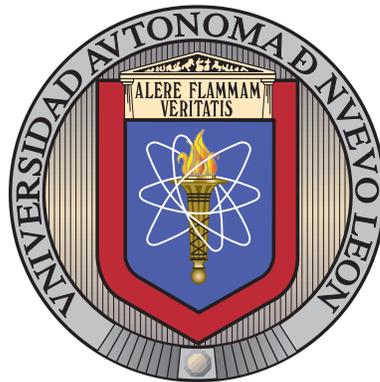


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MODELO ADAPTATIVO PARA LA  
SINCRONIZACIÓN EN REDES MODULARES

POR

VANESA AVALOS GAYTÁN

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO DE 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MODELO ADAPTATIVO PARA LA  
SINCRONIZACIÓN EN REDES MODULARES

POR

VANESA AVALOS GAYTÁN

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO DE 2012

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**División de Estudios de Posgrado**

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis *Modelo adaptativo para la sincronización en redes modulares*, realizada por la alumna Vanesa Avalos Gaytán, con número de matrícula 1437964, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ingeniería con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

---

Dra. Satu Elisa Schaeffer

Asesor

---

Dr. Juan Antonio Almendral Sánchez

Asesor

---

Dra. Laura Cruz Reyes

Revisor

---

Dr. Arturo Berrones Santos

Revisor

---

Dr. Romeo Sánchez Nigenda

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Julio de 2012

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. ¿Qué es un sistema? . . . . .	1
1.2. ¿Qué es sincronización? . . . . .	3
1.3. Descripción del problema . . . . .	5
1.4. Trabajo propuesto . . . . .	6
1.5. Justificación . . . . .	7
1.6. Objetivos . . . . .	8
1.7. Hipótesis . . . . .	8
1.8. Contribuciones científicas . . . . .	9
1.9. Estructura de la tesis . . . . .	9
<b>2. Marco teórico</b>	<b>11</b>
2.1. Definición de conceptos . . . . .	11
2.2. Redes complejas . . . . .	16

---

2.3. Sincronización . . . . .	21
2.4. Sincronización en redes complejas . . . . .	25
2.5. Modelo de Kuramoto . . . . .	28
<b>3. Metodología de solución</b>	<b>31</b>
3.1. Formulación del modelo . . . . .	31
3.2. Medidas de sincronización . . . . .	35
3.3. Medidas de caracterización topológica . . . . .	37
<b>4. Experimentos computacionales</b>	<b>40</b>
4.1. Diseño experimental . . . . .	40
4.2. Implementación numérica . . . . .	44
4.3. Resultados . . . . .	45
4.3.1. Eficiencia de sincronización . . . . .	46
4.3.1.1. Familia A . . . . .	46
4.3.1.2. Familia B . . . . .	57
4.3.1.3. Familia C . . . . .	63
4.3.2. Propiedades topológicas . . . . .	72
4.3.2.1. Familia A . . . . .	72
4.3.2.2. Familia B . . . . .	83
4.3.2.3. Familia C . . . . .	92
4.4. Conclusiones sobre los experimentos . . . . .	100

---

<b>5. Convergencia</b>	<b>101</b>
5.1. Justificación del porqué en algunos casos los enlaces no convergen . .	101
<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>108</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>111</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>117</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>120</b>

# AGRADECIMIENTOS

---

En primer lugar a mis padres, su constante apoyo y comprensión son el pilar fundamental para seguir adelante. Sin su apoyo incondicional, esta tesis no habría sido posible; aun cuando no me lo dicen se que en ocasiones no entienden del todo mis decisiones.

A la Dra. Elisa Schaeffer, por darme la oportunidad de seguir trabajando bajo su dirección en esta tesis. Gracias a ello me he envuelto en un tema desconocido pero que ha resultado ser mucho más de lo que imaginaba. También le agradezco todas las ideas, comentarios, consejos y constante apoyo que durante tanto tiempo he recibido de su parte. Todo esto más que contribuir al hecho de terminar una tesis, me ha hecho madurar y crecer profesional y personalmente.

Al Dr. Juan Antonio Almendral Sánchez, quien sin conocerme me aceptó para la realización de una estancia académica. Gracias a ello me involucré más en el tema de sincronización en redes complejas y he contribuido en gran parte a que mi interés en este tema sea mayor. Desde el momento en que empecé a colaborar con él me apoyó constantemente en la realización de esta tesis.

Al Dr. Arturo Berrones Santos, a la Dra. Laura Cruz Reyes y al Dr. Romeo Sánchez Nigeda por dedicar el tiempo necesario para leer este trabajo, por sus preguntas y recomendaciones para hacer que esta tesis sea mejor.

A todos los profesores del Programa en Ingeniería de Sistemas (PISIS) por su apoyo durante mi estancia en este posgrado y a los compañeros que durante mi paso por PISIS he conocido.

---

A mis compañeras y amigas Yajaira, Tania y Lucero porque desde que empezamos el doctorado hemos compartido momentos de mucho estrés y también de mucha risa. También de ustedes he aprendido muchas cosas y les agradezco su apoyo y consejos, todo ello fue un gran apoyo para seguir con la tesis. A ellas a Oliver y a Omar porque aún cuando no entendían de que estaba hablando me escuchaban y trataban de ayudarme.

Gracias a la coordinación del PISIS por darme la oportunidad de formar parte de éste. A la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL) y a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME) por las becas que me han dado durante la realización del doctorado. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y a la UANL por la beca de manutención otorgada durante mis estudios de doctorado.

Este trabajo ha recibido apoyo de los proyectos de la Universidad Autónoma de Nuevo León PAICyT IT264-09 & IT553-10.

# RESUMEN

---

Vanesa Avalos Gaytán.

Candidato para el grado de Doctor en Ingeniería  
con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

## MODELO ADAPTATIVO PARA LA SINCRONIZACIÓN EN REDES MODULARES

Número de páginas: 122.

En el presente trabajo se estudia el fenómeno de *sincronización en redes complejas*. Éstas son sistemas que están formados por conjuntos de elementos relacionados entre sí para lograr un fin común, han sido catalogados como complejos por la gran cantidad de elementos que los conforman y por la dinámica no lineal que presentan los elementos y las interacciones entre ellos. A partir de la complejidad en las interacciones y los elementos surgen las *propiedades emergentes*, como por ejemplo la *sincronización*, un fenómeno que no puede ser explicado a partir de las propiedades de los elementos por sí solos.

La sincronización es el comportamiento estable en el tiempo en el que, debido al acoplamiento entre los elementos, la dinámica de todos los elementos de un sistema

es la misma. Ejemplos claros y espectaculares de sincronización se observan en los grupos de luciérnagas que sincronizan la emisión de la luz durante el apareamiento o en las células musculares en el corazón latiendo al mismo tiempo. Para que esta propiedad emerja deben combinarse balanceadamente varios factores, destacando las interacciones entre los elementos del sistema y las de cada uno con el medio ambiente en que se encuentren.

La mayoría de los trabajos en el contexto de las redes complejas, han buscado las condiciones necesarias para la aparición de la sincronización en la estructura de la escala local o en las propiedades macroscópicas, sin lograr describir adecuadamente las características más importantes que los sistemas complejos presentan ya que frecuentemente presentan una organización en *módulos*.

Hasta hace poco tiempo, se ha reconocido que la organización modular es fundamental para la manera en que un sistema complejo se desenvuelve. Así que, en este trabajo nos hemos interesado en estudiar cómo surge este rango intermedio, dado que en las redes reales se encuentra esta estructura modular, aunque hasta ahora no se sabe cómo es que surge.

La existencia de módulos en una red para “mejorar una tarea” está muy relacionada con la coexistencia del establecimiento de subtareas colectivas y la coordinación de éstas a escala global, estos fenómenos son conocidos como segregación e integración. Como por ejemplo, cualquier tarea realizada por el cerebro se realiza dividiéndola en pequeñas subtareas (segregación), ejecutadas en regiones específicas del cerebro (módulos) que posteriormente son coordinadas (integración) para conseguir el resultado deseado.

**OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO:** En este trabajo se estudia el problema de integración/segregación desde el punto de vista de las redes complejas, considerando que la topología de la red no es estática; esto es porque existe un mecanismo adaptativo que está actuando sobre los enlaces en la red. En éste el objetivo es identificar

bajo qué condiciones ocurre la sincronización en redes y qué propiedades estructurales están presentes en la topología de la red cuando ocurre la sincronización.

El objetivo principal es desarrollar un *algoritmo de formación topológica* para una *sincronización* eficiente, basado en la interrelación entre las propiedades estructurales, locales y globales, y las propiedades dinámicas de un sistema.

En particular, se experimenta computacionalmente con las principales propiedades estructurales descriptivas, globales y locales, de las redes cuando han sido modificadas con el mecanismo propuesto, y así aclaramos la relación entre estos resultados y los observados para sincronización en ambas escalas, global y local, por medio de la formulación de un modelo dinámico para alcanzar la sincronización eficientemente.

Para lograr alcanzar los objetivos proponemos un modelo dinámico con el cual se modela la evolución en el tiempo tanto de la conexión entre cada par de elementos como la evolución de cada uno de los elementos en el sistema. Con este modelo podemos determinar las relaciones antes mencionadas.

**CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES:** Se propuso un algoritmo para la formación topológica de redes en el cual se consideran medidas de sincronización a nivel local y global, propiedades topológicas como el grado promedio, el grado promedio de los vecinos, la modularidad y la asortatividad.

En el modelo se proponen dos funciones para la evolución de un sistema, a) con una se modela la dinámica (evolución en el tiempo) del comportamiento de las conexiones entre pares de elementos (enlaces) en el sistema y b) con la otra se modela la correlación entre cada par de elementos en el sistema. También se propone una medida de desempeño para la sincronización a nivel local la cual nos permite cuantificar numéricamente el nivel de sincronización local.

El principal resultado encontrado es que la modularidad, una característica global, puede naturalmente surgir en una red cuando se considera que los enlaces

están evolucionando, es decir, por medio de las propiedades dinámicas en la escala local. Este resultado es importante porque en la literatura las propuestas para estudiar la formación de módulos en redes complejas se basa en suponer una estructura topológica pre-impuesta, aunque es bien sabido que en la naturaleza existen sistemas complejos que presentan una estructura modular que ha emergido naturalmente, por lo que lo más relevante para lograr entender la formación de tales módulos, es proponer nuevos estudios con los cuales esta característica emerja naturalmente.

En conclusión, se ha propuesto un modelo adaptativo para sincronización en redes. Se implementaron medidas para cuantificar la sincronización en la escala tanto global como local. La regla propuesta para la evolución de los enlaces ponderados evita tener que definir una topología de red inicial y por tanto tener que elegir un modelo para la generación de la topología, y así se optimiza la topología de la red para que la sincronización sea más fácil.

También se observó que incluso en ausencia de la sincronización global, un alto grado de sincronización local puede prevalecer. Los resultados experimentales mostraron que debido a la naturaleza del modelo propuesto, éste es adecuado para estudiar la sincronización en conjunto con la formación topológica.

La caracterización de la topología de las redes resultantes se ha hecho en términos de la medida de asortatividad y la medida de modularidad. Se observó que la sincronización y las propiedades estructurales pueden afectarse mutuamente. Con lo anterior se prueba que ambas se influyen de forma mutua y que tal influencia requiere de una estructura modular la cual es determinada de forma evolutiva. Esto es de interés ya que en la literatura existente el estudio de sincronización es bajo topologías pre-impuestas; el enfoque presentado en este trabajo permite el estudio de cómo la sincronización y procesos semejantes afectan la formación de comunidades, para complementar el trabajo existente sobre cómo la presencia de comunidades afecta a la sincronización.

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

En las secciones 1.1 y 1.2 se describe brevemente qué es un *sistema* y qué es sincronización en el contexto de este trabajo. En las secciones 1.3 y 1.4 se describe cuál es el problema que abordamos y se plantea el trabajo que proponemos en esta investigación. En la sección 1.5 se presenta la justificación. En las secciones 1.6, 1.7 y 1.8 se describen respectivamente el objetivo, la hipótesis supuesta y las contribuciones científicas que se han logrado con este trabajo.

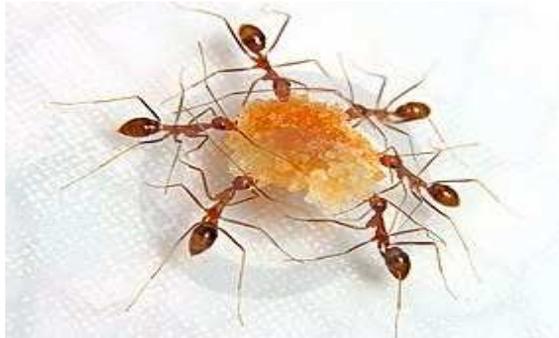
### 1.1 ¿QUÉ ES UN SISTEMA?

Un *sistema* es un conjunto de elementos relacionados entre sí para lograr un fin común. A nuestro alrededor podemos encontrar una gran cantidad de sistemas, tanto naturales como artificiales, que podemos clasificar de forma básica en cuatro categorías: *triviales*, *simples*, *complicados* y *complejos* [Chialvo, 2004].

Aquí nos interesamos en aquellos catalogados como *complejos* debido a la gran cantidad de elementos que los conforman y a la dinámica no lineal que presentan, tanto los elementos como las interacciones entre los elementos. Es a partir de esa complejidad en las interacciones y los elementos de donde surgen las llamadas *propiedades emergentes*, las cuales no pueden ser explicadas a partir de las propiedades de los elementos aislados. De hecho no es raro que a partir de las conductas simples de las partes que conforman un sistema complejo, se observen propiedades o procesos

extremadamente complejos en el conjunto que no son reducibles al comportamiento de sus partes constituyentes.

Por ejemplo, en las colonias de hormigas se observan conductas emergentes y, sin embargo, los agentes individuales del sistema solo prestan atención a sus vecinos inmediatos. No están recibiendo órdenes de un agente central. Cada hormiga actúa localmente pero todas ellas producen un comportamiento global coherente y complejo [M. Uhrmacher and Weyns, 2009].



**Figura 1.1:** Las hormigas son un buen ejemplo de conductas emergentes.

Otro ejemplo es el cerebro de cualquier animal. Alan L. Hodgkin y Andrew Huxley recibieron el premio Nobel en 1963 por un modelo, propuesto en 1952, que describía las corrientes iónicas que provocan el inicio y propagación de los potenciales de acción en una neurona de calamar. Así pues, el comportamiento de una neurona aislada es bien conocido. Sin embargo, este conocimiento no arroja ninguna luz sobre los fenómenos emergentes observados en cualquier cerebro, como son la memoria o la percepción de un color o un sonido. Este hecho se suele resumir con la frase “El total es más que la suma de las partes”.

Los *sistemas complicados* también están formados por muchas partes y en éstos basta con saber cómo funciona cada una de las partes que los conforman para entender el funcionamiento total del sistema, por ejemplo un avión, en el cual un especialista (mecánico de aviación) conoce muy bien el funcionamiento de éste y la utilidad de cada una de las piezas que lo componen.

En cambio, en un sistema complejo hay más información que la que proporciona cada parte independiente. Por eso para describir un sistema complejo no solo hace falta conocer el funcionamiento de las partes, sino que también hace falta conocer cómo se relacionan las partes entre sí. Volviendo al ejemplo de las colonias de hormigas, en éste hace falta conocer las conductas emergentes que son el producto del conjunto de las relaciones entre las partes, para entender el funcionamiento total del sistema.

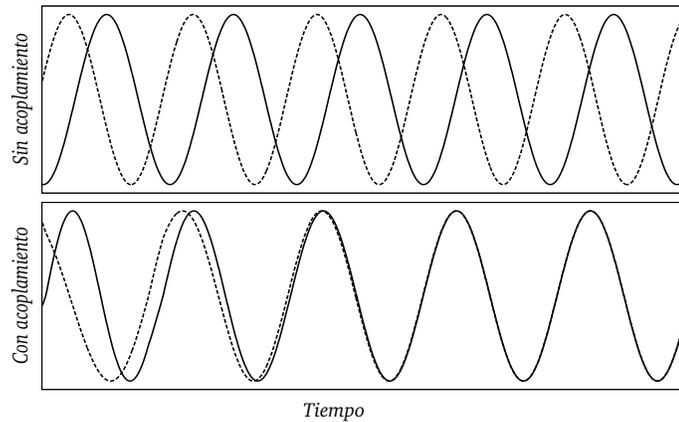
Los *sistemas adaptativos complejos* son un tipo especial de sistemas complejos. Son complejos en el sentido de que son diversos y conformados por múltiples elementos interconectados y son adaptativos porque tienen la capacidad de cambiar y aprender del pasado.

Los *sistemas simples* se caracterizan por tener una menor cantidad de elementos interactuando, a diferencia de los sistemas complicados y los complejos, y las interacciones entre sus elementos y su comportamiento son no lineales, como por ejemplo los sistemas caóticos. Note que aquí simple no implica que tengan un comportamiento sencillo.

En los *sistemas triviales* también se tiene una cantidad menor de elementos y se caracterizan por la linealidad que presentan en las interacciones entre sus elementos y su comportamiento.

## 1.2 ¿QUÉ ES SINCRONIZACIÓN?

De entre los muchos procesos emergentes que se pueden observar en un sistema complejo, uno de los más interesantes y que más atención recibe de la comunidad científica es la *sincronización*. Sincronización es el nombre que recibe el comportamiento estable en el tiempo en el que, debido al acoplamiento entre los elementos, la dinámica de todos ellos es la misma, cf. Figura 1.2.



**Figura 1.2:** Comportamiento de dos sistemas en el tiempo cuando están acoplados y cuando no.

En la naturaleza existen muchos ejemplos de sincronización, y en algunos casos son verdaderos espectáculos. Por ejemplo, el movimiento de miles de peces en un banco, las parvadas de aves, los grupos de luciérnagas que sincronizan la emisión de luz durante el apareamiento, las células musculares en el corazón latiendo al mismo tiempo, o el público de un concierto cuando todos aplauden al unísono para convencer al artista de volver a actuar, Strogatz [2003].

Para lograr llegar a la sincronización deben combinarse en un balance sutil varios factores, siendo los más destacados las interacciones entre los elementos del grupo y las de cada individuo con el medio ambiente en que se encuentra. Aunque este balance ha sido estudiado mediante varias herramientas, el aquí presentado es el más moderno y el que más resultados ha conseguido. El enfoque para abordar este tipo de problemas es la *teoría de redes complejas*. Su éxito reside en que su esquema teórico incluye herramientas de la teoría de sistemas dinámicos, que sirven para tratar con sistemas no lineales, y de la teoría de grafos, adecuada para tratar muchos elementos que interaccionan de forma no trivial.

### 1.3 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Hasta hace poco tiempo, la mayoría de los trabajos sobre sincronización, en el contexto de las redes complejas, han buscado las condiciones necesarias para su aparición, ya sea en la estructura de la escala local de sistemas complejos reales bajo estudio o en sus propiedades macroscópicas. En el primer caso se analiza cómo la sincronización depende de lo que sucede en el entorno de cada uno de los constituyentes del sistema complejo, es decir, cuando se considera uno de los constituyentes y todos aquellos que interaccionan con él. En el segundo, el origen de la sincronización se busca en características globales del sistema, es decir, cuando se ignoran la individualidad de los constituyentes.

Sin embargo, ninguna de estas descripciones pueden describir adecuadamente las características más importantes que aparecen al estudiar el problema de sincronización en redes complejas, puesto que en ellas es muy frecuente su organización en módulos o comunidades (ambos términos aparecen en la literatura) [Almendral et al., 2011]. Éstos son conjuntos de elementos que están formados por elementos fuertemente interrelacionados entre ellos, pero estando estos conjuntos escasamente interrelacionados con los demás. En estos casos, las características más importantes del sistema surgen en el nivel intermedio entre la escala local y global. Pero a este nivel, los parámetros para caracterizar local o globalmente una red no nos sirven para identificar esas propiedades.

Desde el trabajo de Michelle Girvan y Mark Newman, sobre el descubrimiento de la estructura modular de las redes en redes sociales y biológicas, fue evidente que los sistemas en la naturaleza, frecuentemente, presentan estructuras organizadas en módulos [Girvan and Newman, 2002]. Recientemente esta organización modular ha sido reconocida como fundamental para la manera en que un sistema complejo se desenvuelve (funciona o trabaja) [Almendral et al., 2011]. Por ejemplo, en las redes metabólicas, una comunidad está compuesta por todos los metabolitos que participan en una función específica del metabolismo de una célula; o en las redes sociales, como

por ejemplo Facebook o Twitter, las comunidades pueden dar una gran información sobre cómo evolucionan las opiniones o la propagación de rumores [Arenas et al., 2008].

Nos hemos interesado en estudiar cómo aparece este rango intermedio ya que muchas redes reales presentan una estructura modular, pero hasta ahora no se sabe cómo es que surge. Así, con el fin de obtener una mejor comprensión sobre el efecto de la modularidad en la sincronización, un tema importante que requiere un estudio detallado es el crecimiento y la formación de esta *mesoescala* en los sistemas complejos. En general los modelos existentes de crecimiento de redes introducen la modularidad a través de argumentos topológicos, pero poco se sabe de qué procesos evolutivos, basados en la sincronización, dan lugar a la modularidad. Es decir, hasta ahora se ha estudiado el impacto de la estructura en la función (sincronización) pero no cómo la función determina la estructura.

## 1.4 TRABAJO PROPUESTO

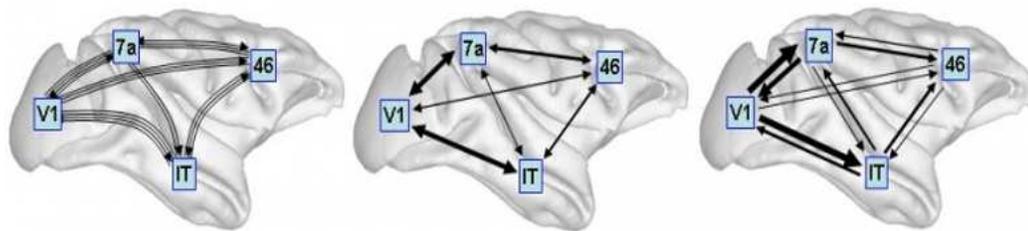
En este trabajo se presenta un modelo, en el contexto de las redes complejas, en el cual la formación de la mesoescala es dinámicamente conducida por una regla simple adaptativa. Más precisamente, se considera una red formada por osciladores de Kuramoto (c.f. sección 2.5) acoplados mediante enlaces que evolucionan según una dinámica dependiente del estado de sincronización del sistema. Los enlaces son definidos con dos estados, 1) los enlaces que unen nodos de dinámicas similares son reforzados y 2) los enlaces que unen nodos con dinámicas diferentes (*asíncronos*) son debilitados. De esta forma, se pretende mostrar que la presencia de la modularidad y la sincronización (asociada a la existencia de subtarefas colectivas) están interrelacionadas. Se demuestra que la presencia de modularidad se relaciona con la aparición de subtarefas colectivas, que a su vez, son coordinadas a nivel global.

## 1.5 JUSTIFICACIÓN

Una pregunta importante que sigue abierta es el rol de la mesoescala en la producción de una dinámica colectiva y coordinada. Es evidente que la existencia de comunidades en una red para “mejorar una tarea” está muy relacionada con la coexistencia de dos fenómenos (solo aparentemente opuestos): el establecimiento de *subtareas colectivas* en la red (segregación) y la *coordinación* de dichas subtareas a escala global (integración).

Por ejemplo, cualquier tarea realizada por el cerebro (incluso la más sencilla) se realiza dividiéndola en pequeñas subtareas (segregación), ejecutadas en regiones específicas del cerebro (comunidades), y que posteriormente deben ser coordinadas (integración) para conseguir el resultado deseado.

Más específicamente, en la interrelación entre la conectividad estructural, funcional y efectiva en la corteza cerebral, la segregación se refiere a la existencia de neuronas especializadas y áreas en el cerebro, organizadas en distintas poblaciones neuronales las cuales se agrupan para formar áreas corticales cerebrales; y la integración da lugar a la activación coordinada de poblaciones de neuronas, permitiendo así la aparición de estados cognitivos coherentes y de conducta. En la Figura 1.3 se muestran los diferentes modos de conectividad cerebral.



**Figura 1.3:** Modos de conectividad cerebral<sup>a</sup>: a la derecha la conectividad estructural (vías de fibra), en el centro la conectividad funcional (correlaciones), y a la izquierda la conectividad efectiva (flujo de información) en cuatro regiones del cerebro.

<sup>a</sup>Olaf Sporns, Brain connectivity. Scholarpedia, 2(10):4695, 2007.

En una red metabólica sucede algo muy similar, una reacción metabólica se compone de muchas reacciones químicas (segregación), ejecutadas por metabolitos especializados en alguna función (comunidades), y que tienen que ser coordinadas para que se realicen en la secuencia adecuada (integración).

Esta forma de relacionar la función de un sistema y su estructura es ubicua en la naturaleza, y eso demuestra que es una forma óptima de hacerlo (¡millones de años de evolución no pueden estar equivocados!). Por tanto, desde una perspectiva práctica, la comprensión de dicha interrelación permitirá el diseño de sistemas guiados por sus propiedades dinámicas.

## 1.6 OBJETIVOS

El objetivo principal es desarrollar un *algoritmo de formación topológica* para una *sincronización* eficiente, basado en la interrelación entre las propiedades estructurales, locales y globales, y las propiedades dinámicas de un sistema.

Dicho objetivo se estructura en los siguientes puntos:

- Determinar computacionalmente las relaciones entre las propiedades estructurales locales y globales con la eficiencia de la sincronización.
- Formular un modelo dinámico para alcanzar la sincronización eficientemente.

## 1.7 HIPÓTESIS

En la sincronización en redes, las propiedades dinámicas y topológicas se influyen de forma mutua. Dicha influencia requiere de la existencia de una mesoescala (una estructura modular), que se puede determinar de forma evolutiva.

## 1.8 CONTRIBUCIONES CIENTÍFICAS

**Algoritmo de formación de redes** Se propone un algoritmo para la formación topológica de redes, en éste se consideran medidas para sincronización a nivel local y global, propiedades topológicas como el grado promedio, el grado promedio de los vecinos, la modularidad y la asortatividad. En el modelo se proponen dos funciones para la evolución de un sistema: con una se modela la dinámica (evolución en el tiempo) del comportamiento de las conexiones entre pares de elementos (enlaces) en el sistema, con la otra se modela la correlación entre cada par de elementos en el sistema.

**Medida de desempeño** Se propone una medida de desempeño para la sincronización a nivel local la cual permite cuantificar numéricamente el nivel de sincronización local.

## 1.9 ESTRUCTURA DE LA TESIS

En el capítulo 2 se da una breve introducción a las redes complejas, la herramienta elegida en este trabajo (sección 2.2), y a la sincronización, nuestro objetivo (sección 2.2). Posteriormente, en la sección 2.4 se introduce brevemente la sincronización en redes complejas. Finalmente, este capítulo concluye con el modelo de Kuramoto en la sección 2.5, en éste se basa el presente trabajo.

En el capítulo 3 presentamos la formulación del modelo propuesto para lograr los objetivos propuestos. Describimos las medidas tanto de sincronización como de caracterización topológica empleadas.

Los experimentos son presentados en el capítulo 4. En el capítulo 5 presentamos la justificación del porqué en algunos casos el modelo propuesto no converge como en el resto de los casos.

En el capítulo 6 damos las conclusiones y comentamos brevemente algunas líneas de investigación futuras que pueden dar lugar a nuevas aportaciones como consecuencia de los resultados obtenidos.

## CAPÍTULO 2

# MARCO TEÓRICO

---

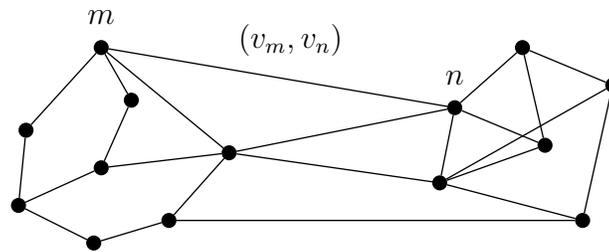
Es importante tener conocimiento previo sobre la terminología que se usará de aquí en adelante para entender la metodología propia de nuestro trabajo. Así que en la sección 2.1 se describen los conceptos y términos necesarios para un mejor entendimiento de temas como las redes complejas y la sincronización; las cuales se introducen en la sección 2.2 y en la sección 2.3. Tras estos dos temas se da una breve introducción sobre la sincronización en redes complejas en la sección 2.4. Por último se presenta en la sección 2.5 el modelo de Kuramoto, modelo en el cual está basado el modelo propuesto en la metodología de solución.

## 2.1 DEFINICIÓN DE CONCEPTOS

**Red:** Una *red*  $\mathcal{G}$  consiste de un conjunto de puntos  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  llamados *nodos o vértices*, y un conjunto de parejas ordenadas  $E = \{(v_m, v_n) \in V \times V\}$ , donde cada pareja ordenada  $a_{mn} = (v_m, v_n)$  se llama *enlace o arista* del nodo  $v_m$  al nodo  $v_n$ . Se suele denotar por  $N$  la cardinalidad de  $V$  y por  $M$  la cardinalidad de  $E$ .

**Red ponderada:** Cuando los enlaces de una red tienen asignado un peso  $w_{mn}$ , la red se llama *ponderada*.

**Red dirigida:** Los enlaces tienen *dirección* del nodo  $v_m$  (punto inicial) al nodo  $v_n$  (punto final).



**Figura 2.1:** A cada enlace  $(v_m v_n)$  se le puede asignar un peso  $w_{mn}$ .

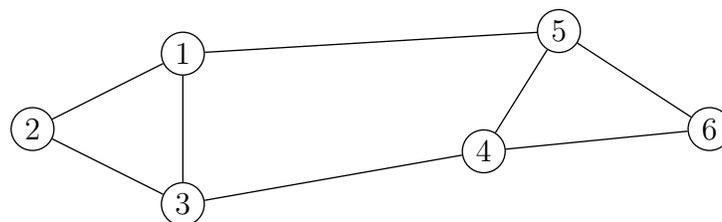
**Red no dirigida:** Se dice que la red es *no dirigida* si para cada pareja  $(v_m, v_n) \in E$  también existe la pareja  $(v_n, v_m) \in E$ .

**Enlaces o nodos adyacentes:** Dos *enlaces* son *adyacentes* si tienen un nodo en común; dos *nodos* son *adyacentes* si están unidos por una enlace.

**Incidencia:** Un enlace  $a_{mn}$  es incidente a un nodo si lo une a otro.

**Matriz adyacente:** Si  $\mathcal{G}$  es una red con  $N$  nodos, la matriz adyacente  $\mathbf{A}$  tiene dimensiones  $N \times N$ , cuyo elemento  $a_{mn}$  es uno si existe el enlace  $(v_m, v_n)$  y cero en otro caso,  $m = n = 1, 2, \dots, N$  (la Figura 2.2 muestra un ejemplo). Obsérvese, que por definición, para redes no dirigidas  $\mathbf{A}$  es una matriz simétrica.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

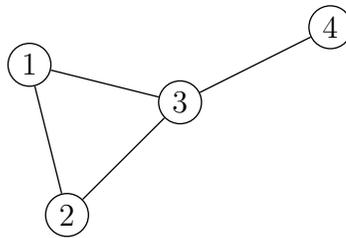


**Figura 2.2:** Grafo de seis nodos y su matriz adyacente asociada.

**Grado de un nodo:** Es el número de enlaces incidentes a un nodo  $m$ . En términos de la *matriz adyacente*:

$$k_m = \sum_{n=1}^N a_{mn}. \quad (2.1)$$

De forma alternativa se puede decir que el grado es el número de *vecinos* que tiene el nodo  $m$ . Se llama *vecino* del nodo  $m$  a cualquiera de sus nodos adyacentes. A veces  $k_m$  también es llamada *conectividad* del nodo  $v_m$ . A los nodos con grado cero se les llama nodos *aislados*. En la Figura 2.3 los grados correspondientes son:  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 3$ ,  $k_4 = 1$ .



**Figura 2.3:** El grado para cada uno de los nodos del grafo es:  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 3$ ,  $k_4 = 1$ .

El *grado promedio* es

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N k_m. \quad (2.2)$$

También es conocido como *conectividad* de la red.

**Camino:** Es una sucesión finita en la que aparecen alternadamente nodos y enlaces de una red. Los nodos extremos son los nodos final e inicial del camino, y la longitud de éste es el número de enlaces que contiene. Como ejemplos de camino podemos mencionar los siguientes:

**Camino euleriano:** Es un camino que contiene todos los enlaces, apareciendo una sola vez cada uno. Una red que admite este camino se denomina *red euleriana*, y sus nodos tienen grado par o dos de los nodos tienen grado impar.

**Ciclo:** Es un camino cerrado donde los únicos nodos repetidos son el primero y el último.

**Camino hamiltoniano:** Es un camino simple en el que todos los nodos aparecen exactamente cada uno una sola vez. Un ciclo que a su vez es un camino hamiltoniano se denomina ciclo hamiltoniano, y una red que contiene un ciclo hamiltoniano se denomina *red hamiltoniana*.

**Distancia entre dos nodos:** Número de enlaces que están en el camino más corto entre los nodos.

**Red completa:** Red en la que cada par de nodos está conectado por un enlace. Si una red tiene  $N$  vértices, el número de enlaces es  $M = \frac{N(N-1)}{2}$ .

**Red regular:** Red en la que todos los nodos tienen el mismo grado, es decir, el mismo número de vecinos.

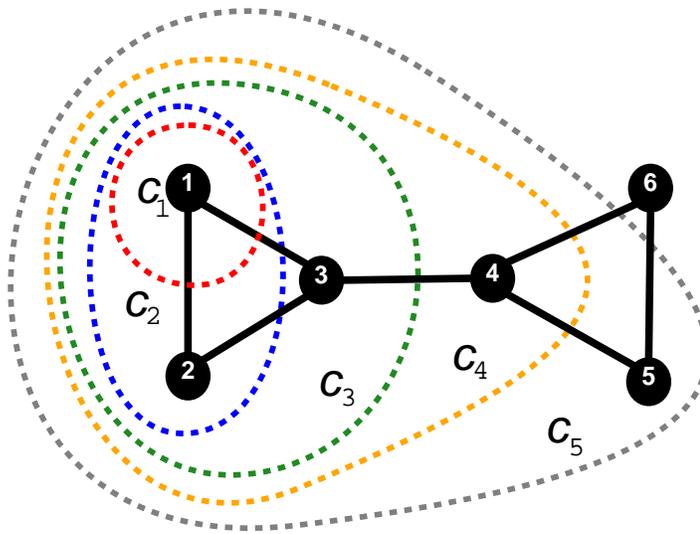
**Red conexa:** Si existe un camino entre cualesquiera dos nodos se dice que la red  $G$  es *conexa*.

**Modularidad** Dada una red, se puede definir una partición de sus nodos en dos o más grupos, llamados *módulos o comunidades*. La modularidad es una medida de la calidad de esta partición. Cuando en una red los nodos se pueden asignar a subconjuntos disjuntos en los que existen muchos enlaces entre ellos, pero pocos con el resto, la modularidad tiene un valor alto. Cuando no es posible encontrar dicha partición, la modularidad es baja [Newman, 2006]. Matemáticamente, la modularidad de una partición se define como la fracción de enlaces entre nodos del mismo grupo menos la fracción de enlaces que se obtendrían en una red con el mismo número de nodos y enlaces, pero con estos últimos distribuidos de forma aleatoria entre todos los posibles pares de nodos. Es decir, si  $c_m$  es el grupo al que está asignado el nodo  $v_m$  y la red tiene  $\mathcal{M}$  enlaces, la modularidad  $Q$  se calcula como:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2M} \sum_{m,n} \left( a_{mn} - \frac{k_m k_n}{2M} \right) \delta(c_m, c_n), \quad (2.3)$$

donde  $k_m$  es el grado del nodo  $v_m$ ,  $a_{mn} = 1$  cuando existe un enlace entre los nodos  $m$  y  $n$ , y  $a_{mn} = 0$  en caso contrario;  $\delta$  es la delta de Kronecker, es uno si los nodos  $v_m$  y  $v_n$  están en el mismo grupo y es menos uno en caso contrario. Los grupos de  $v_m$  y  $v_n$  son denotados por  $c_m$  y  $c_n$ .

Por ejemplo, en la Figura 2.4 se muestra una red con  $N = 6$  y  $M = 7$ , se definen cinco comunidades las cuales son  $c_1 = \{v_1\}$ ,  $c_2 = \{v_1, v_2\}$ ,  $c_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $c_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $c_5 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . Para cada una de las comunidades se denota por  $\mathcal{M}_{c_1} = -0.0816$ ,  $\mathcal{M}_{c_2} = 0.2449$ ,  $\mathcal{M}_{c_3} = 0.7143$ ,  $\mathcal{M}_{c_4} = 0.2449$  y  $\mathcal{M}_{c_5} = -0.0816$ , respectivamente, la modularidad calcula con la ecuación 2.3.



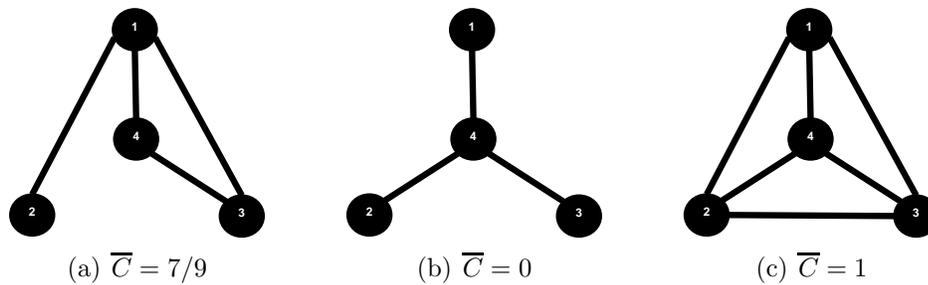
**Figura 2.4:** Modularidad  $\mathcal{M}$  para cinco comunidades definidas en una red con seis nodos y siete aristas.  $\mathcal{M}_{c_1} = -0.0816$ ,  $\mathcal{M}_{c_2} = 0.2449$ ,  $\mathcal{M}_{c_3} = 0.7143$ ,  $\mathcal{M}_{c_4} = 0.2449$  y  $\mathcal{M}_{c_5} = -0.0816$ .

