

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO DE PARTÍCULAS
EN VECINDADES DE AGUJEROS NEGROS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN
INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

PRESENTA:

FELIPE ANGEL ROBLEDO PADILLA

CIUDAD UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE 2014

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

División de Estudios de Postgrado
Doctorado en Ciencias en Ingeniería Física Industrial

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la presente tesis *Entrelazamiento Cuántico de Partículas en Vecindades de Agujeros Negros* realizada por el alumno Felipe Angel Robledo Padilla con número de matrícula 809745 sea aceptada como opción al grado de **Doctor en Ciencias en Ingeniería Física Industrial**

Comité de Tesis

Dr. José Rubén Morones Ibarra
Presidente/Asesor

Dr. Héctor Hugo García Compeán.
Secretario/Co-asesor

Dr. Edgar Martínez Guerra
1er. Vocal/Revisor

Dr. Manuel García Méndez
2do. Vocal/Revisor

Dr. Manuel A. Jiménez Lizárraga
3er. Vocal/Revisor

Dr. Romeo Selvas Aguilar
Sub-Director of División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza N.L. a Noviembre de 2014

Resumen

El propósito de esta tesis es obtener el ángulo de precesión de espín de un par de partículas EPR de espín- $\frac{1}{2}$, moviéndose en órbitas circulares en un espacio-tiempo con simetría axial. Para lograr este objetivo, se introducen observadores suspendidos para asegurar que sus marcos de referencia estén fijos y realizar así mediciones confiables. Con respecto a estos observadores suspendidos se incorpora explícitamente el arrastre del sistema de coordenadas en presencia de los agujeros negros. Se encuentra que el estado singlete de espín se mezcla con el estado triplete de espín por los efectos de la aceleración y gravedad sobre las partículas, lo cual deteriora la perfecta anticorrelación del par de espines entrelazados medidos por los observadores suspendidos. Finalmente, se propone un algoritmo para calcular la precesión de espín de las partículas en un espacio-tiempo general con simetría axial. Este algoritmo se utiliza para estudiar una lista completa de agujeros negros Tipo D de Plebański-Demiański con expansión y torsión, así como sus subcasos particulares con menor número de parámetros.

Esta tesis tiene dos principales contribuciones en el tema del entrelazamiento cuántico y la relatividad general. La primera es la incorporación del arrastre de coordenadas en la velocidad de las partículas visto desde los observadores suspendidos. Este análisis no se había incluido en la bibliografía revisada. La segunda contribución es la construcción del algoritmo capaz de calcular rápidamente la precesión de espín para cualquier métrica de espacio-tiempo que se desee. Esta generalización es valiosa porque no sólo permite hacer cálculos para los agujeros negros propuestos, sino también para otras curvaturas de espacio-tiempo no previstas.



Abstract

The aim of this thesis is to obtain the spin precession angle for an Einstein-Podolsky-Rosen pair of spin-1/2 particles in circular orbits in a general axially symmetric spacetime. In order to achieve this purpose, hovering observers are introduced for ensuring fixed reference frames to perform suitable reliable measurements. Frame-dragging of spinning holes is explicitly incorporated relative to hovering observers. The spin-singlet state is found to be mixed with the spin-triplet by acceleration and gravity effects, which deteriorate the perfect anti-correlation of an entangled pair of spins measured by hovering observers. Finally, an algorithm to calculate spin precession for a general axially symmetric spacetime is proposed. This algorithm is applied to study the complete list of expanding and twisting Type D Plebański-Demiański black holes and their descendent limiting solutions with lower parameters.

This thesis has two main contributions on the subject of quantum entanglement and general relativity. The first one is the incorporation of the frame-dragging in the velocity of the particles suspended viewed from observers. This analysis was not included in the literature review. The second contribution is the construction of the algorithm able to quickly calculate the spin precession for any metric of spacetime that is desired. This generalization is valuable because it not only allows you to make calculations for the proposed black holes, but also for another curvatures of space-time unforeseen.

Agradecimientos

A mis padres.

Al cuerpo médico y enfermeras de la Clínica 25 del IMSS y sobre todo al donador anónimo y altruista de junio de 2010.

A mi director de tesis el Dr. José Rubén Morones Ibarra, quien me abrió las puertas de Postgrado, y renovó mi amor por la Física Teórica, cuando pensaba que ya no tenía más oportunidades en la vida.

Y al Dr. Héctor Hugo García Compeán, quien con infinita paciencia me apoyó y asesoró en la realización de esta tesis, y me dió acceso a todo un Universo.

El cuerpo académico del Doctorado en Ingeniería Física Industrial y al personal del Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

La realización de este trabajo fue posible gracias al apoyo de beca del CONACyT registro 173853.

ཨོཾ་མ་ཎི་པདྨེ་ཧཱུ།

Esta tesis fue tipografiada por el autor en
 $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ con TeXShop 3.38 para MacOS 10.9.
La comprobación algebraica de las fórmulas y
ecuaciones, así como las gráficas fueron
desarrolladas con Maple 16 de Maplesoft[©]

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema general	5
1.2. Problema propuesto por resolver	5
2. Antecedentes	8
2.1. Entrelazamiento Cuántico	8
2.2. Agujeros Negros	20
3. Metodología	32
3.1. Espín en un espacio-tiempo curvo	32
3.1.1. Estados cuánticos en relatividad especial: Transformaciones de Lorentz	34
3.1.2. Sistemas de referencia inercial local	39
3.1.3. Estados cuánticos en fondos clásicos: Rotaciones de Wigner	41
3.1.4. Arrastre de coordenadas (“frame-dragging”)	46
3.1.5. Precesión de espín	49
3.2. Correlación EPR y desigualdades de Bell	54
3.2.1. Correlación EPR	54
3.2.2. Desigualdades de Bell	58
4. Resultados	61
4.1. Espacio-tiempo de Plebański-Demiański	61
4.1.1. Métrica y Tetrada	61
4.1.2. Precesión de espín	63
4.2. Resultados previos: espacio-tiempo de Schwarzschild	64
4.3. Ejemplos: Agujeros negros no-acelerados de Kerr-Newman-(Anti)de Sitter-NUT	66
4.3.1. Reissner-Nordström	68
4.3.2. Kerr	70
4.3.3. Kerr-Newman	75
4.3.4. NUT	76
4.3.5. Schwarzschild-(Anti)de Sitter	79
4.4. Ejemplos: Agujeros negros con aceleración y rotación	80
4.4.1. Métrica-C	81
4.5. Incertidumbre en la posición de los observadores	83

5. Conclusiones	84
A. Transformaciones de Lorentz	89
B. Rotación de Wigner	93
B.1. Definición de la Rotación de Wigner	93
B.2. Obtención de la Rotación de Wigner para dos observadores inerciales	94
Bibliografía	105
Publicaciones	106
Curriculum Vitae	143

Índice de figuras

1.1. Experimento mental EPR para agujeros negros	6
2.1. Correlación de espín en un estado singlete	12
2.2. Cascada atómica de calcio de Kocher y Commins	14
2.3. Colapso de una estrella hacia un agujero negro	22
3.1. Estados cuánticos en marcos de referencia inerciales	34
3.2. El 4-momento de una partícula en diferentes marcos de referencia	36
3.3. Marco de referencia del laboratorio para un espacio-tiempo curvo	42
3.4. Experimento mental EPR en un espacio-tiempo con simetría axial	50
4.1. El ángulo Δ/Φ para un agujero negro de Schwarzschild	65
4.2. La precesión del ángulo Δ/Φ para un agujero negro de Reissner-Nordström	68
4.3. Gráfica paramétrica de posición y velocidad de un agujero negro de Reissner-Nordström	70
4.4. El ángulo de precesión Δ/Φ para un agujero negro de Kerr	73
4.5. Velocidad de arrastre de coordenadas y trayectoria de anti-correlación perfecta para un agujero negro de Kerr	75
4.6. El ángulo de precesión Δ/Φ para un agujero negro de Kerr-Newman	77
4.7. El ángulo de precesión Δ/Φ para un agujero negro de NUT	78
4.8. El ángulo de precesión Δ/Φ para un espacio-tiempo de Schwarzschild-de Sitter	79
4.9. El ángulo de precesión Δ/Φ para un métrica C	82
A.1. Boost o empuje en dirección del eje x	90
B.1. Flujo de transformaciones de Lorentz que conducen a la rotación de Wigner.	95

Capítulo 1

Introducción

El entrelazamiento de estados cuánticos es un tema muy interesante que ha sido objeto de atención como un problema fundamental de la Física desde que Einstein-Podolsky-Rosen escribieron su famoso artículo hoy conocido como EPR [8]. Con el trabajo de Bohm-Aharanov [9] para partículas de espín entrelazado y las variables ocultas de Bell [10] fue posible descubrir que la mecánica cuántica es de hecho la descripción correcta de los fenómenos cuánticos, lo que posteriormente confirmaron los resultados experimentales [11–13]. En años recientes la investigación en se ha enfocado en comunicación cuántica y teleportación de estados [14–16], computación [17–20] y criptografía [21, 22], por citar algunos ejemplos.

Los estados cuánticos de la materia en fondos clásicos gravitacionales han sido de gran interés en los modelos físicos. Uno de los experimentos famosos de esta situación es la interferometría de neutrones en la Tierra. En tal experimento es posible capturar los efectos del campo gravitatorio en las fases cuánticas asociadas a las trayectorias posibles de un haz de neutrones, que siguen caminos con diferentes intensidades en el campo gravitacional. La diferencia en las fases contiene la información de la forma en que el campo gravitacional de la Tierra afecta los estados cuánticos de los neutrones [1]. Se han reportado posteriormente experimentos que utilizan interferometría atómica [2, 3]. Otro ejemplo de la descripción de estados cuánticos de materia en campos gravitacionales clásicos es la radiación de Hawking, que describe el proceso de evaporación de un agujero negro [4, 5]. Este proceso involucra partículas cuánticas relativistas y se plantea a través de teoría cuántica de campos en espacios-tiempo curvos (ver por ejemplo [6, 7]).

Por muchos años el comportamiento general de los estados cuánticos entrelazados ha sido estudiado en la literatura científica. En particular, el entrelazamiento de un par de partículas no-relativistas de espín- $\frac{1}{2}$ ha sido extendido al análisis con relatividad especial [23–28] a través del uso de la rotación de Wigner [29, 30]. Más recientemente el entrelazamiento se integró

al régimen de la relatividad general para un espacio-tiempo de Schwarzschild [31] y uno de Kerr-Newman [32].

En particular para un agujero negro de Schwarzschild, Terashima y Ueda [31] consideraron un par de partículas con espín- $\frac{1}{2}$ con estados entrelazados moviéndose en órbita circular en el plano ecuatorial. Sus resultados mostraron que los efectos de aceleración y de gravedad afectan la correlación EPR, en relación a la dirección que tendrían en una teoría no-relativista, y estos efectos producen una disminución en el grado de violación de las desigualdades de Bell. Esta disminución está dado por la dirección de los espines definidos por la siguiente desigualdad como:

$$\langle Q'S' \rangle + \langle R'S' \rangle + \langle R'T' \rangle - \langle Q'T' \rangle = 2\sqrt{2} \cos^2 \Delta.$$

De tal manera que toda la información del campo gravitacional esta codificado en el ángulo de precesión Δ , que depende en general de los parámetros del agujero negro de interés. El caso cuando $\Delta = 0$ están de acuerdo con los resultados predichos por la mecánica cuántica de anti-correlación perfecta. En cambio, para $\Delta \neq 0$, se dice que hay un deterioro de la anti-correlación perfecta del par entrelazado por el espín- $\frac{1}{2}$.

Para el caso más simple de agujeros negros, el de Schwarzschild y estudiado por Terashima y Ueda, este ángulo Δ depende sólo del parámetro de masa m , y el efecto más fuerte está localizado en el horizonte de eventos de Schwarzschild, debido a una precesión de espín muy rápida, con $|\Delta| \rightarrow \infty$, produciendo así la disminución mencionada en la desigualdad de Bell. En este caso no hay un arrastre de sistema de coordenadas (el cual se analizará en este trabajo), sin embargo, el ángulo Δ aún depende de la velocidad local de las partículas con respecto a los observadores suspendidos. En todo este proceso se observó que la selección del cuadri-vector de velocidad y del *vierbein* o tetrada, es importante para hacer posible la comunicación no-local en un espacio-tiempo curvo usando estas partículas con espín. Resultados similares, pero con diferencias sutiles e importantes, fueron encontrados para el caso de agujeros negros de Kerr-Newman [32] y por Kerr-Newman con arrastre de sistema de coordenadas [33].

En esta tesis, se siguió principalmente la aproximación de Terashima y Ueda, para el análisis, notaciones y convención de signos. La idea principal de esta aproximación es observar la estructura detrás de una rotación de Wigner en el estado cuántico de espín, el cuál está bien definido localmente en un marco no-relativista. Esta transformación por rotación de Wigner debe preservar las probabilidades cuánticas de encontrar el estado de espín en la dirección particular de medición en un marco de referencia local inercial. Para asegurarlo, la transformación que lleva el estado cuántico de un punto a otro debe ser unitaria.

Precisamente la matriz de rotación de Wigner [29] logra este objetivo. Esta rotación está compuesta por transformaciones de Lorentz infinitesimales, que consisten de impulsos a lo largo de la dirección radial y de rotación en la dirección angular de la partícula en órbita circular alrededor del ecuador.

El propósito de este trabajo es extender la descripción de la precesión de espín ya mencionada, ahora para un agujero negro de Plebański-Demiański [34], el cual es la solución Tipo D más general a las ecuaciones de Einstein-Maxwell para espacios-tiempo con simetría axial, con expansión y torsión, de acuerdo a la clasificación de Petrov-Penrose (ver por ejemplo [35]).

Para alcanzar este propósito, es más conveniente describir la métrica con coordenadas de Boyer-Lindquist. Esta descripción fue estudiada por Griffiths y Podolský en una serie de artículos [36–38] (y se pueden consultar también las referencias en [39, 40]), con el objetivo de aclarar el sentido físico de los parámetros involucrados en la solución de la ecuación de Einstein.

La solución de Plebański-Demiański ha sido estudiada previamente en la literatura científica en teorías de dimensiones superiores. Hace tiempo hubo algo de interés en esta métrica en el estudio de algunas generalizaciones de la correspondencia AdS/CFT [41–43]. Más recientemente ha sido de importancia para trabajar las soluciones de agujeros negros de Kerr-NUT-(anti-)de Sitter en el contexto de la teoría de cuerdas y branas en dimensiones superiores [44–51].

La familia de soluciones Tipo D de Plebański-Demiański de la ecuación de campo de Einstein describen una configuración del campo gravitacional caracterizado por 7 parámetros [34]. Estas configuraciones tiene una congruencia nula de curvas geodésicas caracterizadas en general por una expansión de parámetros de torsión y corte no nulas. En la presente tesis se consideran únicamente soluciones de expansión y torsión. Bajo ciertas condiciones de transformación de coordenadas no-degeneradas de la métrica original y la configuración de las restricciones, la métrica se transforma en una más adecuada forma de coordenadas de Boyer-Lindquist y depende de 7 parámetros con una interpretación física casi directa [36–40].

Existen otros modelos que involucran los efectos del campo gravitacional de la materia cuántica en campos de Plebański-Demiański, por ejemplo los discutidos en Ref. [52]. En ese artículo se calcula el corrimiento de fase en interferometría de partículas cargadas descrito por campos escalares complejos. Allí mismo se adopta además la nueva forma mencionada del espacio-tiempo de Plebański-Demiański y se demuestra que todos los parámetros físicos contribuyen en el corrimiento de fase. En ese mismo contexto, estas consideraciones de interferometría de partículas con espín- $\frac{1}{2}$ es trabajado en la Ref. [53].

En este trabajo el resultado final es una precesión de espín de una partícula que se mueve en movimiento circular en un espacio-tiempo curvo. Esta precesión se debe a la aceleración de la partícula por una fuerza externa y debido a la diferencia entre los marcos de referencia local inerciales en diferentes posiciones. Esto permite encontrar una precesión de ángulo Δ de espín para un espacio-tiempo general con simetría axial.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2, se revisan los antecedentes necesarios para resolver el problema general del entrelazamiento en campos gravitacionales clásicos. En particular se revisa en relatividad general las soluciones Tipo-D de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell de acuerdo a la clasificación de Petrov-Penrose del tensor de Weyl.

También en el Capítulo 2, se describe el entrelazamiento como un contra ejemplo propuesto por Einstein [8] sobre la validez de la mecánica cuántica y se revisa el entrelazamiento hasta el día de hoy con sus resultados experimentales. Posteriormente, se introduce el tema de correlación de espín y las desigualdades de Bell.

En el Capítulo 3, se revisa el efecto de la componente de simetría axial y se calcula las correlaciones del arrastre de sistema de referencia sobre la velocidad de las partículas. Se introduce a los Observadores con Nulo Momento Angular (ONMA). También se presenta un experimento mental que describe el par de partículas entrelazadas en órbita circular alrededor de un agujero negro general con simetría axial. Adicionalmente, en esta sección se propone un algoritmo para encontrar el ángulo de precesión de espín sin depender de una métrica de espacio-tiempo en particular. La correlación EPR es calculada por medio de la rotación de Wigner debido al movimiento de las partículas en un espacio-tiempo generalizado.

Finalmente, todos los resultados se integran en el Capítulo 4 con el fin de ilustrar el uso del algoritmo y así obtener el ángulo de precesión de espín para un agujero negro de Plebański-Demiański. Desde este caso general se obtiene el ángulo de precesión de espín del par EPR para la lista completa de subfamilias de soluciones de la ecuación de Einstein con expansión. De esta manera se encuentra que para el caso más general, este ángulo depende de los parámetros físicos de la solución. Las conclusiones y puntos finales se presentan en el Capítulo 5.

Al final se incluyen dos apéndices. El apéndice A está dedicado a clarificar la importancia de la transformación de Lorentz y como obtenerla en relatividad especial. En el apéndice B se presenta y desarrolla la rotación de Wigner para relatividad general.

1.1 Planteamiento del problema general

El objetivo del presente trabajo es estudiar el estado de espín de un par de partículas entrelazadas moviéndose en un campo gravitacional para así mostrar su decoherencia por los efectos de la relatividad general.

El espín en relatividad general sólo puede definirse localmente utilizando la simetría de rotaciones de los marcos de referencia inerciales locales. Como consecuencia de esta definición local, el movimiento de las partículas es acompañada por una sucesión continua de transformaciones de Lorentz locales [54].

Esta sucesión continua de transformaciones es debida a la curvatura del espacio-tiempo. Esto significa que aún si el estado de espín es puro en un punto del espacio-tiempo, este estado, en general, se mezclará en otro punto del espacio-tiempo, de singlete a triplete por ejemplo.

Como Terashima y Ueda demostraron en el espacio-tiempo de Schwarzschild [31], los efectos de la aceleración y gravitación destruyen la correlación EPR exactamente en la dirección que sería la misma en la teoría no-relativista, y aparentemente disminuye la violación de la desigualdad de Bell.

Esta tesis extiende este trabajo previo y aborda el problema de encontrar la precesión de espín de un par de partículas moviéndose en un espacio-tiempo curvo general. La precesión del espín es causado por la aceleración de las partículas debido a una fuerza externa y debido a la diferencia entre los marcos de referencia locales inerciales en diferentes puntos.

1.2 Problema propuesto por resolver

De la investigación de Terashima-Ueda [31] sabemos que la gravedad destruye el entrelazamiento cuántico. Y más importante aún, podemos cuantificar este efecto y hacer predicciones en base a la posición y la velocidad del par de partículas entrelazadas.

El objetivo de este trabajo es extender la investigación previa al agregar más parámetros, además de la masa. Se verá que los parámetros extras modifican la métrica del espacio-tiempo y consecuentemente alteran el entrelazamiento del par de partículas en órbitas circulares alrededor de agujeros negros. La investigación es en este sentido exploratoria, con una hipótesis de partida que habrá una disminución de entrelazamiento cuántico, conforme se incorporan más parámetros a la métrica.

Para este propósito se utiliza como modelo un agujero negro de Plebański-Demiański como espacio-tiempo de fondo, para calcular así el ángulo de precesión de las partículas entrelazadas moviéndose en órbitas circulares alrededor de este agujero negro. El espacio-tiempo

de Plebański-Demiański es la solución Tipo D con simetría axial, expansión y torsión más general de las ecuaciones de Einstein-Maxwell de acuerdo a la clasificación de Petrov-Penrose (ver por ejemplo [35]). Esto es importante porque el espacio-tiempo de Plebański-Demiański cubre un rango amplio de espacio-tiempos que pueden encontrarse en la naturaleza. Además, podría ser posible probar experimentalmente en algún nivel en el futuro algunas de las implicaciones de este modelo.

En este trabajo se consideran dos observadores y una fuente de partículas EPR en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ del espacio-tiempo de Plebański-Demiański. Los observadores son localizados en ángulos azimutales $\phi = \pm\Phi$ y la fuente EPR se coloca en $\phi = 0$. Tanto los observadores como la fuente EPR se asumen que están suspendidas sobre el agujero negro con el objetivo de mantenerlos en “repose” en el sistema de coordenadas. La fuente EPR emite un par de partículas entrelazadas en direcciones opuestas, describiendo una órbita circular en el ecuador a un radio constante. Suponemos que esta fuente EPR es acelerada artificialmente en el ecuador para que pueda mantener un radio constante, de tal manera que no esté influenciada por el arrastre de sistema de coordenadas. En la Fig. 1.1. se ilustra esta situación.

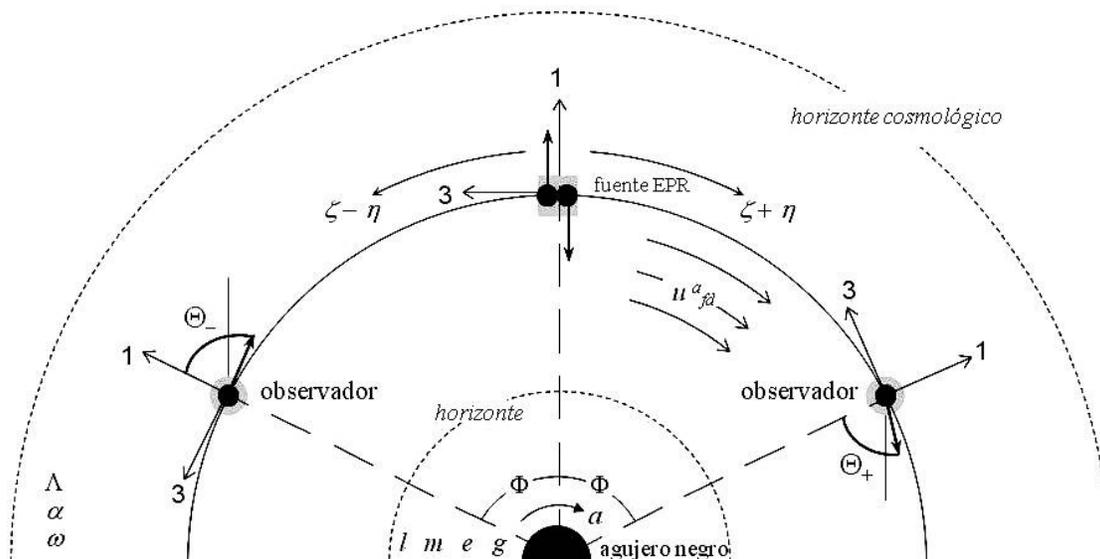


Figura 1.1: Experimento mental EPR para agujeros negros.

El par de partículas entrelazadas tienen un estado cuántico definido por un 4-momento y espín que medirán cada observador suspendido. El estado singlete de espín para cada partícula está dada por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|p_+^a, \uparrow; \phi\rangle|p_-^a, \downarrow; \phi\rangle - |p_+^a, \downarrow; \phi\rangle|p_-^a, \uparrow; \phi\rangle], \quad (1.1)$$

donde el signo en el momento lineal indica la dirección de cada una de las partículas y las flechas corresponden a la dirección de espín hacia arriba o hacia abajo. La posición azimutal está representada por la coordenada ϕ , donde por simplicidad se tomará como igual a cero.

De esta manera el objetivo de esta investigación es calcular el estado cuántico que los observadores miden sobre las partículas entrelazadas conforme éstas viajan desde un estado inicial definido por la ecuación (1.1). Las transformaciones de Lorentz determinarán la medición de los estados cuánticos y la suma acumulada de estas transformaciones deberán mostrar que la curvatura del espacio-tiempo modifica el estado inicial.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Entrelazamiento Cuántico

En mayo de 1935 Albert Einstein, Boris Podolsky and Nathan Rosen publicaron [8] un argumento que señalaba que la mecánica cuántica falla en proveer una descripción completa de la realidad física. Este artículo fue uno de los últimos intentos que Einstein hizo como contra argumento de la mecánica cuántica y el principio de incertidumbre.

A lo largo de su vida, Einstein fue fiel a tres principios que él creía deben ser parte de una buena descripción de la naturaleza [55]:

1. El nivel fundamental de la naturaleza debe ser descrito en principio por una teoría determinista, aún y cuando las lagunas en el conocimiento acerca de las condiciones iniciales y de frontera obligue a los seres humanos a recurrir a las probabilidades para hacer predicciones acerca de los resultados de las observaciones.
2. Tal teoría debe incluir todos los elementos de realidad.
3. Esta teoría debe ser local: lo que sucede aquí depende de los elementos de realidad localizados aquí, y sea lo que suceda más allá depende de los elementos de realidad allí localizados.

Desde la década de los veinte del siglo pasado, Bohr y Einstein sostuvieron un debate acerca de la interpretación de la realidad que la mecánica cuántica podía dar. En el congreso Solvay, Einstein traía una y otra vez a colación algunos experimentos mentales que parecían destruir el modelo cuántico y la interpretación de Copenhague, especialmente la descripción probabilística de la naturaleza. Pero después de un arduo trabajo, Bohr encontraba siempre un contra argumento en la secuencia lógica que Einstein no había considerado, sólo para que éste encontrara un nuevo experimento mental para la siguiente ocasión en que coincidieran.

En particular, durante el congreso Solvay de 1933, Einstein propuso un experimento mental con un ejemplo de una característica poco familiar de la mecánica cuántica:

Supongamos dos partículas que se ponen en movimiento la una hacia la otra con el mismo momento de gran magnitud y que interactúan entre sí durante un tiempo muy corto cuando pasan por posiciones conocidas. Consideremos ahora a un observador que captura una de esas partículas, muy lejos de la región de interacción, y mide su momento; entonces, por las condiciones del experimento, podrá evidentemente deducir el momento de la otra partícula. Sin embargo, si elige medir la posición de la primera partícula, será capaz de decir dónde está la otra partícula. Ésta es una deducción perfectamente correcta y simple a partir de los principios de la mecánica cuántica, ¿pero no resulta muy paradójica? ¿Cómo puede el estado final de la segunda partícula verse influido por una medida llevada a cabo en la primera después de que haya cesado toda interacción física entre ellas? [55]

Por vez primera, el concepto de *entrelazamiento* cuántico es usado para estados cuánticos complicados, porque se usa tanto la posición como el momento de dos partículas que han interactuado en el pasado y por lo tanto están correlacionadas. El argumento es básicamente una descripción del entrelazamiento cuántico para posición y momento.

Esta argumentación tomó finalmente forma en un artículo de 1935 en la revista *Physical Review* [8], donde esencialmente toma, como punto central, el supuesto de *localidad*. Lo que sucede en un lugar no afecta inmediatamente lo que sucede en otro lugar. Los autores dicen allí:

Si, sin perturbar en modo alguno un sistema, podemos predecir con certeza (es decir, con probabilidad uno) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a dicha cantidad.

Esta condición es satisfecha cuando una medición de la posición es hecha sobre la partícula 1 y también cuando una medición del momento es hecha sobre la misma partícula. En cada caso, podemos predecir con certeza la posición (o momento) de la otra partícula. Esto permite inferir la existencia de un elemento de realidad física. Ahora bien, dado que la partícula 2 no es afectada por lo que se le hace a la partícula 1, y el elemento de realidad, la posición, de esta partícula es inferida en un caso, y el momento en el otro caso, tanto posición como momento son elementos de realidad física de la partícula 2. De allí la “paradoja” de EPR. Se tienen dos partículas relacionadas entre sí. Se mide una de ellas y se sabe entonces acerca de la otra. Entonces, la teoría que permite hacer eso es incompleta [55].

Bohr envió una respuesta varios meses después a *Physical Review* con el mismo título del artículo original de EPR¹ donde él argumenta que el experimento propuesto por Einstein tiene dos cantidades (posición y momento) que no pueden ser medidos simultáneamente. Argumenta que el experimento EPR contiene una ambigüedad esencial cuando es aplicado a los fenómenos cuánticos. Señala que, aún y cuando el experimento mental de EPR excluye cualquier interacción física directa del sistema con el aparato de medición, el proceso de medición tiene una influencia esencial sobre las condiciones en las que la propia definición de observables físicos en cuestión descansa. Y estas condiciones deben ser consideradas como un elemento inherente de cualquier fenómeno para el cual el término “realidad física” pueda ser aplicado sin ambigüedad. Bohr reconoce que es posible que, para determinados arreglos experimentales, la medición de la posición o del momento de una partícula automáticamente determina la posición o el momento de la otra. Pero lograr un arreglo experimental para medir momento y posición a un mismo tiempo es incompatible [57]. Aunque la posición y el momento de la primer partícula obedece el principio de incertidumbre, el momento de la partícula 1 conmuta con la posición de la partícula 2 y es posible asignar valores simultáneamente a ambas partículas. Entonces estamos forzados a considerar una medición como un todo. De tal manera, el supuesto de EPR para elementos físicos de realidad está equivocado. Bohr finalmente concluye que la paradoja EPR no representa un desafío práctico a la aplicación de la teoría cuántica a problemas físicos reales.

Esta discusión fue eventualmente olvidada durante dos décadas hasta que Bohm y Aharonov [9] revisaron el problema EPR y simplificaron el experimento ideal de dos cantidades cuánticas (momento y posición) a una variable de interés (espín). Su versión del experimento mental de EPR llegaría a ser la más usada por experimentalistas y teóricos al estudiar el entrelazamiento en las siguientes décadas. Ellos consideraron una molécula consistente de dos átomos con espín total cero, y cada átomo con espín un medio. Los átomos son entonces separados por algún método que no tiene influencia en el espín total [55]. Después de ser separados lo suficiente para que no interactúen, se mide cualquier componente deseada del espín de la primera partícula. Entonces, dado que el espín total es aún cero, puede concluirse inmediatamente que el mismo componente de espín de la otra partícula tiene signo opuesto respecto a la primer partícula. En otras palabras, los dos vectores de espín están correlacionados como propusieron EPR.

Se puede describir esta situación tomando como ejemplo un sistema de dos electrones en un estado de espín singlete, esto es, con un espín total cero [58]. El estado ket puede ser

¹¿Puede Considerarse Completa la Descripción Mecánico-Cuántica de la Realidad Física? *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?* [56].

descrito como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle - |\hat{z}-; \hat{z}+\rangle), \quad (2.1)$$

donde la cuantización del espín en la dirección- z esta indicada por \hat{z} . Aquí, $|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle$ significa que el electrón 1 tiene el estado de espín hacia arriba y el electrón 2 tiene el espín hacia abajo. Lo mismo es válido para $|\hat{z}-; \hat{z}+\rangle$.

Si hacemos una medición sobre la componente de espín de uno de los electrones, hay una oportunidad del 50-50 de obtener o arriba o abajo, porque el sistema compuesto puede estar en $|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle$ o $|\hat{z}-; \hat{z}+\rangle$ con las mismas probabilidades. Pero si uno de los componentes resulta estar en el estado de espín hacia arriba, el otro necesariamente estará con el espín hacia abajo, y viceversa. Cuando la componente de espín del electrón 1 se encuentra hacia arriba, el aparato de medición ha seleccionado el primer término, $|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle$ de la ecuación (2.1); y las mediciones subsecuentes de la componente de espín del electrón 2 deben comprobar que el ket del sistema compuesto esta dado por $|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle$.

Esta situación se ilustra en la Figura 2.1. El observador A se especializa en medir S_z de la partícula 1 (moviéndose hacia la izquierda), mientras que el observador B se especializa en medir S_z de la partícula 2 (moviéndose hacia la derecha). En esta situación el observador A encuentra que S_z es positivo (espín hacia arriba) para la partícula 1. Entonces ella puede predecir, antes que B realice cualquier predicción, el resultado de la la medición de B con certeza: B debe encontrar que S_z es negativo (espín hacia abajo) para la partícula 2. Por otro lado, si A no realiza medición alguna, B tiene la probabilidad del 50-50 de encontrar S_{z+} o S_{z-} .

Tal y como Sakurai señala [58]: “Esto por si sólo no es tan peculiar. Uno podría decir, esto es como una urna que contiene una bola negra y una bola blanca. Cuando escogemos una de ellas sin ver, hay una probabilidad del 50-50 de sacar negra o blanca. Pero si la primer bola que escogemos es negra, entonces podemos predecir con total certeza que la segunda bola será blanca.”

Pero la situación mecánico-cuántica es más complicada que eso. Esto es porque los observadores podrían escoger medir en cualquier instante S_x en lugar de S_z , tan sólo al rotar el eje longitudinal del arreglo de la Figura 2.1. Esto es, el sistema de espín- $\frac{1}{2}$ S_x esta relacionado con S_z de la siguiente manera:

$$|\hat{x}\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{z}+\rangle \pm |\hat{z}-\rangle), \quad |\hat{z}\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}+\rangle \pm |\hat{x}-\rangle). \quad (2.2)$$

De tal manera el ket del espín singlete de la ecuación (2.1) puede ser reformado al escoger

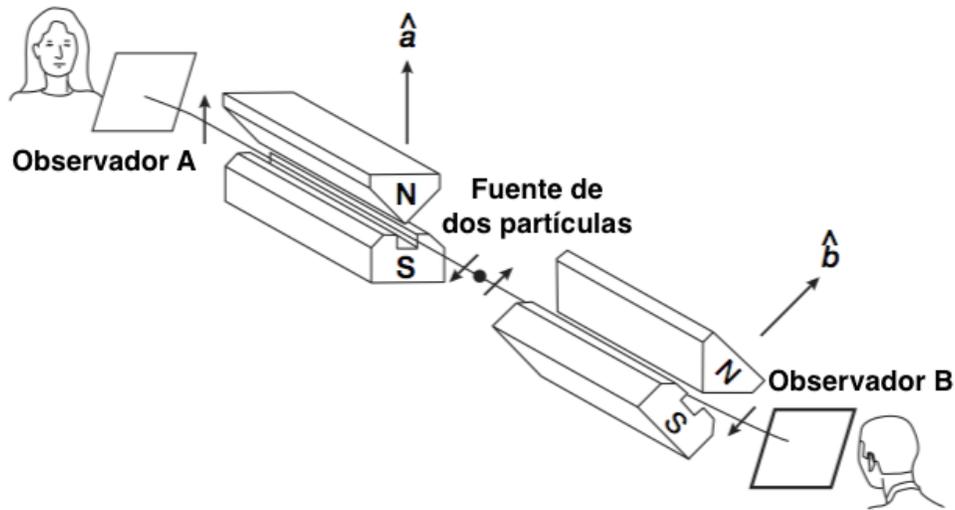


Figura 2.1: Correlación de espín en un estado singlete (crédito de imagen: [55]).
 Notar el arreglo de Stern-Gerlach que enfatiza la medición de espín de las partículas.
 Cada arreglo se orienta a una dirección arbitraria \hat{a} o \hat{b} .

la dirección- x como el eje de cuantización²:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}-; \hat{x}+\rangle - |\hat{x}+; \hat{x}-\rangle). \quad (2.3)$$

Supongamos ahora que el observador A puede escoger medir S_z or S_x para la partícula 1 al cambiar la orientación de su analizador de espín (vector de dirección \hat{a}), mientras que el observador B siempre se especializa en medir S_x de la partícula 2 (vector de dirección \hat{b}). Como sabemos a través del entrelazamiento de partículas, el resultado de B depende de la medición de A, esto es:

- I. Si A mide S_z y B mide S_x , hay una correlación completamente al azar entre las dos mediciones.
- II. Si A mide S_x y B mide S_x , hay una correlación del 100% (signos opuestos) entre las dos mediciones.
- III. Si A no realiza medición, las mediciones de B serán resultados al azar.

Es importante notar que la distancia de separación entre los observadores no está incluida en los estados cuánticos. A y B pueden estar a kilómetros entre sí, sin ninguna posibilidad de comunicación o interacción mutua. El observador A puede decir cómo orientar su analizador

²Esto es porque el estado de espín singlete no tiene una dirección preferencial en el espacio.

de espín mucho después que las dos partículas se han separado. Pareciera como si la partícula 2 conoce que componente de la partícula 1 ha sido medida.

La interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica de esta situación es que la medición es un proceso de selección. Cuando S_z de la partícula 1 es medida como positiva, entonces la componente $|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle$ es seleccionada. Una medición subsecuente S_z de la otra partícula solamente comprobará que el sistema aún está en $|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle$. Debemos aceptar que la medición en lo que parece ser parte del sistema está relacionado como una medición sobre todo el sistema [58].

Toda la discusión previa podría ser sólo un problema teórico sin mayores implicaciones en la Física si no hay forma de producir partículas entrelazadas como un problema experimental. Pero hay diferentes maneras de producir partículas entrelazadas con espín- $\frac{1}{2}$. Ciertamente es el caso para un sistema con $J = 0$ que se desintegra espontáneamente en dos partículas de espín- $\frac{1}{2}$ que no tienen momento angular orbital relativo, dado que la conservación del momento angular debe mantenerse en el proceso de desintegración. Un ejemplo de esto podría ser el decaimiento raro del mesón η (masa de $549 \text{ MeV}/c^2$) en un par de muones $\eta \rightarrow \mu^+ + \mu^-$. Otro ejemplo es una dispersión protón-protón a bajas energías cinéticas. El principio de exclusión de Pauli fuerza al protón de interacción a estar en 1S_0 (momento orbital angular 0, estado de espín singlete) [58].

También, Kocher y Commins en 1967 [59] usaron el método de cascada atómica para producir fotones correlacionados. En este experimento un átomo es excitado y emite dos fotones cuando decae a dos niveles inferiores; donde los fotones están entrelazados. La fuente de los fotones fue un haz de átomos de calcio emergiendo de un horno caliente. Los átomos en el haz fueron bombardeados por radiación ultravioleta intensa. Como respuesta a esta radiación, los electrones en los átomos de calcio fueron excitados a niveles superiores de energía, y cuando descendieron de nuevo, liberaron pares de fotones correlacionados. A este proceso se le llama cascada atómica porque un electrón decae de un nivel superior, a través de un nivel intermedio, hasta un nivel final inferior, liberando un fotón en cada uno de los dos pasos hacia abajo. Dado que los niveles iniciales y finales son ambos estados de momento angular cero, y el momento angular es una cantidad que se conserva, el par de fotones emitidos tienen momento angular cero, y éste es un estado de alta simetría y fuerte correlación de polarización entre los fotones. La idea de tal cascada atómica es ilustrada en la Figura 2.2.

En 1994 Cirac y Zoller [60] demostraron una alternativa para preparar un estado singlete, permitiendo a dos átomos, 1 y 2, inicialmente en sus estados excitados $|+\rangle$ y basales $|-\rangle$ respectivamente, interactuar con una cavidad de modo resonante en el estado de vacío. Por

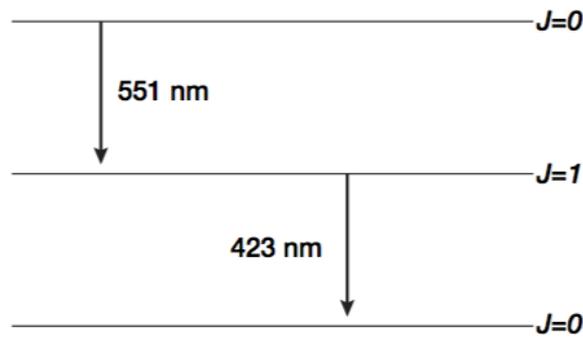


Figura 2.2: Cascada atómica de calcio de Kocher y Commins.

medio del modelo de Jaynes-Cummings, donde los estados excitados y basales se conservan, las partículas experimentan oscilaciones de vacío de Rabi, que dependen en el tiempo de interacción de cada partícula en el campo de la cavidad, la velocidad atómica de las partículas y la longitud de la cavidad.

Una última pregunta surge ahora. ¿Por qué esta situación es considerada paradójica? Filosóficamente hablando, la separación Einsteiniana es parte integral de la filosofía del realismo físico, que Einstein defendió toda su vida. Esta es la filosofía que considera los objetos físicos como entidades reales independientes unos de otros y de las mediciones u observaciones hechos sobre ellos. Pero en mecánica cuántica la idea de la realidad de objetos físicos independiente de nuestras mediciones sobre ellos es difícil de sostener. Por lo que la motivación de EPR era desacreditar la mecánica cuántica y restablecer el realismo físico como pilar filosófico de la Física. El resultado de EPR es una paradoja desde el punto de vista del realismo físico; parecería decir que debemos escoger entre localidad o separabilidad y la completez de la mecánica cuántica, y no hay opción alguna si la separación es imperativa. La solución a la paradoja EPR es darse cuenta de una inseparabilidad esencial de los objetos cuánticos; la medición de una de dos partículas correlacionadas afecta a su par entrelazado (esta es esencialmente la respuesta de Bohr [56] a EPR). Cuando el observador A colapsa el estado de espín de la partícula 1 al medir éste, la otra función de onda de la partícula 2 es también colapsada. El colapso es no-local, tal y como la correlación es no-local. Los objetos entrelazados EPR tienen una conexión ontológica no-local (inseparabilidad) con una influencia instantánea sin señal uno sobre otro, por difícil que sea creerlo desde el punto de vista del realismo físico y principio de localidad. La separabilidad es el resultado del colapso; sólo después del colapso del estado por el proceso de medición, los objetos serán independientes [61].

Esta paradoja EPR no es una paradoja del todo, como todo mundo la llama. Einstein

señaló que la mecánica cuántica, localismo y realismo son contradictorios, y ambas posturas no pueden ser ciertas al mismo tiempo. La mecánica cuántica no estaba incompleta, en lugar de eso si la mecánica cuántica era verdadera, el localismo no lo era. Si queremos mantener el localismo debe haber algo incorrecto en la teoría cuántica. Debemos considerar la posibilidad de una interpretación realista independiente de la mecánica cuántica. Una interpretación así está basada en la idea de *variables ocultas*, esto es, parámetros ocultos y desconocidos que deberían proveer con una descripción ontológicamente realista de los objetos cuánticos, sus trayectorias y todo lo demás. En 1964 John Bell tomó el argumento EPR con el fin de completar la mecánica cuántica [10], introduciendo parámetros suplementarios, las variables ocultas, dando a las dos partículas en su estado de preparación inicial en un estado entrelazado, y llevándolas consigo por cada una de las partículas después de la separación. Una hipótesis crucial en el razonamiento de Bell es la *hipótesis de localidad* que necesita ser satisfecha por modelos de parámetros suplementarios para conducir a un conflicto con la mecánica cuántica. Este supuesto natural afirma que no hay una interacción no directa y no-local entre los dos aparatos de medición alejados uno de otro. En otras palabras, el conflicto surge sólo si el resultado de una medición sobre la primer partícula no depende de hecho en el arreglo del segundo aparato de medición. Como Bell enfatiza en su artículo, esta hipótesis tan natural se convertiría en una consecuencia directa del punto de vista de Einstein que ninguna influencia puede viajar más rápido que la luz, en un esquema experimental el arreglo de los aparatos de medición son rápidamente cambiados mientras las partículas se encuentran aún viajando entre la fuente y los aparatos de medición.

Para establecer la incompatibilidad entre la mecánica cuántica y las teorías de variables ocultas locales, Bell demostró que las correlaciones predichas por cualquier modelo de variables ocultas locales están limitadas por desigualdades que son violadas por ciertas predicciones cuánticas. De esta manera sería posible establecer la pregunta experimentalmente, buscando cuidadosamente las correlaciones entre las partículas entrelazadas [62]. A estas desigualdades se les llama ahora *desigualdades de Bell*.

Retomando de nuevo las partículas de espín- $\frac{1}{2}$, se puede derivar las desigualdades de Bell de la siguiente manera. Como se vió previamente, es imposible determinar S_x y S_z simultáneamente. Sin embargo, si se tiene un gran número de partículas con espín- $\frac{1}{2}$, se podría asignar arbitrariamente una cierta fracción de ellas con las siguientes propiedades

- Si S_z es medido, se obtiene un signo de más con certeza.
- Si S_x es medido, se obtiene un signo de menos con certeza.

Una partícula que satisface esta propiedad se dice que pertenece al tipo $(\hat{z}+, \hat{x}-)$. Es importante notar aquí que no se afirma que puede medirse simultáneamente S_z y S_x para

ser $+$ y $-$ respectivamente. Cuando se mide S_z no se mide S_x y viceversa. Se asignan valores definidos de componente de espín en más de una dirección bajo el entendimiento que sólo una o la otra de las componentes puede ser de hecho medida. Para un par particular, debe de haber una perfecta correspondencia entre la partícula 1 y la partícula 2 para asegurar un momento angular total cero: si la partícula 1 es del tipo $(\hat{z}+, \hat{x}-)$, la partícula 2 debe pertenecer al tipo $(\hat{z}-, \hat{x}+)$, y así sucesivamente. Los resultados de las mediciones de correlación pueden ser reproducidas si la partícula 1 y la partícula 2 se corresponden como sigue:

$$\begin{array}{ll}
 \text{partícula 1} & \text{partícula 2} \\
 (\hat{z}+, \hat{x}-) & \leftrightarrow (\hat{z}-, \hat{x}+) \\
 (\hat{z}+, \hat{x}+) & \leftrightarrow (\hat{z}-, \hat{x}-) \\
 (\hat{z}-, \hat{x}+) & \leftrightarrow (\hat{z}+, \hat{x}-) \\
 (\hat{z}-, \hat{x}-) & \leftrightarrow (\hat{z}+, \hat{x}+)
 \end{array} \tag{2.4}$$

con igual población, hay un 25% de cada una. Hay un supuesto muy importante usado aquí. Supongamos que un par en particular pertenece al primer par de (2.4) y el observador A (ver Fig. 2.1) decide medir S_z de la partícula 1; entonces ella necesariamente obtiene un signo $+$ sin importar cual opción decide medir B, S_z o S_x . Es en este sentido que la localidad y realismo de Einstein son incorporados a este modelo, porque se asume desde el principio que hay una realidad detrás de cualquier resultado de la medición, una realidad que predetermina el resultado de ambas partículas simultáneamente, como en el ejemplo de las bolas negras y blancas.

El siguiente paso es considerar una situación más complicada. Esta vez los observadores A y B pueden escoger medir el espín en tres posibles direcciones, indicadas por vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ and $\hat{\mathbf{c}}$, que no son, en general, ortogonales entre sí. De esta manera algunas partículas arbitrarias pueden estar en el estado $(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}+)$, lo cual significa que si $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}$ es medido, se obtendrá un signo $-$ con certeza; si $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ es medido, se obtendrá un signo $+$ con certeza; y si $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{c}}$ es medido, se obtendrá un signo $+$ con certeza. De nuevo debe haber una perfecta correspondencia en el sentido que la otra partícula necesariamente pertenece al tipo $(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}-)$ para asegurar un momento angular total cero, en el mismo sentido que (2.4).

Sea $P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-)$ la probabilidad que, en una selección al azar, el observador A mida $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}$ como $+$ y $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ como $-$. De tal manera, de acuerdo con la hipótesis del realismo debe haber una realidad que es simultánea detrás de cada medición. Este tipo particular de partículas pueden ser representadas en dos subtipos de probabilidades relacionadas con el vector unitario $\hat{\mathbf{c}}$, esto es, del tipo $(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+)$ y $(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}-)$. Esta misma conclusión puede ser obtenida para el resto de las permutaciones de vectores unitarios. Se puede generalizar

los resultados en las siguientes ecuaciones:

$$P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-) = P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+) + P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}-), \quad (2.5)$$

$$P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}-) = P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}-, \hat{\mathbf{b}}+) + P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}-, \hat{\mathbf{b}}-), \quad (2.6)$$

$$P_1(\hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+) = P_1(\hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+, \hat{\mathbf{a}}+) + P_1(\hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+, \hat{\mathbf{a}}-). \quad (2.7)$$

Aquí el subíndice 1 se utiliza para enfatizar que el observador A mide el espín de la partícula 1 en diferentes direcciones, cuyo espín está determinado por “variables ocultas”, sin importar la medición del observador B. En este momento no es importante que tipo de teoría podría determinar el valor de estas variables ocultas. Bell tan sólo usó las predicciones que una teoría así podría proporcionar.

Entonces, dado que el todo es siempre mayor que sus partes, de las ecuaciones (2.6) y (2.7) se puede obtener

$$P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}-) \geq P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}-, \hat{\mathbf{b}}-), \quad (2.8)$$

$$P_1(\hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+) \geq P_1(\hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+, \hat{\mathbf{a}}+), \quad (2.9)$$

y sumando ambas desigualdades se tiene que,

$$P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}-) + P_1(\hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+) \geq P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}-, \hat{\mathbf{b}}-) + P_1(\hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+, \hat{\mathbf{a}}+). \quad (2.10)$$

Regresando a la ecuación (2.5) se sigue que

$$P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-) \leq P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}-) + P_1(\hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+). \quad (2.11)$$

Así, se puede conocer la probabilidad de $P[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+]$ dado $P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-)$ ³. Esto es, la partícula 1 con dirección de espín hacia arriba $\hat{\mathbf{a}}$ y la partícula 2 con dirección de espín hacia arriba $\hat{\mathbf{b}}$ también, pero la partícula 1 está predeterminada por el estado de la ecuación (2.11).

Para saber cómo obtener este resultado, primero es necesario percatarse que la probabilidad total es precedida por la elección al azar de las dos direcciones de medición, una para cada partícula, entre las tres posibles direcciones $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ y $\hat{\mathbf{c}}$. Esta doble elección puede hacerse de nueve diferentes formas, cada una con la misma probabilidad por construcción. Por lo tanto, la probabilidad de obtener la dirección- a para la partícula 1 y la dirección- b para la partícula 2 es $\frac{1}{9}$. No obstante, una vez seleccionada una medición sobre la partícula 1 en la

³Aquí los paréntesis cuadrados se utilizan para enfatizar el hecho que estamos hablando de todo el sistema de 2 partículas, en lugar de el estado para la partícula 1 o 2, donde se usan los paréntesis normales. El primer elemento entre los paréntesis cuadrados representa a la partícula 1 y el segundo a la partícula 2.

dirección- a , el signo del espín para esta partícula será $+$, debido a que la partícula parte con una “realidad” definida como $(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-)$ bajo el supuesto de partida. De la misma manera, una vez seleccionada la dirección- b para la partícula 2, el signo que se medirá para su espín tiene que ser $+$, debido a la perfecta anticorrelación entre las partículas 1 y 2.

Entonces, una vez que las direcciones de medición han sido seleccionadas al azar, a para la partícula 1 y b para la partícula 2, todo el estado del sistema está definido como $[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+]$. Por otro lado, este estado $[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+]$ sólo puede proceder por una realidad definida por el estado individual $(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-)$ de la partícula 1. En consecuencia, la probabilidad de obtener $[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+]$ desde $(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-)$ será $\frac{1}{9}$. En otras palabras,

$$\begin{aligned} P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-) &= 9P[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+], \\ P_1(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}-) &= 9P[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}+], \\ P_1(\hat{\mathbf{c}}+, \hat{\mathbf{b}}-) &= 9P[\hat{\mathbf{c}}+, \hat{\mathbf{b}}+]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Finalmente, agrupando las ecuaciones (2.12) y (2.11) obtenemos

$$P[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+] \leq P[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}+] + P[\hat{\mathbf{c}}+, \hat{\mathbf{b}}+], \quad (2.13)$$

la que se conoce como la desigualdad de Bell en la forma de Wigner-D’Espagnat [63]. Esta ecuación es viable para probar experimentalmente a la mecánica cuántica en contra de Realismo y Localismo, tal y como demandaban EPR (punto 2 y 3 al inicio de este capítulo), porque cada partícula tiene un espín predefinido en cualquier dirección (elemento de Realidad) y una medición sobre la partícula 1 no afecta la medición de la partícula 2 (Localidad).

