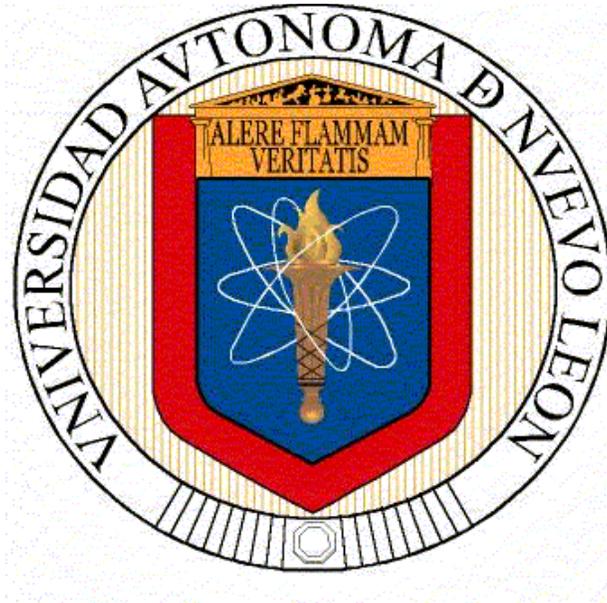


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



“Identificación y Control de Sistemas no Lineales por Medio de
Redes Neuronales Recurrentes Adaptables”

Por
Francisco Rodríguez Ramírez

Como requisito parcial para obtener el grado de
Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas

Mayo 2014

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
DOCTORADO EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis
“Identificación Y Control De Sistemas No Lineales Por Medio De Redes
Neuronales Recurrentes Adaptables”

Realizada por el estudiante Francisco Rodríguez Ramírez sea aceptada para
su defensa como opción al grado de Doctor en Ciencias con Orientación en
Matemáticas.

El Comité de Tesis

Director/Asesor

Dr. José Paz Pérez Padrón

Co-asesor

Dr. Joel Pérez Padrón

Revisor

Dr. José Fernando Camacho Vallejo

Revisor

Dr. Ricardo Obregón Guerra

Revisor

Dr. Juan Pablo Salinas Estevané

Vo. Bo.

Dr. Romeo de Jesús Selvas Aguilar

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Mayo de 2014

RESUMEN

Francisco Rodríguez Ramírez

Fecha de graduación: Mayo 2014

Título del estudio: "Identificación Y Control De Sistemas No Lineales Por Medio De Redes Neuronales Recurrentes Adaptables"

Propósito y método de estudio

En esta tesis doctoral se presenta un nuevo campo de aplicación de las redes neuronales dinámicas para control no lineal robusto; esto es, se desarrolla un análisis sistemático para estabilización, identificación y seguimiento de trayectorias de plantas no lineales por medio de redes neuronales recurrentes, para el caso determinístico. A diferencia del control adaptable tradicional, en este trabajo se presenta una nueva forma de modelar en línea plantas no lineales por medio de redes neuronales de pesos variables en el tiempo, con el objetivo que la planta siga a una señal de referencia dada. Para esto se obtienen leyes de control y leyes de adaptación de pesos en la red neuronal, las cuales garantizan en conjunto que la planta siga dicha señal de referencia. La herramienta principal utilizada para este análisis está basada en la metodología de análisis de estabilidad de Lyapunov.

PREFACIO

Este trabajo es el resultado de la investigación realizada durante el periodo Agosto 2010 a Julio 2013 dentro del programa “Doctorado en Ciencias con Orientación en Matemáticas” y se presenta como una tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas. Los resultados han sido publicados y presentados en los siguientes congresos:

Publicaciones:

1. Joel Pérez P., José P. Pérez, Francisco Rodríguez Ramírez, Ángel Flores H., PD Control Law for Trajectory Tracking of Chaotic Pendulum, *Advanced Materials Research*, vol. 646, ISSN 189.224.152.29, 2012
2. Joel Perez P., Jose P. Perez, Rogelio Soto, Angel Flores, Francisco Rodríguez, Jose Luis Meza, Trajectory Tracking Error Using PID Control Law for Two-Link Robot Manipulator Via Adaptive Neural Networks, *Robotics and Autonomous Systems*, ELSEVIER, vol. 1, ISSN 0921-8890, 2012
3. Joel Pérez, José P. Pérez, Francisco Rodríguez Ramírez, Angel Flores, Trajectory Tracking for Chaos Synchronization Via PI Control Law Between Roosler-Chen, *Computación y Sistemas*, vol. 1, ISSN 1405-5546, 2012
4. Joel Pérez P., José P. Pérez, Francisco Rodríguez, Ángel Flores H, Trajectory Tracking for the Chaotic Pendulum Using PI Control Law, *Revista Mexicana de Física*, vol 1, ISSN 122, 2012

Participaciones en Congresos:

1. Joel Pérez, José P Pérez, Rogelio Soto, Ángel Flores, Francisco Rodríguez, José Luis Meza, Complex Dynamical Systems for Trajectory Tracking Using Control V-Stability, *World Automation Congresss (WAC 2012)* Puerto Vallarta, Jalisco.
2. Joel Pérez P., José P. Pérez, Rogelio Soto, Ángel Flores, Francisco Rodríguez, José Luis Meza, Trajectory Tracking Error Using PID Control Law for Two-Link Robot Manipulator via Adaptive Neural Networks, *The Iberoamerican Conference on Electronics Engineering and Computer Science*, 2012.

3. Francisco Rodríguez Ramírez, Visualización de funciones de varias variables mediadas por el mathematica y Matlab, seminario nacional de tecnología computacional en la enseñanza de las matemáticas 2012 “Doctor Eugenio Filloy Yagüe”, UANL, 2012
4. Francisco Rodríguez Ramírez, PID Control Law for trajectory tracking error using adaptive neural networks: mathematical modeling, 2DO FORO DE DIVULGACION CIENTIFICA Y TECNOLOGICA, UANL, 2012

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

Dedico este trabajo de tesis a mis padres, María Ramírez Cantú y Gil Rodríguez Santillán por su cariño, comprensión y apoyo que siempre me han brindado y porque siempre me han ayudado a conseguir todo lo que tengo. De manera especial a mis hijos Luis Eduardo, Sonia María y Anibal Ignacio que siempre encuentro motivos para seguir superándome. Por otra parte también dedico este trabajo a mis hermanos Gil, Delia, Librado, Margarito, Noelia, María Mercedes, Olga Lidia y Martín.

También dedico este trabajo a mis compañeros de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y a todos aquellos que hicieron posible para que terminara este trabajo. A Martín, Jorge, Santiago, Paz, Jesús, Juan José, Ángel, Roberto, Joel, Adriana, Fernando, Salvador, Jorge Arturo, Ricardo, la lista es enorme, amigos de la FCFM.

Quiero reconocer y agradecer al Dr, José paz Pérez Padrón por su apoyo y guía para iniciar y culminar este trabajo.

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, por el apoyo que recibí para la realización de este trabajo.

Índice

CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2 HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS	3
2.1 Sistema Dinámico.....	3
2.2 Estado de Equilibrio	4
2.3 Función de Lyapunov.....	5
2.4 Función de Lyapunov de Control	6
2.5 Sistema Estable Entrada Estado (ISS).....	6
CAPÍTULO 3 REDES NEURONALES.....	8
3.1 Procesamiento De Información Neuronal.....	8
3.2 Operaciones Matemáticas Neuronales	9
3.3 Características Dinámicas.....	10
3.4 Unidades Neuronales.....	11
3.5 Funciones De Activación.....	13
3.6 Redes Neuronales Dinámicas En Tiempo Continuo.....	14
3.7 Forma General De Una Red Neuronal Dinámica De Hopfield	15
3.8 Condiciones Para Los Puntos De Equilibrio De Una Red Neuronal Dinámica...	17
CAPITULO 4 INTRODUCCIÓN A LAS REDES NEURONALES RECURRENTES..	20
4.1 Descripción Matemática De Una Red Neuronal Recurrente	20
4.2 Red Genética.....	20
4.3 Análisis De Estabilidad Del Error De Seguimiento.....	20
4.4 Ejemplo.....	22
CAPÍTULO 5 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS PARA SINCRONIZACIÓN DE CAOS USANDO LEYES DE CONTROL PI ENTRE LOS SISTEMAS CAOTICOS DE CHEN Y ROOSLER.....	25
5.1 Introducción	25
5.2 Modelado de la Planta	25
5.3 Análisis de Seguimiento	26
5.4 Estabilización del Error de Seguimiento	29
5.5 Simulación.....	31
CAPÍTULO 6 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA PARA EL PENDULO CAOTICO USANDO LEYES DE CONTROL PI.....	37
6.1 Introducción	37
6.2 Modelado de la Planta	38
6.3 Análisis de Seguimiento	39

6.4 Estabilización del Error de Seguimiento	41
6.5 Simulación.....	44
CAPITULO 7 CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO.....	47
Bibliografía	48

Índice de Figuras

3.1 Un modelo neuronal simple como un procesador con múltiples entradas (dendritas) y una sola salida (axón).....	9
3.2 Operaciones sinápticas y somáticas en un modelo simple de una neurona	10
3.3 Modelo no lineal de la neurona.....	12
3.4 $\sigma x = \tanh c x$	13
3.5 $\sigma'(x) = c \operatorname{sech}^2(c x)$	14
3.6 Estructura de una red neuronal dinámica	15
3.7 Diagrama de bloque de una red neuronal dinámica de Hopfield	16
3.8 Diagrama de bloque de una estructura de una red neuronal dinámica en tiempo continuo	17
4.1 Evolución temporal para los subestados 1	23
4.2 Evolución temporal para los subestados 2	23
4.3 Evolución temporal para los subestados 3	24
4.4 Evolución temporal para los subestados 4	24
5.1 Grafica representativa de estados	25
5.2 Grafica representativa del error de modelado.....	26
5.3 X Plant_Chen-Xref_Roosler	32
5.4 Y Plant_Chen-Yref_Roosler	33
5.5 Z Plant_Chen-Zref_Roosler.....	33
5.6 X Plant_Roosler_Xref_Chen.....	34
5.7 Y Plant_Roosler_Yref_Chen	34
5.8 Z Plant_Roosler_Zref_Chen	35
5.9 Trayectoria de espacios de fase, Roosler siguiendo a Chen	35
5.10 Trayectoria de espacios de fase, Chen siguiendo a Roosler	36
6.1 Sistema Dinámico Caótico	37
6.2 plano fase de la planta y la señal de referencia para la trayectoria de la ecuación de Duffing.....	45
6.3 Tiempo de evolución para la posición angular θ_1	45
6.4 Tiempo de evolución para la posición angular θ_2	45
6.5 Tiempo de evolución para la velocidad angular del eslabón 1 (rad/seg)	45
6.6 Tiempo de evolución para la velocidad angular del eslabón 2 (rad/seg)	46
6.7 Torca aplicada al eslabón 1	46
6.8 Torca aplicada al eslabón 2	46

CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN

Los problemas de control automático que surgen en una amplia variedad de campos de la ingeniería, son caracterizados esencialmente por medios ambientes inciertos y por ser no lineales. Resultados recientes [1], [2], [3], [4] muestran que las redes neuronales son una herramienta muy efectiva, para aproximar e identificar una amplia clase de sistemas no lineales complejos cuando la información del modelo matemático es incompleta; por lo tanto, desde su aparición las redes neuronales presentan un creciente interés debido a su capacidad, al menos teórica, de aproximación de funciones no lineales.

La aplicación de redes neuronales a control automático es principalmente para construir un modelo de la planta (es un sistema no lineal el cual queremos controlar), y con base en este modelo se diseñan leyes o acciones de control con el propósito de lograr un comportamiento específico. Las redes neuronales que se usarán en esta tesis son redes neuronales dinámicas descritas por ecuaciones diferenciales.

Un problema fundamental en control automático de sistemas no lineales es el seguimiento de trayectorias. Desde el artículo seminal [3], ha existido un interés creciente en aplicar redes neuronales a la identificación y control de sistemas no lineales. Muchas de estas estructuras usan redes estáticas (llamadas también pre-alimentadas) [5], [6]. Recientemente el uso de redes recurrentes se ha incrementado [7]. Las primeras aplicaciones de redes neuronales en sistemas de control realimentado no incluían análisis rigurosos o métodos de diseño. Actualmente, el control neuronal es una técnica bien establecida, basada en análisis bien fundamentados, como se ejemplifica en [5], para redes estáticas, y en [8], [9] para las recurrentes. Recientemente, una tendencia notable en control neuronal es integrar redes neuronales recurrentes, con técnicas efectivas de control no lineal. Dentro de este marco se sitúa la presente tesis.

En esta tesis doctoral se presenta un nuevo campo de aplicación de las redes neuronales dinámicas para control no lineal robusto; esto es, se desarrolla un análisis sistemático para estabilización, identificación y seguimiento de trayectorias de plantas no lineales por medio de redes neuronales recurrentes, para el caso determinístico. A diferencia del control adaptable tradicional, en este trabajo se presenta una nueva forma de modelar en línea plantas no lineales por medio de redes neuronales de pesos variables en el tiempo, con el objetivo que la planta siga a una señal de referencia dada. Para esto se obtienen leyes de control y leyes de adaptación de pesos en la red neuronal, las cuales garantizan en conjunto que la planta siga dicha señal de referencia. La herramienta principal utilizada para este análisis está basada en la metodología de análisis de estabilidad de Lyapunov.

Las redes neuronales artificiales son ampliamente usadas en aplicaciones de ingeniería debido a su habilidad para estimar la relación entre las entradas y salidas dentro de su proceso de aprendizaje. Motivados por el artículo seminal [3], existe un gran interés en la aplicación de redes neuronales para la identificación y control de sistemas no lineales. Muchas de estas aplicaciones utilizan estructuras de retroalimentación.

Actualmente las redes neurales recurrentes están siendo desarrolladas como una extensión de redes neuronales estáticas capaces de aproximar funciones no lineales, las redes neuronales recurrentes pueden aproximar sistemas no lineales, lo que les facilita que el modelado sea más eficiente para los sistemas dinámicos subyacentes.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera

En el capítulo 2, se presentan los conceptos básicos con los cuales trabajaremos a lo largo de la tesis. Se describen los sistemas dinámicos, estado de equilibrio y funciones de Lyapunov.

En el capítulo 3, se describe la unidad neuronal, las funciones sigmoideas no lineales, las redes neuronales dinámicas en tiempo continuo, las condiciones para los puntos de equilibrio de las redes neuronales dinámicas.

En el capítulo 4, en este primer trabajo se obtiene la acción de control para el seguimiento de trayectorias de un sistema no lineal de una red genética.

En el capítulo 5 y en capítulo 6, se presenta el análisis para la aplicación de una red neural adaptable basada en una red neuronal dinámica, para el seguimiento de trayectorias de plantas no lineales desconocidas. La principal metodología está basada en las redes neurales recurrentes, funciones de Lyapunov y control Proporcional-Integral (PI). El nuevo esquema de control es aplicado a la sincronización del caos y los resultados son ilustrados por medio de una simulación con un software apropiado.

Finalmente en **capítulo 7** se presentan las conclusiones y trabajo a futuro.

CAPÍTULO 2 HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

En este capítulo se presentan los conceptos básicos para el estudio de la tesis. Se describen los sistemas dinámicos, por medio de los cuales las plantas pueden ser modeladas.

2.1 Sistema Dinámico

Un sistema dinámico sintetiza una descripción funcional de la solución de un problema físico o de un modelo matemático describiendo un problema físico. Las siguientes definiciones son tomadas de [10], [11], [12], [13] y [14]

Definición 1 Un sistema dinámico en E es una función $\phi : \mathfrak{R} \times E \rightarrow E$ de clase C^1 donde E es un subconjunto abierto de \mathfrak{R}^n y si $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ entonces ϕ satisface.

- i) $\phi_0 = x$, para toda $x \in E$
- ii) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}(x)$ para toda $s, t \in E$.