Es importante mencionar que cualquier método para maximizar la modularidad se basa en buscar las comunidades existentes en la red, por lo cual al maximizar la modularidad se identifica la partición óptima de comunidades. Aquí es importante resaltar que se muestra que tan modular es la red para cinco ejemplos de comunidades de las  $6! = 20$  que se pueden definir. A simple vista se observa que la partición óptima es para la comunidad  $c_3$  en la cual la máxima modularidad es  $\mathcal{M}_{c_3} = 0.7143$ .

**Coefficiente de agrupamiento:** Watts and Strogatz [1998] definen el agrupamiento local  $C_m$  del nodo  $v_m$ , como

$$C_m = \frac{2L}{k_m(k_m - 1)}, \quad (2.4)$$

donde  $L$  es el número de enlaces que conectan los  $k_m$  vecinos del nodo  $m$ , y  $k_m(k_m - 1)/2$  es el número total de posibles enlaces entre los vecinos. Este coeficiente se define solo para los nodos con grado mayor que uno y siempre es un número entre cero y uno. Cuando  $C_m = 1$  significa que todos los vecinos del nodo  $m$  se enlazan entre ellos, y cuando  $C_m = 0$  implica que no hay enlaces entre ellos. El coeficiente de agrupamiento  $\bar{C}$  es el promedio de los agrupamientos locales de todos los nodos en la red.

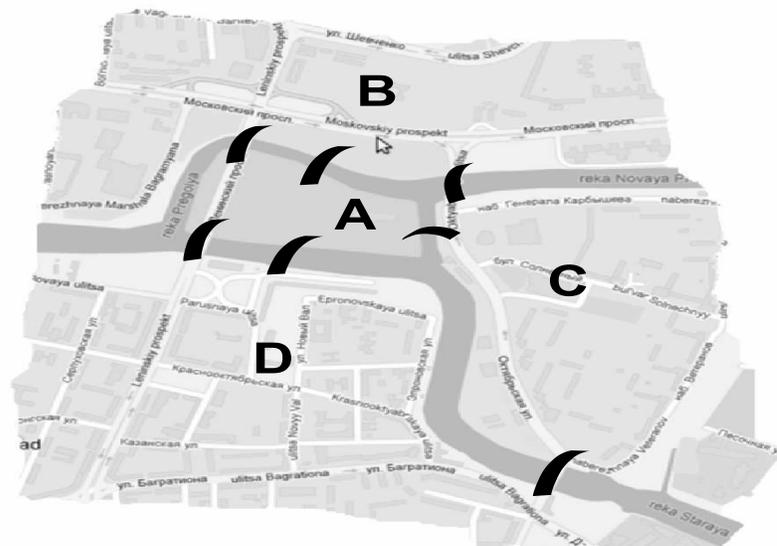


**Figura 2.5:** El agrupamiento local  $C_m$  y el coeficiente de agrupamiento  $\bar{C}$  son calculados para tres ejemplos simples. (a)  $C_{m=1,2,3,4} = \{1/3, \text{NA}, 1, 1\}$  y  $\bar{C} = 7/9$ . (b)  $C_{m=1,2,3,4} = \{\text{NA}, \text{NA}, \text{NA}, 0\}$  y  $\bar{C} = 0$ . (c)  $C_{m=1,2,3,4} = \{1, 1, 1, 1\}$  y  $\bar{C} = 1$  [Almendral, 2006], donde NA significa que no aplica la medida.

## 2.2 REDES COMPLEJAS

El *problema de los siete puentes de Königsberg* es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la *teoría de grafos*. Königsberg es el antiguo nombre de la ciudad rusa de Kaliningrado, que durante el siglo XVIII formaba parte de Prusia Oriental, como uno de los ducados del Reino de Prusia. Esta ciudad es atravesada por el río Pregolya, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo el terreno en

cuatro regiones distintas, como se muestra en la Figura 2.6, y que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados puente del herrero, puente conector, puente verde, puente del mercado, puente de madera, puente alto y puente de la miel.

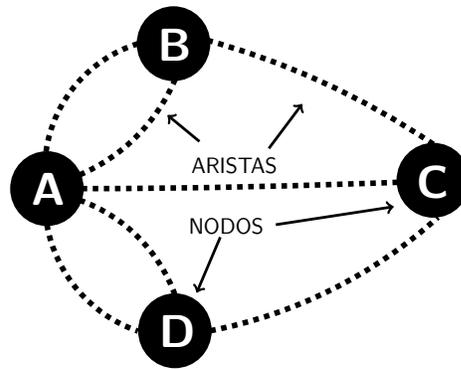


**Figura 2.6:** Mapa en el que se indica donde estaban los siete puentes en Königsberg en la época de Leonhard Euler.

El problema de los siete puentes fue motivado por la curiosidad, cuando los ciudadanos se interesaron en saber si era posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes recorriendo una sola vez cada uno y regresando al mismo punto de partida.

Haciendo uso de la teoría de grafos el mapa de las cuatro regiones en que está dividida la ciudad de Königsberg es representado como se observa en la Figura 2.7 tan solo este cambio de perspectiva fue suficiente para que Euler demostrara que no era posible.

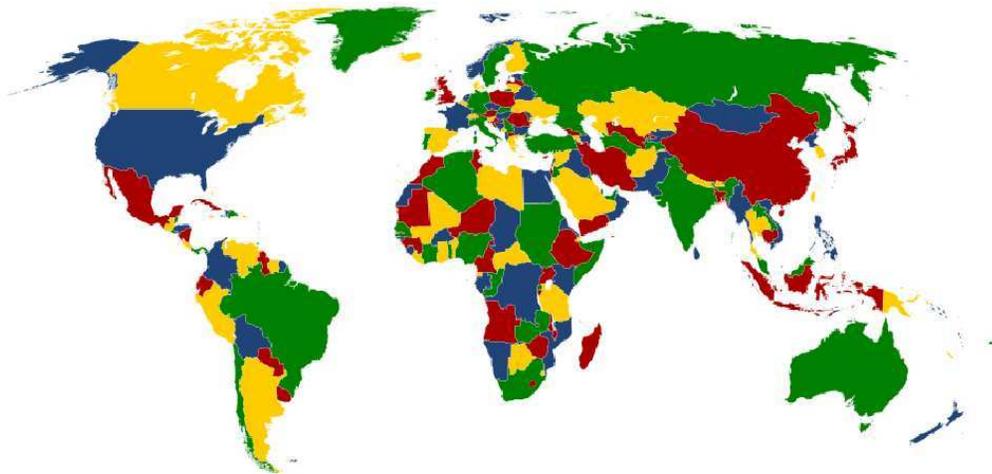
Tras la muerte de Euler, la teoría de grafos recibió muchas contribuciones de matemáticos como Hamilton, Kirchoff o Cayley, que se centraron en estudiar las propiedades de los *grafos regulares*. De hecho, existen varios términos usados en grafos con el nombre de estos autores: *camino hamiltoniano*, *grafo de Cayley* (que



**Figura 2.7:** En la Figura 2.6 marcamos con **A**, **B**, **C** y **D** los puntos del mapa que serán los nodos y los puentes marcados en negro son los enlaces en el *grafo*.

representa la estructura de un grupo) o el *teorema de Kirchhoff* (sobre el número de árboles de expansión en un grafo).

Más tarde, en 1852 Francis Guthrie planteó el *problema de los cuatro colores*. En este problema se plantea si es posible colorear cualquier mapa de países usando solamente cuatro colores de tal manera que dos países vecinos nunca tengan el mismo color; c.f Figura 2.8, y cuya solución pasa por representar los países con nodos y las fronteras entre ellos con enlaces.



**Figura 2.8:** Mapa coloreado con cuatro colores.

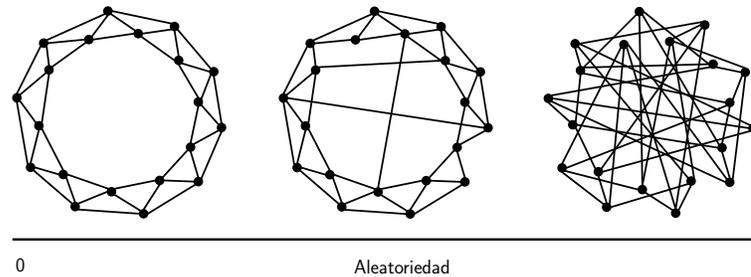
El estudio de grafos regulares resolvió muchos e interesantes problemas pero nadie se planteó la importante cuestión de cómo surgen las redes. Es decir, la aproximación a las redes era estática, nadie se preguntaba qué tipo de proceso dinámico

genera una red. Solo en 1959 ese problema recibió el tratamiento adecuado de la mano del prolífico matemático Pául Erdős.

Paul Erdős y su colega, Alfréd Rényi, propusieron un modelo en el que los enlaces de una red aparecían con cierta probabilidad  $p$ . Hoy día, la red resultante de ese proceso se conoce con el nombre de *grafo aleatorio*. El principal resultado que obtuvieron fue que existe una probabilidad crítica  $p_c \sim 1/N$ , por encima de la cual, la mayoría de los  $N$  nodos de la red están conectados. Nótese que el número de enlaces que hay que introducir para conectar  $N$  nodos es aproximadamente  $p_c N^2 \sim N$  (esto es, incluso para redes grandes, la probabilidad de enlazar dos nodos no debe ser muy alta para conseguir enlazarlos a casi todos ellos).

Aunque Erdős y Rényi intuyeron que su modelo podría explicar la evolución de redes reales, aquellas que se observan en la naturaleza, no llegaron a comprobarlo. Si lo hubieran hecho, habrían descubierto que las redes aleatorias no coinciden con las reales. Un estudio detallado de las redes aleatorias muestra que estas redes tienen un coeficiente de agrupamiento pequeño y una distancia media pequeña, en tanto que las redes reales presentan un coeficiente de agrupamiento alto y una distancia media pequeña.

En 1998 Duncan Watts y Steven Strogatz presentaron un modelo simple acerca de la estructura de redes, intentando justificar la conectividad en el problema de la sincronización de los chirridos de los grillos, los cuales muestran un alto grado de coordinación sobre distancias largas (como si los insectos estuvieran “invisiblemente” conectados). El trabajo de Watts and Strogatz [1998] no terminó en una nueva contribución a la teoría de sincronización, sino que dio inicio a la teoría moderna de redes complejas. Mostraron que a partir de una red regular la adición al azar de un pequeño número de enlaces reduce la distancia entre los nodos drásticamente; cf. Figura 2.9. Y como las redes regulares se caracterizan por tener un coeficiente de agrupamiento alto, conseguían simultáneamente una pequeña distancia media entre nodos, como sucede en las redes reales.



**Figura 2.9:** En el modelo de Watts y Strogatz, que transforma una red regular en una red aleatoria, aparece un tipo de red en la que la distancia entre los nodos se reduce manteniendo un coeficiente de agrupamiento alto.

Esta característica es conocida como efecto de “mundo pequeño” (*en inglés: small world, SW*) y fue reportada por primera vez en un experimento realizado por Travers and Milgram [1969], el cual consistió en examinar la longitud de ruta promedio para redes sociales de personas en Estados Unidos.

Muy pronto se descubrió que la naturaleza de muchos de los patrones de interacción que se observan en diversos escenarios, como en la Internet, la World Wide Web, redes de colaboración científica y redes biológicas [Barabási and Albert, 1999, Barabási and Oltvai, 2004], presentaban propiedades que el modelo de Watts y Strogatz no era capaz de reproducir. La mayoría de estos escenarios mostraron que la distribución de los grados seguía una ley de potencias. Por tratarse de una distribución en la que la media no coincide con el máximo, no tiene una escala característica, y por ello han sido llamadas *redes libres de escala*. Los nodos más conectados, llamados centros en este trabajo (*en inglés: hubs*), están mucho más conectados de lo que los modelos de Erdős-Rényi o Watts-Strogatz pueden explicar.

Esta complejidad estructural provocó un gran desarrollo de trabajos, principalmente en la comunidad de los físicos, ya que este conjunto completamente nuevo de medidas, modelos y técnicas que se necesitaban para estas *estructuras topológicas* ya existían en la física estadística.

En particular, los físicos Albert-László Barabási y Réka Albert propusieron un modelo (BA) que generaba la distribución de los grados observados en redes reales. Dicho modelo utilizaba el principio de “los ricos se enriquecen” (*en inglés: rich get*

*richer*), que aplicado a las redes complejas recibe el nombre de *enlace preferente*. Este resultado dice que, para obtener una red libre de escala, es necesario que una red crezca añadiendo nuevos enlaces a nuevos nodos, de modo que los centros reciban los nuevos enlaces con mayor probabilidad [Barabási et al., 2004].

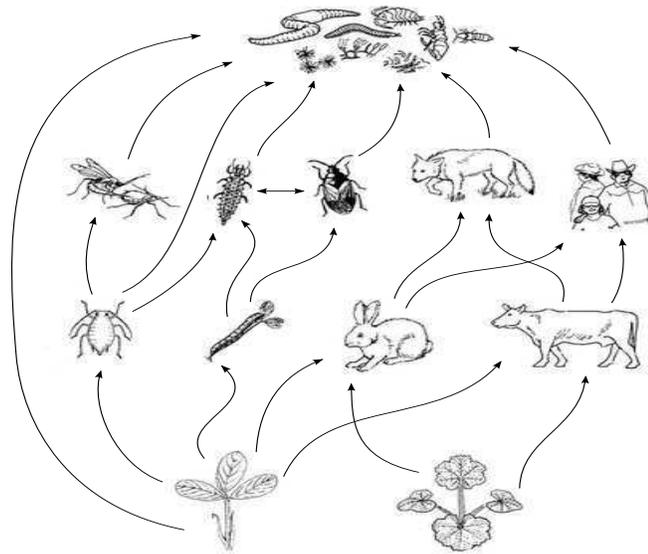
Sin embargo, se ha constatado que las redes reales tienen una estructura modular (están organizadas en comunidades) pero el modelo BA no. Como se explica en la introducción, es bien conocido que la modularidad es una característica esencial para comprender el funcionamiento de una red. Es importante destacar que hasta el modelo de BA, las redes evolucionan sin tener en cuenta la dinámica interna de los nodos. Es cuando se incluye la dinámica que la modularidad revela su importancia. Generar la modularidad por medio de argumentos topológicos es fácil, pero poco realista. Falta aún una teoría que genere esta modularidad teniendo en cuenta la misma dinámica para la que luego la modularidad será importante [Newman, 2006].

## 2.3 SINCRONIZACIÓN

El fenómeno de *sincronización* es uno de los fenómenos más atractivos de carácter cooperativo. Podemos observar procesos de sincronización en sistemas biológicos, químicos, físicos y sociales. Este fenómeno ha atraído el interés de muchos científicos durante siglos [Acebrón et al., 2005]. Un ejemplo paradigmático es el parpadeo sincrónico de las luciérnagas que se observa en algunos bosques del sur de Asia. Por las noches multitudes de luciérnagas sobre los árboles comienzan a emitir destellos de luz. Inicialmente emiten la luz incoherentemente, pero después de un período corto de tiempo todas las luciérnagas destellan en armonía, creando un efecto visual sorprendente.

La relevancia de la sincronización ha sido frecuentemente enfatizada aunque ésta no siempre ha sido completamente entendida. En el caso de las luciérnagas los destellos sincrónicos pueden facilitar el cortejo entre machos y hembras. En muchos otros casos la función biológica de la sincronización está aún en discusión. Por otro

lado, la asincronía podría conducir a un desastre o extinción, con lo cual diferentes especies en la misma cadena trófica, cf. Figura 2.10, pueden desarrollar diferentes ritmos circadianos para aumentar su probabilidad de supervivencia [Strogatz, 2003].

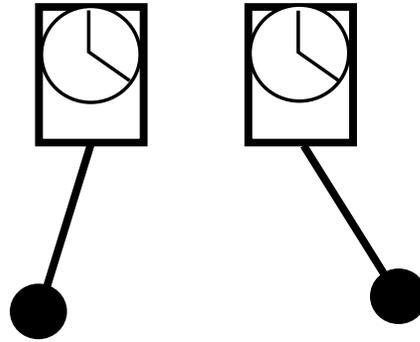


**Figura 2.10:** Diferentes especies en la misma cadena trófica.

Las investigaciones sobre los fenómenos de sincronización se centran inevitablemente en determinar el mecanismo principal responsable de la conducta colectiva sincrónica entre los miembros de una población dada.

Para obtener una actividad global y coherente se requiere la interacción de elementos oscilatorios. La actividad rítmica de cada elemento puede deberse al proceso de fuentes internas o externas, como estímulos o fuerzas externas. Incluso si los procesos internos responsables de la ritmicidad tienen diferentes orígenes físicos o bioquímicos, (los cuales pueden ser muy complejos), se puede llegar a entender la esencia de la sincronización en términos de unos pocos principios básicos.

Los fenómenos de sincronización se han investigado desde los principios de la física. En el siglo XVI, Christian Huygens descubrió que dos relojes de péndulo colgados en la misma pared (c.f. Figura 2.11) sincronizaban perfectamente sus oscilaciones de fase.



**Figura 2.11:** Dos relojes de péndulo en una pared pueden sincronizarse.

Existen diferentes maneras de atacar este problema. Supongamos que la actividad rítmica de cada elemento es descrita en términos de una variable física que evoluciona regularmente en el tiempo. Cuando cada variable alcanza un cierto *umbral*, los elementos emiten una pulsación, la cual es transmitida a todos sus vecinos. Después, un mecanismo de *reajuste* inicializa el estado de este elemento. Así un nuevo ciclo empieza otra vez. Esencialmente el comportamiento de cada elemento es similar al de un *oscilador*. Asumiendo que el ritmo tiene un cierto período, es conveniente introducir el concepto de *fase*, una medida de en qué instante del ciclo que se repite periódicamente está el oscilador. El efecto del pulso emitido es alterar el estado actual de los vecinos modificando sus períodos, haciéndolos más largos o más cortos. Esta perturbación depende del estado actual del oscilador (i.e., de su fase) que recibe el impulso externo (i.e., la perturbación implica un cambio de fase). El análisis del comportamiento colectivo del sistema puede realizarse bajo dos condiciones:

- i) el cambio de fase inducido por un impulso es *independiente* del número de impulsos que llegan entre impulsos del individuo afectado en un intervalo y
- ii) la llegada de un impulso afecta el período de un intervalo de tiempo actual, pero la memoria se pierde instantáneamente y el comportamiento en intervalos futuros no es afectado.

También se han estudiado los efectos de la sincronización considerando conjuntos de osciladores no lineales que se mueven en ciclos límite de atracción con amplitud

constante. Éstos son los llamados *osciladores de fase* o *ciclo límite*. Acoplándolos débilmente se asegura que ninguna perturbación puede llevar a algún oscilador fuera del ciclo límite global, por lo que solo se requiere de un grado de libertad para describir la evolución de la dinámica global del sistema.

El primer escenario de osciladores acoplados a pulso es quizás el más intuitivo, directo y más fácil de modelar. Sin embargo, la naturaleza discreta y no lineal de acoplamiento a pulsos da lugar a importantes complicaciones matemáticas. Tratar con pocos elementos acoplados a pulso puede ser sencillo en el marco de los sistemas dinámicos, mientras que la descripción es mucho más complicada para un gran número de dichos elementos.

Proponer un modelo para un segundo escenario del ciclo límite da un amplio margen para la investigación, lo cual nos obliga a considerar modelos con tiempo continuo e interacciones específicas no lineales entre los osciladores y éstos son matemáticamente tratables.

Ahora se sabe que los modelos considerados con las propiedades anteriormente mencionadas (*tiempo e interacciones*) son excepcionales. Winfree [1967, 2001] se dio cuenta de que la sincronización se puede entender como un proceso de umbral. Cuando el acoplamiento entre los osciladores es bastante fuerte, una fracción macroscópica de éstos se sincroniza con una frecuencia común. El modelo que propuso fue difícil de resolver, aunque se ha encontrado una versión que tiene solución [Ariaratnam and Strogatz, 2001].

Al inicio, la atención se dedicó a la sincronización de sistemas periódicos, mientras que recientemente la búsqueda de sincronización se ha trasladado a los sistemas *caóticos* [Boccaletti et al., 2002]. Cuando se acoplan elementos caóticos, pueden llevar a cabo diferentes fenómenos de sincronización completa o idéntica [Hirokazu and Yamada, 1983, Afraimovich et al., 1986, Pecora and Carroll, 1990], sincronización de fase [Rosenblum et al., 1996, Rosa et al., 1998], sincronización con retardo [Zaks et al., 1999], sincronización generalizada [Rulkov et al., 1995, Kocarev and Parlitz,

1996], sincronización con retardo intermitente [Rosenblum et al., 1996, Boccaletti et al., 2000], sincronización de fase imperfecta [Zaks et al., 1999], y “casi” sincronización [Femat and Solís-Perales, 1999].

La *sincronización completa o idéntica* es la forma más simple de sincronización y consiste en un *perfecto enganche* de las trayectorias de sistemas caóticos idénticos en el transcurso del tiempo. En cambio, la sincronización generalizada considera sistemas no idénticos en los que el comportamiento de unos es una función dada de la salida de otros [Rulkov et al., 1995, Kocarev and Parlitz, 1996]. Los osciladores no idénticos acoplados pueden alcanzar el régimen de sincronización de fase, en el cual un bloque de las fases se produce sin una correlación importante asociada a las amplitudes [Rosenblum et al., 1996].

La sincronización con retraso implica el acotamiento asintótico de la diferencia entre la salida de un sistema para el tiempo  $t$  y la salida de otro desplazada en el tiempo por un lapso de tiempo  $\tau_{\text{lag}}$  [Rosenblum et al., 1997].

Este último fenómeno también puede ocurrir intermitentemente, dando lugar a la sincronización de retraso intermitente, donde los sistemas acoplados están la mayor parte del tiempo verificando la condición para la sincronización de retraso, pero persistentes ráfagas de comportamiento local *asíncrono* pueden afectar intermitentemente sus dinámicas [Rosenblum et al., 1997, Boccaletti and Valladares, 2000].

Análogamente, la sincronización de *fase imperfecta* es el régimen en el que las fases se deslizan intermitentemente dentro de un proceso de sincronización de fases [Zaks et al., 1999].

La continuación de estos trabajos ha investigado fenómenos de sincronización, mediante pruebas en sistemas experimentales o naturales, para estudiar los mecanismos que conducen a la falta de sincronización [Barreto et al., 2000, Barreto and So, 2000], y para definir la unificación de criterios formales que podrían abarcar dentro del mismo marco los diferentes fenómenos de sincronización [Boccaletti et al., 2001].

## 2.4 SINCRONIZACIÓN EN REDES COMPLEJAS

Durante más de una década hemos sido testigos de la evolución del campo de las redes complejas, sobre todo desde el punto de vista estático, a pesar de que se han hecho numerosos intentos para caracterizar las propiedades dinámicas de las redes complejas. Una de las consecuencias dinámicas, conocida desde los orígenes de las redes complejas, es el fenómeno emergente de la sincronización de una población de unidades con un comportamiento oscilante. El análisis de los procesos de sincronización se ha beneficiado del avance sobre el entendimiento de la topología de las redes complejas, y esto ha contribuido al entendimiento de sus propiedades emergentes [Boccaletti et al., 2006, Arenas et al., 2008].

Históricamente el estudio de la sincronización comenzó tratando de entender este proceso en el contexto de las redes neuronales biológicas. Los primeros estudios fueron realizados en osciladores acoplados mediante una red de interacciones regular. Más allá de las diferencias con la concepción actual de una red compleja, las topologías estudiadas por Niebur et al. [1991] pueden ser consideradas como una primera aproximación que revelan cómo la complejidad de la conectividad afecta a la sincronización. Niebur et al. [1991] utilizaron una red cuadrada geométrica para la construcción de tres sistemas con diferente conectividad: el primero fue conectividad con los cuatro vecinos más cercanos, el segundo conectividad de Gauss truncada en  $2\sigma$ , y el tercero es una conectividad aleatoria poco densa. Con sus resultados mostraron que los enlaces de largo alcance conducen a fases “muy cercanas” entre los osciladores más rápida y robustamente que los enfoques de acoplamiento con los vecinos más cercanos o conexiones localmente densas. Estas observaciones son la raíz de resultados recientes acerca de sincronización en redes complejas de osciladores [Arenas et al., 2008].

Winfrey [1967] estudió la dinámica no lineal de una gran población de osciladores de ciclo límite acoplados débilmente con frecuencias naturales que fueron distribuidas en torno a algún valor medio de acuerdo a una determinada distribución

de probabilidad. Lo más importante fue que consideró osciladores biológicos como osciladores de fase haciendo a un lado la amplitud; descubrió que una población de osciladores no idénticos puede presentar un notable fenómeno de cooperación [Arenas et al., 2008]. Cuando la varianza de la distribución de las frecuencias es grande, los osciladores evolucionan cada uno de forma incoherente cerca de su frecuencia natural. Este comportamiento se mantiene cuando la varianza es reducida hasta cruzar un cierto umbral. Por debajo de este umbral los osciladores se empiezan a sincronizar espontáneamente [Winfrey, 2001]. Este modelo fue resuelto analíticamente hace poco tiempo [Ariaratnam and Strogatz, 2001].

El trabajo de Winfree estimuló el campo de la sincronización colectiva y el uso de enfoques matemáticos para resolver el problema. Uno de estos enfoques considera un sistema formado por una gran población de osciladores débilmente acoplados, casi idénticos y con una interacción de ciclo límite. La fase de cada oscilador está influenciada por la fase de otros osciladores, y los cambios del ritmo de éstos es de acuerdo a cierta función [Acebrón et al., 2005, Strogatz, 2000].

A finales de los 80's, Strogatz and Mirollo [1988] y más tarde Niebur et al. [1991], estudiaron la sincronización colectiva de osciladores de fase no lineales con frecuencias naturales aleatorias bajo una variedad de sistemas de acoplamiento en redes en dos dimensiones [Arenas et al., 2008]. Posteriormente, se trabajó con osciladores cuya topología de interacciones eran redes libres de escala o redes de mundo pequeño [Nishikawa et al., 2003, Lago-Fernández et al., 2000, Gade and Hu, 2000, Jost and Joy, 2001, Hong et al., 2002, Kwon and Moon, 2002].

Más tarde se han concentrado principalmente en fenómenos de sincronización completa de sistemas no lineales idénticos, ya que éstos permiten un enfoque analítico. En los sistemas no lineales idénticos, un problema importante es evaluar las condiciones para la estabilidad del comportamiento síncrono de una topología de red cualquiera y para una configuración de acoplamiento genérico. Esto se logra con un método muy potente llamado *técnica de la función general de estabilidad* (en inglés: *master stability function*) [Pecora and Carroll, 1998].

Como resultado de estos trabajos, ahora se sabe que una población de osciladores exhibe una dinámica análoga a una transición de fase en equilibrio. Cuando las frecuencias naturales de los osciladores son muy diferentes en comparación con la fuerza de acoplamiento, no son capaces de sincronizar sus fases y el sistema se comporta de forma incoherente. Sin embargo, si el acoplamiento es suficientemente fuerte, todos los osciladores alcanzan a sincronizarse. La transición de asincronía a sincronía se realiza al alcanzar un determinado umbral. Al alcanzar el umbral algunos de los osciladores bloquean su fase relativa y se desarrollan grupos de nodos sincronizados dando lugar al inicio de la sincronización. Después de esto la población de osciladores se divide en un estado parcialmente sincronizado, formado por osciladores que han bloqueado sus fases, y un grupo de nodos cuyas frecuencias naturales son demasiado diferentes como para ser parte del conjunto coherente (sincronizado). Finalmente, después de incrementar el acoplamiento poco a poco, el resto de los nodos son arrastrados en torno a la fase media del ritmo colectivo generado por toda la población y el sistema se establece en un estado completamente sincronizado [Arenas et al., 2008].

Actualmente existen resultados para tres tipos diferentes de osciladores: osciladores de ciclo límite *modelo de Kuramoto*, modelos acoplados a pulso y sistemas de mapas acoplados. La sección 2.5 la dedicamos a una breve revisión de osciladores de ciclo límite, *modelo de Kuramoto*, que es el elegido en este trabajo.

## 2.5 MODELO DE KURAMOTO

El *modelo de Kuramoto*, propuesto por Yoshiki Kuramoto, es un modelo matemático para describir fenómenos de sincronización. Específicamente modela el comportamiento de sistemas de muchos osciladores *acoplados*. En la forma más habitual del modelo, se considera que cada oscilador tiene su propia frecuencia natural (o intrínseca)  $\Omega_m$  y cada uno está acoplado igualmente al resto de osciladores [Kuramoto, 1975, 1984]. Formalmente, dada una población de  $N$  *osciladores de fase*

*acoplados*, la fase del  $m$ -ésimo oscilador, denotada por  $\theta_m$ , evoluciona en el tiempo de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\dot{\theta}_m = \Omega_m + \frac{\sigma}{N} \sum_{n=1}^N \sin(\theta_n - \theta_m), \quad (2.5)$$

donde  $\sigma$  es la fuerza de acoplamiento entre los osciladores, que comúnmente se considera constante. Las frecuencias son distribuidas de acuerdo a alguna función  $g(\Omega)$ , la cual usualmente se asume como unimodal y simétrica respecto a su frecuencia media  $\bar{\Omega}$ .

Cada oscilador intenta evolucionar independientemente con su propia frecuencia, mientras que la fuerza de acoplamiento  $\sigma$  tiende a sincronizar cada uno con los demás. El término  $1/N$  es un factor de normalización que se introduce por conveniencia de manera que los resultados teóricos que se explican a continuación, ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9, no dependan del tamaño de la red.

El modelo fue motivado por el comportamiento de ciertos osciladores químicos y biológicos, y permite modelar la sincronización y la asincronía en grupos de osciladores acoplados. La limitada variedad de estados en los que el modelo se puede encontrar lo hace apropiado para el modelado de algunos sistemas de la neurociencia.

La dinámica colectiva de toda la población es medida por el parámetro de orden complejo macroscópico:

$$r(t)e^{i\phi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i\theta_n(t)}, \quad (2.6)$$

donde el módulo  $0 \leq |r(t)| \leq 1$  mide la coherencia de las fases de la población y  $\phi(t)$  es la fase promedio. Los valores  $r \simeq 1$  y  $r \simeq 0$  describen los límites en los cuales todos los osciladores están acoplados en fase o se mueven de forma incoherente, respectivamente y  $\simeq$  representa las fluctuaciones de tamaño  $O(N^{\frac{1}{2}})$ . Multiplicando ambos lados de la ecuación (2.6) por  $e^{-i\theta_m}$  e igualando las partes imaginarias como

explican Arenas et al. [2008], se tiene que la ecuación (2.5) se puede escribir como:

$$\dot{\theta}_m = \Omega_m + \sigma r \sin(\phi - \theta_m), \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, N. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) establece que cada oscilador interactúa con el resto solo a través de las cantidades  $r$  y  $\phi$ . La cantidad  $r$  proporciona un ciclo de retroalimentación positiva para el ritmo colectivo del sistema: a medida que  $r$  incrementa porque la población se vuelve más coherente, el acoplamiento entre los osciladores se fortalece y más de ellos acaban entrando en el grupo sincronizado.

También, la ecuación (2.7) permite calcular un valor de acoplamiento  $\sigma_c$  crítico por su influencia en la dinámica colectiva. Para la búsqueda de soluciones estables se asume que  $r(t)$  y  $\phi(t)$  son constantes asintóticamente. Al establecer  $\phi = 0$  se llega a las ecuaciones de movimiento [Kuramoto, 1975, 1984]:

$$\dot{\theta}_m = \Omega_m - \sigma r \sin(\theta_m), \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

En el largo plazo la solución de la ecuación (2.8) revela dos tipos de comportamiento cuando el acoplamiento es mayor al valor crítico  $\sigma_c$ . Por un lado, para un grupo de osciladores verificando  $|\Omega_m| \leq \sigma r$ , sus fases son muy parecidas. Por otro lado, el resto de los osciladores, para los cuales  $|\Omega_m| > \sigma r$ , se mantienen a la deriva alrededor de un ciclo, algunas veces acelerando y otras rotando con frecuencias bajas.

Al imponer algunas condiciones para la distribución estacionaria de los osciladores a la deriva con frecuencias  $\Omega_m$  y fases  $\theta_m$  [Strogatz, 2000, Arenas et al., 2008], se puede derivar una ecuación de auto-consistencia

$$r = \sigma r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta) g(\omega) d\theta,$$

donde  $\omega = \sigma r \sin(\theta)$ . Esta ecuación admite la solución no trivial para  $r > 0$

$$\sigma_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (2.9)$$

---

La ecuación (2.9) es la expresión del acoplamiento crítico en la aproximación de campo medio, la cual indica que por encima de  $\sigma_c$  el sistema siempre alcanza la sincronización, es decir, se tiene una transición de no sincronización a sincronización.

## CAPÍTULO 3

# METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

---

En este capítulo, en la sección 3.1 se presenta el modelo propuesto para la formación topológica y sincronización de redes, el cual está basado en el modelo de Kuramoto descrito en el capítulo anterior. En la sección 3.2 se presentan las medidas de grado de sincronización tanto global como local y en la sección 3.3 se presentan las medidas usadas para la caracterización de la estructura topológica de las redes.

### 3.1 FORMULACIÓN DEL MODELO

En redes complejas distintos trabajos han buscado las condiciones necesarias para la aparición de la sincronización en la estructura de la escala local o en las propiedades macroscópicas. Sin embargo, no se ha logrado describir adecuadamente las características más importantes que los sistemas complejos presentan ya que frecuentemente exhiben una organización en *módulos*.

Hasta hace poco tiempo, se reconoció que la organización modular es fundamental para la manera en que un sistema complejo se desenvuelve, por lo que nos hemos interesado en estudiar cómo surge este rango intermedio, dado que en las redes reales se encuentra esta estructura modular, aunque hasta ahora no se sabe cómo es que surge.

Con el modelo que se propone se estudia la dinámica de sincronización, global y local, en redes ponderadas y no dirigidas a través de una versión modificada del

*modelo de Kuramoto* presentado en la sección 2.5 del capítulo 2. En este modelo cada nodo (oscilador)  $v_m$ , con  $m = 1, 2, \dots, N$ , es caracterizado por una fase angular  $\theta_m(t)$  y una frecuencia natural  $\Omega_m$ . La fuerza de acoplamiento  $\sigma$  se considera constante para todos los nodos y se ha introducido el peso  $w_{mn}$  correspondiente al enlace entre el nodo  $v_m$  y el nodo  $v_n$  en el segundo término de la ecuación (2.5). Como se explicará más adelante en detalle, la introducción de  $w_{mn}$  dará lugar a una evolución en la cual los pesos, o tienden asintóticamente a cero, es decir tienden a ser eliminados, o tienden asintóticamente a uno, y en este caso los enlaces son reforzados, y se acaba obteniendo una matriz de adyacencia.

La dinámica de cada nodo evoluciona en el tiempo de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\dot{\theta}_m = \Omega_m + \underbrace{\frac{\sigma}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} w_{mn} \sin(\theta_n - \theta_m)}_{(3.1.1)}, \quad (3.1)$$

donde  $\mathcal{N}$  es el conjunto de nodos que son vecinos del nodo  $v_m$  y el término (3.1.1) es un acoplamiento difusivo, ya que contiene una diferencia de fases entre nodos, en el que  $(\sigma/N) \times w_{mn}$  es la intensidad del acoplamiento.

La evolución en el tiempo de los pesos  $w_{mn}$ 's se ha definido mediante una ecuación que depende de la medida de correlación  $p_{mn}$ , propuesta en este trabajo, entre las dinámicas de los nodos  $v_m$  y  $v_n$ , de la siguiente manera:

$$\dot{w}_{mn} = (p_{mn} - p_c)w_{mn}(1 - w_{mn}), \quad (3.2)$$

donde  $p_c$  es la correlación umbral que determina si un peso es reforzado (cuando  $p_{mn} > p_c$ ) o debilitado (cuando  $p_{mn} < p_c$ ). La medida de correlación propuesta entre cada par de nodos es definida como:

$$p_{mn} = \frac{1}{2} |e^{i\theta_m(t)} + e^{i\theta_n(t)}|,$$

la cual es equivalente a:

$$p_{mn} = \left| \cos \left( \frac{\theta_m - \theta_n}{2} \right) \right|. \quad (3.3)$$

De esta forma, cuando dos nodos están sincronizados, es decir cuando  $\theta_m = \theta_n$ ,  $p_{mn}$  resulta en un valor de uno y si dos nodos tienen dinámicas anti-correladas, es decir cuando  $\theta_m = \theta_n + \pi$ , se obtiene un valor 0 para  $p_{mn}$ ; y en otros casos,  $p_{mn}$  está entre cero y uno.

Se ha elegido la ecuación (3.1) porque hasta donde se tiene conocimiento es la más sencilla que da lugar a una dinámica en los enlaces con dos atractores. Concretamente, la dinámica de los enlaces tiene dos posibles estados asintóticos, éstos son: 1) que la dinámica de los enlaces tienda a cero ó 2) que la dinámica de los enlaces tienda a uno.

Para ilustrar este comportamiento que tiene la ecuación (3.2) suponga que  $r = |p_{mn} - c|$  y que  $p_{mn} - p_c$  es mayor que cero y constante, entonces la ecuación (3.2) se escribe como:

$$\dot{w}_{mn} = rw_{mn}(1 - w_{mn}). \quad (3.4)$$

En este caso, la solución para la ecuación (3.4) es dada por:

$$w_{mn}(t) = \frac{w_{mn}(0)}{w_{mn}(0) + [1 - w_{mn}(0)]e^{-rt}}, \quad (3.5)$$

donde  $w_{mn}(0)$  es el valor del peso en el instante de tiempo  $t = 0$ . Observe que cuando  $t$  crece  $e^{-rt} \rightarrow 0$  y en consecuencia  $[1 - w_{mn}(0)]e^{-rt} \rightarrow 0$ . Por tanto, se puede ver que  $w_{mn}(t)$  tiende a uno conforme  $t$  crece.