Ahora, regresando a la mecánica cuántica, se desea evaluar $P[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+]$. Siguiendo el razonamiento de Sakurai [58], suponga que el observador A encuentra que $\mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}$ es positivo. Por la perfecta anticorrelación, la medida de B sobre $\mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}$ tendrá un signo de menos. Pero para calcular $P[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+]$ se debe considerar un nuevo eje de cuantización $\hat{\mathbf{b}}$ que forme un ángulo θ_{ab} con $\hat{\mathbf{a}}$. La probabilidad que la medición de $\mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{b}}$ sea positiva cuando sobre la partícula 2 se conoce que tiene un eigenket de $\mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}$ con un valor propio negativo, está dado por

$$\cos^2 \left[\frac{(\pi - \theta_{ab})}{2} \right] = \sin^2 \left(\frac{\theta_{ab}}{2} \right). \quad (2.14)$$

Como resultado se obtiene

$$P[\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+] = \left(\frac{1}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta_{ab}}{2} \right), \quad (2.15)$$

donde el factor $\frac{1}{2}$ proviene de la probabilidad de inicialmente obtener $\mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}$ con valor positivo.

Similarmente los otros términos de la ecuación (2.13) pueden obtenerse para escribir las desigualdades de Bell como

$$\sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right) \leq \sin^2\left(\frac{\theta_{ac}}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta_{cb}}{2}\right). \quad (2.16)$$

Para simplificar supongamos que $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ y $\hat{\mathbf{c}}$ descansan en un plano, y $\hat{\mathbf{c}}$ bisecta las dos direcciones definidas por $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{b}}$, esto es,

$$\theta_{ab} = 2\theta, \quad \theta_{ac} = \theta_{cb} = \theta, \quad (2.17)$$

Es fácil comprobar que la desigualdad (2.16) se viola para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. De tal manera que las predicciones de la mecánica cuántica no son compatibles con la desigualdad de Bell. Hay una diferencia real observable entre la mecánica cuántica y las teorías alternativas que satisfacen el principio de localidad de EPR.

En una serie de experimentos durante la década de 1980, Alain Aspect y sus colaboradores [12, 64, 65] realizaron experimentos para responder a la propuesta de EPR bajo condiciones donde se pudieran aplicar el análisis de Bell. Ellos demostraron que las predicciones de la teoría cuántica de hecho son cumplidas. En estos experimentos las dos partículas con espín- $\frac{1}{2}$ son reemplazadas por un par de fotones, donde la polarización juega en papel que tiene el espín en el entrelazamiento. Este par de fotones son emitidos por átomos de calcio en una cascada radiactiva después de ser adecuadamente bombeada por láseres. Dado que el estado atómico inicial y final es $J = 0$, la teoría cuántica predice que los fotones deben tener la misma polarización si se miden a lo largo de la misma dirección. Pero si la polarización es medida a ángulos de 120° , entonces la teoría predice que deben ser iguales tan sólo un $1/4$ de tiempo.

Hay algunas características notables en estos experimentos. Los dos analizadores de polarización fueron puestos 13 metros de distancia uno de otro, sin producir algún cambio considerable en los resultados. En [64] los autores usaron un mecanismo para conmutar rápidamente las direcciones de medición de polarización para cada uno de los fotones. Esto es, cada fotón viajó a su detector a través de un volumen de agua que mantenía una onda ultrasónica estacionaria. Dependiendo de la amplitud instantánea de la onda, los fotones pasaban directamente al polarizador con una orientación o bien eran reflejados por la ley de Bragg en otra dirección diferente de orientación. La onda estacionaria que determinaba la selección de orientación de cada detector era independientemente seleccionada y tenía frecuencia de onda tan altas, que varios ciclos ocurrían durante el tiempo viaje del haz de luz de un detector a

otro.

Todo esto corresponde a un refinamiento al experimento mental en donde, para estar absolutamente seguros, los conmutadores no son ajustados al azar hasta que los paquetes han partido de la fuente de fotones común [66]. Esta característica adicional asegura que no hay una influencia a distancia que pueda ser transmitida sobre la partícula 2 cuando la dirección de medición de la partícula 1 es fijada cuando esta partícula se aleja.

En el campo teórico los fenómenos de entrelazamiento cuántico continúan siendo un tema de investigación activo y eventualmente la investigación de este tema ha incluido un modelo coherente con la teoría de la relatividad. Los primeros pasos tomados en este sentido fue la inclusión de la relatividad especial para partículas con movimiento relativista [23–28]. Más tarde, estos trabajos fueron la base para que los autores Terashima y Ueda [31] extendieran el análisis en el marco de la relatividad general, donde ellos propusieron un experimento mental en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Este es el caso más simple que describe a un agujero negro al incluir sólo su parámetro de masa.

Esta tesis sigue los esfuerzos de Terashima y Ueda para describir el entrelazamiento en el marco de referencia de cualquier agujero negro de solución Tipo-D (con expansión y torsión) de las ecuaciones de Einstein-Maxwell.

Antes de continuar con el entrelazamiento cuántico, es importante revisar algunas características de relatividad general y agujeros negros.

2.2 Agujeros Negros

El término *agujero negro* tiene un origen reciente. Fue acuñado en 1969 por el científico norteamericano John Wheeler como la descripción gráfica de una idea que se remonta hacia atrás un mínimo de doscientos años, a una época en que había dos teorías sobre la luz: una, preferida por Newton, que suponía que la luz esta compuesta por partículas, y la otra que asumía que estaba formada por ondas. Hoy en día, sabemos que ambas teorías son correctas. Debido a la dualidad onda/corpúsculo de la mecánica cuántica, la luz puede ser considerada como una onda y como una partícula. En la teoría de que la luz estaba formada por ondas, no quedaba claro cómo respondería ésta ante la gravedad. Pero si la luz esta compuesta por partículas, se podría esperar que éstas fueran afectadas por la gravedad del mismo modo que lo son las balas, los cohetes y los planetas. Al principio, se pensaba que las partículas de la luz viajaban con infinita rapidez, de forma que la gravedad no hubiera sido capaz de frenarlas, pero el descubrimiento de Roemer de que la luz viajaba a una velocidad finita,

significó el que la gravedad pudiera tener un efecto importante sobre la luz.

Bajo esta suposición, un catedrático de Cambridge, John Michell, escribió en 1783 un artículo en el *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* en el que señalaba que una estrella que fuera suficientemente masiva y compacta tendría un campo gravitatorio tan intenso que la luz no podría escapar: la luz emitida desde la superficie de la estrella sería arrastrada de vuelta hacia el centro por la atracción gravitatoria de la estrella, antes de que pudiera llegar muy lejos. Michell sugirió que podría haber un gran número de estrellas de este tipo. A pesar de que no seríamos capaces de verlas porque su luz no nos alcanzaría, sí notaríamos su atracción gravitatoria. Estos objetos son los que hoy en día llamamos agujeros negros, ya que esto es precisamente lo que son: huecos negros en el espacio. Una sugerencia similar fue realizada unos pocos años después por el científico francés marqués de Laplace, parece ser que independientemente de Michell. Resulta bastante interesante que Laplace sólo incluyera esta idea en la primera y la segunda ediciones de su libro *El sistema de mundo*, y no lo incluyera en las ediciones posteriores. Quizás decidió que se trataba de una idea disparatada. Hay que tener en cuenta también que la teoría corpuscular de la luz cayó en desuso durante el siglo XIX: parecía que todo se podía explicar con la teoría ondulatoria, y, de acuerdo con ella, no estaba claro si la luz sería afectada por la gravedad.

Para entender cómo se podría formar un agujero negro, tenemos que tener ciertos conocimientos acerca del ciclo vital de una estrella. Una estrella se forma cuando una gran cantidad de gas (principalmente hidrógeno) comienza a colapsar sobre sí mismo debido a su atracción gravitatoria. Conforme se contrae, sus átomos empiezan a colisionar entre sí, cada vez con mayor frecuencia y a mayores velocidades, en consecuencia el gas se calienta. Con el tiempo, el gas estará tan caliente que cuando los átomos de hidrógeno choquen, ya no saldrán rebotados sino que se fundirán formando helio. El calor desprendido por la reacción hace que la estrella brille. Este calor adicional también aumenta la presión del gas hasta que ésta es suficiente para equilibrar la atracción gravitatoria, y el gas deja de contraerse. Las estrellas permanecerán estables en esta forma por un largo período, con el calor de las reacciones nucleares equilibrando la atracción gravitatoria. Finalmente, la estrella consumirá todo su hidrógeno y los otros combustibles nucleares. Cuanto más combustible posee una estrella al principio, más pronto se le acaba. Esto se debe que cuanto más masiva es la estrella, más caliente tiene que estar para contrarrestar la atracción gravitatoria, y, cuanto más caliente está, más rápidamente utiliza su combustible. Cuando una estrella se queda sin combustible, empieza a enfriarse y por lo tanto a contraerse. Lo que puede sucederle a partir de este momento sólo se empezó a entender al final de los años veinte.

En 1928, un estudiante graduado indio, Subrahmanyan Chandrasekhar calculó lo grande

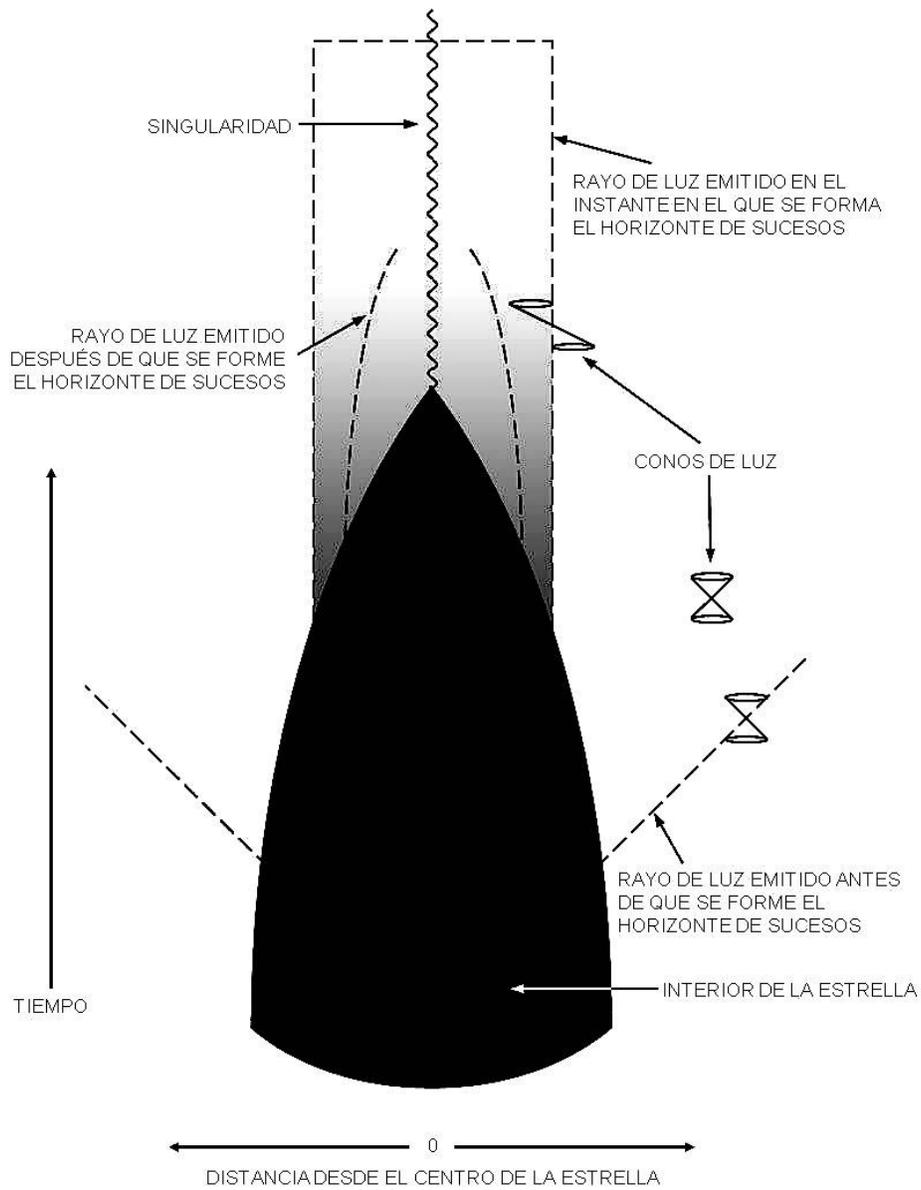


Figura 2.3: Colapso de una estrella hacia un agujero negro (crédito de imagen: [67]).

que podría llegar a ser una estrella que fuera capaz de soportar su propia gravedad, una vez que hubiera gastado todo su combustible. La idea era la siguiente: cuando la estrella se reduce en tamaño, las partículas materiales están muy cerca unas de otras, y así, de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli, tienen que tener velocidades muy diferentes. Esto hace que se alejen unas de otras, lo que tiende a expandir a la estrella. Una estrella puede, por lo tanto, mantenerse con un radio constante, debido a un equilibrio entre la atracción de la gravedad y la repulsión que surge del principio de exclusión, de la misma manera que antes la gravedad era compensada por el calor.

Chandrasekhar se dio cuenta, sin embargo, de que existe un límite a la repulsión que el principio de exclusión puede proporcionar. La teoría de la relatividad limita la diferencia máxima entre las velocidades de las partículas materiales de la estrella a la velocidad de la luz. Esto significa que cuando la estrella fuera suficientemente densa, la repulsión debida al principio de exclusión sería menor que la atracción de la gravedad. Chandrasekhar calculó que una estrella fría de aproximadamente una vez y media la masa del Sol no sería capaz de soportar su propia gravedad.⁴

Si una estrella posee una masa menor que el límite de Chandrasekhar, puede finalmente cesar de contraerse y estabilizarse en un posible estado final, como una estrella “enana blanca”, con un radio de unos pocos miles de kilómetros y una densidad de decenas de toneladas por centímetro cúbico. Una enana blanca se sostiene por la repulsión, debida al principio de exclusión entre los electrones de su materia.

El científico ruso Lev Davidovich Landau señaló también que existía otro posible estado final para una estrella, también con una masa límite de una o dos veces la masa del Sol, pero mucho más pequeña incluso que una enana blanca. Estas estrellas se mantendrían gracias a la repulsión debida al principio de exclusión entre neutrones y protones, en vez de electrones. Se les llamó por eso estrellas de neutrones. Tendrían un radio de unos quince kilómetros aproximadamente y una densidad de decenas de millones de toneladas por centímetro cúbico.

Estrellas con masas superiores al límite de Chandrasekhar tienen, por el contrario, un gran problema cuando se les acaba el combustible. En algunos casos consiguen explotar, o se las arreglan para desprenderse de la suficiente materia como para reducir su peso por debajo del límite y evitar así un catastrófico colapso gravitatorio. Chandrasekhar había demostrado que el principio de exclusión no podría detener el colapso de una estrella más masiva que el límite de Chandrasekhar, pero el problema de entender qué es lo que le sucedería a tal estrella, de acuerdo con la relatividad general, fue resuelto por primera vez por un joven norteamericano,

⁴A esta masa se le conoce hoy en día como el límite de Chandrasekhar.

Robert Oppenheimer, en 1939: el campo gravitatorio de la estrella modifican los caminos de los rayos de luz en el espacio-tiempo, respecto de cómo lo hubieran sido si la estrella no hubiera estado presente. Los conos de luz, que indican los caminos seguidos en el espacio y en el tiempo por destellos luminosos emitidos desde sus vértices, se inclinan ligeramente hacia dentro cerca de la superficie de la estrella. Cuando la estrella se contrae, el campo gravitatorio en su superficie es más intenso y los conos de luz se doblan más hacia dentro. Esto hace más difícil que la luz de la estrella escape, y la luz se muestra más débil y más roja para un observador lejano. Finalmente, cuando la estrella se ha reducido hasta un cierto radio crítico, el campo gravitatorio en la superficie llega a ser tan intenso, que los conos de luz se doblan tanto hacia dentro que la luz ya no puede escapar. De acuerdo con la teoría de la relatividad, nada puede viajar más rápido que la luz. De esta manera, si la luz no puede escapar, tampoco lo puede hacer ningún otro objeto; todo es arrastrado por el campo gravitatorio. Por lo tanto, se tiene un conjunto de hechos: una región del espacio-tiempo, desde donde no se puede escapar y alcanzar a un observador lejano. Esta región es lo que hoy en día llamamos agujero negro. Su frontera se denomina el horizonte de sucesos y coincide con los caminos de los rayos luminosos que están justo a punto de escapar del agujero negro, pero no lo consiguen [67].

La descripción natural de un agujero negro se da en el marco de la relatividad general desarrollada por Einstein al inicio del siglo XX. Después que Einstein trabajó en el marco de la relatividad especial, se confrontó con el problema de la gravedad y cómo debe ser ésta incluida en la descripción del espacio-tiempo. La propuesta inicial que propuso fue que *la métrica del espacio-tiempo no es plana, como se asume en la relatividad especial. Las líneas mundo de cuerpos en caída libre en un campo gravitacional son simplemente las geodésicas de la métrica del espacio-tiempo curvo* [68]. Finalmente llega a la conclusión que las leyes de la Física en relatividad general están gobernadas por dos principios básicos:

- I. El principio de covariancia general, que establece que la métrica de espacio-tiempo, g_{ab} , y cantidades derivables de ésta, son las únicas cantidades del espacio-tiempo que pueden aparecer en las ecuaciones de la Física.
- II. El requisito que las ecuaciones deben reducirse a las ecuaciones que son satisfechas por la relatividad especial en el caso que g_{ab} es plana.

Esta métrica de espacio-tiempo g_{ab} es la solución la ecuación de Einstein de la relatividad general

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (2.18)$$

De tal manera, en relatividad general se considera al espacio-tiempo como una variedad

M sobre la que está definida una métrica de Lorentz g_{ab} . La geometría de M, al lado izquierdo de la ecuación (2.18), está relacionada con la materia y la distribución de la energía en ese espacio-tiempo (esto es, T_{ab}).

Hay algunos puntos importantes sobre la ecuación de Einstein que vale la pena mencionar [69]:

- **Carácter matemático:** la ecuación de Einstein es una ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal para las componentes de la métrica g_{ab} . Para una métrica con signatura de Lorentz, esta ecuación tiene un carácter hiperbólico (esto es, ecuación de onda en el caso lineal).
- **Punto de vista:** en un sentido, la ecuación de Einstein es análoga a la ecuación de Maxwell con el tensor T_{ab} sirviendo como fuente del campo gravitacional, de manera muy similar a j_a sirviendo como fuente de campo electromagnético. Pero en relatividad general, no podemos resolver la ecuación de Einstein especificando primero T_{ab} y después encontrando g_{ab} , porque hasta que g_{ab} es conocida, no sabemos cómo interpretar físicamente T_{ab} . Se debe resolver simultáneamente la ecuación para la métrica del espacio-tiempo y la distribución de masa.
- **La ecuación de movimiento de la materia:** la ecuación de Einstein por sí sola implica la *hipótesis geodésica*, esto es, las líneas mundo de los cuerpos de prueba son geodésicas de la métrica del espacio-tiempo.

La ecuación (2.18) puede describir el Universo por cosmologías idealizadas. Observaciones astronómicas revelan que el universo es homogéneo e isotrópico a escalas de $\sim 10^8$ años luz o más. Tomando un punto de vista de “escala fina”, se puede observar aglomeraciones de materia conformada por estrellas, galaxias, y conglomerados o clusters de galaxias en regiones del tamaño ~ 1 año luz, $\sim 10^6$ años luz, y $\sim 3 \times 10^7$ años luz respectivamente. En cambio, bajo el punto de vista de “escala grande”, se encuentra pocas diferencias entre un elemento de volumen del universo del orden de 10^8 años luz con centro en la Tierra, y otro elemento de volumen del mismo tamaño localizado en cualquier otro lugar [70]. Tomando este punto de vista de escala grande, se puede tratar a las galaxias como “partículas de gas” que llenan al universo. Se puede remover la estructura de partículas del gas trabajando con una aproximación de fluido perfecto. De esta manera, se puede caracterizar el fluido por la 4-velocidad⁵ u^μ , por una densidad de masa-energía⁶ ρ y por una presión⁷ p . De esta manera,

⁵La 4-velocidad de un observador que ve a las galaxias vecinas sin movimiento promedio.

⁶La densidad de masa-energía atenuado visto en el marco de referencia de la 4-velocidad u^μ ; se incluye la masa en reposo más la energía cinética de las galaxias en un volumen uniforme, dividido por el volumen.

⁷La presión cinética de las galaxias, asumiendo que es isotrópico.

el lado derecho de la ecuación (2.18) se puede asumir como un tensor de momento-energía para este “fluido de galaxias” de la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

Por razones físicas, se asume que $\rho \geq p \geq 0$. De igual manera, es adecuado restringir la atención al caso en que la ecuación de estado toma la forma lineal

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (2.20)$$

donde $1 \leq \gamma \leq 2$ es una constante apropiadamente escogida. Esto incluye los casos especiales como un fluido sin presión, al cual se le refiere usualmente como un *polvo*, cuando $\gamma = 1$. Cuando $\gamma = 0$ entonces $\rho = -p$. Si este es constante, entonces $8\pi\rho$ es exactamente equivalente a la presencia de una constante cosmológica Λ (ver sección 4.3.5). Adicionalmente, se puede notar que, en un espacio-tiempo de fluido perfecto con cualquier ecuación de estado, siempre se puede incluir una constante cosmológica al ajustar $\rho \rightarrow \rho + \Lambda/8\pi$ y $p \rightarrow p - \Lambda/8\pi$.

Con la 4-velocidad del fluido denotado por u_μ , tal que $u_\mu u^\mu = -1$, su expansión θ y aceleración a^μ está dada por

$$\begin{aligned} \theta &= \nabla_\mu u^\mu, \\ a^\mu &= u^\nu \nabla_\nu u^\mu. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Entonces es conveniente introducir un nuevo tensor

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad (2.22)$$

que satisface $h_{\mu\nu}u^\nu = 0$, $h_{\mu\alpha}h^\alpha_\nu = h_{\mu\nu}$ y $h^\mu_\mu = 3$. Un tensor de corte (*shear*) $\sigma_{\mu\nu}$ y un tensor de rotación (*twist*) $\omega_{\mu\nu}$ son entonces definidos por

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \left[\frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha) - \frac{1}{3}\nabla_\gamma u^\gamma h_{\alpha\beta} \right] h^\alpha_\mu h^\beta_\nu, \\ \omega_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha) h^\alpha_\mu h^\beta_\nu. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Las siguientes cantidades escalares representan el corte local y la rotación del fluido

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}, \quad \omega = \sqrt{\omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}}. \quad (2.24)$$

Finalmente, el tensor de momento-energía puede también representar un caso general de

campos de radiación pura,

$$T^{\mu\nu} = \rho k^\mu k^\nu, \quad (2.25)$$

donde k^μ es un vector nulo y ρ es su densidad de radiación. Generalmente esto se toma para describir algún tipo de campo que se propaga a la velocidad de la luz, que podría representar al campo electromagnético. También puede representar un haz incoherente de fotones o algún tipo de campo idealizado (sin masa) de neutrinos. Una fuente de este tipo se le llama algunas veces como “polvo nulo”, dado que puede ser considerado como un caso límite de un fluido perfecto sin presión en que la 4-velocidad es nula [40].

Al término R_{ab} en la ecuación (2.18) se le conoce como tensor de Ricci, que es la traza del tensor de curvatura de Riemann $R_{abc}{}^d$. Este tensor está definido en términos del fracaso en la conmutación de sucesivas operaciones de diferenciación cuando es aplicado a un vector de campo dual. Este tensor está directamente relacionado con la naturaleza dependiente de la trayectoria en el transporte paralelo; especialmente cuando un vector falla en volver a su valor original al ser transportado paralelamente alrededor de un pequeño lazo cerrado por un tensor de Riemann. El tensor de Riemann además describe la falla en las geodésicas paralelas iniciales en permanecer paralelas. Este tensor es descrito por

$$R_{abc}{}^d \omega_d = \nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c, \quad (2.26)$$

donde ω_c es un vector de campo dual.

Es muy útil descomponer el tensor de Riemann en una “parte de la traza” y “parte libre de la traza”. La parte de la traza sobre los segundo y cuartos índices de la ecuación (2.26) define el *tensor de Ricci*,

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b \quad (2.27)$$

A la parte libre de la traza se le llama el *tensor de Weyl*, C_{abcd} , y es definido para *variedades* (stacks o grupos) de dimensión $n \geq 3$ por la ecuación

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b}, \quad (2.28)$$

donde R es la *curvatura escalar* definida como la traza del tensor de Ricci, esto es, $R = R_a{}^a$. Los paréntesis cuadrados indican la operación de anti-simetrización. Al tensor de Weyl también se le conoce como *tensor conforme*, porque se comporta de una manera muy similar bajo transformaciones conformes de la métrica [69].

En esencia la ecuación de Einstein (2.18) establece

$$\text{“curvatura de espacio-tiempo”} = \text{“densidad de energía de materia”},$$

Entonces, Einstein nos proveyó con una teoría de la gravitación verdaderamente notable y hermosa. Los efectos de la gravedad son totalmente expresados en términos de la estructura del espacio-tiempo y ésta a su vez está relacionada a la distribución de la materia [71]. Vale la pena mencionar que en la práctica ha sido difícil obtener soluciones exactas de la ecuación de Einstein. El tensor de Weyl (2.28) tiene diez componentes independientes, sin embargo, este tensor se determina indirectamente de las ecuaciones de campo. Estas componentes deben entonces ser entendidas como la representación de “componentes libres” del campo de gravitación que también surge de fuentes no-locales. Para buscar la interpretación de cualquier solución física exacta, estas componentes deben ser investigadas explícitamente [40], como se hará más adelante.

Un espacio tiempo se dice que es *conformemente plano* si su tensor de Weyl desaparece, esto es, si $C_{abcd} = 0$. En caso contrario, el campo gravitacional es usualmente clasificado de acuerdo a la clasificación de Petrov-Penrose de su tensor de Weyl. Esto se basa en el número de sus direcciones principales nulas y el número de veces que éstas se repiten.

Frecuentemente es importante determinar las componentes de los vectores o los tensores en direcciones particulares en cualquier evento (o punto en el espacio-tiempo). Para ello, primeramente es apropiado introducir una tetrada ortogonal normalizada (t, x, y, z) , compuesta por un vector tipo tiempo y tres vectores tipo espacio. Para ello a su vez, es conveniente construir una tetrada nula (k, l, m, \bar{m}) , con dos vectores nulos $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z)$ y $l = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z)$ y un vector complejo $m = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy)$ con su conjugado $\bar{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$, que extiende el espacio de 2 dimensiones ortogonal de k y l . Estas tetradas vectoriales nulas son mutuamente ortogonales excepto que $k_a l^a = -1$ y $m_a \bar{m}^a = 1$. Con estas condiciones, el tensor métrico puede ser expresado en términos de sus componentes de tetrada nula en la forma

$$g_{ab} = -k_a l_b - l_a k_b + m_a \bar{m}_b + \bar{m}_a m_b. \quad (2.29)$$

Una tetrada nula así puede ser transformada por Lorentz de la siguiente manera:

$$k' = k, \quad l' = l + L\bar{m} + \bar{L}m + L\bar{L}k, \quad m' = m + Lk, \quad (2.30)$$

$$k' = k + K\bar{m} + \bar{K}m + K\bar{K}l, \quad l' = l, \quad m' = m + KL, \quad (2.31)$$

$$k' = Bk, \quad l' = B^{-1}l, \quad m' = e^{i\Phi}m, \quad (2.32)$$

donde L y K son complejas y B y Φ son parámetros reales. Juntas, representan el grupo de transformaciones de Lorentz de 6 parámetros.

Las 10 componentes independientes mencionadas del tensor de Weyl (2.28) están deter-

minadas por 5 funciones escalares complejas definidas como

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} k^\kappa m^\lambda k^\mu m^\nu, \\
\Psi_1 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} k^\kappa l^\lambda k^\mu m^\nu, \\
\Psi_2 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} k^\kappa m^\lambda \bar{m}^\mu l^\nu, \\
\Psi_3 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa k^\lambda l^\mu \bar{m}^\nu, \\
\Psi_4 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa \bar{m}^\lambda l^\mu \bar{m}^\nu.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Al considerar la derivación de la ecuación de la geodésica en un marco de referencia adecuadamente adaptado, estas componentes (en el espacio-tiempo vacío) se puede mostrar de manera general que tienen las siguientes interpretaciones físicas:

Ψ_0 es una componente transversal propagándose en la dirección l ,

Ψ_1 es una componente longitudinal en la dirección l ,

Ψ_2 es una componente tipo Coulomb,

Ψ_3 es una componente longitudinal en la dirección k ,

Ψ_4 es una componente transversal propagándose en la dirección k .

Un vector nulo k se dice que una *dirección principal nula* si éste satisface la propiedad

$$k_{[\rho} C_{\kappa]\lambda\mu[\nu} k_{\sigma]} k^\lambda k^\mu = 0. \tag{2.34}$$

Si k es un miembro de la tetrad nula como se define arriba, entonces la condición (2.34) es equivalente a $\Psi_0 = 0$. Debe notarse que, bajo una transformación (2.31) de la tetrad que mantiene l fija pero cambia la dirección de k , la componente Ψ_0 del tensor de Weyl se transforma como

$$\Psi_0 = \Psi'_0 - 4K\Psi'_1 + 6K^2\Psi'_2 - 4K^3\Psi'_3 + K^4\Psi'_4. \tag{2.35}$$

La condición para que k sea una dirección principal nula (esto es, que $\Psi = 0$) es entonces equivalente a la existencia de una raíz K tal que

$$\Psi'_0 - 4K\Psi'_1 + 6K^2\Psi'_2 - 4K^3\Psi'_3 + K^4\Psi'_4 = 0. \tag{2.36}$$

Dado que esta es un polinomio de grado 4 en K , existen cuatro raíces (complejas) para esta ecuación, aunque no necesariamente tienen que ser distintas.

Cada raíz de (2.36) corresponde a una dirección principal nula que puede ser construida usando (2.31), y la multiplicidad de cada una de las direcciones principales nulas es la

misma de la multiplicidad de la raíz correspondiente. Para una dirección principal nula k de multiplicidad 1, 2, 3 o 4, se puede demostrar que

$$\begin{aligned}
k_{[\rho}C_{\kappa]\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^\lambda k^\mu = 0 &\Leftrightarrow \Psi_0 = 0, & \Psi_1 \neq 0, \\
C_{\kappa\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^\lambda k^\mu = 0 &\Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = 0, & \Psi_2 \neq 0, \\
C_{\kappa\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^\mu = 0 &\Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0, & \Psi_3 \neq 0, \\
C_{\kappa\lambda\mu\nu}k^\mu = 0 &\Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, & \Psi_4 \neq 0.
\end{aligned}$$

Si un espacio-tiempo admite 4 direcciones principales nulas (dpn), se dice que es *algebraicamente general*, o de tipo I. En caso contrario se le llama *algebraicamente especial*. Los diferentes tipos algebraicos pueden ser resumidos de la siguiente forma:

tipo I: cuatro distintas dpn

tipo II: una dpn de multiplicidad 2, las otras distintas

tipo D: dos distintas dpn de multiplicidad 2

tipo III: una dpn de multiplicidad 3, las otras distintas

tipo N: una dpn de multiplicidad 4

tipo O: conformemente plana.

Si cualquiera de los vectores base k o l están alineados con las direcciones principales, entonces serán respectivamente $\Psi_0 = 0$ ó $\Psi_4 = 0$. Si el vector k se encuentra alineado con la dirección principal nula repetida de un espacio-tiempo algebraicamente especial, entonces $\Psi_0 = 0 = \Psi_1$. Si ambos k y l están alineados con las dos direcciones principales nulas repetidas de un espacio-tiempo tipo D, entonces la única componente no-cero del tensor de Weyl es Ψ_2 . Para un espacio-tiempo tipo N con direcciones principales nulas repetidas k , la única componente no-cero del tensor de Weyl es Ψ_4 [40].

La familia de soluciones de Plebański-Demiański de la ecuaciones de campo de Einstein asociadas con el campo gravitacional de objetos masivos aislados se sabe que describe exhaustivamente los espacio-tiempos tipo D de Petrov. Las soluciones con expansión y torsión con simetría axial están caracterizadas por 7 parámetros que bajo ciertas circunstancias están relacionadas con la masa, momento angular, constante cosmológica, cargas eléctricas y magnéticas, parámetro de NUT y aceleración. Esto incluye espacio-tiempos de agujeros negros del tipo Kerr-NUT-(A)dS y la métrica-C que describe fuentes aceleradas. Las soluciones no-aceleradas de Plebański-Demiański poseen la sobresaliente propiedad que permiten ecuaciones separables de Hamilton-Jacobi, y por lo tanto, la ecuación de la geodésica es integrable. Esto también se extiende a dimensiones superiores. Las soluciones de dimensiones superiores de este tipo se volvieron populares en relación de teoría de cuerdas y modelos de

branas [52].

Como se explicó en el capítulo de la Introducción, el propósito de esta tesis es calcular el estado de entrelazamiento cuántico (1.1) cuando dos partículas viajan sobre un espacio-tiempo de Plebański-Demiański. Como objetivo secundario, se obtendrá una expresión para la desigualdad de Bell (2.13) con el objetivo de conocer cómo cada uno de los parámetros del espacio-tiempo de Plebański-Demiański afectan la desigualdad y la perfecta anticorrelación de las dos partículas.

Capítulo 3

Metodología

Es usual encontrar ejemplos en la teoría de la relatividad donde se emplean observadores ficticios que envían y reciben señales. Estos “observadores” no deben tomarse como seres humanos en un sentido concreto, sino como emisores y detectores físicos ordinarios. Su papel es indicar y localizar eventos en el espacio-tiempo. La velocidad de transmisión de estas señales está limitada por la velocidad de la luz c , porque la información necesita un medio material de transporte, y estos observadores obedecen las leyes de la física.

Sin embargo, la mera existencia de un límite superior en la velocidad de propagación de los efectos físicos no hace justicia a los conceptos fundamentalmente nuevos que introdujo Albert Einstein. Él demostró que la simultaneidad no tiene un significado absoluto, y eventos distantes pueden incluso estar ordenados de forma diferente en el tiempo cuando son referidos por observadores en movimiento relativo uno de otro. La cinemática relativista se trata entonces de la transferencia de información entre observadores en ese movimiento relativo [72].

3.1 Espín en un espacio-tiempo curvo

La paradoja EPR mencionada previamente parece demostrar que a nivel cuántico hay una violación de la localidad de los eventos físicos, lo que sugiere que la medición del espín en una dirección en particular, afecta el estado cuántico (en este caso el espín) de la segunda partícula, en esa misma dirección o eje, sin importar la distancia que existe entre las dos partículas, obteniendo así el llamado efecto a distancia de entrelazamiento cuántico, que puede ser descrito como la correlación cuántica de ambos sistemas.

Es necesario aclarar la naturaleza de esta no-localidad al considerar el efecto EPR sobre un par de partículas espinoriales propagándose en un campo gravitacional externo. No es

evidente que la correlación deba existir en este caso porque no hay una correspondencia “natural” entre las direcciones en las dos regiones espacialmente separadas en el espacio-tiempo curvo. En el trabajo [73] los autores concluyen que la correlación cuántica no-local EPR es de hecho una correlación entre los resultados de la medición de dos sistemas espacialmente separados. Esto es, que este fenómeno aparentemente no-local es precedido por 1) el establecimiento de la correlación cuántica entre dos sistemas en un punto inicial y entonces 2) la correlación de los sistemas separados espacialmente en dos puntos es llevada durante la propagación de las partículas. Ambas operaciones son locales y por lo tanto la correlación final es preparada en el viaje de las partículas por procesos locales.

Para campos gravitatorios estos mismos autores demuestran que la determinación de la correlación puede ser realizada sólo en términos de las líneas de mundo de las partículas, y que en general la anti-correlación perfecta EPR no puede existir en campos gravitacionales. La razón por la cual concluyen ésto, es porque los diferentes procesos locales, dados por las diferentes trayectorias de las partículas, son coherentemente superpuestos.

Estas mismas observaciones son indicadas en el trabajo de Terashima y Ueda [54], donde demuestran que la entropía en el espín de un par de partículas entrelazadas se incrementa muy rápidamente en la vecindad del horizonte de un agujero negro de Schwarzschild cuando se encuentran moviéndose en órbita circular. Esto significa que se pierde la correlación EPR entre las partículas y el espín no puede ser usado como un qubit¹ dentro de un campo gravitacional intenso en un proceso de información cuántica.

Posteriormente, estos mismos autores extienden este trabajo en [31] y demuestran que la aceleración y los efectos de la gravedad deterioran la correlación EPR en la dirección de los espines que serían iguales en una teoría no relativista, y que existe una disminución en la violación de las desigualdades de Bell, dado que existe una precesión de espín muy rápida cerca del horizonte.

Lo anterior implica que para mantener una comunicación cuántica no-local en un espacio-tiempo curvo usando un par de partículas EPR entrelazados en sus espines, es importante la selección adecuada del 4-vector de velocidad de las partículas y el sistema de referencia que se monta sobre ellas, para compensar los efectos de la gravedad sobre el par entrelazado. Más adelante analizaremos a fondo el efecto de la velocidad de las partículas y los sistemas de referencia.

De esta manera, esta tesis extiende los trabajos de Terashima y Ueda al agregar en el análisis más parámetros físicos y teóricos al espacio-tiempo curvo analizado por ellos, obte-

¹Qubit es un acrónimo de “quantum bit” o bit cuántico. En computación clásica el bit es la unidad básica de información y puede adquirir dos posibles valores, un 0 o un 1; de manera similar en computación cuántica, un qubit también puede tener los valores 0, 1 o una superposición de ambos de forma simultánea.

niendo así agujeros negros más complicados que los analizados previamente en la literatura. Veremos que estos parámetros impactan al espacio-tiempo aumentando o disminuyendo su curvatura, así como también definiendo nuevos horizontes de sucesos.

3.1.1 Estados cuánticos en relatividad especial: Transformaciones de Lorentz

Primero es necesario abordar el problema de describir el espín de una partícula en el régimen de la relatividad especial. Para ello definamos el estado cuántico $|\phi\rangle$ de una partícula masiva desde un marco de referencia clásico no-relativista con espín- j ,

$$|\phi\rangle = |p^a(x), \sigma; x\rangle, \quad (3.1)$$

donde x es su posición, $p^a(x)$ su 4-momento lineal y $\sigma \in \{-j, -j+1, \dots, j\}$ son las componentes del espín de la partícula medido en uno de los ejes en el sistema de referencia en reposo de la partícula [74].

Los observables físicos conectados con los objetos cuánticos son representados por operadores hermitianos que actúan sobre los estados cuánticos [61]. Un operador \mathbf{A} es hermitiano si su valor esperado es real, es decir, satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^\dagger, \\ \langle \phi | \mathbf{A} | \phi \rangle &= \langle \phi | \mathbf{A} | \phi \rangle^*. \end{aligned} \quad (3.2)$$

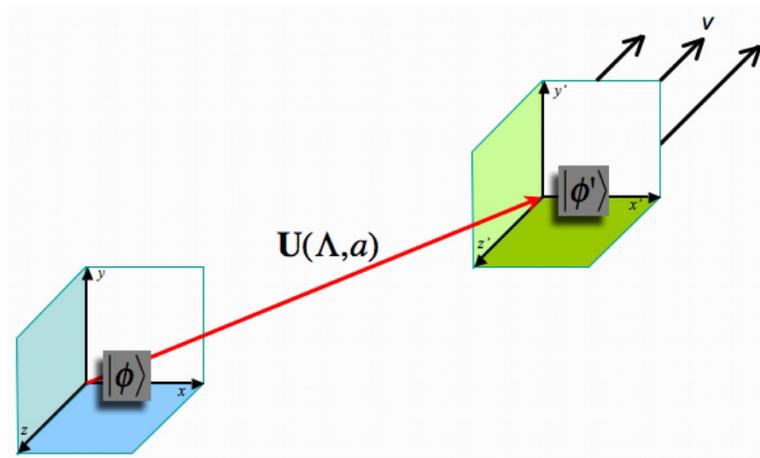


Figura 3.1: Descripción de un estado cuántico $|\phi\rangle$ en un marco de referencia inercial con respecto a otro marco de referencia inercial primado.

Por medio de los operadores es como podemos, por ejemplo, trasladar un estado cuántico,

hacerlo evolucionar en el tiempo, obtener su momento lineal, determinar su espín, o cualquier otro observable. En particular estamos interesados en describir un mismo estado desde diferentes marcos de referencia, esto es, en movimiento uno respecto a otro con velocidad constante.

Propongamos la siguiente situación, un observador en un marco de referencia inercial mide un evento cuántico en su marco de referencia. Asimismo, otro observador inercial moviéndose con respecto al primero mide el mismo evento y ambos observadores deben coincidir en sus observaciones (ver la Figura 3.1). Es importante recordar que las observaciones corresponden a probabilidades estadísticas dados por los estados cuánticos, definidos por el producto $\langle\phi|\mathbf{A}|\phi\rangle$, de tal manera que el operador \mathbf{A} conecta un estado $|\phi\rangle$ en un sistema inercial con otro sistema inercial en movimiento $|\phi'\rangle$, es decir

$$|\phi\rangle \rightarrow |\phi'\rangle = \mathbf{A}|\phi\rangle. \quad (3.3)$$

De tal manera que es deseable que ambos observadores coincidan en sus observaciones independientemente del estado de movimiento inercial que tengan, lo cual quiere decir que $\langle\phi|\phi\rangle = \langle\phi'|\phi'\rangle$. Entonces, junto con (3.3) observamos que

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\phi|\mathbf{A}|\phi\rangle, \quad (3.4)$$

y por lo tanto demandamos que el operador \mathbf{A} tiene que ser un operador unitario.

Un operador unitario \mathbf{U} es una operación de simetría que cambia el punto de vista del experimentador (sistema de referencia) pero no cambia los resultados de los posibles experimentos. Este operador se define en un espacio de Hilbert, actúa linealmente y su adjunta satisface [75]

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}. \quad (3.5)$$

A manera de ejemplo, consideremos ahora una partícula masiva con masa M viajando con una velocidad v en dirección x con respecto a un laboratorio. Un segundo observador se aleja del laboratorio en dirección z con velocidad V . En la Fig. 3.2 se resume la situación.

En el marco de referencia de la partícula, el 4-momento está dado por el momento en reposo $k^\mu = (Mc, 0, 0, 0)$. En este marco de referencia, el estado (3.1) está definido² por $|k, \sigma\rangle$ y caracterizado por los eigenvalores del Hamiltoniano \mathbf{H} , el operador de momento \mathbf{P} , y la

²Donde hemos omitido la indicación de la posición x de $|p^a(x), \sigma; x\rangle$ por simplicidad para el ejemplo.

componente z del momento angular total por el operador \mathbf{J} , esto es,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}|k, \sigma\rangle &= Mc^2|k, \sigma\rangle, \\ \mathbf{P}|k, \sigma\rangle &= 0, \\ \mathbf{J}^3|k, \sigma\rangle &= \sigma\hbar|k, \sigma\rangle.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Debido a que el momento k^μ es invariante bajo el grupo de rotaciones espaciales $SO(3)$, una rotación se representa por la matriz unitaria $D^{(j)}(R)$ con dimensión $(2j + 1)$,

$$U(R)|k, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(R)|k, \sigma'\rangle,\tag{3.7}$$

donde j es un entero o la mitad de un entero y $-j \leq \sigma \leq j$. Nótese que j es el espín de la partícula y σ es su componente en el eje z porque el momento angular orbital está ausente en este marco de referencia de la partícula [76].

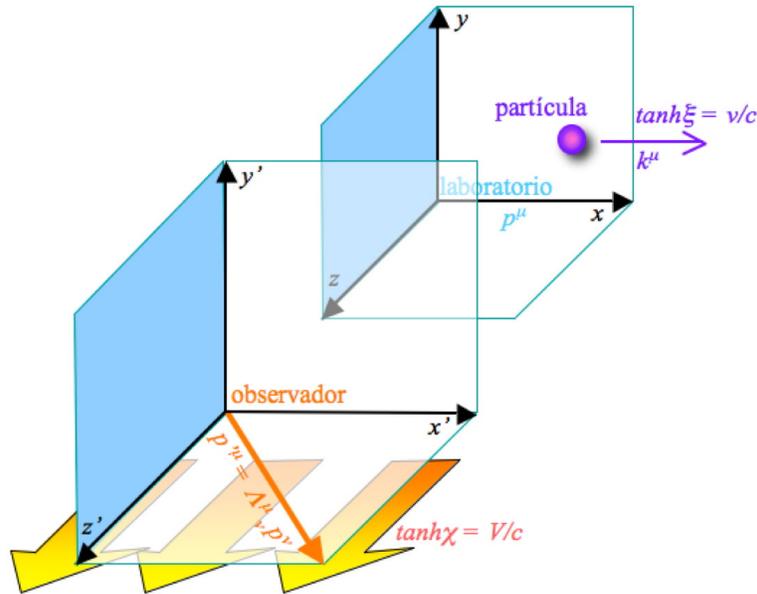


Figura 3.2: Una partícula tiene un estado cuántico $|k, \sigma\rangle$ y viaja en dirección x con respecto a un observador “fijo” en un laboratorio. Allí su estado es medido como $|p, \sigma\rangle = U(L(p))|k, \sigma\rangle$. Finalmente un observador inercial viajando en dirección z con respecto al laboratorio y sistema de referencia primado mide el estado de la partícula como $|p', \sigma'\rangle = U(\Lambda)|p, \sigma\rangle$.

Ahora bien, en el marco de referencia del laboratorio, el 4-momento de la partícula es $p^\mu = (\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2c^2}, p^1, p^2, p^3)$, el cual se obtiene realizando una transformación de Lorentz estandar $L(p)^\mu{}_\nu$ en el momento en reposo k^u , esto es, $p^\mu = L(p)^\mu{}_\nu k^\nu$, donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ y los índices repetidos son sumados según la convención de suma de Einstein. La

transformación de Lorentz se expresa como [76],

$$\begin{aligned} L(p)^0_0 &= \gamma, \\ L(p)^0_i &= L(p)^i_0 = p^i/Mc, \\ L(p)^i_k &= \delta_{ik} + (\gamma - 1)p^i p^k / |\vec{p}|^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $\gamma = \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2 c^2} / Mc$ y los índices pueden tomar los valores de coordenadas espaciales $i, j = 1, 2, 3$. En el apéndice A se demuestran las anteriores transformaciones.

De esta manera, el estado de la partícula es $|p, \sigma\rangle = U(L(p))|k, \sigma\rangle$ según lo mide un observador en el laboratorio, donde $U(L(p))$ es el operador unitario correspondiente a $L(p)^\mu_\nu k^\nu$. Esto quiere decir que ambos marcos de referencia (el de la partícula y el del laboratorio) están conectados por una transformación unitaria definida por una transformación de Lorentz. En esta operación no se ve afectada la componente del estado del espín medido en el eje z , debido a como se observa en la Fig. 3.2 la partícula y el laboratorio conectan sus sistemas de referencia sólo por una translación de coordenadas en el eje x .

Pero para un observador en movimiento en esa dirección z , es necesario proceder con cautela para comparar el espín de la partícula con respecto al laboratorio y ese otro observador inercial.

Consideremos así un observador adicional que viaja a velocidad V en dirección z con respecto al laboratorio y sea Λ^μ_ν su correspondiente transformación de Lorentz que conecta el marco de referencia del laboratorio con el marco de referencia de este observador en movimiento (ver Figura 3.2). Para este observador, el estado de la partícula es descrito por $U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda, p))|k, \sigma\rangle$, donde definiremos

$$W(\Lambda, p)^\mu_\nu = [L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)]^\mu_\nu, \quad (3.9)$$

como la rotación de Wigner [29]. En el apéndice B.1 se muestra como obtenerla.

Es importante enfatizar que la rotación de Wigner es un elemento del grupo de rotaciones espaciales $SO(3)$ dado que deja el momento k^μ sin cambio alguno [76], esto es, $k' = W(\Lambda, p)k$. A este grupo de rotaciones se le llama el *pequeño grupo* de Wigner para partículas masivas, es decir, es el grupo que deja invariante el 4-momento en el marco de referencia de la partícula [74]. Posteriormente veremos que la rotación de Wigner es esencial para la descripción de estados cuánticos entrelazados por el espín en espacio-tiempos curvos, porque allí no es claro en cuál dirección debe medirse el espín como mencionamos al inicio de la sección. La rotación de Wigner será el instrumento que utilizaremos para ligar la dirección de medición del espín de un lugar a otro, porque será la guía para indicarnos cuánto ha rotado el sistema

de coordenadas inicial (el de la partícula) con respecto al estado final (el del aparato de medición en el espacio-tiempo curvo alejado cierta distancia de la posición inicial).

De (3.7) se sigue que

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))|\Lambda p, \sigma'\rangle, \quad (3.10)$$

donde Λp son las componentes espaciales del 4-momento después de las transformaciones de Lorentz, esto es, $p^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$. El término $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))$ es la matriz de espinores $(2j + 1) \times (2j + 1)$ del grupo de rotación $SO(3)$ y $W(\Lambda, p)$ es llamado el ángulo de la rotación de Wigner [74]. Para el caso que nos ocupa de partículas espinoriales, trabajaremos con matrices de espinores 2×2 . En la Sección 3.2.1 veremos su aplicación.

Entonces, tomaremos el caso de una partícula masiva con espín- $\frac{1}{2}$ de la Fig. 3.2 descrito por el 4-momento $p^{\mu} = (Mc \cosh \xi, Mc \sinh \xi, 0, 0)$ en el marco de referencia del laboratorio, donde la rapidez ξ esta relacionada con la velocidad de la partícula v por la relación hiperbólica $v/c = \tanh \xi$ (ver nota 3 del apéndice A). En este caso, como se demuestra en (A.10), la transformación de Lorentz es³

$$L(p)^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Un observador más entra en escena y este se aleja del laboratorio en dirección del eje z (ver Fig. 3.2). Con el apoyo del apéndice A se puede obtener su transformación de Lorentz correspondiente⁴

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \cosh \chi & 0 & 0 & -\sinh \chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \chi & 0 & 0 & \cosh \chi \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Es relevante señalar que la función $L(p)^{\mu}_{\nu}$ actúa sobre el momento k^{μ} de la partícula mientras que Λ^{μ}_{ν} sobre la descripción de las posiciones.

De esta manera, la rotación de Wigner (3.9) se reduce a una rotación alrededor del eje

³El signo que acompaña a la función hiperbólica $\sinh \xi$ ahora es positivo, contrario a (A.10) que era negativo. La razón es que ahora partimos del marco de referencia de la partícula y por medio de $L(p)^{\mu}_{\nu}$ conectamos el marco de referencia del laboratorio, el cual se “aleja” por la izquierda de la partícula. En el apéndice A el marco de referencia O' se aleja de O por la derecha.

⁴Ahora el signo de $\sinh \chi$ es negativo en acuerdo con (A.10).

y , donde el ángulo de rotación, que llamaremos δ , está dado por

$$\tan \delta = \frac{\sinh \xi \sinh \chi}{\cosh \xi + \cosh \chi}. \quad (3.13)$$

En el apéndice B.2 se puede revisar la obtención de este ángulo de rotación. En el límite no-relativista cuando $\xi \rightarrow 0$ y $\chi \rightarrow 0$ el ángulo $\delta \rightarrow \xi\chi/2$. Esto implica que para velocidades no-relativistas o de la vida diaria, el observador en movimiento medirá una rotación casi nula del espín con respecto al observador en el laboratorio, lo cual ya esperábamos. Por otro lado, si $\xi = \chi = 0$, que corresponde a observadores “estáticos” que no se mueven con respecto al marco de referencia de la partícula, el ángulo $\delta = 0$ y no hay transformación de Wigner como cabría esperar.