En ii) de la definición anterior, el operador "o" significa el operador composición, esto es

$$\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x).$$

Considere el sistema determinístico no autónomo

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.1}$$

donde $f : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es localmente Lipschitz en x y continua a trozos en t .

En la siguiente definición, se denota el máximo intervalo de existencia (α, β) de la solución $\phi(t, x_0)$ del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

por $I(x_0)$, puesto que los extremos del intervalo (α, β) dependen por lo general de la condición inicial x_0 , esto es $I(x_0) = (\alpha, \beta)$.

Definición 2 Sea E un subconjunto abierto de \mathfrak{R}^n y sea $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in E$ sea $\phi(t, x_0)$ la solución del problema de valor inicial (2.2) definida en su máximo intervalo de existencia $I(x_0)$. Entonces, para $t \in I(x_0)$, el conjunto de mapeos ϕ_0 , definida por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

Es llamado el flujo de la ecuación diferencial (2.1) o el flujo definido por la ecuación (2.1); ϕ_t es también referido como el flujo del campo vectorial $f(x)$.

2.2 Estado de Equilibrio

El origen $x = 0$ es un estado de equilibrio de (2.1) si

$$f(0, t) = 0, \forall t \geq 0 \quad (2.3)$$

A lo largo de este trabajo hablaremos indistintamente de estado de equilibrio o punto de equilibrio del sistema. Sin pérdida de generalidad supondremos que el estado de equilibrio de (2.1) es $x = 0$, puesto que, si dicho sistema tiene un estado de equilibrio $x^* \neq 0$, esto es $f(x^*, t) = 0, \forall t \geq 0$, entonces el siguiente cambio de coordenadas $y = x - x^*$ hace que el sistema (2.1) en las nuevas coordenadas tenga a $y = 0$ como estado de equilibrio.

Definición 3 *Estabilidad en el sentido de Lyapunov. El estado de equilibrio $x = 0$ es llamado un estado de equilibrio estable de (2.1) si, para todo $t_0 \geq 0$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta(t_0, \varepsilon)$ tal que*

$$\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

Definición 4 *Función Clase K. Una función continua $\alpha : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ se dice que pertenece a la clase K, si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Además, se dice que pertenece a la clase K_∞ si $\alpha \in K$ y $\alpha(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.*

Definición 5 *Función clase K L. Una función continua $\beta : \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ se dice que pertenece a la clase K L, si para cada s fijo el mapeo $\beta(r, s)$ pertenece a la clase k_∞ con respecto a r y para cada r fijo el mapeo $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.*

La siguiente definición caracteriza los estados de equilibrio de (2.1).

Definición 6 *El estado de equilibrio de (2.1) es:*

- *Global uniformemente estable, si existe una función $\gamma(\cdot)$ clase K_∞ tal que*

$$|x(t)| \leq \gamma(|x(t_0)|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x(t_0) \in \mathfrak{R}^n \quad (2.4)$$

- *Global uniformemente asintóticamente estable, si existe una función $\beta(\cdot, \cdot)$ clase K L tal que*

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x(t_0) \in \mathfrak{R}^n \quad (2.5)$$

- *Globalmente exponencialmente estable, si (2.5) es satisfecha con*

$$\beta(r, s) = k r e^{-\alpha s}, k > 0, \alpha > 0.$$

Definición 7 Un campo vectorial f en un subconjunto abierto U de \mathfrak{R}^n es una función que asigna a cada $x \in U$ un vector columna $f(x) \in \mathfrak{R}^n$, lo cual denotaremos como $f : U \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $U \subset \mathfrak{R}^n$

Definición 8 Dado un campo vectorial $f \in C^\infty$ (infinitamente diferenciable) en \mathfrak{R}^n y un campo escalar $h \in C^\infty$ en \mathfrak{R}^n , se define la derivada de Lie de h con respecto a f como

$$L_f h \triangleq \langle dh, f \rangle$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno de dh y f , esto es:

$$\langle dh, f \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i$$

Definición 9 Una función $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}$ con $V(0) = 0 \quad \forall t \in \mathfrak{R}^+$, se dice ser radialmente no acotada, si existe una función φ clase K_L , tal que $V(t, x) \geq \varphi(\|x\|) \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n$ y $t \in \mathfrak{R}^+$.

2.3 Función de Lyapunov

Definición 10 Una función continuamente diferenciable $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$ se dice definida positiva en una región U de \mathfrak{R}^n que contiene al origen si: 1) $V(0) = 0$ y 2) $V(x) > 0, \forall x \in U$ y $x \neq 0$. V se dice semidefinida positiva si $V(x) \geq 0, \forall x \in U$ y $x \neq 0$. Si la condición 2) de la definición anterior se reemplaza por $V(x) < 0$, entonces decimos que V es definida negativa, y se dice que V es semidefinida negativa si $V(x) \leq 0$. Decimos que V es continuamente diferenciable si su derivada \dot{V} es continua.

Teorema 1 Considere el sistema (2.1) y suponga que $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ es una función continuamente diferenciable tal que.

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (2.6)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -\gamma_3(\|x\|) \quad (2.7)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}^n$, donde γ_1 y γ_2 son funciones clase K_∞ y γ_3 es una función clase K . Entonces el estado de equilibrio $x = 0$ es globalmente uniformemente asintóticamente estable, y V es llamada función de Lyapunov, para su demostración puede consultarse libro de Khalil [11]

2.4 Función de Lyapunov de Control

Un t3pico muy importante que se desarrolla en esta tesis en la estabilizaci3n de Redes Neuronales, por lo que consideraremos una clase general de sistemas af3n en el control $u \in \mathfrak{R}^m$ e invariante en el tiempo:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.8)$$

Consideremos la derivada en el tiempo de una funci3n candidata de Lyapunov $V(x)$ para el sistema (2.8):

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)u \triangleq L_f V + L_g V u \quad (2.9)$$

$L_f V + L_g V$ son las derivadas de Lie usuales de V con respecto a f y g respectivamente.

El objetivo es encontrar una ley de control $u = \alpha(x)$ que haga de \dot{V} una funci3n definida negativa en x ; lo anterior llev3 a los autores [13] a enunciar la siguiente definici3n:

Definici3n 11 Una funci3n suave definida positiva y radialmente no acotada $V(x)$ es llamada una funci3n Lyapunov de control (*clf*, por sus siglas en ingl3s) [13] si:

$$\inf_{u \in \mathfrak{R}^m} \{L_f V + L_g V u\} < 0, \forall x \neq 0$$

El siguiente Lema es de ayuda para encontrar la ley de control $u = \alpha(x)$ que haga de \dot{V} una funci3n definida negativa.

Lema 2 Una funci3n suave definida positiva y radialmente no acotada $V(x)$ es una *clf* si $L_g V = 0 \Rightarrow L_f V < 0, \forall x \neq 0$ [13].

Definici3n 12 Una *clf* $V(x)$ se dice satisfacer la propiedad del control peque1o (*scp*, por sus siglas en ingl3s) si existe una ley $u = \alpha_c(x)$ continua en \mathfrak{R}^n tal que

$$L_f V(x) + L_g V(x)\alpha_c(x) < 0, \forall x \neq 0$$

Teorema 3 (Sontag) El sistema (2.8) es estabilizable por un control de retroalimentaci3n continuo en el origen y suave fuera de 3l, si y s3lo si existe *clf* con la propiedad del control peque1o [28].

2.5 Sistema Estable Entrada Estado (ISS)

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t) d \quad (2.11)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el estado, $d \in \mathfrak{R}^r$ es una perturbación, $f(0, t) \equiv 0$.

Definición 13 Decimos que el sistema (2.11) es entrada estado estable (ISS) si existen funciones $\beta \in K L$ y $\chi \in K$ tales que, para cada condición inicial $x(t_0)$ dada y para cada entrada $d(\cdot)$ continua en $[0, \infty)$, la solución existe para cada $t \geq 0$ y satisface:

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) + \chi \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |d(\tau)| \quad (2.12)$$

Para todo t_0 y t tal que $0 \leq t_0 \leq t$.

Considere el sistema, el que además de la perturbación d tiene la acción de control u :

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)d + g_2(x)u \quad (2.13)$$

Donde $u \in \mathfrak{R}^n$ y $f(0) = 0$

Definición 14 Se dice que el sistema (2.13) es entrada estado estabilizable, si existe una ley de control $u = \alpha(x)$ continua en \mathfrak{R}^n , con $\alpha(0) = 0$, y tal que el sistema en lazo cerrado es ISS con respecto a d .

Definición 15 Una función suave definida positiva y radialmente no acotada $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ es llamada una función Lyapunov de control-ISS (iss-clf) para (2.13) si existe una función ρ clase K_∞ tal que la siguiente implicación es satisfecha para toda $x \neq 0$ y toda $d \in \mathfrak{R}^r$ [28]:

$$|x| \geq \rho(d) \Rightarrow \sup_{u \in \mathfrak{R}^n} \{L_f V + L_{g_1} V d + L_{g_2} V u\} < 0 \quad (2.14)$$

A lo largo de esta tesis se empleará la siguiente desigualdad matricial

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T A X + Y^T A^{-1} Y$$

La cual se satisface para todas las matrices $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times k}$ y $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

CAPÍTULO 3 REDES NEURONALES

En este capítulo se presenta el concepto de red neuronal que para propósito de esta tesis será considerado como un sistema con estados en valor continuos y ecuaciones de movimiento expresados por ecuaciones diferenciales. Las fuentes consultadas principalmente son [14], [15], [16], [17] [18], [19], [20], [21] y [22].

3.1 Procesamiento De Información Neuronal

El cerebro humano tiene más de 10 billones de células neuronales, las cuales tiene interconexiones complicadas, y estas neuronas constituyen una red neuronal de procesamiento de señal y memoria a gran escala. El estudio matemático de un modelo neuronal individual es el primer paso en el diseño de una red neuronal compleja.

Un modelo neuronal simple es presentado en la figura 3.1. En términos de procesamiento de información, una neurona individual con dendritas como terminales de entrada múltiple y un axón como una sola terminal de salida podría ser considerada como un sistema múltiple-entrada/única salida (MISO). Las funciones de procesamiento de este sistema neuronal pueden ser divididas en las siguientes cuatro categorías:

1. *Dendritas*. Consisten en un árbol de fibras sumamente ramificado, y actúan como puntos de entrada para el cuerpo principal de la neurona. En promedio, hay de 10^3 a 10^4 dendritas por neurona, que forman una superficie receptiva las señales de entrada a las neuronas.
2. *Sinapsis*. Es un área de almacenamiento de la experiencia pasada (base del conocimiento). Proporciona la memoria a largo plazo a la experiencia acumulada pasada. Recibe información a partir de sensores y otras neuronas, y proporciona las salidas a través de los axones.
3. *Soma*: es el cuerpo celular de la neurona. Es grande y redondo. Recibe la información sináptica y realiza un procesamiento más de la información. Casi todas las funciones lógicas de la neurona se llevan a cabo en el soma.
4. *Axón*. La línea de salida neuronal es llamada axón. La salida aparece en la forma de un potencial de acción que es transmitida a otras neuronas para un procesamiento más.

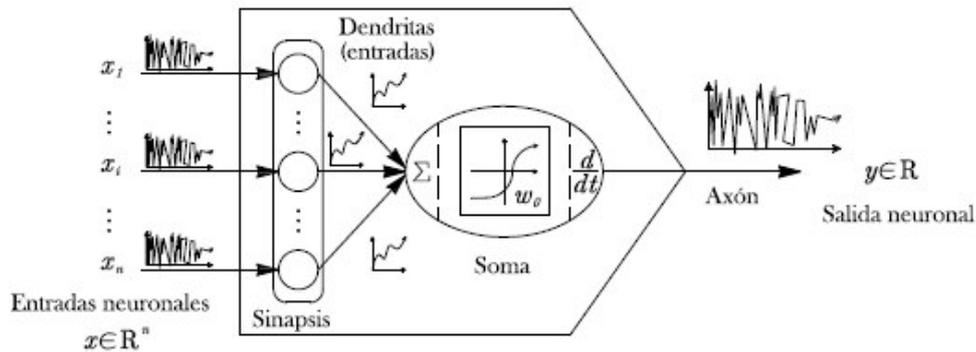


Figura 3.1 Un modelo neuronal simple como un procesador con múltiples entradas (dendritas) y una sola salida (axón)

Cada neurona actúa como un procesador en paralelo debido a que recibe potenciales de acción en paralelo a partir de sus neuronas vecinas y transmite pulsos en paralelo a otras sinapsis vecinas. En términos de procesamiento de información, la sinapsis también realiza un cambio en la frecuencia y voltaje de un impulso.

3.2 Operaciones Matemáticas Neuronales

Una neurona contiene un umbral de sensibilidad, amplificación o atenuación de señal ajustable en cada sinapsis, y una estructura interna que permite que las señales nerviosas entrantes sean integradas a espacio y tiempo. Desde un punto de vista matemático, se puede concluir que el procesamiento de información dentro de una neurona implica las siguientes dos operaciones matemáticas distintas:

1. Operación Sináptica. La fuerza (peso) de la sinapsis es una representación de almacenamiento de conocimiento y por consecuencia de la memoria para el conocimiento previo. La operación sináptica asigna un peso relativo (significativo) a cada señal entrante de acuerdo con la experiencia pasada (conocimiento) almacenada en la sinapsis.
2. Operación somática. La operación somática proporciona varias operaciones matemáticas tales como la agregación, umbralización, activación no lineal, y procesamiento dinámico a las entradas sinápticas. Si la agregación ponderada de las entradas neuronales excede un cierto umbral, la soma producirá una señal de salida a su axón.

Una representación simplificada de las operaciones neuronales arriba mencionadas para una neurona se muestra en la figura 3.2.

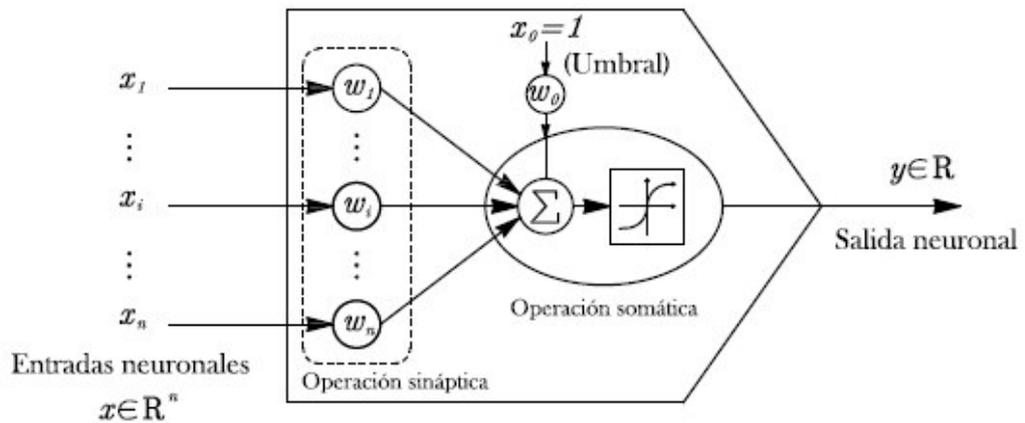


Figura 3.2 Operaciones sinápticas y somáticas en un modelo simple de una neurona

Observaciones experimentales y de análisis matemático han indicado que las células neuronales pueden transmitir información fiable si son suficientemente sobrantes en número. Sin embargo, en general una neurona biológica es un mecanismo imprevisible para el procesamiento de la información. Por consiguiente se postula que la actividad colectiva generada por un gran número de neuronas localmente sobrante es más significativa que la actividad generada por una sola neurona.

3.3 Características Dinámicas

Los procesos neuronales dinámicos forman la base que dan lugar a las propiedades de alto orden de los sistemas neuronales. A continuación se describen brevemente algunas de las características más importantes de los procesos de información neuronales dinámicos.