Ahora, si se supone que  $p_{mn} - p_c$  es negativa y constante se tiene que la solución para la ecuación (3.4) es:

$$w_{mn}(t) = \frac{w_{mn}(0)}{w_{mn}(0) + [1 - w_{mn}(0)]e^{rt}}. \quad (3.6)$$

Igualmente,  $w_{mn}(0)$  es el valor del peso en el instante de tiempo  $t = 0$ . En este caso, observe que cuando  $t$  crece  $e^{rt} \rightarrow \infty$  y con esto  $[1 - w_{mn}(0)]e^{rt} \rightarrow \infty$ . Entonces, se puede ver que  $w_{mn}(t)$  tiende a cero conforme  $t$  crece, ya que  $w_{mn}(0)$  es mayor que cero y menor que uno.

En este trabajo, como  $p_{mn} - p_c$  no es constante sino que cambia con el tiempo, la ecuación (3.2) no es integrable analíticamente pero sí numéricamente. No obstante el comportamiento de la ecuación (3.2) es esencialmente el mismo que presentan las ecuaciones (3.5) y (3.6). Basta con pensar que el peso en un instante de tiempo  $t + \Delta t$  se escribe aproximadamente así:

$$w_{mn}(t + \Delta t) \approx \frac{w_{mn}(t)}{w_{mn}(t) + [1 - w_{mn}(t)]e^{-(p_{mn} - p_c)\Delta t}}, \quad (3.7)$$

es decir, el peso tiende a irse a cero cuando  $p_{mn} - p_c$  es negativa y se acerca a uno cuando  $p_{mn} - p_c$  es positiva.

Note que en los párrafos anteriores se necesita que los pesos estén entre cero y uno. En este trabajo no se considera el caso de pesos negativos porque el acoplamiento (3.1.1) es de tipo difusivo y los pesos negativos no tienen sentido para este tipo de acoplamiento. Un acoplamiento difusivo depende de la diferencia entre las variables dinámicas (las fases en este trabajo), de tal forma que las variables tienden a homogeneizarse, es decir, aquellas que tienen un valor mayor tienden a “bajar” y las que tienen un valor menor tienden a “subir”. En un proceso antidifusivo sucedería lo contrario, tendería a “quitar” a las variables con valor bajo y a “dar” a las variables con valor alto, lo cual es un comportamiento inusual y por esta razón existen muy pocos trabajos en la literatura que consideran este caso.

Por otra parte, considerar pesos positivos pero mayores que uno sí tiene sentido, pero en este caso siempre es posible renormalizarlos para garantizar que siempre sean menores que uno, por ejemplo dividiendo cada uno de los pesos por el peso mayor, el cual se puede conocer por motivos teóricos o experimentales. Esta posibilidad añade

un parámetro más al modelo, que sería el peso máximo, pero cualitativamente el comportamiento del modelo sería el mismo al que se presenta en este trabajo.

## 3.2 MEDIDAS DE SINCRONIZACIÓN

Dado el interés en medir el nivel de sincronización se han implementado las siguientes medidas para cuantificar éste a escala global y local. Tales medidas permiten saber que tan bien sincronizada esta una red en ambas escalas. Para medir el nivel de sincronización global se implementó el parámetro de orden global  $R^G$  [Kuramoto, 1984, Arenas et al., 2006, Arenas and Díaz-Guilera, 2007], el cual se define como:

$$\begin{aligned} R^G &= \left\langle \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \right| \right\rangle_t \\ &= \left\langle \frac{1}{N} \sqrt{\left( \sum_{n=1}^N \cos(\theta_n(t)) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N \sin(\theta_n(t)) \right)^2} \right\rangle_t, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $\langle \cdot \rangle_t$  es el promedio en el tiempo. Se optó por aplicar este parámetro para medir el nivel de sincronización global dado que es un parámetro que ha mostrado dar buenos resultados para éste nivel [Kuramoto, 1984, Boccaletti et al., 2002, 2006, Arenas et al., 2006, 2008, Acebrón et al., 2005, Strogatz and Mirollo, 1988]. Este parámetro fue propuesto por Kuramoto para medir la convergencia de todos los nodos a una dinámica común.

Respecto al parámetro de orden local  $R_m^L$  para medir la sincronización al nodo  $v_m$ , al consultar Arenas et al. [2008] el cual a su vez se basa en Restrepo et al. [2005] que define el parámetro de orden local como:

$$r_m e^{i\phi_m} = \sum_{n=1}^N a_{mn} \langle e^{i\theta_n} \rangle_t, \quad (3.9)$$

donde  $\langle \dots \rangle_t$  denota el promedio en el tiempo,  $r$  mide la coherencia de los vecinos de  $m$ , con  $0 \leq r \leq 1$ ,  $\phi_m$  es la fase promedio y  $a_{mn}$  es uno si los nodos  $v_m$  y  $v_n$  están conectados y cero en otro caso. Matemáticamente la definición que da Restrepo solo tiene sentido de forma asintótica en el tiempo cuando  $t \rightarrow \infty$ . En esta medida el promedio temporal se hace sobre cada exponencial individual lo cual hace que la ecuación (3.9) valga cero computacionalmente. En el trabajo de Restrepo et al. [2005] se estudia la transición de la incoherencia a la coherencia en redes (de gran tamaño) de osciladores de fase acoplados. Presentan varias aproximaciones que describen el comportamiento de un parámetro de orden definido adecuadamente pasada la transición (de no sincronización a sincronización) y la generalización de los resultados para la fuerza de acoplamiento crítico. El parámetro definido adecuadamente es la ecuación (3.9) y está definido de tal manera que les permite alcanzar sus propósitos, pero computacionalmente no es un parámetro útil.

Nuestro interés es medir el nivel de sincronización local en cada instante de tiempo, así que, desde un punto de vista computacional la medida mencionada no es adecuada y se propone un parámetro de orden local que puede ser evaluado como interesa, este se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R_m^L &:= \left\langle \left| \frac{\sum_{n=1}^N w_{mn} e^{i\theta_n(t)}}{\sum_{n=1}^N w_{mn}} \right| \right\rangle_t \\ &:= \left\langle \frac{1}{\sum_{n=1}^N w_{mn}} \sqrt{\left( \sum_{n=1}^N w_{mn} \cos \theta_n(t) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N w_{mn} \sin \theta_n(t) \right)^2} \right\rangle_t. \end{aligned}$$

El grado promedio sobre esta medida para obtener el nivel promedio de sincronización local en la red como un todo para un tiempo dado es:

$$R^L := \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N R_m^L. \quad (3.10)$$

Este parámetro mide el grado de similitud de las dinámicas de un nodo con sus vecinos. Obsérvese que es posible que una red exhiba una pobre sincronización global pero una buena media de sincronización local.

### 3.3 MEDIDAS DE CARACTERIZACIÓN TOPOLÓGICA

Dado el carácter mono-estable de la evolución de los pesos en el modelo propuesto, la red final se puede describir mediante su matriz de adyacencia en la cual solo hay ceros y unos. La ausencia de pesos en la red final permite utilizar medidas propias de las redes no ponderadas y no dirigidas, las cuales están bien definidas siempre, algo que no sucede para las redes con pesos.

La *modularidad* es una característica estructural de las redes, que mide que tan separable en módulos o comunidades es una red. Las redes que tienen una medida alta de modularidad tienen conexiones densas entre los nodos que están dentro de cada uno de los módulos, mientras que las conexiones entre los módulos son escasas. La modularidad se usa frecuentemente en los métodos de optimización para detectar estructuras de comunidades en redes, como es en nuestro caso.

Para cuantificar la modularidad se ha empleado la siguiente medida definida en el capítulo 2, ecuación (2.3), propuesta por Newman [2006]:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2M} \sum_{mn} \left( a_{mn} - \frac{k_m k_n}{2M} \right) \delta(c_m, c_n). \quad (3.11)$$

Otra característica estructural importante que se ha considerado es la *asortatividad*, la cual es el coeficiente de correlación de Pearson entre el grado de un nodo y el grado medio de sus vecinos. Cuando este coeficiente es cercano a uno significa que los nodos de grado alto tienden a estar conectados con otros nodos de grado alto. Por el contrario, se tiene un coeficiente cercano a menos uno cuando nodos de grado alto tienden a conectarse con nodos de grado bajo. Valores del coeficiente de asortatividad alrededor de cero implican que los nodos están conectados independientemente del

grado que tengan. Para medir esta característica se hace uso del cálculo de dos formas diferentes para su validación. La primera forma es la medida de asortatividad  $\mathcal{A}$  propuesta por Newman [2002]:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sigma_q^2} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} kl (e_{kl} - q_k q_l), \quad (3.12)$$

donde  $k$  y  $l$  son respectivamente el grado del nodo  $v_k$  y  $v_l$ ,  $q_l$  es la distribución del grado residual la cual se puede obtener de la distribución de grado  $p_l$  como

$$q_l = \frac{(l+1)p_{l+1}}{\sum_{k=1}^{N-1} kp_k}.$$

Finalmente,  $e_{kl}$  es la distribución de probabilidad conjunta de los grados residuales entre pares de nodos, es decir los grados de los nodos sin contar el enlace que los une, y que en nuestro caso es simplemente el grado total menos uno;  $\sigma_q^2$  es la varianza asociada a la distribución de las  $q_k$  con  $k = 1, \dots, N-1$ .

La segunda forma para cuantificar la correlación de grado consiste en calcular el grado promedio de los vecinos de un nodo con grado  $k$  como [Pastor-Satorras et al., 2001]:

$$k_{nn}(k) := \sum_{k'} k' P(k'|k), \quad (3.13)$$

donde  $P(k'|k)$  es la probabilidad condicional para un nodo con grado  $k$  que tenga un vecino con grado  $k'$ . Si  $k_{nn}(k)$  es una función creciente monotónicamente, entonces la red es asortativa. Así, esta segunda alternativa se puede calcular como:

$$k_{nn} = \frac{\sum_{m=1}^N k_m \cdot \sum_{m=1}^N \bar{k}_m^{v_m} - N \cdot \sum_{m=1}^N k_m \cdot \bar{k}_m^{v_m}}{\left( \sum_{m=1}^N k_m \right)^2 - N \cdot \sum_{m=1}^N k_m^2}. \quad (3.14)$$

El grado promedio  $\bar{k}$  del nodo  $v_m$  se calcula como:

$$\bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N k_m. \quad (3.15)$$

El grado promedio de los vecinos  $\bar{k}_m^{v_m}$  del nodo  $v_m$  se calcula como:

$$\bar{k}_m^{v_m} = \frac{1}{k_m} \sum_{n \in \mathcal{V}} k_n, \quad (3.16)$$

donde  $\mathcal{V}$  es el conjunto de vecinos del nodo  $v_m$  y  $k_n$  se define como la ecuación (2.1) en la página 13. El promedio de la ecuación 3.16 es:

$$\bar{k}^{\mathcal{V}} = \sum_{m=1}^N \bar{k}_m^{v_m}. \quad (3.17)$$

En el siguiente capítulo se explica como se han realizado los experimentos y se exponen los resultados que se obtienen para las medidas de eficiencia de sincronización y las propiedades estructurales.

## CAPÍTULO 4

# EXPERIMENTOS COMPUTACIONALES

---

En la sección 4.1 se explica cómo se realizan los experimentos. Se definieron tres familias,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de condiciones iniciales para los pesos  $w_{nm}$ 's y las frecuencias naturales  $\Omega_m$ . Se explica cómo han sido seleccionados los valores de la fuerza de acoplamiento en cada familia y se da el conjunto de los valores de correlación, que es el mismo para las tres familias. En la sección 4.2 se describe brevemente como se ha realizado la implementación numérica y en la sección 4.3 se muestran los resultados obtenidos para las medidas de sincronización, global y local, y las medidas para la caracterización de las propiedades topológicas de las redes, las cuales han sido dadas en capítulo 3.

### 4.1 DISEÑO EXPERIMENTAL

En el modelo propuesto hay dos parámetros destacados: la correlación crítica  $p_c$  y la fuerza de acoplamiento  $\sigma$ . Considerando una red con  $N$  nodos (osciladores), la evolución de las ecuaciones del modelo requiere definir  $N$  fases iniciales  $\theta_m^0$ ,  $N$  frecuencias naturales  $\Omega_m^0$  y  $N(N-1)/2$  pesos iniciales  $w_{mn}^0$ . Además, se tiene que fijar la fuerza del acoplamiento  $\sigma$  y la correlación crítica  $p_c$ . Estos dos parámetros no solo determinan la topología de la red final, sino también el tipo de comportamiento, es decir la dinámica, en el estado estable final.

Consecuentemente, los experimentos han sido preparados para estudiar en detalle el impacto de las posibles combinaciones entre la fuerza de acoplamiento y la correlación crítica; ésto se ha repetido para diferentes condiciones iniciales.

En el modelo presentado, las frecuencias naturales determinan la rapidez con que los osciladores se mueven, así que se ha buscado que éstos no vayan tan rápido ni tan lento en comparación con la convergencia de los enlaces. Si las frecuencias naturales van rápido la convergencia de los enlaces llega tarde, es decir, en lo que un oscilador da una vuelta un enlace se ha modificado muy lentamente y aquí se quiere que en lo que ésto ocurre el enlace se modifique, pero que no lo haga de forma ni muy lenta ni muy rápida.

La zona adecuada para definir las condiciones iniciales es que estén alrededor de uno, de esta forma se tendrán escalas de tiempo comparables, es decir, que en este tiempo el cambio de los enlaces afectará al comportamiento de los osciladores. Una escala de tiempo, es un intervalo de tiempo que se toma para que se aprecie un cambio. Por ejemplo, la escala de tiempo de vida en años de los seres humanos en comparación con la de las montañas es tan pequeña que no percibimos los cambios que éstas muestran.

Para cubrir la necesidad de que las escalas de tiempo de los nodos y los enlaces sean comparables y probar el modelo con diferentes condiciones iniciales se han definido tres familias de éstas, familia *A*, familia *B* y familia *C*, para las cuales los pesos y las frecuencias naturales han sido inicializadas con diferentes distribuciones.

En las tres familias las condiciones iniciales de los pesos están en el intervalo  $(0, 1)$  ya que en este modelo se quiere que los enlaces tiendan a cero o a uno, es decir a una matriz de adyacencia. Sin embargo, esta tendencia se puede definir para cualquier otro par de números no negativos, de modo que no hay pérdida de generalidad en esta condición. Así mismo, basados en los trabajos de otros autores, que muestran que las fases iniciales no son importantes en el estado final, éstas son

siempre elegidas de forma aleatoria en el intervalo  $(0, 2\pi)$ . Así que, las condiciones iniciales para las frecuencias y los enlaces son definidos de la siguiente manera:

Familia A: se usa una función unimodal para la distribución de las frecuencias naturales.

- Las frecuencias naturales  $\Omega_m$  son elegidas aleatoriamente en el intervalo  $(0.8, 1.2)$  con una función de probabilidad de distribución uniforme.
- Los pesos  $w_{mn}$  han sido elegidos en el intervalo  $(0, 1)$  con una distribución uniforme.

Familia B: se usa una función unimodal para la distribución de las frecuencias naturales.

- Las frecuencias naturales  $\Omega_m$  han sido elegidas con una función de distribución normal de media 1.0 y desviación típica 0.1.
- Los pesos  $w_{mn}$  han sido seleccionados con una distribución siguiendo una ley de potencia cúbica<sup>1</sup>.

Familia C: las frecuencias naturales son bimodales.

- La mitad de las frecuencias naturales  $\Omega_m$  se han definido a 0.8 y el resto a 1.2.
- Todos los pesos  $w_{mn}$  se han inicializado a 0.5.

Para las tres familias los parámetros  $p_c$  y  $\sigma$  han sido estudiadas en detalle para los valores indicados a continuación, dado que son los valores de interés para estudiar el comportamiento del modelo. Para la correlación crítica se han fijado 37 valores,

---

<sup>1</sup>Una ley de potencias es un tipo especial de relación matemática entre dos cantidades. Aplicado a la estadística, si estas dos cantidades son la variable aleatoria y su frecuencia, en una función de distribución de ley de potencias, las frecuencias decrecen según un exponente cuando la variable aleatoria aumenta.

iniciando en 0.025 hasta 0.950 con incrementos de 0.025.

$$p_c := \{0.050, 0.075, 0.100, 0.125, 0.150, 0.175, 0.200, 0.225, \\ 0.250, 0.275, 0.300, 0.325, 0.350, 0.375, 0.400, 0.425, \\ 0.450, 0.475, 0.500, 0.525, 0.550, 0.575, 0.600, 0.625, \\ 0.650, 0.675, 0.700, 0.725, 0.750, 0.775, 0.800, 0.825, \\ 0.850, 0.875, 0.900, 0.925, 0.950\}.$$

Para seleccionar los valores de acoplamiento que finalmente se usan, se calculó numéricamente de forma aproximada el valor crítico de fuerza de acoplamiento para las familias  $A$  y  $B$ ,  $\sigma_c^A$  y  $\sigma_c^B$ , más adelante se explica porqué  $\sigma_c^C$  no puede ser aproximado. Además de haber hecho numerosas pruebas tentativas de estudio sobre el intervalo de valores del acoplamiento  $\sigma^A$ ,  $\sigma^B$  y  $\sigma^C$  para los cuales el modelo presenta la fase de transición “no sincronización–sincronización”. Es decir, se han elegido de tal manera que valores de acoplamiento a la izquierda no permiten sincronización y valores de acoplamiento a la derecha sí la permiten.

$$\sigma^A := \{0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}.$$

$$\sigma^B := \{0.10, 0.13, 0.15, 0.17, 0.18, 0.20, 0.22, 0.24, 0.26, \\ 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}.$$

$$\sigma^C := \{0.10, 0.13, 0.17, 0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.33, \\ 0.36, 0.40, 0.43, 0.46, 0.50, 0.53, 0.56, 0.60, 0.63, \\ 0.66, 0.70, 0.73, 0.76, 0.80\}.$$

En azul están marcados los valores que coinciden en  $\sigma^A$ ,  $\sigma^B$  y  $\sigma^C$ ; en rojo están marcados los valores que coinciden para  $\sigma^B$  y  $\sigma^C$ ; los valores que están en negro no coinciden para ninguno de los conjuntos de valores de fuerza de acoplamiento.

Dado que la convergencia de los pesos de los enlaces tiende asintóticamente a cero o a uno y como el sistema de ecuaciones propuesto solo converge a tiempo

infinito, es necesario introducir un criterio de parada. Para asegurar que el sistema ha alcanzado un estado computacionalmente estable, se impone que deben cumplirse a la vez las dos condiciones siguientes:

- (C-I) En primer lugar se define una tolerancia  $\epsilon = 0.001$  y se pide que todos los enlaces verifiquen cualquiera de los dos casos siguientes: que  $w_{mn} > 1 - \epsilon$  o que  $w_{mn} < \epsilon$ ; de esta forma la matriz de pesos tiende a ser una matriz adyacente.
- (C-II) En segundo lugar se requiere que  $\dot{w}_{mn} < \epsilon$  con lo que se verifica la estabilidad de la convergencia.

Cuando se alcanza una configuración en la que se satisfacen los dos criterios impuestos, se procede a redondear cada peso  $w_{mn}$  a su valor entero más cercano, cero o uno. Se ha encontrado que el modelo siempre satisface el criterio de parada a pesar de que el tiempo de convergencia depende de los valores específicos de  $p_c$  y  $\sigma$ , siendo en pocos casos uno o dos órdenes de magnitud más grande que otros.

## 4.2 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Dado que la ecuación (3.2) implica la integración de un polinomio cuadrático y la ecuación (3.1) es una suma de senos, y como ambas ecuaciones son funciones de buen comportamiento, continuas e infinitamente diferenciables, el proceso de integración computacional se ha realizado con el método de integración de Heun con un paso suficientemente pequeño [Mathews and Fink, 2004]. No obstante, como consecuencia del número de ecuaciones a integrar,  $N$  en la ecuación (3.1) y  $N(N - 1)/2$  en la ecuación (3.2), fue necesario usar un “cluster” informático de alto rendimiento. Para ello, el modelo propuesto fue programado en el lenguaje de programación C.

Para las medidas de la sincronización, local y global, y las medidas de caracterización de la estructura topológica se han calculado 100 repeticiones para cada combinación  $(p_c, \sigma)$ , con el objetivo de evitar fluctuaciones estadísticas. Para cada

una de estas 100 repeticiones, el sistema dinámico se evoluciona durante un tiempo transitorio hasta converger a un estado estable. Una vez que los enlaces han fijado su peso y las fases instantáneas se han sincronizado o no, se dejan evolucionar la ecuaciones durante cierto intervalo de tiempo para calcular las medidas, y poder hacer el promedio de las 100 repeticiones. Para las tres familias definidas el transitorio dura 50,000 unidades de tiempo y el intervalo de tiempo en el que se realizan las mediciones es de 50 unidades, las cuales deben compararse con las 5 – 7 unidades de tiempo que aproximadamente tardan los osciladores en completar un ciclo.

### 4.3 RESULTADOS

En esta sección se muestran los resultados para cada una de las familias sobre eficiencia de sincronización: global y local, y las propiedades topológicas: modularidad, asortatividad, grado promedio de la red y grado promedio de los vecinos. En ambos resultados se muestran tres subfiguras, (a), (b) y (c) para cada medida.

En las figuras en donde se muestran los resultados de sincronización global y local, modularidad, asortatividad, grado promedio de la red y grado promedio de los vecinos en la subFigura (a) cada punto  $(p_c, \cdot)$ , representa el promedio obtenido para la medida en cuestión y cada uno de estos promedios está representado en la subfigura por un color y una marca diferentes. El símbolo  $\cdot$  es respectivamente cada una de las medidas mostradas en la Tabla 4.1 o en la Tabla 4.2. Cada curva de puntos representa un valor de fuerza de acoplamiento en  $\sigma^A$ ,  $\sigma^B$  o  $\sigma^C$ , dependiendo de la familia en que se esté situado; cada uno de los puntos que están determinando estas curvas representa el valor promedio obtenido sobre las 100 repeticiones para cada valor de  $p_c$ .

En la subFigura (b) se muestra el promedio para cada combinación  $(\sigma, p_c)$  en escala de colores en un intervalo de cero a uno. Aquí se muestra una visualización diferente de los resultados mostrados en la subFigura (a) y en cada medida se especifica el intervalo correspondiente en que está mostrado el resultado.

**Tabla 4.1:** Simbología de las medidas de sincronización y topológicas para cada familia.

	Sincronización		Modularidad	Asortatividad		Grado promedio	
	Global	Local		Newman	Prueba	Nodo	Vecinos
Fam. $A$ :	$R_A^G$	$R_A^L$	$\mathcal{M}_A$	$\mathcal{A}_A$	$\mathcal{K}_A$	$\bar{k}_A$	$\bar{k}_A^{V_m}$
Fam. $B$ :	$R_B^G$	$R_B^L$	$\mathcal{M}_B$	$\mathcal{A}_B$	$\mathcal{K}_B$	$\bar{k}_B$	$\bar{k}_B^{V_m}$
Fam. $C$ :	$R_C^G$	$R_C^L$	$\mathcal{M}_C$	$\mathcal{A}_C$	$\mathcal{K}_C$	$\bar{k}_B$	$\bar{k}_C^{V_m}$

En la subFigura (c) se muestra el promedio para cada combinación  $(\sigma, p_c)$  en escala de colores el valor de la desviación estándar para cada familia. En este caso en cada medida se especifica el intervalo en que se muestra la desviación estándar.

**Tabla 4.2:** Simbología de la dispersión para cada familia.

	Sincronización		Modularidad	Asortatividad		Grado promedio	
	Global	Local		Newman	Prueba	Nodo	Vecinos
Fam. $A$ :	$S_A^G$	$S_A^L$	$S_A^M$	$S_A^A$	$S_A^K$	$S_A^{\bar{k}}$	$S_A^{V_m}$
Fam. $B$ :	$S_B^G$	$S_B^L$	$S_B^M$	$S_B^A$	$S_B^K$	$S_B^{\bar{k}}$	$S_B^{V_m}$
Fam. $C$ :	$S_C^G$	$S_C^L$	$S_C^M$	$S_C^A$	$S_C^K$	$S_C^{\bar{k}}$	$S_C^{V_m}$

### 4.3.1 EFICIENCIA DE SINCRONIZACIÓN

Antes de empezar a interpretar los resultados es importante mencionar que los valores de acoplamiento que hemos usado son valores puntuales para cada una de las familias, es decir, en ninguna de las tres familias,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , el acoplamiento toma valores continuos en algún intervalo.

#### 4.3.1.1 FAMILIA A

Para esta familia el conjunto de valores de fuerza de acoplamiento es  $\sigma^A := \{0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$  y las frecuencias naturales  $\Omega_A$  y los

pesos  $w_{mn}^A$  han sido elegidos aleatoriamente con una distribución uniforme en el intervalo  $(0.8, 1.2)$  y  $(0, 1)$ , respectivamente.

Obsérvese que para  $\sigma^A \in \{0.20, 0.22\}$  todos los promedios de  $R_A^G$  son bajos (ver Figura 4.1(a) o 4.1(b)), presentando un decrecimiento que no es muy notable conforme la correlación crítica  $p_c$ , entre un par de osciladores, es mayor. Para  $\sigma^A = 0.24$  podemos observar que para valores de  $p_c = 0.050$  hasta  $p_c = 0.475$  los promedios muestran un aumento significativo al compararlos con los promedios correspondientes a  $\sigma^A \in \{0.20, 0.22\}$ . A partir de  $p_c = 0.450$  vemos como todos los promedios tienden a decaer hasta llegar a ser muy parecidos a los correspondientes valores de acoplamiento 0.20 y 0.22. La diferencia entre estos valores de acoplamiento y 0.24 es debida a que nos estamos acercando al valor de acoplamiento crítico, denotado por  $\sigma_c^A$ , donde se da la transición de fase, el cual corresponde a  $\sigma_c^A = 0.26$ . Ahora observe los promedios correspondientes a  $\sigma_c^A$ ; en este caso se puede ver que la diferencia entre los promedios para este valor de acoplamiento con los promedios correspondientes a  $\sigma^A \in \{0.20, 0.22, 0.24\}$  y  $\sigma^A \in \{0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$  es más notable con respecto a los promedios para  $\sigma^A \in \{0.20, 0.22, 0.24\}$ .

Note en la Figura 4.1(a) que en el caso de  $\sigma_c^A$  conforme  $p_c$  es mayor los promedios decrecen, y en este caso el decrecimiento es más notable a partir de  $p_c = 0.450$  hasta  $p_c = 600$ , valor en que empiezan a estabilizarse los promedios. Ahora enfoquemos la atención en los valores de  $\sigma^A \in \{0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$ ; éstos son los valores de acoplamiento para los cuales el nivel de sincronización global  $R_g^A$  es bueno para un buen rango de valores de  $p_c$ , teniendo un comportamiento estable hasta cierto valor de  $p_c$ .

Observe como conforme  $\sigma^A$  toma valores más grandes la diferencia entre los promedios para un determinado valor de  $p_c$  es muy pequeña hasta el momento en que para cada valor de acoplamiento  $\sigma^A \in \{0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$  los promedios empiezan a decaer drásticamente, esta observación es más notable a partir de  $\sigma = 0.30$ , valor para el cual los promedios para  $p_c = 0.55$ ,  $p_c = 0.575$  y  $p_c = 0.6$  decrecen

con una diferencia muy marcada, y a partir de  $p_c = 0.625$  los promedios tienden a establecerse.

Para  $\sigma^A = 0.35$  los promedios correspondientes a  $p_c = 0.575$ ,  $p_c = 0.6$  y  $p_c = 0.625$  son para los que el decrecimiento es drástico, y a partir de  $p_c = 0.65$  los promedios se estabilizan. Para  $\sigma^A = 0.40$  el decrecimiento es para  $p_c = 0.6$ ,  $0.625$ ,  $0.65$  y  $0.675$  con tendencia a estabilizarse a partir de  $p_c = 0.7$ . Para el último valor de acoplamiento,  $\sigma = 0.60$ , el decrecimiento es para los valores de  $p_c = 0.7$ ,  $0.75$  y  $p_c = 0.775$ , así que en este caso los promedios a partir de  $p_c = 0.8$  ya no alcanzan a estabilizarse tanto como en los casos anteriores.

En la Figura 4.1(b) la zona roja representa los niveles altos de sincronización global correspondientes a  $\sigma^A \in \{0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$ . La zona verde corresponde a niveles medios de sincronización global para  $\sigma^A \in \{0.24, 0.26, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$ . En las zonas anaranjada y morada se observan los niveles de sincronización bajos para todos los valores de  $\sigma^A$ . En la tabla 4.3 se muestra en resumen cuáles son los valores de  $p_c$  en que se presenta el decrecimiento notablemente para cada valor de  $\sigma^A$  en el nivel de sincronización global  $R_A^G$ .

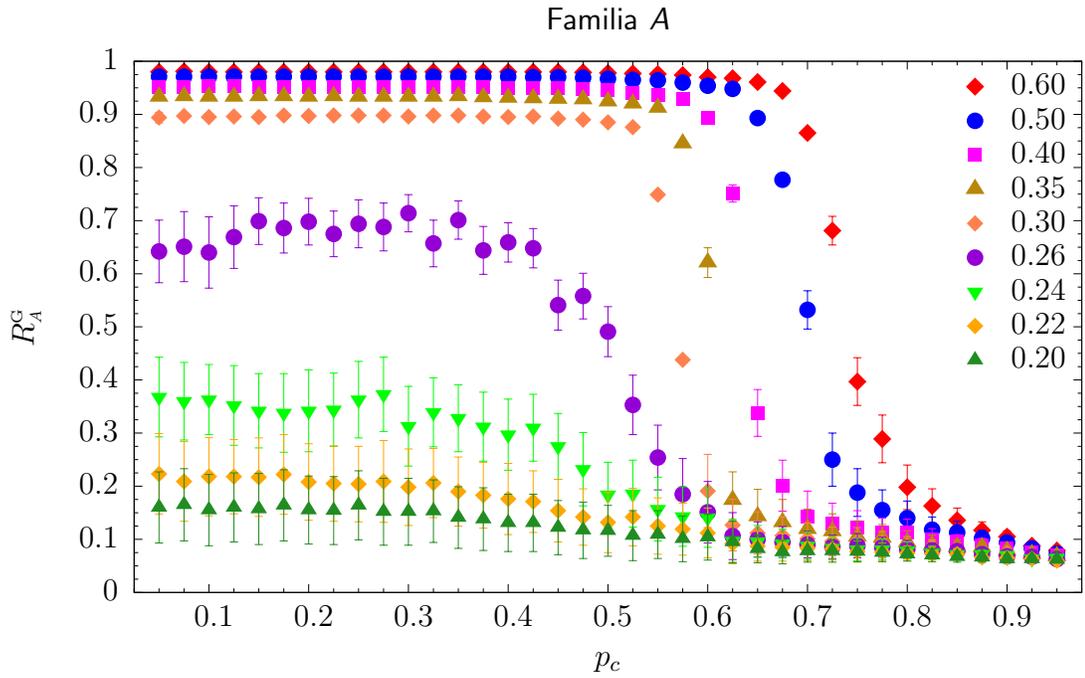
**Tabla 4.3:** Valores de  $p_c$  para los cuales se observa decrecimiento notable en el nivel de sincronización global  $R_A^G$ .

Para $\sigma^A$	0.24	0.26	0.30	0.35	0.40	0.50	0.60
Desde $p_c$	0.450	0.525	0.550	0.575	0.600	0.650	0.700
Hasta $p_c$	0.500	0.600	0.600	0.625	0.700	0.775	0.800

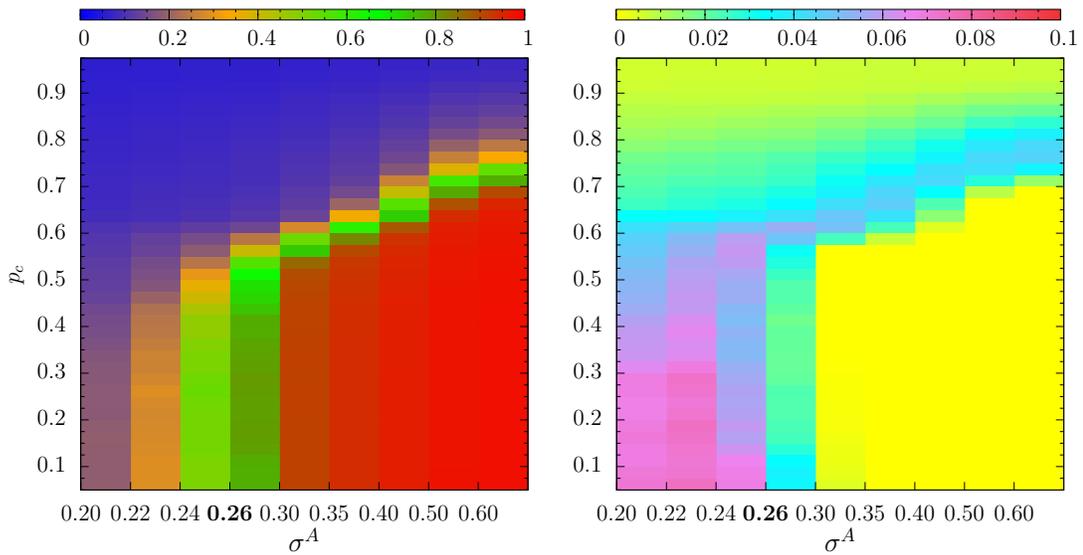
En la Figura 4.1(c) se visualiza la dispersión  $S_A^G$  de la misma manera que en la figura 4.1(b) se visualiza el promedio de  $R_A^G$  por cada pareja  $\{sF_A, p_c\}$ . Aquí se puede observar que para niveles altos de sincronización la dispersión  $S_A^G$  tiene variaciones pequeñas, muy cercanas a cero, lo cual es bueno ya que con seguridad se puede decir que para las combinaciones en la zona roja de la Figura 4.1(b) el nivel de sincronización es suficientemente bueno. Para  $\sigma^A \in \{0.20, 0.22\}$  e inclusive para algunas combinaciones de  $\sigma^A = 0.24$  es donde se da la mayor variación, lo cual no es muy

---

importante ya que esta zona corresponde a combinaciones para las cuales sabemos con anterioridad que la sincronización no está presente. La zona azul corresponde a valores de  $p_c$ , para cada valor de acoplamiento  $\sigma^A$ , en los cuales el decrecimiento es muy notable y la variación tiende a crecer.



(a) Promedio para  $R_A^G$  por cada valor de  $p_c$  y cada valor en  $\sigma^A$ .



(b) Paso de transición  $\sigma_c^A = 0.26$  para  $R_A^G$ .

(c) Dispersión  $S_A^G$  para  $R_A^G$ .

**Figura 4.1:** Sincronización global  $R_A^G$  con pesos distribuidos uniformemente en el intervalo  $(0, 1)$  y frecuencias naturales distribuidas uniformemente en el intervalo  $(0.8, 1.2)$ .

En la Figura 4.2 se muestran los resultados correspondientes al nivel de sincronización local  $R_A^L$ . Como se puede observar, el nivel de sincronización local tiene hasta cierto valor de correlación crítica  $p_c$  y para cada valor de acoplamiento  $\sigma^A$  el mismo comportamiento que el nivel de sincronización global; y a partir de un valor diferente de  $p_c$ , por cada valor de fuerza de acoplamiento  $\sigma^A$ , todos los promedios tiene un nivel mínimo de sincronización local y a partir de éste el nivel vuelve a mejorar.

A continuación se comentará por cada valor de acoplamiento cuál es el valor de  $p_c$  para el cual  $R_A^G$  y  $R_A^L$  tienen el mismo comportamiento. Obsérvese como para  $\sigma^A \in \{0.20, 0.22\}$  los promedios tienen un comportamiento estable llegando a tener un nivel mínimo de sincronización local en  $p_c = 0.625$ . Para  $\sigma^A = 0.24$  se observa que todos los promedios desde  $p_c = 0.050$  hasta  $p_c = 0.474$  tiene un incremento ligeramente marcado con respecto a los promedios para  $\sigma^A \in \{0.20, 0.24\}$ . Véase que para  $\sigma^A = 0.24$  el decrecimiento inicia en  $p_c = 0.450$  alcanzando un mínimo en  $p_c = 0.625$ .

En el caso de  $\sigma^A = 0.26$ , el valor de acoplamiento en el cual se da el cambio de transición de fase “no sincronización–sincronización”, se puede observar que al igual que en el nivel de sincronización global el decrecimiento inicia en  $p_c = 0.450$  llegando a tener un nivel mínimo de sincronización local en  $p_c = 0.625$ . Recuerde que a partir de este valor de acoplamiento,  $\sigma^A = 0.26$ , todos los valores de acoplamiento tienen un buen nivel de sincronización local  $R_A^L$  para intervalos grandes de  $p_c$ . El valor crítico de acoplamiento  $\sigma_c^A = 0.26$  es válido tanto para  $R_A^G$  como para  $R_A^L$ . Para  $\sigma^A \in \{0.30, 0.35\}$  tenemos que el decrecimiento es drástico a partir de  $p_c = 0.550$  y  $p_c = 0.575$ , respectivamente, con nivel mínimo de sincronización local en  $p_c = 0.625$  en ambos casos.

Como se puede observar, en  $p_c = 0.625$  el nivel de sincronización local  $R_A^L$  alcanza un nivel mínimo para  $\sigma^A = \{0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.35\}$ . A partir de este valor de  $p_c = 0.650$  el nivel promedio de sincronización local para  $\sigma^A = \{0.20,-$

$0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.35\}$  crece de manera que éste se recupera, lo cual no sucede en el caso del nivel de sincronización global  $R_A^G$ .

Para  $\sigma = \{0.40, 0.50\}$  observamos que el decrecimiento también es drástico a partir de  $p_c = 0.6$  y  $p_c = 0.65$ , respectivamente. En estos casos se alcanza un nivel mínimo de sincronización local  $R_A^L$  en  $p_c = 0.7$  y  $p_c = 0.75$ , respectivamente, e igual que en los casos anteriores el nivel de sincronización local se recupera aproximadamente al 64 %.

Para el valor de acoplamiento más alto  $\sigma^A = 0.60$  el decrecimiento inicia en  $p_c = 0.7$  llegando a alcanzar un nivel mínimo en  $p_c = 0.8$  y en este caso el nivel de sincronización local  $R_A^L$  se recupera a aproximadamente el 68 %.

