzman, L. 2004 *Encriptador de informacion con base en la sincronia de atratores con enrollamientos multiples*, Tesis de maestria, DET-CICESE. 156 pp.
- [72] Fradkov, A. L., Nijmeijer, H. y Progronsky, A. Yu 1999 *Controlling chaos and bifurcations in engineering systems*, CRC Press, Primera edicion, Boca Raton, Florida, 405-426 p.
- [73] Hasler, M. y Phil. 1995 Trans. R. Soc. Lond. A, 353: 115-126

- [74] Hasler, M., Maistrenko, Yu. y Popovych, O. 1996 *Simple example of partial synchronization of chaotic systems*, Phys. Rev. E 58(5): 6843-6846
- [75] Rulkov, N., Sushchik, M., Tsimring, L. y Abarbanel, H. 1995 *Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems*, Phys. Rev. E 51(2): 980-994.
- [76] Schuster, H. G. 1995 *Deterministic Chaos: an introduction*, Weinheim, Germany, VCH
- [77] Boccaletti, S., Valladares, D. L., Kurths, J., Maza, D. y Mancini, H. 2000 *Synchronization of chaotic structurally nonequivalent systems*, Phys. Rev. E 61(4): 3712-3715.
- [78] Posadas-Castillo, C. 2001 *Sincronizacion de osciladores de Lorenz por formas hamiltonianas*, Tesis de maestria, DET-CICESE. 116 pp.
- [79] Cuomo, K. M. y Oppenheim, A. V. 1993 *Circuit implementation of synchronized chaos with application to communication*, Physics Letters 70: 3031-3035 p.
- [80] Cruz-Hernandez, C., Posadas-Castillo, C. y Sira-Ramirez, H. 2002 *Synchronization of two hyperchaotic Chua circuits: A generalized hamiltonian systems approach*, Memorias del 15th IFAC, Barcelona, Espana, julio 2002
- [81] Cruz-Hernandez, C., 2003 *Synchronization of time-delay Chua's oscillator: a generalized hamiltonian system approach*, Procs. of the IASTED on Circuits, Signal, and Systems, mayo 2003, Cancun Mexico
- [82] Cruz-Hernandez, C., 2004 *Synchronization of time-delay Chua's oscillator with application to secure communication*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 4(1): 1-13 p.
- [83] Cruz, C., Posadas, C., Lopez-Mancilla, D. y Nunez, R. 2001 *binary communication based on synchronized Hamiltonian Lorenz circuits*, 6th Experimental Chaos Conf. post. Germany, Julio 22-26 de 2001
- [84] Cruz-Hernandez, C., 1995 *Stability of discrete nonlinear systems under regular perturbations*, Ph D. Thesis CINVESTAV-IPN, Mexico
- [85] Cruz-Hernandez, C. y Alvarez Gallegos J. 1995 *Stability analysis of nonlinear model matching for a class of perturbed discrete-time systems*, Procs. of NOLCOS'95, Tahoe City, CA, USA, pp. 422-427 p.
- [86] Sira-Ramirez H., Aguilar Ibanez C y Suarez Castanon M. 2002 *Exact state reconstruction in the recovery of messages encrypted by the states of nonlinear discrete-time chaotic systems*, Int. J. Bifurc. Chaos, 12(1), 169-177 p.
- [87] C. Posadas-Castillo, Cruz-Hernandez, R.M. Lopez-Gutierrez, 2007 *Synchronization in arrays of chaotic neural networks*, Lecture Notes in Artificial Intelligence, No. 4529, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
- [88] Davies, Donald (April 1999), *The Bombe Ū a Remarkable Logic Machine*, Cryptologia 23 (2): 108-138, doi:10.1080/0161-119991887793, ISSN 0161-1194

- [89] Cipher A. Deavours 1997 *Lobsters, Crabs, and The Abwehr Enigma*, Cryptologia 21(3): 193-199
- [90] Thomas Kelly, 1998 *The Myth of the Skytale*, Cryptologia 22(3): 244-260
- [91] <http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Pixel-example.png>