1. *Proceso distribuido y Paralelo.* La información neuronal accedida a través de varios sensores biológicos se distribuye a través de neuronas múltiples. Más aún, los procesos de información neuronal parecen incluir la activación de neuronas múltiples que no solo reciben y transmiten información en paralelo sino que también incorporan paralelismo y mecanismos de actualización distribuida con una capacidad adaptativa para aprender, reconocer, generalizar y diferenciar. De hecho, hay dos sistemas de distribución sensoriales en el cerebro; uno es el sistema específico sensorial tálamo-cortical, y el otro es un sistema no específico usado para la concentración y el impulso. Estas estructuras verifican la importancia y plausibilidad del conocimiento distribuido paralelo en el cerebro.
2. *Capacidad de Codificación Temporal.* La información de estímulo recibido por las neuronas se codifica como los trenes de potenciales de acción (spike trains). Un axón determinado tendrá típicamente una amplitud de picos constante, pero su frecuencia de respuesta llevará el

contenido de la información. Por lo general, la información se codifica en forma de modulación de frecuencia y se almacena en el cerebro como memoria a corto plazo o memoria de largo plazo.

3. *La función de la Inhibición Lateral.* La inhibición lateral introduce el intercambio de información de neurona a neurona y afectando una al momento de bloquear la acción de la otra. Este mecanismo de inhibición existe comúnmente, y puede ser generalizada en todo el sistema nervioso. Sin embargo, la inhibición lateral es un mecanismo de interacción neuronal local, y da lugar a importantes propiedades globales. Desde el punto de vista de la información, la inhibición lateral proporciona información sobre los cambios de la misma. Por lo tanto, la inhibición lateral puede ser vista simultáneamente como un principio biológico y como una descripción matemática de un sistema neuronal biológico.
4. *Procesamiento de Prealimentación y Realimentación.* Parece que el cerebro utiliza lazos circulares o de reverbero para procesar información. Este lazo se produce cuando una parte del cerebro procesa una entrada y pasa la información a otra área, donde se procesa y se pasa directamente a tras de la ubicación de origen, o través de otros lugares intermedios para y una actualización adicional. Al final, la información se devuelve a través del área del cerebro original para reverberar de nuevo a través de las estructuras. Este proceso implica, obviamente lazos de Prealimentación y de realimentación con alguna transformación dinámica. Este proceso dinámico causado por realimentación proporciona algunas características robustas en el procesamiento de la información.

3.4 Unidades Neuronales

La base de una red neuronal artificial es tener muchas unidades de procesamiento interconectadas. Cada unidad en la red está basada en el concepto de una neurona idealizada. Se asume que una neurona ideal responde óptimamente a las entradas aplicadas. Una red neuronal es un conjunto combinado de tales unidades neuronales, conectadas por medio de las conexiones sinápticas complejas caracterizadas por coeficientes de peso, donde cada una hace su contribución a las propiedades de cálculo del sistema entero.

Una red neuronal artificial tiene similitudes con el cerebro tales como:

1. Conocimiento adquirido a través de un proceso de aprendizaje.
2. Una conectividad interna de la unidad neuronal conocida como los pesos sinápticos los cuales son usados para guardar el conocimiento.

El procedimiento para el proceso de aprendizaje es conocido como algoritmo de aprendizaje. Su función es modificar los pesos sinápticos de las redes para lograr un objetivo específico. La modificación de los pesos

proporciona un método tradicional para el diseño e implementación de redes neuronales.

La neurona o unidad neuronal es la unidad fundamental para el funcionamiento de una red neuronal y consiste en tres elementos básicos:

1. Un conjunto de enlaces sinápticos, donde cada uno está caracterizado por su propio peso.
2. Una sumatoria para los componentes de las señales de entrada, multiplicadas por el peso sináptico respectivo.
3. Una función de activación no lineal que transforma la suma de salida en la salida de la neurona.

Se aplica también un umbral externo para reducir la entrada de la función de activación.

En términos matemáticos la *i*-ésima neurona puede ser descrita como:

$$v_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j \quad (3.1)$$

$$y_i = \sigma(v_i - w_{i0}) \quad (3.2)$$

donde:

- x_j es la *j*-ésima componente de la entrada,
- w_{ij} es el peso que conecta la *j*-ésima componente de la entrada a la neurona *i*,
- v_i es la salida de la sumatoria,
- $\sigma(\cdot)$ es la función de activación no lineal,
- y_i es la salida de la neurona *i*.

La figura 3.3 muestra un esquema de la neurona *i*.

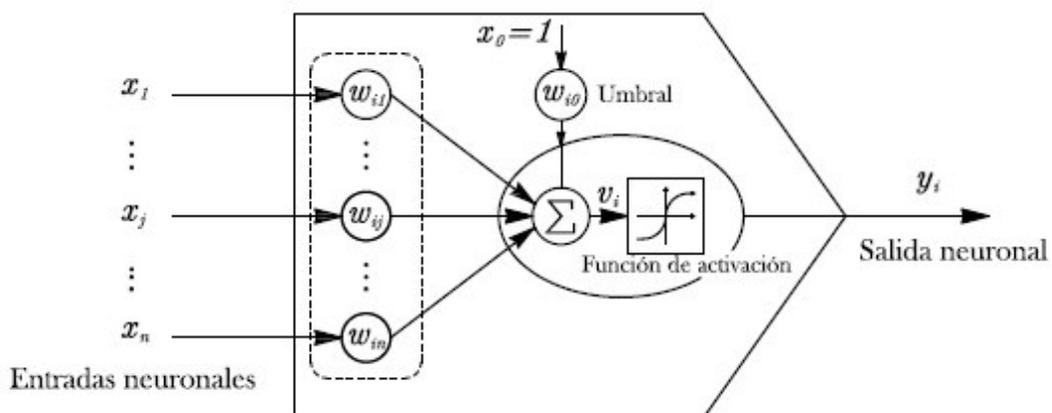


Figura 3.3 Modelo no lineal de la neurona

En general una neurona individual realiza una suma de sus entradas ponderadas y proporciona una salida a través de una función de activación no lineal con un umbral.

3.5 Funciones De Activación

La función de activación neuronal no lineal $\sigma(\cdot)$ en estructuras neuronales adaptables mapea el estado neuronal $x \in \mathbb{R}^n$ a un espacio de salida neuronal acotado, esto es, $\sigma(\cdot) \in [-1,1]$. Para modelos neuronales de tiempo continuo, la función de activación neuronal no lineal $\sigma(\cdot)$ puede elegirse como una función sigmoide no lineal continua y diferenciable que satisface las siguientes condiciones:

1. $\sigma(x) \rightarrow \pm 1$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.
2. $\sigma(x)$ está acotada por el límite superior 1 y el límite inferior -1.
3. $\sigma(x) = 0$ en un único punto, $x = 0$.
4. $\sigma'(x) > 0$ y $\sigma'(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$. (Monótonamente creciente).
5. $\sigma'(x)$ tiene un valor máximo global

Un ejemplo típico de la función $\sigma(x)$ es:

$\sigma(x) = \tanh(cx) = \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{e^{cx} + e^{-cx}}$ donde $c > 0$ y es una constante que determina la pendiente de la función $\sigma(x)$ que es la ganancia de activación. La figura 3.4 muestra una función de activación neuronal para distintos valores de c y la figura 3.5 muestra su derivada.

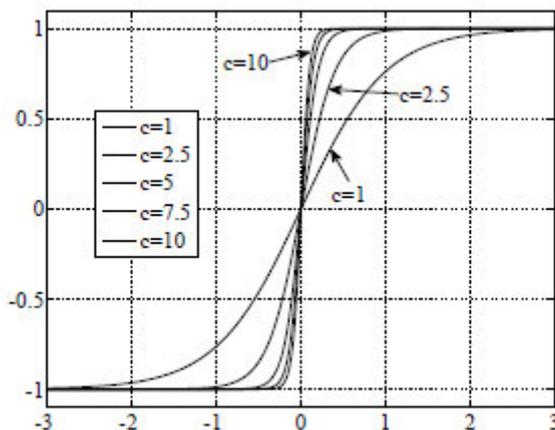


Figura 3.4 $\sigma(x) = \tanh(cx)$

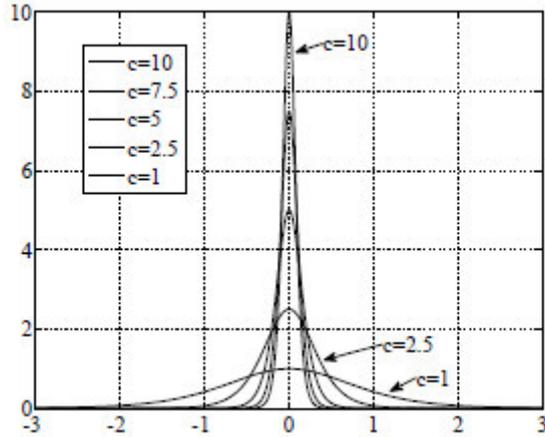


Figura 3.5 $\sigma'(x) = c \operatorname{sech}^2(cx)$

3.6 Redes Neuronales Dinámicas En Tiempo Continuo

Una definición universal de un modelo de red neuronal no existe. Para propósitos de análisis teórico, en este trabajo se limita a considerar las redes neuronales como sistemas que tienen estados en valor continuo y ecuaciones de movimiento que pueden ser expresadas por ecuaciones diferenciales.

Una red neuronal consiste de muchas unidades de procesamiento simples interconectadas llamadas neuronas, las cuales forman configuraciones a capas. Una neurona individual agrega sus entradas ponderadas y proporciona una salida a través de una función de activación no lineal con un umbral. En una red neuronal artificial existen tres tipos diferentes de conexiones: intralayer(dentro-capa), interlayer(entre-capa) y conexiones recurrentes. Las conexiones dentro-capa, llamadas también conexiones laterales o conexiones cruzadas, están unidas entre neuronas de una misma capa de la red. Las conexiones entre-capa están unidas entre neuronas de diferentes capas. Las conexiones recurrentes proporcionan uniones de auto-realimentación. En las conexiones entre-capa, las señales son transformadas en prealimentación o en realimentación.

Considere la forma generalizada de una red neuronal dinámica en tiempo continuo definida como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x(t), u(t), w) \\ y(t) &= h(x(t), w) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donde $x \in \mathfrak{R}^n$ representa el vector de estado, $u \in \mathfrak{R}^m$ es el vector de entrada externa y $w \in \mathfrak{R}^l$ es el vector de parámetros neuronal, el cual contiene los pesos de conexión sinápticos y los parámetros operacionales

somáticos; $f(\cdot)$ es una función que representa la estructura de la red neuronal, y $h(\cdot)$ es una función que representa la relación entre el vector de estado $x(t)$ y el vector de salida $y(t) \in \mathfrak{R}^p$.

3.7 Forma General De Una Red Neuronal Dinámica De Hopfield

Un modelo en tiempo continuo de una red neuronal puede ser descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\dot{x}_i(t) = -\alpha_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j(t) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

$$y_i(t) = \sigma_i(x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

Donde x_i representa el estado de la i -ésima neurona, y_i es la salida de la i -ésima neurona, w_{ij} es el peso de conexión sináptico que va desde la i -ésima neurona a la j -ésima neurona, u_i es una entrada externa constante, α_i es una constante positiva y $\sigma_i(\cdot)$ es una función sigmoideal monótona.

El modelo anterior es conocido como una red neuronal dinámica de Hopfield y consiste en una única capa de neuronas que están totalmente interconectadas por medio de conexiones recurrentes y conexiones dentro-capa. En la figura 3.6 se muestra la estructura descrita por las ecuaciones (3.4) y (3.5).

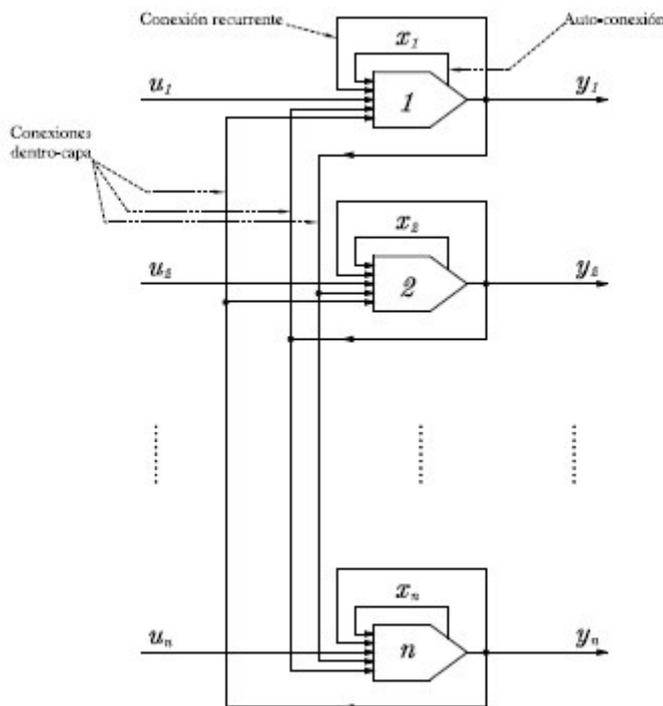


Figura 3.6 Estructura de una red neuronal dinámica

Cada neurona recibe tres tipos de entradas:

$u_i(t)$: una señal de entrada externa para su procesamiento dinámico,

$x_i(t)$: una auto-conexión, una señal de realimentación de estado,

$y_i(t)$: conexiones dentro-capa, una señal de salida proveniente de cada neurona incluyendo la i -ésima neurona.

Los dos tipos de conexiones (recurrente y dentro de capa) presentes en esta red, involucran las operaciones sinápticas. Nótese que esta red neuronal dinámica es un sistema dinámico no lineal determinístico continuo y en la figura 3.7 se muestra su diagrama de bloque.

Una forma vectorial del sistema dado por las ecuaciones (3.4) y (3.5) se puede expresar como:

$$\dot{x}(t) = -A x(t) + W \sigma(x(t)) + u \quad (3.6)$$

$$y(t) = \sigma(x(t)) \quad (3.7)$$

Donde $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ es el vector de estado de la red, $u(t) = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ es el vector de entrada, $y = \sigma(x) = (\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_2), \dots, \sigma_n(x_n))^T$ es el vector de salida, $A = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, y

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

es la matriz de peso sináptica.

El diagrama de bloque del sistema neuronal de la ecuación (3.6) y (3.7) se muestra en la figura 3.7.