Como se ha comentado antes, en la sincronización local hay valores de  $p_c$  en los cuales se tiene un nivel mínimo de sincronización y a partir de estos valores ésta se recupera; este fenómeno es debido a que justo unos valores antes de que se de el mínimo, en las redes empiezan a formarse módulos, razón por la cual la sincronización global se empieza a perder y la local empieza a recuperarse. Justo en las combinaciones donde se da el mínimo, no se tiene ninguno de los dos tipos de sincronización, ésto es porque cuando los módulos empiezan a aparecer, los nodos que los conforman aún no están sincronizados localmente, y globalmente la sincronización se ha empezado a perder justo unos valores antes de que la sincronización local sea mínima, sin recuperarse como en el caso de la sincronización local. No se recupera porque como empieza ha haber módulos en las redes, los nodos que los conforman empiezan a sincronizarse entre sí, de tal forma que cada módulo llega a estar sincronizado. Así, cada uno de los módulos formados tiene su propia sincronización y los enlaces que los unen no son suficientes para hacer que los módulos logren sincronizarse globalmente entre sí, pues cada uno lleva su propio ritmo.

En la Tabla 4.4 se muestra el intervalo de  $p_c$  en el cual los promedios muestran decrecimiento notable para  $\sigma_A \in \{0.24, 0.26, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$ .

**Tabla 4.4:** Valores de  $p_c$  para los cuales se observa decrecimiento notable en el nivel de sincronización local  $R_A^L$ .

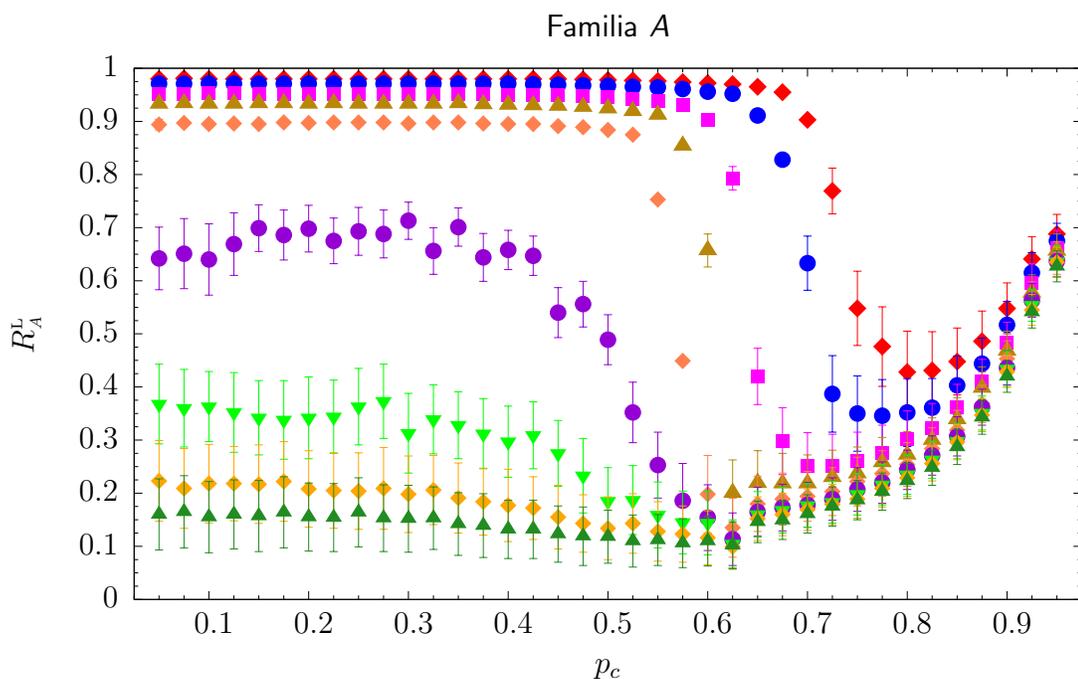
Para $\sigma^A$	0.24	0.26	0.30	0.35	0.40	0.50	0.60
Desde $p_c$	0.450	0.450	0.550	0.575	0.600	0.650	0.700
Hasta $p_c$	0.625	0.625	0.625	0.625	0.700	0.750	0.800

En la Figura 4.2(b) se visualiza el nivel promedio de sincronización local por cada combinación  $\{\sigma^A, p_c\}$ . La zona roja corresponde a los niveles más altos de sincronización local  $R_A^L$ . En la zona morada y anaranjada se observan los niveles más bajos y en la zona verde se observan los niveles intermedios de sincronización local  $R_A^L$ . Aquí también se puede observar como para todos los valores de acoplamiento  $\sigma^A$  y  $p_c = 0.9$ ,  $p_c = 0.925$  y  $p_c = 0.95$  el nivel de sincronización local  $R_A^L$  es recuperado. Para cada valor en  $\sigma^A$ , en la Tabla 4.5 se muestra cual es el nivel de sincronización local  $R_A^L$  que se recupera cuando la sincronización global  $R_A^G$  se ha perdido completamente.

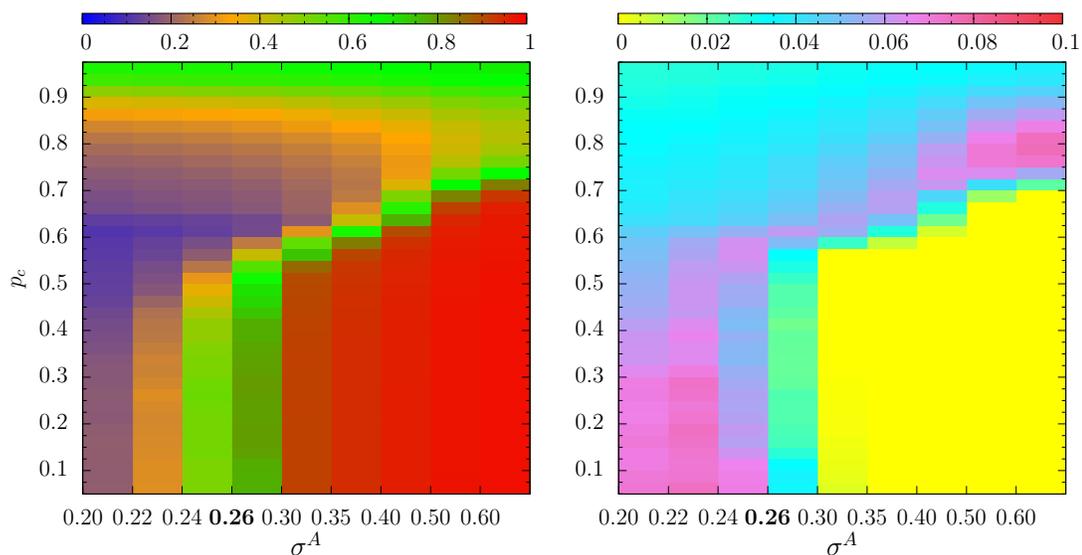
**Tabla 4.5:** Porcentaje del nivel de recuperación del nivel de sincronización local  $R_A^L$ .

Para $\sigma^A$	0.20	0.22	0.24	0.26	0.30	0.35	0.40	0.50	0.60
% de recuperación	62.7	63.5	63.6	63.7	64.3	65.6	66.2	67.5	68.8

En la Figura 4.2(c) se muestra la dispersión  $S_A^L$  obtenida para  $R_A^L$ . La zona amarilla corresponde a valores de dispersión  $S_A^L$  muy cercanos a cero; esta zona corresponde a la zona roja en la Figura 4.2(b). La zona rosa corresponde a valores altos de  $S_A^L$  para  $\sigma^A \in \{0.20, 0.22, 0.24, 0.26\}$ . Para  $\sigma^A \in \{0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.50\}$  se puede observar que  $S_A^L$  crece cuando nos estamos acercando al valor de  $p_c$  en que se alcanza el mínimo valor de sincronización local  $R_A^L$  y decrece para los valores más altos de  $p_c$ . La zona azul corresponde a los promedios que están justo en el paso de transición y a valores medios del nivel de sincronización local  $R_A^L$  y como podemos ver en estos casos cuanto más grande es el valor de acoplamiento menor es la dispersión  $S^A$ .



(a) Promedio para  $R_A^L$  por cada valor de  $p_c$  y cada valor de acoplamiento en  $\sigma^A$ .



(b) Paso de transición  $\sigma_c^A$  en  $R_A^L$ .

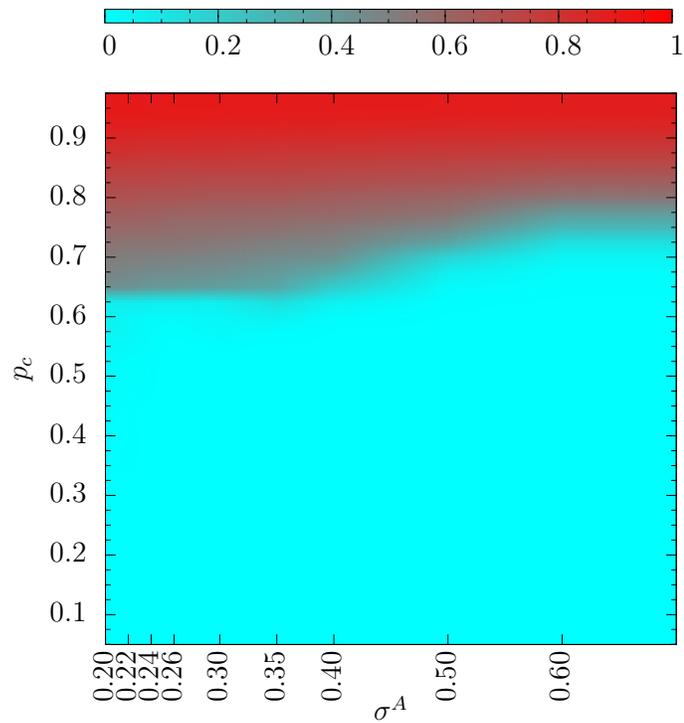
(c) Dispersión  $S_A^L$  para  $R_A^L$ .

**Figura 4.2:** Sincronización local  $R_A^L$  con pesos distribuidos uniformemente en el intervalo  $(0, 1)$  y frecuencias naturales distribuidas uniformemente en el intervalo  $(0.8, 1.2)$ .

En conclusión, se observa una transición clara para  $\sigma^A \approx 0.26$  con valores de probabilidad de correlación crítica desde  $p_c = 0.05$  hasta aproximadamente  $p_c = 0.70$ . Esta fuerza de acoplamiento crítico coincide con la transición de fase del modelo de Kuramoto [1975, 1984],  $\sigma_c = 2/\pi \cdot g(0)$ , donde  $g(\Omega)$  es la función de probabilidad de distribución de las frecuencias naturales.

La similaridad en los resultados para la sincronización global y la local, para valores por debajo de  $p_c \approx 0.6$ , es debida al hecho de que se tienen redes completamente conectadas, para estos valores, cuando termina la simulación. Por tanto, prácticamente no existe alguna diferencia entre las medidas  $R_A^G$  y  $R_A^L$ . Esta similitud será nuevamente abordada cuando se hable de las propiedades estructurales.

En la Figura 4.3 se muestra la razón  $\rho$  entre la sincronización global y local, calculada como  $\rho := 1 - \frac{R_A^G}{R_A^L}$ , para enfatizar la transición entre ambas medidas, correspondiente a la zona donde  $\rho = 0$ , y para enfatizar los valores tanto de  $p_c$  como de  $\sigma^A$  para los cuales se tiene una sincronización local fuerte a cambio de prácticamente no tener sincronización global; esta región se presenta para aproximadamente  $\rho > 0.7$ . Obsérvese cómo la transición es caracterizada por mostrar un nivel mínimo de sincronización local que interesantemente, está relacionado con la topología de las redes finales, lo cual se describe más adelante con las propiedades topológicas.



**Figura 4.3:** Proporción  $\rho$  entre las medidas de sincronización global y local, definida como  $\rho := 1 - \frac{R_A^G}{R_B^L}$ , para diferentes valores del parámetro de acoplamiento  $\sigma^A$  y la correlación umbral  $p_c$ . La zona roja es donde se tiene sincronización local, más no sincronización global y la zona celeste es caracterizada por tener sincronización global y en consecuencia, también se tiene sincronización local.

## 4.3.1.2 FAMILIA B

Para esta familia se tiene un conjunto más extenso de valores de acoplamiento; recuérdese que

$$\sigma^B := \{0.10, 0.13, 0.15, 0.17, 0.18, 0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\},$$

lo cual nos permite explorar el valor en el cual se presenta la transición de fase “no sincronización–sincronización”. Las frecuencias naturales  $\Omega_m^B$  fueron definidas con una función de distribución normal de media 1.0 y desviación típica 0.1, y los pesos  $w_{mn}^B$  fueron seleccionados con una distribución siguiendo una ley de potencia cúbica.

En las figuras 4.4(a) y 4.5(a) se muestra el valor promedio del nivel de sincronización global  $R_B^G$  y el valor promedio del nivel de sincronización local  $R_B^L$ , respectivamente. Obsérvese en ambos casos que cuando  $\sigma^B \in \{0.10, 0.13, 0.14, 0.15\}$  todos los promedios son bajos y presentan un decrecimiento que no es muy notable conforme la probabilidad de correlación  $p_c$  es mayor. Para  $\sigma^B = 0.16$  se puede ver que el decrecimiento ya se distingue a partir de  $p_c = 0.4$  hasta  $p_c = 0.625$ , valor a partir del cual el promedio se estabiliza para el resto de los valores de  $p_c$ .

En esta familia el valor de acoplamiento crítico teórico aproximado está en  $\sigma_c^B = 0.1595$ , pero como se observa el nivel promedio de sincronización aún es bajo para todos los valores de  $p_c$ . Para los valores de  $\sigma^B \in \{0.17, 0.18, 0.19, 0.20\}$ , conforme  $\sigma^B$  incrementa, el nivel de sincronización empieza a mejorar y además el decrecimiento en los promedios por cada  $\sigma^B$  ya es más notable.

En la Tabla 4.6, nivel de sincronización global  $R_B^G$ , y en la tabla 4.7, nivel de sincronización local  $R_B^L$ , se muestra el valor de  $p_c$  donde inicia el decrecimiento y el valor de  $p_c$  hasta el cual llegan a estabilizarse los promedios para cada uno de estos valores de  $\sigma^B$ . Los intervalos dentro de los cuadros en las tablas son los intervalos en que no coincide el decrecimiento del nivel de sincronización global  $R_B^G$  con el nivel de sincronización  $R_B^L$ .

**Tabla 4.6:** Valores de  $p_c$  para los cuales se observa decrecimiento notable en el nivel de sincronización global  $R_B^G$ .

Para $\sigma^B$	0.17	0.18	0.19	0.20	0.22	0.24	0.26	0.30	0.35	0.40	0.50	0.60
Desde $p_c$	0.475	0.500	0.525	0.550	0.550	0.550	0.575	0.575	0.650	0.700	0.750	0.775
Hasta $p_c$	0.625	0.625	0.650	0.650	0.650	0.675	0.700	0.775	0.825	0.875	0.925	0.950

**Tabla 4.7:** Valores de  $p_c$  para los cuales se observa decrecimiento notable en el nivel de sincronización global  $R_B^L$ .

Para $\sigma^B$	0.17	0.18	0.19	0.20	0.22	0.24	0.26	0.30	0.35	0.40	0.50	0.60
Desde $p_c$	0.475	0.500	0.525	0.550	0.550	0.550	0.575	0.575	0.675	0.725	0.800	0.825
Hasta $p_c$	0.625	0.625	0.650	0.625	0.675	0.725	0.775	0.775	0.8500	0.875	0.900	0.950

En esta familia se ha encontrado que para algunos valores de acoplamiento con cierta probabilidad de correlación el modelo no converge a ningún nivel de sincronización. En la tabla 4.8 se muestran los valores de  $p_c$  y  $\sigma^B$  en donde no hay convergencia y en las figuras 4.5(a), 4.5(b) y 4.5(c) estas combinaciones están en blanco porque el tiempo transitorio fijado fue insuficiente y como consecuencia no se obtuvo ningún resultado.

El hecho de que en algunos casos el modelo no converja es debido a que los enlaces tardan mucho en converger, o no convergen en un tiempo razonable porque los pesos comienzan a oscilar. Este comportamiento oscilante es debido a que el comportamiento de los enlaces se adapta a la dinámica de los nodos que unen; el enlace sigue durante un tiempo a un nodo y luego pasa a seguir al otro nodo. En el capítulo 5 se discute y se da una justificación sobre el comportamiento de los enlaces que tardan en converger o no convergen.

**Tabla 4.8:** Valor de acoplamiento  $\sigma^B$  y correlación  $p_c$  para los cuales el modelo no converge.

Para $\sigma^B$	0.14	0.16	0.19
$p_c$	0.6		
	0.625	0.625	0.625

A parte de que se tienen algunos casos que no convergen para esta combinación de valores de  $\sigma^B$  y  $p_c$ , hay casos en los cuales el nivel de sincronización en ambos casos, global y local, decae bruscamente para algunos valores de  $p_c$  cuando  $\sigma^B \in \{0.22, 0.24, 0.26, 0.30\}$ . Las combinaciones para las cuales el nivel de sincronización empeora son:  $\sigma^B \in \{0.22, 0.24\}$  con  $p_c \in \{0.575, 0.600, 0.625\}$ ,  $\sigma^B = 0.26$  con  $p_c \in \{0.600, 0.625\}$  y  $\sigma^B = 0.30$  con  $p_c \in \{0.600, 0.625, 0.650\}$ . En la Tabla 4.9 se muestra para las combinaciones mencionadas anteriormente el nivel de sincronización global al que decaen y en la Tabla 4.10 se muestran los respectivos valores para el nivel de sincronización local. Obsérvese que para  $R_B^L$  el nivel de sincronización para el siguiente valor de  $p_c$  después de los valores de  $p_c$  en que se da el decrecimiento es siempre ligeramente mayor al equivalente en el caso de la sincronización global  $R_B^G$ .

**Tabla 4.9:** Valores de  $p_c$  y  $\sigma^B$  para los cuales el nivel de sincronización global  $R_B^G$  decae bruscamente. Los valores en negrita son el nivel de sincronización más alto antes y después del decrecimiento.

$p_c$	$\sigma^B$			
	0.22	0.24	0.26	0.30
0.525	0.7610	0.8310	0.8650	0.9150
0.550	<b>0.7260</b>	<b>0.8070</b>	0.8540	0.9100
0.575	0.1043	0.1247	<b>0.8130</b>	<b>0.8950</b>
0.600	0.0861	0.1182	0.1320	0.1472
0.625	0.0964	0.1023	0.1115	0.1230
0.650	<b>0.1420</b>	<b>0.2380</b>	<b>0.3370</b>	0.1057
0.675	0.1200	0.1670	0.2570	<b>0.5070</b>
0.700	0.1110	0.1390	0.1770	0.3990

Obsérvese que la sincronización global y local para el conjunto de valores  $\sigma^B \in \{0.22, 0.24, 0.26, 0.30\}$  y un poco más de la mitad de los valores de  $p_c$  ya es suficientemente buena a diferencia del nivel que se obtiene para  $\sigma^B \in \{0.17, 0.18, 0.19, 0.20\}$ .

Para  $\sigma^B \in \{0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$  se observa que el decrecimiento es continuo, en esta familia los niveles de sincronización se mantienen altos en promedio para

**Tabla 4.10:** Valores de  $p_c$  y  $\sigma^B$  para los cuales el nivel de sincronización local  $R_B^L$  *decae bruscamente*. Los valores en negrita son el nivel de sincronización más alto antes y después del decrecimiento.

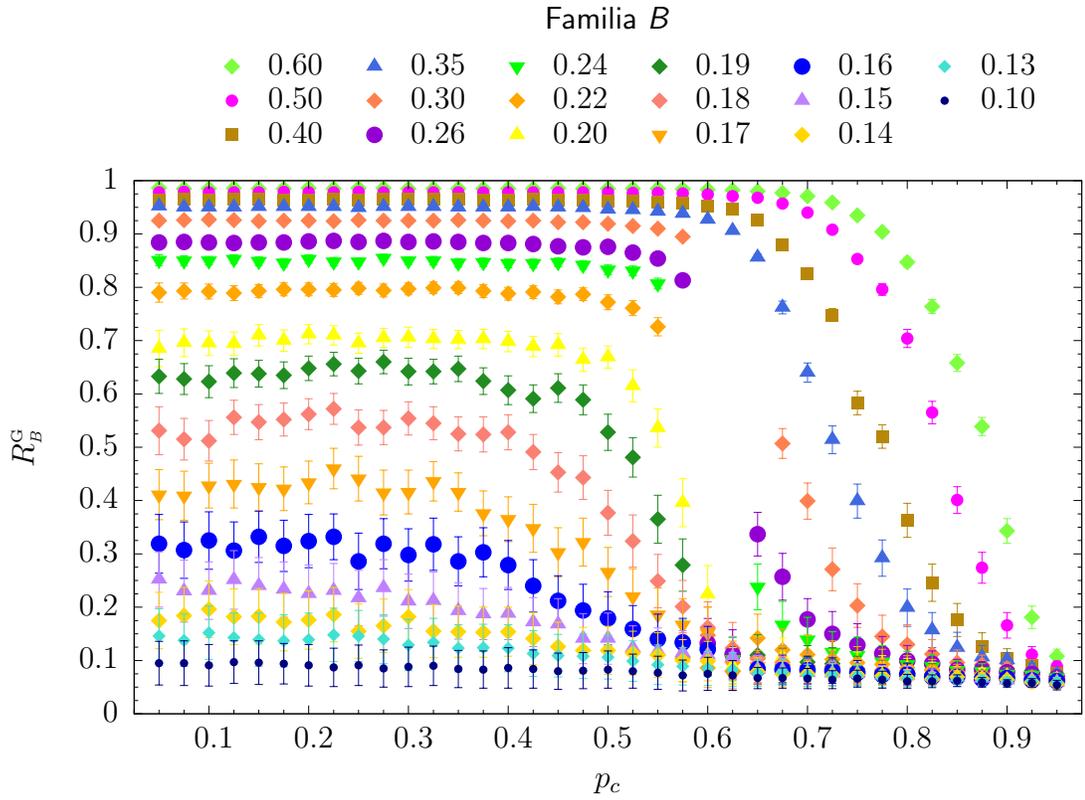
$p_c$	$\sigma^B$			
	0.22	0.24	0.26	0.30
0.525	0.7500	0.8240	0.8610	0.9130
0.550	<b>0.7150</b>	<b>0.8000</b>	0.8500	0.9080
0.575	0.1088	0.1285	<b>0.8140</b>	<b>0.8950</b>
0.600	0.0937	0.1226	0.1348	0.1533
0.625	0.1035	0.1099	0.1188	0.1321
0.650	<b>0.1890</b>	<b>0.2960</b>	<b>0.4050</b>	0.1725
0.675	0.1740	0.2280	0.3280	<b>0.5930</b>
0.700	0.1760	0.2080	0.2510	0.4940

cuatro valores más de  $p_c$  que en la familia  $A$ . En las tablas 4.6 y 4.7 se muestran para cada uno de estos valores de acoplamiento los valores de  $p_c$  para los cuales los niveles de sincronización se empiezan a perder.

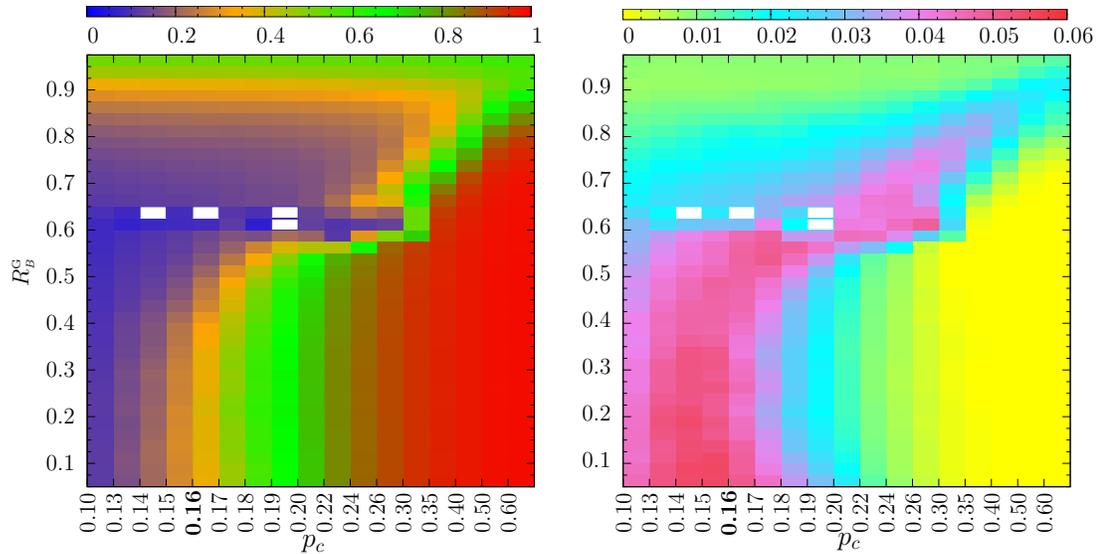
En la Tabla 4.11 se muestra para cada valor de  $\sigma^B$  el nivel de recuperación de sincronización local que se obtiene para el último valor de  $p_c$ . El nivel de recuperación es el nivel más alto que se logra obtener después del decrecimiento.

**Tabla 4.11:** Porcentaje de recuperación del nivel de sincronización local  $R_B^L$ .

Para $\sigma^B$	0.10	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20	0.22	0.24	0.26	0.30	0.35	0.40	0.50	0.60
% de recuperación	51.5	51.8	51.9	51.8	52.2	52.0	52.7	52.6	53.2	53.4	53.8	53.9	54.5	55.3	56.7	58.1	58.7



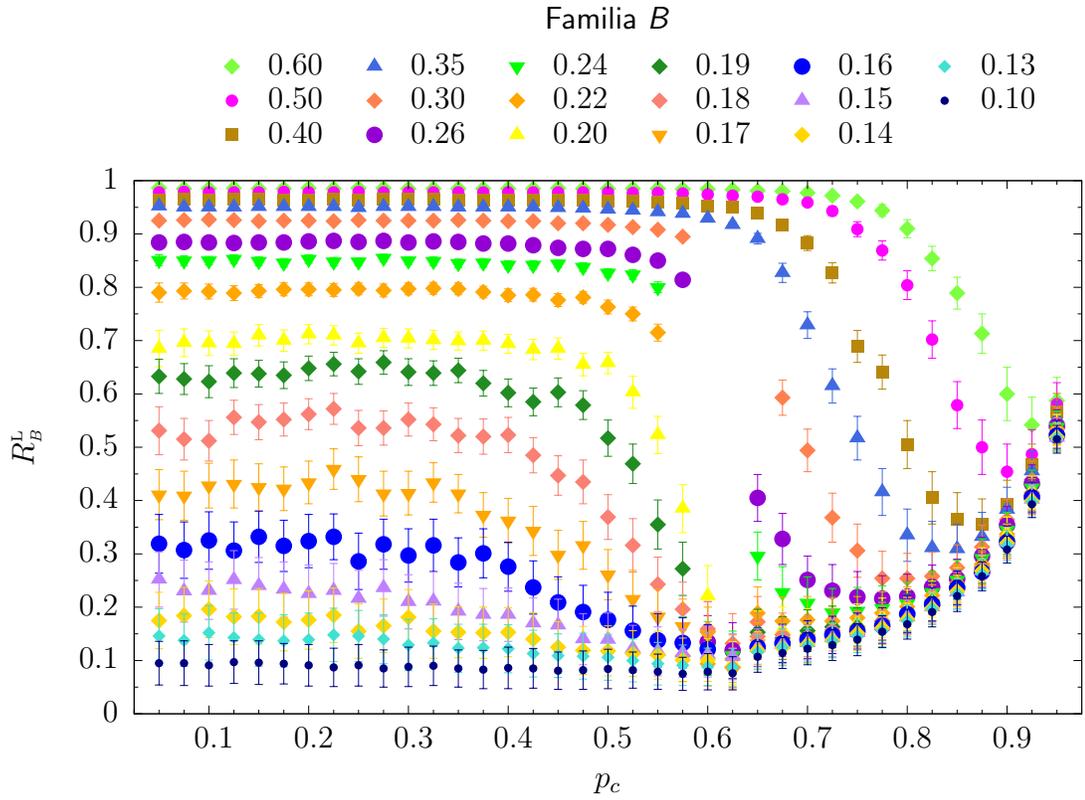
(a) Promedio para  $R_B^G$  por cada  $\{p_c, \sigma^B\}$ .



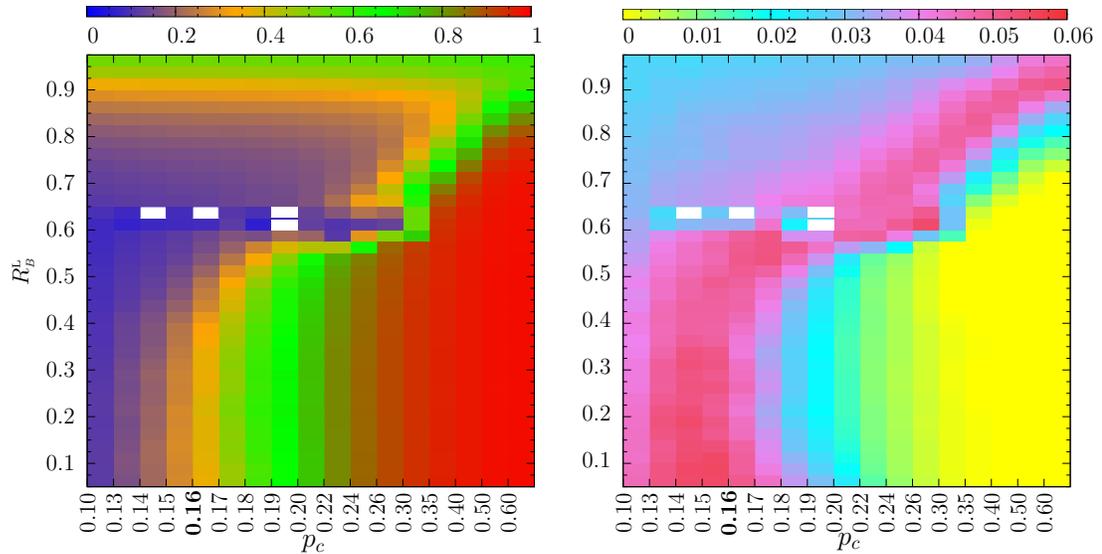
(b) Paso de transición  $\sigma_c^B \approx 0.15957$  para  $R_B^G$ .

(c) Dispersión  $S_B^L$  para  $R_B^G$ .

**Figura 4.4:** Pesos distribuidos normalmente con media 1.0 y desviación típica 0.1, y las frecuencias naturales han sido seleccionadas con una distribución siguiendo una función de ley de potencia cúbica.



(a) Promedio para  $R_B^L$  por cada  $\{p_c, \sigma^B\}$ .



(b) Paso de transición  $\sigma_c^B \approx 0.15957$  para  $R_B^L$ .

(c) Dispersión  $S_B^L$  para  $R_B^L$ .

**Figura 4.5:** Pesos distribuidos uniformemente en  $(0, 1)$  y frecuencias naturales distribuidas uniformemente en  $(0.8, 1.2)$ .

## 4.3.1.3 FAMILIA C

Recuérdese que en esta familia la mitad de las frecuencias naturales  $\Omega_m^C$  se han fijado en 0.8 y el resto en 1.2, y que todos los pesos  $w_{mn}^C$  se han inicializado en 0.5. En esta combinación de frecuencias y pesos es importante mencionar que no se conoce un valor teórico aproximado del acoplamiento crítico  $\sigma_c^C$  en el cual se dé el paso de transición “no sincronización–sincronización”. Lo anterior es debido a que el valor crítico de transición de Kuramoto solo es válido cuando las frecuencias naturales  $\Omega_m$  se eligen al azar a partir de una densidad de probabilidad unimodal simétrica y en este caso se ha determinado fijar en dos valores únicos las frecuencias naturales.

En esta familia se han clasificado los valores de acoplamiento en los siguientes subconjuntos:

$$\begin{aligned}\sigma_1^C &\in \{0.10, 0.13, 0.17, 0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.33, 0.36\}, \\ \sigma_2^C &\in \{0.40, 0.43, 0.46, 0.50, 0.53, 0.56\}, \\ \sigma_3^C &\in \{0.60, 0.63, 0.66, 0.70, 0.73, 0.76, 0.80\}.\end{aligned}$$

En la Figura 4.6(a), referente al nivel de sincronización global  $R_c^G$ , para  $\sigma_1^C$  se puede observar (se observa mejor en la Figura 4.9(b)) que para todos los valores de acoplamiento con  $p_c = 0.050$  hasta  $p_c = 0.625$  y  $p_c = 0.650$  hasta  $p_c = 0.950$  todos los promedios son similares. Obsérvese como para todas las combinaciones entre  $\sigma_1^C$  y  $p_c \in [0.050, 0.625]$  la dispersión en general es grande y para el resto de los valores de  $p_c$  prácticamente no se tiene dispersión. Ocurre lo contrario para todas las combinaciones entre  $\sigma_2^C$  y  $p_c \in [0.650, 0.950]$ , combinaciones para las cuales se da el decrecimiento e inclusive se podría decir que ninguna de éstas presenta dispersión.

Obsérvese ahora los promedios para  $\sigma_2^C = \{0.40, 0.43, 0.36, 0.50, 0.53, 0.56\}$ , Figura 4.9(a), como se puede ver los promedios entre estos valores de acoplamiento y  $p_c$  tienen el mismo comportamiento que presentan las combinaciones entre  $\sigma_1^C$  y  $p_c$ , con la diferencia que para los promedios correspondientes a  $p_c \in [0.550, 0.625]$

forman una pequeña concavidad y después de ésta nuevamente todos los promedios decrecen. Note que conforme  $\sigma_2^B$  es mayor, la concavidad se pierde y lo que se tiene para este intervalo de  $p_c \in [0.550, 0.625]$  es un ligero decrecimiento. En la Tabla 4.12 se muestran los valores de  $p_c$  para cada valor de acoplamiento  $\sigma_2^C$  en que está la concavidad y los valores en negrita son el nivel más bajo que se tiene cuando  $p_c \in [0.55, 0.625]$ . En la tabla 4.13 se muestran los valores de acoplamiento en  $\sigma_3^C$  y los valores de  $p_c$  para los cuales el decrecimiento es más notable con su respectivo nivel de sincronización global  $R_c^G$ , en este caso, en negrita se está representado el nivel más alto antes y después del decrecimiento.

**Tabla 4.12:** Nivel de sincronización  $R_c^G$  para  $\sigma_2^C$  y  $p_c \in [0.550, 0.650]$ . Los valores en negrita son el nivel mínimo que se obtiene en la concavidad.

$p_c$	$\sigma^C$					
	0.40	0.43	0.46	0.50	0.53	0.56
0.550	0.6960	0.8110	0.8530	0.8880	0.9060	0.9180
0.575	0.6530	0.7370	0.7980	0.8560	0.8940	0.9130
0.600	0.5710	0.5680	0.6340	0.6740	0.7530	0.8360
0.625	<b>0.5580</b>	<b>0.5560</b>	<b>0.5590</b>	<b>0.5629</b>	<b>0.5510</b>	<b>0.5780</b>
0.650	0.6480	0.6480	0.6480	0.6420	0.6330	0.6240

Anteriormente se ha explicado la razón por la cual para esta familia no se conoce un valor de acoplamiento crítico teórico, sin embargo, observando los resultados obtenidos podemos decir que el paso de transición de fase “no sincronización–sincronización” experimental se da en  $\sigma^C = 0.40$ .

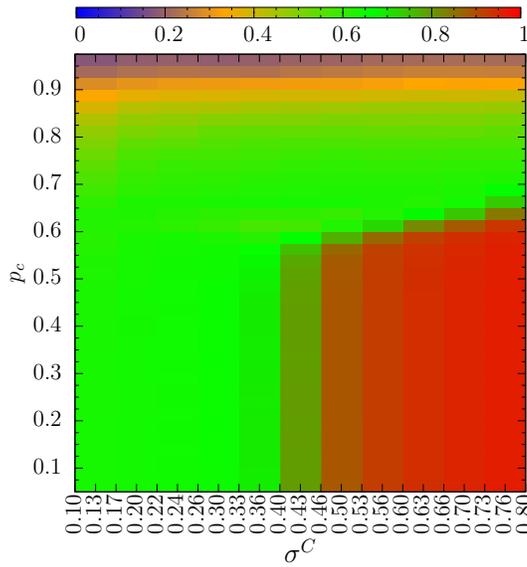
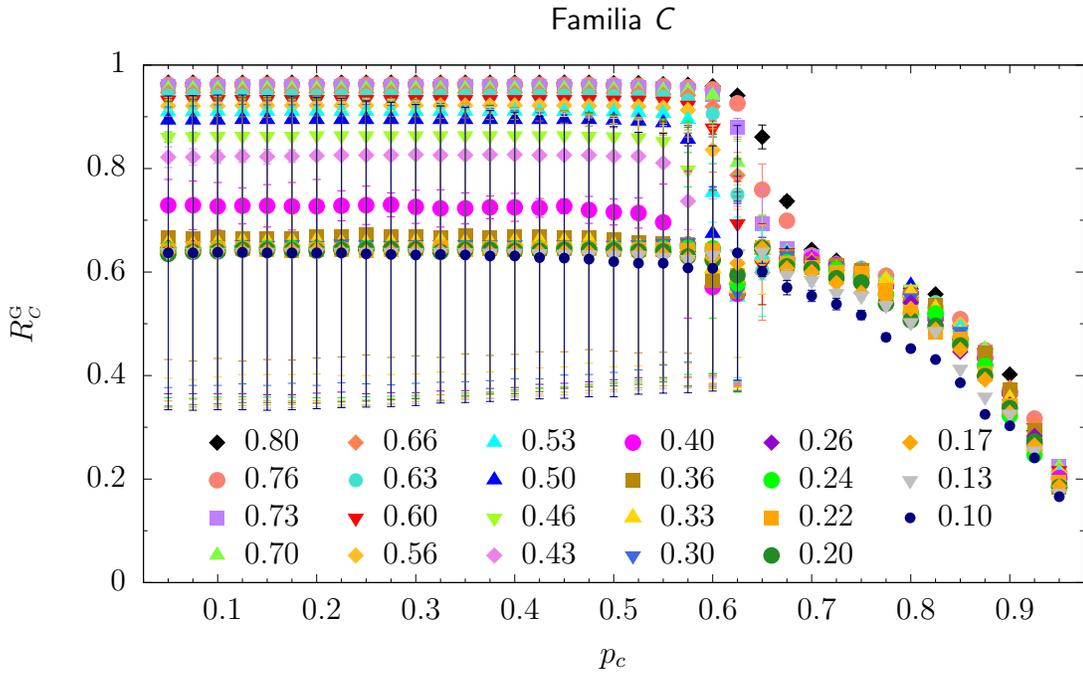
En la Figura 4.5(b) se visualiza por cada combinación  $\{\sigma^C, p_c\}$  el promedio del nivel de sincronización global  $R_c^L$ . En ésta se puede observar mejor el paso de transición experimental en  $\sigma^C = 0.40$ , aunque se hace hincapié en que no se conoce el valor de acoplamiento crítico teórico y en que inclusive para valores muy pequeños como  $\sigma^C = 0.10$  se tiene ya valores medios del nivel de sincronización global  $R_c^L$ , lo cual no sucede en ninguna de las dos familias anteriores.