En cambio, cuando los marcos de referencia y del observador se alejan con velocidad cercana a la de la luz, esto es $\xi \rightarrow \infty$ y $\chi \rightarrow \infty$, obtenemos que el denominador de la ecuación (3.13) tiende a cero y por lo tanto $\delta = \pi/2$, por lo que es imposible mantener una rotación de Wigner finita. Esto finalmente implica que no podrá establecerse una transformación de coordenadas entre sistemas de referencia, como puede verse más claramente en la rotación de Wigner de las ecuaciones (B.16) y (B.17).

Por último, la ecuación (3.10) nos dice cuál es el vector de estado cuántico de la partícula medido por el observador que viaja en la dirección en z . Este estado se compone de la suma de las componentes de la matriz de espinores $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}$ que han rotado un ángulo δ definido por la rotación de Wigner $W(\Lambda, p)$. Esto es, el observador en movimiento puede calcular el estado de la partícula (momento y espín) al comparar el estado original de la partícula contra su propia velocidad de alejamiento. Esta ecuación de estados para el caso de relatividad espacial se puede consultar en las referencias [23, 76].

En la siguiente sección estudiaremos el caso donde los observadores en movimiento ya no son inerciales, sino que están acelerados, es decir, están sujetos a la relatividad general.

3.1.2 Sistemas de referencia inercial local

En la sección anterior vimos que observadores inerciales no obtendrán la misma medición de la componente del espín en una dirección en particular, sino que entre estos observadores existe una rotación de coordenadas dada por la rotación de Wigner (3.10). En última instancia, sin embargo, pueden conectar la descripción de los estados cuánticos a través de transformaciones de Lorentz unitarias.

Para el caso de la relatividad general, cuando el espacio-tiempo es curvo, no es posible definir un sistema de coordenadas que sea equivalente de un punto a otro.

Como se mencionó en la Sección 2.2, en relatividad general la curvatura del espacio-tiempo de un punto a otro está determinado por la matriz métrica $g_{\mu\nu}(x)$, la cual es solución de la ecuación de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

donde la curvatura de $g_{\mu\nu}$ está relacionada con la distribución de materia y energía $T_{\mu\nu}$ en el propio espacio-tiempo [69].

De esta manera es posible definir un elemento diferencial que nos permita medir longitudes y medir tiempos en el espacio-tiempo a través de la curvatura definida por la distribución de materia en (3.14).

Así, para coordenadas esféricas este elemento diferencial queda definido por medio de los elementos métricos covariantes como:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\phi + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2, \quad (3.15)$$

donde $g_{30} = g_{03}$ y cuyas coordenadas se relacionan con 0 para tiempo t , 1 para la coordenada espacial radial r , 2 para el ángulo radial θ y 3 para el ángulo azimutal ϕ .

Además, los elementos contravariantes se definen

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{g_{33}}{g_{33}g_{00} - g_{03}^2}, \\ g^{03} &= g^{30} = -\frac{g_{03}}{g_{33}g_{00} - g_{03}^2}, \\ g^{11} &= \frac{1}{g_{11}}, \\ g^{22} &= \frac{1}{g_{22}}, \\ g^{33} &= \frac{g_{00}}{g_{33}g_{00} - g_{03}^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para definir el espín en un espacio-tiempo curvo introducimos un marco de referencia inercial local en cada punto a través de un *vierbein*⁵ o tetrada que cumple las siguientes condiciones [77]:

$$\begin{aligned} e_a^\mu(x)e_b^\nu(x)g_{\mu\nu}(x) &= \eta_{ab}, \\ e^a_\mu(x)e_a^\nu(x) &= \delta_\mu^\nu, \\ e^a_\mu(x)e_b^\mu(x) &= \delta^a_b. \end{aligned} \quad (3.17)$$

⁵Del alemán "4 piernas". Este es el sistema de referencia que se monta sobre las partículas instante a instante y que se mencionó al inicio de este capítulo.

donde los índices latinos son índices de Lorentz y toman los valores 0, 1, 2, 3; los índices del alfabeto griego corresponden a las cuatro coordenadas de relatividad general (t, r, θ, ϕ) y los índices repetidos se suman según la convención de suma de Einstein.

El término $e_a{}^\mu$ está definido como la matriz que transforma desde las coordenadas generales del sistema x^μ hacia el marco de referencia inercial local x^a en cada uno de los puntos. El vierbein es una matriz 4×4 con 16 componentes independientes. El vierbein inverso se denota por $e^a{}_\mu$.

Por ejemplo, el 4-momento $p^\mu(x)$ en el sistema de coordenadas general puede ser transformado en el marco de referencia inercial local en el punto x^μ por medio de la relación $p^a(x) = e^a{}_\mu(x)p^\mu(x)$.

La selección del marco de referencia inercial local no es única, dado que el marco inercial permanece inercial bajo las transformaciones de Lorentz. La selección del vierbein por lo tanto tiene los mismos grados de libertad conocido para las transformaciones de Lorentz locales. Es este grado de libertad la que transforma el espín de una partícula. Es decir, una partícula con espín- $\frac{1}{2}$ en un espacio-tiempo curvo está definido como una partícula cuyo estado provee la representación de espín- $\frac{1}{2}$ de la transformación de Lorentz, no de la transformación de coordenadas general. Debe notarse que el campo de Dirac en el espacio-tiempo curvo es espinorial bajo las transformaciones de Lorentz, mientras que es un escalar bajo las transformación de coordenadas generales, dado que no podemos escoger unívocamente la coordenada de tiempo para definir una energía positiva [54]. Sin embargo, en la presente formulación, nuestra partícula es especificada por la selección del vierbein, dado que $e_0{}^\mu$ genera una coordenada de tiempo global preferida de la coordenada de tiempo local inercial (el eje-0).

3.1.3 Estados cuánticos en fondos clásicos: Rotaciones de Wigner

Dado que el espín de una partícula se define localmente y de forma relativa a un marco de referencia inercial local, debemos considerar el cambio de espín cuando una partícula se mueve de un punto a otro en un espacio-tiempo curvo. Ya vimos en la Sección 3.1.1 cómo comparar el estado cuántico de una partícula para marcos de referencia inerciales a través de las transformaciones de Lorentz. Pero para marcos acelerados en espacios curvos el proceso de comparación es un poco diferente como veremos a continuación.

Primero consideremos cómo el espín cambia conforme nos movemos de un punto a otro en un espacio-tiempo curvo a lo largo de una trayectoria arbitraria de la línea de mundo. Sea una partícula con coordenada x en un punto del espacio-tiempo y con 4-momento $p(x) = mu(x)$. Después de un tiempo propio muy pequeño $d\tau$ la partícula se ha movido a lo largo de

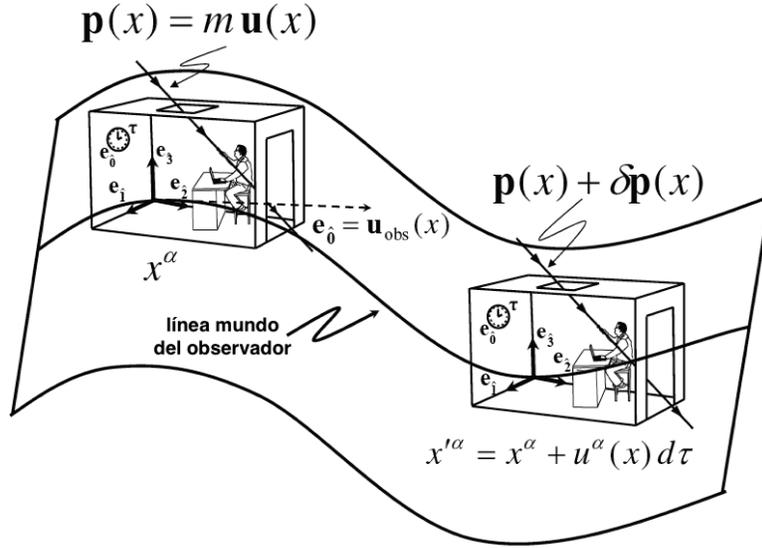


Figura 3.3: Marco de referencia del laboratorio para un espacio-tiempo curvo. El laboratorio del observador local (la pequeña caja con el hombre) está en el punto x del espacio-tiempo curvo, definido por el vierbein ortonormal $e_a^\mu(x)$. Los tres ejes espaciales $e_i(x)$, $i = (1, 2, 3)$ están localizados en el origen del laboratorio del observador, mientras que $e_0(x) = u_{\text{obs}}(x)$ es el eje temporal definido como su 4-velocidad, o la tangente de su trayectoria geodésica (crédito de imagen: [78]).

su trayectoria con tangente u a otro punto con coordenadas $x' = x + u(x)d\tau$ y un nuevo 4-momento $p(x) + \delta p(x)$ (ver Fig. 3.3). Dado que el espín de la partícula está definido localmente con respecto al marco de referencia del observador, y definido por la tetraada que éste lleva consigo desde que parte del laboratorio, el cambio diferencial en el 4-momento es⁶

$$\delta p^a(x) = \lambda^a_b(x) p^b(x) d\tau, \quad (3.18)$$

donde $\lambda^a_b(x)$ es una transformación de Lorentz infinitesimal local (ver apéndice A),

$$\Lambda^a_b(x) = \delta^a_b(x) + \lambda^a_b(x) d\tau. \quad (3.19)$$

De la definición del 4-momento local en el marco de referencia del observador como una proyección del 4-momento general en los ejes locales $p^a(x) = e^a_\mu(x) p^\mu(x)$ tenemos que

$$\delta p^a(x) = \delta p^\mu(x) e^a_\mu(x) + p^\mu(x) \delta e^a_\mu(x), \quad (3.20)$$

donde el término $\delta p^\mu(x)$ indica el cambio diferencial en las componentes del 4-momento

⁶Notar que se usan índices latinos porque se está trabajando en marcos de referencia locales inerciales para un tiempo propio infinitesimal $d\tau$.

general $p^\mu(x)$ conforme las partículas se mueven de $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ en el espacio-tiempo curvo subyacente, y el término $\delta e^a{}_\mu(x)$ es el cambio en las componentes del vierbein $e^a{}_\mu(x)$ que son usados para proyectar las componentes del 4-momento general en los ejes del observador del laboratorio local, $p^\mu(x) \rightarrow p^a(x)$.

El primer término está dado simplemente por

$$\delta p^\mu(x) = u^\nu(x) \nabla_\nu p^\mu(x) d\tau = m a^\mu(x) d\tau, \quad (3.21)$$

donde se ha utilizado la definición de 4-momento en términos de la 4-velocidad, esto es $p(x) = m u(x)$, y la definición de la aceleración,

$$\begin{aligned} a^\mu(x) &= u^\nu(x) \nabla_\nu u^\mu(x), \\ a^b(x) &= a^\mu(x) e_\mu{}^b(x). \end{aligned} \quad (3.22)$$

El símbolo ∇_μ que denota la derivada covariante para el vector contravariante V^ν , esto es,

$$\nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + V^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu, \quad (3.23)$$

donde

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (3.24)$$

son los símbolos de Christoffel.

Dado $p^\mu(x) p_\mu(x) = -m^2$ y $p^\mu(x) a_\mu(x) = 0$ (partículas que no están sujetas a fuerzas no-externas viajando en geodésicas), donde m es la masa de la partícula, podemos escribir la ecuación (3.21) como

$$\delta p^\mu(x) = -\frac{1}{m} [a^\mu(x) p_\nu(x) - p^\mu(x) a_\nu(x)] p^\nu(x) d\tau. \quad (3.25)$$

Para el segundo término en la ecuación (3.20), el cambio en el marco de referencia inercial local (componentes del vierbein) están dados por

$$\begin{aligned} \delta e^a{}_\mu(x) &= \nabla_\mu e^a{}_\mu(x) d\tau, \\ &= u^\nu(x) \nabla_\nu e^a{}_\mu(x) d\tau, \\ &= -u^\nu(x) \omega_{\nu}{}^a{}_b(x) e^b{}_\mu(x) d\tau, \\ &= \chi^a{}_b(x) e^b{}_\mu(x) d\tau, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde el término $\chi^a{}_b(x) = -u^\nu \omega_{\nu}{}^a{}_b(x)$ se definió como el cambio en el marco de referencia

inercial local a lo largo de u^μ , y

$$\omega_\mu{}^a{}_b(x) = -e_b{}^\nu(x)\nabla_\mu e^a{}_\nu(x) = e^a{}_\nu(x)\nabla_\mu e_b{}^\nu(x) \quad (3.27)$$

es la conexión uno-forma o conexión de espín. La segunda igualdad de la ecuación (3.27) proviene de la primera definición en la ecuación (3.17) y $\nabla_\mu g_{\nu\rho}(x) = 0$, dado que $\chi_{ab}(x) = -\chi_{ba}(x)$.

Regresando a la ecuación (3.20), y juntando los resultados previos de las ecuaciones (3.25) y (3.26), obtenemos que

$$\delta p^a(x) = \lambda^a{}_b(x)p^b(x)d\tau, \quad (3.28)$$

donde $\lambda^a{}_b(x)$ es la transformaciones de Lorentz infinitesimal local

$$\lambda^a{}_b(x) = -\frac{1}{m}[a^a(x)p_b(x) - p^a(x)a_b(x)] + \chi^a{}_b(x). \quad (3.29)$$

Podemos calcular ahora las componente de la rotación de Wigner local (3.10), pero para espacio-tiempos curvos, que determinan cómo el espín de una partícula precesa localmente conforme la partícula se mueve de $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, tal y como se mencionó previamente.

De la definición de rotación de Wigner de la ecuación (3.9), podemos hacer el cálculo a primer orden en $d\tau$ para obtener la rotación de Wigner infinitesimal usando

$$W^a{}_b(x) = \delta^a{}_b + \vartheta^a{}_b(x)d\tau, \quad (3.30)$$

donde $\vartheta^0{}_0(x) = \vartheta^0{}_i(x) = \vartheta^i{}_0(x) = 0$ (ver Referencia [78] para la revisión exhaustiva del cálculo) y

$$\vartheta^i{}_k(x) = \lambda^i{}_k(x) + \frac{\lambda^i{}_0(x)p_k(x) - \lambda_{k0}(x)p^i(x)}{p^0(x) + m}. \quad (3.31)$$

Para una partícula de espín- j , la matriz de rotación $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(x))$ de la ecuación (3.10) está dado por

$$D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(x)) = I + i[\vartheta_{23}J_1 + \vartheta_{31}J_2 + \vartheta_{12}J_3]d\tau, \quad (3.32)$$

donde $[J_i, J_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$ son las relaciones de conmutación para SU(2) para las matrices J_i del espín- j constante del espacio-tiempo plano.

Para el caso de espín- $\frac{1}{2}$, en nuestro modelo, tenemos que $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ donde σ_i son las matrices de Pauli constantes en el espacio-tiempo plano usual. Conforme la partícula se mueve de $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, la transformación infinitesimal unitaria del estado de la ecuación (3.1), esta dada

por la ecuación (3.10), esto es

$$U(\Lambda(x))|p^i(x), \uparrow\rangle = \left(I + \frac{i}{2} \vartheta_{23}(x) d\tau \right) |p^i(x'), \uparrow\rangle - \frac{1}{2} (\vartheta_{31}(x) - i\vartheta_{23}(x)) d\tau |p^i(x'), \downarrow\rangle, \quad (3.33)$$

$$U(\Lambda(x))|p^i(x), \downarrow\rangle = \frac{1}{2} (\vartheta_{31}(x) + i\vartheta_{23}(x)) d\tau |p^i(x'), \uparrow\rangle + \left(I - \frac{i}{2} \vartheta_{23}(x) d\tau \right) |p^i(x'), \downarrow\rangle, \quad (3.34)$$

donde se ha usado la notación $\sigma = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\} = \{\uparrow, \downarrow\}$.

El siguiente paso es itinerar la fórmula para rotaciones de Wigner infinitesimales locales para obtener la rotación finita entre un punto inicial y uno final en el espacio-tiempo, esto es $\{x(\tau_i), x(\tau_f)\}$, para un tiempo propio finito. Por una serie de Dyson (como en la teoría de perturbación dependiente del tiempo), podemos partir la trayectoria en N intervalos de tiempo infinitesimales de longitud $\tau_{f,i}/N$ donde

$$\tau_{f,i} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_f} [g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu]^{1/2} \quad (3.35)$$

es el tiempo propio total entre los dos eventos, y

$$x_k^\mu = x^\mu(\tau_i + k\tau_{f,i}/N). \quad (3.36)$$

De tal manera que la rotación de Wigner esta dada por

$$\begin{aligned} W^a_b(x_f, x_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^N \left[\delta^a_b + \vartheta^a_b(x_k) \frac{k\tau_{f,i}}{N} \right] \\ &= T \exp \left[\int_{\tau_i}^{\tau_f} \vartheta^a_b(x(\tau)) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

En la última expresión, el operador de ordenamiento temporal T se requiere dado que, en general, las rotaciones de Wigner infinitesimales locales $\vartheta^a_b(x(\tau))$ no conmutan para diferentes posiciones $x^\mu(\tau)$ a lo largo de la trayectoria. El exponencial no se refiere al exponencial de cada una de las componentes sino aplicar el operador exponencial a toda la matriz.

Finalmente, la ecuación (3.37) es la expresión que se necesita para calcular la rotación de Wigner infinitesimal en un espacio-tiempo curvo.

Antes de continuar con la precesión de espín de partículas entrelazadas, es importante revisar una característica particular de los espacio-tiempos con simetría axial, que induce

una corrección adicional en la dinámica de las partículas.

3.1.4 Arrastre de coordenadas (“frame-dragging”)

Existe otro efecto en espacio-tiempos curvos con simetría axial que actúa sobre las partículas que viajan en este tipo de espacio. Cuando se considera un agujero negro con rotación, es importante estar conscientes que el espacio-tiempo mismo también rota alrededor del agujero negro. De tal manera que cualquier objeto se encontrará bajo la influencia de esta rotación. A este fenómeno se le llama *arrastre de coordenadas* (“frame-dragging”) y debe ser considerado en cualquier análisis donde están involucradas transformaciones de coordenadas.

De tal manera que, sea una partícula de prueba cayendo libremente con 4-velocidad u^μ en el exterior de un agujero negro con rotación. Para un observador en el infinito, esta partícula tiene dos cantidades conservadas: la energía relativista por unidad de masa $E = -u_t$ y el momento angular por unidad de masa $L_z = u_\phi$. Ambas cantidades tienen una relevancia clave para entender la dinámica de las partículas con espín en un espacio-tiempo arbitrario.

Veremos en la Sección 4.1 que, en general, $g_{\mu\nu}$ es independiente de la coordenada ϕ , y consecuentemente la trayectoria de la partícula conserva el momento angular u_ϕ . Además, el hecho que $g_{03} \neq 0$ en la métrica introduce un nuevo efecto en las trayectorias de las partículas [79]. Vale la pena mencionar por adelantado que la Sección 4.1 analiza el espacio-tiempo de Plebański-Demiański que, como ya dijimos, es la familia de soluciones Tipo D más importante entre las soluciones de la ecuación de Einstein-Maxwell. Entonces, el análisis del arrastre de coordenadas en esta sección es válido para un extenso rango de espacio-tiempos reales. En esta sección veremos cómo este efecto tiene una influencia relevante para las partículas y sobre los espacio-tiempos mismos.

De la definición ordinaria de la 4-velocidad de cualquier partícula, sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= u^t = g^{00}u_t + g^{03}u_\phi, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= u^\phi = g^{03}u_t + g^{33}u_\phi. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Adicionalmente consideramos que la partícula de prueba caerá libremente desde el infinito originalmente con un momento angular cero, esto es $u_\phi = 0$. A pesar que la partícula inicialmente cae radicalmente sin momento angular, ésta adquirirá movimiento angular conforme viaja [80], esto es, de la ecuación (3.38) la velocidad angular vista por un observador distante esta dada por

$$\omega(r, \theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{03}}{g^{00}}. \tag{3.39}$$

La ecuación (3.39) representa un cuerpo relativista en rotación por la influencia de la materia en rotación a su alrededor. El elemento de la métrica $g_{03} \neq 0$ introduce una simetría axial en el espacio-tiempo, y ésta es interpretada como una rotación del mismo espacio-tiempo, como por ejemplo en el agujero negro de Kerr. Entonces, una partícula en caída libre desde el infinito (distancias grandes) es arrastrada por la influencia de la gravedad de tal manera que adquiere una velocidad angular ω en la misma dirección de rotación del agujero negro. Este efecto disminuye con la distancia [79]. Desde un punto de vista físico podemos interpretar este fenómeno como un arrastre de los sistemas de referencia locales inerciales debido al agujero negro en rotación.⁷

De tal manera que hemos demostrado que para un espacio-tiempo en rotación, cualquier partícula en caída libre adquiere momento angular. Este es el llamado arrastre de coordenadas [80]. Considere ahora una partícula en órbita circular alrededor de un agujero negro en rotación ($u_r = u_\theta = 0$). De las ecuaciones (3.38) tenemos que

$$u_{fd}^\phi = -\frac{g_{03}}{g_{33}}u_{fd}^t = \omega u_{fd}^t, \quad (3.40)$$

donde ahora hemos identificado u_{fd}^μ como la velocidad de la partícula debido al arrastre de coordenadas.⁸ Usando la condición de normalización para velocidades $u^\mu u_\mu = -1$, se puede demostrar que

$$u_{fd}^t = \sqrt{\frac{-g_{33}}{g_{00}g_{33} - (g_{03})^2}}. \quad (3.41)$$

Ambas ecuaciones (3.40) y (3.41) constituyen las componentes de la 4-velocidad de una partícula de prueba debido al arrastre de coordenadas como lo observa un observador distante en el marco de referencia general.

Entonces, después de ordenar los términos, la 4-velocidad debido al arrastre de coordenadas para una partícula en caída libre, visto por un observador distante, está dada como

$$u_{fd}^\mu = \sqrt{\frac{-g_{33}}{g_{00}g_{33} - (g_{03})^2}} \left(1, 0, 0, -\frac{g_{03}}{g_{33}} \right). \quad (3.42)$$

Por otro lado, veremos más adelante que la precesión del ángulo del espín de las partículas es calculado a través de transformaciones de Lorentz infinitesimales sobre la velocidad de las partículas en un marco de referencia inercial local. Esto es necesario porque el espín está definido en este tipo de marcos de referencia. Entonces, para poder encontrar la veloci-

⁷Veremos más adelante que este efecto debido a la simetría axial aparece también en espacio-tiempos más generales.

⁸El subíndice “fd” se utilizará para indicar esta velocidad debida exclusivamente al arrastre de coordenadas (“frame-dragging”).

dad de una partícula en un marco de referencia inercial local, adoptaremos un conjunto de observadores convenientemente fijos o suspendidos (“hovering”) en una posición estacionaria de coordenadas, que son útiles para medir o preparar los estados de espín relevantes.

Pero antes, la 4-velocidad contravariante para estos observadores suspendidos⁹ visto desde el infinito es

$$u_h^\mu = (dt/d\tau, 0, 0, 0) = ((-g_{00})^{-1/2}, 0, 0, 0), \quad (3.43)$$

y su 4-velocidad covariante se obtiene bajando los índices, esto es

$$u_{\mu h} = \left(-\sqrt{-g_{00}}, 0, 0, \frac{g_{03}}{\sqrt{-g_{00}}} \right). \quad (3.44)$$

Vale la pena mencionar que estos observadores suspendidos están en reposo también en su marco de referencia local ($u_h^a = \eta^{ab} e_b^\mu u_{\mu h}$), porque el vierbein seleccionado (3.17) asegura esta condición. Debido a los dos requisitos (observadores suspendidos en reposo en el marco general de la ecuación (3.43) y en el marco local) podemos estar seguros que la medición de las transformaciones de Lorentz infinitesimales de la precesión de espín serán las correctas, lo cual será un punto medular en la Sección 3.1.5.

Por otro lado, la energía de una partícula respecto a un observador local con 4-velocidad $u_{\mu h}$ está definido por la componente temporal del 4-momento de la partícula en el marco de referencia del observador. Éste se obtiene proyectando el 4-momento mu_{fd}^μ de la partícula de prueba en la 4-velocidad del observador suspendido, esto es,

$$u_{fd}^\mu u_{\mu h} = -E = -\gamma_{fd}, \quad (3.45)$$

donde $\gamma_{fd} = (1 - v_{fd}^2)^{-1/2}$ es el factor gamma relativista ampliamente conocido y v_{fd} la rapidez local de la partícula sujeta al arrastre de coordenadas. E se interpreta como la energía relativista por unidad de masa de la partícula relativa a un observador suspendido.

El producto escalar (3.45) es un invariante y su valor es independiente del sistema de coordenadas seleccionado para evaluarlo. Esto significa que esta cantidad física estará conectada por una transformación de Lorentz entre dos marcos de referencia locales diferentes, aún y cuando uno o los dos de los marcos pueda estar acelerado.

La velocidad del arrastre de coordenadas se obtiene entonces de la ecuación (3.45), y puede ser expresada como funciones hiperbólicas relativistas por $\tanh \eta = v_{fd}$. Es decir, la velocidad local inercial debido al arrastre de coordenadas y medida por un observador

⁹El subíndice “h” se utilizará para estos observadores suspendidos (“hovering observers”).

suspendido será

$$u_{fd}^a = (\cosh \eta, 0, 0, \sinh \eta). \quad (3.46)$$

Más adelante veremos que ésta es una forma conveniente de expresar la velocidad de arrastre de coordenadas cuando este efecto sea incorporado en el ángulo de precesión de espín en la Sección 3.2.1.

Finalmente, las funciones hiperbólicas se obtienen después de un poco de álgebra de las ecuaciones (3.42, 3.43, 3.45) y son equivalentes a

$$\begin{aligned} v_{fd} &= \tanh \eta = \frac{g_{03}}{\sqrt{(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}}}, \\ \gamma_{fd} &= \cosh \eta = \sqrt{\frac{g_{00}g_{33} - (g_{03})^2}{g_{00}g_{33}}}, \\ \sinh \eta &= \sqrt{\frac{-(g_{03})^2}{g_{00}g_{33}}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.1.5 Precesión de espín

Como se mencionó previamente en el inicio de la Sección 1.2, en el presente trabajo se considera a dos observadores y una fuente de partículas EPR en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ de un agujero negro. Los observadores están localizados a ángulos azimutales $\phi = \pm\Phi$ y la fuente EPR esta localizada en el ángulo $\phi = 0$. Se asume que los observadores y la fuente EPR están suspendidos de acuerdo a la ecuación (3.43) sobre el agujero negro para mantenerse en “reposo” en el sistema de coordenadas de Boyer-Linquist (4.4). La fuente EPR emite un par de partículas entrelazadas en direcciones opuestas, que describen una órbita circular de radio constante en el ecuador. El vierbein (4.6) funciona como un marco de referencia para preparar los estados de espín en la fuente EPR y para medir los nuevos estados cuánticos de las partículas desde la perspectiva de los observadores suspendidos. Este vierbein está definido en cada punto del espacio-tiempo dado que los observadores, y consecuentemente, la fuente EPR están acelerados en el ecuador, manteniendo un radio constante, de tal manera que no están sujetos a la influencia del arrastre de coordenadas, como se estableció previamente. El experimento mental que ilustra esta situación se muestra en la Figura 3.4.

Ahora introduciremos otro tipo de observadores que están montados en el marco de referencia que esta rotando alrededor de un agujero negro debido al arrastre de coordenadas. A estos observadores se les conoce como *observadores con momento angular zero* o ZAMO (“zero angular momentum observers”).

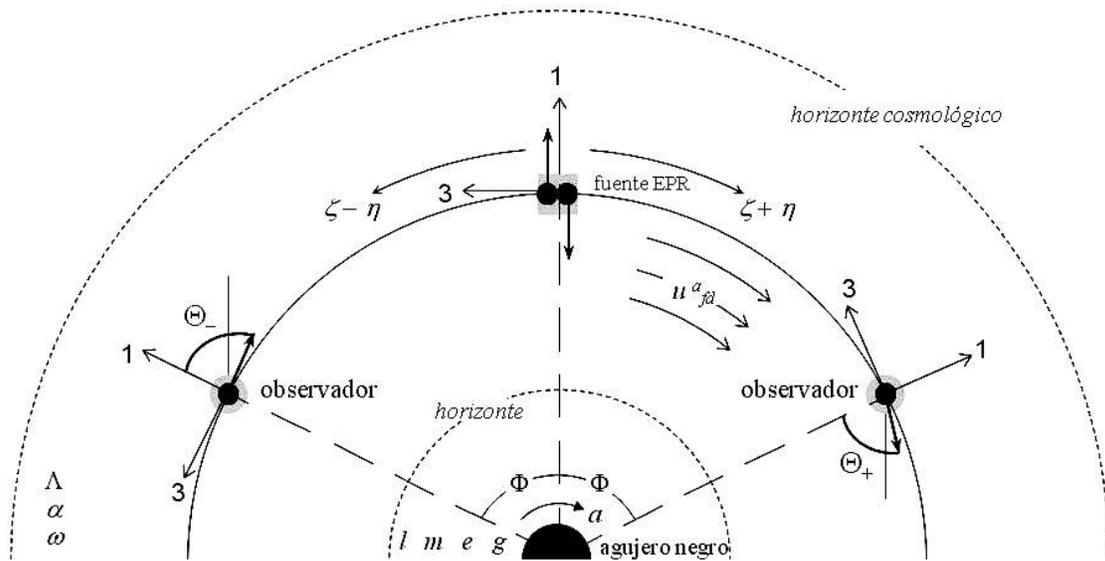


Figura 3.4: Experimento mental EPR en un espacio-tiempo con simetría axial. Dos observadores suspendidos (indicados por círculos grises) y una fuente EPR estática (suspendida también y señalada como un cuadrado gris) están localizadas en $\phi = \pm\Phi$ y 0 , respectivamente. La métrica con expansión y torsión de Plebański-Demiański, representa un espacio-tiempo descrito a través de siete parámetros: masa m , cargas eléctricas y magnéticas e , g , parámetro de rotación a , constante cosmológica Λ , parámetro tipo NUT l , parámetro de tipo aceleración α . Ambas partículas entrelazadas sienten un arrastre de coordenadas respecto a los observadores y abandonan la fuente con una velocidad local $\tanh(\zeta \pm \eta)$, donde el signo positivo indica a una partícula viajando en la misma dirección de rotación del agujero negro, y el signo negativo viajando en dirección opuesta al mismo.

Un observador ZAMO tiene una velocidad local descrita por la ecuación (3.46) desde la perspectiva de un observador suspendido. Además tiene una velocidad angular $\omega = -g_{03}/g_{33}$, manteniendo sus coordenadas r y θ constantes. Los eventos en un mismo tiempo t son simultáneos para ellos, lo que significa que sus líneas de mundo para este tipo de observadores son ortogonales para las superficie de t constante (es decir, $dx_\mu u_{fd}^\mu = 0$, y el momento angular de cualquier partícula se conserva en sus marcos de referencia locales inerciales [33, 80], de allí su nombre).

Debido a esta última característica, adoptaremos un observador ZAMO como un paso preliminar antes de calcular la velocidad local inercial total de las partículas entrelazadas medida por los observadores suspendidos.

Desde la perspectiva de un observador ZAMO, la velocidad local de las partículas entrelazadas esta dada por

$$u_{\text{EPR}}^a = (\cosh \zeta, 0, 0, \sinh \zeta), \quad (3.48)$$

donde $v_{\text{EPR}} = \tanh \zeta$ es la rapidez de las partículas en el marco de referencia inercial local del ZAMO.

Cuando las partículas dejan atrás la fuente EPR, su velocidad local u_{EPR}^a permanece constante para el marco de referencia de cualquier ZAMO con el mismo radio r y ángulo θ .

Ahora bien, desde el punto de vista de un observador suspendido, las partículas tienen una velocidad local inercial dada por la suma relativista de la velocidad del ZAMO (3.46) más la velocidad de las partículas medidas por el ZAMO (3.48). De esta manera definimos una velocidad total $\tanh \xi$, donde $\xi = \zeta \pm \eta$ es la rapidez total de la partícula en el marco de referencia inercial local (ver Fig. 3.4). El signo positivo corresponde a una partícula viajando en la dirección de rotación del agujero negro, mientras que el signo negativo es para la otra partícula que viaja en la dirección opuesta. De esta manera, los efectos de gravedad y de arrastre de coordenadas son tomados en cuenta.

Después que el par de partículas entrelazadas con espín- $\frac{1}{2}$ es generada por la fuente EPR, abandonan la fuente y siguen un camino circular alrededor del agujero negro. En coordenadas esféricas sobre el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, la velocidad de las partículas tienen dos componentes relevantes, la temporal y la espacial con coordenada ϕ a un radio r constante. Entonces, para los observadores suspendidos, el movimiento es medido por la velocidad propia con $v = \tanh \xi$. Esto es, $u^a = (\cosh \xi, 0, 0, \sinh \xi)$. Aplicando el vierbein (3.17) para transformar del marco local al marco general, la 4-velocidad general contravariante es

$$\begin{aligned} u^t &= e_0^t \cosh \xi + e_3^t \sinh \xi, \\ u^\phi &= e_3^\phi \sinh \xi, \end{aligned} \quad (3.49)$$

que satisface la condición de normalización $u^\mu u_\mu = -1$.

En la Sección 3.2.1 el arrastre de coordenadas se incorporará en la velocidad local inercial u^a , afectando la transformación de velocidad local previa y consecuentemente la velocidad total será $u_\pm^a = (\cosh \xi_\pm, 0, 0, \sinh \xi_\pm)$. Aquí, el argumento $\xi_\pm = \zeta \pm \eta$ contiene ζ , que está ahora vinculado a la velocidad del proceso EPR en lugar de ξ .

Para que las partículas describan una órbita circular, debemos aplicar una fuerza externa que compense tanto la fuerza centrífuga como la gravedad.¹⁰ La aceleración debido a esta fuerza externa se obtiene de la ecuación (3.22). Entonces, en el plano ecuatorial la aceleración se vuelve

$$\begin{aligned} a^r &= (e_0^t)^2 \Gamma_{00}^1 \cosh^2 \xi \\ &+ [(e_3^t)^2 \Gamma_{00}^1 + (e_3^\phi)^2 \Gamma_{33}^1 + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma_{03}^1] \sinh^2 \xi \\ &+ 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma_{03}^1 + e_3^t \Gamma_{00}^1) \sinh \xi \cosh \xi. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Una vez que la velocidad del arrastre de coordenadas es incorporada en la aceleración, es interesante notar que (3.47) no afecta la estructura de (3.50), esto quiere decir que las derivadas covariantes en la ecuación (3.22) actúan sólo sobre las coordenadas t y ϕ , y estas variables no están presentes en la velocidad del arrastre de coordenadas. En el resto de este trabajo, no habrá ningún otro lugar donde el arrastre de coordenadas afecten otros cálculos.

El cambio diferencial del marco de referencia local consiste en un impulso a lo largo del eje-1 y una rotación alrededor del eje-2 calculado por

$$\chi^a_b = -u^\nu \omega_\nu^a_b, \quad (3.51)$$

donde las conexiones de uno-formas $\omega_\nu^a_b$ fueron definidas en la ecuación (3.27).

En nuestra situación particular, las conexiones de interés están dadas por

$$\begin{aligned} \omega_t^0_1 &= e_1^r e_0^t \Gamma_{01}^0 + e_1^r e_0^\phi \Gamma_{01}^3, \\ \omega_t^1_3 &= e_3^t e^1_r \Gamma_{00}^1 + e_3^\phi e^1_r \Gamma_{03}^1, \\ \omega_\phi^0_1 &= e_1^r e^0_t \Gamma_{13}^0 + e_1^r e^0_\phi \Gamma_{13}^3, \\ \omega_\phi^1_3 &= e_3^t e^1_r \Gamma_{03}^1 + e_3^\phi e^1_r \Gamma_{33}^1. \end{aligned} \quad (3.52)$$

El impulso relevante está descrito por

$$\chi^0_1 = -e_0^t e_1^r (e^0_t \Gamma_{01}^0 + e^0_\phi \Gamma_{01}^3) \cosh \xi - e_1^r [e_3^\phi (e^0_t \Gamma_{13}^0 + e^0_\phi \Gamma_{13}^3) + e_3^t (e^0_t \Gamma_{01}^0 + e^0_\phi \Gamma_{01}^3)] \sinh \xi, \quad (3.53)$$

¹⁰En este trabajo no es relevante el tipo de mecanismo físico necesario para aplicar esta fuerza externa, ya sea un cohete espacial o algún tipo de interacción de campos de fuerza. Lo importante es enfatizar el hecho que se fuerza a las partículas a mantener una órbita circular por algún medio desconocido.

mientras que la rotación alrededor del eje-2 esta dado por

$$\chi^1_3 = -e_0^t e^1_r (e_3^t \Gamma^1_{00} + e_3^\phi \Gamma^1_{03}) \cosh \xi - e^1_r [e_3^t (e_3^t \Gamma^1_{00} + e_3^\phi \Gamma^1_{03}) + e_3^\phi (e_3^t \Gamma^1_{03} + e_3^\phi \Gamma^1_{33})] \sinh \xi. \quad (3.54)$$

La transformación de Lorentz infinitesimal en la ecuación (3.29) puede calcularse fácilmente agregando la rotación del 4-momento local $p^a(x) = mu^a(x)$ en el plano trazado por la 4-velocidad general y la aceleración, de tal manera que el impulso a lo largo del eje-1 y la rotación alrededor del eje-2 son, respectivamente

$$\begin{aligned} \lambda^0_1 &= e^1_r [(e_0^t)^2 \Gamma^1_{00} \cosh^2 \xi + ((e_3^t)^2 \Gamma^1_{00} + (e_3^\phi)^2 \Gamma^1_{33} + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma^1_{03}) \sinh^2 \xi \\ &\quad + 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma^1_{03} + e_3^t \Gamma^1_{00}) \sinh \xi \cosh \xi] \cosh \xi \\ &\quad - e_0^t e^1_r (e_0^t \Gamma^0_{01} + e_0^\phi \Gamma^3_{01}) \cosh \xi \\ &\quad - e^1_r [e_3^\phi (e_0^t \Gamma^0_{13} + e_0^\phi \Gamma^3_{13}) + e_3^t (e_0^t \Gamma^0_{01} + e_0^\phi \Gamma^3_{01})] \sinh \xi, \\ \lambda^1_3 &= -e^1_r [(e_0^t)^2 \Gamma^1_{00} \cosh^2 \xi + ((e_3^t)^2 \Gamma^1_{00} + (e_3^\phi)^2 \Gamma^1_{33} + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma^1_{03}) \sinh^2 \xi \\ &\quad + 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma^1_{03} + e_3^t \Gamma^1_{00}) \sinh \xi \cosh \xi] \sinh \xi \\ &\quad - e_0^t e^1_r (e_3^t \Gamma^1_{00} + e_3^\phi \Gamma^1_{03}) \cosh \xi \\ &\quad - e^1_r [e_3^t (e_3^t \Gamma^1_{00} + e_3^\phi \Gamma^1_{03}) + e_3^\phi (e_3^t \Gamma^1_{03} + e_3^\phi \Gamma^1_{33})] \sinh \xi. \end{aligned} \quad (3.55)$$

El cambio de espín se obtiene a partir de la ecuación (3.31). En particular, la rotación alrededor del eje-2 por un cierto ángulo se expresa como

$$\begin{aligned} \vartheta^1_3 &= -e^1_r [(e_0^t)^2 \Gamma^1_{00} \cosh^2 \xi + ((e_3^t)^2 \Gamma^1_{00} + (e_3^\phi)^2 \Gamma^1_{33} + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma^1_{03}) \sinh^2 \xi \\ &\quad + 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma^1_{03} + e_3^t \Gamma^1_{00}) \sinh \xi \cosh \xi] \sinh \xi \\ &\quad - e_0^t e^1_r (e_3^t \Gamma^1_{00} + e_3^\phi \Gamma^1_{03}) \cosh \xi \\ &\quad - e^1_r [e_3^t (e_3^t \Gamma^1_{00} + e_3^\phi \Gamma^1_{03}) + e_3^\phi (e_3^t \Gamma^1_{03} + e_3^\phi \Gamma^1_{33})] \sinh \xi \\ &\quad + \left(\frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + 1} \right) \{ e^1_r [(e_0^t)^2 \Gamma^1_{00} \cosh^2 \xi + ((e_3^t)^2 \Gamma^1_{00} + (e_3^\phi)^2 \Gamma^1_{33} + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma^1_{03}) \sinh^2 \xi \\ &\quad + 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma^1_{03} + e_3^t \Gamma^1_{00}) \sinh \xi \cosh \xi] \cosh \xi \\ &\quad - e_0^t e^1_r (e_0^t \Gamma^0_{01} + e_0^\phi \Gamma^3_{01}) \cosh \xi \\ &\quad - e^1_r [e_3^\phi (e_0^t \Gamma^0_{13} + e_0^\phi \Gamma^3_{13}) + e_3^t (e_0^t \Gamma^0_{01} + e_0^\phi \Gamma^3_{01})] \sinh \xi \}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Finalmente, del vierbein dado en la ecuación (4.6), se puede demostrar que, después de un poco de álgebra, la anterior expresión (3.56) puede ser expresada sólo en términos de los

componentes de la métrica

$$\vartheta^1_3 = -\frac{\cosh(2\xi)}{2g_{00}\sqrt{g_{11}[(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}]}} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) - \frac{\sinh(2\xi)}{4g_{00}[(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}]\sqrt{g_{11}}} \left[g_{00} \left(g_{33} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right) + 2g_{03} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \right]. \quad (3.57)$$

Entonces la matriz de rotación completa debido a las transformaciones de Lorentz infinitesimales está dada por

$$\vartheta^a_b(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta^1_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\vartheta^1_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

3.2 Correlación EPR y desigualdades de Bell

3.2.1 Correlación EPR

Tal y como se mencionó en la Sección 3.1, para el caso de espacio-tiempos curvos, el estado cuántico de una partícula $|p^a(x), \sigma; x\rangle$ se transforma bajo transformaciones de Lorentz locales como [29, 30]

$$U(\Lambda(x))|p^a(x), \sigma; x\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(1/2)}(W(x))|\Lambda p^a(x), \sigma'; x\rangle, \quad (3.59)$$

donde σ representa el estado de espín y $W^a_b(x) \equiv W^a_b(\Lambda(x), p(x))$ es la llamada rotación finita de Wigner local.

Si una partícula se mueve sobre la trayectoria $x^\mu(\tau)$ de $x^\mu_i(\tau_i)$ a $x^\mu_f(\tau_f)$, podemos iterar la ecuación (3.37) para transformaciones infinitesimales, donde el operador de tiempo $T = 1$, el término $\vartheta^a_b(x(\tau))$ se define por la ecuación (3.58) y $u^\phi d\tau = \Phi$. Después de un tiempo propio Φ/u_\pm^ϕ , cada partícula alcanza el observador correspondiente. Entonces, la rotación de Wigner se vuelve una rotación alrededor del eje-2

$$W^a_b(\pm\Phi, 0) = \exp\left(\int_0^\Phi \frac{\vartheta^a_b(x)}{\varphi^1_3(x)} d\phi\right) = \exp\left(\frac{\Phi}{u^\phi} \vartheta^a_b\right). \quad (3.60)$$

Entonces, por la expansión de series para la matriz tenemos que

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{\Phi}{u^\phi}\vartheta^a{}_b\right) &= \mathbb{I} + \frac{\Phi\vartheta^a{}_b}{u^\phi} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\Phi\vartheta^a{}_b}{u^\phi}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Phi\vartheta^a{}_b}{u^\phi}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Phi\vartheta^a{}_b}{u^\phi}\right)^4 + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi} & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi} & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi} & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 + \dots
\end{aligned} \tag{3.61}$$

De tal manera que sumando término a término cada elemento de la matriz obtenemos

$$\exp\left(\frac{\Phi}{u^\phi}\vartheta^a{}_b\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right)^4 + \dots & 0 & \left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right)^5 + \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right)^3 - \frac{1}{5!}\left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right)^5 + \dots & 0 & 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\Phi\vartheta^1{}_3}{u^\phi}\right)^4 + \dots \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

Por lo tanto, podemos identificar la serie de potencias del seno y del coseno, esto es,

$$W^a{}_b(\pm\Phi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & 0 & \pm \sin \Theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix}, \tag{3.63}$$

donde el ángulo de rotación esta dado por $\Theta = \Phi\vartheta^1{}_3/u^\phi$ y $\vartheta^1{}_3$ de la ecuación (3.57), es decir

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{\Phi}{2\sqrt{-(g_{00})^3g_{11}}} \left\{ \left(g_{03}\frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00}\frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \frac{\cosh(2\xi)}{\sinh(\xi)} \right. \\
&\quad \left. + \left[g_{00} \left(g_{00}\frac{\partial g_{33}}{\partial r} - g_{33}\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right) + 2g_{03} \left(g_{03}\frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00}\frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \right] \frac{\cosh(\xi)}{\sqrt{(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}}} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

El argumento total Φ se obtiene integrando $\delta\phi = u^\phi d\tau$, y en este caso, el operador T no se necesita porque $\vartheta^a{}_b$ es independiente del tiempo durante el movimiento. De tal manera que, la velocidad u^ϕ representa una rotación trivial alrededor del eje-2, esto es, $u^\phi = \varphi^1{}_3 = -\varphi^3{}_1$,

dado que el espacio-tiempo curvo define el transporte paralelo necesario para comparar los sistemas de referencia locales inerciales en dos puntos diferentes.

En la Sección 3.1.5 vimos que $\tanh \xi = \tanh(\zeta \pm \eta)$, donde el signo \pm depende en la dirección de movimiento de cada partícula. Entonces, podemos definir un 4-momento de la partícula vista por cada observador suspendido. De tal manera, el estado singlete de espín para las partículas entrelazadas está dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|p_+^a, \uparrow; 0\rangle |p_-^a, \downarrow; 0\rangle - |p_+^a, \downarrow; 0\rangle |p_-^a, \uparrow; 0\rangle], \quad (3.65)$$

donde el signo en el momento lineal se refiere a la dirección de movimiento de cada partícula y las flechas corresponden a la dirección hacia arriba o hacia abajo del espín, como se mencionó en la Sección ???. Para simplificar la notación aquí se ha evaluado el ángulo azimutal como $\phi = 0$ en el argumento de la posición.

Entonces, la rotación de Wigner de la ecuación (3.37) puede escribirse como

$$W^a_b(\pm\Phi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta_{\pm} & 0 & \pm \sin \Theta_{\pm} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp \sin \Theta_{\pm} & 0 & \cos \Theta_{\pm} \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Una vez más, el signo del ángulo en Θ_{\pm} depende si el movimiento de las partículas entrelazadas es a favor (o en contra) al arrastre de coordenadas. Así tenemos

$$\begin{aligned} \Theta_+ &= \frac{\Phi}{2\sqrt{-(g_{00})^3 g_{11}}} \left\{ \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \frac{\cosh(2\zeta + 2\eta)}{\sinh(\zeta + \eta)} \right. \\ &\quad \left. + \left[g_{00} \left(g_{00} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} - g_{33} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right) + 2g_{03} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \right] \frac{\cosh(\zeta + \eta)}{\sqrt{(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}}} \right\}, \\ \Theta_- &= \frac{\Phi}{2\sqrt{-(g_{00})^3 g_{11}}} \left\{ \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \frac{\cosh(2\zeta - 2\eta)}{\sinh(\zeta - \eta)} \right. \\ &\quad \left. + \left[g_{00} \left(g_{00} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} - g_{33} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right) + 2g_{03} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \right] \frac{\cosh(\zeta - \eta)}{\sqrt{(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

La rotación de Wigner requerida está dada en la siguiente forma

$$D_{\sigma'\sigma}^{(1/2)}(W(\pm\Phi, 0)) = \exp\left(\mp i \frac{\sigma_y}{2} \Theta_{\pm}\right), \quad (3.68)$$

donde σ_y es la matriz de Pauli.

Entonces, cada estado de las partículas se transforma a través de la rotación de Wigner correspondiente, y el nuevo estado cuántico está dado por $|\psi'\rangle = W(\pm\Phi)|\psi\rangle$. En consecuencia, para cada marco de referencia inercial local con su correspondiente posición $\phi = \Phi$ y $-\Phi$, los estados de las partículas pueden escribirse como

$$|p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi'\rangle = \cos \frac{\Theta_{\pm}}{2} |p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle \pm \sin \frac{\Theta_{\pm}}{2} |p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle, \quad (3.69)$$

$$|p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi'\rangle = \mp \sin \frac{\Theta_{\pm}}{2} |p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle + \cos \frac{\Theta_{\pm}}{2} |p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle. \quad (3.70)$$

Así, el estado entrelazado está descrito por la combinación

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{\Theta_+ + \Theta_-}{2} \right) (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle |p_-^a, \downarrow; -\Phi\rangle - |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle |p_-^a, \uparrow; -\Phi\rangle) \right. \\ \left. + \sin \left(\frac{\Theta_+ + \Theta_-}{2} \right) (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle |p_-^a, \uparrow; \Phi\rangle + |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle |p_-^a, \downarrow; -\Phi\rangle) \right]. \quad (3.71)$$

Ahora bien, para eliminar este efecto espurio de la evidente rotación del marco de referencia inercial local que conducen a $\pm\Phi$, se tiene que compensar la rotación. Esto se puede lograr realizando una segunda transformación

$$|p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi''\rangle = \cos \frac{\Phi}{2} |p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle \pm \sin \frac{\Phi}{2} |p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle, \quad (3.72)$$

$$|p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi''\rangle = \mp \sin \frac{\Phi}{2} |p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle + \cos \frac{\Phi}{2} |p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle. \quad (3.73)$$

Es fácil ver que este estado cuántico se lee como

$$|\psi''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \Delta (|p_+^a, \uparrow; \Phi'\rangle |p_-^a, \downarrow; -\Phi'\rangle - |p_+^a, \downarrow; \Phi'\rangle |p_-^a, \uparrow; -\Phi'\rangle) \\ + \sin \Delta (|p_+^a, \uparrow; \Phi'\rangle |p_-^a, \uparrow; \Phi'\rangle + |p_+^a, \downarrow; \Phi'\rangle |p_-^a, \downarrow; -\Phi'\rangle)]. \quad (3.74)$$

Donde $\Delta = (\Theta_+ + \Theta_-)/2 - \Phi$, que se puede simplificar como [81],

$$\Delta = \Phi \left[(2A \sinh \zeta + B \cosh \zeta) \cosh \eta - A \frac{\sinh \zeta \cosh \eta}{\cosh^2 \eta - \cosh^2 \zeta} - 1 \right], \quad (3.75)$$

donde

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2\sqrt{-(g_{00})^3 g_{11}}} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right), \\
 B &= \frac{1}{2\sqrt{-(g_{00})^3 g_{11} [(g_{03})^2 - g_{00} g_{33}]}} \left[g_{00} \left(g_{00} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} - g_{33} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right) + 2g_{03} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.76}$$

El ángulo de precesión de espín Δ contiene los efectos gravitacionales, de aceleración y arrastre de coordenadas que deterioran la anti-correlación perfecta de las partículas entrelazadas [31]. Se puede observar en la ecuación (3.74) que el estado de espín singlete se mezcla con el estado triple, lo cual es fácil de comprobar cuando $\Delta \rightarrow 0$, es decir, en el espacio-tiempo plano a bajas velocidades. Esto es debido a que mientras el estado singlete es invariante bajo rotaciones espaciales, no lo es bajo transformaciones de Lorentz (3.55). Es evidente que esta fórmula puede aplicarse a cualquier agujero negro con simetría axial, y en el siguiente capítulo se utilizará para las soluciones Tipo D de las ecuaciones de Einstein.