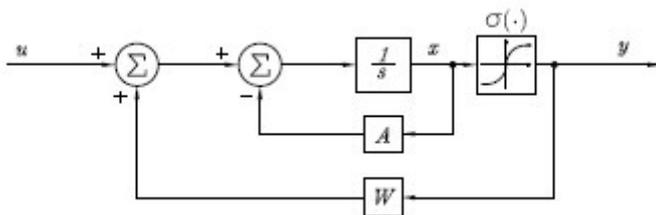


Figura 3.7 Diagrama de bloque de una red neuronal dinámica de Hopfield

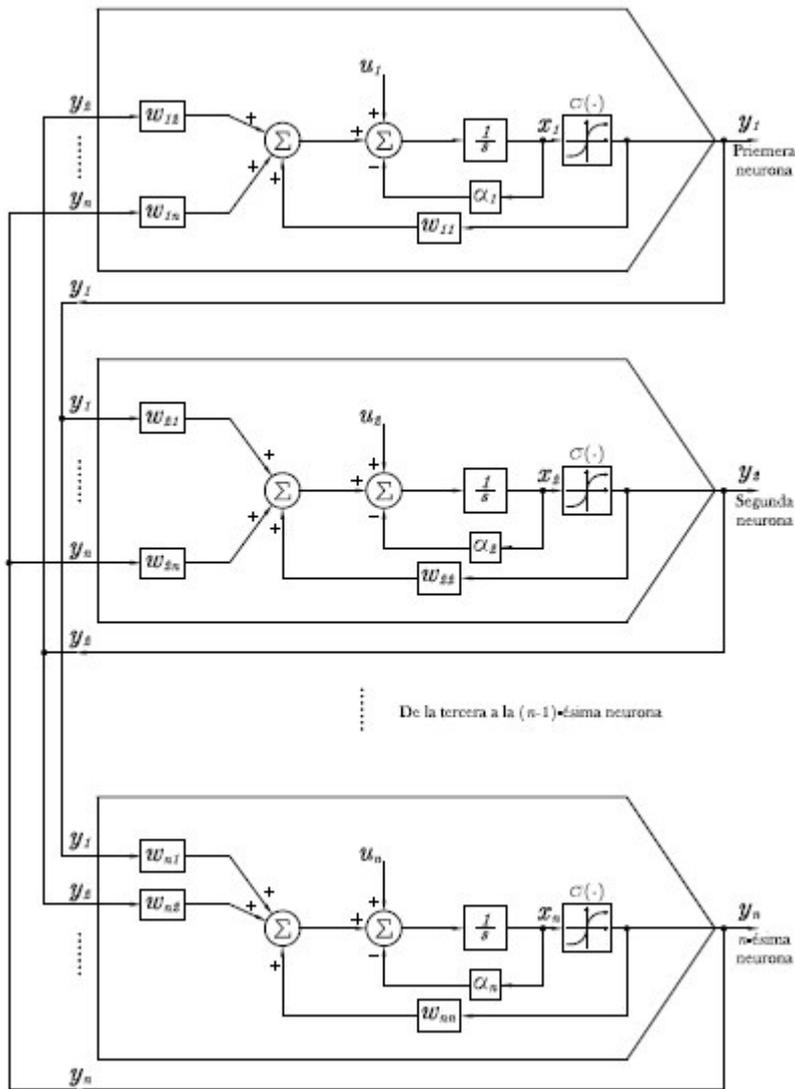


Figura 3.8 Diagrama de bloque de una estructura de una red neuronal dinámica en tiempo continuo

3.8 Condiciones Para Los Puntos De Equilibrio De Una Red Neuronal Dinámica

Considere la red neuronal dinámica descrita por la ecuación (3.6)

$$\dot{x}(t) = -A x(t) + W \sigma(x(t)) + u \quad (3.8)$$

Dado un conjunto de vectores diferentes de cero $\{x^1, x^2, \dots, x^m\} = \{x^i\}$ que representan alguna información específica, se estudia las condiciones para las cuales los vectores $\{x^i\}$ son los puntos de equilibrio de la red neuronal dinámica (3.8). Asuma la entrada $u = 0$ y que $\{x^i\}$ son los puntos de equilibrio del sistema (3.8). Entonces cada vector x^i en los puntos de equilibrio, satisface $\dot{x}^i = 0$ y entonces la siguiente igualdad se satisface.

$$0 = -A x^i + W \sigma(x^i) \quad (3.9)$$

Esto es

$$A(x^1, x^2, \dots, x^m) = W(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) \quad (3.10)$$

La cual se escribe como

$$AX = W\Sigma \quad (3.11)$$

Donde $X = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ y $\Sigma = (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m))$. Además asuma que $m \geq n$ y $\text{rank}(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) = n$, donde n es el número de neuronas.

Entonces (3.11) nos lleva

$$W = AX\Sigma^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1} \quad (3.12)$$

Debido a que W es una matriz simétrica, la parte derecha de esta ecuación es igual a la traspuesta de si misma, esto es

$$AX\Sigma^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1} = (AX\Sigma^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1})^T \quad (3.13)$$

De donde obtenemos

$$\Sigma\Sigma^T AX\Sigma^T = \Sigma X^T A \Sigma\Sigma^T \quad (3.14)$$

La ecuación anterior se satisface si

$$\Sigma^T A X = X^T A \Sigma \quad (3.15)$$

Esto es

$$(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m))^T A (x^1, x^2, \dots, x^m) = (x^1, x^2, \dots, x^m)^T A (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) \quad (3.16)$$

O lo que es lo mismo

$$\sigma^T(x^j) A x^i = \sigma^T(x^i) A x^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.17)$$

En consecuencia, (3.17) es una condición suficiente para que el conjunto de vectores diferentes de cero $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ sean los puntos de equilibrio del sistema (3.8) para la función vectorial no lineal $\sigma(\cdot)$.

De hecho la condición suficiente en (3.17) es también necesaria para toda m .

Para verificar esto, usando (3.10) y (3.17), se obtiene

$$\sigma^T(x^j) A x^i = \sigma^T(x^i) W x^j \quad (3.18)$$

Luego la simetría de la matriz W nos lleva a

$$\sigma^T(x^i) W \sigma(x^i) = \sigma^T(x^i) W \sigma(x^j) \quad (3.19)$$

Por lo tanto

$$\sigma^T(x^j) A x^i = \sigma^T(x^i) A x^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.20)$$

Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 4 *Sea $u = 0$ en el sistema descrito por (3.8) y sea $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ un conjunto de vectores constantes diferentes de cero en \mathfrak{R}^m . Entonces*

1. *La condición dada por (3.10) es necesaria para que x^1, x^2, \dots, x^m sean los puntos de equilibrio del sistema (3.8).*
2. *Si $m \geq n$ y $\text{rank}(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) = n$, la condición (3.10) es también suficiente para que x^1, x^2, \dots, x^m sean los puntos de equilibrio del sistema (3.8)*

Demostración: Se tiene que $m \geq n$ y $\text{rank}(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) = n$, entonces deberá existir una matriz simétrica W tal que x^1, x^2, \dots, x^m sean los puntos de equilibrio del sistema (3.8). Sea

$$W = \left\{ (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m))^T \right\}^{-1} (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) (x^1, \dots, x^m)^T A$$

$$W = (\Sigma \Sigma^T)^{-1} \Sigma X^T A \quad (3.21)$$

Luego usando la condición (3.12), es fácil verificar que W es una matriz simétrica. Multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por $\Sigma = (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m))$ se llega a las condiciones de equilibrio

$$W \Sigma = (\Sigma \Sigma^T)^{-1} \Sigma X^T A \Sigma = (\Sigma \Sigma^T)^{-1} \Sigma \Sigma^T A X = A X \quad (3.22)$$

Esto es

$$W (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) = A (x^1, x^2, \dots, x^m) \quad (3.23)$$

Así entonces x^1, x^2, \dots, x^m son los puntos de equilibrio de (3.8)

CAPITULO 4 INTRODUCCIÓN A LAS REDES NEURONALES RECURRENTE

En este capítulo se estudia el problema de seguimiento de trayectorias, por medio de una red neuronal recurrente a una red genética, descrita por un modelo dinámico no lineal. En base a la teoría de Lyapunov se obtiene una ley de control que logra la estabilidad asintótica global del error de seguimiento.

4.1 Descripción Matemática De Una Red Neuronal Recurrente

Se considera una red neuronal recurrente descrita por:

$$\dot{x} = A x + W \sigma(x) + u, \quad x, u \in \mathbb{R}^n \quad A, W \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (4.1)$$

Donde $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ es el vector de estado, u es la entrada, A es una matriz de $n \times n$ de la que sin pérdida de generalidad se puede considerar como $A = -\lambda I$, λ es una constante positiva, W es la matriz de peso y $\sigma(x)$ es una función sigmoide.

4.2 Red Genética

En una red genética con perturbación real, las ecuaciones que describen la regulación dinámica del gen son siempre no lineales, además son descritas por la siguiente ecuación estocástica no lineal de Langevin [23], [24]:

$$dx_r(t) = f_r(x_r(t)) dt + h_r(x_r(t)) dw_r(t) \quad (4.2)$$

Donde $x_r(t) = (x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn})^T$ denota el vector de concentración de n genes, $w_r(t)$ es un proceso de Wiener estándar o movimiento Browniano. El primer término del lado derecho de (4.2) denota la interacción no lineal nominal de la red genética, mientras que el segundo término denota el efecto de las fluctuaciones moleculares intrínsecas de la red genética, el cual es dependiente del estado e influirá la estabilidad de la red genética nominal. Como parte de este trabajo se considerará $h_r(x_r(t)) \equiv 0$. Entonces (4.2) se puede escribir como:

$$\dot{x}_r(t) = f_r(x_r(t)), \quad x_r, f_r \in \mathbb{R}^n \quad (4.3)$$

4.3 Análisis De Estabilidad Del Error De Seguimiento

El error de seguimiento se define por:

$$e = x - x_r \quad (4.4)$$

Para que el sistema (4.1) siga al sistema (4.3), la siguiente suposición es necesaria (ver [13] para una explicación detallada):

Suposición 4.1 Existen funciones $\rho(t)$ y $\alpha(t)$ tales que

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(t) &= A\rho(t) + W\sigma(\rho(t)) + \alpha(t) \\ \rho(t) &= x_r(t)\end{aligned}\quad (4.5)$$

De (4.5) y (4.3) se tiene que:

$$Ax_rW\sigma(x_r(t)) + \alpha(t) = f_r(t) \quad (4.6)$$

De (4.4) tenemos

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_r$$

La cual se puede escribir como:

$$\dot{e} = Ae + W(\sigma(x(t)) - \sigma(x_r(t))) + (u - \alpha(t)) \quad (4.7)$$

Si se introducen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}\phi_\sigma(t) &= \sigma(x(t)) - \sigma(x_r(t)) \\ \tilde{u} &= u - \alpha(t)\end{aligned}\quad (4.8)$$

La ecuación (4.7) se puede escribir como:

$$\dot{e} = Ae + W\phi_\sigma(t) + \tilde{u} \quad (4.9)$$

De esta manera el problema de seguimiento se convierte en un problema de estabilización del sistema (4.9). Consideremos la siguiente función de Lyapunov para el análisis del error.

$$V(e) = \frac{1}{2} \|e\|^2 \quad (4.10)$$

Cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (4.9) es

$$\dot{V}(e) = -\lambda \|e\|^2 + e^T W\phi_\sigma(t) + e^T \tilde{u} \quad (4.11)$$

Dicha ecuación satisface la siguiente desigualdad:

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda \|e\|^2 + \frac{1}{2} \|e\|^2 + \phi_\sigma^T(t)W^T W\phi_\sigma(t) + e^T \tilde{u} \quad (4.12)$$

De la ecuación (4.8) tenemos que $\|\phi_\sigma(t)\| \leq L_\sigma \|e(t)\|$, al aplicarlo al tercer término del lado derecho de (4.12) se obtiene

$$\phi_\sigma^T(t)W^T W\phi_\sigma(t) \leq (L_\sigma)^2 \|W\|^2 \|e\|^2 \quad (4.13)$$

Donde L_σ es la constante de Lipschitz de ϕ_σ , por lo que (4.12) se reduce a:

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda \|e\|^2 + \frac{1}{2} \|e\|^2 + (L_\sigma)^2 \|W\|^2 \|e\|^2 + e^T \tilde{u} \quad (4.14)$$

De donde se propone la siguiente ley de control

$$\tilde{u} = -(1 + 2(L_\sigma)^2 \|W\|^2) e \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.15) en (4.14) se llega a:

$$\dot{V}(e) \leq -\left(\lambda + \frac{1}{2} + (L_\sigma)^2 \|W\|^2\right) \|e\|^2 \quad (4.16)$$

Claramente $\dot{V}(e) \leq 0$ para toda $e \neq 0$, esto significa que la ley de control propuesta en (4.15) estabiliza global y asintóticamente al sistema (4.9), asegurando así el seguimiento de trayectorias (4.1) y (4.3).

Finalmente de (4.6), (4.8) y (4.15) obtenemos la siguiente acción de control para la red neuronal.

$$u = -(1 + 2(L_\sigma)^2 \|W\|^2) e + f_r(x_r) - A x_r - W \sigma(x_r(t)) \quad (4.17)$$

4.4 Ejemplo

Los mecanismos en cascada son encontrados en diversas áreas de la bioquímica y fisiología, incluyendo control hormonal, regulación genética, inmunología, coagulado de sangre y excitación visual [25]. En este trabajo se presenta el sistema que describe una red de regulación genética en cascada con dos pasos y dos retroalimentaciones [26], con condiciones iniciales como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{r1} \\ \dot{x}_{r2} \\ \dot{x}_{r3} \\ \dot{x}_{r4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_{r1}^{0.5} - 4x_{r1}^{0.5}x_{r2}^{-1} - 4x_{r1}^{0.5} \\ 4x_{r1}^{0.5}x_{r2}^{-1} - 2x_{r2}^{0.5} - 2x_{r2} \\ 2x_{r2}^{0.5} - 2x_{r3}^{0.5} \\ 2x_{r2} - 2x_{r4}^{0.5} \end{pmatrix}$$

$$x_r(0) = (2.5 \quad 2 \quad 2 \quad 2) \quad (4.18)$$

Para ilustrar la aplicación del resultado anterior, consideremos para la red neuronal:

$$x = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x_r) = \begin{pmatrix} \tanh(x_{r1}) \\ \tanh(x_{r2}) \\ \tanh(x_{r3}) \\ \tanh(x_{r4}) \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los dos sistemas, la red neuronal recurrente y la red de regulación genética evolucionan independientemente en los primeros cinco segundos de simulación; en ese instante se introduce la ley de control (4.17) logrando con esto el seguimiento deseado como se muestra en las figuras 4.1- 4.4.