**Tabla 4.13:** Nivel de sincronización  $R_C^s$  para  $\sigma_3^c$  y  $p_c \in [0.550, 0.650]$  en donde se da el decrecimiento más notable. Los valores en negrita son el nivel de sincronización global más alto antes y después del decrecimiento.

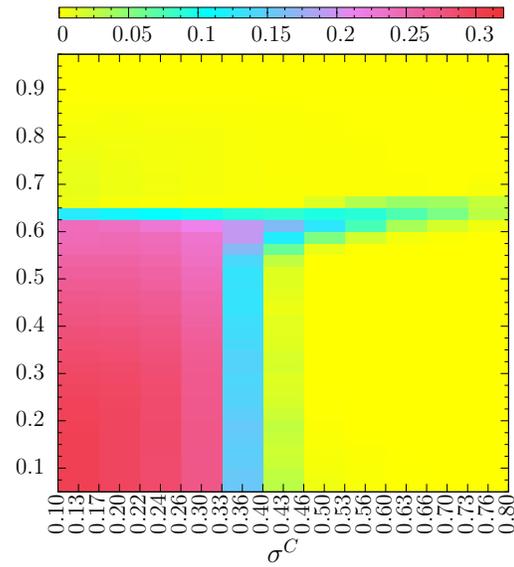
$p_c$	$\sigma^c$						
	0.60	0.63	0.66	0.70	0.73	0.76	0.80
0.550	0.9310	0.9390	0.9430	0.9510	0.9550	0.9590	0.96304
0.575	<b>0.9230</b>	<b>0.9320</b>	<b>0.9410</b>	0.9500	0.9530	0.9570	0.9620
0.600	0.8790	0.9060	0.9200	<b>0.9410</b>	0.9430	0.9530	0.9590
0.625	0.6940	0.7500	0.7870	0.8110	<b>0.8790</b>	<b>0.9260</b>	<b>0.9410</b>
0.650	0.6150	0.6030	0.5990	0.6240	0.6930	0.7590	0.8610
0.675	<b>0.6380</b>	<b>0.6380</b>	<b>0.6330</b>	<b>0.6390</b>	<b>0.6450</b>	0.6990	0.7370
0.700	0.6110	0.6250	0.6230	0.6150	0.6290	0.6320	0.6430

En la Figura 4.5(c) se muestra la dispersión de los datos respecto a la media  $R_C^s$ . Como se puede observar, la mayor dispersión se da en las combinaciones que están en la zona que se ha considerado como zona de no sincronización.

Igualmente como se ha explicado para la familia  $A$  y  $B$ , en la Figura 4.6(b) la zona roja corresponde a las combinaciones  $\{\sigma^c, p_c\}$  para las cuales el nivel de sincronización global es más alto. La zona verde corresponde a un nivel medio y la anaranjada al nivel obtenido más bajo. En la Figura 4.6(c) la zona amarilla representa la menor dispersión y la zona rosa corresponde a la dispersión más alta obtenida para las combinaciones entre  $\sigma_1^c$  y  $p_c \in [0.050, 0.625]$ .

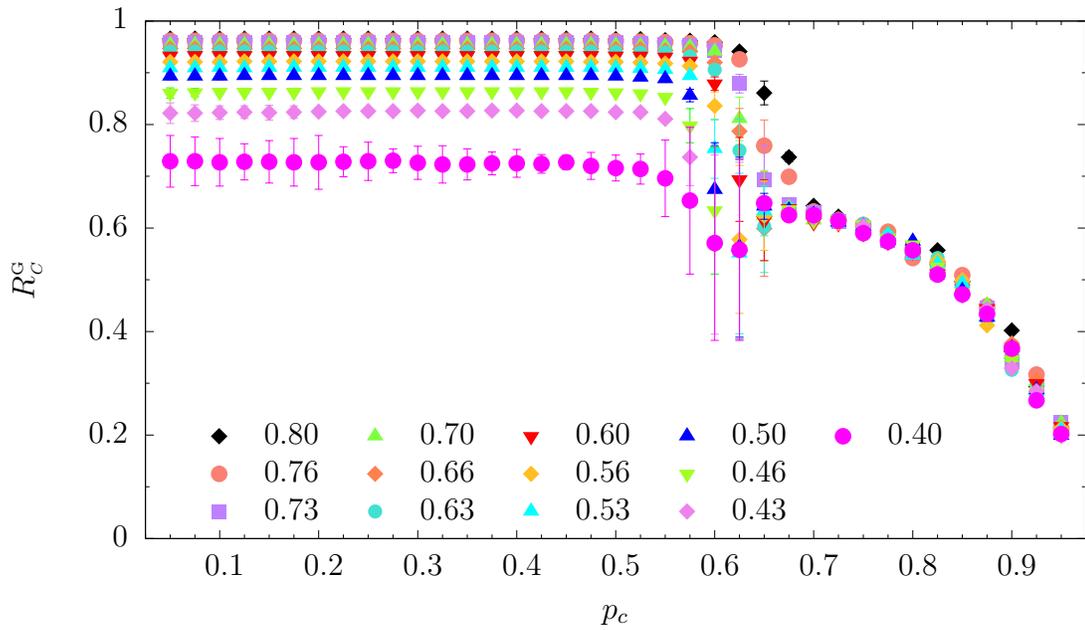


(b) Paso de transición  $\sigma_c^C$  para  $R_C^G$ .

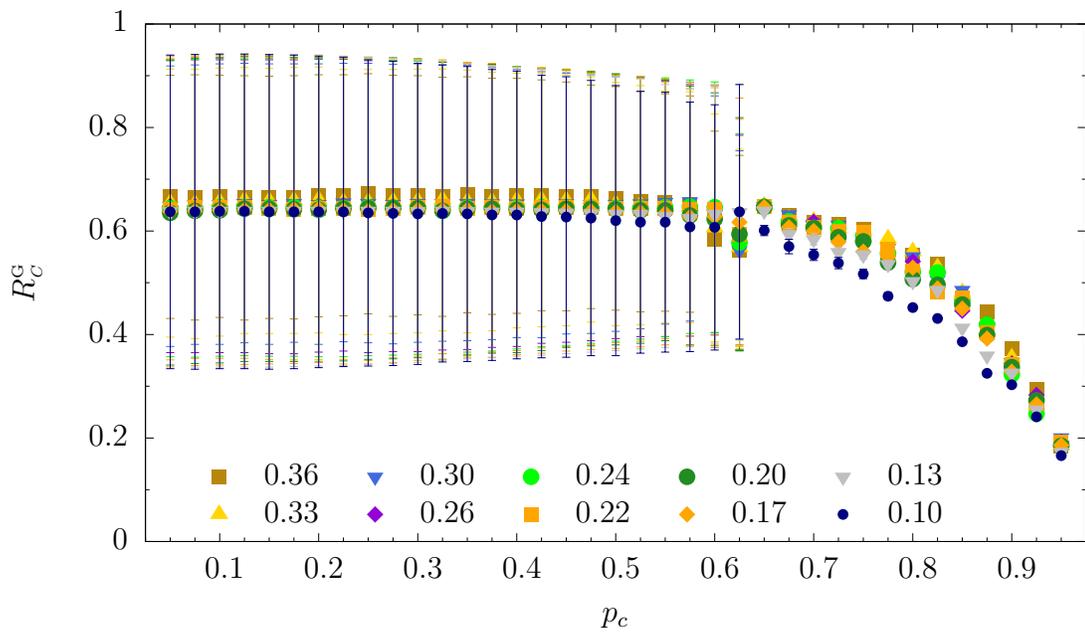


(c) Dispersión  $S_C^G$  para  $R_C^G$ .

**Figura 4.6:** Pesos inicializados en 0.5 y la mitad de las frecuencias naturales han sido inicializadas en 0.8 y el resto en 1.2.



(a) Promedio para el nivel de sincronización global  $R_c^G$  para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma_1^C$ .



(b) Promedio para el nivel de sincronización global  $R_c^G$  para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma_2^C$ .

**Figura 4.7:** Promedio de nivel de sincronización global  $R_c^G$  para los subconjuntos  $\sigma_1^C$  y  $\sigma_2^C$ .

En la Figura 4.8(a) se muestran los resultados correspondientes al niveles de sincronización local  $R_c^L$ . Se puede observar que para todos los valores de fuerza de acoplamiento la sincronización local tiene el mismo comportamiento que el nivel de sincronización global para  $p_c \in [0.050, 0.600]$ . En esta familia, la diferencia entre las medidas  $R_c^G$  y  $R_c^L$  se da para  $p_c \in [0.625, 0.950]$ ; éste es el intervalo de valores de probabilidad de correlación crítica para los cuales el nivel de sincronización local se mantiene en un nivel alto cuando el nivel de sincronización global se pierde. Es importante observar que la mayor dispersión en este caso se sigue dando para todos los valores de acoplamiento en  $\sigma_1^C$  y que en general es grande excepto para las combinaciones con  $p_c \in [0.625, 0.950]$ , la cual tampoco es muy pequeña pero comparándola con el resto de valores de  $p_c$  y cuanto más grande sea  $p_c$  menor es la dispersión. Los resultados para  $\sigma_1^C$  se pueden observar mejor en la figura 4.9(b).

Para el subconjunto de valores de acoplamiento  $\sigma_2^C$  y  $p_c \in [0.525, 0.625]$  se observa una formación de concavidad que en este caso es menos notable y cuando se pasa a los valores de acoplamiento en  $\sigma_3^C$  ésta desaparece. En la Tabla 4.14 se muestra para  $\sigma_2^C$  y  $p_c \in [0.525, 0.650]$  el nivel de sincronización que se tiene para cada una de estas combinaciones.

**Tabla 4.14:** Nivel de sincronización  $R_c^L$  para  $\sigma_2^C$  y  $p_c \in [0.550, 0.650]$  para la concavidad presente. Los valores en negrita son el nivel mínimo de sincronización global que se alcanza en la concavidad.

$p_c$	$\sigma^C$					
	0.40	0.43	0.46	0.50	0.53	0.56
0.5250	0.8290	0.8640	0.8940	0.9100	0.9220	0.9340
0.5500	0.8210	0.8610	0.8930	0.9090	0.9200	0.9330
0.5750	0.7690	0.8220	0.8720	0.9020	0.9180	0.9280
0.6000	<b>0.6590</b>	0.7140	0.7500	0.8080	0.8700	0.9000
0.6250	0.7040	<b>0.7090</b>	<b>0.7058</b>	<b>0.7160</b>	<b>0.7310</b>	<b>0.8000</b>
0.6500	0.9970	0.9950	0.9680	0.9390	0.9130	0.8980

En la Tabla 4.15 se muestran para los valores de acoplamiento en  $\sigma_1^C$  y  $\sigma_3^C$  el nivel de sincronización para las combinaciones con  $p_c = \{0.600, 0.625, 0.650, 0.675\}$ , observando que el incremento más grande es de  $p_c = 0.625$  a  $p_c = 0.650$ . Para este caso se puede ver que el decrecimiento es muy pequeño.

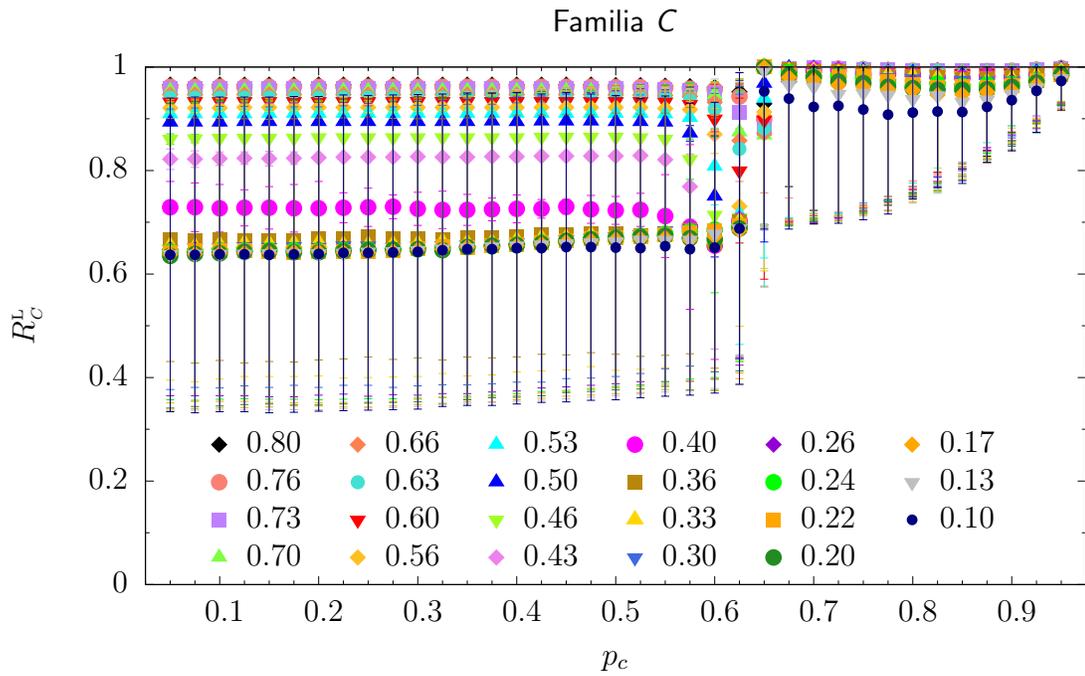
**Tabla 4.15:** Nivel de sincronización  $R_c^L$  para  $\sigma_3^C$  y  $p_c \in [0.550, 0.650]$  en donde se da el decrecimiento es más notable.

$p_c$	$\sigma^C$						
	0.60	0.63	0.66	0.70	0.73	0.76	0.80
0.6000	<b>0.9000</b>	<b>0.9190</b>	<b>0.9320</b>	<b>0.9460</b>	<b>0.9480</b>	0.9560	0.9610
0.6250	0.8000	0.8420	0.8580	0.8740	0.9130	<b>0.9430</b>	<b>0.9520</b>
0.6500	0.8980	0.8810	0.8720	0.8680	0.8810	0.8990	0.9290
0.6750	<b>0.9980</b>	<b>0.9980</b>	<b>0.9980</b>	<b>0.9980</b>	<b>0.9970</b>	<b>0.9790</b>	<b>0.9720</b>

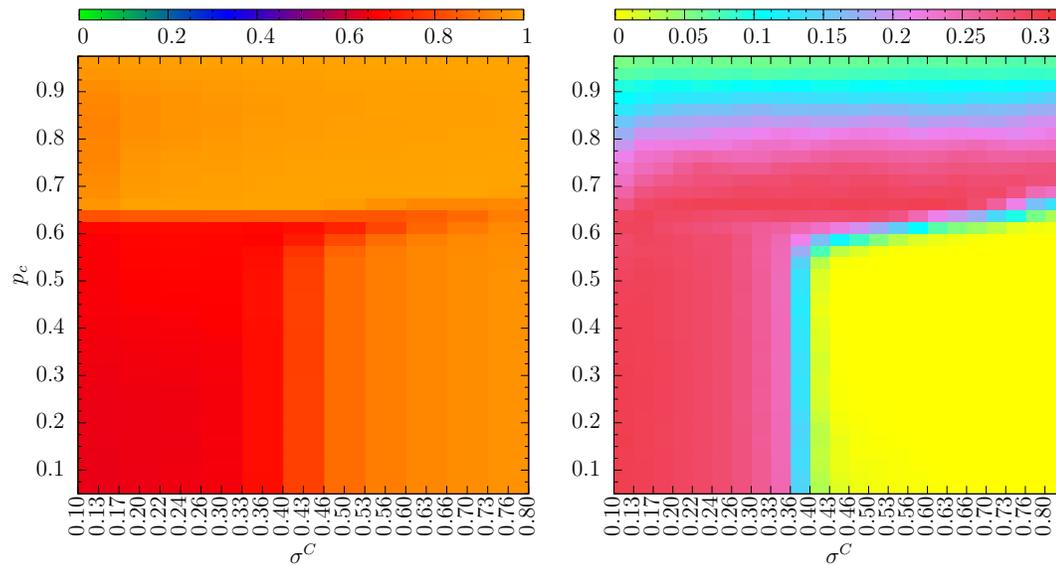
Nuevamente en la Figura 4.8(b) para  $R_c^L$  la zona roja corresponde a combinaciones  $\{\sigma^C, p_c\}$  para las cuales el nivel de sincronización local es más alto y la zona anaranjada corresponde a niveles medios. También se observa que la mayor dispersión, ver Figura 4.8(c), se da para las combinaciones que se ha considerado pertenecen a la zona de no sincronización.

En este caso es importante observar que a pesar de que el nivel de sincronización local es muy alto para todas las combinaciones entre todos los valores de correlación con  $\sigma_2^C$  y  $\sigma_3^C$ , no implica que la combinación de inicialización entre los parámetros  $p_c$  y  $\sigma^C$  sea mejor que la inicialización usada para las familias  $A$  y  $B$ , pues la dispersión para las combinaciones en que  $p_c \in [0.65, 0.95]$  es muy grande.

En conclusión, en esta familia los resultados tanto para  $R_c^C$  como para  $R_c^L$  son en promedio más altos, incluso no se tiene un nivel bajo de sincronización local para una sola combinación, pero para todos los casos de nivel medio de sincronización, la dispersión es muy grande y para niveles altos cuando se usa  $\sigma_2^C$  y  $\sigma_3^C$ , prácticamente no se tiene dispersión para  $p_c \in [0.05, 0.625]$ .



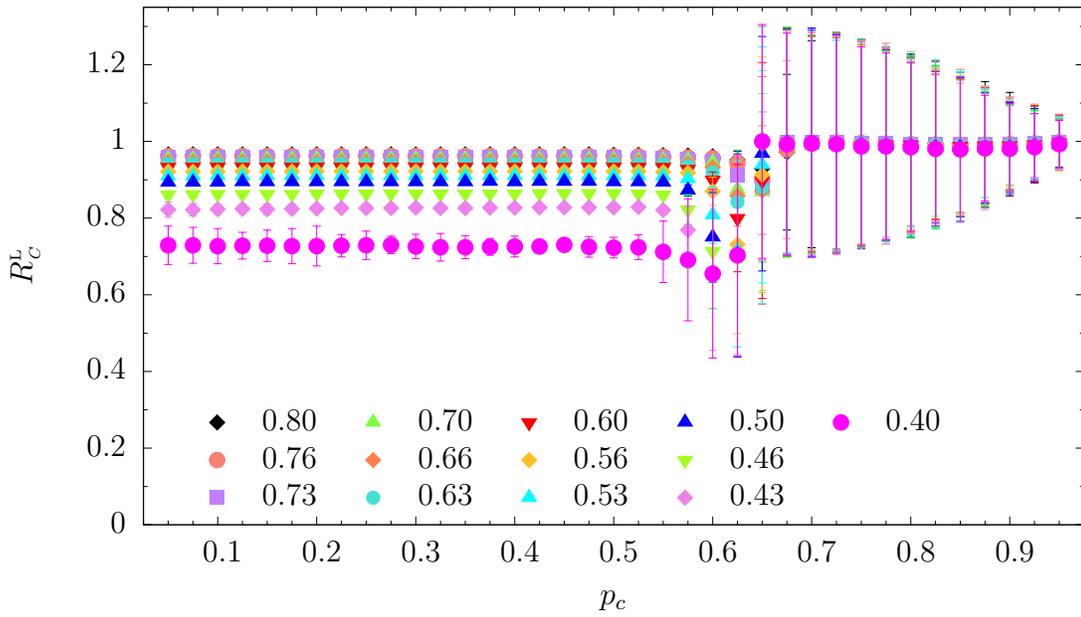
(a) Promedio para el nivel de sincronización local  $R_C^L$  para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma^C$ .



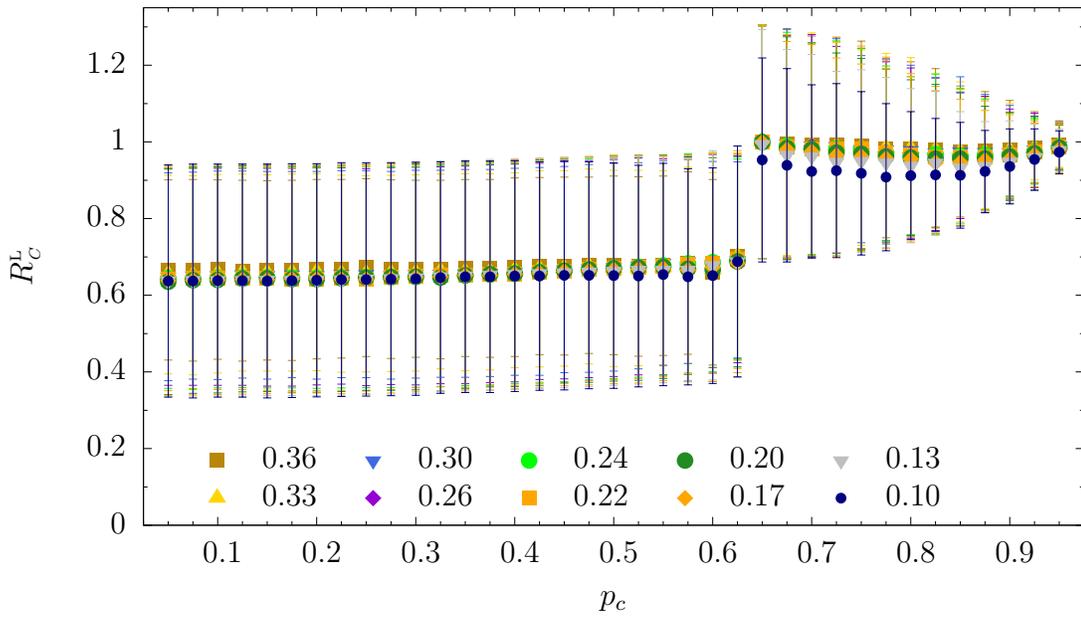
(b) Paso de transición  $\sigma^C$  para  $R_C^L$ .

(c) Dispersión  $S_C^L$  para  $R_C^L$ .

**Figura 4.8:** Los pesos han sido inicializados en 0.5 y la mitad de las frecuencias naturales se han inicializado en 0.8 y el resto en 1.2.



(a) Valor promedio para el nivel de sincronización global  $R_C^L$  para cada valor de  $p_c$  y cada valor de fuerza de acoplamiento  $\sigma_1^C$ .



(b) Promedio para el nivel de sincronización global  $R_C^L$  para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma_2^C$ .

**Figura 4.9:** Promedio de nivel de sincronización local  $R_C^L$  para los subconjuntos  $\sigma_1^C$  y  $\sigma_2^C$ .

### 4.3.2 PROPIEDADES TOPOLÓGICAS

Las características topológicas de las redes son analizadas a través de funciones parametrizadas. La caracterización de estas propiedades ayuda a entender el comportamiento físico macroscópico que exhiben las redes.

Anteriormente en la sección 3.3 se mencionó que las redes finales pueden ser descritas por su matriz de adyacencia, ésto nos permite utilizar medidas propias de las redes no ponderadas para analizar sus propiedades topológicas. Dadas las características del presente trabajo se ha optado por estudiar las propiedades topológicas como la asortatividad  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{K}$ , la modularidad  $\mathcal{M}$ , el grado promedio de la red  $\bar{k}$  y el grado promedio de los vecinos  $\bar{k}^{V_m}$ . A continuación se explican estas propiedades para cada una de las familias con que se ha experimentado.

#### 4.3.2.1 FAMILIA A

Se harán dos observaciones importantes: la primera es que la medida de modularidad mostrada en la Figura 4.10, exhibe una transición rápida cuando  $p_c$  está en torno de 0.6 – 0.7. Observe en la Figura 4.10(a) que para valores pequeños de  $p_c$ , cuando la sincronización global y local están en el nivel máximo alcanzado, las redes no muestran rasgos de modularidad, es decir, la red es se ve como un módulo.

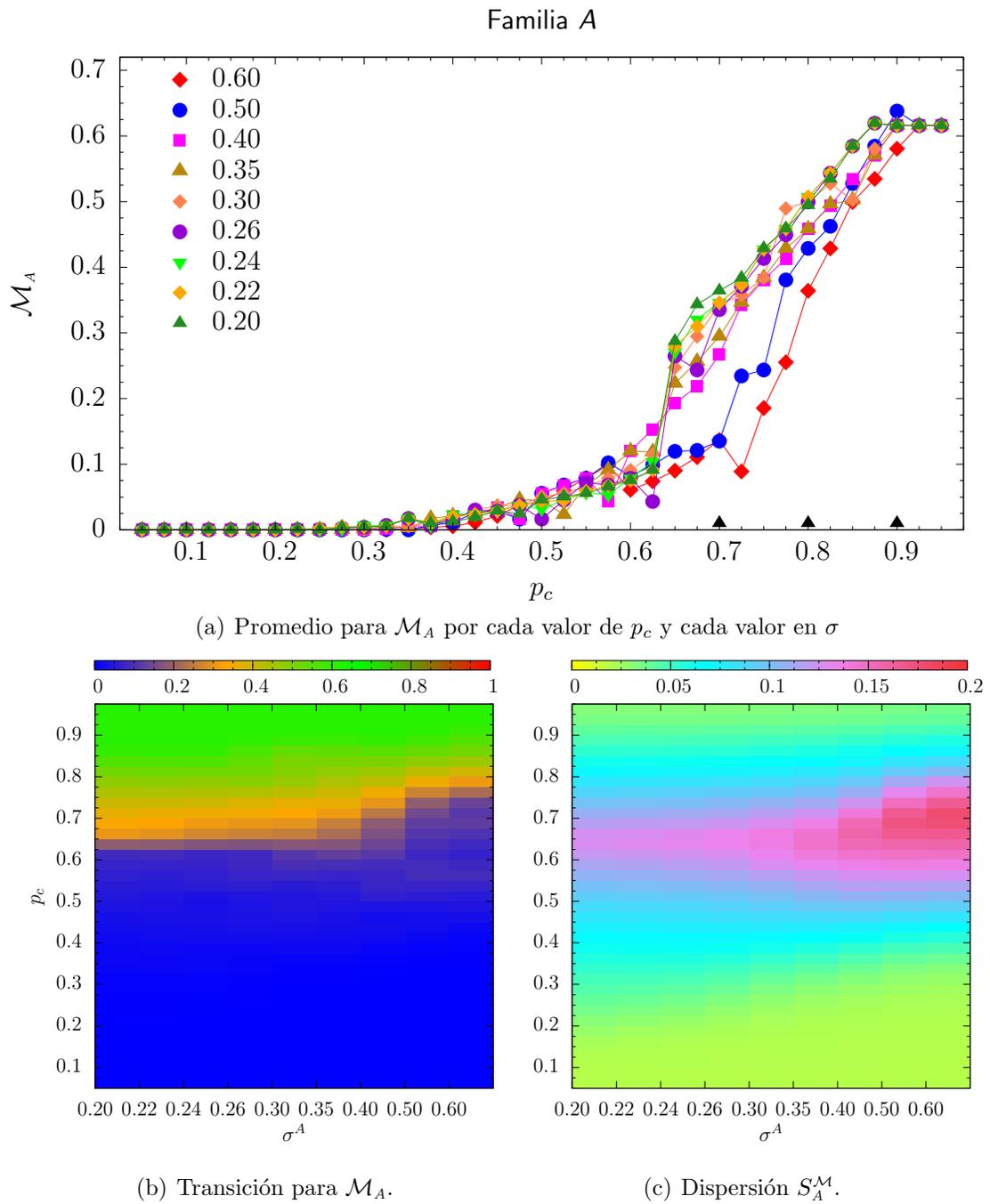
Note que la modularidad empieza a aparecer cuando la sincronización global empieza a bajar de nivel y que la transición que se da en la modularidad, se da justo alrededor del mismo intervalo en que la sincronización global y local presentan el mayor decrecimiento. Justo después de este momento, la sincronización local empieza a mejorar., pero no se puede decir que es alta porque los nodos dentro de los módulos aún no están bien sincronizados.

La segunda observación es que conforme  $p_c$  es mayor que 0.7, cuando la sincronización global desaparece pero la local se recupera, el nivel de modularidad incrementa independientemente del valor de acoplamiento que se tenga. Se ha en-

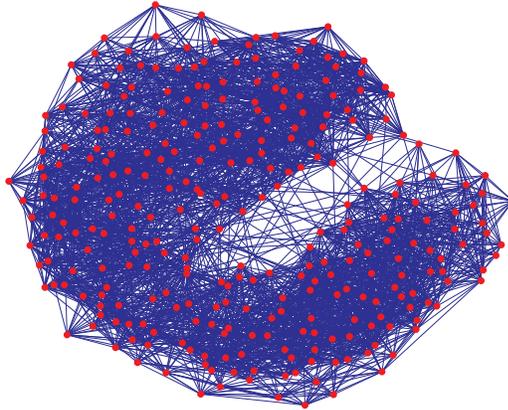
contrado que la red resultante para valores de  $p_c$  por de bajo de la transición es una red completamente conexa y conforme  $p_c$  se incrementa, se observa que la topología final tiene cada vez menos enlaces, dando lugar a las comunidades y, en consecuencia, la modularidad incrementa. Este incremento es tal que para algunos valores de  $p_c$  a partir de 0.7 las redes se fraccionan en subgrafos desconexos, como se muestra en la Figura 4.11(c) para  $p_c = 0.9$ . Sin embargo, para  $p_c = 0.7$  y  $p_c = 0.8$  se tienen redes conexas.

La transición de de modularidad se representa en la Figura 4.3, donde las redes típicamente obtenidas en general para  $p_c = 0.7$  (4.11(a)),  $p_c = 0,8$  (4.11(b)) y  $p_c = 0,9$  (4.11(c)) son mostradas.

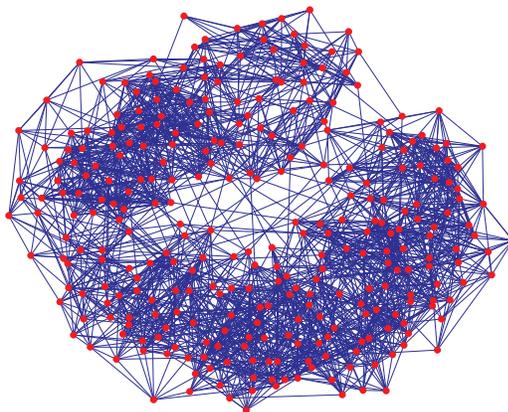
El valor específico de  $p_c$  en que aparece la transición depende de la distribución inicial de las frecuencias naturales  $g(\Omega)$ . En el caso de una distribución gaussiana (se verá más adelante, familia  $B$ ), se ha encontrado que la transición es más ancha, entre los valores de  $p_c$  de 0.6 a 0.8, y cuando se considera una distribución de dos picos (se verá más adelante, familia  $C$ ), la transición es más bien estrecha, cerca del valor de  $p_c = 0,6$ . Sin embargo, en todos los casos, hay una transición a una red modular.



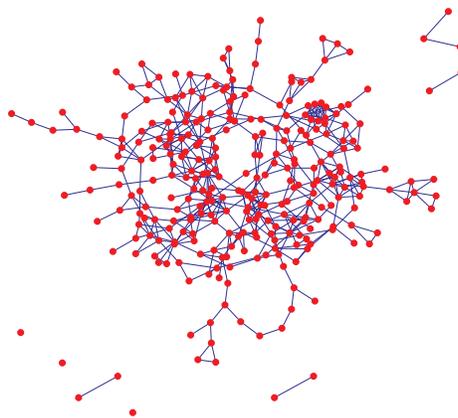
**Figura 4.10:** Para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma$  en el eje de las ordenadas se muestra el valor promedio obtenido para la modularidad.



(a) Ejemplo de red que muestra las topologías típicamente obtenidas para  $p_c = 0.7$  con  $\sigma = 0.2$ .



(b) Ejemplo de red que muestra las topologías típicamente obtenidas para  $p_c = 0.8$  con  $\sigma = 0.2$ .



(c) Ejemplo de red que muestra las topologías típicamente obtenidas para  $p_c = 0.9$  con  $\sigma = 0.2$ .

**Figura 4.11:** Ejemplos de redes que muestran las topologías típicamente obtenidas en una simulación con  $p_c = 0.7$ ,  $p_c = 0.8$  y  $p_c = 0.9$ , y  $\sigma = 0.2$ . Se observa el incremento de modularidad en la topología final conforme  $p_c$  es más grande.

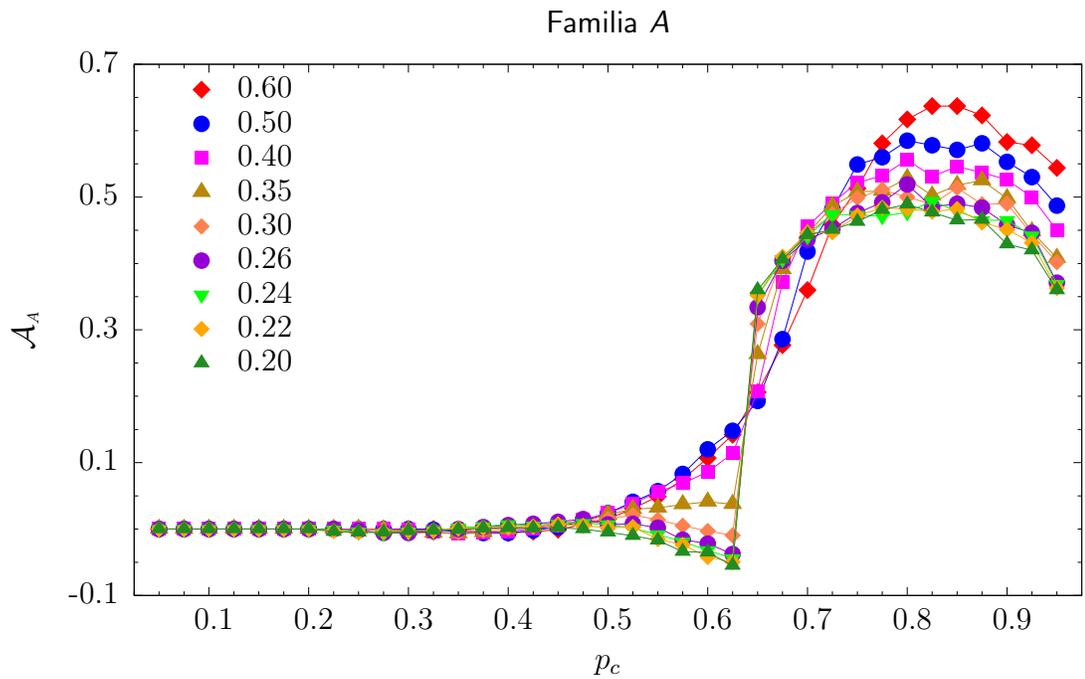
Otra característica estructural importante es la asortatividad, representada en la Figura 4.12. Como se ha explicado antes, se usan dos fórmulas diferentes para la validación de ésta, ecuaciones 3.12 y 3.14. Nótese que la segunda ecuación, correspondiente a  $K_{mn}$ , es una función del grado y por tanto, en realidad, se representa su pendiente.

En las figuras 4.12 y 4.13 se muestran los resultados del coeficiente de asortatividad obtenidos para las combinaciones entre  $p_c$  y  $\sigma^A$ . En la Figura 4.12 se muestran los resultados del coeficiente de asortatividad obtenidos con la ecuación 3.12,  $\mathcal{A}$ , y en la figura 4.13 los correspondientes resultados obtenidos con la ecuación 3.14,  $\mathcal{K}$ .

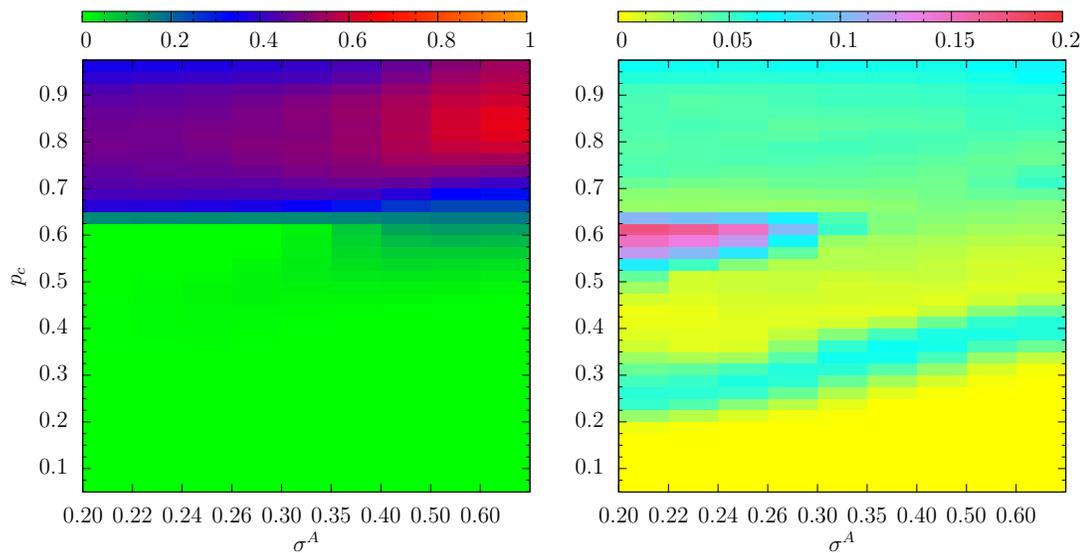
En las figuras 4.12(a) y 4.13(a) se muestran los valores promedio del coeficiente de asortatividad,  $\mathcal{A}_A$  y  $\mathcal{K}_A$  para cada valor de  $p_c$  y cada valor en  $\sigma^A$ . En las figuras 4.12(b) y 4.13(b) se muestra el valor promedio del coeficiente de asortatividad para cada combinación  $\{\sigma^A, p_c\}$ ; y en las figuras 4.12(c) y 4.13(c) se muestra el valor de  $S_A^A$  promedio del coeficiente de asortatividad para cada combinación  $\{\sigma^A, p_c\}$ .