Como se señala en [31], este deterioro de la correlación perfecta es una consecuencia de la diferencia manifiesta entre el elemento de la matriz de rotación ϑ^1_3 y la rotación trivial φ^1_3 . Es importante notar que el entrelazamiento es aún invariante bajo operaciones unitarias locales, y esto no significa descartar las correlaciones no-locales. Dado que los efectos relativistas surgen de la aceleración, la gravedad y el arrastre de coordenadas, la anti-correlación perfecta aún puede utilizarse para la comunicación cuántica, rotando la dirección de medición alrededor del eje-2 un ángulo $\mp\Theta$ en el marco de referencia inercial local del observador suspendido. El transporte paralelo en relatividad general (3.51) no dan la dirección para mantener la anti-correlación perfecta, porque los elementos de la matriz de rotación (3.58) y las componentes del cambio en el marco de referencia inercial local (3.51) no son iguales.

3.2.2 Desigualdades de Bell

En la Sección anterior se vió la importancia de los observadores suspendidos como un sistema de referencia para la medición de las transformaciones de Lorentz infinitesimales y subsecuentemente la rotación de Wigner, para así obtener el ángulo de precesión de espín.

Además, es desde la perspectiva de estos observadores que la velocidad de las partículas entrelazadas es medida en primera instancia. Entonces, los observadores suspendidos en principio pueden ajustar su sistema local de coordenadas para así medir la anti-correlación perfecta del espín de las partículas entrelazadas. Todo lo que tienen que hacer es calcular la precesión de espín (3.75) para una posición en particular r donde están estos observado-

res colocados. Después pueden rotar sus instrumentos de medición en contra del ángulo Θ calculado, para compensar los efectos gravitacionales y la dinámica del espacio-tiempo. Así, pueden restablecer la comunicación cuántica por ejemplo.

Sin embargo, como veremos, cerca del horizonte del agujero negro, cerca del límite estático y de la región asintótica definida por el acoplamiento del arrastre de coordenadas, este ángulo de precesión Δ puede oscilar tan rápido, haciendo imposible cualquier compensación, además del hecho que cualquier diminuta variación de la posición Φ será traducida en una incertidumbre muy grande en el cálculo de Δ , esto es

$$\delta\Theta = \delta\Phi \left| 1 + \frac{\Delta}{\Phi} \right|. \quad (3.77)$$

Y entonces, para que los observadores puedan ajustar la correlación $\delta\Theta$ EPR, ésta debe ser al menos menor que π [31], debiendo así satisfacer

$$\delta\Phi < \pi \left| 1 + \frac{\Delta}{\Phi} \right|^{-1}. \quad (3.78)$$

De esta manera, se obtiene un decremento en el grado de violación de la desigualdad de Bell debido a los efectos dinámicos y gravitacionales del espacio tiempo, definido por

$$\langle Q'S' \rangle + \langle R'S' \rangle + \langle R'T' \rangle - \langle Q'T' \rangle = 2\sqrt{2} \cos^2 \Delta, \quad (3.79)$$

donde la rotación trivial del marco de referencia inercial local $\pm\Phi$ se ha descartado, y las componentes de espín de una partícula son medidas en las direcciones

$$\begin{aligned} Q' &= (\cos \Phi, 0, -\sin \Phi), \\ R' &= (0, 1, 0), \\ S' &= \left(\frac{-\cos \Phi}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin \Phi}{\sqrt{2}} \right), \\ T' &= \left(\frac{\cos \Phi}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin \Phi}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Entonces, los observadores suspendidos deben tomar en cuenta todos los efectos previamente revisados en las secciones anteriores, esto es, la gravedad, la aceleración y el arrastre de coordenadas. Tal y como lo demuestra Terashima y Ueda [31], la componente de una partícula en $\phi = \Phi$ debe ser medido en la dirección $(\cos \Theta, 0, -\sin \Theta)$ o también en la dirección $(0, 1, 0)$ del marco de referencia inercial local.

Por el contrario, el espín de la otra partícula en $\phi = -\Phi$ debe ser medido en la dirección

$(-\cos \Theta, -1, -\sin \Theta)/\sqrt{2}$, o bien en la dirección $(\cos \Theta, -1, \sin \Theta)/\sqrt{2}$.

Es importante enfatizar una vez más que si los observadores están localizados cerca del horizonte o del límite asintótico estático, deberá ser casi imposible mantener sus posiciones en Φ , y una pequeña incertidumbre en $\delta\Phi$ se verá como una incertidumbre de $\delta\Theta$ en la ecuación (3.77). Este error en Θ disminuye el grado de violación en la desigualdad de Bell como $2\sqrt{2}\cos^2\delta\Theta$, y este error debería ser mayor a 2 para restaurar la máxima violación de la desigualdad. De tal manera que, las cantidades de la ecuación (3.77), $\delta\Phi$ y r deben ser ajustada para al menos tener

$$\delta\Phi < \sqrt{2} \left| 1 + \frac{\Delta}{\Phi} \right|^{-1}. \quad (3.81)$$

Si estas cantidades no son ajustadas, la incertidumbre en la posición Φ deberá ser alta y no será posible de compensar en las dirección de medición de los instrumentos de medición de los observadores para extraer así la máxima violación de las desigualdades de Bell. Contrario a la ecuación (3.78) que sólo toma en cuenta la precesión de espín, la ecuación (3.81) incluye la posición de los observadores para obtener una medición confiable para cualquier uso adecuado de la anti-correlación perfecta EPR.

En la Sección 4.5 se verán los efectos de la curvatura del espacio-tiempo sobre la anti-correlación perfecta y el ángulo de precesión.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Espacio-tiempo de Plebański-Demiański

La familia completa de soluciones en expansión del espacio-tiempo original de Plebański-Demiański [34] está caracterizado por siete parámetros donde no todos están relacionados directamente a parámetros físicos de un agujero negro. La reciente revisión a esta métrica en la referencia [39, 40], permitió presentar la métrica de Plebański-Demiański en la forma de Boyer-Lindquist en términos de parámetros físicos, a saber: un parámetro tipo masa m , una constante cosmológica Λ , un parámetro tipo rotación a , un parámetro tipo NUT l , las cargas eléctricas y magnéticas e y g , y un parámetro tipo aceleración α (o parámetro de torsión ω).

4.1.1 Métrica y Tetrada

El elemento de línea puede representarse en coordenadas reales que describe el espacio-tiempo con constante cosmológica no nula de una masa en rotación y acelerada con tres tipos de carga: eléctrica, magnética y gravitomagnética. Esta métrica esta dada por

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} \left(-\frac{D}{\rho^2} (dt - (a \sin^2 \theta + 2l(1 - \cos \theta))d\phi)^2 + \frac{\rho^2}{D} dr^2 + \frac{P}{\rho^2} (adt - (r^2 + (a + l)^2)d\phi)^2 + \rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{P} d\theta^2 \right), \quad (4.1)$$

con

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= r^2 + (l + a \cos \theta)^2, \\
\Omega &= 1 - \frac{\alpha}{\omega}(l + a \cos \theta)r, \\
P &= \sin^2 \theta(1 - a_3 \cos \theta - a_4 \cos^2 \theta), \\
D &= (\kappa + e^2 + g^2) - 2mr + \epsilon r^2 - 2n \frac{\alpha}{\omega} r^3 - \left(\frac{\alpha^2}{\omega^2} \kappa + \frac{\Lambda}{3} \right) r^4,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

y donde

$$\begin{aligned}
a_3 &= 2a \frac{\alpha}{\omega} m - 4al \frac{\alpha^2}{\omega^2} (\kappa + e^2 + g^2) - 4 \frac{\Lambda}{3} al, \\
a_4 &= -a^2 \frac{\alpha^2}{\omega^2} (\kappa + e^2 + g^2) - \frac{\Lambda}{3} a^2, \\
\epsilon &= \frac{\kappa}{a^2 - l^2} + 4l \frac{\alpha}{\omega} m - (a^2 + 3l^2) \left(\frac{\alpha^2}{\omega^2} (\kappa + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right), \\
n &= \frac{\kappa l}{a^2 - l^2} - (a^2 - l^2) \frac{\alpha}{\omega} m + (a^2 - l^2) l \left(\frac{\alpha^2}{\omega^2} (\kappa + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right), \\
\kappa &= \frac{1 + 2l \frac{\alpha}{\omega} m - 3l^2 \frac{\alpha^2}{\omega^2} (e^2 + g^2) - l^2 \Lambda}{\frac{1}{a^2 - l^2} + 3l^2 \frac{\alpha^2}{\omega^2}}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Adicionalmente, para el resto de este trabajo consideraremos a los parámetros físicos y a la métrica de espacio-tiempo expresados en unidades geométricas normalizadas, esto es, definiendo la constante de gravitación universal como $G = 1$ y la velocidad de la luz como $c = 1$.

Para simplificar y dando continuidad al Capítulo 3, es muy conveniente trabajar la ecuación (4.1) como el elemento de línea de la ecuación (3.15), esto es:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{03} dt d\phi + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\phi^2, \tag{4.4}$$

con un elemento no-diagonal inducido por la simetría axial de la métrica, el cual es:

$$\begin{aligned}
g_{00} &= \frac{-D + Pa^2}{\Omega^2 \rho^2}, \\
g_{0i} dx^i &= \frac{1}{\Omega^2} \left[\frac{D}{\rho^2} (a \sin^2 \theta + 2l(1 - \cos \theta)) - \frac{P}{\rho^2} a (r^2 + (a + l)^2) \right] d\phi, \\
g_{ij} dx^i dx^j &= \frac{\rho^2}{\Omega^2 D} dr^2 + \rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{\Omega^2 P} d\theta^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left[-\frac{D}{\rho^2} (a \sin^2 \theta + 2l(1 - \cos \theta))^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{P}{\rho^2} (r^2 + (a + l)^2)^2 \right] d\phi^2.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Usaremos esta presentación de la métrica más adelante para esta y la próxima sección, y en este trabajo se adopta la signatura $(-1, 1, 1, 1)$, esto es, $\eta_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$ es la métrica de Minkowski.

Con el fin de describir el movimiento de las partículas en rotación en un espacio-tiempo curvo, el marco de referencia local inercial está definido por el vierbein seleccionado como [52]:

$$\begin{aligned}
e_0^\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}(1, 0, 0, 0), & e^0_\mu &= \sqrt{-g_{00}} \left(1, 0, 0, \frac{g_{03}}{g_{00}} \right), \\
e_1^\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(0, 1, 0, 0), & e^1_\mu &= \sqrt{g_{11}}(0, 1, 0, 0), \\
e_2^\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}(0, 0, 1, 0), & e^2_\mu &= \sqrt{g_{22}}(0, 0, 1, 0), \\
e_3^\mu(x) &= \sqrt{\frac{-g_{00}}{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}} \left(-\frac{g_{03}}{g_{00}}, 0, 0, 1 \right), & e^3_\mu &= \sqrt{\frac{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}{-g_{00}}}(0, 0, 0, 1.),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde μ corre sobre las coordenadas de espacio-tiempo $\{t, r, \theta, \phi\}$. Es fácil demostrar que este vierbein satisface las condiciones estándar de la ecuación (3.17).

4.1.2 Precesión de espín

En la presente sección se estudia el ángulo de precesión de espín de un sistema de partículas entrelazadas de espín- $\frac{1}{2}$ en el espacio-tiempo de un agujero negro descrito por la métrica de Plebański-Demiański (4.1) con arrastre de coordenadas (3.47).

Del último capítulo, es fácil demostrar que los coeficientes de las funciones A y B de la ecuación (3.76) sobre el ecuador ($\theta = \pi/2$) son

$$\begin{aligned}
A_{\text{PD}} &= \frac{a\sqrt{D}}{2(r^2 + l^2)(D - a^2)^{3/2}} [(r^2 + l^2)D' - 2r(D - a^2)], \\
B_{\text{PD}} &= \frac{1}{2(r^2 + l^2)(D - a^2)^{3/2}} [4Dr(D - a^2) - (a^2r^2 + Dr^2 + Dl^2 + a^2l^2)D'],
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde

$$D' = \frac{\partial D}{\partial r} = -4 \left(\frac{\alpha^2 \kappa}{\omega^2} + \frac{\Lambda}{3} \right) r^3 - \frac{6n\alpha r^2}{\omega} + 2\epsilon r - 2m. \tag{4.8}$$

Por otra parte, la velocidad de arrastre de coordenadas del marco de referencia local inercial está dado por

$$\cosh \eta_{\text{PD}} = (r^2 + l^2) \sqrt{\frac{D}{(D - a^2) [(r^2 + a^2 + 2al + l^2)^2 - (a + 2l)^2 D]}}, \tag{4.9}$$

Entonces, los coeficientes A_{PD} , B_{PD} , el ángulo de precesión de espín Δ_{PD} y el arrastre de coordenadas $\cosh \eta_{\text{PD}}$ están finalmente escritos en términos de los 7 parámetros derivados de

la métrica en donde tienen una interpretación física directa. Es bien sabido por las referencias [39, 40] que la métrica (4.1) representa un par de agujeros negros acelerados y con rotación, parámetro NUT, constante cosmológica, carga y masa. También se sabe que en esta situación hay dos soluciones de espacio-tiempo muy diferentes. El primer caso es para $|l| \geq |a|$, la cual tiene una curvatura no-singular, y da como resultado una *solución acelerada NUT con rotación*. También corresponde al lado derecho del diagrama 1 de la referencias [39, 40]. Para el segundo caso con $|l| \leq |a|$ tenemos un *agujero negro acelerado y en rotación* que incluye también el resto de los parámetros. El tipo de soluciones derivadas aquí corresponden al lado izquierdo y son de naturaleza singular. Se puede demostrar que los coeficientes A_{PD} , B_{PD} y Δ_{PD} tienen los límites asintóticos correctos.

A continuación analizaremos el ángulo de precesión asociado de estas dos ramificaciones de la soluciones Tipo D de las ecuaciones de Einstein. Iniciaremos con la ramificación derecha y posteriormente pasaremos a la izquierda. La contribución más evidente al ángulo de precesión viene del horizonte externo, los horizontes cosmológicos y de aceleración (que se obtienen de la condición del polinomio de grado cuatro en D de los parámetros (4.2) que tiene al menos dos raíces reales que definen un horizonte interno y uno externo. Los otros términos que se desvanecen definen los horizontes cosmológicos y de aceleración). Veremos que la mayor contribución a Δ_{PD} proviene precisamente de estos horizontes. Además de la contribución del horizonte, se tendrá una posible contribución no-trivial adicional, proviniedo del arrastre de coordenadas en $\cosh \eta_{PD} = \cosh \zeta$ en la ecuación (3.75). Con el fin de dar cuenta a detalle del comportamiento del entrelazamiento en estos horizontes se revisará en las siguientes secciones los diferentes casos límite.

4.2 Resultados previos: espacio-tiempo de Schwarzschild

Tal y como Terashima y Ueda [31] demostraron para un agujero negro de Schwarzschild, la aceleración y la gravitación deterioran la correlación EPR para partículas en un movimiento circular en el plano ecuatorial. Aquí resumimos sus resultado describiéndolos en cuatro regiones importantes relativas al agujero negro representado en la Fig. 4.1.

Region I: $r \rightarrow \infty, v \rightarrow 0$, o muy alejado del agujero negro (sin efectos gravitacionales) y partículas estáticas. Esta región corresponde al límite no-relativista, donde no hay correcciones a la mecánica cuántica y donde EPR propusieron su experimento mental [8]. El horizonte de precesión desaparece ($\Delta = 0$) y tenemos la máxima violación en la desigualdad de Bell.

- Region II: $r \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 1$ todavía se está alejado del agujero negro, pero las correcciones relativistas deben ser tomadas en cuenta, que también fueron estudiadas por Terashima y Ueda en [76]. El ángulo Δ es positivo y se vuelve infinito. No es posible mantener la anti-correlación perfecta y las partículas no pueden usarse para la comunicación cuántica.
- Region III: $r \rightarrow r_s$, donde $r_s = 2m$ el radio Schwarzschild (horizonte de eventos). Independientemente de la velocidad local inercial de las partículas, la precesión del ángulo de espín se vuelve infinita ($\Delta \rightarrow -\infty$). El observador estático no puede extraer la correlación EPR para las partículas en órbita a menos que tengan una precisión infinita en sus propias posiciones. Para explotar la correlación EPR sobre y más allá del horizonte, los observadores deben escoger una 4-velocidad y un vierbein no-singular al horizonte, y entonces los observadores deben caer dentro del agujero negro juntos con las partículas.
- Region IV: Aunque la aceleración y gravedad deterioran la correlación EPR como Terashima y Ueda demostraron, aún es posible encontrar una combinación de velocidad local inercial y posición con respecto al agujero negro que mantiene la anti-correlación perfecta. Los autores definieron una trayectoria donde a un radio $r = r_0$ el ángulo Δ se hace nulo. Identificaremos esta trayectoria como una región adicional y está situada entre las otras tres regiones.

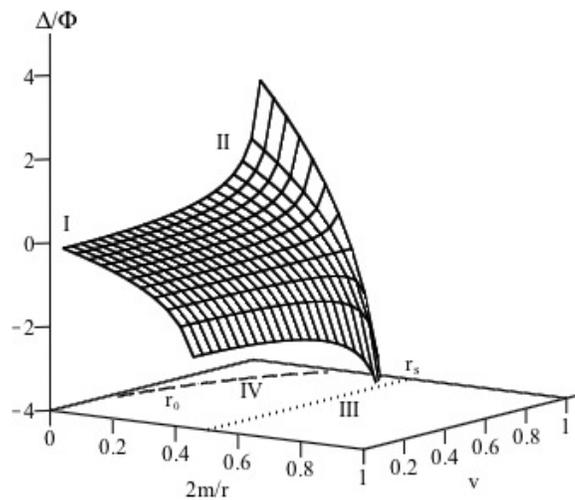


Figura 4.1: El ángulo Δ/Φ para un agujero negro de Schwarzschild en función de $2m/r$ y v , que es asintótico al horizonte de eventos $r_s = 2m$, indicado por la línea punteada. La línea quebrada representa la trayectoria $r = r_0$ donde la precesión de espín Δ desaparece.

Entre estas regiones uno puede encontrar valores para el ángulo (positivo o negativo) Δ , que deterioran la anti-correlación perfecta en las direcciones que serían las mismas si el espacio-tiempo fuera plano.

4.3 Ejemplos: Agujeros negros no-acelerados de Kerr-Newman-(Anti)de Sitter-NUT

El espacio-tiempo de Kerr-Newman-de Sitter-NUT (KNdSNUT) esta incluido en esta larga familia de las soluciones Tipo D. El espacio-tiempo KNdSNUT representa un agujero negro no-acelerado con masa m , cargas eléctricas y magnéticas e y g , un parámetro de rotación a y un parámetro NUT l en un fondo de anti-de Sitter o de Sitter con constante cosmológica no-cero Λ .

Después de fijar el parámetro de aceleración igual a cero ($\alpha = 0$), los parámetros en la ecuación (4.2) se vuelven

$$\begin{aligned}
 a_3 &= -4\frac{\Lambda}{3}al, \\
 a_4 &= -\frac{\Lambda}{3}a^2, \\
 \kappa &= (1 - l^2\Lambda)(a^2 - l^2), \\
 \epsilon &= 1 - \left(\frac{1}{3}a^2 + 2l^2\right)\Lambda, \\
 n &= 1 + \frac{1}{3}(a^2 - kl^2)l\Lambda.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Entonces, la métrica (4.1) se reduce a

$$ds^2 = -\frac{D}{\rho^2}[dt - (a \sin^2 \theta + 4l \sin^2 \frac{\theta}{2})d\phi]^2 + \frac{\rho^2}{D}dr^2 + \frac{P}{\rho^2}[adt - (r^2 + (a+l)^2 d\phi)]^2 + \frac{\rho^2}{P} \sin^2 \theta d\theta^2, \tag{4.11}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \rho^2 &= r^2 + (l + a \cos \theta)^2, \\
 P &= \sin^2 \theta \left(1 + \frac{4}{3}\Lambda al \cos \theta + \frac{1}{3}\Lambda a^2 \cos^2 \theta \right), \\
 D &= a^2 - l^2 + e^2 + g^2 - 2mr + r^2 - \Lambda \left[(a^2 - l^2)l^2 + \left(\frac{1}{3}a^2 + 2l^2\right)r^2 + \frac{1}{3}r^4 \right].
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Podemos notar que conforme $D \rightarrow 0$, los coeficientes de la métrica $g_{11} \rightarrow \infty$ y la métrica empieza a ser impredecible de forma asintótica. Esta aparente singularidad surge porque el sistema de coordenadas no es válido en el radio r_+ , que resuelve la ecuación $D = 0$. Esta singularidad puede ser removida por una selección diferente de coordenadas. En este trabajo

consideraremos partículas que sólo orbitan el agujero negro y no removeremos la singularidad considerando a r_+ como el horizonte de eventos. Después, veremos que el horizonte tiene relevancia cuando el ángulo de precesión de espín se calcula.

Para el espacio-tiempo de Kerr-Newman-de Sitter-NUT, el ángulo de precesión de espín Δ_{KNdSNUT} de la ecuación (3.75) tiene coeficientes

$$\begin{aligned} A_{\text{KNdSNUT}} &= \frac{a\sqrt{D}}{2(r^2 + l^2)(D - a^2)^{3/2}} [(r^2 + l^2)D' - 2r(D - a^2)], \\ B_{\text{KNdSNUT}} &= \frac{1}{2(r^2 + l^2)(D - a^2)^{3/2}} [4Dr(D - a^2) - (a^2r^2 + Dr^2 + Dl^2 + a^2l^2)D'], \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde

$$D' = \frac{\partial D}{\partial r} = -\frac{4}{3}\Lambda r^3 + \left[2 - \Lambda \left(\frac{2}{3}a^2 + 4l^2 \right) \right] r - 2m, \quad (4.14)$$

y la velocidad de arrastre de coordenadas local inercial relevante de las ecuaciones (3.46) y (3.47) pueden expresarse como

$$\cosh \eta_{\text{KNdSNUT}} = (r^2 + l^2) \sqrt{\frac{D}{(D - a^2)[(r^2 + a^2 + 2al + l^2)^2 - (a + 2l)^2 D]}}. \quad (4.15)$$

En este punto es fácil recuperar la precesión de espín de Schwarzschild al fijar $a, e, g, l, \Lambda = 0$. Entonces los coeficientes y el arrastre de coordenadas se reducen a $A = 0$, $B = (r - 3m)/\sqrt{(r^2 - 2m)}$ y $\cosh \eta = 1$. Después de un poco de álgebra, la expresión (3.75) se reduce a

$$\Delta_{\text{S}} = \Phi \left(\frac{r - 3m}{\sqrt{r^2 - 2mr}} \cosh \zeta - 1 \right), \quad (4.16)$$

que es precisamente la ecuación (51) de la referencia [31].

En las siguientes subsecciones analizaremos la precesión de espín en diferentes casos límites en los parámetros de la solución general. Las gráficas que se presentan a continuación son adimensionales, (salvo que se especifique lo contrario), los parámetros presentados son tazas de cambio del parámetro relevante con respecto a la masa m . Entonces el parámetro de masa se utiliza como una referencia para expresar el cambio y la relación del momento angular, representado para la carga eléctrica e/m y a/m para el momento angular. Uno de los ejes graficados será $v = v_{\text{EPR}}$ para la velocidad local inercial debido al proceso EPR y otro será $0 < m/r < 1$ para la distancia, con 0 correspondiendo a la distancia r en el infinito y 1 para $r = m$, que es la menor distancia alcanzable para un agujero negro extremo.

4.3.1 Reissner-Nordström

Este caso corresponde a un agujero negro de Schwarzschild con cargas no nulas e y g , después de fijar a cero los parámetros l , Λ y a . El espacio-tiempo de Reissner-Nordström es también una solución esféricamente simétrica.

El ángulo de precesión de espín se reduce entonces a

$$\Delta_{\text{RN}} = \Phi \left(\frac{r^2 - 3mr + 2e^2 + 2g^2}{r\sqrt{r^2 - 2mr + e^2 + g^2}} \cosh \zeta - 1 \right), \quad (4.17)$$

donde las funciones A y B son

$$A_{\text{RN}} = 0, \quad B_{\text{RN}} = \frac{r^2 - 3mr + 2e^2 + 2g^2}{r\sqrt{r^2 - 2mr + e^2 + g^2}} \quad (4.18)$$

y $\cosh \eta_{\text{RN}} = 1$.

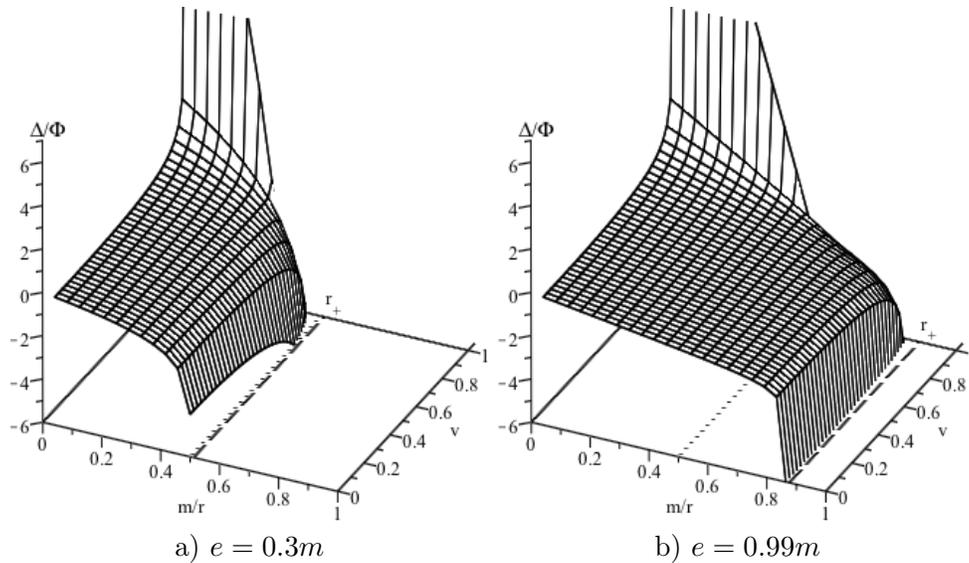


Figura 4.2: La precesión del ángulo Δ/Φ para un agujero negro de Reissner-Nordström para dos valores de carga e . Son asintóticas al horizonte $r = r_+$ (línea quebrada), que se encuentra debajo del radio de Schwarzschild $r_s = 2m$ (línea punteada).

El ángulo Δ de la ecuación (4.18) se gráfica en la Fig. 4.2 como una función de la distancia y velocidad local $v = v_{\text{EPR}}$. Cuando $m/r \rightarrow 0$ el experimento se localiza muy alejado del agujero negro ($r \rightarrow \infty$), y $m/r = 1$ corresponde a la distancia límite que se puede alcanzar para un agujero negro extremo con carga $e = m$, donde, para simplificar, e representa la suma de ambas cargas, la eléctrica y la magnética. Cuando $v = 0$ las partículas están estáticas en

la fuente EPR y para $v \rightarrow 1$ éstas son partículas ultra-relativista. En la Fig. 4.2 el ángulo de precesión está graficado independientemente del ángulo de posición del observador Φ . Para $e = 0$ recuperamos los resultados de la precesión de espín para un agujero negro de Schwarzschild y el horizonte es $r = 2m$.

Las gráficas son muy similares al caso de Schwarzschild (comparar con la Fig. 4.1). Efectos análogos e interesantes de la precesión de espín se pueden comparar con [31] al utilizar la regiones previamente revisadas:

- Region I: Esta situación es idéntica al agujero negro de Schwarzschild. El espacio-tiempo es el de Minkowski y $\Delta \rightarrow 0$.
- Region II: Muy alejado del horizonte r_+ con $v \neq 0$ recuperamos la precesión de espín encontrada en relatividad especial y la gráfica es asintótica (ver Fig. 4.2), esto es $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta = \cosh \zeta - 1$ en concordancia con [76].
- Region III: Un nuevo efecto ocurre cerca del horizonte del agujero negro. Este efecto corresponde al corrimiento del horizonte comparado con el caso de Schwarzschild, de $r = 2m$ a $r = r_+ = m + \sqrt{m^2 - e^2}$. Conforme la carga e aumenta, se alcanzan valores de r debajo del horizonte de Schwarzschild, lo que significa que podemos calcular valores de Δ en $r = r_+ < 2m$ (ver Fig. 3.4 donde el horizonte estaría localizado en $r = 2m$). El menor valor de r puede ser alcanzado cuando $e = m$ para un agujero negro extremo, cuyo horizonte está en $r = r_+ = m$. Estos valores para r no están permitidos para el caso de Schwarzschild. De la Fig. 4.2 se puede observar la forma en que el horizonte se corre conforme el valor de la carga aumente. $\Delta \rightarrow -\infty$ conforme el horizonte es alcanzado, sin importar la velocidad de las partículas consideradas. Entonces la correlación de EPR se pierde por completo. El mismo comportamiento de Δ se presentó en el radio de Schwarzschild en la referencia [31].

La divergencia en la precesión de espín se origina debido al hecho que el vierbein (4.6) y la 4-velocidad (3.49) son singulares en el horizonte r_+ . Esta singularidad está conectada con la falla del sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) .

- Region IV: Aún es posible mantener una órbita circular en la trayectoria $r = r_0$, con anti-correlación perfecta $\Delta = 0$. Entonces, para una posición en particular, la velocidad local inercial de las partículas v_{EPR} deben ajustarse desde el inicio en la fuente. En la Fig. 4.3 el radio r_0 se grafica para tres valores convenientes de la carga e en función de la posición m/r y velocidad local inercial v . Se puede ver que para distancias grandes ($m/r \rightarrow 0$) se puede tener la

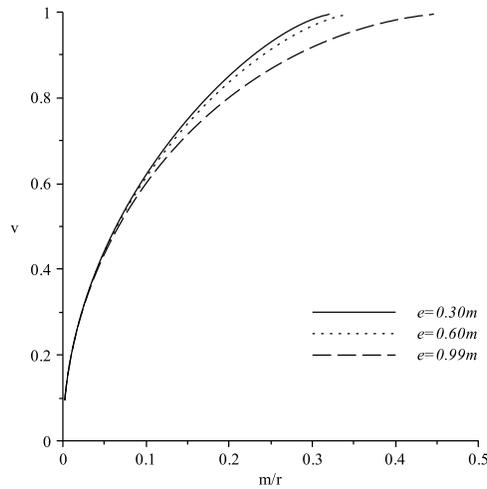


Figura 4.3: Gráfica paramétrica de posición m/r y velocidad v para la trayectoria r_0 que mantiene una anti-correlación perfecta ($\Delta = 0$) para un agujero negro de Reissner-Nordström.

anti-correlación perfecta con valores pequeños de v . Conforme se alcanza el horizonte, se debe incrementar la velocidad local de las partículas para mantener la anti-correlación perfecta.

Como en el caso de Schwarzschild, cerca del horizonte no existe un ángulo de precesión nulo ($\Delta \neq 0$), independientemente de la velocidad de la partícula. Entonces es imposible tener órbitas con anti-correlación perfecta. En la Fig. 4.3 el límite de órbitas circulares corresponde al punto donde r_0 termina en la parte alta de la figura. Para valores grandes de e , podemos tener órbitas de anti-correlación perfecta cerca del horizonte, pero no se puede encontrar un r_0 debajo del radio de Schwarzschild.

4.3.2 Kerr

Ahora consideraremos un espacio-tiempo con simetría axial y con parámetro de rotación a . Éste corresponde a el espacio-tiempo de Kerr. Este parámetro se puede relacionar con la rotación del agujero negro y es responsable por el arrastre del espacio-tiempo alrededor del agujero que se discutió en la Sección 3.1.4.

Se revisamos la métrica de la ecuación (4.1) y la simplificamos al fijar los parámetros al valor $e = g = l = \Lambda = 0$, obtenemos [69, 82]

$$ds^2 = -\frac{D}{\Sigma}(dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\Sigma}{D}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma}[adt - (r^2 + a^2)d\phi]^2, \quad (4.19)$$

donde

$$\begin{aligned} D &= r^2 - 2mr + a^2, \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Cuando $D \rightarrow 0$ los coeficientes de la métrica $g_{11} \rightarrow \infty$, y entonces la ecuación (4.19) se vuelve problemática, la métrica es muy impredecible de forma asintótica, de tal manera que ésta no describe un proceso físico [69]. Por lo tanto, esta métrica tiene significado físico cuando $a^2 \leq m^2$, que es consecuencia de resolver $D = r^2 - 2mr + a^2 = 0$ en g_{11} .

Esta componente de la métrica establece dos posibles valores de r para el agujero negro de Kerr

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \tag{4.21}$$

cuyo horizonte se denota por r_+ . Como en el caso de Schwarzschild, $r > r_+$ es la región donde podemos obtener información causal sensata sobre el sistema.

Una diferencia importante en el espacio-tiempo de Kerr es que el horizonte está debajo del radio de Schwarzschild $r_s = 2m$, como se puede ver de la ecuación para r_+ . Cuando $a^2 = m^2$ se le llama agujero negro de Kerr extremo, por lo tanto $r_+ = r_-$ y el horizonte se localiza en $r = m$.

Otra característica del espacio-tiempo tipo Kerr es la *superficie de límite estático*. Consideremos una partícula estacionaria, esto es, $r = \text{constante}$, $\theta = \text{constante}$ and $\phi = \text{constante}$. Entonces, de la métrica de espacio-tiempo (4.19) tenemos

$$-d\tau^2 = g_{00}dt^2. \tag{4.22}$$

Entonces, para $g_{00} \geq 0$ esta condición no se puede cumplir, y en consecuencia una partícula con masa no puede estar estacionaria sobre la superficie $g_{00} = 0$, porque, como ya sabemos, tal partícula adquirirá una 4-velocidad debido al arrastre de coordenadas (3.38). Los fotones en cambio pueden satisfacer esta condición y sólo ellos pueden estar estacionarios en el límite estático. Ésta es la razón por la que se le llama superficie estática.

Resolviendo la condición $g_{00} = 0$ para r nos da el radio de la superficie de límite estático,

$$r_{st} = m + (m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}. \tag{4.23}$$

Es importante enfatizar que la superficie de límite estático no es un horizonte [80]. Más tarde se verá el por qué no es un horizonte para el ángulo de precesión de espín, pero sí es un límite para mantener la anti-correlación perfecta.

La precesión de espín tiene la misma forma de (3.75), pero con coeficientes diferentes de A y B, esto es, de la ecuación (3.75) con coeficientes (4.7) y parámetros $e = g = l = \Lambda = 0$

el ángulo de precesión de espín se reduce a

$$\Delta_K = \Phi \left[\frac{-2\sqrt{D}am \sinh \zeta + (H - mD) \cosh \zeta}{(r^2 - 2mr)^{3/2}} \cosh \eta_K + \frac{\sqrt{D}am}{(r^2 - 2mr)^{3/2}} \frac{\sinh \zeta \cosh \eta_K}{\cosh^2 \eta_K - \cosh^2 \zeta} - 1 \right], \quad (4.24)$$

donde

$$D = r^2 - 2mr + a^2, \quad (4.25)$$

$$H = r^3 - 4mr^2 + 4m^2r - a^2m, \quad (4.26)$$

$$\cosh \eta_K = \frac{r\sqrt{D}}{\sqrt{(r-2m)(r^3 + a^2r + 2ma^2)}} \neq 1, \quad (4.27)$$

con coeficientes A y B como

$$A_K = -\frac{\sqrt{D}am}{(r^2 - 2mr)^{3/2}}, \quad B_K = \frac{H - mD}{(r^2 - 2mr)^{3/2}}. \quad (4.28)$$

El ángulo de precesión está graficado en la Fig. 4.4 para dos valores del parámetro de momento angular a , como una función de la distancia y velocidad local $v = v_{\text{EPR}}$. Esta distancia está parametrizada por m/r que significa que el experimento está localizado en el infinito cuando $m/r \rightarrow 0$, y $m/r = 1$ correspondiente a un agujero negro extremo, esto es $a = m$. Cuando $v = 0$ las partículas están estáticas en la fuente EPR y para $v \rightarrow 1$ son ultra-relativistas. El ángulo de precesión está graficado independientemente del ángulo de posición del observador Φ . Para $a = 0$ se recupera todos los resultados de la precesión de espín de Schwarzschild [31] como se esperaba.

La gráfica es muy similar a la Fig. 4.1, pero con diferencias importantes. Los efectos debido a la aceleración y gravitación analizados por regiones son:

- Region I: De nuevo la situación es idéntica al agujero negro de Schwarzschild. El arrastre de coordenadas no tiene contribución porque éste disminuye con la distancia. De tal manera que el espacio-tiempo es tipo Minkowski y $\Delta \rightarrow 0$ conforme $v = v_{\text{EPR}} \rightarrow 0$.
- Region II: No hay efectos nuevos. El arrastre de coordenadas tampoco tiene contribución y el ángulo Δ es asintótico al infinito cuando $v \rightarrow 1$ para partículas ultra relativistas.
- Region III: Para el espacio-tiempo de Schwarzschild y Reissner-Nordström, la divergencia en la precesión de espín ($\Delta \rightarrow -\infty$) fue en el horizonte. Ahora, la divergencia está presente en dos posiciones, una de ellas en la superficie de límite estático

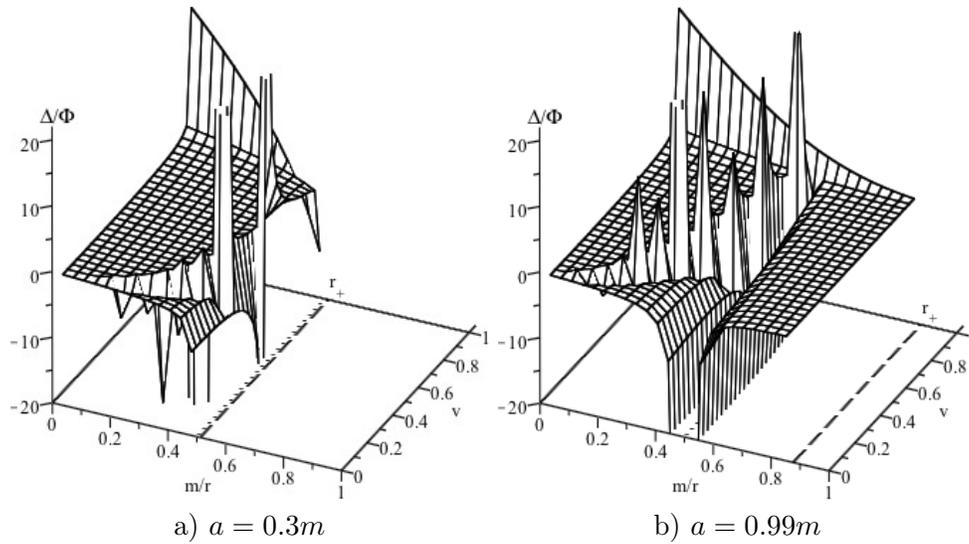


Figura 4.4: El ángulo de precesión Δ/Φ para un agujero negro de Kerr para dos valores del parámetro de momento angular a . Son asintóticos para el límite estático $r_{st} = 2m$ y a lo largo de la trayectoria $v = v_{fd}$. Los picos representan una pared infinita asintótica.

y la otra a lo largo de la trayectoria definida por $v_{EPR} = v_{fd}$.

La primera divergencia en la ecuación (4.24) se relaciona con la superficie de límite estático. Como se mencionó en la Sección 3.1.4, cualquier partícula adquirirá velocidad debido al arrastre de coordenadas conforme cae al agujero negro. Cuando esta partícula alcanza la superficie de límite estático en $r = 2m$ para el plano ecuatorial, su velocidad tiende a la velocidad de la luz asintóticamente. Del lado izquierdo de la ecuación (4.24) es fácil de ver por qué el ángulo de precesión diverge cuando la distancia se evalúa en $2m$. La divergencia en la precesión de espín en el espacio-tiempo de Kerr se origina por el hecho que la componente del arrastre de coordenadas (4.27) de la 4-velocidad (3.49) se vuelve singular en el límite estático r_{st} . Esta característica contrasta con el caso de Reissner-Nordström, donde las singularidades estaban conectadas con la falla del sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) y r_+ .

Previamente se mencionó que el límite estático no es un horizonte. Debajo de r_{st} es aún posible tener partículas entrelazadas en órbitas circulares. La región dentro del intervalo $r_+ \leq r < 2m$ tiene un comportamiento similar a la región I y II (ver en particular Fig. 4.4 b) donde es más claro esto). El arrastre de coordenadas no tiene efecto y el ángulo de precesión Δ_K es asintótico cerca del límite estático en $2m$ y también para partículas con $v_{EPR} \rightarrow 1$.

Pero cerca del horizonte r_+ la función (4.24) esta bien definida. Éste es un resultado inesperado si lo comparamos con los casos de Schwarzschild y Reissner-Nordström, donde los horizontes representan límites asintóticos.

Para $r < r_+$ el sistema de coordenadas falla y no podemos encontrar el ángulo de precesión para partículas en órbita.

La segunda divergencia corresponde al acoplamiento de la velocidad EPR y el arrastre de coordenadas. En la Fig. 4.4 se representa por picos de una “pared” asintótica infinita. Esta pared sigue una trayectoria curva definida por $\cosh^2 \zeta = \cosh^2 \eta$ en la ecuación (4.24), la cual se puede verificar fácilmente que corresponde a $v_{\text{EPR}} = v_{fd}$.

Cuando la velocidad de la primer partícula iguala la velocidad del arrastre de coordenadas, Δ_K se vuelve asintótico al infinito. Físicamente, una partícula permanece estática debido a que v_{EPR} iguala a v_{fd} , mientras que la otra partícula continua su viaje, desde la perspectiva del observador suspendido, y en consecuencia no es posible conocer la anti-correlación entre las partículas.

Esta situación representa una característica particular del espacio-tiempo tipo Kerr. En Schwarzschild, Reissner-Nordström y en la referencia [32] las gráficas son muy suaves hasta que sus funciones alcanzan los correspondientes horizontes. Aquí, la gráfica representa esta pared infinita siguiendo la trayectoria que corresponde a la velocidad que experimente una partícula en caída libre debido al arrastre de coordenadas (ver Fig. 4.5 a).

Region IV: Podemos ver en la Fig. 4.5 b) que alejado del agujero negro, hay una velocidad pequeña que mantiene la anti-correlación perfecta, como en los casos de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Conforme $r \rightarrow r_{st}$ hay un ángulo de precesión de espín no-nulo, independientemente de la velocidad de la partícula v_{EPR} . No se pueden mantener órbitas con anti-correlación perfecta y r_0 tiene un valor límite como en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström. Se puede ver este valor límite cuando r_0 termina en la parte superior derecha de la Fig. 4.5 b). Cerca del límite estático, la contribución del arrastre de coordenadas permite tres valores para v_{EPR} para el mismo valor del parámetro de momento angular a . Este efecto nuevo no estaba presente en los casos de Schwarzschild y Reissner-Nordström y tampoco lo mencionan en [32]. Cuando se alcanza el límite estático, la velocidad debido al proceso EPR debe ser igual a la velocidad de la luz para así mantener partículas con anti-correlación perfecta.

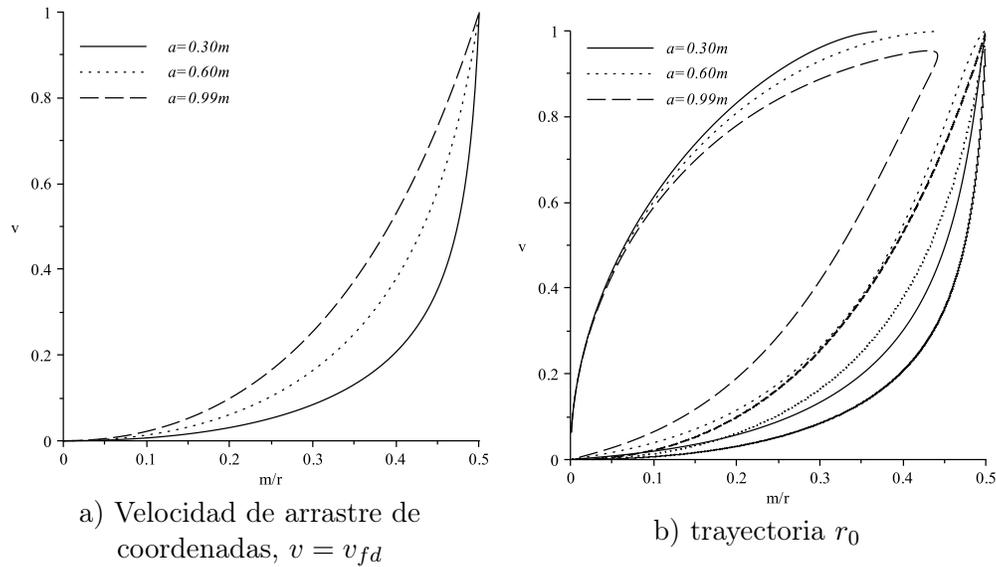


Figura 4.5: Velocidad de arrastre de coordenadas y trayectoria de anti-correlación perfecta para un agujero negro de Kerr. a) Velocidad local inercial debido al arrastre de coordenadas para tres valores de a . La pared infinita en la Figura. 4.4 sigue la trayectoria trazada por esta gráfica cuando $v_{EPR} = v_{fd}$. b) Gráfica paramétrica de posición m/r y velocidad local inercial v para la trayectoria r_0 , que mantiene una anti-correlación perfecta ($\Delta = 0$).

4.3.3 Kerr-Newman

Ahora estamos en posición de analizar el espacio-tiempo completo de Kerr-Newman y sus efectos en las partículas entrelazadas.

Simplificando la ecuación (3.75) el ángulo de precesión de espín se reduce a

$$\Delta_{KN} = \Phi \left\{ \frac{\cosh \eta}{r(D - a^2)^{3/2}} \left[A_{KN} \cosh \zeta - B_{KN} \sinh \zeta \left(\frac{2 \cosh^2 \zeta - \cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta}{\cosh^2 \zeta - \cosh^2 \eta} \right) \right] - 1 \right\}, \quad (4.29)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{KN} &= D^2 - (a^2 + mr - e^2 - g^2)D - a^2 r^2 + a^2 mr, \\ B_{KN} &= a\sqrt{D}(e^2 + g^2 - mr), \\ \cosh \eta &= \frac{r^2 \sqrt{D}}{\sqrt{(D - a^2)[(r^2 + a^2)^2 - a^2 D]}}, \\ D &= r^2 - 2mr + a^2 + e^2 + g^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

De la ecuación (4.29) se puede demostrar que la Región I y II tiene el mismo comportamiento que un espacio de tiempo de Minkowski. Lo cual no es un resultado sorprendente dado que, como vimos en el casos previos a esta sección, a y e disminuyen con la distancia.

Para la Región III el límite estático (4.23) se reduce a $r_{st} = m + \sqrt{m^2 - e^2}$ en el ecuador,

lo que coincide con el horizonte del espacio-tiempo de Reissner-Nordström. El límite estático r_{st} representa una vez más un límite asintótico para el cálculo del ángulo de precesión Δ en el agujero negro de Kerr-Newman. Contrario al espacio-tiempo de Kerr donde el límite estático esta localizado en $r = 2m$, ahora está debajo y depende en la carga del agujero negro, señalado como una línea punteada en la Fig. 4.6. En esta figura, 4.6a) y 4.6b) tienen el mismo horizonte (4.21), de igual manera 4.6c) y 4.6d) entre ellas. En a) r_{st} está tan cerca a r_+ que la línea punteada no puede ser distinguida. Las Figuras a) y c) tiene el mismo r_{st} porque el parámetro de carga eléctrica e es igual para ambos.

Una vez más, se puede observar la trayectoria de pared infinita debido al acoplamiento de v_{EPR} con v_{fd} . Esta trayectoria asintótica no está limitada a la región $r > 2m$ ni tampoco arriba del horizonte, pero sí sobre el límite estático.

Al igual que en el espacio-tiempo de Kerr, la región entre $r_+ \leq r < 2m$ no está afectada por el arrastre de coordenadas y Δ tiende asintóticamente al infinito cerca de r_{st} . Finalmente el sistema de coordenadas falla cuando r iguala a r_+ .

4.3.4 NUT

Aún existe una controversia si el parámetro de NUT puede ser considerado un parámetro de monopolo gravomagnético de una masa central, o bien una propiedad de torsión del espacio-tiempo circundante [83]. Para los propósitos de este trabajo se considera al parámetro de NUT de forma similar al parámetro de Kerr, el cuál induce una curvatura dinámica del espacio-tiempo debido al arrastre de coordenadas. Esto será más claro cuando la ecuación (3.75) se reduce al fijar los parámetros al valor $e = g = a = \Lambda = 0$,

$$\Delta_{\text{NUT}} = \Phi \left(\frac{r^3 - 3mr^2 - 3l^2r + ml^2}{(r^2 + l^2)\sqrt{r^2 - 2mr - l^2}} \cosh \zeta \cosh \eta - 1 \right), \quad (4.31)$$

donde

$$\cosh \eta = \frac{r^2 + l^2}{\sqrt{r^4 - 2l^2r^2 + 8ml^2r + 5l^4}}. \quad (4.32)$$

y donde las funciones A y B son

$$A_{\text{NUT}} = 0, \quad B_{\text{NUT}} = \frac{r^3 - 3mr^2 - 3l^2r + ml^2}{(r^2 + l^2)\sqrt{r^2 - 2mr - l^2}}. \quad (4.33)$$

Esta ecuación (4.31) es muy similar al ángulo de precesión de espín de Schwarzschild, pero ahora tiene integrado un factor adicional debido al arrastre de coordenadas de NUT. Debemos recordar que la métrica de NUT tiene también una simetría axial y debido a esto,

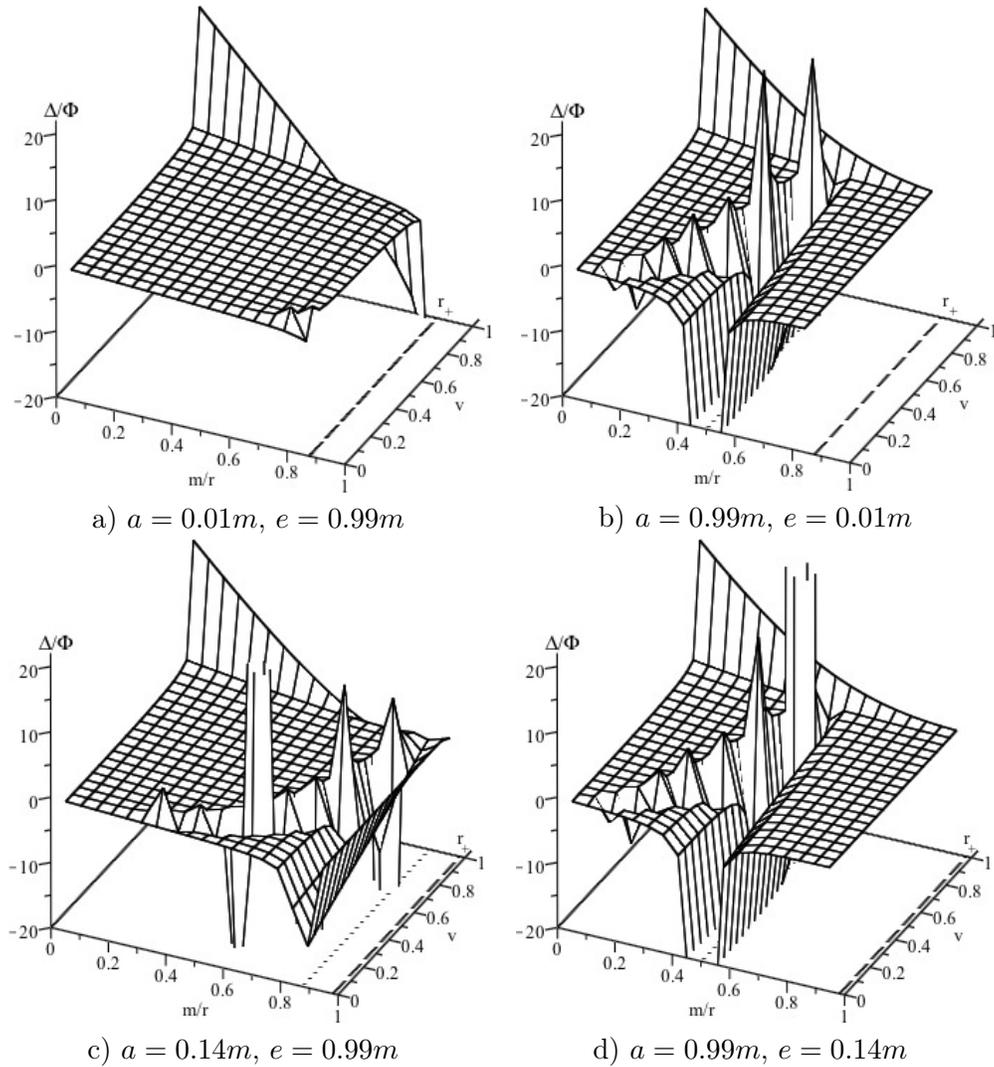


Figura 4.6: El ángulo de precesión Δ/Φ para un agujero negro de Kerr-Newman para dos valores de a y e , que mantiene r_+ constante (línea quebrada). La línea punteada representa la superficie de límite estático en el plano ecuatorial. Las gráficas son asintóticas en $r = r_{st}$ y a lo largo de la trayectoria $v_{EPR} = v_{fd}$. Los picos representan una pared infinita asintótica. En a) r_{st} está tan cerca de r_+ que la línea punteada no se puede distinguir.

hay un factor adicional.