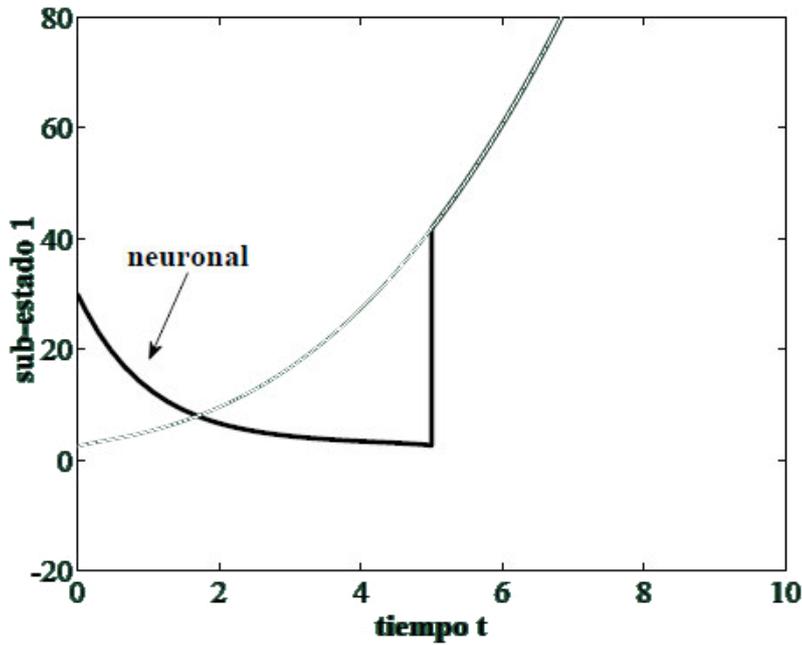


Figura 4.1 Evolución temporal para los subestados 1

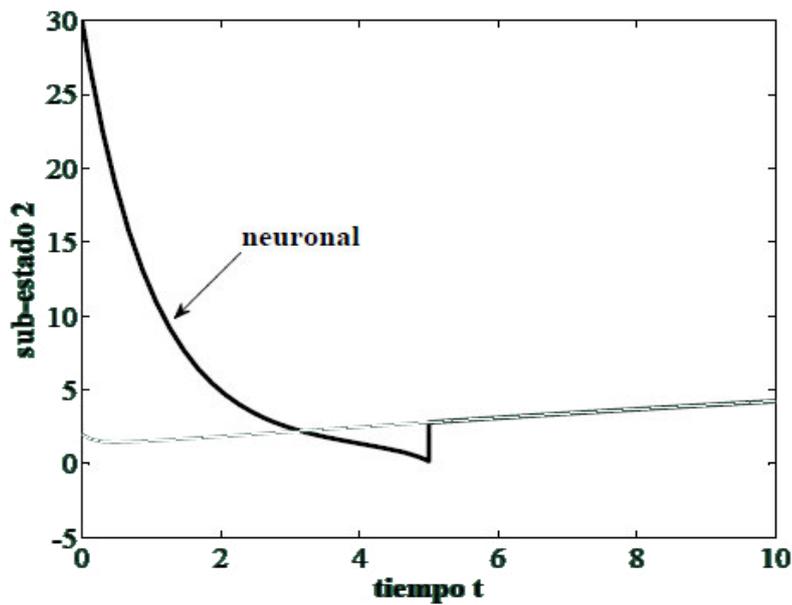


Figura 4.2 Evolución temporal para los subestados 2

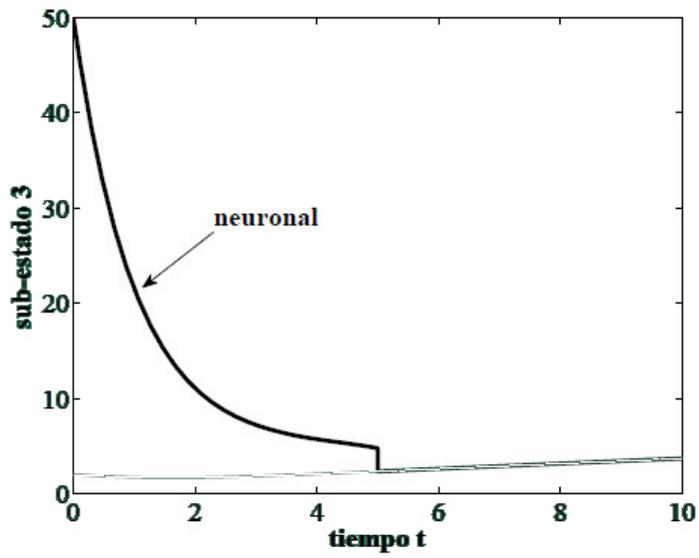


Figura 4.3 Evolución temporal para los subestados 3

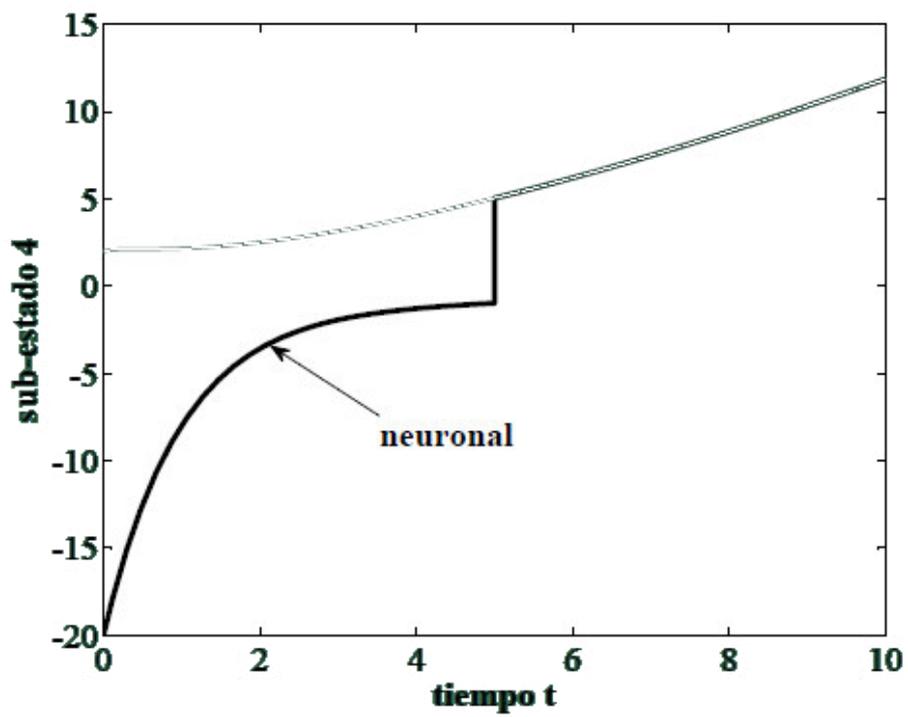


Figura 4.4 Evolución temporal para los subestados 4

CAPÍTULO 5 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS PARA SINCRONIZACIÓN DE CAOS USANDO LEYES DE CONTROL PI ENTRE LOS SISTEMAS CAOTICOS DE CHEN Y ROOSLER

5.1 Introducción

Las redes neuronales artificiales son ampliamente usadas en aplicaciones de ingeniería debido a su habilidad para estimar la relación entre las entradas y salidas dentro de su proceso de aprendizaje. Existe un gran interés en la aplicación de redes neuronales para la identificación y control de sistemas no lineales. Muchas de estas aplicaciones utilizan estructuras de retroalimentación. Para verificar los resultados analíticos, un ejemplo de red dinámica es simulado y un teorema es propuesto para asegurar el seguimiento de un sistema no lineal. En esta simulación se hace primero que la planta desconocida sea el atractor caótico de Chen y la referencia sea el atractor de Roosler y luego el atractor de Roosler la planta y el atractor de Chen la referencia.

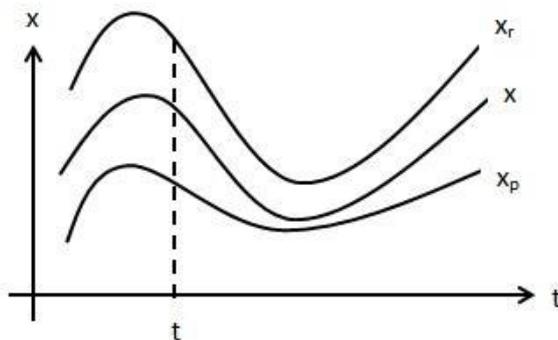


Figura 5.1 Grafica representativa de estados

5.2 Modelado de la Planta

Una planta no lineal desconocida está dada por:

$$\dot{x}_p = F_p(x_p, u) = f_p(x_p) + g_p(x_p) u \quad (5.1)$$

Donde $x_p, f_p \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $g_p \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ambas f_p y g_p son desconocidas, y se propone modelar la ecuación (5.1) por la siguiente red neuronal

$\dot{x} = A x + W^* \sigma(x) + \Omega u$, más un término de error de modelado.

Se define el error de modelado entre la red neuronal y la planta por:

$$w_{per} = x - x_p \quad (5.2)$$

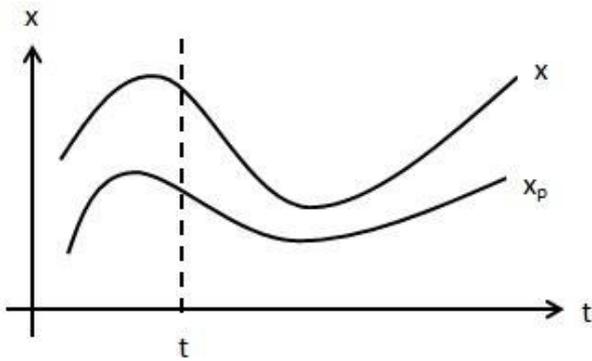


Figura 5.2 Gráfica representativa del error de modelado

La cual satisface la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1. (Objetivo de modelación): El error de modelado es exponencialmente estable, esto es:

$$\dot{w}_{per} = -k w_{per} \quad (5.3)$$

En este trabajo se considera $k = 1$ y entonces ahora tenemos de la ecuación (5.2)

$$\dot{w}_{per} = \dot{x} - \dot{x}_p \quad \text{de donde} \quad \dot{x}_p = \dot{x} + w_{per}$$

La planta desconocida, puede ser modelada como

$$\dot{x}_p = \dot{x} + w_{per} = Ax + W^* \sigma(x) + w_{per} + \Omega u \quad (5.4)$$

Donde W^* son los pesos fijos pero desconocidos de la red neuronal, los cuales minimizan el error de modelado.

Usando (5.2) y (5.4) vemos que $\dot{x}_p - \dot{x} = w_{per}$ o bien $\dot{w}_{per} = -w_{per}$ por lo que el modelo de la planta satisface la hipótesis 1.

5.3 Análisis de Seguimiento

Se procede ahora, a analizar el error de seguimiento entre la planta desconocida modelada por (5.4) y una señal de referencia definida por

$$\dot{x}_r = f_r(x_r, u_r), \quad \text{donde } x_r \text{ y } u_r \in \mathbb{R}^n \quad (5.5)$$

donde x_r es el estado, u_r es la entrada a la señal de referencia y f_r es una función no lineal..

Para este propósito, se define el error de seguimiento entre la planta y la señal de referencia por

$$e = x_p - x_r \quad (5.6)$$

Cuya derivada en el tiempo es

$$\dot{e} = \dot{x}_p - \dot{x}_r$$

Sustituyendo tenemos

$$\dot{e} = Ax + W^* \sigma(x) + w_{per} + \Omega u - f_r(x_r, u_r) \quad (5.7)$$

Sumando y restando, al lado derecho de (5.7) los términos

$\widehat{W} \sigma(x_r), \Omega \alpha_r(t, \widehat{W})$ y tomando en cuenta que $w_{per} = x - x_p$, se tiene la siguiente expresión.

$$\dot{e} = Ax + W^* \sigma(x) + x - x_p + \Omega u - f_r(x_r, u_r) + \widehat{W} \sigma(x_r) - \widehat{W} \sigma(x_r) + \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) - \Omega \alpha_r(t, \widehat{W})$$

La cual podemos escribir como

$$\dot{e} = W^* \sigma(x) + \Omega u - f_r(x_r, u_r) + \widehat{W} \sigma(x_r) + \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) - \widehat{W} \sigma(x_r) - \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) + A(x + x_r - x_r) + x - x_p \quad (5.8)$$

La cual escribimos como

$$\dot{e} = Ax_r + \widehat{W} \sigma(x_r) + x_r - x_p + \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) - f_r(x_r, u_r) - Ax_r + W^* \sigma(x) + \Omega u - \widehat{W} \sigma(x_r) - \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) - x_r + x + Ax$$

En esta parte se considera la siguiente suposición, la red neuronal seguirá la señal de referencia dada, aún con la presencia de perturbaciones si:

$$f_r(x_r, u_r) = Ax_r + \widehat{W} \sigma(x_r) + x_r - x_p + \Omega \alpha_r(t, \widehat{W})$$

de donde

$$\Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) = f_r(x_r, u_r) - Ax_r - \widehat{W} \sigma(x_r) - x_r + x_p \quad (5.9)$$

La ecuación (5.8) la podemos escribir entonces

$$\dot{e} = -Ax_r + W^* \sigma(x) + \Omega u - \widehat{W} \sigma(x_r) - \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) - x_r + x + Ax$$

Reescribiéndola tenemos

$$\dot{e} = W^* \sigma(x) - \widehat{W} \sigma(x_r) + (A + I)(x - x_r) + \Omega(u - \alpha_r(t, \widehat{W})) \quad (5.10)$$

donde \widehat{W} es la aproximación de W^* .

Ahora si sumamos y restamos en la ecuación (5.10) el término $\widehat{W} \sigma(x)$

Tenemos ahora la siguiente ecuación

$$\dot{e} = (W^* - \widehat{W})\sigma(x) + \widehat{W}(\sigma(x) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_r) + \Omega(u - \alpha_r(t, \widehat{W})) \quad (5.11)$$

Si ahora se define

$$\widetilde{W} = W^* - \widehat{W} \quad \text{y} \quad \tilde{u} = u - \alpha_r(t, \widehat{W}) \quad (5.12)$$

Sustituyendo (5.12) en (5.11) obtenemos la siguiente ecuación

$$\dot{e} = \widetilde{W}\sigma(x) + \widehat{W}(\sigma(x) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_r) + \Omega\tilde{u}$$

$$\dot{e} = \widetilde{W}\sigma(x) + \widehat{W}(\sigma(x) - \sigma(x_p) + \sigma(x_p) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_r) + \Omega\tilde{u} \quad (5.13)$$

Si ahora hacemos

$$\tilde{u} = u_1 + u_2 \quad (5.14)$$

La ecuación (5.13) la podemos escribir

$$\dot{e} = \widetilde{W}\sigma(x) + \widehat{W}(\sigma(x) - \sigma(x_p) + \sigma(x_p) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_p + x_p - x_r) + \Omega u_1 + \Omega u_2$$

reacomodando tenemos

$$\dot{e} = \widetilde{W}\sigma(x) + \widehat{W}(\sigma(x) - \sigma(x_p)) + \widehat{W}(\sigma(x_p) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_p) + (A + I)(x_p - x_r) + \Omega u_1 + \Omega u_2$$

Se define entonces

$$\Omega u_1 = -\widehat{W}(\sigma(x) - \sigma(x_p)) - (A + I)(x - x_p)$$

Entonces la ecuación (5.13) se reduce a

$$\dot{e} = \widetilde{W}\sigma(x) + \widehat{W}(\sigma(x_p) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x_p - x_r) + \Omega u_2$$

Teniendo en cuenta que $e = x_p - x_r$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\dot{e} = (A + I)e + \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} (\sigma(e + x_r) - \sigma(x_r)) + \Omega u_2 \quad (5.15)$$

Si hacemos $\phi(e) = \sigma(e + x_r) - \sigma(x_r)$ tenemos entonces

$$\dot{e} = (A + I)e + \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} \phi(e) + \Omega u_2 \quad (5.16)$$

Ahora se necesita encontrar una ley de control para Ωu_2 la cual estabilizará el sistema dado por la ecuación (5.16). Dicha ley de control se obtendrá utilizando la metodología de Lyapunov.

5.4 Estabilización del Error de Seguimiento

Una vez que la dinámica del error se ha obtenido, se procede a su estabilización. Nótese que $(e, \tilde{W}) = 0$, es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema autónomo ($A = -\lambda I$ y $\lambda > 0$). Para el análisis de su estabilidad, se propone la siguiente ley de control PI:

$$\Omega u_2 = K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \quad (5.17)$$

Los parámetros K_p y k_i serán determinados mas adelante y L_ϕ^2 es la constante de Lipschitz de ϕ , con $\gamma, L_\phi > 0$

Ahora mostraremos que el sistema de retroalimentación es asintóticamente estable.

Reemplazando (5.17) en (5.16) se tiene

$$\dot{e} = (A + I)e + \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} \phi(e) + K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \quad (5.18)$$

$$\dot{e} = -(\lambda - 1 - K_p)e + \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} \phi(e) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \quad (5.19)$$

Si hacemos $w = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$ entonces $\dot{w} = K_i e$ podemos reescribir (5.19) como

$$\dot{e} = -(\lambda - 1 - K_p)e + \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} \phi(e) + w - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \quad (5.20)$$

Ahora se mostrará que el nuevo estado $(e, w)^T$ es asintóticamente estable y que el punto de equilibrio es $(e, w)^T = (0, 0)^T$, cuando $\tilde{W}(x) = 0$, se considera

como una perturbación externa al sistema de la dinámica del error de seguimiento.