Para estas medidas de asortatividad se ha vuelto a observar una transición para valores de  $p_c$  alrededor de 0.6 a 0.7. Esta transición, que es incluso más rápida que la de la modularidad, pasa de una red con topología no asortativa (cuando se tiene una red completamente conectada) a una red con topología asortativa (cuando la modularidad es alta). Cabe destacar que la transición es independiente del valor de  $\sigma^A$  que se esté usando. Ambas medidas son esencialmente iguales para los valores de  $p_c$  por debajo o cerca de la transición, siendo solo ligeramente diferentes cuando  $p_c$  es alta, ya que se tienen componentes desconectadas en la red final, ver figura 4.11(c).

Observe que en las figuras 4.12(b) y 4.12(c) que la dispersión no es en general muy grande para la mayoría de las combinaciones, excepto para algunas combinaciones que están justo en el intervalo de  $p_c = [0.6, 0.7]$  donde se presenta la transición.



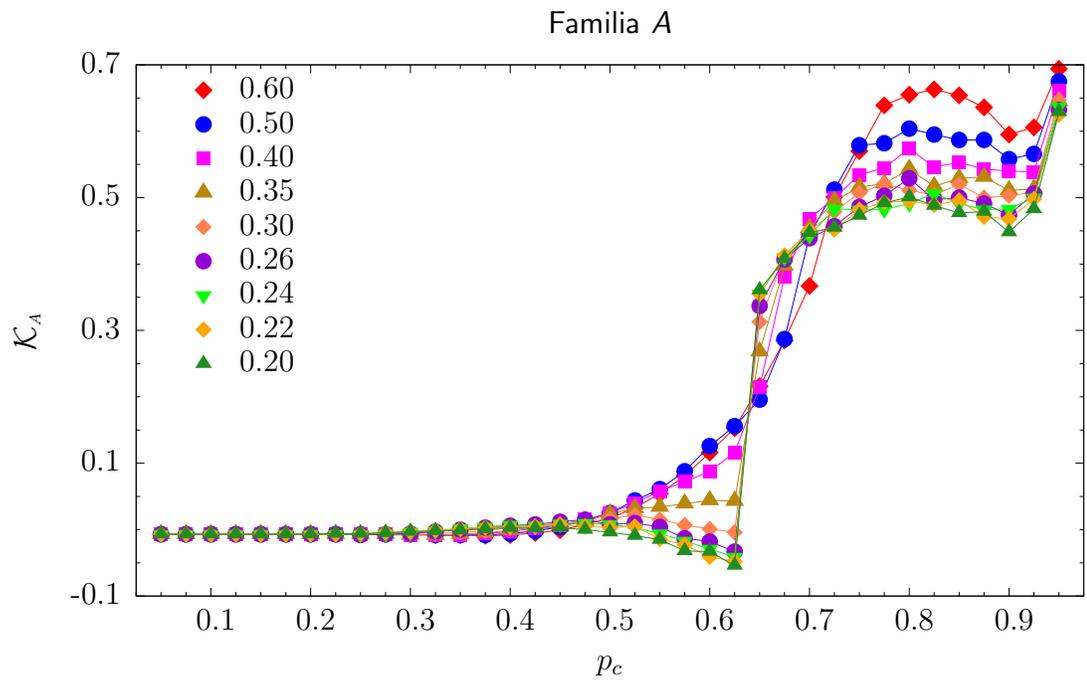
(a) Promedio para la asortatividad  $\mathcal{A}_A$  por cada valor de  $p_c$  y cada valor en  $\sigma^A$



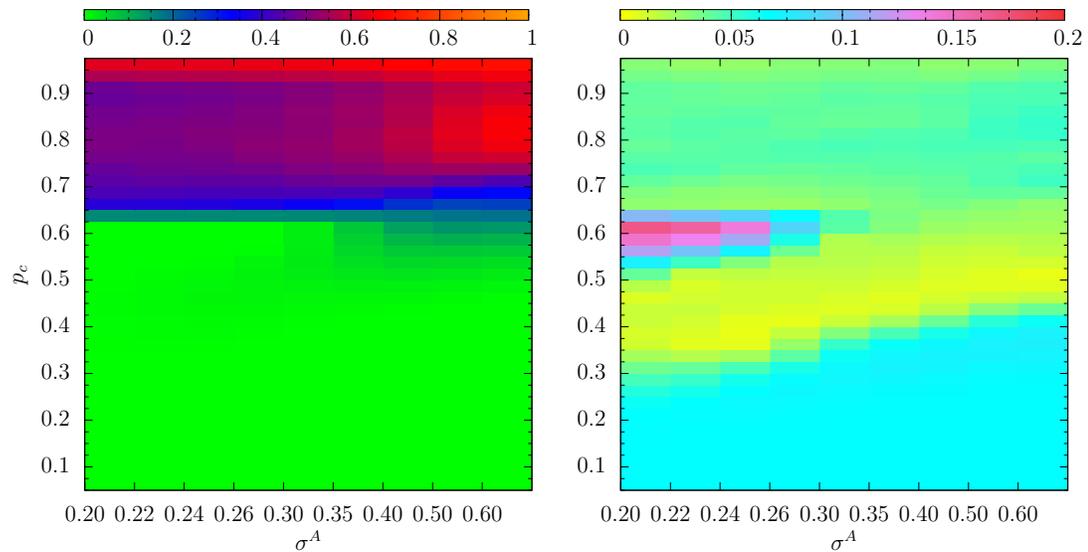
(b) Asortatividad  $\mathcal{A}_A$  por cada  $\{\sigma^A, p_c\}$ .

(c) Dispersión  $S_A^A$ .

**Figura 4.12:** Asortatividad con pesos distribuidos uniformemente en el intervalo  $(0, 1)$  y frecuencias naturales distribuidas uniformemente en el intervalo  $(0.8, 1.2)$ . En (a) mostramos el nivel promedio de asortatividad para cada combinación  $(p_c, \sigma^A)$ .



(a) Promedio para  $\mathcal{K}_A$  por cada valor de  $p_c$  y cada valor en  $\sigma^A$



(b) Asortatividad  $\mathcal{K}_A$  por cada  $\{\sigma^A, p_c\}$ .

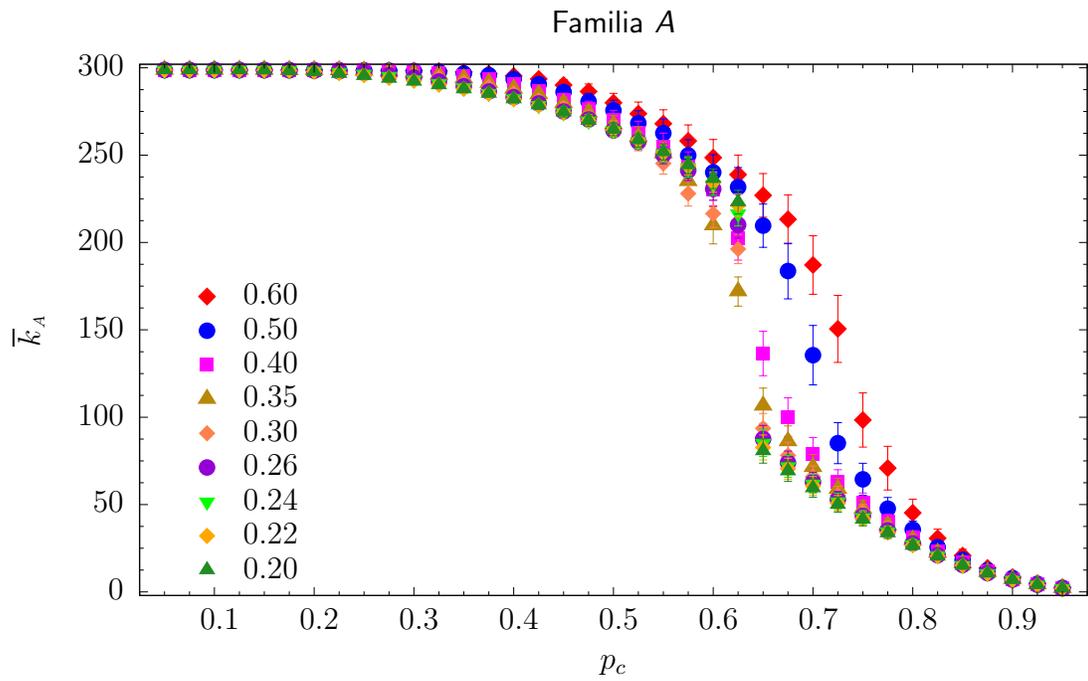
(c) Dispersión  $S_A^K$ .

**Figura 4.13:** Para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma$  en el eje de las ordenadas se muestra el valor promedio obtenido para la asortatividad.

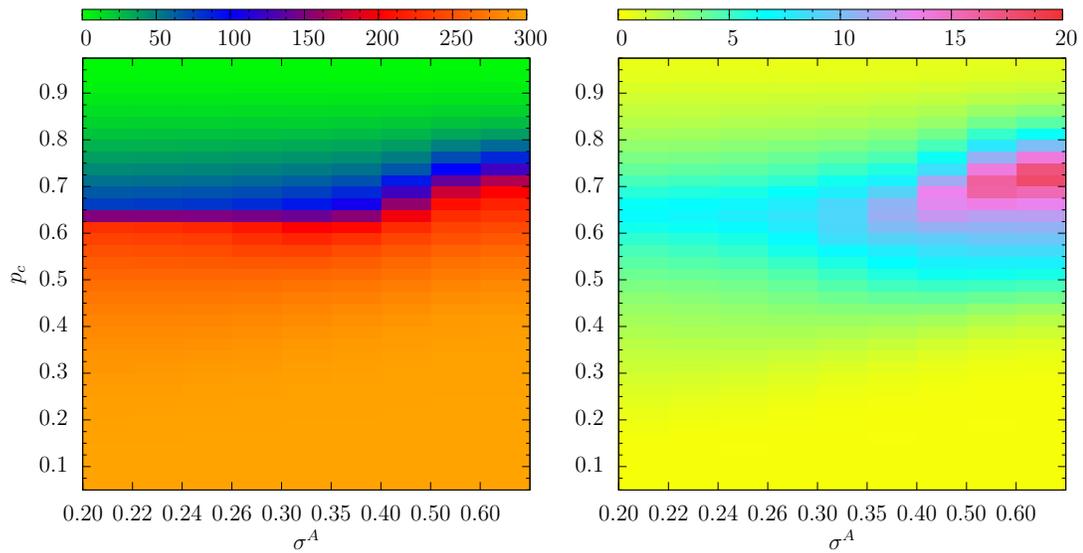
En la Figura 4.14 se muestra el grado promedio  $\bar{k}$  y en la Figura 4.15 se muestra el grado promedio  $\bar{k}_{ng}$  del grado de los vecinos de un nodo. Recuerde que el grado de un nodo es el número de enlaces incidentes a él.

Es lógico que para estas medidas también se presente una transición alrededor de  $p_c \in [0.6, 0.7]$  dado que las redes finales obtenidas son modulares y por tanto, cuando se tienen redes completamente conexas tanto el grado promedio como el grado promedio de los vecinos en la red son altos y conforme los enlaces van desapareciendo ambos promedios tienden a disminuir. Obsérvese que con esto también se puede afirmar que cuanto más grande sea  $p_c$  más desconexas se vuelven las redes; y que para valores de  $p_c \in [0.6, 0.7]$  y alrededor, justo donde se tiene la transición, también como en las medidas anteriores es donde se presenta la mayor dispersión.

El hecho de que la mayor dispersión se dé en el intervalo de transición es debido a que para valores de probabilidad alrededor y dentro de  $[0.6, 0.7]$  las combinaciones con  $\sigma^A$  son las últimas en converger, es decir, son las combinaciones en las cuales hay enlaces que tardan mucho en converger.



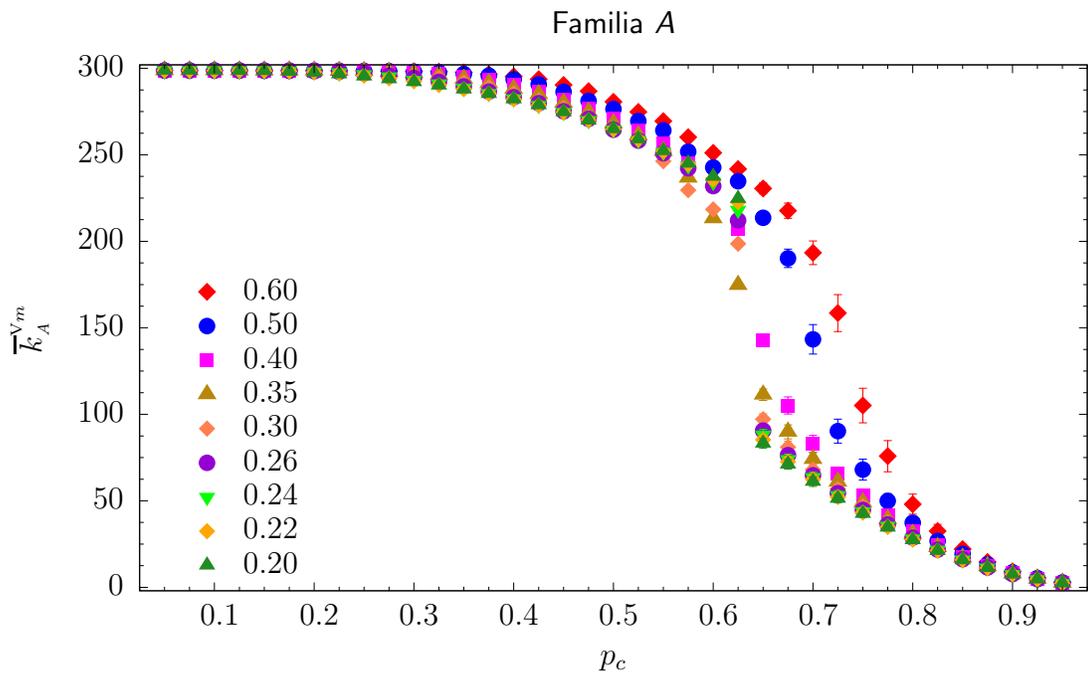
(a) Promedio para  $\bar{k}_A$  por cada valor de  $p_c$  y cada valor en  $\sigma^A$



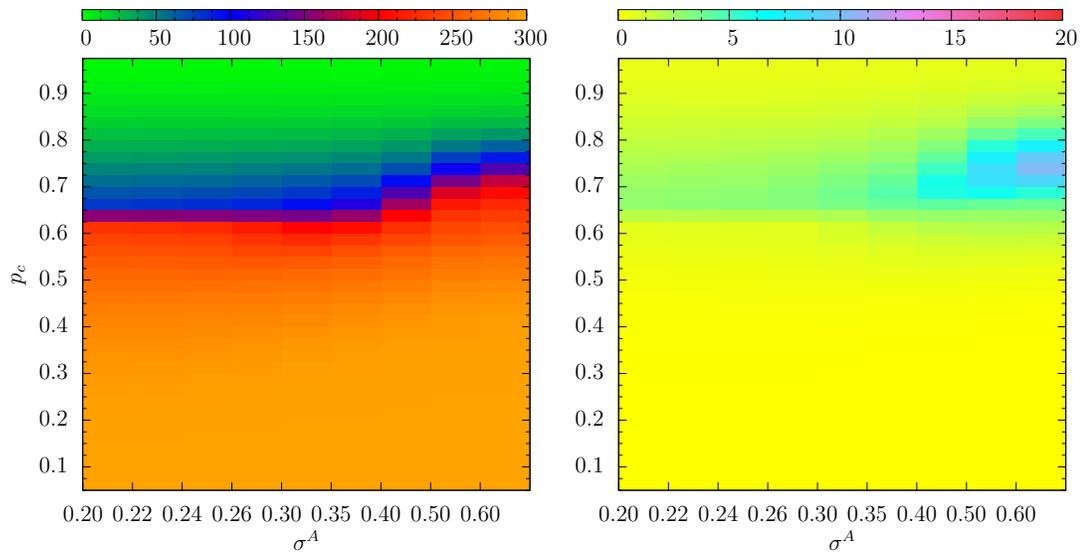
(b) Promedio de  $\bar{k}_A$  para  $\{\sigma^A, p_c\}$ .

(c) Dispersión para  $\bar{k}_A$ .

**Figura 4.14:** (a), (b) grado promedio en la red, (c) dispersión del grado promedio en la red.



(a) Promedio para  $\overline{k}_A^{V_m}$  por cada valor de  $p_c$  y cada valor en  $\sigma^A$



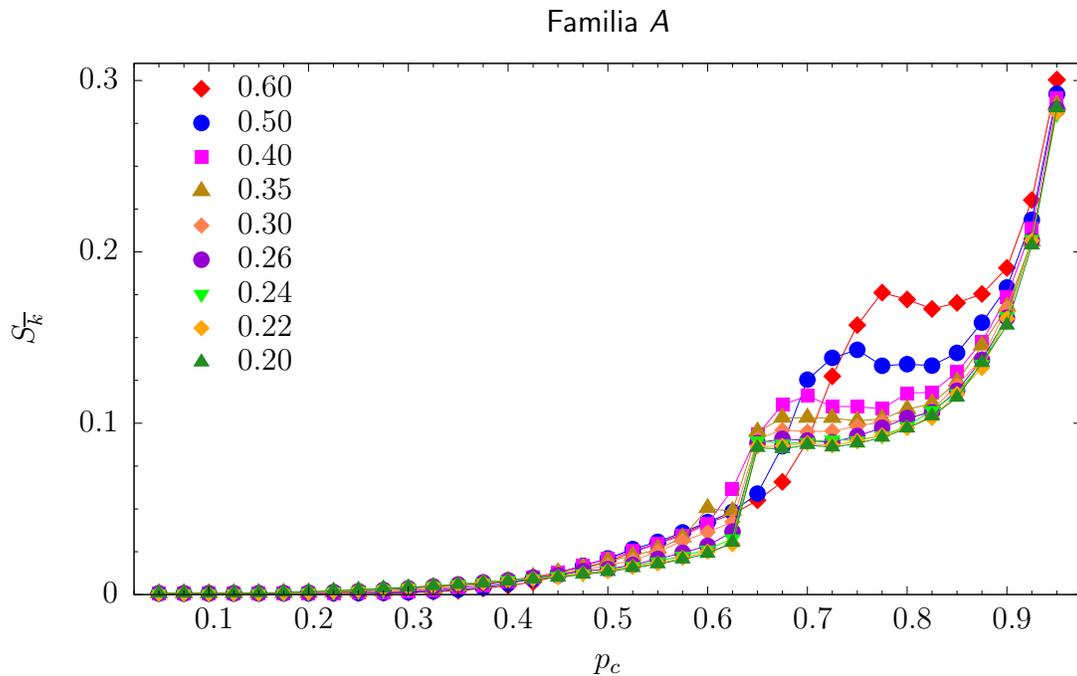
(b) Promedio de  $\overline{k}_A^{V_m}$  para  $\{\sigma, p_c\}$ .

(c) Dispersión para  $\overline{k}_A^{V_m}$ .

**Figura 4.15:** En (a) y (b) está el grado promedio de los vecinos en la red y en (c) la dispersión del grado promedio de los vecinos.

A cerca de los resultados obtenidos para  $\bar{k}$  y  $\bar{k}^{ng}$  no hay tanto que discutir como en el caso del resto de las medidas, sin embargo, un resultado interesante que vale la pena mencionar es el cociente entre la dispersión de grado promedio y su media, éste es mostrado en la figura 4.16, el cual implica que los resultados obtenidos sobre asortatividad son novedosos ya que podrían ser resultado del proceso de formación de módulos mediante un proceso trivial, el cual sería que se forman módulos, dentro de los cuales los nodos estarían unidos todos con todos, y estos módulos a su vez estarían aislados o débilmente unidos entre ellos.

Una de las cosas interesantes en este trabajo es que los módulos están bien definidos pero unidos de forma no trivial y la forma en que eso se comprueba es asegurar que la dispersión del grado es grande respecto del valor medio del grado, como se observa en la Figura 4.16.



**Figura 4.16:** Dispersión del grado promedio respecto al grado promedio.

#### 4.3.2.2 FAMILIA B

Como se observó anteriormente en los resultados correspondientes al nivel de sincronización global de esta familia, se ha visto que el nivel se mantiene en general alto para valores altos de  $p_c$  lo cual no sucede en la familia  $A$ . Como consecuencia de este resultado, se puede observar que los resultados para la modularidad obtenidos en esta familia presentan un crecimiento un tanto diferente al que se da en la familia  $A$ . Aquí se puede ver que el salto en torno al intervalo  $[0.6, 0.7]$  para  $p_c$  no es tan marcado, con lo cual se observa que el comportamiento es más bien cóncavo hacia arriba y respecto a la familia  $A$  estos resultados son numéricamente menores.

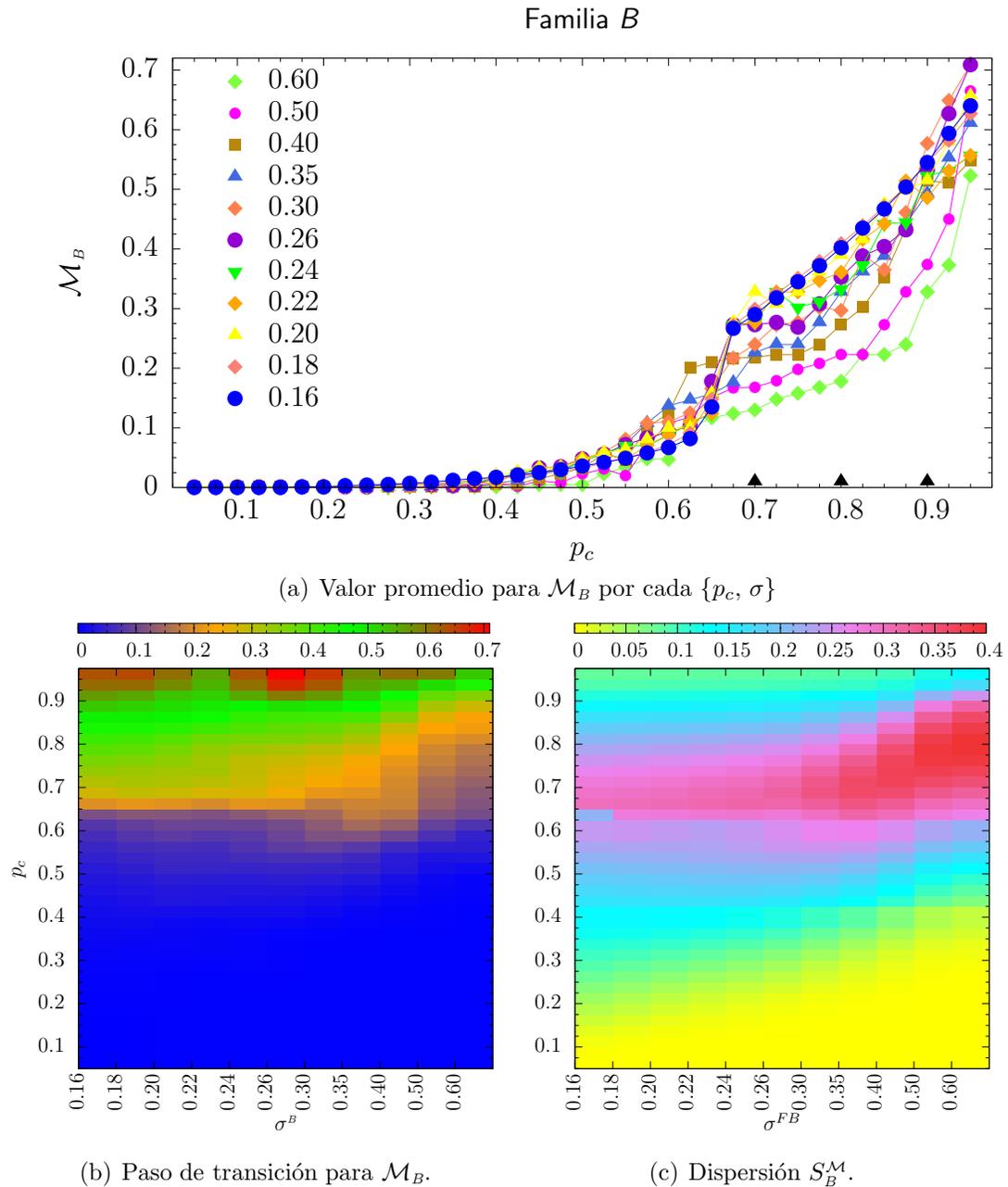
En esta familia también se puede observar que conforme  $p_c$  es mayor y el nivel de sincronización global decrece la modularidad crece, por esta razón, por ejemplo, para  $\sigma^B = 0.60$  el crecimiento es más suave y menos notable; los mismo sucede con el resto de valores de acoplamiento, cuanto más tarda en decrecer el nivel de sincronización global más tarda en aparecer la modularidad.

Una cosa importante que se debe observar en estos resultados es que la dispersión es más grande, c.f. la Figura 4.17(c), respecto a los resultados obtenidos en la familia  $A$ .

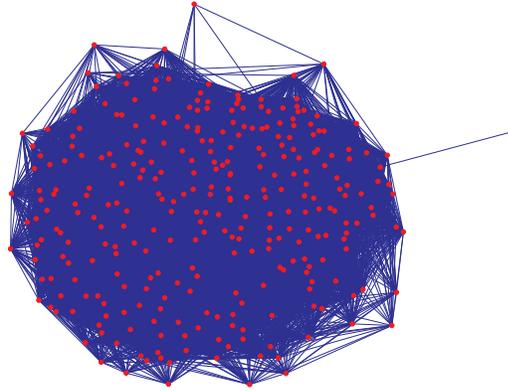
En la Figura 4.18 se muestran las redes típicamente obtenidas para valores de  $p_c = 0.7$ ,  $p_c = 0.8$  y  $p_c = 0.9$  con un valor de fuerza de acoplamiento  $\sigma^B = 0.3$ . Se muestran estas redes ya que son un ejemplo de combinaciones para las cuales se puede observar la aparición de la modularidad y en la figura 4.17(a) se puede ver la diferencia del nivel de modularidad obtenido.

Igualmente como sucede en la familia  $A$ , en esta familia conforme la modularidad incrementa las redes tienden a fraccionarse, pero a diferencia de la familia  $A$  en este caso la tendencia es menos acusada, es decir, la tasa de grupos presentes es menor con lo que la tendencia a fraccionarse no es tan marcada.

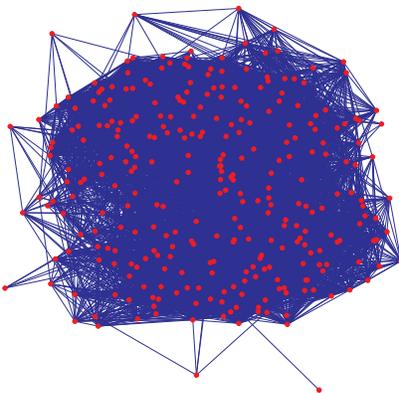
Observe que solo para esta medida se muestran los resultados obtenidos para  $\sigma^B = \{0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$  ya que es para hacer la comparación con la familia  $A$ , el resto de valores de fuerza de acoplamiento muestran un comportamiento similar a los mostrados.



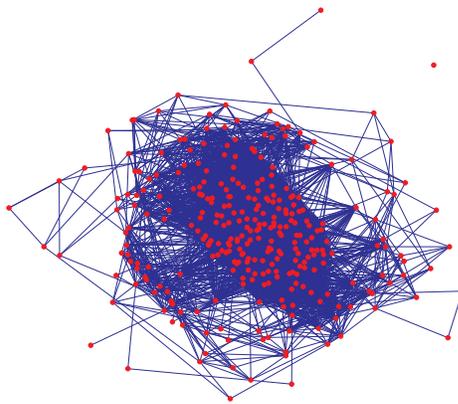
**Figura 4.17:** Para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma$  en el eje de las ordenadas se muestra el valor promedio obtenido para la modularidad.



(a) Ejemplo de red que muestra las topologías típicamente obtenidas para  $p_c = 0.7$  con  $\sigma = 0.3$ .



(b) Ejemplo de red que muestra las topologías típicamente obtenidas para  $p_c = 0.8$  con  $\sigma = 0.3$ .



(c) Ejemplo de red que muestra las topologías típicamente obtenidas para  $p_c = 0.9$  con  $\sigma = 0.3$ .

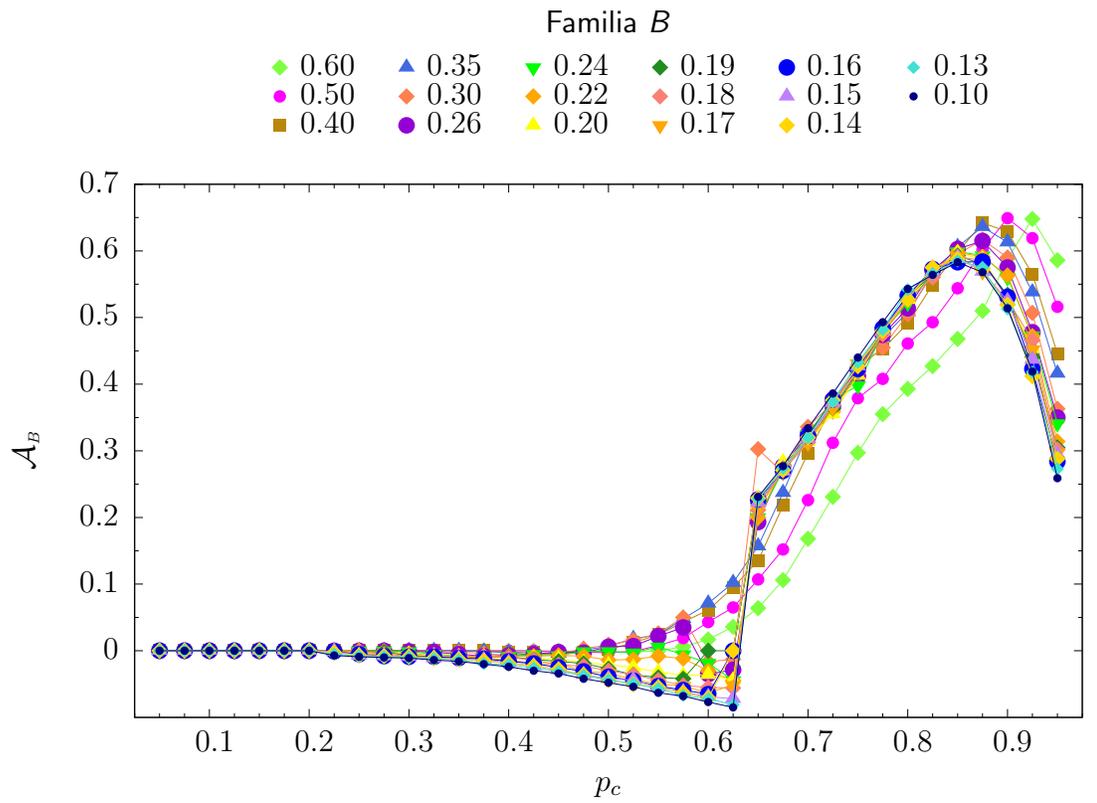
**Figura 4.18:** Ejemplos de redes que muestra las topologías típicamente obtenidas en una simulación con  $p_c = 0.7$ ,  $p_c = 0.8$  y  $p_c = 0.9$ , y  $\sigma = 0.3$ . Se observa el incremento de modularidad en la topología final conforme  $p_c$  es más grande.

En la Figura 4.19(a) se muestran los resultados sobre asortatividad  $\mathcal{A}_A$ , obtenidos con la ecuación (3.12) y en la Figura 4.20(a) se muestran los resultados sobre la prueba de asortatividad  $\mathcal{K}$ , obtenidos con la ecuación (3.14), para esta familia.

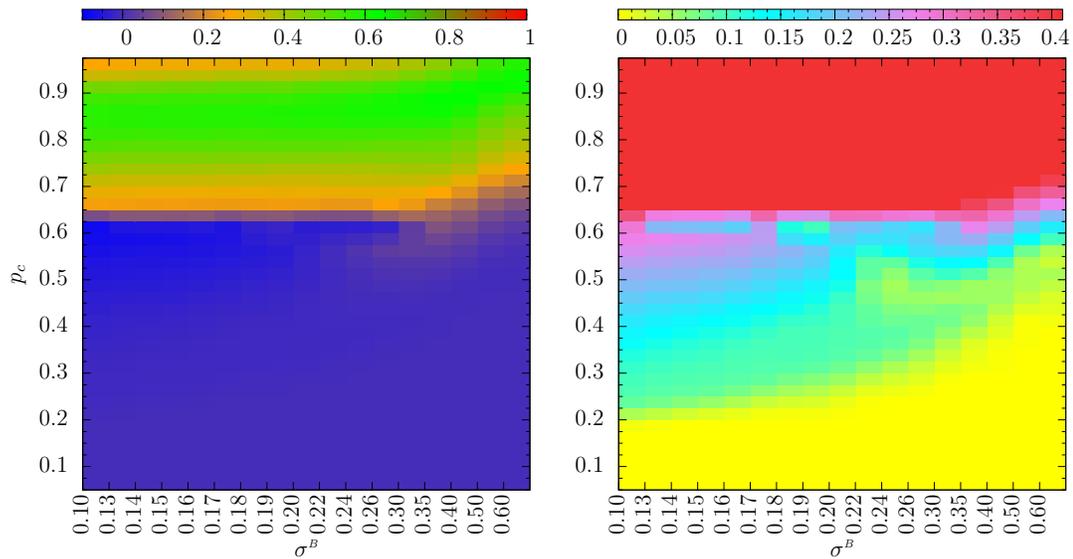
En esta familia se puede observar que hasta  $\sigma^B = 0.30$  se da un crecimiento repentino de  $p_c = 0.625$  a  $0.650$  pasando de tener un valor de asortatividad negativo a positivo, con un crecimiento de 2 a 3 décimas; ésto sucede en ambas medidas de asortatividad.

Recuerde que en esta familia hay combinaciones  $(p_c, \sigma^B)$  que no convergen (Tabla 4.8) o decaen bruscamente (tabla 4.9), en esta medida eso se ve reflejado en los correspondientes valores, desde  $p_c = 0.575$  hasta  $p_c = 0.650$  para valores de fuerza de acoplamiento menores a partir de  $\sigma^B = 0.30$ .

También se puede observar que aunque el comportamiento es cóncavo hacia arriba (similar a la familia  $A$ ) a partir de  $p_c$  alrededor de  $0.7$  y que inclusive para  $\sigma^B = \{0.50, 0.60\}$  se obtiene un valor de asortatividad mayor para  $p_c = 0.9$  y  $p_c = 0.925$ , respectivamente, la dispersión es mayor para más combinaciones, sobre todo para combinaciones con  $p_c$  en torno a  $[0.5, 0.6]$ .



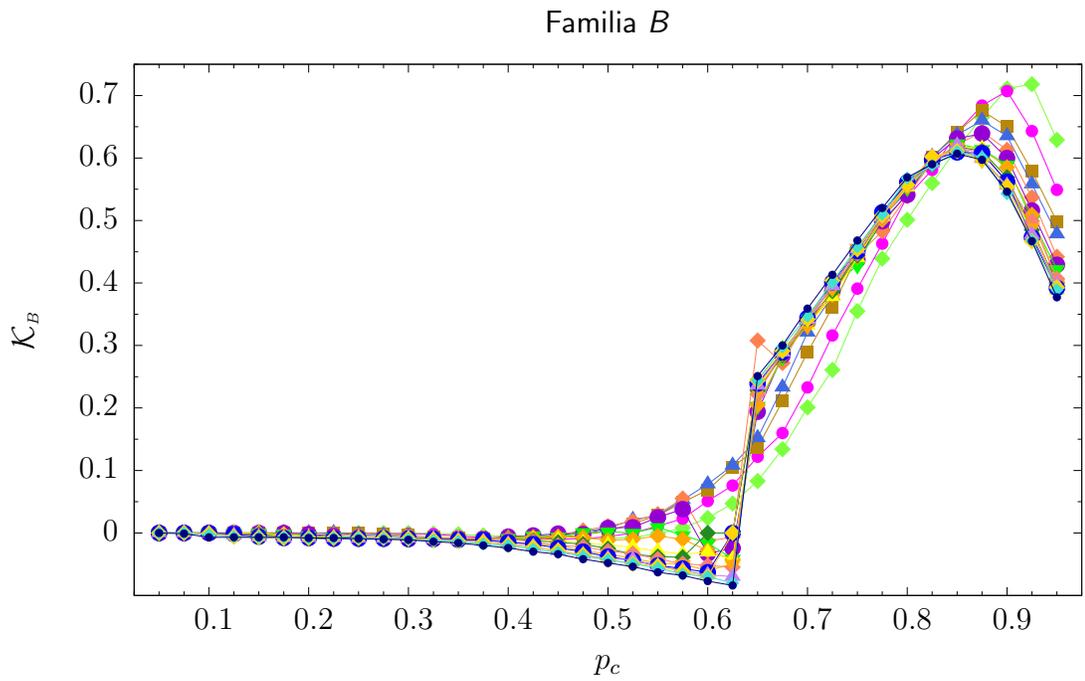
(a) Valor promedio para  $\mathcal{A}_B$  por cada  $\{p_c, \sigma^B\}$



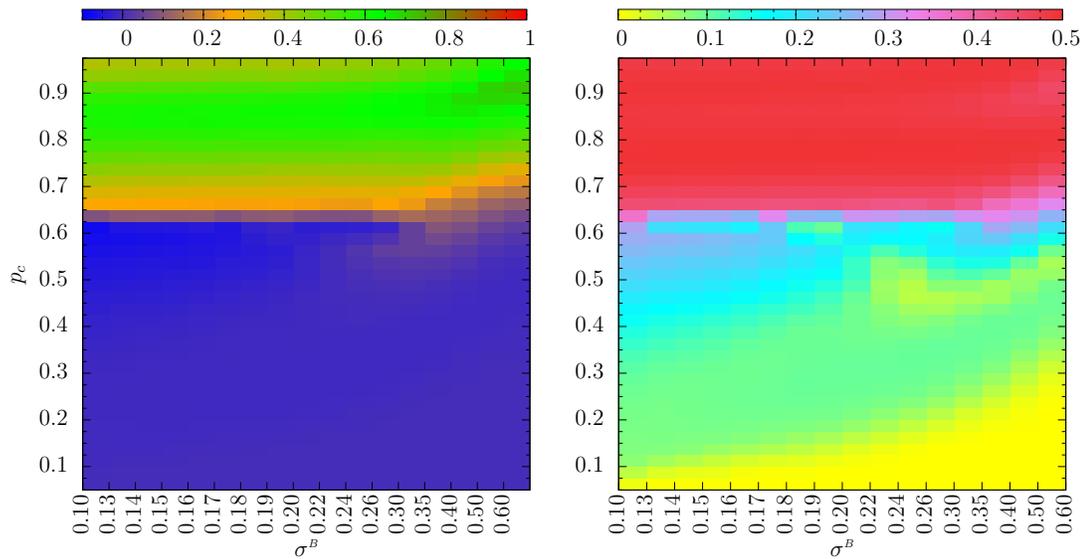
(b) Promedio  $\mathcal{A}_B$  por cada  $\{\sigma^B, p_c\}$ .