La ecuación (4.31) es asintótica al infinito conforme $r \rightarrow m \pm \sqrt{m^2 + l^2}$. La raíz positiva representa el horizonte exterior de Schwarzschild-NUT.

Aunque el término $\cosh \eta$, el cual se debe al arrastre de coordenadas, tiene un polinomio de cuarto grado en su denominador, esta función cuártica no tiene raíces reales. Un análisis elemental numérico demuestra que las raíces no existen si asumimos que m y l son números positivos. De tal manera que la contribución del arrastre de coordenadas del ángulo de precesión de espín de NUT no tiene ninguna singularidad asintótica para cualquier valor de r .

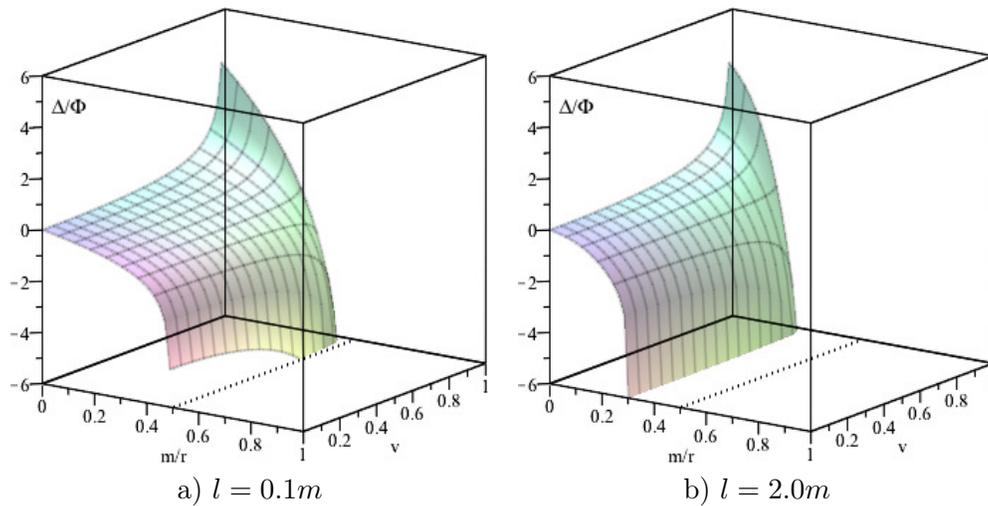


Figura 4.7: El ángulo de precesión Δ/Φ para un agujero negro de NUT para dos valores del parámetro l en función de la distancia m/r . Para valores grandes del parámetro NUT l se corre la posición del horizonte de Schwarzschild (línea punteada) a r_{NUT} .

El ángulo de precesión de espín de NUT de la ecuación (4.31) tiene como gráfica la Fig. 4.7 para dos valores de v_{EPR} . La distancia una vez más se parametriza por m/r que significa que el experimento está situado en el infinito cuando $m/r \rightarrow 0$; y el parámetro NUT está graficado como m/l , donde $m/l \rightarrow 0$ representa distancias con valores infinitamente grandes para este parámetro.

Se puede ver de la Fig. 4.7 que para distancias muy grandes ($m/r \rightarrow 0$), los efectos de la métrica desaparecen y los efectos de la relatividad sobre el entrelazamiento prevalecen, como lo fue en la Regiones I y II del caso de Schwarzschild.

El rasgo más importante se puede ver cuando el parámetro de NUT aumenta, esto es, cuando $m/l \rightarrow 0$, el horizonte se corre a distancias más grandes, tal y como se observa abajo en la gráfica como valores negativos de la precesión de espín Δ que tienden al infinito asintóticamente. De hecho, cuando el parámetro de NUT es muy grande, es casi imposible

mantener la anti-correlación perfecta, aún para velocidades bajas.

4.3.5 Schwarzschild-(Anti)de Sitter

Este es también un espacio-tiempo de simetría esférica, y tiene un observador cosmológico (ver Fig. 3.4). El espacio-tiempo de Schwarzschild-de Sitter representa un agujero negro en un espacio que es asintóticamente de Sitter [84]. Una constante cosmológica Λ positiva (de Sitter) se relaciona a una aceleración del universo, mientras que un valor negativo (anti-de Sitter) está relacionado a una energía de vacío negativa y una presión positiva. El ángulo de precesión de espín en este caso está dado por

$$\Delta_{(A)dS} = \Phi \left(\frac{r - 3m}{\sqrt{r^2 - 2mr - \frac{1}{3}\Lambda r^4}} \cosh \zeta - 1 \right), \quad (4.34)$$

donde las funciones A y B son

$$A_{(A)dS} = 0, \quad B_{(A)dS} = \frac{r - 3m}{\sqrt{r^2 - 2mr - \frac{1}{3}\Lambda r^4}}. \quad (4.35)$$

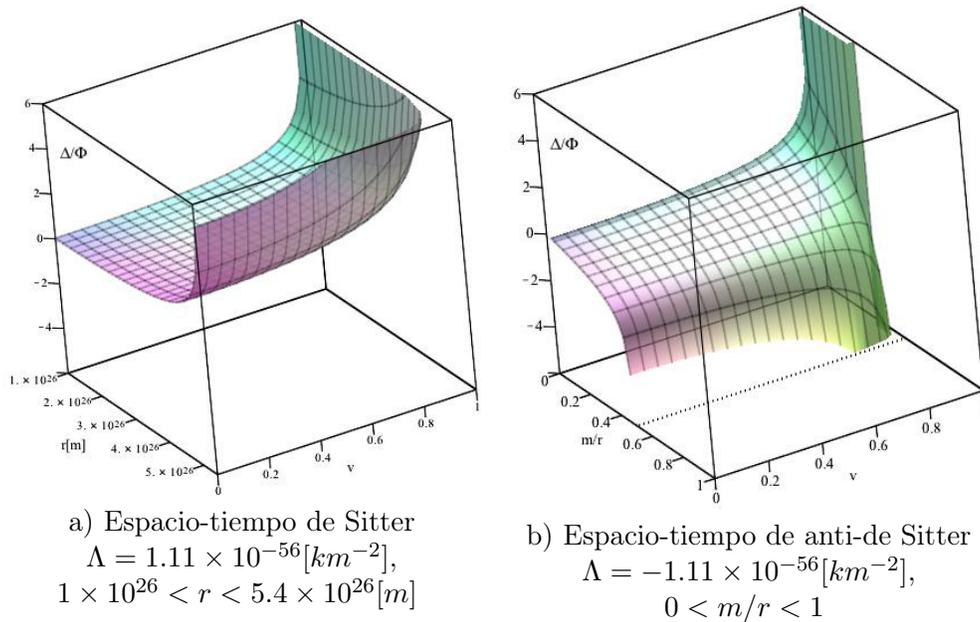


Figura 4.8: El ángulo de precesión Δ/Φ para un espacio-tiempo de Schwarzschild-de Sitter y anti-de Sitter. Ambos comparten un horizonte de Schwarzschild, pero de Sitter tiene un horizonte cosmológico en $10^{26}m$.

Para distancias cercanas al agujero negro y Λ positiva (de Sitter), es fácil demostrar que

el ángulo de precesión de espín se comporta de la misma manera como en el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild (ver [31]) debido a que la constante cosmológica es muy pequeña. Sin embargo la constante cosmológica tiene un efecto significativo sólo a muy grandes distancias, del orden de 10^{26} m [85]. Aquí la Regiones I y II difieren.

Se puede ver en la Fig. 4.8-a) que para Λ positiva, el ángulo de precesión de espín es asintótico conforme nos acercamos al horizonte cosmológico, mientras que para Λ negativo (anti-de Sitter) en la Fig. 4.8-b), esta constante tiene efectos despreciables y la precesión del ángulo tiene el mismo comportamiento del espacio-tiempo de Schwarzschild mencionado previamente.

4.4 Ejemplos: Agujeros negros con aceleración y rotación

En la referencia [86] se demuestra que, cuando $\Lambda = 0$, la métrica (4.1) representa un par de agujeros negros con aceleración, rotación y carga con un parámetro de NUT no-nulo. En esta sección se considerará el caso para el vacío ($\Lambda = e = g = l = 0$), donde el fondo es el de Minkowski.

Como se menciona en esta referencia, a los parámetros α y ω se les puede considerar relacionados a la aceleración y rotación de la fuente (masa m) respectivamente.

De tal manera, con un α arbitrario y usando la libertad de escala remanente para fijar $\omega = a$, la métrica de Plebański-Demiański se simplifica como

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} \left(-\frac{D}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{\rho^2}{D} dr^2 + \frac{P}{\rho^2} [adt - (r^2 + a^2)d\phi]^2 + \rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{P} d\theta^2 \right), \quad (4.36)$$

donde los parámetros (4.2) se reducen a

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 - a^2 \alpha^2, \\ n &= a \alpha m, \\ P &= \sin^2 \theta (1 - 2\alpha m \cos \theta + a^2 \alpha^2 \cos^2 \theta), \end{aligned} \quad (4.37)$$

y

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Omega &= 1 - \alpha r \cos \theta, \\ D &= a^2 - 2mr + (1 - a^2 \alpha^2)r^2 + 2\alpha^2 mr^3 - \alpha^2 r^4. \end{aligned} \quad (4.38)$$

La métrica (4.36) tiene 4 singularidades cuando $\theta = \pi/2$, esto es, se puede factorizar D

como

$$D = (r - r_+)(r - r_-)(1 - \alpha^2 r^2), \quad (4.39)$$

donde

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}. \quad (4.40)$$

Como se puede recordar, r_{\pm} representan las posiciones de los horizontes externos e internos del agujero negro de Kerr no acelerado. El otro par de horizontes se relacionan con la aceleración y ésta es familiar en el contexto de la métrica-C como un horizonte acelerado:

$$r_{\text{Acc}} = \frac{1}{\alpha}. \quad (4.41)$$

Por otro lado, después de algunos cálculos, los coeficientes para el ángulo de precesión de espín son

$$\begin{aligned} A_{\text{AccRot}} &= \frac{a\sqrt{D}}{2r(D - a^2)^{3/2}}[rD' - 2(D - a^2)], \\ B_{\text{AccRot}} &= \frac{1}{2r(D - a^2)^{3/2}}[4D(D - a^2) - r(a^2 + D)D']. \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde

$$D' = \frac{\partial D}{\partial r} = -2m + 2(1 - a^2\alpha^2)r + 6\alpha^2mr^2 - 4\alpha^2r^3. \quad (4.43)$$

Y la velocidad de arrastre de coordenadas es

$$\cosh \eta_{\text{PD}} = r^2 \sqrt{\frac{D}{(D - a^2)[(r^2 + a^2)^2 - a^2D]}}. \quad (4.44)$$

Pero los horizontes (4.40) y (4.41) no tienen relevancia física en el ángulo de precesión de espín porque las ecuaciones (4.42) no son singulares en esos puntos. Los horizontes toman importancia cuando el efecto de cada parámetro es analizado uno por uno.

Revisamos este tipo de comportamiento para el espacio-tiempo de Kerr-Newman en el trabajo previo [33], donde el horizonte de Schwarzschild y el efecto del arrastre de coordenadas producen un ángulo de precesión de espín con comportamiento asintótico en lugar de suceder en el horizonte de Kerr.

4.4.1 Métrica-C

Para un par de agujeros negros acelerados y con rotación representados por la métrica (4.36), consideramos el límite cuando $a \rightarrow 0$. En este caso, la métrica toma la forma de la

métrica-C y entonces los parámetros (4.42) se reducen a

$$A_{\text{métrica-C}} = 0, \quad B_{\text{métrica-C}} = \frac{\alpha^2 m r^2 + r - 3m}{\sqrt{(r^2 - 2mr)(1 - \alpha^2 r^2)}}, \quad \cosh \eta = 1. \quad (4.45)$$

De tal manera que el ángulo de precesión de espín de la métrica-C es

$$\Delta_{\text{métrica-C}} = \Phi \left(\frac{\alpha^2 m r^2 + r - 3m}{\sqrt{(r^2 - 2mr)(1 - \alpha^2 r^2)}} \cosh \zeta - 1 \right). \quad (4.46)$$

Es fácil ver que esta ecuación se reduce al caso de Schwarzschild (4.16) cuando $\alpha = 0$.

Adicionalmente, se puede ver de la ecuación (4.46) que es asintóticamente predecible en el radio de Schwarzschild y en el horizonte de aceleración, esto es, $\Delta_{\text{métrica-C}} \rightarrow \infty$ conforme $r \rightarrow \alpha^{-1}$.

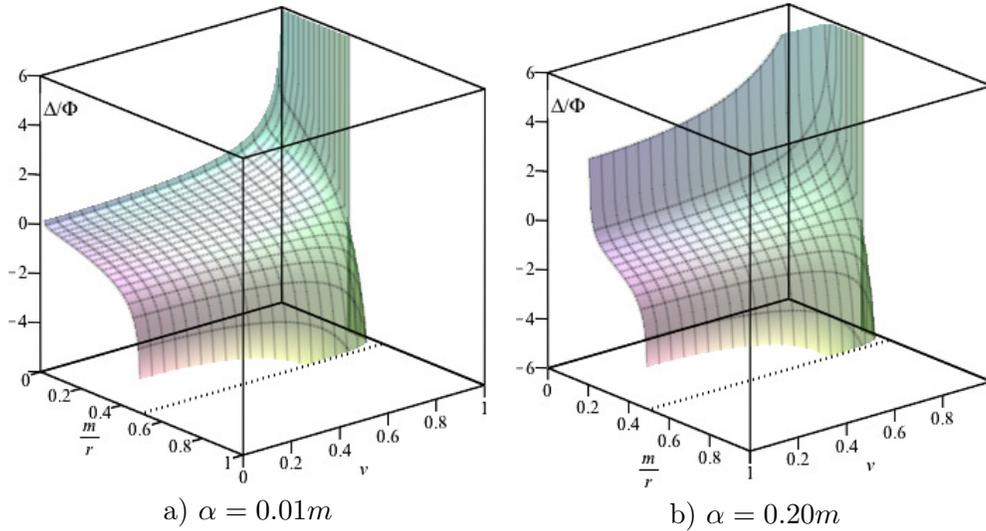


Figura 4.9: El ángulo de precesión Δ/Φ para un métrica C para dos valores del parámetro de aceleración α en función de la distancia m/r y de la velocidad local $v = v_{\text{EPR}}$. La línea punteada está localizada en el radio de Schwarzschild $r = 2m$.

En la Fig. 4.9 se grafica los efectos de la aceleración α sobre el ángulo de precesión de espín $\Delta_{\text{métrica-C}}$ como función de la distancia y la velocidad local de las partículas. La aceleración está parametrizada en función de la aceleración por unidad de masa. Como se menciona en la referencia [86], la aceleración sólo puede tener valores positivos. Podemos observar los mismos efectos de la velocidad de las partículas que se acaban de ver en los casos anteriores, esto es, conforme v_{EPR} aumenta, el valor absoluto de la precesión de espín $\Delta_{\text{métrica-C}}$ también aumenta.

La métrica-C también tiene un horizonte y corresponde al radio de Schwarzschild, que

se puede observar claramente en la ecuación (4.46). Pero como ya se mencionó, hay otro horizonte debido al parámetro de aceleración conforme $r \rightarrow \alpha^{-1}$.

El comportamiento anterior puede sugerir algunas intuiciones acerca de la interpretación física del parámetro de aceleración. De hecho, debido al horizonte de aceleración (4.41), se puede ver que para una aceleración muy pequeña se tendrá un efecto importante hasta que se alcancen distancias grandes, aún y cuando se espera un espacio-tiempo plano sin efecto sobre el ángulo de precesión de espín. En la referencia [87] se señala que cuando $\alpha \neq 0$, es difícil determinar sin ambigüedad la masa de cada agujero negro individual porque el espacio-tiempo no es globalmente asintóticamente plano y no se puede esperar distinguir los efectos debido a la aceleración de aquellos debido al campo de gravedad. Por medio del cálculo de la precesión de espín podría ser posible distinguir indirectamente los efectos de la masa de aquellos efectos de la aceleración.

4.5 Incertidumbre en la posición de los observadores

Tal y como se menciona en la Sección 3.2.2, la incertidumbre en la posición se reflejará como un aumento (o disminución) de la violación de las desigualdades de Bell (3.78), y no será posible compensar la dirección de medición de los instrumentos de los observadores para extraer así la máxima violación de estas desigualdades.

Es importante notar que cerca del horizonte de Reissner-Nordström, el límite estático y la trayectoria de la pared infinita de Kerr y Kerr-Newman, el ángulo de precesión de espín es asintóticamente divergente y no es posible alcanzar la máxima violación de la desigualdad de Bell. De la misma manera, en el horizonte cosmológico de Sitter no se podría obtener la anti-correlación perfecta. En todos estos casos, cualquier pequeña variación en la posición de los observadores cerca de los horizontes, se trasladará como una enorme variación en la medición del ángulo de precesión de espín, haciendo virtualmente imposible ajustar de nuevo los instrumentos de medición de los observadores.

Para estos casos podría utilizarse observadores en caída libre y diferentes vierbeins para así evitar los efectos dinámicos y gravitacionales implicados en el ángulo de precesión de espín. Un futuro trabajo podría investigar este tipo de observadores.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se construyó un algoritmo de forma general para calcular el ángulo de precesión de espín de un par de partículas masivas EPR de espín- $\frac{1}{2}$ que viajan sobre el ecuador de un espacio-tiempo con simetría axial sin referencia a una métrica específica.

Sin embargo, para el caso más general, antes de aplicar este algoritmo a las soluciones tipo D, se demostró que, al tomar en cuenta el arrastre de coordenadas, debe incorporarse a los cálculos una velocidad adicional actuando sobre las partículas. De tal manera, que se introdujeron observadores suspendidos para mantener un sistema de referencia que asegure una dirección de medición confiable para comparar las mediciones de los estados cuánticos de espín- $\frac{1}{2}$. La velocidad total medida por estos observadores se identificó como la suma de la velocidad de un ZAMO, más la velocidad local de las partículas medidas por el ZAMO. Estos ZAMOs rotan en la misma dirección del agujero negro debido al arrastre de coordenadas y fueron utilizados como un paso preliminar antes de calcular la velocidad local inercial total de las partículas viajando sobre el ecuador del agujero negro. Entonces se obtuvo un algoritmo general para calcular el ángulo de precesión de espín total, que fue medido desde la perspectiva de estos observadores suspendidos. Los resultados no suponen un sistema de coordenadas particular pero dependen de coeficientes métricos con simetría axial.

Desde el punto de vista de los observadores suspendidos, existe una rotación de Wigner, dada por la ecuación (3.37), para cada partícula, porque ambas partículas viajan con diferentes velocidades debido al arrastre de coordenadas del espacio-tiempo.

Después de esto, los resultados se aplicaron para las soluciones más generales tipo D de un agujero negro de Plebański-Demiański. Se obtuvo la expresión general para el ángulo de precesión de espín Δ_{PD} , que describe los efectos del espacio-tiempo que deterioran la anti-correlación perfecta de las partículas entrelazadas, en comparación a si estas partículas estuvieran en el espacio-tiempo de Minkowski, a través de los coeficientes A y B (4.7) y

la velocidad de arrastre de coordenadas $\cosh \eta_{PD}$ (4.9). Ambos coeficientes y $\cosh \eta_{PD}$ son no-nulos y dependen de siete parámetros físicos provenientes de la métrica de Plebański-Demiański.

Es importante mencionar una vez más que el estado de espín singlete se mezcla con el estado triple, lo cual es fácil de comprobar cuando $\Delta \rightarrow 0$ en la ecuación (3.74). Esta mezcla es debida exclusivamente por los efectos de la curvatura del espacio-tiempo sobre el estado cuántico de las partículas.

Se puede escribir la expresión explícita de Δ_{PD} en términos de los parámetros físicos, pero resulta en una ecuación muy larga. Por ello se prefirió escribir una fórmula pequeña, en términos de las funciones de cuarto grado D sus derivadas D' con respecto a r . Se estudiaron los dos casos de acuerdo a la referencias [39, 40]. El primer caso corresponde con $\alpha = 0$ y el segundo con $l = 0$.

El primer caso (con $\alpha = 0$ y $l \neq 0$), corresponde a un agujero negro no-acelerado de Kerr-Newman-(Anti)de Sitter-NUT, que contiene sólo seis parámetros y es muy similar al caso de Plebański-Demiański. Se estudiaron los diferentes casos límite y se calculó el ángulo de precesión de espín para diferentes subfamilias de soluciones. Otros casos incluidos en el análisis fueron los agujeros negros de Kerr, Schwarzschild-NUT, Schwarzschild(Anti)-de Sitter, Reissner-Nordström y Schwarzschild.

Para el caso de Reissner-Nordström, el parámetro de carga eléctrica produce un corrimiento de posición del horizonte de eventos, de $r = 2m$ a $r = r_+$, si se compara con el espacio-tiempo de Schwarzschild. Pero este horizonte aún representa un límite asintótico para los cálculos de la precesión de espín.

En el espacio-tiempo de Kerr, el parámetro de momento angular establece la comúnmente llamada superficie de límite estático, donde ocurren dos procesos físicos interesantes: algunos resultados coinciden con el radio de Schwarzschild y éste representa un límite para el cálculo del ángulo de precesión, y el arrastre de coordenadas tiene el valor máximo allí, haciendo que las partículas sean ultrarelativistas en esa posición, con un ángulo de precesión de espín $\Delta \rightarrow \infty$.

Se encontró una diferencia notable cuando dos partículas están cerca al horizonte r_+ del agujero negro en rotación. El ángulo de precesión está bien definido, en contraste con los casos de Schwarzschild y Reissner-Nordström donde tendía a infinito.

Ocurre otro efecto en el espacio-tiempo de Kerr cuando la velocidad de las partículas debido al proceso EPR coincide con la velocidad del arrastre de coordenadas. Una de las partículas queda fija en su posición relativa al observador suspendido, mientras que la otra alcanza al observador. Entonces, el ángulo de precesión de espín tiene al infinito.

Hay otro límite asintótico cuando $r = 2m$ porque la ecuación del ángulo de precesión de espín es singular en este punto, como igual sucede para el caso de Schwarzschild.

Para el espacio-tiempo de Kerr-Newman, el límite estático coincide con el horizonte del espacio-tiempo de Reissner-Nordström, pero este límite no representa un límite asintótico para el ángulo de precesión de espín.

Fue aún posible encontrar órbitas circulares con anti-correlación perfecta para los parámetros a y e a lo largo de la trayectoria llamada r_0 , esto es, $\Delta(r = r_0) = 0$. Por otra parte, cuando sólo se considera el parámetro de momento angular a , se puede alcanzar la anti-correlación perfecta cerca del límite estático con tres posibles trayectorias r_0 para el mismo valor de a . Este efecto no estaba presente en los casos de Schwarzschild y de Reissner-Nordström.

Aún y cuando la carga eléctrica total en un agujero negro debe ser cero, se consideró como un parámetro arbitrario para así ilustrar el efecto de la precesión de espín. No se tomó en cuenta la interacción electromagnética entre partículas cargadas y un agujero negro cargado, y queda pendiente ser explorada esta interacción para un trabajo futuro.

Se encontraron nuevos resultados para el espacio-tiempo de Schwarzschild-NUT. El ángulo de precesión (4.31) tiene un comportamiento asintótico en el horizonte de Schwarzschild desplazado por el parámetro de NUT, esto es, en la posición r_{NUT} . Para el espacio-tiempo de Schwarzschild-(Anti)de Sitter hay también algunos resultados interesantes en las ecuaciones (4.34) y (4.35). Para Λ positiva hay un gran crecimiento en el ángulo de precesión de espín en el horizonte cosmológico, mientras que para Λ negativa, la constante cosmológica tiene efectos despreciables y el ángulo de precesión tiene el mismo comportamiento visto en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Para el segundo caso de métricas previamente mencionadas, con $\alpha \neq 0$ y $l = 0$, se analizó un agujero negro acelerado y con rotación. Se discutió a detalle la subfamilia de métrica-C, cuyo efecto más relevante fue el efecto del horizonte de aceleración, donde el ángulo de precesión de espín fue asintótico.

Este trabajo mostró que la selección de la 4-velocidad de las partículas, el vierbein y los observadores, son importantes para tener mediciones confiables del ángulo de precesión de espín y obtener la anti-correlación perfecta y la máxima violación de las desigualdades de Bell. Es importante recordar que tan pronto como las partículas se acerquen al horizonte de eventos para cada caso, su velocidad se incrementa muy rápido hasta que se alcanza asintóticamente la velocidad de la luz, con una consecuente precesión de espín rápida. Entonces, los observadores suspendidos no podrán ajustar la dirección de medición del espín, haciendo virtualmente imposible cualquier medición del entrelazamiento.

Los resultados aquí presentados se desprenden del trabajo de investigación doctoral desarrollado en la División de Estudios de Postgrado de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas en la Universidad Autónoma de Nuevo León. De tal manera que esta tesis está constituida por el análisis y los resultados presentados en los dos artículos publicados durante la estancia doctoral. Cada artículo contribuye a este trabajo de la siguiente manera:

Physics Essays, 03/ 2013 26 (1):86

Entangled spinning particles in charged and rotating black holes, [33]

- Inclusión del arrastre de coordenadas en el cálculo de velocidades de las partículas de la sección 3.1.4.
- Selección de observadores suspendidos y observadores con momento angular cero, para el cálculo de la precesión de espín para un espacio-tiempo con simetría axial de la sección 3.1.5.
- Resultados de la precesión de espín para agujeros negros de Reissner-Nordström y Kerr-Newman de las secciones 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3.
- Gráficas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6.

Classical and Quantum Gravity, 01/2013; 30:235012

Quantum entanglement in Plebański-Demiański spacetimes, [81]

- Ecuación del ángulo de precesión de espín general (3.75).
- Resultados de la precesión de espín para agujeros negros no-acelerados de Kerr-Newman-(anti)-de Sitter-NUT y agujeros negros con aceleración y rotación de las secciones 4.3 y 4.4.
- Gráficas 3.4, 4.7, 4.8 y 4.9.

La argumentación presentada en esta investigación es estrictamente geométrica, porque se compara el estado cuántico al trasladarlo de un punto a otro a través de transformaciones de Lorentz. Si bien se analiza extensamente los efectos de la curvatura del espacio-tiempo sobre los estados cuánticos entrelazados, queda aún por determinar el mecanismo subyacente de este tipo de interacción entre el campo de gravedad y los estados de las partículas. Una línea de investigación importante podría utilizar los resultados aquí presentados en una teoría cuántica de campos de gravedad.

Otra línea de investigación que puede ser de interés se encuentra en aquellas regiones cercanas a un agujero negro y que aún así tiene precesión nula, como se muestra en la figura

4.3. La inclusión de diferentes parámetros físicos como NUT y aceleración, podrían crear regiones que compensan unos efectos con otros, creando de esta manera condiciones para mantener una perfecta anticorrelación. Similarmente se puede investigar sistemas con diferentes distribuciones de masa-energía, como sistemas binarios de agujeros negros o métricas con distribución de masas arbitrarias.

En este trabajo se consideró únicamente soluciones tipo D con una congruencia de curvas geodésicas en expansión y torsión no-nula. Podría hacerse una continuación analítica para así encontrar las soluciones interiores proveyendo la precesión de espín dentro del horizonte de eventos y la superficie de límite estático y sobre los horizontes cosmológicos y de aceleración. Pueden encontrarse coordenadas tipo Kruskal-Szekeres para este tipo de métricas. También podría extenderse el análisis presentado aquí a órbitas arbitrarias fuera del ecuador.

Se conocen también otras soluciones Tipo D diferentes a los casos con expansión y sin torsión. Entre estas soluciones están las de Robinson-Trautman Tipo D y las métricas-A. Adicionalmente las soluciones Tipo D sin expansión y sin torsión son las Tipo D Kundt y las métricas-B. Sería muy interesante generalizar los resultados del presente trabajo a la descripción de partículas entrelazadas en estos fondos. Trabajos futuros podrán explorar estos escenarios.

Apéndice A

Transformaciones de Lorentz

Una transformación de Lorentz es una transformación de coordenadas que conecta dos sistemas de referencia O y O' , donde el sistema O' se mueve con respecto a O sin rotación y con velocidad constante. Implica que el sistema de coordenadas primado x'^{μ} de O' está dado en términos del sistema de coordenadas x^{μ} de O por una transformación lineal o afín¹

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad (\text{A.1})$$

donde Λ_{ν}^{μ} y a^{μ} son constantes.

Si $a^{\mu} = 0$, entonces el origen espacial de O coincide con O' cuando $t = t' = 0$ y a la transformación de Lorentz se le llama *homogénea*, mientras que para $a^{\mu} \neq 0$ se le llama *inhomogénea*. A estas últimas también se les conoce como *transformaciones de Poincaré* y a las transformaciones homogéneas son llamadas simplemente transformaciones de Lorentz.

La constante Λ_{ν}^{μ} es una rotación espacio-temporal equivalente a un “boost” o empuje en la dirección de movimiento seguido por una rotación espacial. Esta es la transformación de Lorentz propiamente.

Para obtener la ecuación (3.8) seguimos el ejemplo de [88] y consideremos el caso de una transformación de Lorentz con un impulso o *boost* en la dirección de x como se muestra en la Figura A.1. El origen del sistema O' se mueve a lo largo del eje x del sistema O en la dirección positiva con una velocidad constante v relativa a O . Los ejes de O y O' coinciden en un tiempo inicial $t = t' = 0$. De tal manera que la transformación es homogénea y puede

¹Una transformación afín es una transformación lineal que incluye un corrimiento del origen entre un sistema de referencia y otro.

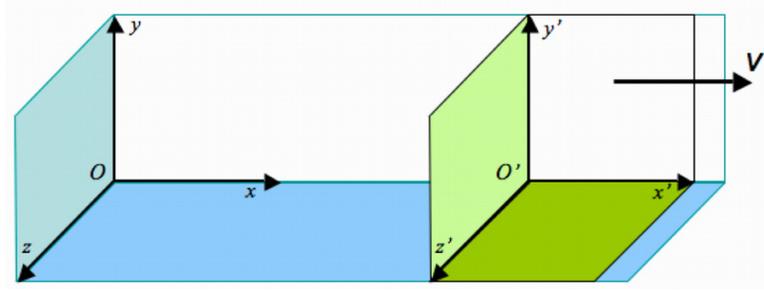


Figura A.1: Boost o empuje en dirección del eje x .

tomar la forma

$$\begin{aligned}
 t' &= Bt + Cx, \\
 x' &= A(x - vt), \\
 y' &= y, \\
 z' &= z.
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

Ahora bien, el primer postulado de la relatividad especial establece [68]:

La velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales.

Esto implica que la medida de intervalos de espacio-tiempos ds son los mismos independientemente del marco de referencia donde los midamos, esto es²

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 (dt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2.
 \tag{A.3}$$

Por lo tanto, sustituyendo (A.2) en la ecuación anterior se obtiene

$$B^2 c^2 - A^2 v^2 = c^2, \quad BCc^2 + A^2 = 0, \quad C^2 c^2 - A^2 = 1.
 \tag{A.4}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones tenemos

$$A = B = \gamma, \quad C = -(v/c^2)\gamma,
 \tag{A.5}$$

donde

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.
 \tag{A.6}$$

²Nótese que la signatura es $\eta_{ab} = \text{diag}(-, +, +, +)$, la cual se aplica a lo largo de toda la presente tesis.

Así, el boost (A.2) adoptan la forma

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - xv/c^2), \\ x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{A.7}$$

En su forma matricial lo podemos expresar como

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -v\gamma/c & 0 & 0 \\ -v\gamma/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

Si seleccionamos³ $\tanh \xi \equiv v/c$ obtenemos que $\gamma = \cosh \xi$ de tal manera que el boost puede ser también escrito como

$$\begin{aligned} t' &= ct \cosh \xi - x \sinh \xi, \\ x' &= x \cosh \xi - ct \sinh \xi, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{A.9}$$

y la matriz de transformación de Lorentz o boost Λ_{ν}^{μ} se escribe como

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.10}$$

donde $\sinh \xi = -v\gamma/c$.

³Esta sustitución por funciones hiperbólicas fue introducida por primera vez en 1908 por Hermann Minkowski [89] en su artículo “Sobre las ecuaciones fundamentales de los procesos electromagnéticos en cuerpos en movimiento”.

De tal forma que la transformación de Lorentz también puede expresarse como

$$\begin{aligned}
L(p)^0_0 &= \cosh \xi = \gamma, \\
L(p)^0_1 &= -\sinh \xi = -v_x \gamma / c = p^1 / Mc = L(p)^1_0, \\
L(p)^1_1 &= \cosh \xi = \gamma = \delta_{11} + (\gamma - 1) p^1 p^1 / \left((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \right), \\
L(p)^2_2 &= 1 = \delta_{22} + (\gamma - 1) p^2 p^2 / \left((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \right), \\
L(p)^3_3 &= 1 = \delta_{33} + (\gamma - 1) p^3 p^3 / \left((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \right), \\
L(p) i_k &= 0 = \delta_{ik} + (\gamma - 1) p^i p^k / |\vec{p}|^2, \text{ para } i, k = 2, 3,
\end{aligned} \tag{A.11}$$

donde

$$\begin{aligned}
v_x &= v, \\
v_y &= v_z = p^2 = p^3 = 0, \\
|\vec{p}| &= \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}, \\
\gamma &= (1 - v_x^2 / c^2)^{-1/2} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2 c^2} / Mc.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

■

Este es un boost en dirección x . Es fácil demostrar que (3.8) adquiere esa forma para un boost en cualquier dirección, siguiendo el anterior procedimiento.

Apéndice B

Rotación de Wigner

B.1 Definición de la Rotación de Wigner

En la Sección 3.1.1 teníamos una partícula con estado cuántico $|k, \sigma\rangle$ descrito en su propio marco de referencia. La partícula se aleja de un laboratorio en dirección x con velocidad v y en el marco de referencia del laboratorio el estado es descrito por $|p, \sigma\rangle = U(L(p))|k, \sigma\rangle$.

Posteriormente, un observador se aleja del laboratorio en dirección z con velocidad v y deseamos obtener un operador unitario $U(\Lambda)$ que describa el estado cuántico de una partícula con respecto a ese observador en movimiento, donde Λ es la transformación de Lorentz que conecta el sistema de referencia del observador en movimiento con el sistema de referencia del laboratorio.

Entonces, el estado cuántico debe estar descrito por

$$|p', \sigma'\rangle = U(\Lambda)|p, \sigma\rangle, \quad (\text{B.1})$$

donde el estado de la izquierda primado es el estado descrito por el observador en movimiento, y el estado no primado es el estado descrito por el laboratorio.

Introducimos la equivalencia del estado con respecto al laboratorio, esto es $|p, \sigma\rangle = U(L(p))|k, \sigma\rangle$ y obtenemos

$$|p', \sigma'\rangle = U(\Lambda)U(L(p))|k, \sigma\rangle. \quad (\text{B.2})$$

El producto de dos operadores unitarios, es igual a otro operador unitario [75] que satisface la condición $U(T_2)U(T_1)|\psi\rangle = U(T_2T_1)|\psi\rangle$, por lo tanto

$$|p', \sigma'\rangle = U(\Lambda L(p))|k, \sigma\rangle. \quad (\text{B.3})$$

De esta manera, es posible introducir un producto de dos operadores unitarios cuyo efecto es nulo, esto es, $U(T^{-1})U(T)|\psi\rangle = |\psi\rangle$, lo cual es equivalente a multiplicar por una matriz identidad, es decir $U(T^{-1})U(T) = U(T^{-1}T) = \mathbf{1}$. Entonces, aplicamos un operador así en (B.3)

$$|p', \sigma'\rangle = U\left(L(\Lambda p)^{-1}L(\Lambda p)\right)U(\Lambda L(p))|k, \sigma\rangle, \quad (\text{B.4})$$

donde Λp es la transformación de Lorentz que conecta el 4-momento $p^{\mu'}$ medido por el observador en movimiento con el 4-momento p^{μ} medido por el laboratorio, esto es $p^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu}p^{\nu} = (\Lambda p)^{\mu}$.

Separamos y redistribuimos (B.3) para obtener

$$\begin{aligned} |p', \sigma'\rangle &= U(L(\Lambda p)^{-1})U(L(\Lambda p))U(\Lambda)U(L(p))|k, \sigma\rangle \\ &= U(L(\Lambda p))\left[U\left(L(\Lambda p)^{-1}\Lambda L(p)\right)\right]|k, \sigma\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Lo que finalmente queda expresado como

$$|p', \sigma'\rangle = U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda, p))|k, \sigma\rangle, \quad (\text{B.6})$$

■

De esta manera $W(\Lambda, p) = L(\Lambda p)^{-1}\Lambda L(p)$ es lo que queríamos demostrar para (3.9). Al producto de transformaciones de Lorentz $W(\Lambda, p)$ se le conoce como rotación de Wigner en honor al trabajo [29] realizado por Eugene Wigner en 1939.

El anterior procedimiento se sintetiza en el diagrama de flujo de la Figura B.1.

B.2 Obtención de la Rotación de Wigner para dos observadores inerciales

Para la obtención de (3.13) a partir de la rotación de Wigner (3.9) aplicada a observadores inerciales, seguiremos el diagrama de la Fig. B.1.

En el marco de referencia en reposo de la partícula, el 4-momento esta descrito por

$$k^{\mu} = (Mc, 0, 0, 0). \quad (\text{B.7})$$

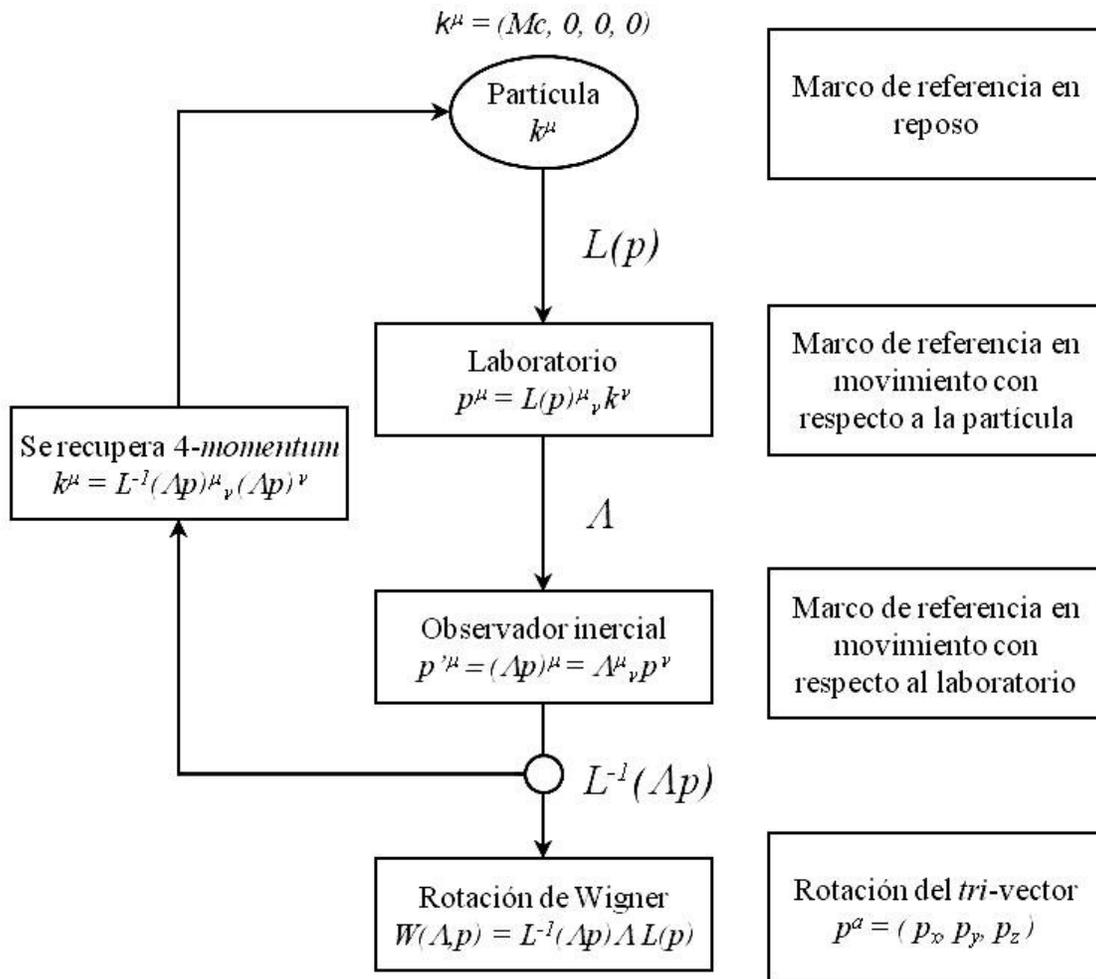


Figura B.1: Flujo de transformaciones de Lorentz que conducen a la rotación de Wigner.

Una transformación de Lorentz (ver Apéndice A)

$$L(p) = \begin{bmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

es aplicada a k^μ para obtener el 4-momento $p^\mu = L(p)^\mu{}_\nu k^\nu$ del laboratorio que se aleja de la partícula en dirección x hacia la izquierda con rapidez $\tanh \xi = v/c$, esto es

$$p^\mu = (Mc \cosh \xi, Mc \sinh \xi, 0, 0). \quad (\text{B.9})$$

De manera similar, otra transformación de Lorentz

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh \chi & 0 & 0 & -\sinh \chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \chi & 0 & 0 & \cosh \chi \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

se aplica sobre p^μ para obtener el 4-momento $p^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$ de la partícula descrito por el observador en movimiento que se aleja del laboratorio en dirección z , por la derecha con rapidez $\tanh \chi = V/c$, esto es

$$p^{\mu'} = Mc(\cosh \sigma, \cos \theta \sinh \sigma, 0, \sin \theta \sinh \sigma), \quad (\text{B.11})$$

donde convenientemente [23] se ha sustituido

$$\begin{aligned} \cosh \sigma &= \cosh \chi \cosh \xi, \\ \sinh \sigma &= \sqrt{\cosh^2 \chi \cosh^2 \xi - 1}, \\ \sin \theta &= -\sinh \chi \cosh \xi / \sinh \sigma, \\ \cosh \theta &= \sinh \xi / \sinh \sigma. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

A $p^{\mu'}$ le llamamos Λp y a este 4-momento le aplicamos la transformación de Lorentz estandar $L(\Lambda p)$ que toma $k \rightarrow \Lambda p$ directamente desde el reposo. De (3.8) identificamos

ahora como $p^1 = \cos \theta \sinh \sigma$ y $p^3 = \sin \theta \sinh \sigma$, entonces

$$L(\Lambda p) = \begin{bmatrix} \cosh \sigma & \cos \theta \sinh \sigma & 0 & \sin \theta \sinh \sigma \\ \cos \theta \sinh \sigma & 1 + (\cosh \sigma - 1) \cos^2 \theta & 0 & (\cosh \sigma - 1) \cos \theta \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta \sinh \sigma & (\cosh \sigma - 1) \cos \theta \sin \theta & 0 & 1 + (\cosh \sigma - 1) \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Pero su matriz inversa es la transformación de interés para obtener la rotación de Wigner, así

$$L^{-1}(\Lambda p) = \begin{bmatrix} \cosh \sigma & -\cos \theta \sinh \sigma & 0 & -\sin \theta \sinh \sigma \\ -\cos \theta \sinh \sigma & 1 + (\cosh \sigma - 1) \cos^2 \theta & 0 & (\cosh \sigma - 1) \cos \theta \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta \sinh \sigma & (\cosh \sigma - 1) \cos \theta \sin \theta & 0 & 1 + (\cosh \sigma - 1) \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Entonces, es fácil comprobar que $L^{-1}(\Lambda p)^\mu{}_\nu (\Lambda p)^\nu = k^\mu$, como se señala en el diagrama de la Fig. B.1.

Para calcular la rotación de Wigner, se requiere el producto de matrices,

$$\Lambda L(p) = \begin{bmatrix} \cosh \xi \cosh \chi & \sinh \xi \cosh \chi & 0 & -\sinh \chi \\ \sinh \xi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \xi \sinh \chi & \sinh \xi \sinh \chi & 0 & \cosh \chi \end{bmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

Con lo anterior, se obtiene que la rotación de Wigner (3.9) queda para este caso como

$$W(\Lambda, p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cosh \xi + \cosh \chi}{\cosh \xi \cosh \chi - 1} & 0 & \frac{\sinh \xi \sinh \chi}{\cosh \xi \cosh \chi - 1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sinh \xi \sinh \chi}{\cosh \xi \cosh \chi - 1} & 0 & \frac{\cosh \xi + \cosh \chi}{\cosh \xi \cosh \chi - 1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Para confirmar que la rotación de Wigner se reduce a una rotación alrededor del eje y , sea un vector espacial $z^\mu = (0, 0, 0, 1)$ en el marco de referencia en reposo de la partícula. El

producto $W(\Lambda, p)^\mu{}_\nu z^\nu$ es

$$Wz = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sinh \xi \sinh \chi}{\cosh \xi \cosh \chi - 1} \\ 0 \\ \frac{\cosh \xi + \cosh \chi}{\cosh \xi \cosh \chi - 1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Lo cual representa una rotación pura alrededor del eje y , dado que los dos boost en (B.15) ocurren en el plano xz [23]. Este nuevo vector $z^{\mu'} = (Wz)^\mu$ tiene componentes únicamente en los ejes x y z , con un ángulo de rotación δ con respecto al marco de referencia de la partícula definido como

$$\tan \delta = \frac{\sinh \xi \sinh \chi}{\cosh \xi + \cosh \chi}. \quad (\text{B.18})$$

■

Bibliografía

- [1] R. Colella, A. W. Overhauser, and S. A. Werner. Observation of gravitationally induced quantum interference. *Phys.Rev.Lett.*, 34:1472–1474, 1975.
- [2] A. Peters, K. Y. Chung, and S. Chu. Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms. *Nature*, 400:849, 1999.
- [3] T. L. Gustavson, A. Landragin, and M. A. Kasevich. Rotation sensing with a dual atom-interferometer Sagnac gyroscope. *Class. Quantum Grav.*, 17:2385, 2000.
- [4] S. W. Hawking. Black hole explosions. *Nature*, 248:30–31, 1974.
- [5] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun.Math.Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [6] N. D. Birrell and P. C. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, London, 1982.
- [7] R. M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. The University of Chicago Press, Chicago, 1994.
- [8] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, 1935.
- [9] D. Bohm and Y. Aharonov. Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Phys.Rev.*, 108:1070–1076, 1957.
- [10] J.S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- [11] Stuart J. Freedman and John F. Clauser. Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. *Phys.Rev.Lett.*, 28:938–941, 1972.
- [12] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell’s Theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47:460–463, Aug 1981.

-
- [13] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin. Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart. *Phys.Rev.Lett.*, 81:3563–3566, 1998.
- [14] Sandu Popescu. Bell’s inequalities versus teleportation: What is nonlocality? *Phys. Rev. Lett.*, 72:797–799, Feb 1994.
- [15] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crepeau, Richard Jozsa, Asher Peres, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys.Rev.Lett.*, 70:1895–1899, 1993.
- [16] G. Brassard, P. Horodecki, and T. Mor. TelePOVM -A generalized quantum teleportation scheme. *IBM J. Res. Dev.*, 48:87, 2004.
- [17] Richard Jozsa. Entanglement and quantum computation. In S. Huggett and et.al., editors, *Geometric Issues in the Foundations of Science*. Oxford University Press, 1997. quant-ph/9707034.
- [18] Robert Raussendorf and Hans J. Briegel. A one-way quantum computer. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5188–5191, May 2001.
- [19] D. Gottesman and I. L. Chuang. Quantum teleportation is a universal computational primitive. *Nature*, 402:390–393, 1999.
- [20] R. Laflamme E. Knill and G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, 409:46–52, 2001.
- [21] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, Aug 1991.
- [22] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, and N. David Mermin. Quantum cryptography without bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 68:557–559, Feb 1992.
- [23] P. M. Alsing and G. J. Milburn. On entanglement and Lorentz transformations. *Quantum Inf. Compu.*, 2:487–512, 2002.
- [24] H. Terashima and M. Ueda. Einstein-Podolsky-Rosen correlation seen from moving observers. *Quantum Inf. Comput.*, 3:224–228, 2003.
- [25] Jakub Rembieliński and Kordian Andrzej Smoliński. Einstein-Podolsky-Rosen correlations of spin measurements in two moving inertial frames. *Phys. Rev. A*, 66:052114, Nov 2002.

-
- [26] Robert M. Gingrich and Christoph Adami. Quantum entanglement of moving bodies. *Phys. Rev. Lett.*, 89:270402, Dec 2002.
- [27] Doyeol Ahn, Hyuk-jae Lee, Young Hoon Moon, and Sung Woo Hwang. Relativistic entanglement and Bell's inequality. *Phys. Rev. A*, 67:012103, Jan 2003.
- [28] Hui Li and Jiangfeng Du. Relativistic invariant quantum entanglement between the spins of moving bodies. *Phys. Rev. A*, 68:022108, Aug 2003.
- [29] E. P. Wigner. On unitary representations of the inhomogeneous Loretz group. *Ann. Math.*, 40:149, 1939.
- [30] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 1995.
- [31] Hiroaki Terashima and Masahito Ueda. Einstein-Podolsky-Rosen correlation in a gravitational field. *Phys. Rev.*, A69:032113, 2004.
- [32] Jackson Said and Kristian Zarb Adami. Einstein-podolsky-rosen correlation in kerr-newman spacetime. *Phys. Rev. D*, 81:124012, Jun 2010.
- [33] Felipe Robledo-Padilla and Hugo García-Compeán. Entangled spinning particles in charged and rotating black holes. *Physics Essays*, 26:1–21, 2013.
- [34] J. F. Plebański and M. Demiański. Rotating, charged, and uniformly accelerating mass in general relativity. *Annals Phys.*, 98:98–127, 1976.
- [35] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, and E. Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations, 1st edition*. Cambridge University Press, 1980.
- [36] J. B. Griffiths and Jiri Podolsky. Accelerating and rotating black holes. *Class.Quant.Grav.*, 22:3467–3480, 2005.
- [37] J. B. Griffiths and J. Podolsky. Global aspects of accelerating and rotating black hole space-times. *Class.Quant.Grav.*, 23:555–568, 2006.
- [38] J. Podolsky and J. B. Griffiths. Accelerating Kerr-Newman black holes in (anti-)de Sitter space-time. *Phys.Rev.*, D73:044018, 2006.
- [39] J. B. Griffiths and J. Podolsky. A New look at the Plebanski-Demianski family of solutions. *Int.J.Mod.Phys.*, D15:335–370, 2006.