Para el análisis de estabilidad se propone la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V = \frac{1}{2}(e^T, w^T)(e, w)^T + \frac{1}{2}tr\{\tilde{W}^T \tilde{W}\} \quad (5.21)$$

Cuya derivada en el tiempo de (21) a lo largo de las trayectorias de (20) es:

$$\dot{V} = (e^T, w^T)(\dot{e}, \dot{w})^T + tr\{\dot{\tilde{W}}^T \tilde{W}\} = e^T \dot{e} + w^T \dot{w} + tr\{\dot{\tilde{W}}^T \tilde{W}\} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = e^T \left(-(\lambda - 1 - K_p)e + \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} \phi(e) + w - Y \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \right) \\ + w^T K_i e + tr\{\dot{\tilde{W}}^T \tilde{W}\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Aquí se propone la ley de aprendizaje para la red neuronal de los pesos fijos como

$$tr\{\dot{\tilde{W}}^T \tilde{W}\} = -e^T \tilde{W} \sigma(x) \quad (5.24)$$

Entonces (5.23) se puede reducir a

$$\dot{V} = -(\lambda - 1 - K_p)e^T e + e^T \widehat{W} \phi(e) + (1 + K_i)e^T w - Y \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e^T e \quad (5.25)$$

Ahora se aplica la siguiente desigualdad en el segundo término del lado derecho

$$x^T y \leq \frac{1}{2}x^T x + \frac{1}{2}y^T y \quad (5.26)$$

$$\dot{V} \leq -(\lambda - 1 - K_p)e^T e + \left(\frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e^T e + (1 + K_i)e^T w - Y \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e^T e \quad (5.27)$$

Simplificando tenemos

$$\dot{V} \leq -(\lambda - 1 - K_p)e^T e - (Y - 1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e^T e \quad (5.28)$$

En esta ecuación si $\lambda - 1 - K_p > 0$ y $Y - 1 > 0$ entonces $\dot{V} < 0$, $\forall e, w, \widehat{W} \neq 0$, por lo que el error es asintóticamente estable y converge a cero para cualquier $e \neq 0$ esto significa que la planta sigue asintóticamente a la referencia. Finalmente la ley de control la cual entra a la planta y a la red neuronal está dada por:

$$u = u_1 + u_2 + \alpha_r(t, \widehat{W})$$

$$u = \Omega^+ [-\widehat{W} (\sigma(x) - \sigma(x_p)) - (A + I)(x - x_p) + K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - Y \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|_{L_\phi}^2 \right) e + f_r(x_r, u_r) - Ax_r - \widehat{W} \sigma(x_r) - x_r + x_p] \quad (5.29)$$

Observación 1: Ω^+ es la pseudoinversa en el sentido de Moore-Penrose

Esta ley de control nos garantiza la estabilidad asintótica de la dinámica del error y por lo tanto asegura el seguimiento entre la planta y la señal de referencia. Finalmente estos resultados obtenidos se pueden resumir en el siguiente teorema.

Teorema: Para el sistema no lineal desconocido modelado por la ecuación (5.4), se tiene la ley de aprendizaje dada por la ecuación (5.24) y la ley de control dada por la ecuación (5.29), ambas garantizan el seguimiento de trayectoria entre la planta y la señal de referencia no lineal $\dot{x}_r = f_r(x_r, u_r)$

Observación 2: De la ecuación (5.28) tenemos

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{a}(\lambda - 1 - K_p)e^T e - \frac{1}{a}(Y - 1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|_{L_\phi}^2 \right) e^T e < 0, \quad \forall e \neq 0 \quad \forall \widehat{W}$$

donde V es decreciente y está acotada por $V(0)$ y entonces

$$V = \frac{1}{2}(e^T, w^T)(e, w)^T + \frac{1}{2} \text{tr}\{\widetilde{W}^T \widetilde{W}\}$$

Se concluye que $e, \widehat{W} \in L_1$; esto significa que los pesos permanecen acotados.

5.5 Simulación

Con el fin de demostrar la aplicabilidad del esquema de control adaptativo propuesto, con el siguiente ejemplo se prueba.

En este ejemplo, el atractor caótico de Chen es descrito por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p1} &= 35x_{p2} - 35x_{p1}, & x_{p1}(0) &= -10 \\ \dot{x}_{p2} &= -7x_{p1} - x_{p1}x_{p3} + 28x_{p2}, & x_{p2}(0) &= 0 \\ \dot{x}_{p3} &= x_{p1}x_{p2} - 3x_{p3}, & x_{p3}(0) &= 37 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Y el atractor caótico de Roosler viene dado por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{r1} &= -x_{r2} - x_{r3}, & x_{r1}(0) &= 0.1 \\ \dot{x}_{r2} &= x_{r1} + 0.2x_{r2}, & x_{r2}(0) &= 0 \\ \dot{x}_{r3} &= x_{r1}x_{r3} - 0.5x_{r3} + 0.2, & x_{r3}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

En las simulaciones, la siguiente red neuronal dinámica fue utilizada:

$$\dot{x} = A(x) + W^* \sigma(x) + \Omega u \quad (5.32)$$

$$\text{con } A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \sigma(x) = \begin{bmatrix} 150 \tanh(0.5x_1) \\ 150 \tanh(0.5x_2) \\ 150 \tanh(0.5x_3) \end{bmatrix}$$

W^* es estimada por medio de la ley de aprendizaje dada por la ecuación (5.24), y u es calculada usando la ecuación (5.29).

Los resultados de las simulaciones se muestran en las siguientes figuras 5.3-5.8, donde se presentan la evolución temporal de los estados y en las figuras 5.9 y 5.10 se muestra el espacio fase de los sistemas de Chen y Roosler respectivamente.