(c) Dispersión  $S_B^4$ .

**Figura 4.19:** Para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma$  se muestra el valor promedio obtenido para la assortatividad  $\mathcal{A}_B$ .



(a) Valor promedio para  $\mathcal{K}_B$  por cada  $\{p_c, \sigma\}$



(b) Asortatividad  $\mathcal{K}_B$  por cada  $\{\sigma^B, p_c\}$ .

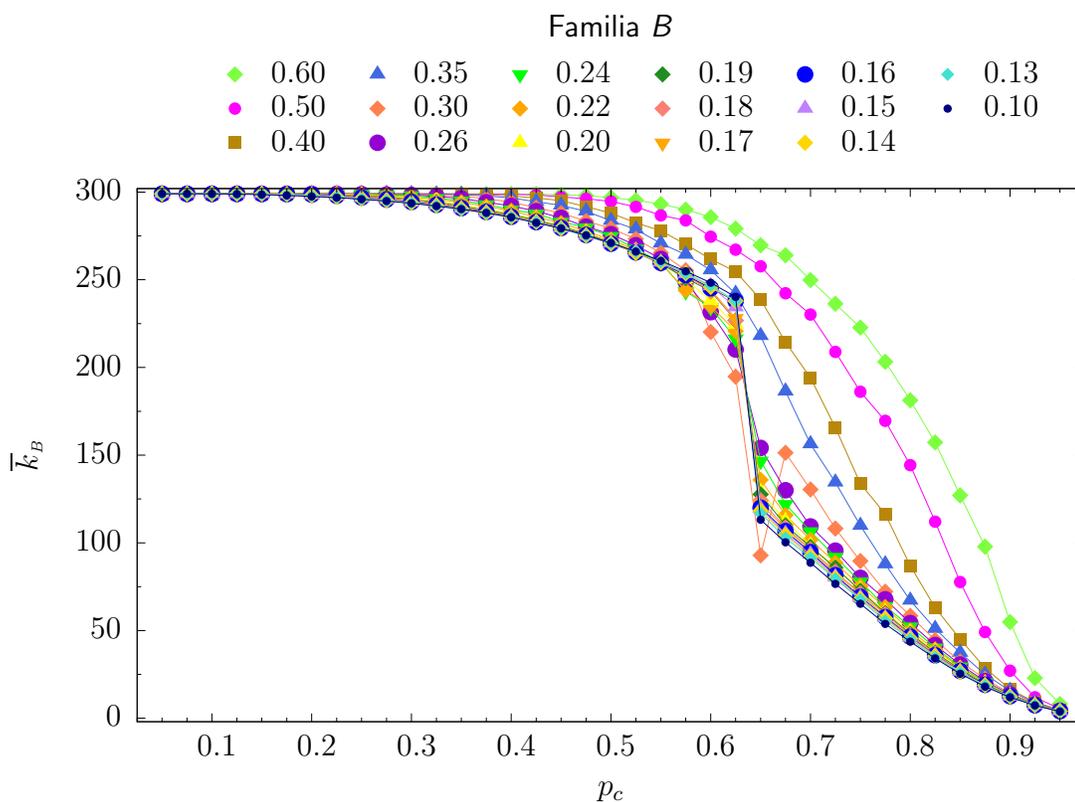
(c) Dispersión  $S_B^K$ .

**Figura 4.20:** Para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma$  se muestra el valor promedio obtenido para la prueba de asortatividad.

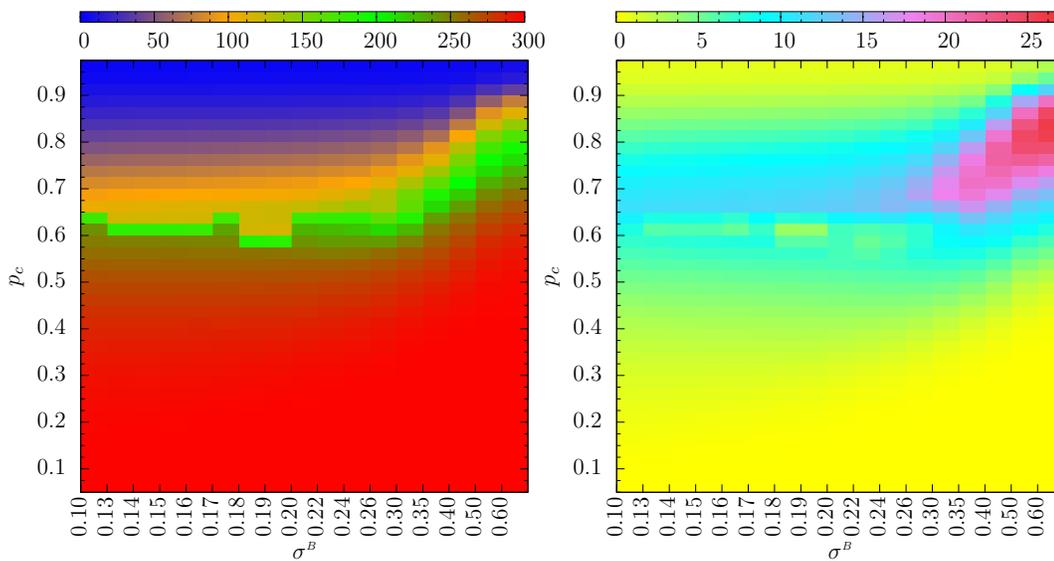
En la Figura 4.21 se muestra el grado promedio  $\bar{k}_B$  y en la Figura 4.22 se muestra el grado promedio  $\bar{k}_B^{V_m}$  del grado de los vecinos de un nodo.

En este caso, también es lógico que se presente una transición en torno a  $p_c = 0.6$  dado que las redes finales obtenidas son modulares y por tanto, cuando se tienen redes completamente conexas tanto el grado promedio como el grado promedio de los vecinos en la red son altos y conforme los enlaces van desapareciendo ambos promedios tienden a disminuir. Obsérvese que con ésto reforzamos la conclusión de que cuanto más grande sea  $p_c$  más desconexas se vuelven las redes; y que para valores de  $p_c \in [0.6, 0.7]$  y alrededor, justo donde se tiene la transición, también como en las medidas anteriores es donde se presenta la mayor dispersión. En esta familia también se obtiene una mayor dispersión para estas medidas cuando  $\sigma^B$  es mayor que 0.30 para valores altos de  $p_c$ .

El hecho de que la mayor dispersión se dé en el intervalo de transición es debido a que para valores de probabilidad alrededor y dentro de  $[0.6, 0.7]$  las combinaciones con  $\sigma^B$  menor que 0.30 son las últimas en converger, es decir, son las combinaciones en las cuales hay enlaces que tardan mucho en converger o no convergen.



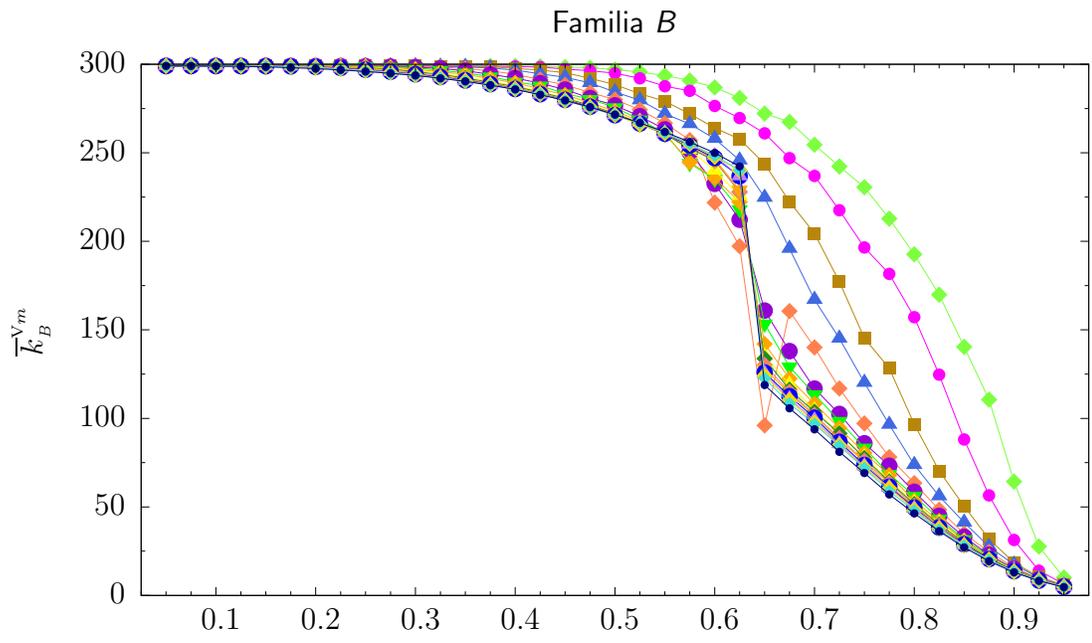
(a) Valor promedio  $\bar{k}_B$  por cada  $\{p_c, \sigma\}$



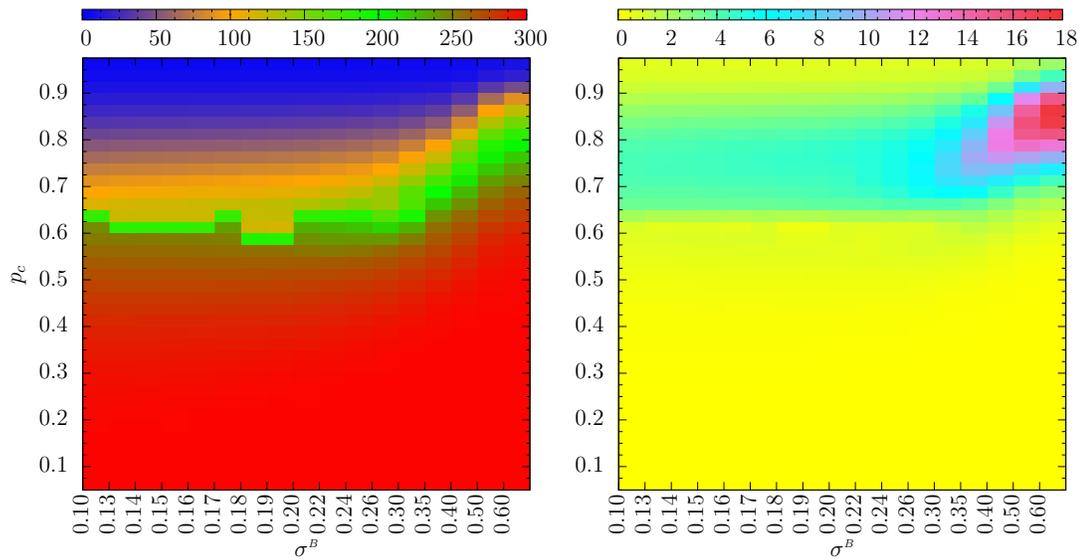
(b) Promedio  $\bar{k}_B$  por cada  $\{\sigma^B, p_c\}$ .

(c) Dispersión  $S_{\bar{k}_B}^2$ .

**Figura 4.21:** En (a) y (b) está el grado promedio en la red y en (c) la desviación estándar del grado promedio en la red.



(a) Valor promedio para  $\overline{k}_B^{V_m}$  por cada  $\{p_c, \sigma\}$



(b) Promedio  $\overline{k}_B^{V_m}$  por cada  $\{\sigma^B, p_c\}$ .

(c) Dispersión  $S_B^{V_m}$ .

**Figura 4.22:** En (a) y (b) está el grado promedio de los vecinos en la red y en (c) la dispersión del grado promedio de los vecinos.

### 4.3.2.3 FAMILIA C

La mitad de las frecuencias naturales se han definido a 0.8 y el resto a 1.2 con todos los pesos inicializados a 0.5.

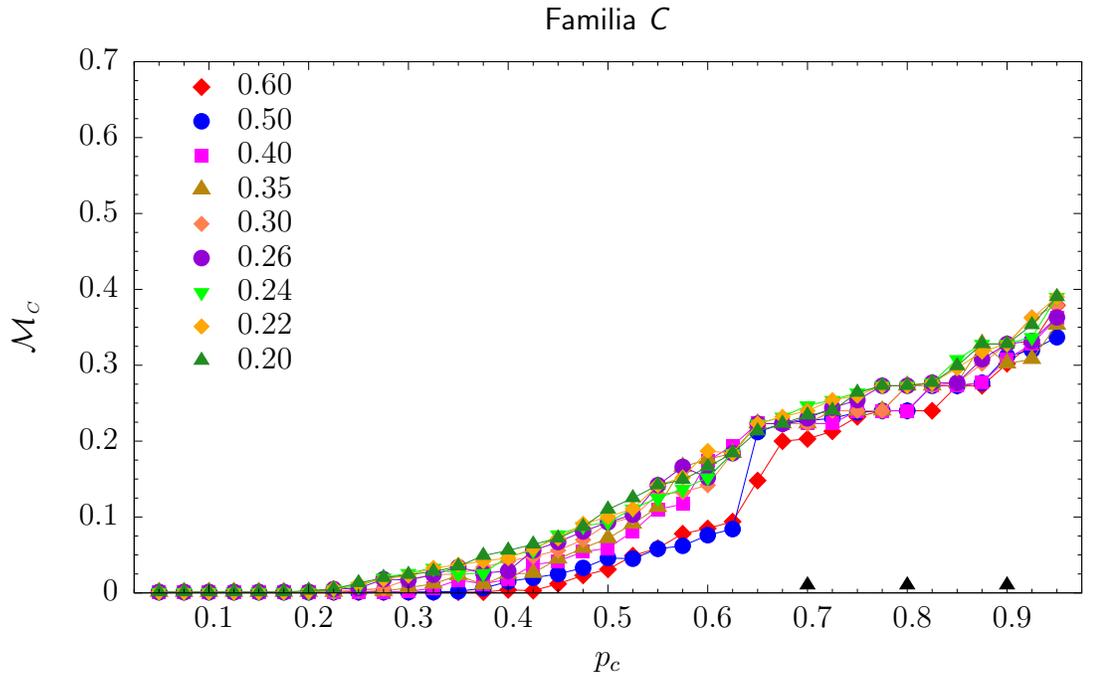
Como se observó anteriormente en los resultados correspondientes al nivel de sincronización global de esta familia, se ha visto que el nivel se mantiene en general alto para valores  $p_c$  hasta 0.625 y  $\sigma^C$  mayor a partir de 0.040. Para el resto de los valores de fuerza de acoplamiento y todos los valores de  $p_c$  se ha observado que en general los niveles de sincronización global que se tiene para esta familia son mayores que los que se obtiene en la familia  $A$ , sin embargo, en este caso presentan una mayor dispersión. Como consecuencia de este resultado, se puede observar que los resultados para la modularidad obtenidos en esta familia presentan un crecimiento lento comparado con el que se da en la familia  $A$  y en la familia  $C$ . Aquí se puede observar que no hay un salto distinguible en torno algún valor de  $p_c$ , excepto para  $\sigma^C = \{0.50, 0.60\}$  con  $p_c \in [0.625, 0.675]$ . Además, la modularidad más alta obtenida es entorno a la mitad de la obtenida en las otras familias.

Una cosa importante que se debe observar en estos resultados es que la dispersión en general es pequeña excepto para  $p_c = 0.65$  con  $\sigma^C = 0.50$ , c.f. la Figura 4.23(c). Para esta combinación se obtiene una dispersión de 0.5030

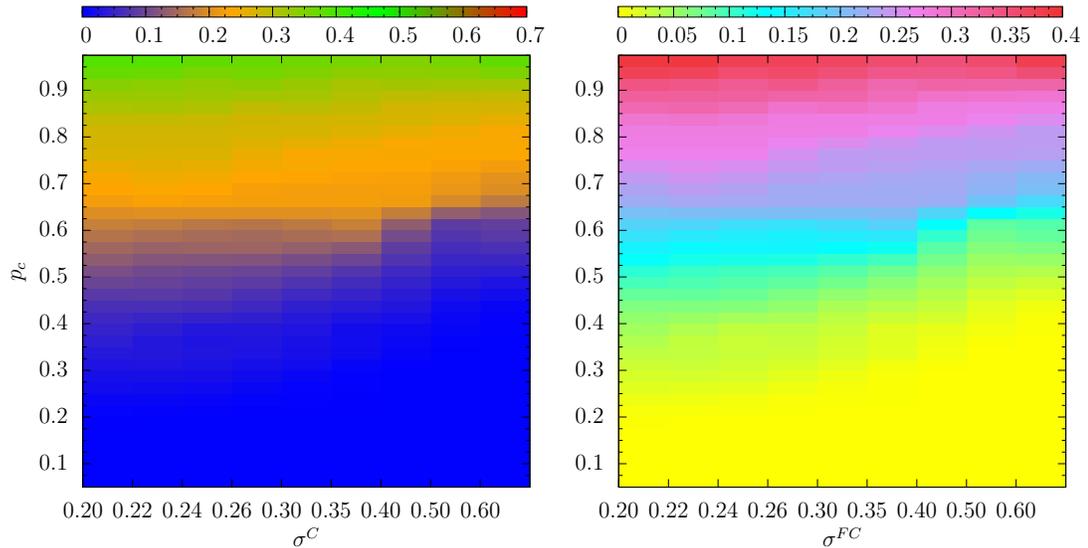
En la Figura 4.24 se muestran las redes típicamente obtenidas para valores de  $p_c = 0.6$ ,  $p_c = 0.7$  y  $p_c = 0.8$  con un valor de fuerza de acoplamiento  $\sigma^B = 0.8$ . Se muestran estas redes ya que son un ejemplo de combinaciones para las cuales se puede observar la aparición de la modularidad y en la figura 4.23(a) se puede ver que la diferencia del nivel de modularidad obtenido no es muy notable, mas sin embargo las módulos están bien definidos.

La modularidad en este familia, como en las anteriores, se incrementa pero de una manera diferente a lo que sucedía en las familias  $A$  y  $B$ , aquí los grupos que se forman son menos, c.f. la Figura 4.23, pero son más densos.

Igualmente para esta medida se muestran solo los resultados obtenidos para  $\sigma^B = \{0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$  ya que también es por hacer la comparación con la familia A, el resto de valores de fuerza de acoplamiento muestran un comportamiento similar a los mostrados.



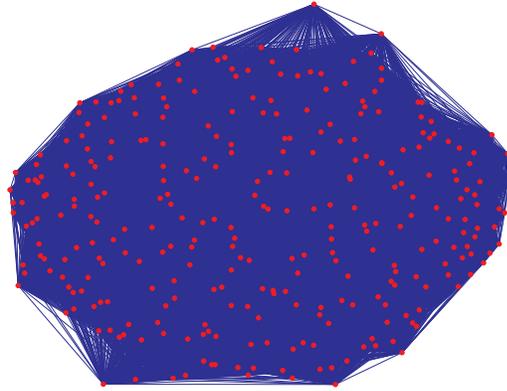
(a) Valor promedio para  $M_C$  por cada  $\{p_c, \sigma^B\}$



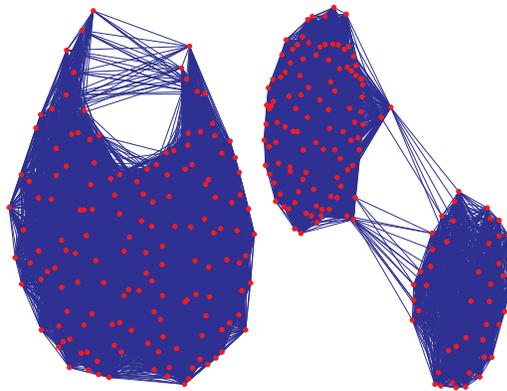
(b) Promedio  $M_C$  por cada  $\{\sigma^B, p_c\}$ .

(c) Dispersión  $S_C^M$ .

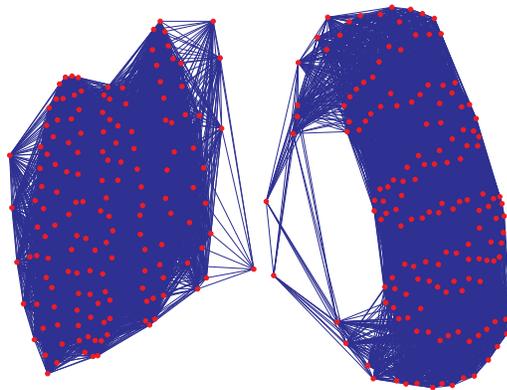
**Figura 4.23:** Para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma$  en el eje de las ordenadas se muestra el valor promedio obtenido para la modularidad.



(a) Ejemplo de red que muestra las topologías típicamente obtenidas para  $p_c = 0.6$  con  $\sigma = 0.8$ .



(b) Ejemplo de red que muestra las topologías típicamente obtenidas para  $p_c = 0.7$  con  $\sigma = 0.8$ .



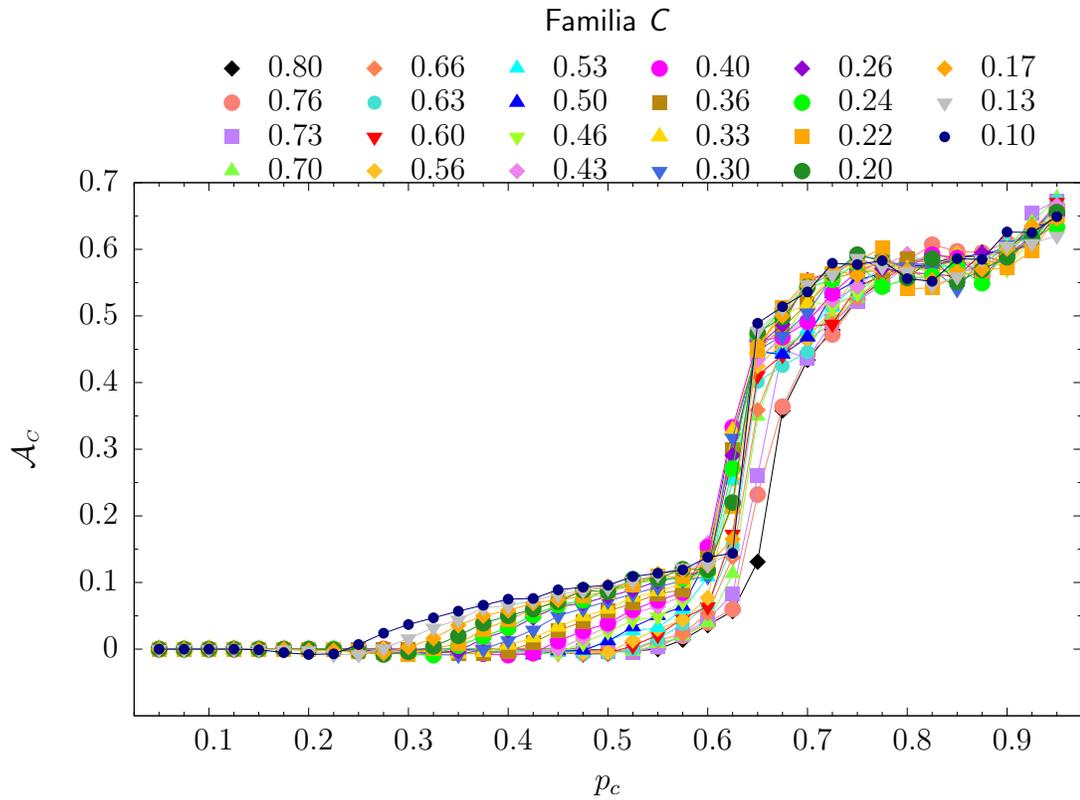
(c) Ejemplo de red que muestra las topologías típicamente obtenidas para  $p_c = 0.8$  con  $\sigma = 0.8$ .

**Figura 4.24:** Ejemplos de redes que muestra las topologías típicamente obtenidas en una simulación con  $p_c = 0.6$ ,  $p_c = 0.7$  y  $p_c = 0.8$ , y  $\sigma = 0.8$ . Se observa el incremento de modularidad en la topología final conforme  $p_c$  es más grande.

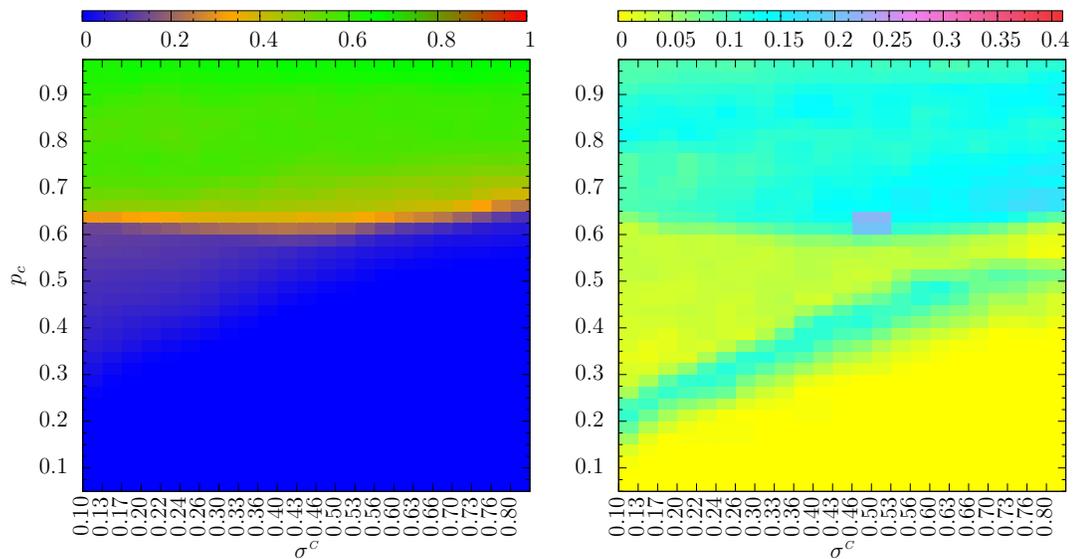
En la Figura 4.25(a) se muestran los resultados sobre asortatividad  $\mathcal{A}$  y en la Figura 4.26(a) se muestran los resultados sobre la prueba de asortatividad  $\mathcal{K}$ , obtenidos para esta familia.

Aquí se puede observar que ambas medidas presentan el mismo comportamiento, incluso la diferencia está en los promedios obtenidos cuando  $p_c$  es mayor que 0.8. La tendencia de crecimiento que se observa, es debida a los resultados obtenidos para el nivel de sincronización global y local que se han obtenido, como pasa en las otras familias. Obsérvese que hasta  $p_c$  aproximadamente en 0.625 el crecimiento es muy suave, y hasta este valor de  $p_c$  el respectivo nivel de sincronización global obtenido es alto en general. Como sucedía con las sincronización local ??, ambas medidas de asortatividad crecen rápidamente para  $p_c \in [0.6, 0.675]$ , y a partir de estos valores la tendencia sigue siendo creciente aunque los resultados obtenidos siguen siendo comparables con los obtenidos en la familia  $A$ .

Los resultados obtenidos para el grado promedio y el grado promedio de los vecinos son mostrados en las figuras 4.27 y 4.28. En este caso también se observa que la mayor diferencia se da en torno a  $p_c \in [0.6, 0.675]$ , cuando el nivel de sincronización global decrece y el nivel de sincronización local crece. De las tres familias, es en ésta en donde se obtiene la menor dispersión para ambas medidas de grado promedio, sin embargo, esto no significa que los resultados obtenidos en esta familia sean los mejores.



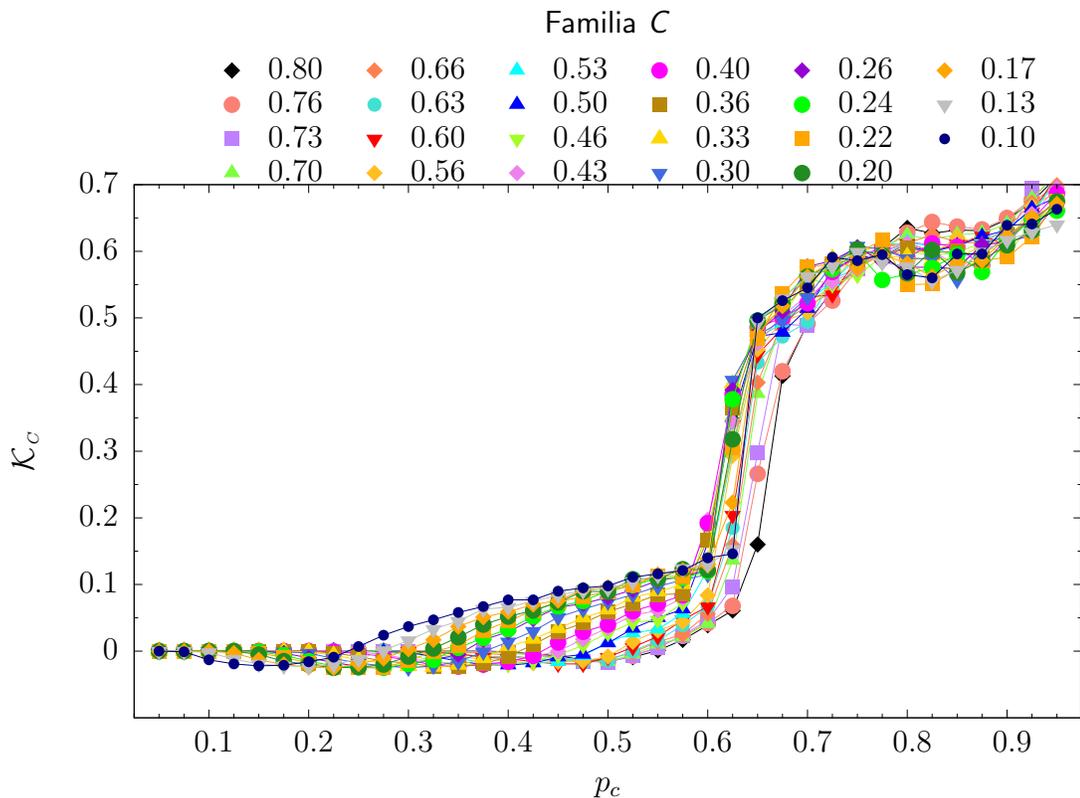
(a) Valor promedio para  $\mathcal{A}_C$  por cada  $\{p_c, \sigma^C\}$



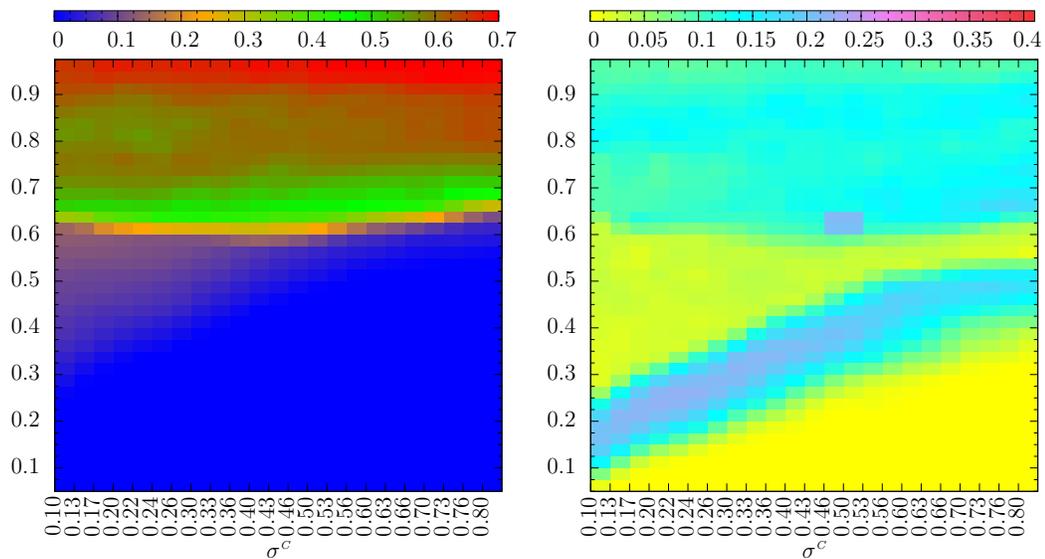
(b) Promedio  $\mathcal{A}_C$  por cada  $\{p_c, \sigma^C\}$ .

(c) Dispersión  $\mathcal{A}_C$ .

**Figura 4.25:** Para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma^C$  se muestra el valor promedio obtenido para la asortatividad.



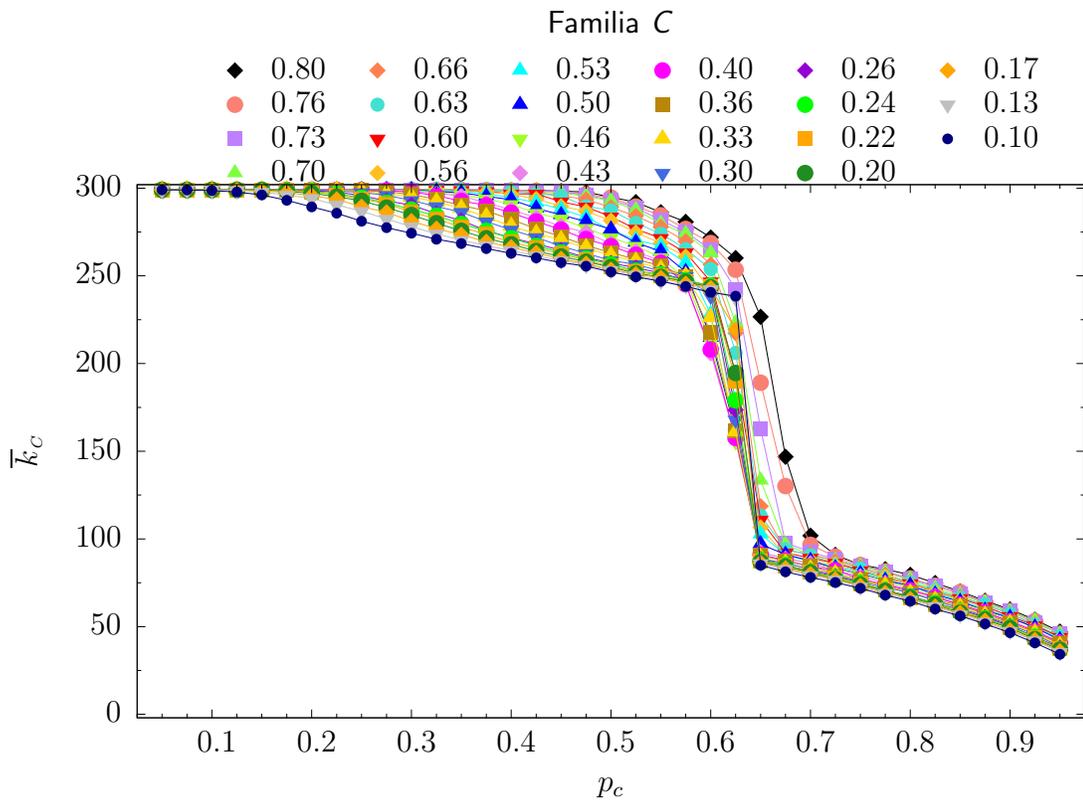
(a) Valor promedio para  $\mathcal{K}_C$  por cada  $\{p_c, \sigma^C\}$



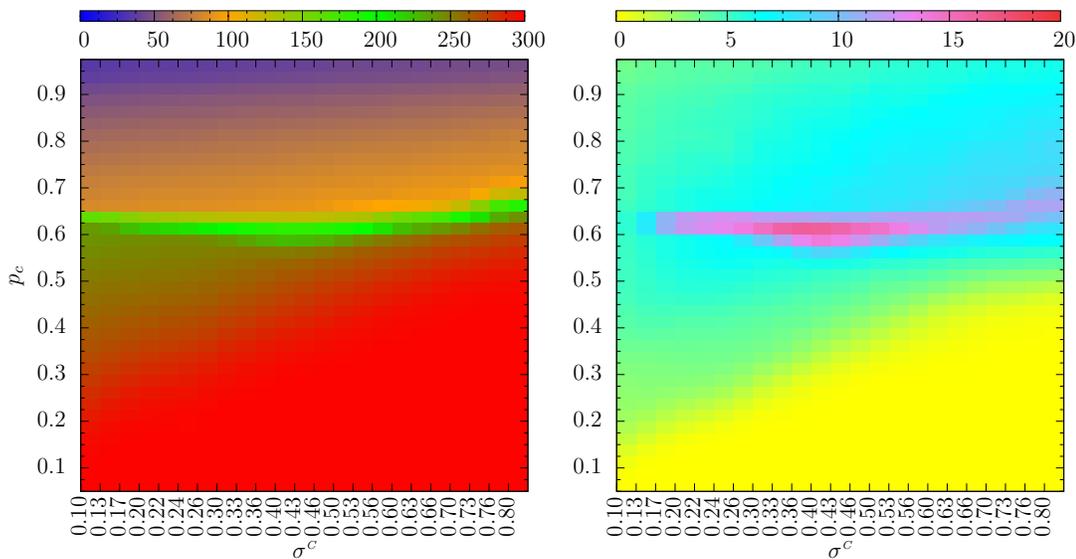
(b) Promedio para  $\mathcal{K}_C$  por cada  $\{\sigma^C, p_c\}$ .