-
- [40] J. B. Griffiths and J. Podolský. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [41] Dietmar Klemm. Rotating black branes wrapped on Einstein spaces. *JHEP*, 9811:019, 1998.
- [42] Marco M. Caldarelli, Guido Cognola, and Dietmar Klemm. Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories. *Class.Quant.Grav.*, 17:399–420, 2000.
- [43] M.H. Dehghani. Rotating topological black holes in various dimensions and AdS / CFT correspondence. *Phys.Rev.*, D65:124002, 2002.
- [44] W. Chen, H. Lu, and C.N. Pope. Kerr-de Sitter black holes with NUT charges. *Nucl.Phys.*, B762:38–54, 2007.
- [45] W. Chen, H. Lu, and C.N. Pope. General Kerr-NUT-AdS metrics in all dimensions. *Class.Quant.Grav.*, 23:5323–5340, 2006.
- [46] Don N. Page, David Kubiznak, Muraari Vasudevan, and Pavel Krtous. Complete integrability of geodesic motion in general Kerr-NUT-AdS spacetimes. *Phys.Rev.Lett.*, 98:061102, 2007.
- [47] O.P. Santillan. Tri-Sasaki 7-metrics fibered over a QK limit Plebanski-Demianski metrics. *hep-th/0701126*, 2007.
- [48] David Kubiznak and Pavel Krtous. On conformal Killing-Yano tensors for Plebanski-Demianski family of solutions. *Phys.Rev.*, D76:084036, 2007.
- [49] Pavel Krtous, Valeri P. Frolov, and David Kubiznak. Hidden Symmetries of Higher Dimensional Black Holes and Uniqueness of the Kerr-NUT-(A)dS spacetime. *Phys.Rev.*, D78:064022, 2008.
- [50] Marco Cariglia, Pavel Krtous, and David Kubiznak. Dirac Equation in Kerr-NUT-(A)dS Spacetimes: Intrinsic Characterization of Separability in All Dimensions. *Phys.Rev.*, D84:024008, 2011.
- [51] Dietmar Klemm and Masato Nozawa. Supersymmetry of the C-metric and the general Plebanski-Demianski solution. *Journal of High Energy Physics*, 2013(5):1–21, 2013.
- [52] Valeria Kagramanova, Jutta Kunz, and Claus Lammerzahl. Charged particle interferometry in Plebanski-Demianski space-times. *Class.Quant.Grav.*, 25:105023, 2008.

-
- [53] J. Audretsch and C. Lämmerzahl. Local and nonlocal measurements of the Riemann Tensor. *Gen. Rel. Grav.*, 15:495, 1983.
- [54] Hiroaki Terashima and Masahito Ueda. Spin decoherence by spacetime curvature. *J. Phys.*, A38:2029, 2005.
- [55] Amir D. Aczel. *Entanglement*. Four Walls Eight Windows, 2002.
- [56] N. Bohr. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? *Physical Review*, 48:696–702, 1935.
- [57] Gennaro Auletta. *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics*. World Scientific, 2009.
- [58] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1994.
- [59] Carl A. Kocher and Eugene D. Commins. Polarization Correlation of Photons Emitted in an Atomic Cascade. *Phys.Rev.Lett.*, 18:575–577, 1967.
- [60] J. I. Cirac and P. Zoller. Preparation of macroscopic superpositions in many-atom systems. *Phys. Rev. A*, 50:R2799–R2802, Oct 1994.
- [61] Amit Goswami. *Quantum Mechanics*. Waveland Press, Inc., 2003.
- [62] Alan Aspect. Introduction: John Bell and the second quantum revolution. In J. S. Bell, editor, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [63] Ramon Lapiedra. *Las carencias de la Realidad*. Tusquets Editores, 2008.
- [64] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982.
- [65] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *gedankenexperiment*: A New Violation of Bell’s Inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91–94, Jul 1982.
- [66] N. David Mermin. Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory. *Physics Today*, 38:38, 1985.
- [67] Stephen W. Hawking. *Historia del Tiempo*. Editorial Crítica, 1988.
- [68] Albert Einstein. *Relativity*. Three River Press, 1961.

-
- [69] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [70] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [71] Robert M. Wald. *Espacio, Tiempo y Gravitación: La teoría del “Big Bang” y los agujeros negros*. Fondo de Cultura Económica, 1998.
- [72] Asher Peres and Daniel R. Termó. Quantum information and relativity theory. *Rev. Mod. Phys.*, 76:93–123, 2004.
- [73] Horst von Borzeszkowski and Michael B. Mensky. EPR effect in gravitational field: nature of non-locality. *Phys. Lett. A*, 269:197–203, 2000. eprint arXiv:quant-ph/0007085.
- [74] P. M. Alsing and G. J. Stephenson Jr. The Wigner rotation for photons in an arbitrary gravitational field. eprint arXiv:quant-ph/0902.1399, 2009.
- [75] Steven Weinberg. *Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995.
- [76] Hiroaki Terashima and Masahito Ueda. Einstein-Podolsky-Rosen correlation seen from moving observers. *Quantum Inf. Comput.*, 3:224–228, 2003.
- [77] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Taylor & Francis Group, 2003.
- [78] P.M. Alsing, Jr. Stephenson, G.J., and P. Kilian. Spin-induced non-geodesic motion, gyroscopic precession, Wigner rotation and EPR correlations of massive spin-1/2 particles in a gravitational field. eprint arXiv: quant-ph/0902.1396, 2009.
- [79] Bernard F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, 2000.
- [80] D. Raine and E. Thomas. *Black Holes, An Introduction*. Imperial College Press, 2010.
- [81] Hugo García-Compeán and Felipe Robledo-Padilla. Quantum entanglement in Plebański-Demiański spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 30:235012, 2013.
- [82] R. H. Rietdijk and J. W. van Holten. Killing tensors and a new geometric duality. *Nucl. Phys.*, B472:472–446, 1996. eprint arXiv:hep-th/9511166v1.
- [83] A. Al-Badawi and M. Halilsoy. On the physical meaning of the NUT parameter. *Gen. Rel. Grav.*, 38:1729, 2006.

-
- [84] G.W. Gibbons and S.W. Hawking. Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation. *Phys.Rev.*, D15:2738–2751, 1977.
- [85] M. Mortazavimanesh and Morteza Mohseni. Spinning particles in Schwarzschild-de Sitter space-time. *Gen.Rel.Grav.*, 41:2697–2706, 2009.
- [86] J. B. Griffiths and Jiri Podolsky. Accelerating and rotating black holes. *Class.Quant.Grav.*, 22:3467–3480, 2005.
- [87] J. B. Griffiths, P. Krtous, and J. Podolsky. Interpreting the C-metric. *Class.Quant.Grav.*, 23:6745–6766, 2006.
- [88] J. Foster and J. D. Nightingale. *A short course in General Relativity*. Springer, 1994.
- [89] Hermann Minkowski. Die grundgleichungen für die elektromagnetischen vorgänge in bewegten körpern. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse.*, pages 53–111, 1908.

Publicaciones

Classical and Quantum Gravity, 01/2013; 30:235012

Quantum entanglement in Plebanski-Demianski spacetimes

Coautores: Dr. H. García-Compeán

For an Einstein-Podolsky-Rosen pair of spin-1/2 particles in circular orbits in a general axially symmetric spacetime, the spin precession angle is obtained. Hovering observers are introduced for ensuring fixed reference frames to perform suitable reliable measurements. Frame-dragging of spinning holes is explicitly incorporated relative to hovering observers. The spin-singlet state is found to be mixed with the spin-triplet by acceleration and gravity effects, which deteriorate the perfect anti-correlation of an entangled pair of spins measured by hovering observers. Finally, an algorithm to calculate spin precession for a general axially symmetric spacetime is proposed. This algorithm is applied to study the complete list of expanding and twisting Type-D Plebanski-Demianski black holes and their descendent limiting solutions with lower parameters.

Physics Essays, 03/ 2013 26 (1):86

Entangled spinning particles in charged and rotating black holes

Coautores: Dr. H. García-Compeán

Spin precession for an Einstein-Podolsky-Rosen pair of spin-1/2 massive particles in equatorial orbits around a Kerr-Newman black hole is studied. Hovering observers are introduced to ensure static reference frames to measure or prepare the spin state. These observers also guarantee a reliable direction to compare spin states in rotating black holes. The velocity of the particles due to frame-dragging is explicitly incorporated by addition of velocities with respect the hovering observers and the corresponding spin precession angle is computed. The spin-singlet state is proved to be mixed with the spin-triplet by dynamical and gravity effects, thus it is found that a perfect anticorrelation of entangled states for these observers is explicitly deteriorated. Finally, an analysis concerning the different limit cases of parameters of spin precession including the frame-dragging effects is carried out.

Pramana, 03/ 2013 80 (3):479

Mass shift of sigma-Meson in Nuclear Matter

Coautores: Dr. J. R. Morones, Dr. A. Santos-Guevara y M. Menchaca

The propagation of sigma meson in nuclear matter is studied in the Walecka model, assuming that the sigma couples to a pair of nucleon-antinucleon states and to particle-hole

states, including the in medium effect of sigma-omega mixing. We have also considered, by completeness, the coupling of sigma to two virtual pions. We have found that the sigma meson mass decreases respect to its value in vacuum and that the contribution of the sigma omega mixing effect on the mass shift is relatively small.

Revista INGENIERÍAS, 8 de julio 2007
UANL, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Los Vectores en la Física
Coautores: Dr. J. R. Morones y M. Menchaca

Tomo una aplicación como de la invarianza de forma o covarianza, se muestra cómo el uso de cuadvectores en el espacio-tiempo, conduce a una evidente manifestación de la unificación de los campos eléctrico y magnético, mostrándolos como aspectos diferentes de una entidad única: el campo electromagnético.

Entangled spinning particles in charged and rotating black holes

Felipe Robledo-Padilla^{1,a)} and Hugo García-Compeán^{2,b)}

¹*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, Ciudad Universitaria, San Nicolás de los Garza, Nuevo León 66450, Mexico*

²*Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, P.O. Box 14-740, 07000 México D.F., Mexico*

(Received 6 September 2012; accepted 23 December 2012; published online 21 February 2013)

Abstract: Spin precession for an Einstein–Podolsky–Rosen pair of spin-1/2 massive particles in equatorial orbits around a Kerr–Newman black hole is studied. Hovering observers are introduced to ensure static reference frames to measure or prepare the spin state. These observers also guarantee a reliable direction to compare spin states in rotating black holes. The velocity of the particles due to frame-dragging is explicitly incorporated by addition of velocities with respect to the hovering observers and the corresponding spin precession angle is computed. The spin-singlet state is proved to be mixed with the spin-triplet by dynamical and gravity effects, thus it is found that a perfect anticorrelation of entangled states for these observers is explicitly deteriorated. Finally, an analysis concerning the different limit cases of parameters of spin precession including the frame-dragging effects is carried out. © 2013 Physics Essays Publication. [<http://dx.doi.org/10.4006/0836-1398-26.1.86>]

Résumé: La précession de spin pour une paire EPR des particules massives avec spin 1/2 en orbites équatoriales autour d'un trou noir de Kerr–Newman est étudiée. Des observateurs stationnaires sont présents pour assurer des cadres de références fixes pour mesurer et préparer l'état de spin. Ces observateurs garantissent aussi une direction fiable pour comparer des états de spin dans des trous noirs en rotation. La vitesse des particules par l'effet Lense-Thirring est explicitement incorporée par l'addition des vitesses en ce qui concerne les observateurs stationnaires et l'angle de précession de spin correspondant est calculé. L'état de spin singulet est observé pour être mélangé avec l'état de spin triplet par les effets de la dynamique et de la gravitation, ainsi il a été trouvé qu'une anti-corrélation parfaite d'états intriqués est explicitement détériorée selon ces observateurs. Finalement, une analyse concernant les différents cas limites des paramètres de précession de spin incluant les effets de Lense-Thirring est effectuée.

Key words: Entanglement; EPR Particles; Bell's Inequality; Spin; Frame-Dragging; Hovering Observers; Black Hole; Kerr–Newman Spacetime; Wigner Rotation; Vierbein; Angular Momentum; Charged Body.

I. INTRODUCTION

Entanglement of quantum states is a very interesting subject which has had a great deal of attention as a fundamental issue in physics since Einstein–Podolsky–Rosen (EPR) famous paper.¹ With the work by Bohm–Aharonov² for spin-entangled particles and Bell's hidden variables,³ it was possible to realize that quantum mechanics is the correct description of the quantum phenomena and eventual experimental results^{4–6} confirmed this fact. In recent years, a great deal of research on entangled states has been focused on quantum communication and teleportation,^{7–9} quantum computation,^{10–13} and quantum cryptography.^{14,15}

More recently the some general behavior of the entangled behavior of quantum states has been studied in the literature. The first steps were taken in the context of special relativity^{16–21} and later they were integrated within the framework of general relativity for the Schwarzschild spacetime²² and for the Kerr–Newman spacetime.²³

In particular for the case of the Schwarzschild spacetime, Terashima and Ueda²² considered a pair of spinning particles in an entangled state moving on equatorial motion. Their results showed that the acceleration and the gravitational effects spoiled the EPR correlation precisely in the directions that are the same than in nonrelativistic theory, and it apparently decreases the degree of the violation of Bell's inequality. In the mentioned remarkable paper, they also found that near the event horizon of the black hole, the spin precession is extremely fast. Consequently, it can be argued that there exists a small uncertainty in the identification of the positions of the observers leading to a fatal error in the identification of the measurement directions needed to maintain the perfect EPR correlation. This implies that the choices of the four-velocity and the vierbein (or tetrad) are very important for nonlocal communication in a curved spacetime using an EPR pair of spins.²²

The case of a rotating and charged black hole was studied in Ref. 23. There it was considered an observer at infinity and a free falling observer and it is found that the EPR correlation is unmeasurable for both cases at the event horizon and below. The spin precession approaches negatively to

^{a)}felipe.robledopd@uanl.edu.mx

^{b)}compean@fis.cinvestav.mx

infinity and that result implies an impossibility to extract the EPR correlation in that region.

The aim of the present paper is to extend previous work^{22,23} by considering a different kind of observers (not at infinity) and by including the frame-dragging effects explicitly. For this, we consider Kerr–Newman spacetime in a different coordinate system from that it was used in Ref. 23 and then we study the effects in the different limiting cases.

The approach we used in the present paper follows mainly that of Terashima and Ueda²² in analysis, notations, and conventions. The main idea is to look at the structure behind a Wigner rotation on the spin quantum state, which is locally well defined in the nonrelativistic theory. This transformation must preserve quantum probabilities of finding the spin state in the particular direction measured on a local inertial frame. In order to guarantee this, the transformation changing quantum state from a point to another one must be unitary. The Wigner rotation matrix²⁴ precisely achieves this. The rotation is composed by infinitesimal Lorentz transformations, which consist of a boost along the radial direction and a rotation in the angle direction of the orbital particle. Finally, it is found a precession of spin of a particle moving in curved spacetime due to the acceleration of the particle by an external force and due to the difference between local inertial frames at different points.

This paper is organized as follows. Section II is an overview of the Kerr–Newman black hole, its particular metric, their local inertial frames and event horizons. In Section III, the frame-dragging is discussed and the hovering observers are introduced. Section IV formulates step by step the spin precession in circular orbits of massive particles moving in equator and Section calculates the EPR correlation by Wigner rotations due to the motion and dragging velocity of each particle over the rotating spacetime. The relativistic addition of velocities is performed by the introduction of the zero angular momentum observers (ZAMOs) as a preliminary step. Our results are discussed in Section VI in terms of the limiting values of the different parameters. Then Reissner–Nordström, Kerr, and Kerr–Newman cases are analyzed independently and with these results the Bell's inequality is analyzed, closing the section. Conclusions and final remarks are presented in Section VII.

II. ROTATING AND CHARGED BLACK HOLES: THE KERR–NEWMAN GEOMETRY

The Kerr–Newman solutions form a three-parameter family of spacetime metrics, which in Boyer–Lindquist coordinates^{25,26} is given by

$$ds^2 = -\frac{\bar{\Delta}}{\Sigma}(dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\Sigma}{\bar{\Delta}} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [adt - (r^2 + a^2)d\phi]^2, \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= r^2 - 2mr + a^2 + e^2, \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

The three parameters of the family are electric charge e , angular momentum a , and mass m . The spacetime metric is expressed in geometric units ($G = 1$ and $c = 1$).

When $\bar{\Delta} \rightarrow 0$ the metric coefficient $g_{rr} \rightarrow 0$, then Eq. (1) becomes problematic and the metric fails to be strongly asymptotically predictable, and thus it does not describe black holes.²⁵ Therefore, this metric has physical meaning when $a^2 + e^2 \leq m^2$, which is consequence of solving $\bar{\Delta} = r^2 - 2mr + a^2 + e^2 = 0$ in g_{rr} . This component of the metric establishes two possible values of r for the Kerr–Newman black holes,

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 - e^2}, \quad (3)$$

whose horizon is denoted by r_+ . As in the Schwarzschild case, $r > r_+$ is the region where we can obtain sensible causal information of the system.

An important difference in Kerr–Newman is that the horizon is below the Schwarzschild radius $r_S = 2m$, as can be seen from r_+ equation. When $a^2 + e^2 = m^2$ it is called extreme Kerr–Newman black hole, hence $r_+ = r_-$ and the horizon is placed at $r = m$.

In order to describe the motion of spinning particles in a curved spacetime, the local inertial frame at each point is defined by a vierbein chosen as²⁶

$$\begin{aligned} e_0^\mu(x) &= \left(\frac{r^2 + a^2}{\sqrt{\Delta\Sigma}}, 0, 0, \frac{a}{\sqrt{\Delta\Sigma}} \right), & e_1^\mu(x) &= \left(0, \sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{\Sigma}}, 0, 0 \right), \\ e_2^\mu(x) &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}, 0 \right), & e_3^\mu(x) &= \left(\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\Sigma}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{\Sigma} \sin \theta} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

It is easy to show that this vierbein satisfies the standard conditions,²⁷

$$\begin{aligned} e_a^\mu(x) e_b^\nu(x) g_{\mu\nu}(x) &= \eta_{ab}, \\ e_\mu^a(x) e_a^\nu(x) &= \delta_\mu^\nu, \\ e_\mu^a(x) e_b^\mu(x) &= \delta_b^a, \end{aligned} \quad (5)$$

where the Latin indices are Lorentz indices and take the values 0, 1, 2, 3; the Greek indices run over the four general-coordinate labels (t, r, θ, ϕ) and Einstein's sum convention on the repeated indices is assumed.

In Ref. 23, a similar analysis was carried out, but a different vierbein was chosen, where the frame-dragging effects were not explicitly taken into account.

III. FRAME-DRAGGING

Consider a freely falling test particle with four-velocity u^μ in the exterior of a Kerr–Newman black hole. The covariant component of a four-velocity in a direction of a given symmetry (Killing vector field) is a constant. For an observer at infinite, there are two conserved quantities: the relativistic energy per unit mass $E = -u_\phi$ and the angular momentum per unit mass $L_z = u_\phi$.

Since $g_{\mu\nu}$ is independent of ϕ , the trajectory of the particle still conserves angular momentum u_ϕ . But the presence of $g_{t\phi} \neq 0$ in the metric introduces an important new effect on the particle trajectories.²⁸ The free fall test particle will acquire angular momentum as it is approaching the black hole. To see this, consider the contravariant four-velocity for a test particle, which is

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= u^t = g^{tt}u_t + g^{t\phi}u_\phi, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= u^\phi = g^{t\phi}u_t + g^{\phi\phi}u_\phi. \end{aligned} \quad (6)$$

This test particle would be falling now from infinite with originally zero angular momentum, i.e., $u_\phi = 0$. Despite the fact that initially the particle falls radially with no angular momentum, it acquires an angular motion during the in fall,²⁹ that is, from Eq. (6) the angular velocity as seen by a distant observer is given by

$$\omega(r, \theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}. \quad (7)$$

Equation (7) stands for a rotating relativistic body influences the surrounding matter through its rotation. Thus a particle dropped in a Kerr-like black hole from infinity (large distances) is dragged just by the influence of gravity so that it acquires an angular velocity ω in the same direction of rotation of the black hole. This effect decreases with distance.²⁸ From a physical point of view, we can interpret this phenomenon as a dragging of the local inertial frames by the rotating hole. This inertial frame rotates with an angular velocity ω relative to infinity, hence it is dragged with the rotation of the hole.²⁹

Consider now the same particle in circular orbit around the rotating black hole ($u_r = u_\phi = 0$). From Eq. (6), we get

$$u_{fd}^\phi = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}u_{fd}^t = \omega u_{fd}^t, \quad (8)$$

where we now identify u_{fd}^μ as the velocity of the particle due to this frame-dragging. Using the normalization condition for velocities $u^\mu u_\mu = -1$, it can be shown that

$$u_{fd}^t = \sqrt{\frac{-g_{\phi\phi}}{g_{tt}g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2}}. \quad (9)$$

Both Eqs. (8) and (9) constitute the components of the four-velocity of a test particle due to the frame-dragging as seen by a distant observer in the general frame.

We shall see later that the spin precession angle is calculated by infinitesimal Lorentz transformations of the velocity of a particle in a local inertial frame, because the spin is only defined in this kind of frames. Then, in order to find the velocity of a particle in a local inertial frame, we will consider a convenient set of hovering observers that will be useful to measure or prepare the relevant spin states. But first, as seen by long distances observers, the contravariant four-velocity is

$$u_h^\mu = (dt/d\tau, 0, 0, 0) = ((-g_{tt})^{-1/2}, 0, 0, 0), \quad (10)$$

and their covariant four-velocity is obtained by lowering indices, that is,

$$u_{\mu h} = \left(-\sqrt{-g_{tt}}, 0, 0, \frac{g_{t\phi}}{\sqrt{-g_{tt}}} \right). \quad (11)$$

On the other hand, the energy of a particle with respect to a local observer is the time component of the four-momentum of the particle in the observer's frame of reference. It is obtained by projecting out the four-momentum of the particle on the four-velocity of the observer, i.e., $mu^\mu(u_\mu)_{\text{observer}} = -E$.

Thus, the energy of the particle per unit mass due to the frame-dragging velocity with respect to a hovering observer is

$$u_{fd}^\mu u_{\mu h} = -E_h = -\gamma_{fd}, \quad (12)$$

where $\gamma_{fd} = (1 - v_{fd}^2)^{-1/2}$ is the usual relativistic gamma factor, v_{fd} is the local velocity of the particle due to the frame-dragging, and E_h is the relativistic energy per unit mass of the particle relative to a stationary hovering observer. It must not be confused with the energy E as seen by an observer at infinity, at the beginning of this section.

The local velocity due to the frame-dragging is then obtained from Eq. (12), and can be expressed as $\tanh \eta = v_{fd}$.

Consequently, the local inertial velocity due to the frame-dragging and measured by a hovering observer will be

$$u_{fd}^a = \gamma_{fd}(1, 0, 0, v_{fd}). \quad (13)$$

The scalar product Eq. (12), the energy per unit mass E_h , is an invariant because it takes the same value, independently of the coordinate system used to evaluate it. If we choose another observer with known velocity 4-vector, like an inertial observer or a free falling observer, he/she will measure the same energy per unit mass due to the frame-dragging of the particle, by equivalent projection Eq. (12). This physical quantity in two local frames of the same event (hovering and inertial observers for example) will be connected by a Lorentz transformation between them even though one or both of the frames may be accelerating. This follows because the instantaneous rates of clocks and lengths of rods are not affected by accelerations and depend only on the relative velocities.²⁹

Then, gathering previous results for Kerr–Newman metric, we can obtain the local inertial velocity as measured by a local observer.

The angular velocity Eq. (7) on equator $\theta = \pi/2$ is

$$\omega = a \left(\frac{2mr - e^2}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \bar{\Delta}} \right), \quad (14)$$

where positive a implies positive ω , so the particle acquires an angular velocity in the direction of the spin of the hole.

Therefore, as seen by a distant observer, the general four-velocities components u_{fd}^μ and u_{fd}^ν can be obtained from Eqs. (8) and (9), that is,

$$u_{fd}^\mu = \left(\frac{g_{\phi\phi}}{\Delta} \right)^{1/2} (1, 0, 0, \omega), \quad (15)$$

and from Eqs. (11), (12), and (15), the relativistic gamma factor and the local inertial frame velocity are

$$\gamma_{fd} = \frac{r^2 \sqrt{\bar{\Delta}}}{\sqrt{(\bar{\Delta} - a^2)[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \bar{\Delta}]}}, \quad (16)$$

$$v_{fd} = a \left(\frac{r^2 + a^2 - \bar{\Delta}}{r^2 \sqrt{\bar{\Delta}}} \right).$$

Finally, from Eq. (13) the local four-velocity due to frame-dragging measured by a hovering observer is

$$u_{fd}^a = \frac{1}{\sqrt{(\bar{\Delta} - a^2)[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \bar{\Delta}]}} \times (r^2 \sqrt{\bar{\Delta}}, 0, 0, a(r^2 + a^2 - \bar{\Delta})). \quad (17)$$

Now if $\tanh \eta = v_{fd}$, Eq. (17) can be re-expressed as

$$u_{fd}^a = (\cosh \eta, 0, 0, \sinh \eta), \quad (18)$$

where

$$\cosh \eta = \frac{r^2 \sqrt{\bar{\Delta}}}{\sqrt{(\bar{\Delta} - a^2)[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \bar{\Delta}]}}, \quad (19)$$

$$\sinh \eta = \frac{a(r^2 + a^2 - \bar{\Delta})}{\sqrt{(\bar{\Delta} - a^2)[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \bar{\Delta}]}}.$$

But it can be found a relative motion between the hovering observer and the local frame given by

$$u_h^a = \eta^{ab} e_b^\mu u_{fd}^\mu = \left(\sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{\bar{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta}}, 0, 0, -\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\bar{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta}} \right) = (\cosh \kappa, 0, 0, -\sinh \kappa), \quad (20)$$

which implies that the hovering observer is not at rest in the local frame Eq. (4).

We can remove this relative motion by a local Lorentz transformation and its inverse, that is,

$$\Lambda_b^a = \begin{pmatrix} \cosh \kappa & 0 & 0 & \sinh \kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \kappa & 0 & 0 & \sinh \kappa \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\Lambda_a^b = \begin{pmatrix} \cosh \kappa & 0 & 0 & -\sinh \kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \kappa & 0 & 0 & \sinh \kappa \end{pmatrix}.$$

Therefore, we shall consider a new vierbein $\tilde{e}_a^\mu = \Lambda_a^b e_b^\mu$, expressed by

$$\tilde{e}_0^\mu(x) = \left(\sqrt{\frac{\Sigma}{\bar{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta}}, 0, 0, 0 \right),$$

$$\tilde{e}_1^\mu(x) = \left(0, \sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{\Sigma}}, 0, 0 \right),$$

$$\tilde{e}_2^\mu(x) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}, 0 \right),$$

$$\tilde{e}_3^\mu(x) = \left(-\frac{a(r^2 + a^2 - \bar{\Delta}) \sin \theta}{\sqrt{\bar{\Delta} \Sigma} \sqrt{\bar{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta}}, 0, 0, \frac{\sqrt{\bar{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\bar{\Delta} \Sigma} \sin \theta} \right). \quad (22)$$

We can confirm that in the new local frame defined by Eq. (22), the hovering observer is at rest, i.e., $\tilde{u}_h^a = \eta^{ab} \tilde{e}_b^\mu u_{fd}^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Also it can be confirmed the local velocity of the freely falling particle $\tilde{u}_{fd}^a = \eta^{ab} \tilde{e}_b^\mu u_{fd}^\mu$ is still given by Eq. (17), which is important because we have to know the velocity due to the frame-dragging measured by a hovering observer with the right static coordinate frame. Thus, we shall use the vierbein Eq. (22) from now on.

Another feature of Kerr-like spacetime is the *static limit surface*. Consider a stationary particle, i.e., $r = \text{constant}$, $\theta = \text{constant}$, and $\phi = \text{constant}$. Thus, from spacetime metric Eq. (1), we have

$$-d\tau^2 = g_{tt} dt^2. \quad (23)$$

Then, for $g_{tt} \geq 0$ this condition cannot be fulfilled, so a massive particle cannot be stationary within the surface $g_{tt} = 0$, because, as we already know, a particle will acquire four-velocity due to the frame-dragging Eq. (6). Photons can satisfy this condition and only they can be stationary at the static limit. This is the reason why it is called static surface.

Solving the condition $g_{tt} = 0$ for r gives us the radius of the static limit surface

$$r_{st} = m + (m^2 - e^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}. \quad (24)$$

This radius is showed in Fig. 1 as r_{st} , and is above the horizon r_+ as we can see. It is important to emphasize that the static limit surface is not a horizon.²⁹ Later, we shall see why

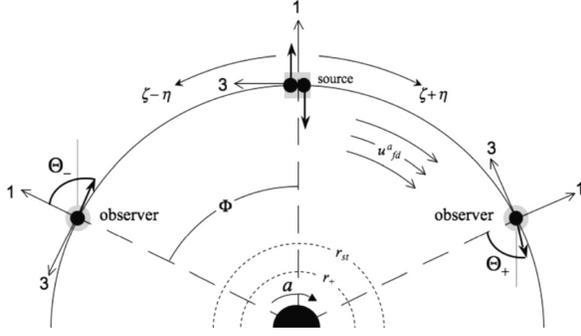


FIG. 1. An EPR gedanken experiment in the Kerr–Newman spacetime with an angular momentum parameter a . Two hovering observers (indicated by gray circles) and a static EPR source (gray square) are located at $\phi = \pm\Phi$ and 0, respectively. Both entangled particles are subject to the frame-dragging u_{fd}^a and leave the source with a local velocity $v = \tanh \xi = \tanh(\zeta \pm \eta)$ with regard to the hovering observers, which have plus sign for traveling on favor the rotation of black hole and minus for the opposite direction.

this is not a horizon for spin precession angle, but a limit for keeping the perfect anticorrelation.

IV. SPIN PRECESSION IN A KERR–NEWMAN BLACK HOLE

Now we consider massive particles with spin-1/2 in a Kerr–Newman black hole moving in a circular motion with radius r on the equatorial plane $\theta = \pi/2$. In spherical coordinates, the relevant velocity vector has two components, the temporal and the ϕ -coordinate at constant radius. The velocity vector field in Minkowski's flat-space determines the motion by the proper-velocity with $v = \tanh \xi = (1 - 1/\gamma^2)^{1/2}$, where $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$.

Following Ref. 22, we will use the local velocity $u^a = (\cosh \xi, 0, 0, \sinh \xi)$. Any local vector can be described on a general reference frame through a vierbein transformation. Local velocity then transforms as $u^\mu = \tilde{e}_a^\mu u^a$. Then a general contravariant 4-velocity is obtained as

$$\begin{aligned} u^t &= \frac{r}{\sqrt{\bar{\Delta} - a^2}} \cosh \xi - \frac{a(r^2 + a^2 - \bar{\Delta})}{r\sqrt{\bar{\Delta}}\sqrt{\bar{\Delta} - a^2}} \sinh \xi, \\ u^\phi &= \frac{\sqrt{\bar{\Delta} - a^2}}{r\sqrt{\bar{\Delta}}} \sinh \xi, \end{aligned} \quad (25)$$

and the covariant vector can be obtained by lowering indices of contravariant velocity by $u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu$. These velocities satisfy the normalization condition $u^\mu u_\mu = -1$ which ensure that any material particle travels with velocity lower than speed of light¹.

For the particle moving in orbital motion, we must apply an external force against the centrifugal force and the gravity. The acceleration due to this external force is given by

¹By the relativistic addition of velocities, the frame-dragging velocity will be incorporated on $u^\mu_\pm = (\cosh \xi_\pm, 0, 0, \sinh \xi_\pm)$ in Sec. V, with the argument ξ redefined by $\xi_\pm = \zeta \pm \eta$. The positive sign corresponds to a particle corotating with respect to the rotation of the hole and negative for counter-rotation.

$$a^\mu(x) = u^\nu(x) \nabla_\nu u^\mu(x). \quad (26)$$

On equatorial plane the acceleration yields

$$\begin{aligned} a^r &= \frac{1}{r^3(\bar{\Delta} - a^2)} [-\bar{\Delta}(e^2 - mr) \cosh^2 \xi \\ &\quad + 2\sqrt{\bar{\Delta}}a(e^2 - mr) \cosh \xi \sinh \xi \\ &\quad - (a^2(\bar{\Delta} + r^2 - mr) - \bar{\Delta}^2) \sinh^2 \xi]. \end{aligned} \quad (27)$$

In Section V, the frame-dragging velocity will be incorporated into velocity Eq. (25). The incorporation of the frame-dragging Eq. (17) leaves unchanged the structure of acceleration Eq. (26). This fact is due to the frame-dragging velocity u_{fd}^a is independent of t and ϕ . Thus the covariant derivatives of u^t and u^ϕ with respect to t and ϕ are not modified.

The change in the local inertial frame will be measured by χ_b^a and consists of a boost along the 1-axis and a rotation about the 2-axis and it is given by

$$\chi_b^a = -u^\nu \omega_{\nu b}^a, \quad (28)$$

where $\omega_{\nu b}^a$ are the connection one-forms which are defined as

$$\omega_{\mu b}^a = -\tilde{e}_b^\nu(x) \nabla_\mu \tilde{e}_\nu^a(x) = \tilde{e}_\nu^a(x) \nabla_\mu \tilde{e}_b^\nu(x). \quad (29)$$

In our particular situation, these connection components are easily computed,

$$\begin{aligned} \omega_{t1}^0 &= -\frac{(e^2 - mr)\sqrt{\bar{\Delta}}}{r^3\sqrt{\bar{\Delta} - a^2}}, \quad \omega_{t3}^1 = \frac{a(e^2 - mr)}{r^3\sqrt{\bar{\Delta} - a^2}}, \\ \omega_{\phi1}^0 &= \frac{a(e^2 - mr)\sqrt{\bar{\Delta}}}{r^3\sqrt{\bar{\Delta} - a^2}}, \quad \omega_{\phi3}^1 = \frac{a^2r^2 - \bar{\Delta}r^2 + ma^2r - a^2e^2}{r^3\sqrt{\bar{\Delta} - a^2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Therefore, the relevant boosts are described by the function,

$$\chi_1^0 = \frac{e^2 - mr}{r^2(\bar{\Delta} - a^2)} (\sqrt{\bar{\Delta}} \cosh \xi - a \sinh \xi), \quad (31)$$

while the rotation about the 2-axis is given by

$$\begin{aligned} \chi_3^1 &= -\frac{1}{r^2(\bar{\Delta} - a^2)} \\ &\quad \times \left(a(e^2 - mr) \cosh \xi + \frac{[a^2(\bar{\Delta} + r^2 - mr) - \bar{\Delta}^2]}{\sqrt{\bar{\Delta}}} \sinh \xi \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Next step is to relate the boost and rotation² with the rotation of the local four-momentum on the plane traced by the general four-vectors of velocity and acceleration. Then we can compute the infinitesimal Lorentz transformation given by

²Which represent the change on the local inertial frame along $u^\mu(x)$.

$$\lambda_b^a(x) = -\frac{1}{m} [a^a(x)p_b(x) - p^a(x)a_b(x)] + \chi_b^a, \quad (33)$$

where the local four-momentum defined as $p^a(x) = (m \cosh \xi, 0, 0, m \sinh \xi)$.

The boost along the 1-axis and the rotation about the 2-axis are, respectively,

$$\begin{aligned} \lambda_1^0 &= -\frac{\sinh \xi}{r^2 \sqrt{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta} - a^2)} \\ &\quad \times [A \sinh \xi \cosh \xi - B (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi)], \\ \lambda_3^1 &= \frac{\cosh \xi}{r^2 \sqrt{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta} - a^2)} \\ &\quad \times [A \sinh \xi \cosh \xi - B (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi)], \end{aligned} \quad (34)$$

where

$$\begin{aligned} A &= \bar{\Delta}^2 - (a^2 + mr - e^2) \bar{\Delta} - a^2 r^2 + a^2 mr, \\ B &= a \sqrt{\bar{\Delta}} (e^2 - mr). \end{aligned} \quad (35)$$

Thus, we can get the change of the spin which is expressed as

$$\vartheta_k^i(x) = \lambda_k^i(x) + \frac{\lambda_0^i(x)p_k(x) - \lambda_{k0}(x)p^i(x)}{p^0(x) + m}. \quad (36)$$

In our case, it becomes a rotation about the 2-axis through an angle,

$$\vartheta_3^1 = \frac{1}{r^2 \sqrt{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta} - a^2)} [A \sinh \xi \cosh \xi - B (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi)]. \quad (37)$$

Then, the complete rotation matrix due to the infinitesimal Lorentz transformations is given by

$$\vartheta_b^a(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\vartheta_3^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

In nonrelativistic quantum mechanics, the only kinematic transformations of reference frames that are allowed to consider are translations and rotations, which are explicitly unitary. In relativistic quantum mechanics, one should also consider boosts, which are explicitly nonunitary. Regardless of this, the particle states undergoes an effective momentum dependent local unitary rotation under boosts governed by the *little group* of Wigner rotation for massive particles, which leaves the appropriate local rest momentum invariant. This group is SO(3) for massive particles which is the group of ordinary rotations in 3D.¹⁶

In the case of the curved spacetime, the quantum state of one particle $|p^a(x), \sigma; x\rangle$ transforms under a local Lorentz transformation as

$$U(\Lambda(x)) |p^a(x), \sigma; x\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}^{(1/2)}(W(x)) |\Lambda p^a(x), \sigma'; x\rangle, \quad (39)$$

where σ represents the spin state. The local Wigner rotation is calculated by $W_b^a(x) \equiv W_b^a(\Lambda(x), p(x))$.

If a particle moves along a path $x^\mu(\tau)$ from $x_i^\mu(\tau_i)$ to $x_f^\mu(\tau_f)$, the iteration of the infinitesimal transformation for a finite proper time gives the corresponding finite Wigner rotation,

$$\begin{aligned} W_b^a(x_f, x_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^N \left[\delta_b^a + \vartheta_b^a(x_k) \frac{\hbar}{N} \right] \\ &= T \exp \left(\int_{\tau_i}^{\tau_f} \vartheta_b^a(x(\tau)) d\tau \right), \end{aligned} \quad (40)$$

as proved in Ref. 22. Then a total argument Φ is computed by integrating out $\delta\phi = u^\phi d\tau$, and the operator T is not needed because ϑ_b^a is constant during the motion³. Therefore, the velocity u^ϕ represents a trivial rotation about the 2-axis,

$$u^\phi \equiv \varphi_3^1 = -\varphi_1^3 = \frac{\sqrt{\bar{\Delta} - a^2}}{r \sqrt{\bar{\Delta}}} \sinh \xi, \quad (41)$$

since the curved spacetime defines the parallel transport needed to compare local inertial frames from one point to another.

Thus, the Wigner rotation becomes a rotation about the 2-axis,

$$\begin{aligned} W_b^a(\pm\Phi, 0) &= \exp \left(\int_0^\Phi \frac{\vartheta_b^a(x)}{\varphi_3^1(x)} d\phi \right) = \exp \left(\frac{\Phi}{u^\phi} \vartheta_b^a \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & 0 & \pm \sin \Theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (42)$$

where ϑ_b^a comes from Eq. (38), the angle of rotation is given by $\Theta = \Phi \vartheta_3^1 / u^\phi$ and ϑ_3^1 for the Kerr–Newman spacetime was given by Eq. (37), that is,

$$\Theta = \frac{\Phi}{r(\bar{\Delta} - a^2)^{3/2}} [A \cosh \xi - B (\coth \xi \cosh \xi - \sinh \xi)]. \quad (43)$$

V. EPR CORRELATION

In the present work, we consider two observers and an EPR source on the equator plane $\theta = \pi/2$, at a fixed radius above horizon ($r > r_+$), with azimuthal angles $\pm\Phi$ for observers and 0 for the EPR source. The observers and the EPR source are assumed to be hovering Eq. (10) over the black hole in order to keep them “at rest” in the Boyer–Linqvist coordinate system (t, r, θ, ϕ) and to use the static local inertial frame Eq. (22) to measure or prepare the spin state. The inertial frame is defined at each instant since

³The Kerr metric is the unique stationary axial-symmetric vacuum solution as the Carter–Robinson theorem asserts²⁹ and then ϑ_b^a is independent of the time coordinate.

the observers and EPR source are accelerated to keep staying at constant radius, and they are not influenced by the frame-dragging.

The EPR source emits a pair of entangled particles in opposite directions. The particles adopt a circular orbit in the corotating frame of the black hole due to the frame-dragging Eq. (15). This frame corresponds to have a ZAMOs. The world line of these observers is orthogonal to the surface of constant t , that is, $dx_{,\mu}u_{\nu}^{\mu}=0$. They have angular velocity ω as seen by a distant observer and the angular momentum of a particle is conserved in its local inertial frame. We will adopt a ZAMO observer as a preliminary step before we calculate the total local inertial velocity measured by the hovering observer. The local inertial velocity of the particles with constant four-momenta leaving the source by EPR process is $v_{\text{EPR}} = \tanh\zeta$ from the point of view of a ZAMO, thus,

$$u_{\text{EPR}}^a = (\cosh \zeta, 0, 0, \sinh \zeta). \quad (44)$$

Therefore, from the point of view of a hovering observer, the particles will have a local velocity given by the relativistic addition of the velocity of ZAMOs Eq. (18) measured by this hovering observer, plus the local velocity of the particles measured by ZAMOs Eq. (44), that is, $\tanh\zeta = \tanh(\zeta \pm \eta)$, where ζ comes from Section IV.

Once the particles leave the EPR source, one travels in direction of rotation of the black hole, and the other one travels in the opposite direction. Then, the final constant four-momenta is given by $p_{\pm}^a(x) = (m\cosh(\zeta \pm \eta), 0, 0, m\sinh(\zeta \pm \eta))$ measured by a hovering observer.

This incorporation of velocity due to the frame-dragging redefines Eq. (25) and all calculations of Section IV are consequently affected by the motion of the EPR particles. But the general structure is not modified and there appear no new terms, as previously mentioned for the acceleration computation.

Now, the spin-singlet state is defined by

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|p_+^a, \uparrow; 0\rangle |p_-^a, \downarrow; 0\rangle - |p_+^a, \downarrow; 0\rangle |p_-^a, \uparrow; 0\rangle], \quad (45)$$

where for keeping a simple notation it was written only the φ coordinate in the argument. All the previous considerations are depicted in a gedanken experiment shown in Fig. 1.

After a proper time Φ/u_{\pm}^{ϕ} , each particle reaches the corresponding observer. The Wigner rotation Eq. (42) becomes

$$W_b^a(\pm\Phi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta_{\pm} & 0 & \pm \sin \Theta_{\pm} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp \sin \Theta_{\pm} & 0 & \cos \Theta_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

where the angle Θ_{\pm} is given by Eq. (43) with ζ substituted by $\zeta_{\pm} = \zeta \pm \eta$. The sign depends on whether the motion of the entangled particle is in the same direction (or in the opposite sense) of the frame-dragging, that is,

$$\Theta_{\pm} = \frac{\Phi}{r(\bar{\Delta} - a^2)^{3/2}} [A \cosh(\zeta \pm \eta) - B(\coth(\zeta \pm \eta) \cosh(\zeta \pm \eta) - \sinh(\zeta \pm \eta))]. \quad (47)$$

The Wigner rotation is represented in terms of the Pauli's matrix σ_y as

$$D_{\sigma_y}^{(1/2)}(W(\pm\Phi, 0)) = \exp\left(\mp i \frac{\sigma_y}{2} \Theta_{\pm}\right). \quad (48)$$

Therefore, each particle state is transformed by the corresponding Wigner rotation, and the new total state is given by $|\psi'\rangle = W(\pm\Phi)|\psi\rangle$. Hence, in the local inertial frame at $\phi = +\Phi$ and $-\Phi$, each particle state is transformed separately by

$$|p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi'\rangle = \cos \frac{\Theta_{\pm}}{2} |p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle \pm \sin \frac{\Theta_{\pm}}{2} |p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle, \quad (49)$$

$$|p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi'\rangle = \mp \sin \frac{\Theta_{\pm}}{2} |p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle + \cos \frac{\Theta_{\pm}}{2} |p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle, \quad (50)$$

and the entangled state is described by

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} & \left[\cos\left(\frac{\Theta_+ + \Theta_-}{2}\right) (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle |p_-^a, \downarrow; -\Phi\rangle \right. \\ & - |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle |p_-^a, \uparrow; -\Phi\rangle) + \sin\left(\frac{\Theta_+ + \Theta_-}{2}\right) \\ & \left. \times (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle |p_-^a, \uparrow; \Phi\rangle + |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle |p_-^a, \downarrow; \Phi\rangle) \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

This result includes the trivial rotation of the local inertial frames $\pm\Phi$, and it can be eliminated by rotating the basis at $\phi = \pm\Phi$ about the 2-axis through the angles $\mp\Phi$, respectively, consequently we have

$$|p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi''\rangle = \cos \frac{\Phi}{2} |p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle \pm \sin \frac{\Phi}{2} |p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle, \quad (52)$$

$$|p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi''\rangle = \mp \sin \frac{\Phi}{2} |p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle + \cos \frac{\Phi}{2} |p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle. \quad (53)$$

In this basis, the state is written as follows:

$$\begin{aligned} |\psi''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} & [\cos \Delta (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle |p_-^a, \downarrow; -\Phi\rangle' \\ & - |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle |p_-^a, \uparrow; -\Phi\rangle') \\ & + \sin \Delta (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle |p_-^a, \uparrow; \Phi\rangle' \\ & + |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle |p_-^a, \downarrow; -\Phi\rangle')], \end{aligned} \quad (54)$$

where $\Delta = (\Theta_+ + \Theta_-)/2 - \Phi$. After some computations, the angle Δ is simplified and it yields

$$\begin{aligned} \Delta = \Phi & \left\{ \frac{\cosh \eta}{r(\bar{\Delta} - a^2)^{3/2}} [A \cosh \zeta - B \sinh \zeta \right. \\ & \left. \times \left(\frac{2 \cosh^2 \zeta - \cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta}{\cosh^2 \zeta - \cosh^2 \eta} \right) \right] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (55)$$

This is precisely the general relativistic effect that deteriorates the perfect anticorrelation in the directions that would be the same as each other if the spacetime were flat with non-relativistic particles. The spin-singlet state is mixed with the spin-triplet state. This is because while the spin-singlet state is invariant under spatial rotations, it is not invariant under Lorentz transformations Eq. (34).

This deterioration of the perfect anticorrelation is consequence of the manifest difference between the rotation matrix element ϑ_3^1 and trivial rotation ϕ_3^1 . It is important to note that the entanglement is still invariant under local unitary operations, and then it does not mean to spoil the nonlocal correlation. Because the relativistic effect arises from acceleration and gravity, the perfect anticorrelation can be still employed for quantum communication, by rotating the direction of measurement about the 2-axis through the angles $\mp\Theta$ in the local inertial frames of the hovering observers. The parallel transport in general relativity Eq. (28) does not give the directions that maintain the perfect anticorrelation, because the rotation matrix elements Eq. (38) and the components of the change in local inertial frame Eq. (28) do not coincide.

VI. KERR-NEWMAN SPIN PRECESSION RESULTS

As Terashima and Ueda showed²² for a Schwarzschild black hole, the acceleration and gravity deteriorate the EPR correlation for particles in a circular motion in equatorial plane. We summarize their results by describing in four important regions relative to the black hole plotted in Fig. 2.

- Region I: $r \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 0$, or far away the black hole (no gravitational effects) and static particles. This region corresponds to the nonrelativistic limit, where there are no corrections to quantum mechanics and where EPR proposed their *gedanken* experiment.¹ The precession angle vanishes ($\Delta=0$) and we get the maximal violation of Bell's inequality.
- Region II: $r \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 1$, it is still far away from the black hole but relativistic corrections should be taken into

account, which were also studied by Terashima and Ueda in Ref. 17. The angle Δ is positive and becomes infinite. It is not possible to maintain perfect anticorrelation and the particles cannot be used for quantum communication.

- Region III: $r \rightarrow r_s$, where $r_s = 2m$ is the Schwarzschild radius (event horizon). Independently of local inertial velocity of the particles, the precession angle becomes infinite ($\Delta \rightarrow -\infty$). The static observers cannot extract the EPR correlation from circularly moving particles unless they have infinite accuracy in their own positions. To exploit the EPR correlation on and beyond the horizon, the observers must choose a four-velocity and a nonsingular vierbein at the horizon, and thus the observers must fall into the black hole together with the particles.
- Region IV: Although acceleration and gravity deteriorate the EPR correlation as Terashima and Ueda showed, it is still possible to find a combination of local inertial velocity and position respect to the black hole that keeps the perfect anticorrelation. They defined a path where at radius $r = r_0$ the angle Δ vanishes. We will identify this path as an additional region and it is between the other three regions.

Between these regions one can find values of the angle (positive or negative) Δ , which deteriorates the perfect anticorrelation in the directions that would be the same as each other if the spacetime were flat.

We shall compare the Schwarzschild and Kerr–Newman spacetimes and we will find interesting differences. Also, with the results of Section V, we will analyze the influence of each parameter on the spin precession. There will be remarkable differences among these regions.

The parameters presented in figures are rates of the relevant parameter with respect to m , thus the mass parameter is used as a reference to express the charge and angular momentum ratio, represented by e/m for electric charge, a/m for angular momentum. One of the axis plots $v = v_{\text{EPR}}$ for the local inertial velocity due to the EPR process and $0 < m/r < 1$ for distance, with 0 corresponding to r at infinite and 1 for $r = m$, which is the smaller distance reached for extreme black holes.

A. Reissner–Nordström case

This case corresponds to a Schwarzschild black hole with a nonvanishing charge e . From the Kerr–Newman spacetime, when $a = 0$, we recover the Reissner–Nordström solutions and spin precession Eq. (55) reduces to

$$\Delta_{\text{RN}} = \Phi \left[\frac{r^2 - 3mr + 2e^2}{r\sqrt{r^2 - 2mr + e^2}} \cosh \zeta - 1 \right]. \quad (56)$$

This expression has physical meaning when $e \leq m$, which is a direct consequence from the event horizon Eq. (3) for black holes.

The angle Δ on Eq. (56) is plotted in Fig. 3 as function of the distance and local velocity $v = v_{\text{EPR}}$. When $m/r \rightarrow 0$ the experiment is placed far away from the black hole ($r \rightarrow \infty$), and $m/r = 1$ corresponds to the limit of distance that we can reach for an extreme black hole with charge $e = m$. When

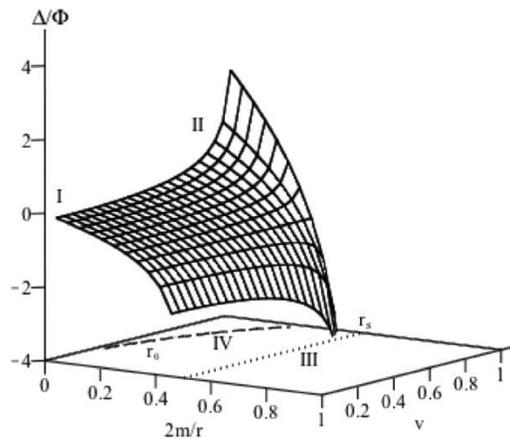


FIG. 2. The angle Δ/Φ for a Schwarzschild black hole as function of $2m/r$ and v , which is asymptotic to the event horizon $r_s = 2m$, indicated by a dotted line. Dashed line depicted the path $r = r_0$ which the spin precession Δ vanishes.

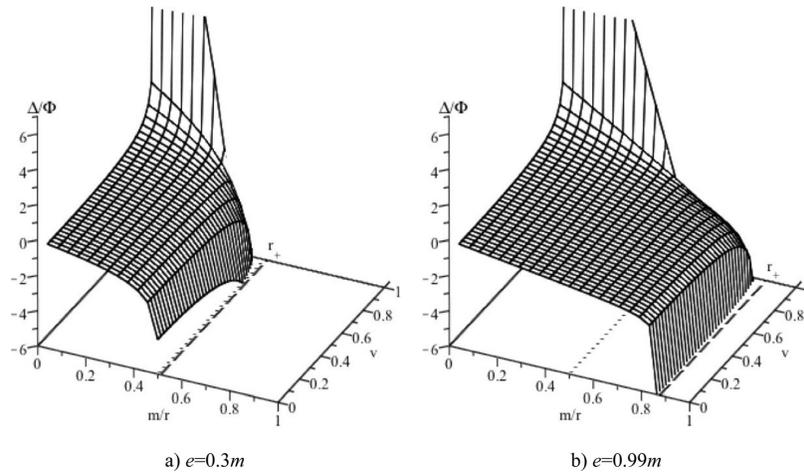


FIG. 3. The precession angle Δ/Φ for a Reissner–Nordström black hole for two values of charge e . They are asymptotic to the horizon $r = r_+$ (dashed line), which is below the Schwarzschild radius $r_s = 2m$ (dotted line).