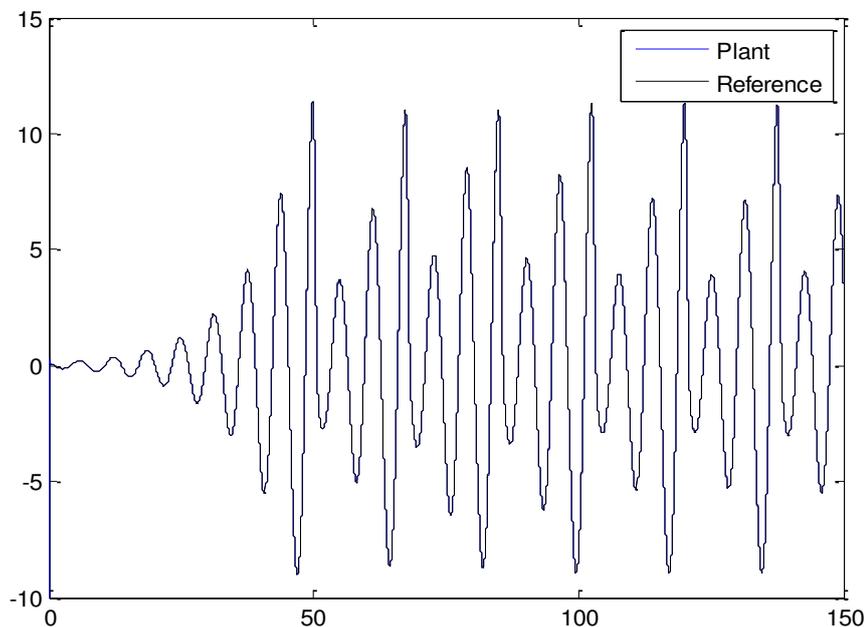


Figura 5.3 X Plant_Chen-Xref_Roosler

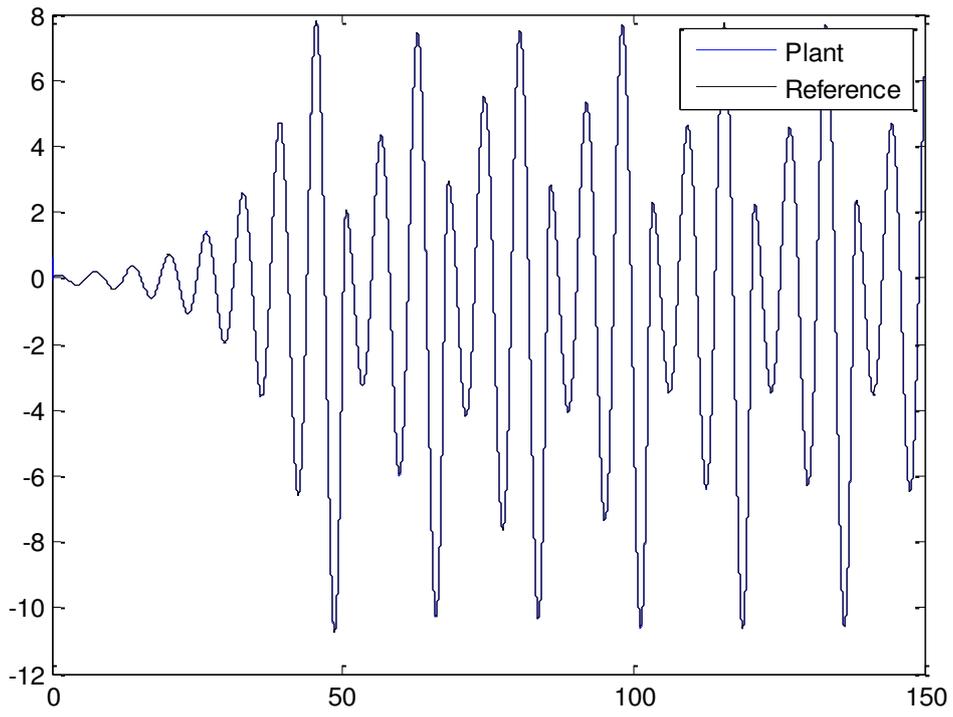


Figura 5.4 Y Plant_Chen-Yref_Roosler

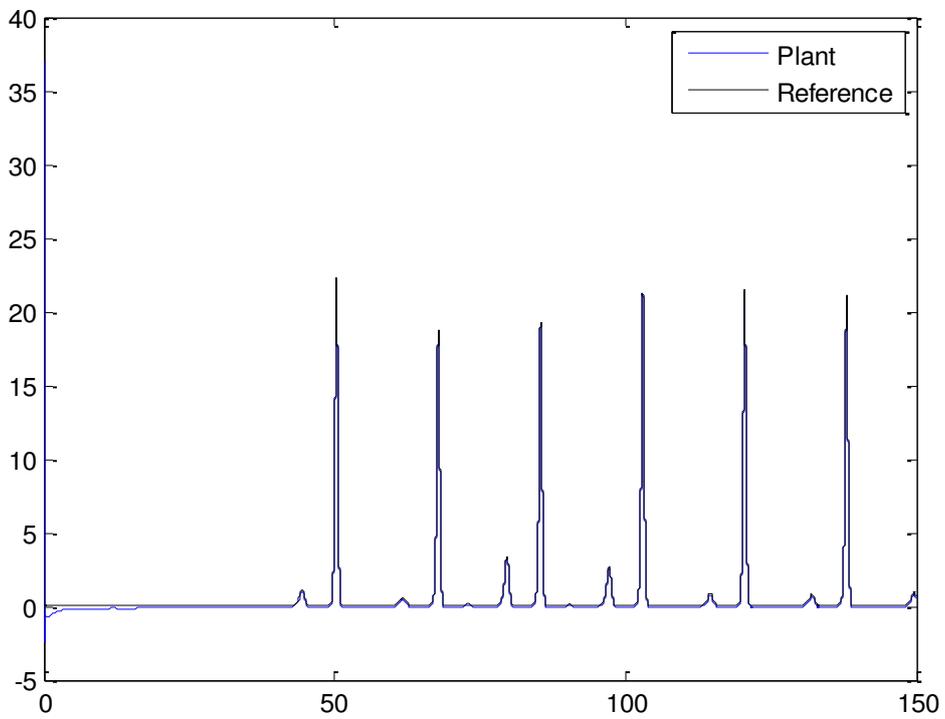


Figura 5.5 Z Plant_Chen-Zref_Roosler

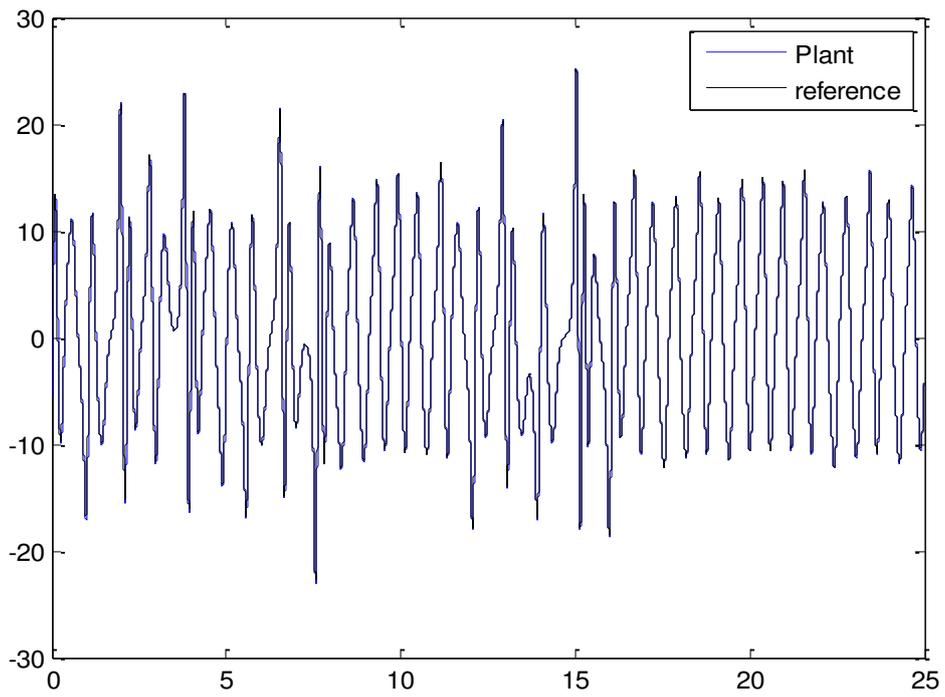


Figura 5.6 X Plant_Roosler_Xref_Chen

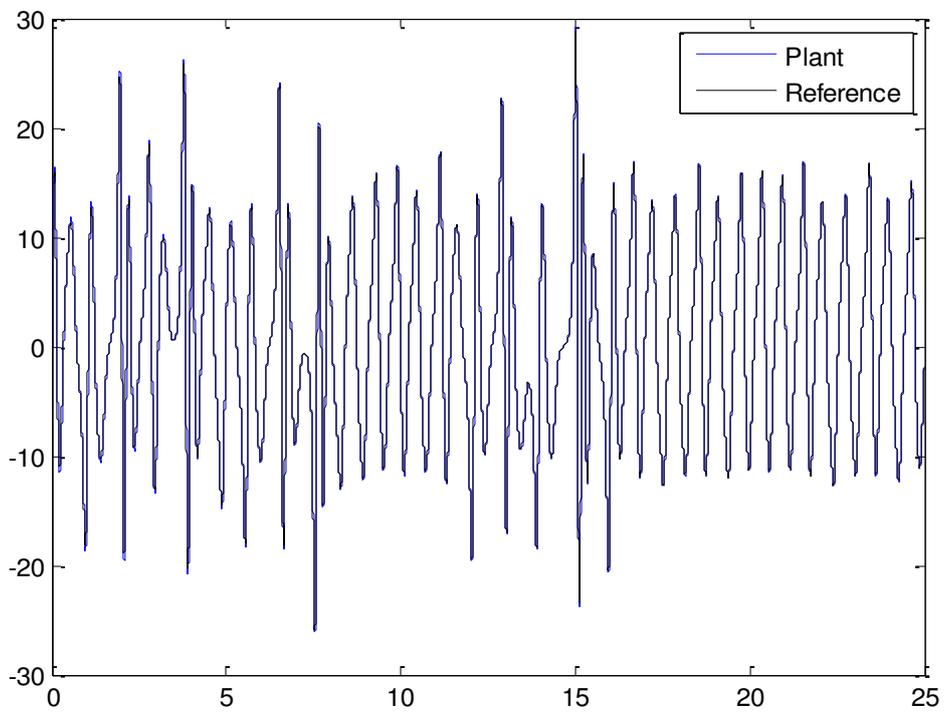


Figura 5.7 Y Plant_Roosler_Yref_Chen

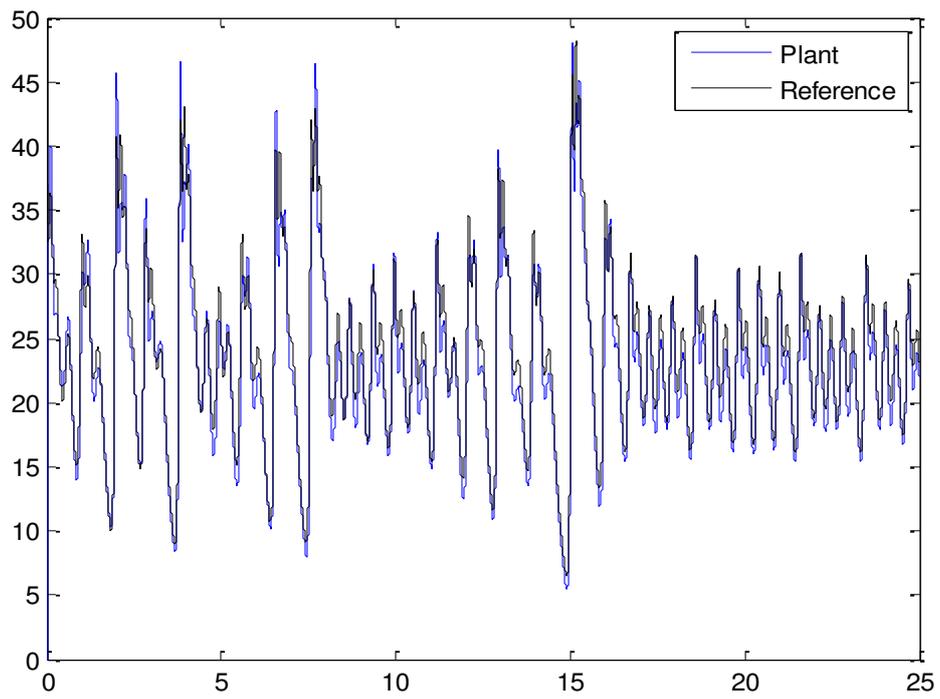


Figura 5.8 Z Plant_Roosler_Zref_Chen

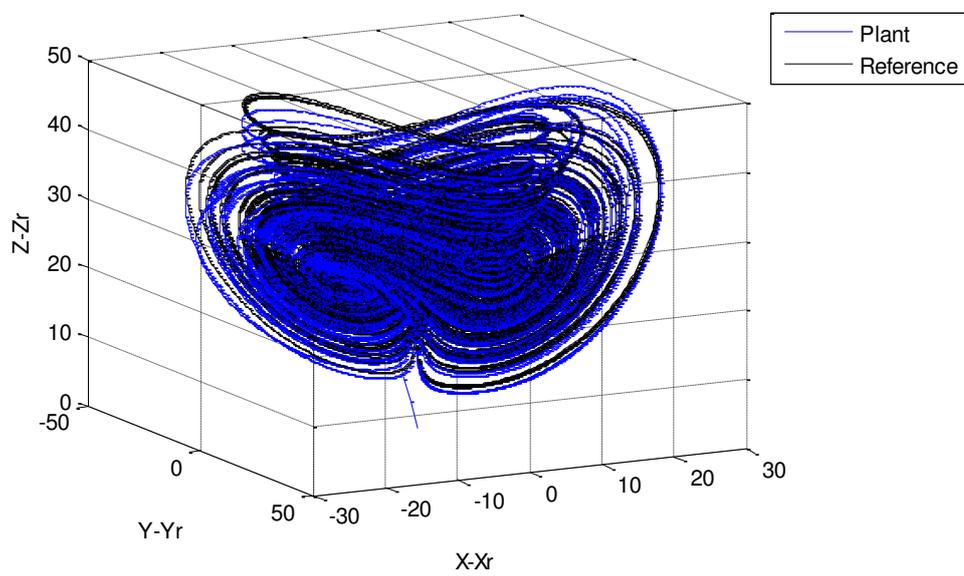


Figura 5.9 Trayectoria de espacios de fase, Roosler siguiendo a Chen

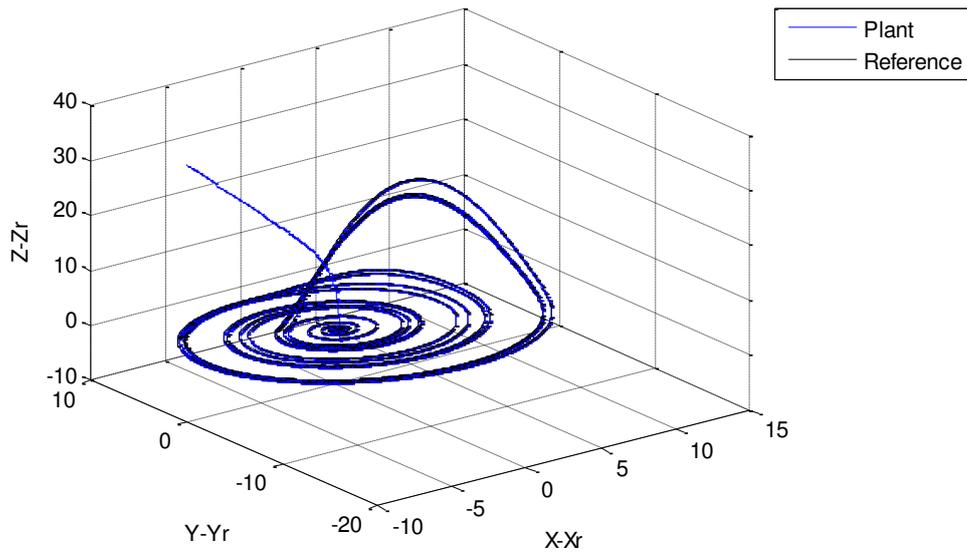


Figura 5.10 Trayectoria de espacios de fase, Chen siguiendo a Roosler

Donde podemos ver que el controlador neuronal recurrente asegura una rápida convergencia para el seguimiento de la trayectoria de la referencia. El controlador es robusto en presencia de perturbaciones aplicadas al sistema.

CAPÍTULO 6 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA PARA EL PENDULO CAOTICO USANDO LEYES DE CONTROL PI

6.1 Introducción

Un sistema de péndulo doble está compuesto por dos péndulos, con el segundo colgando del primero, como se muestra en la figura 6.1. Es un sistema físico que exhibe un comportamiento caótico.

Como en el capítulo anterior lo que hacemos es simular que la planta, en este caso el péndulo caótico siga la señal de referencia del sistema caótico definido por la ecuación caótica de Duffing.

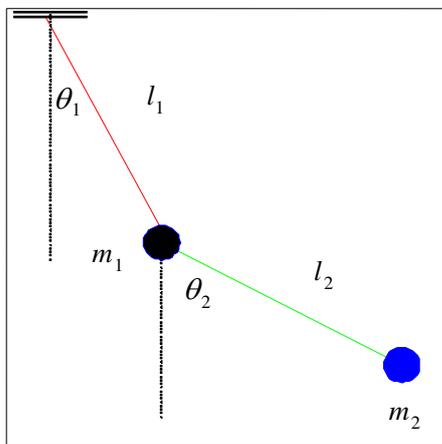


Figura 6.1 Sistema Dinámico Caótico

Consideremos un péndulo doble inmerso en un campo gravitacional, donde las masas m_1 y m_2 están sujetas a cables rígidos con masas despreciables y de longitud l_1 y l_2 , con enlaces q_1 y q_2 respectivamente. El sistema no lineal que describe la dinámica del péndulo caótico se llamará la Planta. El objetivo de este trabajo es forzar que el sistema siga una referencia no lineal llamada la Referencia. Se propone una ley de control PI para garantizar que el seguimiento de error entre la Planta y la Referencia tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Se verifica esto utilizando una función de Lyapunov. La ley de control PI fue desarrollada para un péndulo caótico para permitir que la trayectoria del seguimiento entre la planta y la referencia descrita por la ecuación caótica de Duffing. Esto se logra analizando directamente y describiendo el comportamiento del sistema en términos de parámetros relevantes, como son las masas y las longitudes de los péndulos. Para cada

caso se analizan las gráficas, donde están muestran que los ángulos son funciones del tiempo. Las figuras presentadas para lapsos de 200 segundos muestran las trayectorias seguidas por cada péndulo.

6.2 Modelado de la Planta

Una planta no lineal desconocida está dada por:

$$\dot{x}_p = F_p(x_p, u) \triangleq f_p(x_p) + g_p(x_p) u \quad (6.1)$$

Donde $x_p, f_p \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $g_p \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ambas f_p y g_p son desconocidas, y se propone modelar la ecuación (6.1) por la siguiente red neuronal

$\dot{x} = A(x) + W^* \sigma(x) + \Omega u$, más un término de error de modelado.

Se define el error de modelado entre la red neuronal y la planta por:

$$w_{per} = x - x_p \quad (6.2)$$

La cual satisface la siguiente hipótesis.

Hipótesis 1. (Objetivo de modelación):

El error de modelado es exponencialmente estable, esto es:

$$\dot{w}_{per} = -k w_{per} \quad (6.3)$$

En este trabajo se considera $k = 1$ y entonces ahora tenemos de la ecuación (6.2)

$$\dot{w}_{per} = \dot{x} - \dot{x}_p \quad \text{de donde} \quad \dot{x}_p = \dot{x} + w_{per}$$

La planta desconocida, puede ser modelada como

$$\dot{x}_p = \dot{x} + w_{per} = Ax + W^* \sigma(x) + w_{per} + \Omega u \quad (6.4)$$

Donde W^* son los pesos fijos pero desconocidos de la red neuronal, los cuales minimizan el error de modelado.

Usando (6.2) y (6.4) vemos que $\dot{x}_p - \dot{x} = w_{per}$ o bien $\dot{w}_{per} = -w_{per}$ por lo que el modelo de la planta satisface la hipótesis 1.

6.3 Análisis de Seguimiento

Teorema 1 El sistema no lineal desconocido (6.1) modelado por (6.4) y con ley de aprendizaje

$$\text{tr} \{ \dot{\tilde{W}}^T \tilde{W} \} = -e^T \tilde{W} \sigma(x)$$

y la ley de control

$$u = \Omega^+ [-\widehat{W} (\sigma(x) - \sigma(x_p)) - (A + I)(x - x_p) + K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e + f_r(x_r, u_r) - Ax_r - \widehat{W} \sigma(x_r) - x_r + x_p]$$

Juntos garantizan el seguimiento de trayectorias entre la planta y la señal de referencia no lineal $\dot{x}_r = f_r(x_r, u_r)$

Observación: Ω^+ es la pseudoinversa en el sentido de Moore-Penrose.

Demostración:

Se procede ahora, a analizar el error de seguimiento entre la planta desconocida modelada por (6.4) y una señal de referencia definida por

$$\dot{x}_r = f_r(x_r, u_r), \text{ donde } x_r \text{ y } u_r \in \mathfrak{R}^n \quad (6.5)$$

donde x_r es el estado, u_r es la entrada a la señal de referencia y f_r es una función no lineal.

Para este propósito, se define el error de seguimiento entre la planta y la señal de referencia por

$$e = x_p - x_r \quad (6.6)$$

Cuya derivada en el tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x}_p - \dot{x}_r \\ \dot{e} &= Ax + W^* \sigma(x) + w_{per} + \Omega u - f_r(x_r, u_r) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Sumando y restando, al lado derecho de (6.7) los términos

$\widehat{W} \sigma(x_r), \alpha_r(t, \widehat{W})$ y tomando en cuenta que $w_{per} = x - x_p$, se tiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ax + W^* \sigma(x) + x - x_p + \Omega u - f_r(x_r, u_r) + \widehat{W} \sigma(x_r) - \widehat{W} \sigma(x_r) + \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) \\ &\quad - \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) \end{aligned}$$

La cual escribimos como

$$\dot{e} = W^* \sigma(x) + \Omega u - f_r(x_r, u_r) + \widehat{W} \sigma(x_r) + \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) - \widehat{W} \sigma(x_r) - \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) + A(x + x_r - x_r) + x - x_p$$

Reescribiendo tenemos

$$\dot{e} = A x_r + \widehat{W} \sigma(x_r) + x_r - x_p + \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) - f_r(x_r, u_r) - A x_r + W^* \sigma(x) + \Omega u - \widehat{W} \sigma(x_r) - \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) - x_r + x + A x \quad (6.8)$$

En esta parte se considera la siguiente suposición, la red neuronal seguirá la señal de referencia dada, aún con la presencia de perturbaciones si:

$$f_r(x_r, u_r) = A x_r + \widehat{W} \sigma_z(x_r) + x_r - x_p + \Omega \alpha_r(t, \widehat{W})$$

de donde

$$\Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) = f_r(x_r, u_r) - A x_r - \widehat{W} \sigma_z(x_r) - x_r + x_p \quad (6.9)$$

La ecuación (6.8) la podemos escribir entonces

$$\dot{e} = -A x_r + W^* \sigma(x) + \Omega u - \widehat{W} \sigma(x_r) - \Omega \alpha_r(t, \widehat{W}) - x_r + x + A x$$

Simplificando tenemos

$$\dot{e} = W^* \sigma(x) - \widehat{W} \sigma(x_r) + (A + I)(x - x_r) + \Omega(u - \alpha_r(t, \widehat{W})) \quad (6.10)$$

donde \widehat{W} es la aproximación de W^* .

Ahora si sumamos y restamos en la ecuación (10) el término $\widehat{W} \sigma(x)$

Tenemos ahora la siguiente ecuación

$$\dot{e} = (W^* - \widehat{W}) \sigma(x) + \widehat{W} (\sigma(x) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_r) + \Omega(u - \alpha_r(t, \widehat{W})) \quad (6.11)$$

Si ahora se define

$$\widetilde{W} = W^* - \widehat{W} \quad \text{y} \quad \tilde{u} = u - \alpha_r(t, \widehat{W}) \quad (6.12)$$

Sustituyendo (6.12) en (6.11) obtenemos la siguiente ecuación

$$\dot{e} = \widetilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} (\sigma(x) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_r) + \Omega \tilde{u}$$

La cual es equivalente a

$$\dot{e} = \widetilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} (\sigma(x) - \sigma(x_p) + \sigma(x_p) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_r) + \Omega \tilde{u} \quad (6.13)$$

Desarrollando y haciendo

$$\tilde{u} = u_1 + u_2$$

$$\begin{aligned} \dot{e} = & \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} (\sigma(x) - \sigma(x_p) + \sigma(x_p) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_p + x_p - x_r) \\ & + \Omega u_1 + \Omega u_2 \end{aligned}$$

reacomodando términos tenemos

$$\begin{aligned} \dot{e} = & \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} (\sigma(x) - \sigma(x_p)) + \widehat{W} (\sigma(x_p) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x - x_p) + \\ & (A + I)(x_p - x_r) + \Omega u_1 + \Omega u_2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Se define entonces

$$\Omega u_1 = -\widehat{W} (\sigma(x) - \sigma(x_p)) - (A + I)(x - x_p)$$

Entonces la ecuación (6.14) se reduce a

$$\dot{e} = \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} (\sigma(x_p) - \sigma(x_r)) + (A + I)(x_p - x_r) + \Omega u_2 \quad (6.15)$$

Teniendo en cuenta que $e = x_p - x_r$, la ecuación (6.15) se puede escribir como

$$\dot{e} = (A + I)e + \tilde{W} \sigma(x) + \widehat{W} (\sigma(e + x_r) - \sigma(x_r)) + \Omega u_2$$

Si hacemos $\phi(e) = \sigma_z(e + x_r) - \sigma_z(x_r)$ tenemos entonces

$$\dot{e} = (A + I)e + \tilde{W} \sigma_z(x) + \widehat{W} \phi(e) + \Omega u_2 \quad (6.16)$$

Ahora se necesita encontrar una ley de control para Ωu_2 la cual estabilizará el sistema dado por la ecuación (6.16). Dicha ley de control se obtendrá utilizando la metodología de Lyapunov. En la próxima sección se continuará con la demostración del teorema 1

6.4 Estabilización del Error de Seguimiento

Una vez que la dinámica del error se ha obtenido, se procede a su estabilización. Nótese que $(e, \tilde{W}) = 0$, es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema autónomo ($A = -\lambda I$ y $\lambda > 0$). Para el análisis de su estabilidad, se propone la siguiente ley de control PI:

$$\Omega u_2 = K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - Y \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \quad (6.17)$$

Los parámetros K_p y k_i serán determinados más adelante y L_ϕ^2 es la constante de Lipschitz de ϕ , con $\gamma, L_\phi > 0$.

Ahora mostraremos que el sistema de retroalimentación es asintóticamente estable.