(c) Dispersión  $S_C^{\mathcal{K}}$ .

**Figura 4.26:** Para cada valor de  $p_c$  y  $\sigma$  se muestra el valor promedio obtenido para la prueba de asortatividad.



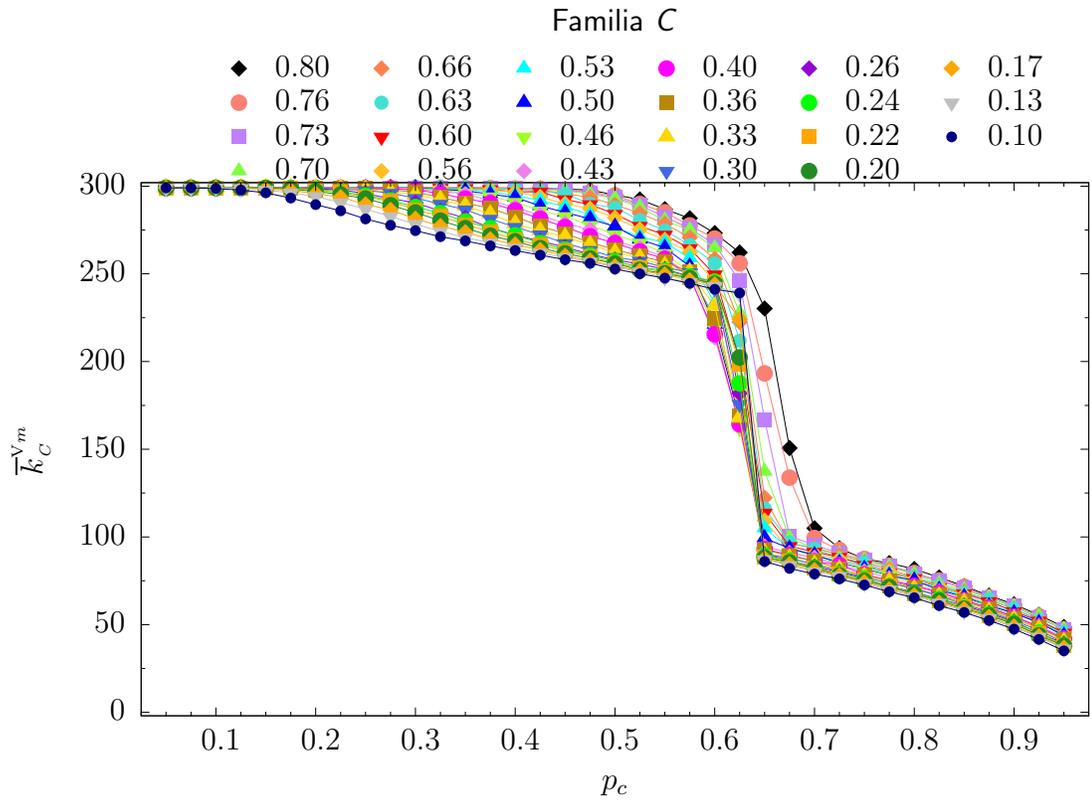
(a) Valor promedio para  $kmd_C$  por cada  $\{p_c, \sigma\}$



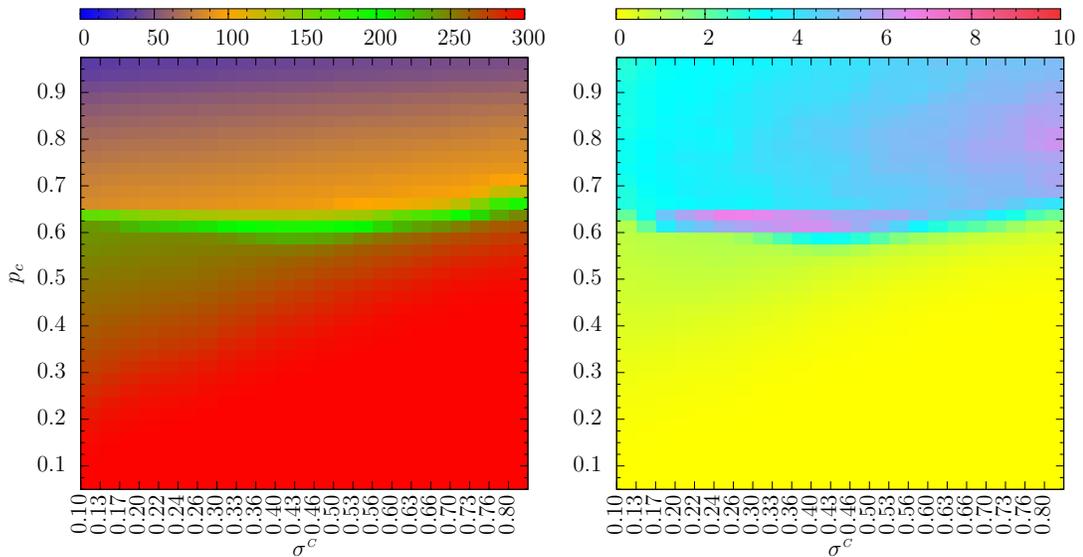
(b) Promedio  $\bar{k}_C$  por cada  $\{\sigma^C, p_c\}$ .

(c) Desviación estándar  $S_C^{\bar{k}}$ .

**Figura 4.27:** (a), (b) grado promedio en la red, (c) desviación estándar del grado promedio en la red.



(a) Valor promedio para  $\bar{k}_C^{V_m}$  por cada  $\{p_c, \sigma^C\}$



(b) Promedio  $\bar{k}_C^{V_m}$  por cada  $\sigma^C, p_c$ .

(c) Dispersión  $\bar{k}_C^{V_m}$ .

**Figura 4.28:** (a), (b) grado promedio de los vecinos en la red, (c) dispersión del grado promedio de los vecinos.

## 4.4 CONCLUSIONES SOBRE LOS EXPERIMENTOS

Con los experimentos realizados se observa que efectivamente la sincronización en redes, las propiedades dinámicas y topológicas se influyen mutuamente y ésta requiere de una estructura modular la cual se determina evolutivamente con el modelo propuesto.

De las tres familias mostradas, los resultados más novedosos son los obtenidos con la familia *A*. Éstos son los que mejor se comportan a pesar de que no se tiene un modelo determinista.

La novedad de los resultados que se obtienen radica en el modelo, ya que tanto la modularidad como la asortatividad aparecen de forma dinámica. En el modelo no se impone la topología, sino que ésta surge de forma natural, únicamente por adaptación a la dinámica de los nodos. Estudios con modelos como el propuesto en este trabajo hay muy pocos en la literatura.

Este trabajo es fundamental para probar que sí se puede estudiar cómo es que la modularidad y la asortatividad surgen dinámicamente, tal y como sucede en las redes reales, y de este modo empezar a entender cómo es que éstas tienen la estructura que presentan. En este sentido su aporte es más conceptual que aplicable.

## CAPÍTULO 5

# CONVERGENCIA

---

En algunos casos, los enlaces tardan mucho en converger, o no convergen en un tiempo razonable, porque los pesos comienzan a oscilar. Este comportamiento oscilante es debido a que de alguna manera el comportamiento de los enlaces se adapta a la dinámica de los nodos que unen. El enlace sigue durante un tiempo a un nodo y luego pasa a seguir al otro nodo. En este capítulo presentamos una justificación sobre el comportamiento de los enlaces que tardan en converger o no convergen.

## 5.1 JUSTIFICACIÓN DEL PORQUÉ EN ALGUNOS CASOS

### LOS ENLACES NO CONVERGEN

Se mencionó en el capítulo 4 que a pesar de que todas las simulaciones están cumpliendo el criterio de parada, hubo diferencias notables en sus tiempos de ejecución. Curiosamente, estas diferencias se deben a relativamente pocos enlaces, generalmente menos de 100. Esto significa que algunas combinaciones  $(\sigma, p_c)$  dan lugar a enlaces que convergen muy lentamente y por tanto exigen un 90% o más de tiempo para terminar la simulación.

Un resultado teórico de Li et al. [2008] indica que en las redes formadas por dos módulos de osciladores de fase interactuando, la mayoría de ellos contribuyen al comportamiento síncrono, pero unos pocos osciladores se encuentran en una situación de frustración debido a las diferentes entradas de los dos módulos. Como consecuencia

de ello, si los osciladores en el núcleo de estas comunidades tienen frecuencias  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , los osciladores situados entre los dos módulos oscilan alrededor de  $\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$  con una frecuencia  $\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}$ .

Cuando se estudió el comportamiento de los enlaces renuentes a converger, se observó un comportamiento oscilatorio, con amortiguaciones más bien pequeñas. Por lo tanto, tiene sentido comprobar si el cambio de comportamiento encontrado para la dinámica de los osciladores frustrados es consecuencia de los enlaces. Esto se puede hacer de la manera siguiente. Si el peso  $w_{mn}$  entre los nodos  $m$  y  $n$  es oscilante, se puede calcular la frecuencia real de oscilación  $\Omega_{mn}^{\text{exp}}$  a partir de los datos, y compararlo con el valor teórico, el cual es la mitad de la diferencia entre las frecuencias instantáneas de los nodos unidos,  $\Omega_{mn}^{\text{teor}} := (\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_n)/2$ . En un ajuste perfecto se espera encontrar que todos los puntos están a lo largo de una línea recta con pendiente 1.

Para probar el comportamiento oscilante de los enlaces que tardan mucho en converger elegimos el enlace que peor cumple la condición de parada y hacemos el siguiente ajuste:

$$y = a + b \sin(ct + d), \quad (5.1)$$

donde  $y$  es el valor de dicho enlace al tiempo  $t$  y donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son los parámetros que hay que ajustar.

Cuando  $y$  es discretizada se tiene que

$$y_n = a + b \sin(c\Delta t n + d), \quad (5.2)$$

donde  $\Delta t$  es el paso temporal usado en la simulación del modelo. ¿Cómo se ajustan los datos obtenidos a una función de la forma (5.2)? Lo que tenemos que hacer es darnos cuenta de que la derivada de (5.1) es

$$y' = bc \cos(ct + d) \quad (5.3)$$

y que

$$\left(\frac{y-a}{b}\right)^2 + \left(\frac{y'}{cb}\right)^2 = 1, \quad (5.4)$$

ya que de (5.1) tenemos que

$$\frac{y-a}{b} = \sin(ct+d) \quad (5.5)$$

y de (5.3)

$$\frac{y'}{bc} = \cos(ct+d), \quad (5.6)$$

luego haciendo uso de la propiedad  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  acabamos.

En la versión discreta lo que tendríamos es que

$$\left(\frac{y_n-a}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_n-y_{n-1}}{\Delta tcb}\right)^2 = 1, \quad (5.7)$$

porque  $y'_n = \frac{y_n-y_{n-1}}{\Delta t}$  (solo válido para  $n > 1$ ).

Ahora vamos a definir

$$z_n := \left(\frac{y_n-y_{n-1}}{\Delta t}\right)^2 \quad (5.8)$$

ya que de esta forma multiplicando la ecuación (5.7) por  $c^2b^2$  se tiene que:

$$\begin{aligned} c^2b^2 \frac{(y_n-a)^2}{b^2} + c^2b^2 \frac{(y_n-y_{n-1})^2}{(\Delta t)^2 c^2 b^2} &= c^2b^2 \\ c^2(y_n-a)^2 + \left(\frac{y_n-y_{n-1}}{\Delta t}\right)^2 &= c^2b^2 \\ c^2(y_n^2 - 2ay_n + a^2) + z_n &= c^2b^2 \\ c^2y_n^2 - 2ac^2y_n + a^2c^2 + z_n &= c^2b^2 \\ z_n &= -c^2y_n^2 + 2ac^2y_n - a^2c^2 + c^2b^2 \\ z_n &= -c^2y_n^2 + 2ac^2y_n + c^2(b^2 - a^2), \end{aligned} \quad (5.9)$$

y esto es un ajuste multi-lineal de  $z_n$  a  $\{y_n^2, y_n, 1\}$  con  $\{a, b, c\}$  parámetros a determinar.

Matricialmente tenemos que si:

$$\vec{Z} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ y } M := \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^2 & y_n & 1 \end{pmatrix}.$$

donde recordemos que  $z_0$  no puede ser calculada y por eso no aparece, entonces se verifica que

$$\vec{Z} = M \begin{pmatrix} -c^2 \\ 2ac^2 \\ c^2(b^2 - a^2) \end{pmatrix}$$

es decir, estamos buscando un vector  $\vec{\beta}$  tal que

$$\vec{Z} = M\vec{\beta}, \tag{5.10}$$

porque de esta manera

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -c^2 \\ \beta_1 &= 2ac^2 \\ \beta_2 &= c^2(b^2 - a^2). \end{aligned} \tag{5.11}$$

A nosotros solo nos interesa  $\beta_0$  porque nos permite calcular  $c$ , que es la estimación de la frecuencia a la que oscila el enlace. No obstante, podríamos obtener el resto, excepto  $d$ , si nos interesara.

Para calcular la solución  $\vec{\beta}$  de (5.10), sabemos que la matriz  $M$  no es degenerada, es decir, sus columnas son linealmente independientes y podemos multiplicar

por la izquierda la ecuación (5.10) por  $M^\top$ :

$$M^\top \vec{Z} = M^\top M \vec{\beta}, \quad (5.12)$$

y  $(M^\top M)$  será una matriz  $3 \times 3$  con determinante no nulo e invertible. Luego podemos expresar  $\vec{\beta}$  como:

$$\vec{\beta} = (M^\top M)^{-1} M^\top \vec{Z}. \quad (5.13)$$

Pero la matriz  $M^\top M$  tiene la forma

$$M^\top M := \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{d} \\ \tilde{c} & \tilde{d} & \tilde{e} \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

que depende de cinco cantidades fácilmente calculables:

$$\tilde{a} = \sum_{i=1}^n y_i^4, \quad \tilde{b} = \sum_{i=1}^n y_i^3, \quad \tilde{c} = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad \tilde{d} = \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{y} \quad \tilde{e} = \sum_{i=1}^n 1,$$

siendo  $n$  el tamaño de la muestra que se usa para calcular los promedios.

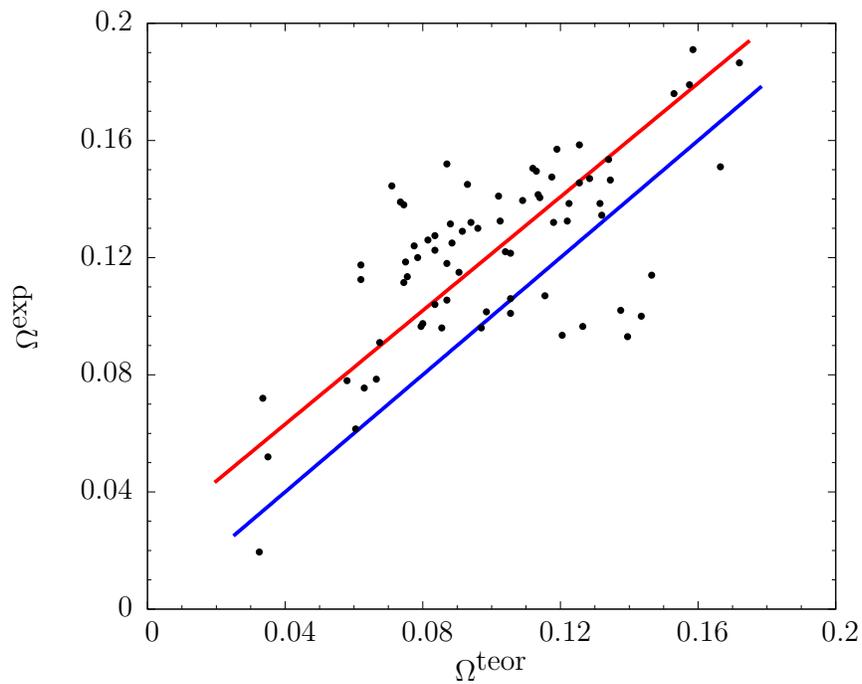
A partir de haber calculado las cantidades  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{d}$  y  $\tilde{e}$ , las cuales son calculadas a partir de los datos que se tienen (los valores  $y_i$  de los pesos de los enlaces a lo largo de un cierto tiempo, donde  $i$  es un instante de tiempo), la matriz  $M^\top M$  es muy fácil de invertir y por tanto, como ya se conoce  $M$ , se puede calcular sin inconvenientes la ecuación 5.13.

Con lo anterior, se puede calcular cuanto vale  $\vec{\beta}$  solo a partir de los datos  $y_i$ , que da el valor del enlace en el instante  $i$ . El carácter oscilante de los enlaces queda determinado por  $b$  y por  $c$ , porque  $b$  es la amplitud y  $c$  es la frecuencia de oscilación experimental  $\Omega^{\text{exp}}$ .

En los experimentos, la convergencia es lenta para prácticamente todos los valores de fuerza de acoplamiento, cuando  $p_c$  está cerca de 0.625. Por lo tanto, se repitió el experimento con estas combinaciones en varias ocasiones y se midieron ambas

frecuencias, tanto  $\Omega_{nm}^{\text{exp}}$  como  $\Omega_{nm}^{\text{teor}}$ . En la Figura 5.1 se comparan estas cantidades con respecto a una muestra aleatoria de los enlaces de convergencia lenta. Obsérvese que están principalmente a lo largo de la diagonal, lo que apoya la suposición que se hace acerca de que los enlaces tienen un comportamiento frustrado. Sin embargo, con el fin de demostrarlo estadísticamente, también se realizó una prueba de significación de la tendencia utilizando el coeficiente de correlación lineal de Pearson, Hill and Lewicki [2006]; la respuesta es positiva ya que se obtiene una pendiente de 0.970 con una  $r = 0.662$  y  $p$ -valor  $3 \cdot 10^{-10}$ .

Tenga en cuenta que el cómputo de las dos frecuencias es intrínsecamente ruidoso, dando lugar a medidas con errores relativamente grandes. Entonces, la información dada por las cantidades como  $r$ -cuadrada, midiendo la bondad de un ajuste lineal, son engañosamente bajos debido a que está relacionado con la fracción de la varianza en los datos que están explicados por la línea recta. En estos casos, es más interesante cuantificar la significatividad del resultado.



**Figura 5.1:** Frecuencia de los enlaces oscilantes en la red con  $\Omega^{\text{exp}}$  frente a la frecuencia teórica  $\Omega^{\text{teor}}$ . Cuando se calcula el coeficiente de correlación lineal de Pearson, se encuentra un  $p$ -valor de  $3 \cdot 10^{-10}$ , lo que indica que la tendencia es significativa. La línea de color azul es el mejor ajuste de los datos y la línea de color rojo corresponde a la forma teórica.

## CAPÍTULO 6

# CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

En este trabajo se estudió el problema de integración/segregación desde el punto de vista de las redes complejas, considerando que la topología de la red no es estática; sino que existe un mecanismo adaptativo que está actuando sobre los enlaces en la red. El estudio fue realizado con el objetivo de identificar bajo qué condiciones ocurre la sincronización en redes y qué propiedades estructurales están presentes en la topología de la red cuando ocurre la sincronización

Para cumplir los objetivos se propuso un modelo dinámico con el cual se modela la evolución en el tiempo tanto de la conexión entre cada par de elementos como la evolución de cada uno de los elementos en el sistema. El objetivo principal fue desarrollar un algoritmo de formación topológica con sincronización eficiente, el cual está basado en la interrelación entre las propiedades estructurales, locales y globales, y las propiedades dinámicas de un sistema.

El modelo propuesto es un modelo adaptativo para sincronización en redes. Se consideraron medidas para sincronización a nivel local y global, propiedades topológicas como el grado promedio, el grado promedio de los vecinos, la modularidad y la asortatividad. Se logró comprobar por medio de diferentes formas que los resultados obtenidos son novedosos.

En el modelo se propusieron dos funciones para la evolución de un sistema, con una se modela la dinámica, evolución en el tiempo, del comportamiento de las conexiones entre pares de elementos en un sistema. Con la otra función se modela

la correlación entre cada par de elementos en el sistema. También se propuso una medida de desempeño para la sincronización a nivel local la cual facilitó cuantificar numéricamente el nivel de sincronización local.

Con la función que modela la dinámica de la evolución de los enlaces se evita el hecho de tener que definir una topología de red inicial y en su lugar se tiene un modelo con el cual se genera la topología más adecuada, así, se optimiza la topología de la red para que la sincronización sea más fácil.

El mejor resultado que se encontró fue que la modularidad, que es una característica global, puede naturalmente surgir en una red cuando se considera que los enlaces están evolucionando, es decir, por medio de las propiedades dinámicas para la escala local. También se observó que incluso en ausencia de la sincronización global, un alto grado de sincronización local puede prevalecer.

Los resultados experimentales mostraron que el modelo propuesto es adecuado para estudiar la sincronización en conjunto con la formación topológica, debido a la naturaleza de los enlaces.

La caracterización de la topología de las redes resultantes se hizo en términos de la medida de asortatividad y la medida de modularidad, y se observó que la sincronización y las propiedades estructurales pueden afectarse mutuamente, con lo cual se comprueba la hipótesis supuesta. Esto es de interés ya que en la literatura existente el estudio de sincronización es bajo topologías pre-impuestas; el enfoque presentado en este trabajo permite el estudio de cómo la sincronización y procesos semejantes afectan a la formación de comunidades, para complementar el trabajo existente sobre cómo la presencia de comunidades afecta a la sincronización.

También se encontró que en algunos casos la convergencia es difícil para algunas combinaciones  $(p_c, \sigma)$ , y se probó que esto es debido a que hay enlaces que llegan a un estado frustrado en el que tienen una frecuencia oscilante que depende de las comunidades a las que está conectando. En este caso, se observó que el número

de iteraciones requeridas para tender a la convergencia es muy elevado ya que se logró entender que el enlace oscila entre las frecuencias instáneas de los osciladores.

Cabe destacar que los resultados obtenidos para la asortatividad se han encontrado porque se han unido nodos que están teniendo frecuencias iguales, es decir, se reforzaron los enlaces que unen nodos con frecuencias iguales.

Como trabajo futuro se debe destacar qué se espera si en realidad lo que se refuerza son los enlaces que unen nodos que están haciendo lo opuesto, es decir, nodos que tiene frecuencias que no son similares, ¿se obtendrían redes disasortativas? Para responder esta pregunta, sería importante realizar con detalle la experimentación correspondiente para analizar los resultados obtenidos. Si se obtienen redes disasortativas, el modelo propuesto será aún más robusto pues no solo se obtendrían redes en las cuales emerge una mesoescala sino que también se podrían generar redes con propiedades opuestas a las redes que ya se tienen.

También se pueden hacer modificaciones al programa para hacer pruebas con redes en las cuales la topología sea impuesta, como se ha hecho en trabajos existentes, lo importante aquí sería estudiar si sigue emergiendo una mesoescala y probar si la combinación  $\{\sigma, p_c\}$  da mejores resultados que los obtenidos al no imponer ninguna topología de red.

# BIBLIOGRAFÍA

---

- J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez-Vicente, F. Ritort, and R. Spigler. The kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics.*, 77(1):137–185, Abril 2005.
- V. S. Afraimovich, N. N. Verichev, and M. I. Rabinovich. Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 29: 795–803, 1986.
- J. A. Almendral. *Dynamics and topology in complex networks*. PhD thesis, Universidad Rey Juan Carlos, Junio 2006.
- J. A. Almendral, R. Criado, I. Leyva, J. M. Buldú, and I. Sendiña-Nadal. Introduction to focus issue: Mesoscales in complex networks. *Chaos*, 21(1):016101, 2011.
- A. Arenas and A. Díaz-Guilera. Synchronization and modularity in complex networks. *The European Physical Journal - Special Topics*, 143(1):19–25, Abril 2007.
- A. Arenas, A. Diaz-Guilera, and C. J. Pérez-Vicente. Synchronization processes in complex networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 224(1-2):27–34, 2006.
- A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, , and C. Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469:93–153, Diciembre 2008.
- J. T. Ariaratnam and S. Strogatz. Phase diagram for the winfree model of coupled nonlinear oscillators. *Physical Review Letters*, 86:4278–4281, 2001.

- A. L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, Octubre 1999.
- A. L. Barabási and Z. N. Oltvai. Network biology: understanding the cells' functional organization. *Nature Reviews Genetics*, 5(2):101–113, Febrero 2004.
- Albert-László Barabási, Zoltán Oltvai, and Stefan Wuchty. Characteristics of biological networks. In Eli Ben-Naim, Hans Frauenfelder, and Zoltan Toroczkai, editors, *Complex Networks*, volume 650 of *Lecture Notes in Physics*, pages 443–457. Springer Berlin / Heidelberg, 2004.
- E. Barreto and P. So. Mechanisms for the development of unstable dimension variability and the breakdown of shadowing in coupled chaotic systems. *Physical Review Letters*, 85:2490–2493, Septiembre 2000.
- E. Barreto, P. So, B. J. Gluckman, and S. J. Schiff. From generalized synchrony to topological decoherence: Emergent sets in coupled chaotic systems. *Physical Review Letters*, 84:1689–1692, Febrero 2000.
- S. Boccaletti and D. L. Valladares. Characterization of intermittent lag synchronization. *Physical Review E Statistical Physics Plasmas Fluids And Related Interdisciplinary Topics*, 62(5 Pt B):7497–500, 2000.
- S. Boccaletti, D. L. Valladares, J. Kurths, D. Maza, and H. Mancini. Synchronization of chaotic structurally nonequivalent systems. *Physical Review E*, 61:3712–3715, Junio 2000.
- S. Boccaletti, Louis M. Pecora, and A. Pelaez. Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems. *Physical Review E*, 63:066219, Mayo 2001.
- S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366(1-2):1–101, Agosto 2002.
- S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chávez, and D.-U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4-5):175–308, 2006.

- D. R. Chialvo. Critical Brain Networks. *Physica A*, 340(4):756–765, 2004.
- R. Femat and G. Solís-Perales. On the chaos synchronization phenomena. *Physics Letters A*, 262(1):50–60, 1999.
- P. M. Gade and C.-K. Hu. Synchronous chaos in coupled map lattices with small-world interactions. *Physical Review E*, 62:6409–6413, Noviembre 2000.
- M. Girvan and M. E. J. Newman. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(12):7821–7826, June 2002.
- T. Hill and P. Lewicki. *Statistics: Methods and Applications. A. Comprehensive Reference for Science, Industry, and Data Mining*. StatSoft, Tulsa, OK, USA, 1st edition, 2006.
- F. H. Hirokazu and T. Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, 69(1):32–47, 1983.
- H. Hong, M. Y. Choi, and B. J. Kim. Synchronization on small-world networks. *Physical Review E*, 65:026139, Enero 2002.
- J. Jost and M. P. Joy. Spectral properties and synchronization in coupled map lattices. *Physical Review E*, 65:016201, Diciembre 2001.
- L. Kocarev and U. Parlitz. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Physical Review Letters*, 76:1816–1819, Marzo 1996.
- Y. Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. In H. Araki, editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics, Vol. 39*,, pages 420–422, New York, NY, USA, 1975. Springer.
- Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer Berlin, Berlin, 1984.

- O. Kwon and H.-T. Moon. Coherence resonance in small-world networks of excitable cells. *Physics Letters A*, 298(5-6):319 – 324, 2002.
- L. F. Lago-Fernández, R. Huerta, F. Corbacho, and J. A. Sigüenza. Fast response and temporal coherent oscillations in small-world networks. *Physical Review Letters*, 84:2758–2761, Marzo 2000.
- D. Li, I. Leyva, J. A. Almendral, I. Sendiña-Nadal, J. M. Buldú, S. Havlin, and S. Boccaletti. Synchronization Interfaces and Overlapping Communities in Complex Networks. *Physical Review Letters*, 101(16):168701–1–16871–4, 2008.
- A. M. Uhrmacher and D. Weyns. *Multi-Agent Systems: Simulation and Applications (Computational Analysis, Synthesis, and Design of Dynamic Systems)*. CRC Press, Junio 2009.
- J. H. Mathews and K. K. Fink. *Numerical Methods Using Matlab (4th Edition)*. Prentice Hall, 4 edition, Enero 2004.
- M. E. J. Newman. Assortative mixing in networks. *Physical Review Letters*, 89: 208701, Octubre 2002.
- M. E. J. Newman. Modularity and community structure in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 103(23): 8577–8582, Junio 2006.
- E. Niebur, Heinz G. Schuster, Daniel M. Kammen, and Christof Koch. Oscillator-phase coupling for different two-dimensional network connectivities. *Physical Review A*, 44(10):6895+, Noviembre 1991.
- T. Nishikawa, A. E. Motter, Ying-Cheng Lai, and F. C. Hoppensteadt. Heterogeneity in oscillator networks: Are smaller worlds easier to synchronize? *Physical Review Letters*, 91:014101, Julio 2003.
- R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, and A. Vespignani. Dynamical and correlation properties of the Internet. *Physical Review Letters*, 87:258701+, 2001.

- L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64:821–824, 1990.
- L. M. Pecora and T. L. Carroll. Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems. *Physical Review Letters*, 80(10):2109–2112, 1998.
- J. G. Restrepo, B. R. Hunt, and E. Ott. The onset of synchronization in large networks of coupled oscillators. *Physical Review E*, 71(3):036151, Marzo 2005.
- E. Rosa, E. Ott, and M. H. Hess. Transition to phase synchronization of chaos. *Physical Review Letters*, 80(8):1642–1645, 1998.
- M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 76(11):1804–1807, Marzo 1996.
- M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78:4193–4196, 1997.
- N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 51:980–994, Febrero 1995.
- S. Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4): 1–20, 2000.
- S. Strogatz. *SYNC: the emerging science of spontaneous order*. (Hyperion, New York), 2003.
- S. Strogatz and R. E. Mirollo. Collective synchronization in lattices of nonlinear oscillators with randomness. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 21(13):L699–L705, 1988.
- J. Travers and S. Milgram. An Experimental Study of the Small World Problem. *Sociometry*, 32(4):425–443, 1969.

- 
- D. J. Watts and S. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393(6684):440–442, 1998.
- A. Winfree. *The geometry of biological time*, volume 12 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001.
- A. T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 16(1):15 – 42, 1967.
- M. A. Zaks, E.-H. Park, M. G. Rosenblum, and J. Kurths. Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization. *Physical Review Letters*, 82:4228–4231, Mayo 1999.

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

## Capítulo 1

1.1. Las hormigas son un buen ejemplo de conductas emergentes. . . . .	2
1.2. Comportamiento de dos sistemas en el tiempo cuando están acoplados y cuando no. . . . .	4
1.3. Modos de conectividad cerebral. . . . .	7

## Capítulo 2

2.1. Enlaces ponderados. . . . .	12
2.2. Grafo simple conexo. . . . .	12
2.3. Grado de un nodo . . . . .	13
2.4. Modularidad $\mathcal{M}$ para cinco comunidades en una red con seis nodos y siete aristas. . . . .	15
2.5. Coeficiente de agrupamiento . . . . .	16
2.6. Mapa de Königsberg en la época de Leonhard Euler. . . . .	17
2.7. Mapa de los siete puentes visto como un <i>grafo</i> . . . . .	18
2.8. Mapa coloreado con cuatro colores. . . . .	18

2.9. El modelo de Watts y Strogatz transforma una red regular en una red aleatoria. . . . . 20

2.10. Diferentes especies en la misma cadena trófica. . . . . 22

2.11. Relojes de péndulo. . . . . 23

**Capítulo 4**

4.1. Sincronización global  $R_A^G$ . . . . . 50

4.2. Sincronización local  $R_A^L$ . . . . . 54

4.3. Proporción  $\rho$  entre las medidas de sincronización global y local, con  $\rho := 1 - \frac{R_A^G}{R_B^L}$ . . . . . 56

4.4. Sincronización global  $R_B^G$ . . . . . 61

4.5. Sincronización local  $R_B^L$ . . . . . 62

4.6. Sincronización global  $R_C^G$ . . . . . 66

4.7. Promedio de nivel de sincronización global  $R_C^G$  para los subconjuntos  $\sigma_1^C$  y  $\sigma_2^C$ . . . . . 67

4.8. Sincronización local  $R_C^L$ . . . . . 70

4.9. Promedio de nivel de sincronización local  $R_C^L$  para los subconjuntos  $\sigma_1^C$  y  $\sigma_2^C$ . . . . . 71

4.10. Modularidad  $\mathcal{M}_A$ . . . . . 74

4.11. Familia  $A$ : ejemplos de redes que muestran las topologías típicamente obtenidas en una simulación con  $p_c = 0.7$ ,  $p_c = 0.8$  y  $p_c = 0.9$ , y  $\sigma = 0.2$ . 75

4.12. Asortatividad  $\mathcal{A}_A$ . . . . . 77

4.13. Prueba de asortatividad  $\mathcal{K}_A$ . . . . . 78

---

4.14. Grado promedio $\bar{k}_A$ . . . . .	80
4.15. Grado promedio de los vecinos $\bar{k}_A^{vm}$ . . . . .	81
4.16. Dispersión del grado promedio respecto al grado promedio. . . . .	82
4.17. Modularidad $\mathcal{M}_B$ . . . . .	84
4.18. Familia <i>B</i> : ejemplos de redes que muestra las topologías típicamente obtenidas en una simulación con $p_c = 0.7$ , $p_c = 0.8$ y $p_c = 0.9$ , y $\sigma = 0.3$ . . . . .	85
4.19. Asortatividad $\mathcal{A}_B$ . . . . .	87
4.20. Prueba de asortatividad $\mathcal{K}_B$ . . . . .	88
4.21. Grado promedio $\bar{k}_B$ . . . . .	90
4.22. Grado promedio de los vecinos $\bar{k}_B^{vm}$ . . . . .	91
4.23. Modularidad $\mathcal{M}_C$ . . . . .	93
4.24. Familia <i>C</i> :ejemplos de redes que muestra las topologías típicamente obtenidas en una simulación con $p_c = 0.6$ , $p_c = 0.7$ y $p_c = 0.8$ , y $\sigma = 0.8$ . . . . .	94
4.25. Asortatividad $\mathcal{A}_C$ . . . . .	96
4.26. Prueba de asortatividad $\mathcal{K}_C$ . . . . .	97
4.27. Grado promedio $\bar{k}_C$ . . . . .	98
4.28. Grado promedio de los vecinos $\bar{k}_C$ . . . . .	99

**Capítulo 5**

5.1. Frecuencia de los enlaces oscilantes en la red con $\Omega^{\text{exp}}$ frente a la frecuencia teórica $\Omega^{\text{teor}}$ . . . . .	107
--	-----

# ÍNDICE DE TABLAS

---

## Capítulo 4

4.1. Simbología de las medidas de sincronización y topológicas para cada familia. . . . .	46
4.2. Simbología de la dispersión para cada familia. . . . .	46
4.3. Valores de $p_c$ para los cuales se observa decrecimiento notable en el nivel de sincronización global $R_A^G$ . . . . .	48
4.4. Valores de $p_c$ para los cuales se observa decrecimiento notable en el nivel de sincronización local $R_A^L$ . . . . .	53
4.5. Porcentaje del nivel de recuperación del nivel de sincronización local $R_A^L$ . . . . .	53
4.6. Valores de $p_c$ para los cuales se observa decrecimiento notable en el nivel de sincronización global $R_B^G$ . . . . .	58
4.7. Valores de $p_c$ para los cuales se observa decrecimiento notable en el nivel de sincronización global $R_B^L$ . . . . .	58
4.8. Valor de acoplamiento $\sigma^B$ y correlación $p_c$ para los cuales el modelo no converge. . . . .	58

---

4.9. Valores de $p_c$ y $\sigma^B$ para los cuales el nivel de sincronización global $R_B^G$ <i>decae bruscamente.</i> . . . . .	59
4.10. Valores de $p_c$ y $\sigma^B$ para los cuales el nivel de sincronización local $R_B^L$ <i>decae bruscamente.</i> . . . . .	60
4.11. Porcentaje de recuperación del nivel de sincronización local $R_B^L$ . . . . .	60
4.12. Nivel de sincronización $R_C^G$ para $\sigma_2^C$ y $p_c$ donde se tiene concavidad. . . . .	64
4.13. Nivel de sincronización $R_C^G$ para $\sigma_3^C$ y $p_c$ en donde se da el decreci- miento más notable. . . . .	65
4.14. Nivel de sincronización $R_C^L$ para $\sigma_2^C$ y $p_c$ para la concavidad presente. . . . .	68
4.15. Nivel de sincronización $R_C^L$ para $\sigma_3^C$ y $p_c$ en donde se da el decreci- miento es más notable. . . . .	69

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

---

Vanesa Avalos Gaytán

Candidato para el grado de Doctor en Ciencias en Ingeniería  
con especialidad en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

MODELO ADAPTATIVO PARA LA  
SINCRONIZACIÓN EN REDES MODULARES

Nací el 29 de abril de 1984. En el año 2001 ingresé a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila. En la Facultad realicé la tesis *Segmentación de imágenes utilizando técnicas espectrales* para obtener el título de Licenciada en Matemáticas Aplicadas en mayo del 2007. Desde el año 2007 soy estudiante del Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas (PISIS). De enero del 2007 a enero del 2009 realicé los estudios de maestría en PISIS; realicé el trabajo de tesis *Agrupamiento local en grafos dirigidos* con el cual obtuve el título de Maestra en Ciencias con especialidad en Ingeniería de Sistemas. De enero del 2009 a enero del 2012 he sido estudiante del doctorado del PISIS; he realizado el presente trabajo Modelo adaptativo para la sincronización en redes modulares para obtener el título de Doctor en Ciencias con especialidad en Ingeniería de Sistemas.