$v = 0$ the particles are static in the EPR source and for $v \rightarrow 1$, they are ultrarelativistic particles. In Fig. 3, the precession angle is plotted independently from the observer position angle Φ . For $e = 0$, we recover all results of the spin precession for a Schwarzschild black hole and the horizon is at $r = 2m$.

The plots are quite similar as in the Schwarzschild case (compare with Fig. 2). Analogous and interesting effects of spin precession can be compared with Ref. 22 using the previous reviewed regions:

- Region I: The situation is identical to the Schwarzschild black hole. The spacetime is Minkowskian and $\Delta \rightarrow 0$.
- Region II: Far away from the horizon r_+ with $v \neq 0$, we recover the spin precession found in special relativity and the plot is asymptotic (see Fig. 3), i.e., $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta = \cosh \zeta - 1$ in agreement to Ref. 17.
- Region III: A new effect occurs near the black hole horizon. This effect corresponds to a shifting of horizon compared with the Schwarzschild case, from $r = 2m$ to $r = r_+ = m + (m^2 - e^2)^{1/2}$. As the charge e is increased, we reach values of r below the Schwarzschild horizon, it means that we can calculate values of Δ at $r = r_+ < 2m$ (see Fig. 1 where $r_{st} = 2m$). The lowest value of r that we can reach is when $e = m$ for an extreme black hole, whose horizon is at $r = r_+ = m$. These values of r are not allowed for the Schwarzschild case. From Fig. 3, we see how the horizon is shifted as the charge is increased. $\Delta \rightarrow -\infty$ as the horizon is reached, no matter the velocity of the particles considered. EPR correlation then is totally lost. The same behavior of Δ was present in Schwarzschild radius in Ref. 22.

The divergence of the spin precession originates from the fact the vierbein Eq. (22) and the four-velocity Eq. (25) become singular at the horizon r_+ . These singularities are connected with the breakdown of the coordinate system (t, r, θ, ϕ) .

- Region IV: It is still possible to keep circular orbits in the path $r = r_0$, with perfect anticorrelation $\Delta = 0$. Thus, for a

particular position, the local inertial velocity of particles v_{EPR} must be tuned at the beginning from the source, In Fig. 4, r_0 is plotted for three suitable values of charge e in function of position m/r and local inertial velocity v . We can see that for large distances ($m/r \rightarrow 0$), it is possible to have the perfect anticorrelation with low values of v . Meanwhile, the horizon is reached, we must increase the local velocity of the particles to keep the perfect anticorrelation.

As in the Schwarzschild case, near the horizon there is a not null precession angle ($\Delta \neq 0$), independently of the velocity of the particle. Then it is not possible to have a perfectly anticorrelated orbits. In Fig. 4, the limit circular orbits correspond to the point where r_0 ends on the top of the

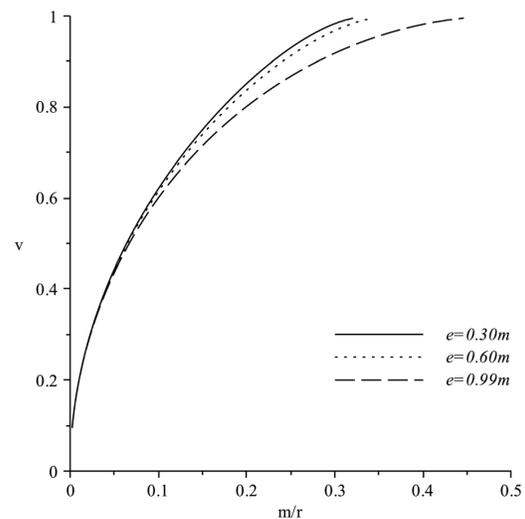


FIG. 4. Parametric plot of position m/r and local inertial velocity v for path r_0 that keep a perfect anticorrelation ($\Delta = 0$) for a Reissner–Nordström black hole.

figure. For large values of e , we can have perfect anticorrelated orbits closer to the horizon, but there is no possible to find a r_0 below the Schwarzschild radius.

B. Kerr case

Now we consider a rotating black hole without charge. It corresponds to the Kerr spacetime. The spin precession has the same form of Eq. (55), but with different coefficients A and B , that is, after setting $e = 0$, we get

$$\Delta_K = \Phi \left\{ \frac{\cosh \eta}{r(r^2 - 2mr)^{3/2}} \left[A_K \cosh \zeta - B_K \sinh \zeta \right] \times \left(\frac{2 \cosh^2 \zeta - \cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta}{\cosh^2 \zeta - \cosh^2 \eta} \right) - 1 \right\}, \quad (57)$$

where

$$\begin{aligned} A_K &= r^4 - 5mr^3 + 6m^2r^2 - 2a^2mr, \\ B_K &= -amr\sqrt{r^2 - 2mr + a^2}. \end{aligned} \quad (58)$$

The precession angle is plotted in Fig. 5 for two values of angular momentum parameter a , as a function of distance and local velocity $v = v_{\text{EPR}}$. The distance is parameterized by m/r which means the experiment is placed at infinite when $m/r \rightarrow 0$, and $m/r = 1$ correspond to a “extreme” black hole, i.e., $a = m$. When $v = 0$, the particles are static at the EPR source and for $v \rightarrow 1$, they are ultrarelativistic. The precession angle was plotted independently from the observer position angle Φ . For $a = 0$, we recover all results of Schwarzschild spin precession in Ref. 22 as expected.

The plot is quite similar to Fig. 2, but with important differences. The effects due to the acceleration and gravity analyzed by regions are:

- Region I: Again the situation is identical to the Schwarzschild’s black hole. The frame-dragging has no contribution because it decreases with distance. Therefore, the spacetime is Minkowskian and $\Delta \rightarrow 0$ as $v = v_{\text{EPR}} \rightarrow 0$.

- Region II: There are no new effects. The frame-dragging has no contribution and the angle Δ is asymptotic to infinite when $v \rightarrow 1$ for ultrarelativistic particles.
- Region III: In the Schwarzschild and Reissner–Nordström spacetime, the divergence of the spin precession ($\Delta \rightarrow -\infty$) was at the horizon. Now, the divergence is present in two locations, one of them at the static limit surface and the other one is through the path defined by $v_{\text{EPR}} = v_{fd}$.

The first divergence in Eq. (57) is related to the static limit surface. As mentioned in Section III, any particle acquire velocity due to the frame-dragging as it falls to the black hole. When this particle reaches the static limit surface at $r = 2m$ for equatorial plane, its velocity tends asymptotically to speed of light. In the left part of Eq. (57), it is easy to see why precession angle diverges when distance is evaluated at $2m$. The divergence of the spin precession in the Kerr spacetime originates from the fact that the frame-dragging component Eq. (17) of the four-velocity Eq. (25) becomes singular at the static limit r_{st} . This feature contrasts with the Reissner–Nordström case, where the singularities were connected with the breakdown of the coordinate system (t, r, θ, ϕ) at r_+ .

Previously, it was mentioned that the static limit is not a horizon. Beyond r_{st} , it is still possible to get entangled particles in circular orbits. The region inside the interval $r_+ \leq r < 2m$ has a similar behavior as Region I and II (see in particular Fig. 5(b) where is more clear this feature). Frame-dragging has no effect and the precession angle Δ_K is asymptotic near the static limit at $2m$ and also for particles with $v_{\text{EPR}} \rightarrow 1$.

But near the horizon r_+ the function (57) is well defined. This is an unexpected result if we compare with Schwarzschild and Reissner–Nordström cases, where the horizon represents an asymptotic limit.

For $r < r_+$, the coordinate system breaks down and we are unable to find the precession angle for orbital particles.

The second divergence corresponds to a coupling between the EPR velocity and the frame-dragging. In Fig. 5, it is represented by peaks an asymptotic infinite

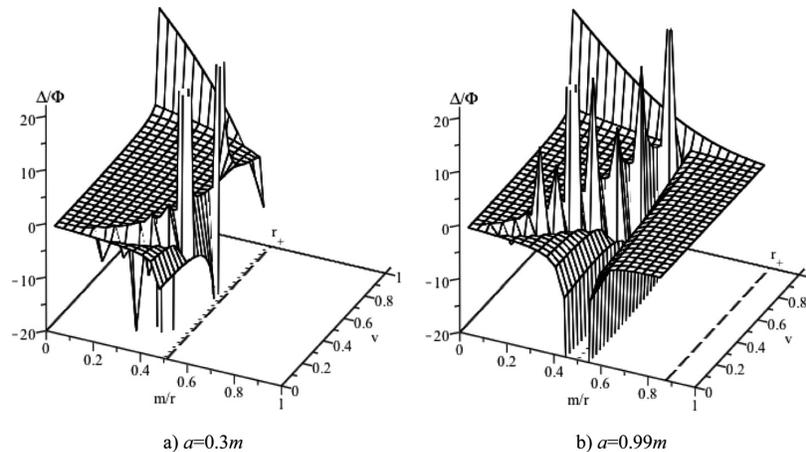


FIG. 5. The precession angle Δ/Φ for a Kerr black hole for two values of angular momentum parameter a . They are asymptotic to the static limit $r_{st} = 2m$ and along a path $v = v_{fd}$. The peaks represent an asymptotic infinite wall.

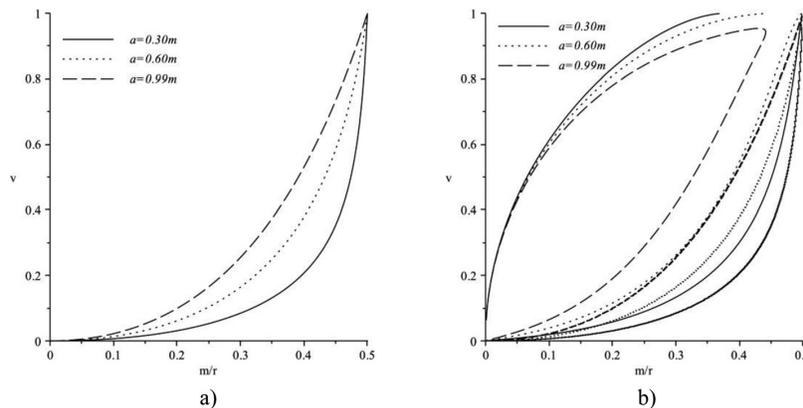


FIG. 6. (a) Local inertial velocity due to the frame-dragging for three values of a . The infinite wall in Fig. 5 follow the path traced by this plot when $v_{\text{EPR}} = v_{fd}$. (b) Parametric plot of position m/r and local inertial velocity v for path r_0 that keep a perfect anticorrelation ($\Delta = 0$) for a Kerr black hole.

“wall.” This wall follows a curved path defined by $\cosh^2 \zeta = \cosh^2 \eta$ in Eq. (57), which is easy to verify that corresponds to $v_{\text{EPR}} = v_{fd}$.

When the velocity of the first particle equals the velocity of the frame-dragging, Δ_K , becomes asymptotically infinity. Physically, one particle remains static because v_{EPR} equals v_{fd} , meanwhile, the other particle continues his travel, as seen by the hovering observer. The static particle never reaches the observer, and therefore it is not possible to know the anticorrelation between the particles.

This situation represents a particular feature for Kerr-like spacetime. In Schwarzschild, Reissner–Nordström and Ref. 23, the plots were very smooth until their functions reach their horizons. Here, the plot presents this infinite wall following the path which corresponds to the velocity that experience a free falling particle due to the frame-dragging (see Fig. 6(a)).

- Region IV: We can see in Fig. 6(b) that away from black hole, there is a low velocity that keeps the perfect anticorrelation, as in the Schwarzschild and Reissner–Nordström cases. As $r \rightarrow r_{st}$ there is a nonvanishing precession angle, independently of the velocity of the particle v_{EPR} . Perfectly anticorrelated orbits cannot be kept and r_0 has a limit value as in the Reissner–Nordström spacetime. We can see this limit value when r_0 ends on the right top of the Fig. 6(b). Near the static limit, the contribution of the frame-dragging allows three values of v_{EPR} for the same value of angular momentum parameter a . This new effect is not present in the Schwarzschild and Reissner–Nordström cases and in the previous work in Ref. 23 neither. When the static limit is reached, the velocity due to the EPR process must be the speed of light in order to get a perfect anticorrelated particles.

C. Kerr–Newman case

We are now in position to analyze the complete Kerr–Newman spacetime and its effects on entangled particles. From Eq. (55), it can be shown that Region I and II have the same behavior for a Minkonski spacetime. This is

not a surprising result, as we have seen in previous cases of this section a and e decreases with distance.

For Region III, the static limit Eq. (24) is reduced to $r_{st} = m + (m^2 - e^2)^{1/2}$ on the equator. It coincides with the horizon for a Reissner–Nordström spacetime. The static limit r_{st} represents again an asymptotic limit for calculation of the precession angle Δ in the Kerr–Newman black holes. Contrary to Kerr spacetime where the static limit is placed at $r = 2m$, now it is below and this limit depends in the charge of black hole, depicted by a dotted line in Fig. 7. In this, Figs. 7(a) and 7(b) have the same horizon Eq. (3) as well as 7(c) and 7(d) between them. In (a) r_{st} is too close to r_+ that dotted line cannot be distinguished. Figures 7(a) and 7(c) have the same r_{st} because the electric charge parameter e is equal for both. Once again, we can observe the infinite wall path due to the coupling of v_{EPR} with v_{fd} . This asymptotic path is not constrained to the region $r > 2m$ nor above the horizon, but above the static limit.

Like in Kerr spacetime, the region between $r_+ \leq r < 2m$ is not affected by the frame-dragging and Δ tends asymptotically to infinity near r_{st} . Finally, the coordinate system breakdown when r equals r_+ .

D. Uncertainties in observers' positions and Bell's inequality

When the hovering observers measure the spin of each entangled particle, in principle they could adjust the direction of the measure by Eq. (55) to get the perfect anticorrelation. As we have seen, near the static limit and on the infinite wall path the precession angle Δ will change very fast, making impossible to keep a position Φ without uncertainty for the hovering observers. As observed in Ref. 22, the error of the angle Θ to keep the perfect EPR correlation is given by

$$\delta\Theta = \delta\Phi \left| 1 + \frac{\Delta}{\Phi} \right|, \quad (59)$$

and near these asymptotic limits, $\delta\Theta$ must be less than π . If not, the hovering observers cannot set the directions of measurement in order to extract the EPR correlation. To utilize

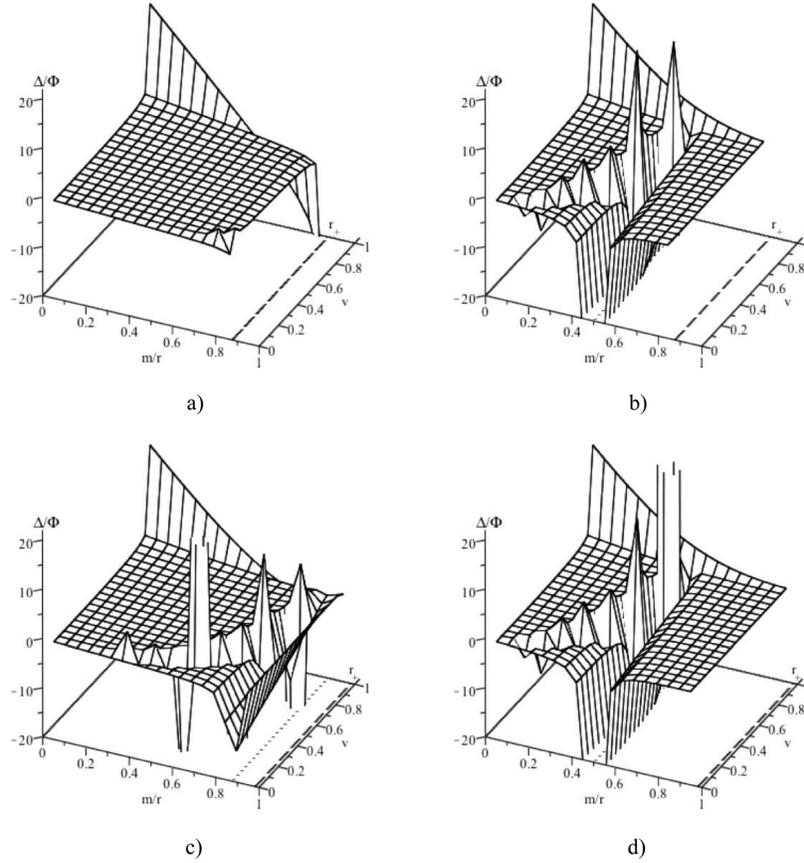


FIG. 7. The precession angle $\Delta\Phi$ for a Kerr–Newman black hole for a pair of values of a and e , that keep r_+ constant (dashed line). The dotted line represents the static limit surface on equatorial plane. The plots are asymptotic at $r = r_{st}$ and along a path $v_{\text{EPR}} = v_{fd}$. The peaks represent an asymptotic infinite wall. In (a) r_{st} is too close to r_+ that dotted line cannot be distinguished. a) $a = 0.01m$, $e = 0.99m$, b) $a = 0.99m$, $e = 0.01m$, c) $a = 0.14m$, $e = 0.99m$, d) $a = 0.99m$, $e = 0.14m$.

the EPR correlation for quantum communication, $\delta\Phi$ and r must satisfy

$$\delta\Phi < \pi \left| 1 + \frac{\Delta}{\Phi} \right|^{-1}. \quad (60)$$

When r_{st} is reached for the Kerr–Newman spacetime, $\delta\Phi$ must vanish because the velocity of the spin precession Eq. (25) is infinite due to the frame-dragging. Therefore, on the static limit, the hovering observers will not obtain the right EPR correlation from the particles, unless they can keep their positions Φ without uncertainty.

From the perspective of Bell's inequality, our previous results give rise to a decrement in the degree of the violation of that inequality, that is,

$$\langle \mathcal{Q}'S' \rangle + \langle \mathcal{R}'S' \rangle + \langle \mathcal{R}'T' \rangle - \langle \mathcal{Q}'T' \rangle = 2\sqrt{2} \cos^2 \Delta, \quad (61)$$

where the trivial rotations of the local inertial frames $\pm\Phi$ has been discarded, the spin component of one particle is measured in the $(\cos\Phi, 0, -\sin\Phi)$ direction (component \mathcal{Q}') or in the $(0, 1, 0)$ direction (component \mathcal{R}'), and the spin component of the other is measured in the $(-\cos\Phi, -1, \sin\Phi)/\sqrt{2}$

direction (component S') or in the $(\cos\Phi, -1, \sin\Phi)/\sqrt{2}$ direction (component T') as in Ref. 22 were established.

In order to use Eq. (61) for entanglement process (see Introduction), the hovering observers must take into account all reviewed effects due to the gravity, the frame-dragging and acceleration. As Ref. 22 showed, the spin component of one particle must be measured in the $(\cos\Theta, 0, -\sin\Theta)$ direction or in the $(0, 1, 0)$ direction in the local inertial frame at $\phi = \Phi$. For the other particle, the spin component must be measured in the $(-\cos\Theta, -1, -\sin\Theta)/\sqrt{2}$ direction or in the $(\cos\Theta, -1, \sin\Theta)/\sqrt{2}$ direction in the local inertial frame at $\phi = -\Phi$.

Finally, as soon the observers are placed near the asymptotic limits, it will be almost impossible to keep their position Φ , i.e., a small uncertainty $\delta\Phi$ translates to an uncertainty in $\delta\Theta$ from Eq. (59). This error in Θ decreases the degree of violation as $2\sqrt{2}\cos^2\delta\Theta$, and this error must be greater than two in order to restore the maximal violation of Bell's inequality. Thus, from Eq. (59), $\delta\Phi$ and r must be adjusted at least,

$$\delta\Phi < \sqrt{2} \left| 1 + \frac{\Delta}{\Phi} \right|^{-1}. \quad (62)$$

It is important to note that near the horizon for Reissner–Nordström and the static limit and the infinite wall path for Kerr and Kerr–Newman, the precession angle is asymptotically divergent and there is no possible the maximal violation of Bell’s inequality. Thus free falling observers and different vierbeins can be chosen to avoid this divergence of spin precession angle.

VII. CONCLUSIONS

In this work, we constructed an equation that describe the spin precession of a pair of entangled massive spin 1/2-particles, under the gravitational and acceleration effects of the neighborhood of a charged and rotating black hole. Because the rotation of this compact relativistic object, the frame-dragging should be taken into account for the complete description of this spacetime. We considered the effects of the frame-dragging as an additional velocity over the entangled particles and later we incorporated this velocity in the computation of spin precession angle. Hovering observers were considered in order to have suitable reference frames that ensure reliable directions to compare the 1/2-spin quantum states.

The total velocity measured by the hovering observers was performed as the addition of the velocity of a ZAMO describing the frame-dragging velocity, plus the local velocity of the EPR particles measured by the ZAMO. These ZAMOs corotates the black hole due to the frame-dragging and they were used as a preliminary step before calculating the total local inertial velocity measured by the hovering observer. With this local velocity, it was possible to calculate the infinitesimal Lorentz transformations and therefore the boost and rotations that produce the Wigner rotation for the particles.

From the point of view of the hovering observers, there is a Wigner rotation for each particle, because both particles travel with different velocities due to the frame-dragging of the spacetime. After these considerations, we arrived to Eq. (55) that describe the spacetime effects that deteriorate the perfect anticorrelation of the entangled particles compared if they would be in the Minkowski spacetime.

We found that the perfect anticorrelation of the particles is deteriorated due to the acceleration and gravitational effects, as previous works found,^{16,17,22} but now the charge and rotation parameter affect in particular ways the infinitesimal Lorentz transformations and therefore new features arise. These features contain new effects compared with the Schwarzschild spacetime²² and Ref. 23 results. But as expected, in the case of $a=0$ and $e=0$, our results recover the equations of Ref. 22.

In the Reissner–Nordström case, the electric charge parameter produces a shifting of the event horizon position from $r=2m$ to $r=r_+$ as being contrasted with the Schwarzschild spacetime. But this horizon is still an asymptotic limit for the calculation of spin precession.

In the Kerr spacetime, the angular momentum parameter establishes the commonly named static limit surface, where two interesting physical processes occur: it coincides with the Schwarzschild radius and represents one limit for calculation of the precession angle, and the frame-dragging has

the maximal value there, making massive particles ultrarelativistic and the spin precession angle $\Delta \rightarrow \infty$.

A remarkable difference was found when particles are close to the rotating black hole event horizon r_+ . The precession angle is well defined, which contrasts with Schwarzschild and Reissner–Nordström cases.

Another effect in Kerr spacetime occurs when the velocity of the particles due to the EPR process coincides with that of the frame-dragging. One of the particles keeps their position relative to the hovering observer, meanwhile the other particle reach one observer. Then, the spin precession angle goes to infinity. We found that the equation that describe the velocity of the frame-dragging Eq. (16), describes also a curved path where the spin precession angle is asymptotic.

Another asymptotic limit is at $r=2m$ because the spin precession angle is singular at this point, which coincides with the Schwarzschild case.

For the Kerr–Newman spacetime, the static limit coincides with the horizon of the Reissner–Nordström spacetime, but this limit does not represent an asymptotic limit for the spin precession angle.

It still possible to find circular orbits with perfect anticorrelation for a and e parameters along a path called r_0 , that is, $\Delta(r=r_0)=0$. Moreover, when only the angular momentum parameter a is considered, it can be reached a perfect anticorrelation close the static limit with three possible r_0 paths for the same value of a . This effect is not present in the Schwarzschild and Reissner–Nordström cases.

Even that the total electric charge in real black holes should be zero, it was considered as an arbitrary parameter in order to illustrate its effect on the spin precession. The electromagnetic interaction between charged particles and charged black hole was not taken into account and remain to be explored in a future work.

It would be interesting to make an analytic continuation in order to find the interior solution supporting the spin precession below the event horizon r_+ . Also one could consider a gedanken experiment mounted on ZAMOs for the Kerr-like spacetime.

Future work will extend the analysis discussed in the present paper to evaluate the behavior of spin precession on any general type D metric, making possible to investigate the EPR anticorrelation of particles in a seven parametric Plebański–Demiański spacetime.³⁰

ACKNOWLEDGMENTS

It is a pleasure to thank R. Morones, J. Comparan, and the staff of the FCFM, UANL for kind support. The work of F. R.-P. was supported by a CONACyT graduate fellowship. The work of H.G.-C. was supported in part by a CONACyT Grant 128761.

NOMENCLATURE

r	radial coordinate
t	time coordinate
θ	angular coordinate
ϕ	Azimutal coordinate
m	black hole mass

a	black hole angular momentum
e	black hole electric charge
G	universal gravitational constant
c	speed of light
$g_{\mu\nu}$	metric component
r_s	Schwarzschild radius
r_+	Kerr black hole external horizon
r_-	Kerr black hole internal horizon
$e_a^\mu(x)$	Vierbein
η_{ab}	Minkowski metric
δ_b^a, δ_b^z	Kronecker delta
E	energy per unit mass
L_z	angular momentum per unit mass
u^μ, u_μ	four-vector velocity
$\Lambda_b^a, \chi_b^a, \lambda_b^a, \vartheta_b^a$	Lorentz transformation
r_s	radius of the static limit surface
ϑ_b^a	covariant derivative
$\omega_\nu^a{}_b$	one-form connection
ξ, ζ, κ, η	special relativity hyperbolic argument (hyperbolic angle)
$W(x)$	Wigner rotation
Θ	angle of rotation
Φ	angular distance from source to observers
Δ	spin precession angle of entangled particles
\rightarrow	tends to
∞	infinite
r_0	distance where $\Delta = 0$ near the black hole
$\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$	quantum spin directions of measure

¹A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

²D. Bohm and Y. Aharonov, *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957).

³J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).

⁴J. F. Clauser and S. J. Freedman, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938 (1972).

⁵A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).

⁶W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3563 (1998).

⁷S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 797799 (1994).

⁸C. H. Bennet, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).

⁹G. Brassard, P. Horodecki, and T. Mor, *IBM J. Res. Dev.* **48**, 87 (2004).

¹⁰R. Jozsa, "Entanglement and quantum computation," in *Geometric Issues in the Foundations of Science*, edited by S. Huggett (Oxford University Press, 1997).

¹¹R. Raussendorf and H. J. Briegel, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 51885191 (2001).

¹²D. Gottesman and I. L. Chuang, *Nature* **402**, 390–393 (1999), eprint quant-ph/9908010.

¹³E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, *Nature* **409**, 46 (2001).

¹⁴A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661663 (1991).

¹⁵C. H. Bennet, G. Brassard, and N. D. Mermin, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 557 (1992).

¹⁶P. M. Alsing and G. J. Milburn, *Quantum Inf. Comput.* **2**, 487 (2002).

¹⁷H. Terashima and M. Ueda, *Quantum Inf. Comput.* **3**, 224 (2003).

¹⁸J. Rembielinski and K. A. Smolinski, *Phys. Rev. A* **66**, 052114 (2002).

¹⁹R. M. Gingrich and C. Adami, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270402 (2002).

²⁰D. Ahn, H. Lee, Y. H. Moon, and S. W. Hwang, *Phys. Rev. A* **67**, 012103 (2003).

²¹H. Li and J. Du, *Phys. Rev. A* **68**, 022108 (2003).

²²H. Terashima and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **69**, 032113 (2004).

²³J. Said and K. Z. Adami, *Phys. Rev. D* **81**, 124012 (2010), eprint quant-ph/1001.0788v3.

²⁴E. P. Wigner, *Ann. Math.* **40**, 149 (1939).

²⁵R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, 1984).

²⁶R. H. Rietdijk and J. W. van Holten, *Nucl. Phys. B* **472** 427–446 (1996), eprint hep-th/9511166v1.

²⁷M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Taylor & Francis Group, 2003).

²⁸B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, 2000).

²⁹D. Raine and E. Thomas, *Black Holes, An Introduction* (Imperial College Press, 2010).

³⁰J. F. Plebański and M. Demiański, *Ann. Phys.* **98**, 98 (1976).

Quantum entanglement in Plebański–Demiański spacetimes

Hugo García-Compeán¹ and Felipe Robledo-Padilla²

¹ Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, P.O. Box 14-740, 07000 México D.F., México

² Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, Ciudad Universitaria, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, 66450, México

E-mail: compean@fis.cinvestav.mx and felipe.robledopd@uanl.edu.mx

Received 9 July 2013, in final form 9 September 2013

Published 30 October 2013

Online at stacks.iop.org/CQG/30/235012

Abstract

For an Einstein–Podolsky–Rosen pair of spin-1/2 particles in circular orbits in a general axially symmetric spacetime, the spin precession angle is obtained. Hovering observers are introduced for ensuring fixed reference frames to perform suitable reliable measurements. Frame-dragging of spinning holes is explicitly incorporated relative to hovering observers. The spin-singlet state is found to be mixed with the spin-triplet by acceleration and gravity effects, which deteriorate the perfect anti-correlation of an entangled pair of spins measured by hovering observers. Finally, an algorithm to calculate spin precession for a general axially symmetric spacetime is proposed. This algorithm is applied to study the complete list of expanding and twisting Type-D Plebański–Demiański black holes and their descendent limiting solutions with lower parameters.

PACS numbers: 03.65.Ud, 03.67.–a, 04.20.–q, 02.40.–k

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

For many years, quantum states of matter in a classical gravitational background have been of great interest in physical models. One of the famous experimental examples in this situation is the experiments of neutron interferometry in laboratories on the Earth. In such experiments, it is possible to capture the effects of the gravitational field into quantum phases associated with the possible trajectories of a beam of neutrons, following paths with different intensity of the gravitational field. The phase differences have information about how the gravitational field of Earth do affect the quantum states of neutrons [1]. Experiments using atomic interferometry were also reported later [2]. Another instance of the description of quantum states of matter in classical gravitational fields is Hawking's radiation [3] describing the process of black hole

evaporation. This process involves relativistic quantum particles and uses quantum field theory in curved spacetimes (see for instance, [4]).

Moreover, the study of the quantum properties of (non-)relativistic quantum matter has been studied in the literature along the years. For instance, in [5–10] the entanglement of a pair of non-relativistic spin-1/2 particles have been extended to special relativity through the uses of the Wigner rotation [11, 12]. Furthermore, the consideration of the general relativistic effects on the properties of the quantum states, as the entanglement and the spin precession angles, were discussed, for the Schwarzschild black hole, in [13]. In that paper, they considered a pair of spinning particles in an entangled state moving in equatorial motion of this black hole. As a result of their study, they found that the Einstein–Podolsky–Rosen (EPR) correlation [14] is deteriorated due to the acceleration of these spinning particles and the effect of the gravitational field of the black hole on them. This effect leads to a decrement in Bell’s inequality degree of violation given by the quantum spin directions and is written as

$$\langle Q'S' \rangle + \langle R'S' \rangle + \langle R'T' \rangle - \langle Q'T' \rangle = 2\sqrt{2} \cos^2 \Delta.$$

All the information of the gravitational field is encoded in the precession angle Δ , which depends in general on all the parameters of the black hole of interest, on the radius r and on the frame-dragging velocity (if any). The case with $\Delta = 0$ corresponds with the result consistent with quantum mechanics. For $\Delta \neq 0$ and large, there is a deterioration of the perfect anti-correlation of the entangled pair of spin-1/2 particles.

For the simplest case of the Schwarzschild black hole, it depends only on the mass m parameter, and its strongest effect is localized on the Schwarzschild event horizon due to an extremely (infinite) rapid spin precession with $|\Delta_S| \rightarrow \infty$ producing the mentioned decrement of Bell’s inequality. In this case there is no frame-dragging; however, Δ_S still depends on the local velocity of the particles with respect to the hovering observers. In the whole process it is observed that the choices of the 4-velocity vector and of the vierbein are important in order to be able to communicate non-locally in a curved spacetime using these spinning particles. Similar results, but also with subtle and important differences, were found for the case of Kerr–Newman black holes [15] and Kerr–Newman metric with frame-dragging [16].

The aim of this paper is to extend the description of spin precession mentioned above to the Plebański–Demiański black hole [17], which is the most general axially symmetric expanding and twisting Type-D solution of the Einstein–Maxwell equations according the Petrov–Penrose classification (see for instance, [18]). In order to do that, it is more convenient to write down the metric in Boyer–Lindquist coordinates. This description was studied by Griffiths and Podolský in a series of papers [19–21] (and reviewed in [22, 23]) with the purpose of clarifying the physical meaning of the parameters entering in the solution.

The Plebański–Demiański solution has been worked out previously in the literature connecting with higher dimensional theories. Some time ago, there was some interest of this metric in the study of some generalizations of the AdS/CFT correspondence [24–26]. More recently there has been a great deal of work in the context of higher dimensional solutions the Kerr–NUT–(anti-)de Sitter black hole in the context of brane and string theory [27–34].

The Plebański–Demiański family of Type-D solutions of the Einstein field equation describes a configuration of the gravitational fields characterized by seven parameters [17]. These configurations have null congruences of geodesic curves characterized in general by non-vanishing expansion, twist and shear parameters. In this paper, we will consider only expanding and twisting solutions. Under certain non-degenerate coordinate transformations of the original metric and the setting of constraints the metric is turned out into a new suitable form in Boyer–Lindquist coordinates and depending on seven parameters with almost direct physical interpretation [19–23].

Other kind of models involving the effects of the gravitational field on quantum matter properties precisely in Plebański–Demiański backgrounds is discussed in [35]. In that paper, the phase shift of charged particle interferometry described by complex scalar fields was computed. In there, the mentioned new form of the Plebański–Demiański spacetimes was also adopted and it was shown that all physical parameters contribute to the phase shift. The consideration of the interferometry of spin-1/2 particles in this context was worked out in [36].

The approach we will follow in this paper does adopt the notation and conventions from [13]. The main idea is to perform a series of consecutive local infinitesimal Wigner rotations [11] to give rise to the spin precession of a pair of entangled spin-1/2 particles on circular orbit around the equator of a general axially symmetric black hole, where the spin is locally well defined in the non-relativistic theory.

The Wigner rotation consists of an infinitesimal Lorentz transformation, which for the equatorial motion is written in terms of a boost along the radial direction and a rotation in the angle direction of the orbital particle. The final result is a spin precession of a particle moving in circular motion in curved spacetime due to the acceleration of the particle by an external force and due to the difference between local inertial frames at different points. These enable us to find the precession angle for a general axially symmetric spacetime. These results are then applied to describe the spin precession angle of an EPR pair of particles moving on the equator of an expanding and twisting Plebański–Demiański black hole. We will find that this angle depends on all the physical parameters of the black hole. Moreover, by making appropriate reductions we obtain the precession angle for all known subfamilies of this Plebański–Demiański black hole.

This paper is organized as follows. Section 2 presents some generalities about Plebański–Demiański spacetime. The effect of the axially symmetric component is reviewed in section 3 and the frame-dragging corrections over the velocity of a particle is calculated. In section 4, the Zero Angular Momentum Observers (ZAMOs) are introduced. We also present a gedanken experiment to describe the entangled pair of particles in circular orbit around a general axially symmetric black hole. Moreover, in this same section some calculations are performed which are necessary to propose an algorithm to find the spin precession angle without reference to any particular solution. Section 5 is devoted to calculate the EPR correlation by Wigner rotations due the motion of the particles in generalized spacetime. Finally, all results are integrated in section 6 to illustrate the use of the algorithm to get the spin precession angle for the Plebański–Demiański black hole. From this general case, the spin precession angle of the EPR pair is obtained for the complete list of subfamilies of non-expanding solutions. It is found that for the general case, this angle depends on all the physical parameters of the solution. Conclusions and final remarks are presented in section 7.

2. Plebański–Demiański spacetime

Among the solutions of the Einstein–Maxwell equations, the family of Type-D solutions are the most important ones. In particular, we will consider in the present paper those with non-vanishing expanding and twisting (ω) congruences of non-null electromagnetic field with two repeated principal null vectors coinciding with the two repeated principal null congruences of the Weyl tensor. These solutions were found in 1976 by Plebański and Demiański [17] and it is called Plebański–Demiański spacetime (or black hole). This spacetime is characterized by seven parameters which are found to be non-directly related to the physical parameters of a black hole. Recently, a new look of this metric was worked out [19, 20] (and reviewed in [22, 23]), allowed to give a Boyer–Lindquist form of the Plebański–Demiański metric in terms of the physical parameters, namely: a mass-like parameter m , a cosmological constant

Λ , a rotation-like parameter a , a NUT-like parameter l , the electric and magnetic charges e and g , and an acceleration-like parameter α . The following metric can be derived from the original Plebański–Demiański metric after some non-degenerate coordinate transformations and an appropriated treatment of the roots of the quartic function D , and it is given by

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} \left[-\frac{D}{\rho^2} \left(dt - (a \sin^2 \theta + 2l(1 - \cos \theta)) d\phi \right)^2 + \frac{\rho^2}{D} dr^2 + \frac{P}{\rho^2} \left(a dt - (r^2 + (a+l)^2) d\phi \right)^2 + \rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{P} d\theta^2 \right], \quad (1)$$

with

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + (l + a \cos \theta)^2, \\ \Omega &= 1 - \frac{\alpha}{\omega} (l + a \cos \theta)r, \\ P &= \sin^2 \theta (1 - a_3 \cos \theta - a_4 \cos^2 \theta), \\ D &= (\kappa + e^2 + g^2) - 2mr + \varepsilon r^2 - 2n \frac{\alpha}{\omega} r^3 - \left(\frac{\alpha^2}{\omega^2} \kappa + \frac{\Lambda}{3} \right) r^4, \end{aligned} \quad (2)$$

and where

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a \frac{\alpha}{\omega} m - 4al \frac{\alpha^2}{\omega^2} (\kappa + e^2 + g^2) - 4 \frac{\Lambda}{3} al, \\ a_4 &= -a^2 \frac{\alpha^2}{\omega^2} (\kappa + e^2 + g^2) - \frac{\Lambda}{3} a^2, \\ \varepsilon &= \frac{\kappa}{a^2 - l^2} + 4l \frac{\alpha}{\omega} m - (a^2 + 3l^2) \left(\frac{\alpha^2}{\omega^2} (\kappa + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right), \\ n &= \frac{\kappa l}{a^2 - l^2} - (a^2 - l^2) \frac{\alpha}{\omega} m + (a^2 - l^2) l \left(\frac{\alpha^2}{\omega^2} (\kappa + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right), \\ \kappa &= \frac{1 + 2l \frac{\alpha}{\omega} m - 3l^2 \frac{\alpha^2}{\omega^2} (e^2 + g^2) - l^2 \Lambda}{\frac{1}{a^2 - l^2} + 3l^2 \frac{\alpha^2}{\omega^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Equation (1) can be represented by the line element

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{03} dt d\phi + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\phi^2, \quad (4)$$

which has a non-diagonal element that represents the axial symmetry and the metric coefficients are:

$$\begin{aligned} g_{00} &= \frac{-D + Pa^2}{\Omega^2 \rho^2}, \\ g_{0i} dx^i &= \frac{1}{\Omega^2} \left[\frac{D}{\rho^2} (a \sin^2 \theta + 2l(1 - \cos \theta)) - \frac{P}{\rho^2} a (r^2 + (a+l)^2) \right] d\phi, \\ g_{ij} dx^i dx^j &= \frac{\rho^2}{\Omega^2 D} dr^2 + \rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{\Omega^2 P} d\theta^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left[-\frac{D}{\rho^2} (a \sin^2 \theta + 2l(1 - \cos \theta))^2 + \frac{P}{\rho^2} (r^2 + (a+l)^2)^2 \right] d\phi^2. \end{aligned} \quad (5)$$

This representation is a suitable way to work with the Plebański–Demiański metric (1). We shall use this representation in the next sections.

In order to describe the motion of spinning particles in a curved spacetime, we shall recall that the local inertial frame at each point is defined by a vierbein chosen as in [35]:

$$\begin{aligned}
 e_0^\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}(1, 0, 0, 0), & e^0{}_\mu &= \sqrt{-g_{00}}\left(1, 0, 0, \frac{g_{03}}{g_{00}}\right), \\
 e_1^\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(0, 1, 0, 0), & e^1{}_\mu &= \sqrt{g_{11}}(0, 1, 0, 0), \\
 e_2^\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}(0, 0, 1, 0), & e^2{}_\mu &= \sqrt{g_{22}}(0, 0, 1, 0), \\
 e_3^\mu(x) &= \sqrt{\frac{-g_{00}}{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}}\left(-\frac{g_{03}}{g_{00}}, 0, 0, 1\right), & e^3{}_\mu &= \sqrt{\frac{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}{-g_{00}}}(0, 0, 0, 1),
 \end{aligned} \tag{6}$$

where x^μ runs over the spacetime coordinates $\{t, r, \theta, \phi\}$. It is easy to show that this vierbein satisfy the standard conditions:

$$\begin{aligned}
 e_a{}^\mu(x)e_b{}^\nu(x)g_{\mu\nu}(x) &= \eta_{ab}, \\
 e^a{}_\mu(x)e_a{}^\nu(x) &= \delta_\mu{}^\nu, \\
 e^a{}_\mu(x)e_b{}^\mu(x) &= \delta^a{}_b.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Here $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ is the Minkowski metric, and $a, b = 0, 1, 2, 3$ are tangent space indices.

The metric (1) is not written in its most general form. From this metric all the expanding and twisting Type-D solutions, including their different subfamilies as the accelerating and rotating black-hole, the Kerr solution with NUT, the NUT solution with rotation, the C-metric and the other well-known solutions like Kerr, NUT and Schwarzschild solutions, can be obtained. A more general treatment including the expanding but non-twisting solutions and non-expanding and non-twisting Type-D solutions is also possible. But only for simplicity, they will not be considered in this paper.

3. Frame-dragging

In this section, we consider the axially symmetric metric of the general form (4). This will be the only assumption, and all results will be valid for a generic metric of this form. The treatment will be general and it is only until section 6 when we will specialize in the Plebański–Demiański metric or subcases of it.

In the Kerr spacetime, the axial symmetry is related to the rotation of the black hole. When the metric is non-diagonal, the effect of frame-dragging has to be incorporated. This phenomenon can be interpreted as a dragging of local inertial reference frames [37] due the rotation. For instance, a distant observer will see a free-falling particle that acquires velocity, angular momentum and NUT parameter when it is near a spinning black hole. This happens in order to have suitable observers that make reliable measurements of the spin precession.

In a previous work, for the case of the Kerr–Newman spacetime with frame-dragging [16], we adopted a set of observers that hovered at fixed coordinate position. In this paper, we also use this kind of observers, which will be useful later to prepare (and measure) the relevant spin states. The hovering observers are not affected by frame-dragging, that is, as seen by long distance observers, the hovering position has a 4-velocity defined by

$$u_h^\mu = (dt/d\tau, 0, 0, 0) = ((-g_{00})^{-1/2}, 0, 0, 0). \tag{8}$$

It is worth mentioning that this hovering observer is at rest in the local frame (i.e. $u_h^a = \eta^{ab}e_b{}^\mu u_{\mu h}$), because the selected vierbein (6) will ensure the right measurements of the local infinitesimal Lorentz transformations of spin precession that we will discuss in section 4.

For a free-falling particle the 4-velocity due to frame-dragging, as seen by the same distant observers, was given (for instance) in [16, 37]

$$u_{\text{fd}}^\mu = \sqrt{\frac{-g_{33}}{g_{00}g_{33} - (g_{03})^2}} \left(1, 0, 0, -\frac{g_{03}}{g_{33}} \right). \quad (9)$$

In this work, the frame-dragging velocity has to be measured by the hovering observer as a local inertial frame velocity and it can be obtained by projecting out the 4-momentum mu_{fd}^μ of the particle over the 4-vector velocity u_{μ_h} of the hovering observer

$$u_{\text{fd}}^\mu u_{\mu_h} = -E = -\gamma_{\text{fd}}, \quad (10)$$

where E is the relativistic energy per unit mass of the particle with respect to a local observer (in this case, the hovering observer). This scalar product (10) is also the time component of the 4-momentum of the particle with respect to the hovering observer's reference frame, which is the usual relativistic gamma factor $\gamma_{\text{fd}} = (1 - v_{\text{fd}}^2)^{-1/2}$.

Hence, our interest shall be focused in v_{fd} , which is the speed of the particle due to frame-dragging in the local inertial frame of the hovering observer. This frame-dragging speed is equivalent to $\tanh \eta = v_{\text{fd}}$. Therefore, the local inertial frame velocity due to frame-dragging measured by a hovering observer can be represented in terms of hyperbolic functions as

$$u_{\text{fd}}^\alpha = (\cosh \eta, 0, 0, \sinh \eta). \quad (11)$$

Moreover, we shall see that this is a suitable way of expressing the frame-dragging velocity when this effect is incorporated in the spin precession angle in section 4.

Finally, the relevant hyperbolic functions are obtained after some straightforward algebra from equations (8)–(10) and they are given by

$$\begin{aligned} v_{\text{fd}} = \tanh \eta &= \frac{g_{03}}{\sqrt{(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}}}, \\ \gamma_{\text{fd}} = \cosh \eta &= \sqrt{\frac{g_{00}g_{33} - (g_{03})^2}{g_{00}g_{33}}}, \\ \sinh \eta &= \sqrt{\frac{-(g_{03})^2}{g_{00}g_{33}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

4. Spin precession

In this work, we consider two observers and an EPR source on the equator plane $\theta = \pi/2$. The observers are placed at azimuthal angles $\phi = \pm\Phi$ and the EPR source is located at $\phi = 0$. The observers and the EPR source are assumed to be hovering satisfying equation (8) over the black hole in order to keep them 'at rest' in the Boyer–Lindquist coordinate system (1). The EPR source emits a pair of entangled particles in opposite directions, describing a circular orbit on the equator at constant radius. The vierbein (6) works as a reference frame to prepare the spin state in the EPR source and to measure the new quantum states of the particles from the perspective of the hovering observers. This vierbein is defined at each point of spacetime since the observers, and consequently the EPR source, are accelerated on the equator and keep a constant radius, in such a way that they are not influenced by frame-dragging, as previously stated. The gedanken experiment depicting this situation is shown in figure 1.

From the perspective of ZAMOs, the local velocity of the entangled particles is given by

$$u_{\text{EPR}}^\alpha = (\cosh \zeta, 0, 0, \sinh \zeta), \quad (13)$$

where $v_{\text{EPR}} = \tanh \zeta$ is the speed of particles in the local inertial frame of the ZAMO.

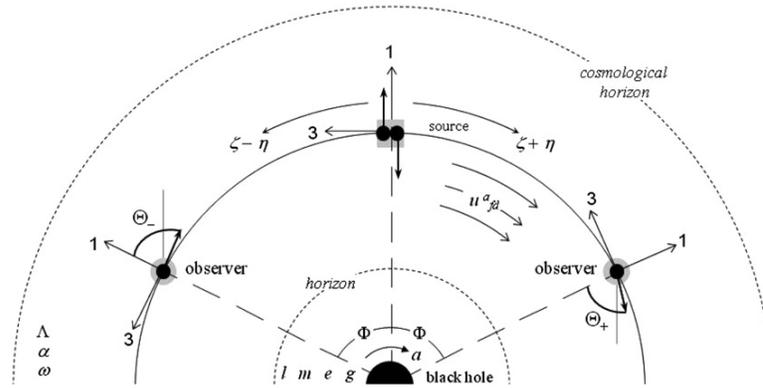


Figure 1. An EPR gedanken experiment in an axially symmetric spacetime. Two hovering observers (indicated by gray circles) and a static EPR source (gray square and hovering too) are located at $\phi = \pm\Phi$ and 0, respectively. The expanding and twisting Plebański–Demiański metric, represents a spacetime described through seven parameters: mass m , electric and magnetic charges e , g , rotation parameter a , cosmological constant Λ , NUT-like parameter l and acceleration-like parameter α . Both entangled particles feel frame-dragging with respect to the observers and they leave the source with a local velocity $\tanh(\zeta \pm \eta)$, where the positive sign stands for the particle traveling in the same direction as the rotation and the negative sign corresponds to the opposite one.

This ZAMO is mounted in a frame that is rotating around the black hole due to frame-dragging; therefore, the ZAMO has a local velocity described precisely by equation (11), as seen by the hovering observers. Moreover, it has the angular velocity $-g_{03}/g_{33}$, as seen by a distant observer. The world-lines of this kind of observers are orthogonal to the one of the surface of constant t (i.e. $dx_\mu u_{fd}^\mu = 0$), and the angular momentum of any particle is conserved in their local inertial frame [16, 37]. Due to this feature, we will adopt a ZAMO observer as a preliminary step before we calculate the total local inertial velocity of entangled particles measured by the hovering observers. When the particles leave the EPR source, their local velocity u_{EPR}^a remains constant in the ZAMO’s frame.

Now, from the point of view of a hovering observer, the particles have a local inertial frame in which the velocity is given by the relativistic addition of the velocity of the ZAMO (11) plus the velocity of the particles measured by the ZAMOs (13). That is, $\tanh \xi_\pm$, where $\xi_\pm = \zeta \pm \eta$ is the total speed of the particle in the local inertial frame (see figure 1). The plus sign corresponds to the particle in the direction of the rotation of the black hole; meanwhile, the minus sign is for the other particle traveling in the opposite direction. In this way, the gravitational and frame-dragging effects are taken into account.

After the pair of entangled spin-1/2 particles is generated at the EPR source, they leave it and follow a circular path around a black hole. In spherical coordinates on the equatorial plane $\theta = \pi/2$, the velocity of particles has two relevant components, the temporal one and the spatial one with ϕ -coordinate at constant radius r . Thus, for the hovering observer, the motion is measured by the proper-velocity with $v = \tanh \xi$. That is, $u^a = (\cosh \xi, 0, 0, \sinh \xi)$, therefore the general contravariant 4-velocity is

$$\begin{aligned} u^t &= e_0^t \cosh \xi + e_3^t \sinh \xi, \\ u^\phi &= e_3^\phi \sinh \xi, \end{aligned} \tag{14}$$

which satisfies the normalization condition $u^\mu u_\mu = -1$.

In order the particles describe circular motion, we must apply an external force that compensates both the centrifugal force and the gravity. The acceleration due to this external force is obtained from [13]

$$a^\mu(x) = u^\nu(x) \nabla_\nu u^\mu(x). \quad (15)$$

On the equatorial plane the acceleration then becomes

$$a^r = (e_0^t)^2 \Gamma_{00}^1 \cosh^2 \xi + \left[(e_3^t)^2 \Gamma_{00}^1 + (e_3^\phi)^2 \Gamma_{33}^1 + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma_{03}^1 \right] \sinh^2 \xi + 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma_{03}^1 + e_3^t \Gamma_{00}^1) \sinh \xi \cosh \xi, \quad (16)$$

where $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ are the usual Christoffel's symbols.

Once the frame-dragging velocity is incorporated into acceleration, it is interesting to note that (12) does not affect the structure of (16), i.e., the covariant derivatives ∇_μ in equation (15) act only over coordinates t and ϕ , and these variables are not present on the frame-dragging velocity. In the rest of this work, there will be no place where frame-dragging does affect another computation.