Reemplazando (6.17) en (6.16) se tiene

$$\dot{e} = (A + I)e + \tilde{W}\sigma(x) + \widehat{W}\phi(e) + K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \quad (6.18)$$

$$\dot{e} = -(\lambda - 1 - K_p)e + \tilde{W}\sigma(x) + \widehat{W}\phi(e) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \quad (6.19)$$

Si hacemos $w = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$ entonces $\dot{w} = K_i e(t)$ podemos reescribir (6.19) como

$$\dot{e} = -(\lambda - 1 - K_p)e + \tilde{W}\sigma(x) + \widehat{W}\phi(e) + w - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \quad (6.20)$$

Ahora se mostrará que el nuevo estado $(e, w)^T$ es asintóticamente estable y que el punto de equilibrio es $(e, w)^T = (0, 0)^T$, cuando $\tilde{W}\sigma(x) = 0$, de una perturbación externa.

Para el análisis de estabilidad se propone la siguiente función de Lyapunov como candidata.

$$V = \frac{1}{2} (e^T, w^T) (e, w)^T + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \tilde{W}^T \tilde{W} \} \quad (6.21)$$

Cuya derivada en el tiempo de (6.21) a lo largo de las trayectorias de (6.20) es:

$$\dot{V} = (e^T, w^T) (\dot{e}, \dot{w})^T + \text{tr} \{ \dot{\tilde{W}}^T \tilde{W} \} = e^T \dot{e} + w^T \dot{w} + \text{tr} \{ \dot{\tilde{W}}^T \tilde{W} \} \quad (6.22)$$

$$\dot{V} = e^T \left(-(\lambda - 1 - K_p)e + \tilde{W}\sigma(x) + \widehat{W}\phi(e) + w - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e \right) + w^T K_i e + \text{tr} \{ \dot{\tilde{W}}^T \tilde{W} \} \quad (6.23)$$

Aquí se propone la ley de aprendizaje para la red neuronal de los pesos fijos como

$$\text{tr} \{ \dot{\widehat{W}}^T \widehat{W} \} = -e^T \widehat{W} \sigma(x) \quad (6.24)$$

Entonces (6.23) se puede reducir a

$$\dot{V} = -(\lambda - 1 - K_p)e^T e + e^T \widehat{W} \phi(e) + (1 + K_i)e^T w - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e^T e \quad (6.25)$$

Ahora se aplica la siguiente desigualdad en el segundo término del lado derecho

$$x^T y \leq \frac{1}{2} x^T x + \frac{1}{2} y^T y \quad (6.26)$$

$$\dot{V} \leq -(\lambda - 1 - K_p)e^T e + \left(\frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e^T e + (1 + K_i)e^T w - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e^T e \quad (6.27)$$

Simplificando tenemos

$$\dot{V} \leq -(\lambda - 1 - K_p)e^T e - (\gamma - 1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e^T e \quad (6.28)$$

En esta ecuación si $\lambda - 1 - K_p > 0$ y $\gamma - 1 > 0$ entonces $\dot{V} < 0, \forall e, w, \widehat{W} \neq 0$, el error es asintóticamente estable y converge a cero para cualquier $e \neq 0, \widehat{W} \neq 0$. Esto significa que la planta sigue asintóticamente a la referencia. Finalmente la ley de control la cual entra a la planta y a la red neuronal está dada por:

$$u = u_1 + u_2 + \alpha_r(t, \widehat{W})$$

$$u = \Omega^+ [-\widehat{W} (\sigma_z(x) - \sigma_z(x_p)) - (A + I)(x - x_p) + K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e + f_r(x_r, u_r) - A x_r - \widehat{W} \sigma_z(x_r) - x_r + x_p] \quad (6.29)$$

Esta ley de control da estabilidad asintótica de la dinámica del error y por lo tanto asegura el seguimiento entre la planta y la señal de referencia.

Los resultados obtenidos se verifican por medio de una simulación y se mostrará en la siguiente sección.

De la ecuación (6.28) tenemos

$$\dot{V} \leq -(\lambda - 1 - K_p)e^T e - (\gamma - 1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\widehat{W}\|^2 L_\phi^2 \right) e^T e < 0 \quad \forall e \neq 0 \quad \forall \widehat{W}$$

Donde V es decreciente y está acotada por $V(0)$ y

$$V = \frac{1}{2}(e^T, w^T)(e, w)^T + \frac{1}{2}tr\{\tilde{W}^T \tilde{W}\}$$

Se concluye que $e, \hat{W} \in L_1$; esto significa que los pesos permanecen acotados.

6.5 Simulación

La red neuronal es modelada por la ecuación diferencial: $\dot{x} = Ax + W^* \sigma(x) + \Omega u$ con $A = -\lambda I, I \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y $\lambda = 20$, W^* es estimada usando la ley de aprendizaje dada por la ecuación (6.24),

$$\sigma(x) = (\tanh(x_1), \tanh(x_2), \tanh(x_3) \tanh(x_4))^T,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Y u es calculada por medio de la ecuación (6.29)

La planta está dada por:

$$(m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0$$

$$m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0$$

La señal de referencia es descrita por la ecuación de Duffing

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0.114 \cos(1.1t) \text{ con } x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0.114 \quad (6.30)$$

En la figura 6.2 el plano fase para la planta (péndulo caótico) es mostrada en color azul. El plano fase para la referencia (ecuación de Duffing) es mostrada en color negro.

El tiempo de evolución para los ángulos y el torque aplicado se muestran en las figuras 6.3-6.8.

En las figuras 6.3-6.6 las trayectorias descritas están en color azul para el péndulo caótico y en color negro para la ecuación dinámica de Duffing.

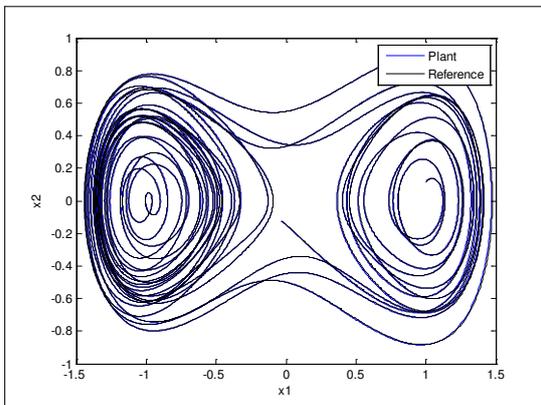


Fig. 2 Plant and Reference phase portrait for trajectory of Duffing

Figura 6.2 plano fase de la planta y la señal de referencia para la trayectoria de la ecuación de Duffing

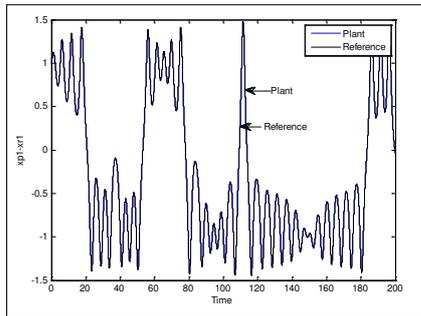


Fig. 3 Time evolution for state 1

Figura 6.3 Evolución en el tiempo para la posición angular θ_1

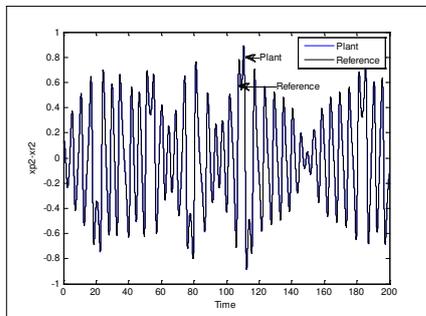


Fig. 4 Time evolution for state 2

Figura 6.4 Evolución en el tiempo para la posición angular θ_2

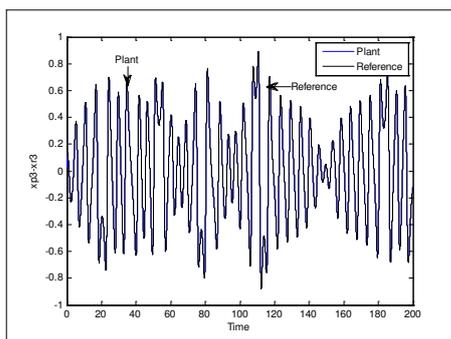


Fig. 5 Time evolution for state 3

Figura 6.5 Evolución en el tiempo para la velocidad angular del eslabón 1 (rad/seg)

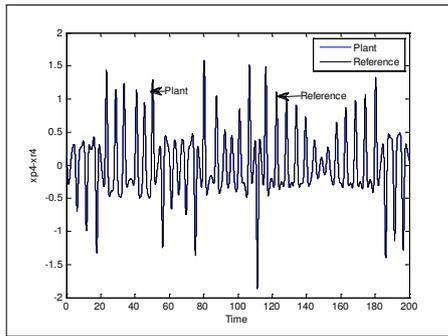


Fig. 6 Time evolution for state 4

Figura 6.6 Evolución en el tiempo para la velocidad angular del eslabón 2 (rad/seg)

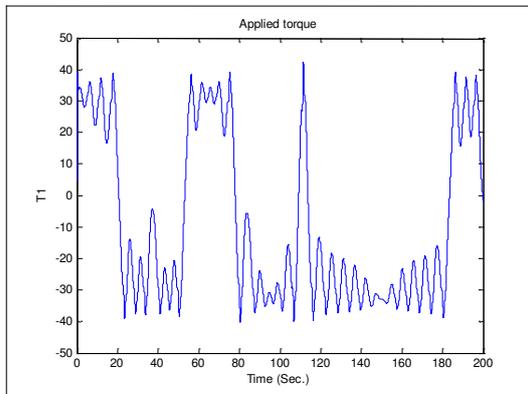


Fig. 7 Torque (Nm) applied to link 1

Figura 6.7 Torque aplicado al eslabón 1

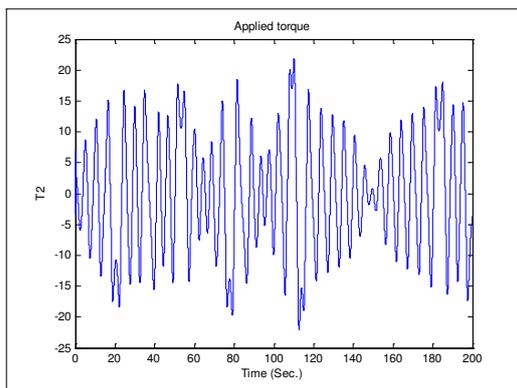


Fig. 8 Torque (Nm) applied to link 2

Figura 6.8 Torque aplicado al eslabón 2

CAPITULO 7 CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

Una de las principales contribuciones de esta investigación es el análisis de estabilidad asintótica del error de seguimiento entre sistemas no lineales cuyo modelo matemático se desconoce y señales de referencia generadas por ecuaciones diferenciales no lineales. Para garantizar el seguimiento de trayectorias se propone una ley de control PI y se obtienen leyes de adaptación de pesos en la red neuronal, obtenidas mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov, el sistema no lineal es identificado por una red neuronal recurrente de pesos variables.

El objetivo es que el sistema desconocido siga una señal de referencia dada, este problema es muy importante en control automático, el cual se reduce a determinar una acción de control que garantice la estabilización de la dinámica del error de seguimiento entre la planta y la señal de referencia.

La estabilidad para el error de seguimiento es analizada con funciones de control de Lyapunov y la ley de control PI. Los resultados son alentadores y son ilustrados vía simulación como puede verse, se obtiene un seguimiento de trayectorias satisfactorio y la convergencia del error de seguimiento es muy rápida.

Otro punto importante de este trabajo es que en otros enfoques de control, dichos controles son indirectos, es decir primero la red neural identifica la planta desconocida y cuando el error de identificación es pequeño, se aplica el control. En nuestro enfoque el control es directo, es decir, las leyes de aprendizaje para las redes neuronales dependen explícitamente del error de seguimiento, en lugar del error de identificación, esto da como resultado una respuesta más rápida del sistema.

La investigación en esta línea continua para que en un futuro se implementen los algoritmos de control en tiempo real y con retardo en el tiempo, en aplicaciones muy diversas como: militares, industriales, comerciales, etc.

Bibliografía

- [1] S. Haykin, *Neural Networks-A comprehensive Foundation*, Macmillan New York USA, 1994.
- [2] K. S. Narendra y S. M. Li, "Control of nonlinear time-varying systems using neural networks", New Haven, Conn USA, 1998, pp. 9-18.
- [3] K. S. Narendra y K. Parthasarathy, "Identification and control of dynamical systems using neural networks", de *IEEE Trans. on Neural Networks Vol 1*, 1990, pp. 4-27.
- [4] A. S. Poznyak, "Learning for dynamic neural networks" in 10 th Yale Wkshp. Adaptive Learning Syst., Yale University, New Haven, Conn USA, 1998, pp. 38-47.
- [5] M. Gupta y D. Rao, "(Eds), *Neuro-control Systems*", *Theory and Applications IEEE Press, Piscataway, N. J. USA*, 1994.
- [6] K. Hunt, G. Irwin y K. Warwick (Eds), "Neural Networks Engineering in Dynamic Control Systems", *Springer-Verlag, New York, USA*, 1995.
- [7] A. Poznyak, E. Sanchez, J. Perez y w. Yu, "Nonlinear adaptive trajectory tracking using dynamic neural network", *IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 10, pp 1402-1411 November, 1999*.
- [8] G. Rovithakis y M. Christodoulou, "Adaptive Control with Recurrent High_Order Neural Networks", *Springer_Verlag, New York, USA*, 2000.
- [9] J. Suykens, L. Vandewalle y R. de Moor, "Artificial Neural Networks for Modelling and Control of Nonlinear Systems", *Kluwer Academic Publishers, Boston, USA*, 1996.
- [10] L. Perko, "Differential Ecuations and Dynamical System", *Second Edition, Springer Verlag, New York, USA*, 1996.
- [11] H. Khalil, *Nonlinear system*, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.
- [12] S. Sastry, *Nonlinear systems analysis, Stability and control*, Springer Verlag, New York, USA, 1999.
- [13] M. Krstic y H. Deng, *Stabilization of Nonlinear Unceratin System*, Springer-Verlag, New York, USA, 1998.
- [14] A. Poznyak, E. Sanchez y W. Yu, «*Differential Neural Network for Robust NoNonlinear Control*, World Scientific, Singapore,» 2001.

- [15] M. Gupta, L.J. y N. Homma, Static and Dynamic Neural Networks, John Wiley And Sons, USA, New Jersey, 2003.
- [16] E. Sanchez, A. y A. Loukianov, Discrete-Time High Order Neural Control, primera edición, Springer, 2008.
- [17] Rojas, R. ,Neural Networks, primera edición, Springer, Berlin, 1996.
- [18] Galushkin, A.,Neural Networks Theory, primera edición, Springer, Berlin, 2007.
- [19] Xie, X.Dynamic and Learning in Recurrent Neural Networks, primera edición, Massachusetts Institute of Technology, USA, 2002.
- [20] Graupe, D.,Principles of Artificial Neural Networks, segunda edición, World Scientific, USA, Chicago, 2007.
- [21] Sanchez, E y A. Alanís, Redes Neuronales, primera edición, CINVESTAD, Gdl, 2006.
- [22] Haykin, S.,Neural Networks, segunda edición, Pearson, Canada, Ontario, 1999.
- [23] McAdams, H y P. Arkin, P. Stochastic mechanism in gene expression, Proc. Nat. Acad. Sci, 94(3), 1997, pp. 814-819.
- [24] Gillespie, T ., Approximate accelerated Stochastic simulation of Chemically reacting System, J. Chem. Phys, 115(4), Pags. 1716-1733, 2001.
- [25] Bor-Sen Chen, Cf. y Wang, Robust H infinite stabilization design in gene networks under stochastic molecular noises: fuzzy interpolation approach, IEEE Transactions on systems, man and cybernetics Part B, 2008, pp. 25-42.
- [26] Voit, E., Computational Analysis of biochemical systems: a practical guide for biochemists and molecular biologists, Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [27] H. Khalil, Nonlinear systems, segunda edición, Prentice Hall, USA, New Jersey,1996.
- [28] E. D. Sontag, Smooth stabilization implies coprime factorization, IEEE Transaction on Automatic Control , Vol. 34, pp. 435-443, 1989.