The change of the local inertial frame consists of a boost along the 1-axis and a rotation about the 2-axis calculated by

$$\chi^a_b(x) = -u^\nu \omega_\nu^a_b(x), \quad (17)$$

where the connection 1-forms are defined as

$$\omega_\mu^a_b(x) = -e_b^\nu(x) \nabla_\mu e^a_\nu(x) = e^a_\nu(x) \nabla_\mu e_b^\nu(x). \quad (18)$$

In our particular situation, the connections of interest are given by

$$\begin{aligned} \omega_r^0_1 &= e_1^r e_0^t \Gamma_{01}^0 + e_1^r e_0^\phi \Gamma_{01}^3, \\ \omega_r^1_3 &= e_3^t e_1^r \Gamma_{00}^1 + e_3^\phi e_1^r \Gamma_{03}^1, \\ \omega_\phi^0_1 &= e_1^r e_0^t \Gamma_{13}^0 + e_1^r e_0^\phi \Gamma_{13}^3, \\ \omega_\phi^1_3 &= e_3^t e_1^r \Gamma_{03}^1 + e_3^\phi e_1^r \Gamma_{33}^1. \end{aligned} \quad (19)$$

The relevant boost is described by

$$\begin{aligned} \chi^0_1 &= -e_0^t e_1^r (e_0^t \Gamma_{01}^0 + e_0^\phi \Gamma_{01}^3) \cosh \xi \\ &\quad - e_1^r [e_3^\phi (e_0^t \Gamma_{13}^0 + e_0^\phi \Gamma_{13}^3) + e_3^t (e_0^t \Gamma_{01}^0 + e_0^\phi \Gamma_{01}^3)] \sinh \xi, \end{aligned} \quad (20)$$

while the rotation about the 2-axis is given by

$$\begin{aligned} \chi^1_3 &= -e_0^t e_1^r (e_3^t \Gamma_{00}^1 + e_3^\phi \Gamma_{03}^1) \cosh \xi \\ &\quad - e_1^r [e_3^t (e_3^t \Gamma_{00}^1 + e_3^\phi \Gamma_{03}^1) + e_3^\phi (e_3^t \Gamma_{03}^1 + e_3^\phi \Gamma_{33}^1)] \sinh \xi. \end{aligned} \quad (21)$$

The infinitesimal Lorentz transformation can be calculated easily by adding the rotation of the local 4-momentum $p^a(x) = mu^a(x)$ on the plane traced by the general 4-vectors of velocity and acceleration, that is [13]

$$\lambda^a_b(x) = -\frac{1}{m} [a^a(x) p_b(x) - p^a(x) a_b(x)] + \chi^a_b(x). \quad (22)$$

The boost along the 1-axis and the rotation about the 2-axis are respectively

$$\begin{aligned} \lambda^0_1 &= e_1^r [(e_0^t)^2 \Gamma_{00}^1 \cosh^2 \xi + ((e_3^t)^2 \Gamma_{00}^1 + (e_3^\phi)^2 \Gamma_{33}^1 + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma_{03}^1) \sinh^2 \xi \\ &\quad + 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma_{03}^1 + e_3^t \Gamma_{00}^1) \sinh \xi \cosh \xi] \cosh \xi - e_0^t e_1^r (e_0^t \Gamma_{01}^0 + e_0^\phi \Gamma_{01}^3) \cosh \xi \\ &\quad - e_1^r [e_3^\phi (e_0^t \Gamma_{13}^0 + e_0^\phi \Gamma_{13}^3) + e_3^t (e_0^t \Gamma_{01}^0 + e_0^\phi \Gamma_{01}^3)] \sinh \xi, \\ \lambda^1_3 &= -e_1^r [(e_0^t)^2 \Gamma_{00}^1 \cosh^2 \xi + ((e_3^t)^2 \Gamma_{00}^1 + (e_3^\phi)^2 \Gamma_{33}^1 + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma_{03}^1) \sinh^2 \xi \\ &\quad + 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma_{03}^1 + e_3^t \Gamma_{00}^1) \sinh \xi \cosh \xi] \sinh \xi - e_0^t e_1^r (e_3^t \Gamma_{00}^1 + e_3^\phi \Gamma_{03}^1) \cosh \xi \\ &\quad - e_1^r [e_3^t (e_3^t \Gamma_{00}^1 + e_3^\phi \Gamma_{03}^1) + e_3^\phi (e_3^t \Gamma_{03}^1 + e_3^\phi \Gamma_{33}^1)] \sinh \xi. \end{aligned} \quad (23)$$

The change of the spin is obtained by computing the infinitesimal Wigner rotation [13]

$$\vartheta^i_k(x) = \lambda^i_k(x) + \frac{\lambda^i_0(x)p_k(x) - \lambda_{k0}(x)p^i(x)}{p^0(x) + m}. \quad (24)$$

In particular, the rotation about the 2-axis through a certain angle reads

$$\begin{aligned} \vartheta^1_3 = & -e^1_r [(e_0^t)^2 \Gamma_{00}^1 \cosh^2 \xi + ((e_3^t)^2 \Gamma_{00}^1 + (e_3^\phi)^2 \Gamma_{33}^1 + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma_{03}^1) \sinh^2 \xi \\ & + 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma_{03}^1 + e_3^t \Gamma_{00}^1) \sinh \xi \cosh \xi] \sinh \xi - e_0^t e^1_r (e_3^t \Gamma_{00}^1 + e_3^\phi \Gamma_{03}^1) \cosh \xi \\ & - e^1_r [e_3^t (e_3^t \Gamma_{00}^1 + e_3^\phi \Gamma_{03}^1) + e_3^\phi (e_3^t \Gamma_{03}^1 + e_3^\phi \Gamma_{33}^1)] \sinh \xi \\ & + \left(\frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + 1} \right) \{ e^1_r [(e_0^t)^2 \Gamma_{00}^1 \cosh^2 \xi + ((e_3^t)^2 \Gamma_{00}^1 + (e_3^\phi)^2 \Gamma_{33}^1 + 2e_3^t e_3^\phi \Gamma_{03}^1) \sinh^2 \xi \\ & + 2e_0^t (e_3^\phi \Gamma_{03}^1 + e_3^t \Gamma_{00}^1) \sinh \xi \cosh \xi] \cosh \xi - e_0^t e^1_r (e_0^t \Gamma_{01}^0 + e_0^\phi \Gamma_{01}^3) \cosh \xi \\ & - e^1_r [e_3^\phi (e_0^t \Gamma_{13}^0 + e_0^\phi \Gamma_{13}^3) + e_3^t (e_0^t \Gamma_{01}^0 + e_0^\phi \Gamma_{01}^3)] \sinh \xi \}. \end{aligned} \quad (25)$$

Finally, from the tetrad given in equation (6), it can be shown, after some algebra, that the previous expression (25), can be expressed as

$$\begin{aligned} \vartheta^1_3 = & -\frac{\cosh(2\xi)}{2g_{00}\sqrt{g_{11}[(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}]}} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) - \frac{\sinh(2\xi)}{4g_{00}[(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}]\sqrt{g_{11}}} \\ & \times \left[g_{00} \left(g_{33} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right) + 2g_{03} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

5. EPR correlation

In this section, we will obtain the spin precession angle of a pair of spin-1/2 EPR particles moving on the equator of a general axial-symmetric spacetime. We will follow basically [13, 16] and the details will be not repeated here. However, we recall that in the case of the curved spacetime, the one-particle quantum states $|p^a(x), \sigma; x\rangle$ transform under a local Lorentz transformation as [11, 12]

$$U(\Lambda(x))|p^a(x), \sigma; x\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(1/2)}(W(x))|\Lambda p^a(x), \sigma'; x\rangle, \quad (27)$$

where $W^a_b(x) \equiv W^a_b(\Lambda(x), p(x))$ is the so-called local finite Wigner rotation.

If frame-dragging is taken into account on the local inertial frame velocity u^a , it will affect the previous local velocity transformation and then the total velocity will be written as $u^a_\pm = (\cosh \xi_\pm, 0, 0, \sinh \xi_\pm)$, where $\xi_\pm = \zeta \pm \eta$. Remember that the plus sign stands for a particle moving in the same direction of the rotation and the minus sign if the motion of the particles is in the opposite direction.

After a proper time Φ/u^0_\pm , each particle reaches the corresponding observer. Thus, the finite Wigner rotation [13, 16] can be written as

$$W^a_b(\pm\Phi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta_\pm & 0 & \pm \sin \Theta_\pm \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp \sin \Theta_\pm & 0 & \cos \Theta_\pm \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Once again, the sign of the angle $\Theta_\pm = \frac{\Phi \vartheta^1_3}{u^0_\pm}$ depends if the motion of the entangled particle is in the direction (or in its opposite sense) of frame-dragging. Thus, one has

$$\Theta_{\pm} = \frac{\Phi}{2\sqrt{-(g_{00})^3 g_{11}}} \left\{ \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \frac{\cosh(2\zeta \pm 2\eta)}{\sinh(\zeta \pm \eta)} + \left[g_{00} \left(g_{00} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} - g_{33} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right) + 2g_{03} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \right] \frac{\cosh(\zeta \pm \eta)}{\sqrt{(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}}} \right\}. \quad (29)$$

Then the required Wigner rotation is given in the following form:

$$D_{\sigma'_\sigma}^{(1/2)}(W(\pm\Phi, 0)) = \exp\left(\mp i \frac{\sigma_y}{2} \Theta_{\pm}\right), \quad (30)$$

where σ_y is the Pauli matrix.

Now we can define the 4-momentum of the particle as seen by each hovering observer. Thus, the spin-singlet state for entangled particles is given by

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|p_+^a, \uparrow; 0\rangle|p_-^a, \downarrow; 0\rangle - |p_+^a, \downarrow; 0\rangle|p_-^a, \uparrow; 0\rangle], \quad (31)$$

where the sign on the lineal momentum stands for the direction of each particle and corresponds to the up and down of the spin direction. For notational simplicity, only the evaluation at $\phi = 0$ in the arguments of the position was written.

Therefore, after the finite Wigner rotation, the new total quantum state is given by $|\psi'\rangle = W(\pm\Phi)|\psi\rangle$. Consequently in the local inertial frames at the corresponding positions $\phi = \Phi$ and $-\Phi$, each particle state can be written as

$$|p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle' = \cos\frac{\Theta_{\pm}}{2}|p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle \pm \sin\frac{\Theta_{\pm}}{2}|p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle, \quad (32)$$

$$|p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle' = \mp \sin\frac{\Theta_{\pm}}{2}|p_{\pm}^a, \uparrow; \pm\Phi\rangle + \cos\frac{\Theta_{\pm}}{2}|p_{\pm}^a, \downarrow; \pm\Phi\rangle. \quad (33)$$

Thus, the entangled state is described by the combination

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\Theta_+ + \Theta_-}{2}\right) (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle|p_-^a, \downarrow; -\Phi\rangle - |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle|p_-^a, \uparrow; -\Phi\rangle) + \sin\left(\frac{\Theta_+ + \Theta_-}{2}\right) (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle|p_-^a, \uparrow; \Phi\rangle + |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle|p_-^a, \downarrow; \Phi\rangle) \right]. \quad (34)$$

Now, in order to eliminate the spurious effect of the evident rotation of the local inertial frames leading to angles $\pm\Phi$, one has to compensate the rotation through a second transformation as in [13, 16].

It is easy to see that the final quantum state reads

$$|\psi''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos\Delta (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle'|p_-^a, \downarrow; -\Phi\rangle' - |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle'|p_-^a, \uparrow; -\Phi\rangle') + \sin\Delta (|p_+^a, \uparrow; \Phi\rangle'|p_-^a, \uparrow; \Phi\rangle' + |p_+^a, \downarrow; \Phi\rangle'|p_-^a, \downarrow; \Phi\rangle')]. \quad (35)$$

Here $\Delta = (\Theta_+ + \Theta_-)/2 - \Phi$ and Δ is given by

$$\Delta = \Phi \left[(2A \sinh\zeta + B \cosh\zeta) \cosh\eta - A \frac{\sinh\zeta \cosh\eta}{\cosh^2\eta - \cosh^2\zeta} - 1 \right], \quad (36)$$

where

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-(g_{00})^3 g_{11}}} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right),$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{-(g_{00})^3 g_{11} [(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}]}} \left[g_{00} \left(g_{00} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} - g_{33} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right) + 2g_{03} \left(g_{03} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} - g_{00} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \right) \right]. \quad (37)$$

Thus, the spin precession angle Δ may contain the gravitational effects that deteriorate the perfect anti-correlation of the entangled particles [13]. The spin-singlet state is mixed up with the spin-triplet state. This is because while the spin-singlet state is invariant under spatial rotations, it is not invariant under Lorentz transformations (23).

As it was pointed out in [13], this deterioration is a consequence of the manifest difference between the rotation matrix element ϑ^1_3 and the trivial rotation φ^1_3 . It is important to note that the entanglement is still invariant under local unitary operations, and then the nonlocal correlation still holds. Because of the effects coming from acceleration, gravity and frame-dragging, the perfect anti-correlation can still be employed for quantum communication, by rotating the direction of measurement about the 2-axis through the angles $\mp\Theta$ in the local inertial frames of the hovering observers.

It is evident that formulas (36) and (37) can be applied to any axially symmetric black hole and in particular to the most general expanding and twisting Type-D solution of Einstein equations. This will be the goal of the next section.

6. Spin precession angle in expanding and twisting Plebański–Demiański black hole

6.1. Plebański–Demiański black hole

In this section, we study the spin precession angle of the spin-1/2 systems of entangled particles in the spacetime described by the Plebański–Demiański metric (1) with frame-dragging (12).

Thus, it is easy to show that the coefficients A and B from the spin precession angle Δ on the equator ($\theta = \pi/2$), given by equation (36), are written as

$$A_{\text{PD}} = \frac{a\sqrt{D}}{2(r^2 + l^2)(D - a^2)^{3/2}}[(r^2 + l^2)D' - 2r(D - a^2)], \quad (38)$$

$$B_{\text{PD}} = \frac{1}{2(r^2 + l^2)(D - a^2)^{3/2}}[4Dr(D - a^2) - (a^2r^2 + Dr^2 + Dl^2 + a^2l^2)D'],$$

where D is a quartic polynomial of r and it can be read off from equation (2). Here D' is defined by

$$D' = \frac{\partial D}{\partial r} = -4 \left(\frac{\alpha^2 \kappa}{\omega^2} + \frac{\Lambda}{3} \right) r^3 - \frac{6n\alpha r^2}{\omega} + 2\epsilon r - 2m. \quad (39)$$

The frame-dragging local inertial frame velocity is given by

$$\cosh \eta_{\text{PD}} = (r^2 + l^2) \sqrt{\frac{D}{(D - a^2) [(r^2 + a^2 + 2al + l^2)^2 - (a + 2l)^2 D]}}. \quad (40)$$

Thus, the coefficients A_{PD} , B_{PD} , the spin precession angle Δ_{PD} and frame-dragging $\cosh \eta_{\text{PD}}$ are finally written in terms of the seven parameters arising in the metric and which have a direct physical interpretation. It is well known from [22, 23] that the metric (1) represents a pair of accelerating black holes with the rotation, NUT and cosmological constant parameters, charge and mass. It is also known [22, 23] that in this situation there are two very different spacetime solutions. The first case is the one with $|l| \geq |a|$, which has non-singular curvature, this gives rise to an *accelerating NUT solution with rotation*. This also corresponds to the right branch of the diagram 1 of [22, 23]. In the second case, with $|l| \leq |a|$ we have an *accelerating and rotating black hole* including also the rest of the parameters. The types of solutions arising here correspond to the left branch and they are of singular nature. It can be shown that the coefficients and Δ_{PD} have the correct asymptotic limits.

We will analyze the associated spin precession angle of these two branches of these Type-D solutions of the Einstein equations. We start from the right branch and follow with

the left one. The more evident contribution to the spin precession angle will come from the exterior event, the cosmological and the acceleration horizons (obtained from the condition that the quartic polynomial D has at least two real roots which define the inner and outer horizons. The other vanishing terms define the cosmological and acceleration horizons). We will see that the main contribution to Δ_{PD} comes from precisely these horizons. Besides the horizon contribution, we will have an additional possibly non-trivial contribution coming from frame-dragging at $\cosh \eta_{\text{PD}} = \cosh \zeta$ (36). In order to give a more detailed account of the entanglement behavior on these horizons, we shall study below the different limiting cases.

6.2. Non-accelerating Kerr–Newman–(anti-)de Sitter–NUT black hole

The Kerr–Newman–(anti-)de Sitter–NUT (KN(A)dSNUT) spacetime is included in this large family of Type-D solutions. The KN(A)dSNUT spacetime represents a non-accelerating ($\alpha = 0$) black hole with mass m , electric and magnetic charges e and g , a rotation parameter a and a NUT parameter l in a de Sitter or anti-de Sitter background with non-vanishing cosmological constant Λ . This case contains in turn the two limits: $|a| > |l|$ and $|a| < |l|$, that correspond to the Kerr solution with NUT and the NUT solution with rotation, respectively.

After setting the acceleration parameter equal to zero i.e. $\alpha = 0$, the parameters in relation (3) become

$$\begin{aligned}\kappa &= (1 - l^2 \Lambda)(a^2 - l^2), \\ \varepsilon &= 1 - \left(\frac{1}{3}a^2 + 2l^2\right)\Lambda, \\ n &= l + \frac{1}{3}(a^2 - 4l^2)l\Lambda.\end{aligned}\tag{41}$$

Thus, the metric (1) is reduced to

$$\begin{aligned}ds^2 &= -\frac{D}{\rho^2} \left[dt - \left(a \sin^2 \theta + 4l \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\phi \right]^2 + \frac{\rho^2}{D} dr^2 + \frac{P}{\rho^2} [a dt - (r^2 + (a+l)^2 d\phi)]^2 \\ &\quad + \frac{\rho^2}{P} \sin^2 \theta d\theta^2,\end{aligned}\tag{42}$$

where

$$\begin{aligned}\rho^2 &= r^2 + (l + a \cos \theta)^2, \\ P &= \sin^2 \theta \left(1 + \frac{4}{3}\Lambda a l \cos \theta + \frac{1}{3}\Lambda a^2 \cos^2 \theta \right), \\ D &= a^2 - l^2 + e^2 + g^2 - 2mr + r^2 - \Lambda \left[(a^2 - l^2)l^2 + \left(\frac{1}{3}a^2 + 2l^2\right)r^2 + \frac{1}{3}r^4 \right].\end{aligned}\tag{43}$$

We can notice that taking $D(r_+) \rightarrow 0$, the metric coefficient $g_{11} \rightarrow \infty$ and the metric fails to be strongly asymptotically predictable. This apparent singularity arises because the coordinates are not valid at the outer horizon r_+ , and this singularity can be removed by a different choice of coordinates. In this work, we consider particles only orbiting black holes with $r > r_+$, and the Kruskal–Szekeres type extensions are not required here. Later, we will see that this horizon has relevance when the spin precession angle is calculated.

For the KN(A)dSNUT spacetime, the spin precession angle $\Delta_{\text{KN(A)dSNUT}}$ with coefficients $A_{\text{KN(A)dSNUT}}$, $B_{\text{KN(A)dSNUT}}$ and the frame-dragging velocity $\cosh \eta_{\text{KN(A)dSNUT}}$, are still given by equations (38) and (40), respectively. But now, D is given from equation (43) and

$$D' = \frac{\partial D}{\partial r} = -\frac{4}{3}\Lambda r^3 + \left[2 - \Lambda \left(\frac{2}{3}a^2 + 4l^2 \right) \right] r - 2m.\tag{44}$$

Thus the problem of the entanglement is completely expressed in terms of the remaining six physical parameters and the variable r . Finally, it is easy to check that with the coefficients $A_{\text{KN(A)dSNUT}}$, $B_{\text{KN(A)dSNUT}}$, the precession angle $\Delta_{\text{KN(A)dSNUT}}$ has the correct asymptotic behavior at $r \rightarrow \infty$.

In the case when $e = g = \Lambda = 0$, the spin precession angle explicitly written in terms of the physical parameters is given by

$$\Delta_{\text{Kerr-NUT}} = \left\{ \frac{\cosh \eta_{\text{Kerr-NUT}}}{(r^2 + l^2)(r^2 - 2mr - l^2)^{3/2}} \left[2a\sqrt{r^2 + a^2 - l^2 - 2mr}(mr^2 + 2l^2r - ml^2) \sinh \zeta \right. \right. \\ \left. \left. + [r^5 - 5mr^4 + (6m^2 - 4l^2)r^3 + (10l^2m - 2a^2m)r^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (-4a^2l^2 + 3l^4 - 2m^2l^2)r + 2a^2l^2m - l^4m] \cosh \zeta \right. \right. \\ \left. \left. + a\sqrt{r^2 + a^2 - l^2 - 2mr}(mr^2 + 2l^2r - ml^2) \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sinh \zeta}{\cosh^2 \eta_{\text{Kerr-NUT}} - \cosh^2 \zeta} \right] - 1 \right\} \Phi, \quad (45)$$

where

$$\cosh \eta_{\text{Kerr-NUT}} = \frac{(r^2 + l^2)\sqrt{r^2 - 2mr + a^2 - l^2}}{\sqrt{(r^2 - 2mr - l^2)[r^4 + (a^2 - 2l^2)r^2 + (8mal + 8l^2m + 2a^2m)r + 5l^4 + 3a^2l^2 + 8al^3]}}. \quad (46)$$

Kerr black hole. Now we consider an axially symmetric spacetime with rotation parameter a . This parameter can be related to the rotation of a black hole and it is responsible for the dragging around the spacetime near the hole discussed in section 3.

This case was carried out also in our previous work [16], and we shall see that those results are confirmed in the present analysis.

From equation (36) with coefficients (38) and parameters $e = g = l = \Lambda = 0$ the spin precession angle is reduced to

$$\Delta_{\text{K}} = \Phi \left[\frac{-2\sqrt{D}am \sinh \zeta + (H - mD) \cosh \zeta}{(r^2 - 2mr)^{3/2}} \cosh \eta_{\text{K}} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{D}am}{(r^2 - 2mr)^{3/2}} \frac{\sinh \zeta \cosh \eta_{\text{K}}}{\cosh^2 \eta_{\text{K}} - \cosh^2 \zeta} - 1 \right], \quad (47)$$

where

$$D = r^2 - 2mr + a^2, \quad (48)$$

$$H = r^3 - 4mr^2 + 4m^2r - a^2m, \quad (49)$$

$$\cosh \eta_{\text{K}} = \frac{r\sqrt{D}}{\sqrt{(r - 2m)(r^3 + a^2r + 2ma^2)}} \neq 1, \quad (50)$$

with the coefficients A and B being

$$A_{\text{K}} = -\frac{\sqrt{D}am}{(r^2 - 2mr)^{3/2}}, \quad B_{\text{K}} = \frac{H - mD}{(r^2 - 2mr)^{3/2}}. \quad (51)$$

The detailed behavior of the spin precession angle Δ_{K} with the distance r and the local velocity $v = v_{\text{EPR}}$ coincides precisely with that described in [16] and it will be not repeated here. We only mention that the main sources of a divergent angle Δ_{K} are the effects on the outer event horizon of the Kerr metric in addition to the frame-dragging ones.

Schwarzschild-NUT black hole. There is still a controversy if the NUT parameter can be considered a gravito-magnetic dual mass parameter, or a twisting property of the surrounding spacetime [38]. For the purpose of this work, we will find that the NUT parameter enters in the description of the spin precession similarly as the rotation parameter does. Consequently, it also might have important frame-dragging effects that are expected to contribute to the precession angle. This is more clearly stated when equation (36) is simplified by setting the parameters $e = g = a = \Lambda = 0$,

$$\Delta_{\text{NUT}} = \Phi \left(\frac{r^3 - 3mr^2 - 3l^2r + ml^2}{(r^2 + l^2)\sqrt{r^2 - 2mr - l^2}} \cosh \zeta \cosh \eta_{\text{NUT}} - 1 \right), \quad (52)$$

where

$$\cosh \eta_{\text{NUT}} = \frac{r^2 + l^2}{\sqrt{r^4 - 2l^2r^2 + 8ml^2r + 5l^4}} \neq 1.$$

The coefficients A and B are given by

$$A_{\text{NUT}} = 0, \quad B_{\text{NUT}} = \frac{r^3 - 3mr^2 - 3l^2r + ml^2}{(r^2 + l^2)\sqrt{r^2 - 2mr - l^2}}. \quad (53)$$

Equation (52) is a generalization of the Schwarzschild spin precession angle, but now it has integrated an additional factor due to frame-dragging.

The precession angle Δ_{NUT} diverges precisely at $r = r_{\text{NUT}}$, where

$$r_{\text{NUT}} = m \pm \sqrt{m^2 + l^2}. \quad (54)$$

The positive root represents the outer Schwarzschild–NUT horizon.

Although the $\cosh \eta_{\text{NUT}}$ term due to frame-dragging has a fourth-degree polynomial in the denominator, this quartic function does not have real roots. An elementary numerical analysis shows that the roots of this fourth-degree polynomial do not exist if one assumes that m and l are real and positive numbers. Therefore, frame-dragging contribution to the NUT spin precession angle does not have any asymptotic singularity for any particular value of r .

The NUT spin precession angle equation (52) is plotted in figure 2 for two values of NUT parameter l . The distance is parameterized by m/r which means that the experiment is placed at infinite when $m/r \rightarrow 0$. The local velocity of the particles v_{EPR} is indicated as v .

We can see from figure 2 the usual effect of the local velocity. As v_{EPR} increases, the absolute value of spin precession Δ_{NUT} increases too. Also, we can see that for small values of l , the spin precession has asymptotic values to the value of the Schwarzschild horizon figure 2(a). But now, for larger values of the NUT parameter figure 2(b), there is a shift in position of the horizon given by equation (54) to higher values of r . At the value r_{NUT} , $|\Delta_{\text{NUT}}|$ increases without limit, deteriorating the perfect anti-correlation of the pair of the entangled particles.

Schwarzschild–(anti-)de Sitter black hole. This is a spherically symmetric spacetime and therefore there is no non-diagonal element on the metric; consequently, there are no frame-dragging effects. The Schwarzschild–(anti-)de Sitter black hole represents a spacetime which is an asymptotically (anti-)de Sitter space [39]. A positive cosmological constant Λ is related to an accelerated universe, meanwhile a negative value is related to negative vacuum energy and positive pressure. The spin precession angle in this case is given by

$$\Delta_{(\Lambda)\text{dS}} = \Phi \left(\frac{r - 3m}{\sqrt{r^2 - 2mr - \frac{1}{3}\Lambda r^4}} \cosh \zeta - 1 \right), \quad (55)$$

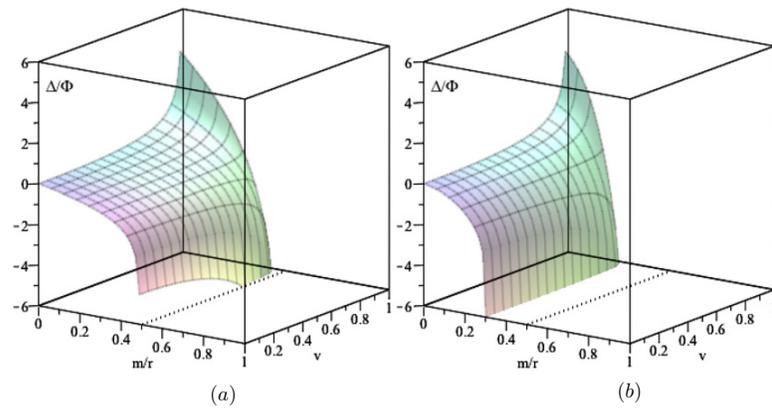


Figure 2. The precession angle Δ/Φ for a NUT black hole for two values of NUT parameter l as a function of distance m/r and local velocity $v = v_{\text{EPR}}$. The dotted line is placed at Schwarzschild radius $r = 2m$. Large values of the NUT parameter l shift the position of the Schwarzschild horizon event to r_{NUT} . (a) $l = 0.1m$; (b) $l = 2.0m$.

with A and B of the following form:

$$A_{(\Lambda)\text{dS}} = 0, \quad B_{(\Lambda)\text{dS}} = \frac{r - 3m}{\sqrt{r^2 - 2mr - \frac{1}{3}\Lambda r^4}} \quad (56)$$

and $\cosh \eta_{(\Lambda)\text{dS}} = 1$.

For a distance near the black hole and positive Λ , it is easy to see that the spin precession angle behaves in the same manner as in the case of Schwarzschild spacetime (see [13]) due to the smallness of the cosmological constant Λ . But the cosmological constant has a significant effect only for large distances which are of the order of 10^{26} m [40].

We can see in figure 3(a) that for positive Λ , the spin precession angle is asymptotic at the cosmological horizon, meanwhile for negative Λ in figure 3(b), the cosmological constant has negligible effects and the precession angle has the same behavior as that of the Schwarzschild spacetime previously mentioned.

Reissner–Nordström black hole. This case corresponds to a Schwarzschild black hole with non-vanishing charges e and g , after setting l , Λ and a to zero. The Reissner–Nordström spacetime is also a spherically symmetric solution.

The spin precession angle is then reduced to

$$\Delta_{\text{RN}} = \Phi \left(\frac{r^2 - 3mr + 2e^2 + 2g^2}{r\sqrt{r^2 - 2mr + e^2 + g^2}} \cosh \zeta - 1 \right), \quad (57)$$

where the functions A and B are

$$A_{\text{RN}} = 0, \quad B_{\text{RN}} = \frac{r^2 - 3mr + 2e^2 + 2g^2}{r\sqrt{r^2 - 2mr + e^2 + g^2}} \quad (58)$$

and $\cosh \eta_{\text{RN}} = 1$.

This result reproduces completely our previous result of [16] after adding the magnetic charge g .

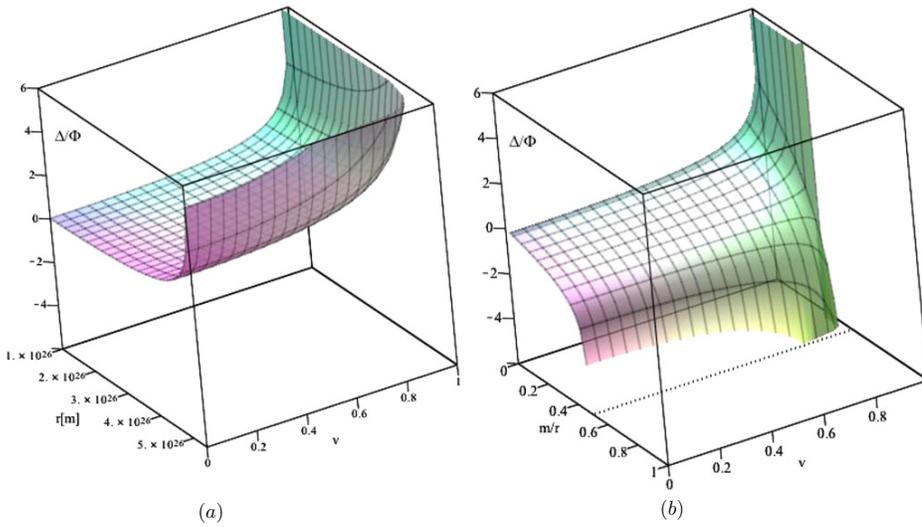


Figure 3. The precession angle Δ/Φ for a Schwarzschild–de Sitter and anti-de Sitter spacetime. (a) and (b) manifest the strong differences between these situations. (a) $\Lambda = 1.11 \times 10^{-56} \text{ (km}^{-2}\text{)}$, $1 \times 10^{26} < r < 5.4 \times 10^{26} \text{ (m)}$ (b) $\Lambda = -1.11 \times 10^{-56} \text{ (km}^{-2}\text{)}$, $0 < m/r < 1$.

Schwarzschild black hole. Finally it is easy to recover the Schwarzschild spin precession by setting $a, e, g, l, \Lambda = 0$. The coefficients and frame-dragging are reduced to $A_S = 0$, $B_S = (r - 3m)/\sqrt{r^2 - 2mr}$ and $\cosh \eta_S = 1$. Consequently, the expression (36) is given by

$$\Delta_S = \Phi \left(\frac{r - 3m}{\sqrt{r^2 - 2mr}} \cosh \zeta - 1 \right), \tag{59}$$

which is precisely equation (51) from [13].

6.3. Accelerating and rotating black holes

In [41] it was shown that the metric (1) represents an accelerating and rotating charged pair of black holes with a generally non-zero NUT parameter. In order to simplify our analysis we shall consider in this subsection the case of vanishing parameters $\Lambda = e = g = l = 0$.

As [41] pointed out, we can see that the parameters α and ω are related to the acceleration and rotation of the source (mass m), respectively.

Therefore, with an arbitrary α and using the remaining scaling freedom to put $\omega = a$, the Plebański–Demiański metric is reduced to

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} \left(-\frac{D}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{\rho^2}{D} dr^2 + \frac{P}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2) d\phi)^2 + \rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{P} d\theta^2 \right), \tag{60}$$

where the parameters (2) and (3) are given by

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - a^2 \alpha^2, \\ n &= -a\alpha m, \\ P &= \sin^2 \theta (1 - 2\alpha m \cos \theta + a^2 \alpha^2 \cos^2 \theta), \end{aligned} \tag{61}$$

and

$$\begin{aligned}\rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Omega &= 1 - \alpha r \cos \theta,\end{aligned}\tag{62}$$

$$D = a^2 - 2mr + (1 - a^2\alpha^2)r^2 + 2\alpha^2mr^3 - \alpha^2r^4.$$

The metric (60) has four singularities when $\theta = \pi/2$, that is, we can factorize D as

$$D = (r - r_+)(r - r_-)(1 - \alpha^2r^2),\tag{63}$$

where

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}.\tag{64}$$

As we can remember, r_{\pm} are the locations of the outer and inner horizons of the non-accelerating Kerr black hole. The other pair of horizons are related to the acceleration α and it is familiar in the context of the C-metric as an acceleration horizon:

$$r_{\text{acc}} = \frac{1}{\alpha}.\tag{65}$$

After some easy manipulations, the coefficients for the spin precession angle are given by

$$\begin{aligned}A_{\text{AccRot}} &= \frac{a\sqrt{D}}{2r(D - a^2)^{3/2}}[rD' - 2(D - a^2)], \\ B_{\text{AccRot}} &= \frac{1}{2r(D - a^2)^{3/2}}[4D(D - a^2) - r(a^2 + D)D'],\end{aligned}\tag{66}$$

where

$$D' = \frac{\partial D}{\partial r} = -2m + 2(1 - a^2\alpha^2)r + 6\alpha^2mr^2 - 4\alpha^2r^3\tag{67}$$

and the frame-dragging velocity is

$$\cosh \eta_{\text{AccRot}} = r^2 \sqrt{\frac{D}{(D - a^2)[(r^2 + a^2)^2 - a^2D]}}.\tag{68}$$

But the horizons (64) and (65) have no physical relevance on the spin precession angle because the coefficients (66) are not singular at these points.

We observed this kind of behavior for Kerr–Newman spacetime in our previous work [16], where the Schwarzschild horizon and the frame-dragging effect produce an asymptotic spin precession angle instead of Kerr horizons.

It is easy to show that we can recover the Kerr spacetime results reviewed in the previous section, after setting vanishing acceleration ($\alpha = 0$). Therefore, we shall consider the effect of acceleration over the spin precession angle.

C-metric. From the pair of accelerated and rotating black holes represented by the metric (60), we can consider the limit in which $a \rightarrow 0$. In this case, the metric has the form of the C-metric and thus the coefficients (66) reduce to

$$A_{\text{C-metric}} = 0, \quad B_{\text{C-metric}} = \frac{\alpha^2mr^2 + r - 3m}{\sqrt{(r^2 - 2mr)(1 - \alpha^2r^2)}},\tag{69}$$

and

$$\cosh \eta_{\text{C-metric}} = 1.\tag{70}$$

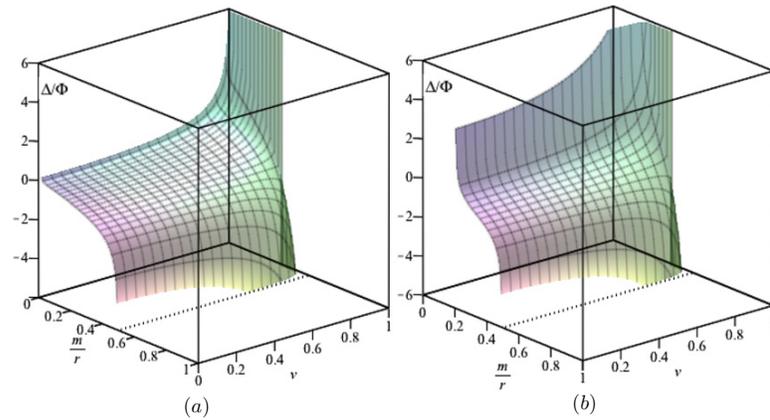


Figure 4. The precession angle Δ/Φ for C-metric for two values of the acceleration parameter α as a function of distance m/r and local velocity $v = v_{\text{EPR}}$. The dotted line is placed at Schwarzschild radius $r = 2m$. (a) $\alpha = 0.01m$; (b) $\alpha = 0.20m$.

Then, the spin precession angle for the C-metric is

$$\Delta_{\text{C-metric}} = \Phi \left(\frac{\alpha^2 m r^2 + r - 3m}{\sqrt{(r^2 - 2mr)(1 - \alpha^2 r^2)}} \cosh \zeta - 1 \right). \quad (71)$$

Moreover, it is easy to see that this equation reduces to the Schwarzschild case (59) when $\alpha = 0$.

In addition, we can see from equation (71) that it is divergent at the Schwarzschild radius $r = 2m$ and at the acceleration horizon, that is, $\Delta_{\text{C-metric}} \rightarrow \infty$ as $r \rightarrow \alpha^{-1}$.

In figure 4, the effect of acceleration α over the spin precession angle $\Delta_{\text{C-metric}}$ as function of the distance and local velocity of the particles is plotted. The acceleration is parameterized as a function of acceleration per unit mass. As mentioned in [41], the acceleration can only have positive values. We can observe the effect of the velocity of the particles that was already seen in all previous cases, that is, for high local velocity of the particles v_{EPR} , the $\Delta_{\text{C-metric}}$ increases.

The C-metric also has a horizon and corresponds to the Schwarzschild radius, that can be clearly observed in equation (71). But as was mentioned, there is another horizon due to the acceleration parameter as $r \rightarrow \alpha^{-1}$.

The above behavior can suggest some insight about the physical interpretation of the acceleration parameter. In fact, because of the acceleration horizon (65), we can see that a very small acceleration will have an important effect until a long distance is reached, even when a flat spacetime with no effect over the spin precession angle is expected. In [42], it was noted that when $\alpha \neq 0$, it is difficult to uniquely determine the mass of each individual black hole since the spacetime is not globally asymptotically flat and one cannot expect to distinguish effects due to acceleration from those due to gravitational fields. By the calculation of the spin precession angle it could be possible to distinguish indirectly the mass effects from those of the acceleration ones.

7. Conclusions

In this work, we found an algorithm to calculate in a general way the spin precession angle of an EPR pair of spin-1/2 massive particles moving on the equator for very general axially symmetric spacetime without reference to any specific metric.

However, even for the most general case, before applying it to Type-D solutions, we showed that when frame-dragging is taken into account, then an additional velocity over particles must be incorporated. Therefore, hovering observers were introduced in order to have a fixed reference frame that ensures reliable directions to compare the measurements of the 1/2-spin quantum states. The total velocity measured by these observers was identified as the addition of the velocity of a ZAMO, plus the local velocity of the particles measured by the ZAMO. These ZAMOs co-rotate the black hole due to frame-dragging and were used as a preliminary step before calculating the total local inertial velocity of the particles moving on the equator of the black hole. Therefore, we obtained a general algorithm to calculate the total spin precession angle, which is measured from the perspective of these hovering observers. The result does not assume a particular coordinate system but only depends on the axially symmetric metric coefficients.

After that, these results were applied to the most general Type-D Plebański–Demiański black hole. We obtained the general expression for the spin precession angle Δ_{PD} through the A and B coefficients (38) and the frame-dragging velocity $\cosh \eta_{\text{PD}}$ (40). Both coefficients and $\cosh \eta_{\text{PD}}$ are non-vanishing and they depend on the seven physical parameters arising in the Plebański–Demiański metric. The explicit expression of Δ_{PD} in terms of the physical parameters can be written down but it is a huge expression. Thus, we prefer to write down a short formula, in terms of the quartic function D and its derivative D' with respect to r . We study two branches of this case according to [22, 23]. The first one corresponds with $\alpha = 0$ and the second one with $l = 0$.

The first case (with $\alpha = 0$ and $l \neq 0$), corresponding to the non-accelerating Kerr–Newman–(anti-)de Sitter–NUT black hole, contains only six parameters and it is quite similar to the Plebański–Demiański case. In this right branch, we study different limits and we compute the spin precession angle for different subfamilies of solutions. Among these cases we have the Kerr solution with NUT and the NUT solution with rotation. Another cases included in the analysis were the Kerr, Schwarzschild–NUT, Schwarzschild–(anti-)de Sitter, Reissner–Nordström and Schwarzschild black holes. New results were found for Schwarzschild–NUT spacetime; the precession angle (52) has an asymptotic behavior at the Schwarzschild horizon shifted by the NUT parameter i.e. at r_{NUT} . For Schwarzschild–(anti)de Sitter spacetime there are also some interesting results (55) and (56). For positive Λ there is a large increment of the spin precession angle at the cosmological horizon, meanwhile for negative Λ , the cosmological constant has negligible effects and the precession angle has the same behavior as that of the Schwarzschild spacetime. For the second branch with $\alpha \neq 0$ and $l = 0$, we have the case of the accelerating and rotating black hole. The subfamily discussed in detail is the C-metric. We checked the consistence of our results by obtaining the Kerr, Reissner–Nordström and the Schwarzschild solutions also in this left branch.

The paper showed that the choices of 4-velocity, vierbein and observers are important to have a reliable measurement of the spin precession angle and obtain the perfect anti-correlation and the maximal violation of Bell's inequality. It is important to remember that as soon as the particles get closer to the event horizon for each case, their velocities increase very quickly until they asymptotically reach speed of light, with a rapid spin precession. The hovering observers would not be able to adjust the direction of the measurements of the spin, making virtually impossible any measurements of the entanglement.

In this paper, we considered only Type-D solution with a congruence of geodesic curves with non-vanishing expansion and twisting. It would be interesting to study analytic continuations of these solutions in order to find the interior solution supporting the spin precession below the event horizons and the static limit surface and above the cosmological

and acceleration horizons. Coordinates of the Kruskal–Szekeres type should be found for these metrics. It would be interesting also to extend our analysis to arbitrary non-equatorial orbits.

Another different Type-D solution is also known for the case of expansion but non-twisting. Among these solutions are the Robinson–Trautman Type D and the A-metrics. Moreover, Type-D solutions with non-expanding and non-twisting that emerge are the Kundt Type D and the B-metrics. It would be very interesting to generalize the results found in this paper to the description of entangled particles moving in these backgrounds. Future works would explore these scenarios.

Acknowledgments

It is a pleasure to thank R Morones, J Comparan and the staff of the FCFM, UANL for its kind support. The work of FR-P was supported by a CONACyT graduate fellowship and a fellowship of the CONACyT grant 128761. The work of HG-C was supported in part by a CONACyT grant 128761.

References

- [1] Collela R, Overhauser A W and Werner S A 1975 *Phys. Rev. Lett.* **34** 1472
- [2] Peters A, Chung K Y and Chu S 1999 *Nature* **400** 849
Gustavson T L, Landragin A and Kasevich M A 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 2385
- [3] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30
Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
- [4] Birrell N D and Davies P C 1982 *Quantum Fields in Curved Space* (London: Cambridge University Press)
Wald R M 1994 *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (Chicago, IL: University of Chicago Press)
- [5] Alsing P M and Milburn G J 2002 *Quantum Inform. Comput.* **2** 487
- [6] Terashima H and Ueda M 2003 *Quantum Inform. Comput.* **3** 224
- [7] Rembielinski J and Smolinski K A 2002 *Phys. Rev. A* **66** 052114
- [8] Gingrich R M and Adami C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270402
- [9] Ahn D, Lee H, Moon Y H and Hwang S W 2003 *Phys. Rev. A* **67** 012103
- [10] Li H and Du J 2003 *Phys. Rev. A* **68** 022108
- [11] Wigner E P 1939 *Ann. Math.* **40** 149
- [12] Weinberg S 1995 *The Quantum Theory of Fields: Foundations* vol 1 (Cambridge: Cambridge University Press)
- [13] Terashima H and Ueda M 2004 *Phys. Rev. A* **69** 032113
- [14] Einstein A, Podolsky B and Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [15] Said J and Adami K Z 2010 *Phys. Rev. D* **81** 124012
- [16] Robledo-Padilla F and García-Compeán H 2013 *Phys. Essays* **26** 86
- [17] Plebański J F and Demiański M 1976 *Ann. Phys.* **98** 98
- [18] Kramer D, Stephani H, MacCallum M and Herlt E 1980 *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* 1st edn (Cambridge: Cambridge University Press)
- [19] Griffiths J B and Podolský J 2005 *Class. Quantum Grav.* **22** 3467 (arXiv:gr-qc/0507021)
- [20] Griffiths J B and Podolský J 2006 *Class. Quantum Grav.* **23** 555 (arXiv:gr-qc/0511122)
- [21] Podolský J and Griffiths J B 2006 *Phys. Rev. D* **73** 044018 (arXiv:gr-qc/0601130)
- [22] Griffiths J B and Podolský J 2006 *Int. J. Mod. Phys. D* **15** 335 (arXiv:gr-qc/0511091)
- [23] Griffiths J B and Podolský J 2009 *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [24] Klemm D 1998 *J. High Energy Phys.* **JHEP11(1998)019** (arXiv:hep-th/9811126)
- [25] Caldarelli M M, Cognola G and Klemm D 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 399 (arXiv:hep-th/9908022)
- [26] Dehghani M H 2002 *Phys. Rev. D* **65** 124002 (arXiv:hep-th/0203049)
- [27] Chen W, Lu H and Pope C N 2007 *Nucl. Phys. B* **762** 38 (arXiv:hep-th/0601002)
- [28] Chen W, Lu H and Pope C N 2006 *Class. Quantum Grav.* **23** 5323 (arXiv:hep-th/0604125)
- [29] Page D N, Kubiznak D, Vasudevan M and Krtous P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 061102 (arXiv:hep-th/0611083)
- [30] Santillan O P 2007 Tri-Sasaki 7-metrics fibered over the QK limit of the Plebański–demiański metrics (arXiv:hep-th/0701126)

- [31] Kubiznak D and Krtous P 2007 *Phys. Rev. D* **76** 084036 (arXiv:0707.0409 [gr-qc])
- [32] Krtous P, Frolov V P and Kubiznak D 2008 *Phys. Rev. D* **78** 064022 (arXiv:0804.4705 [hep-th])
- [33] Cariglia M, Krtous P and Kubiznak D 2011 *Phys. Rev. D* **84** 024008 (arXiv:1104.4123 [hep-th])
- [34] Klemm D and Nozawa M 2013 *J. High Energy Phys.* **JHEP05(2013)123**
- [35] Kagramanova V, Kunz J and Lämmerzahl C 2008 *Class. Quantum Grav.* **25** 105023
- [36] Audretsch J and Lämmerzahl C 1983 *Gen. Rel. Grav.* **15** 495
- [37] Raine D and Thomas E 2010 *Black Holes, An Introduction* (London: Imperial College Press)
- [38] Al-Badawi A and Halilsoy M 2006 *Gen. Rel. Grav.* **38** 1729
- [39] Gibbons G W and Hawking S W 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2738
- [40] Mortazavimanesh M and Mohseni M 2009 *Gen. Rel. Grav.* **41** 2697
- [41] Griffiths J B and Podolský J 2005 *Class. Quantum Grav.* **22** 3467
- [42] Griffiths J B, Krtous P and Podolský J 2006 *Class. Quantum Grav.* **23** 6745

Curriculum Vitae

Felipe Angel Robledo Padilla

correo electrónico: frobledo108@gmail.com

teléfonos: (81) 8346 8831 (casa)
811 184 3858 (celular)

dirección: Lerma 2065, Col. Mitras Centro, Monterrey, N.L. 64460

fecha de nacimiento: 10 de mayo de 1977

lugar de nacimiento: Monterrey, N.L.

EDUCACIÓN**Universidad Autónoma de Nuevo León**

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Doctorado en Ingeniería Física Industrial

Enero 2005 – Septiembre 2014 (doctorado directo)

TEMA DE INVESTIGACIÓN DE DOCTORADO

- Física Teórica en el campo de Electrodinámica Cuántica, Teoría Cuántica de Campos, Propagación del mesón sigma en el medio nuclear, Mecánica Cuántica, Relatividad General y Hoyos Negros.
- Tesis: Entrelazamiento cuántico de partículas en las vecindades de agujeros negros.

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Monterrey

Ingeniería Física Industrial

Enero 1995 - Mayo 1999

Matrícula: 585355

ACTIVIDADES EXTRA-ACADÉMICAS

- Presidente de la Sociedad de Alumnos de la Carrera de Ingeniería Física Industrial 1998.
- Beca del 45%
- Secretario del Club de Física 1996.

TÓPICOS DE ESPECIALIZACIÓN DE CARRERA

- Ingeniería de Materiales (manufactura, procesos y materiales).
- Ingeniería de Control (fundamentos de control análogo y control digital).

EXPERIENCIA PROFESIONAL**Fane Stern & Biel**

Investigador Asociado

Junio 2012 a la fecha

- Programación y validación de encuestas electrónicas.
- Modelado Matemático y Programación en Investigación de Mercados.
- Desarrollo de nuevos proyectos e investigación en Neuromarketing.
- Auditor Interno del Sistema de Calidad.

Winsett Rethman Comité de Ética Independiente en Investigación Científica*Vocal*

Julio 2012 a la fecha

*Actividad voluntaria de revisión de protocolos en investigación farmacéutica de nuevos medicamentos y procedimientos médicos.***Winsett Rethman Comité de Investigación Científica***Presidente*

Abril 2014 a la fecha

*Actividad voluntaria de revisión de propuestas y estudios científicos***Integración Inclusión y Deporte Adaptado A.C.***Socio Fundador (actividad voluntaria)*

Enero 2013 a la fecha

*IIDEA A.C. sin fines de lucro cuyo objetivo es responder de manera seria a las necesidades de las personas con discapacidad en las áreas deportivas, académicas, laborales, culturales, recreativas y de salud; facilitando así que sean personas de éxito y que logren desenvolverse de manera activa a la vida convencional.***Consejo para Personas con Discapacidad del Estado de Nuevo León***Vocal e integrante del Comité de Comunicación (actividad voluntaria)*

Octubre 2013 a la fecha

*Órgano incluyente del Gobierno del Estado de carácter honorífico que lleva a cabo acciones que permitan garantizar condiciones favorables a para personas que enfrentan algún tipo de discapacidad.***Universidad Soriana***Profesor tutor de Preparatoria*

Enero-Septiembre 2012

*Clases y asesorías vía satélite y por redes sociales en las materias de Español, Física, Química, Matemáticas, Biología y Ciencias Sociales; para la acreditación de preparatoria por medio de examen único. Con 93 alumnos en las ciudades de Guadalajara, Poza Rica, Villahermosa, Hermosillo, Oaxaca, Cancún, Tijuana, Puebla, Querétaro, Zapopan, y Cuautitlán.***Educa-System S. de R.L. de C.V.***Profesor a domicilio en Monterrey, N.L. y área metropolitana*

Marzo 2011 a Mayo 2012

*Profesor a domicilio para alumnos de primaria, secundaria, preparatoria, profesional y adultos, en las asignaturas de Español, Matemáticas, Inglés, Ciencias, Historia, Computación e Ingenierías.***Johnson & Johnson Medical de Monterrey***Supervisor de Almacén de Refacciones y Comprador*

Enero 2000 a Enero 2004

- Arranque del almacén de refacciones.
- Manejo de inventarios físicamente y en sistema.
- Supervisión de 4 almacenistas y 1 capturista.
- Cotización y compra de materiales y refacciones con proveedores nacionales e internacionales.
- Compras de materiales no-directos nacionales e internacionales.
- Reducción de inventario de USD \$2 a \$1 millón en los últimos dos años en la empresa.

- Ahorro anual de USD \$70,000 el último año.
- Reconocimientos: Empleado del Mes de Diciembre 2001 y Equipo del Mes de Julio 2002.

Centro Juvenil Salesiano Excélsior*Profesor y Coordinador*

Febrero 1999 a Junio 2000

- Clases de Español y Matemáticas en Secundaria y Preparatoria Abierta.
- Coordinador de preparatoria.

El Colegio Excélsior imparte clases para personas de escasos recursos. La coordinación de preparatoria fue una actividad paralela a la enseñanza de Español y Matemáticas y al trabajo profesional, que implicaba la responsabilidad de ver por las necesidades del sistema de preparatoria abierta en esta escuela.