**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**T E S I S**

# EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN OLIGOPOLIO MIXTO CON UNA COMPAÑÍA DE GANANCIA LABORAL

**PRESENTA**

**CARLOS ERNESTO MITSUO NAKASHIMA VILLARREAL**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE:**
**MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L. DICIEMBRE DE 2014**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**T E S I S**

# EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN OLIGOPOLIO MIXTO CON UNA COMPAÑÍA DE GANANCIA LABORAL

**PRESENTA**

**CARLOS ERNESTO MITSUO NAKASHIMA VILLARREAL**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE:**
**MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L. DICIEMBRE DE 2014**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

T E S I S

# EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN OLIGOPOLIO MIXTO CON UNA COMPAÑÍA DE GANANCIA LABORAL

PRESENTA

CARLOS ERNESTO MITSUO NAKASHIMA VILLARREAL

EN OPCIÓN AL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L. DICIEMBRE DE 2014

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Los miembros de este comité recomendamos que la tesis: Equilibrios con Variaciones Conjeturadas en un Oligopolio Mixto con una Compañía de Ganancia Laboral, presentada por el Lic. Carlos Nakashima, sea aceptada como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

___________________________________
Dra. Nataliya Kalashnykova
Asesor

| | |
|---|---|
| ________________________________ | ________________________________ |
| Dr. Vitaliy Kalashnikov | Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco |
| Co-asesor | Revisor |

Vo. Bo.

___________________________________
Dr. José Fernando Camacho Vallejo
Coordinador del Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas

# Índice

# Capítulo 1. Introducción

En algunas economías existen mercados que son dominados por unas pocas empresas que forman un oligopolio. Se han hecho numerosos modelos para estudiar tales mercados y hasta hace relativamente poco sólo incluían empresas que maximizan una función de utilidad. Merril y Schneider (1966) y Harris y Wiens (1980), entre otros, fueron de los primeros en introducir modelos de oligopolio mixto, en el que existe una empresa pública que se caracteriza, en contraste con las empresas privadas, por maximizar una función de bienestar social.

Merril y Schneider (1966) analizan industrias con productos homogéneos y estructuras de costos idénticas para cada empresa en las que la capacidad productiva está concentrada en pocas firmas privadas. Suponen que las empresas privadas establecen su producción actuando como un monopolio conjunto y comparan el equilibrio obtenido con el resultado de suponer que una de las empresas privadas es comprada por el gobierno. Concluyen que el equilibrio en esta última situación sería más benéfico para los consumidores, con un menor precio y una mayor cantidad de producción.

Harris y Wiens (1980) analizan la existencia de una firma pública que maximiza el bienestar público y que compite con firmas privadas en un mercado de bienes homogéneos. La firma pública es dominante en el mercado y el gobierno la utiliza como herramienta de regulación del mercado.

Sugieren que el equilibrio alcanzado con la participación de una empresa pública en esas circunstancias sería similar al que existiría si se regularan los precios en esa industria. Con esto se aseguran mayores beneficios para los consumidores que si sólo existieran firmas privadas en el mercado.

El interés en oligopolios mixtos es alto debido a su importancia en numerosas economías alrededor del mundo como Europa, Canadá y Japón (para un modelo espacial de competencia entre empresas privadas y públicas en numerosos sectores de la economía en Japón véase Matsushima y Matsumura, 2003). Los oligopolios mixtos también son comunes en las industrias de envíos y paquetería en Estados Unidos y en banca, créditos hipotecarios, seguros de vida, aerolíneas, telecomunicaciones, gas natural, electricidad, industria automotriz, acereras, educación, salud y otras en países de Europa del Este y de la antigua Unión Soviética. Además, en países como México, recientemente se ha aprobado una serie de reformas en los sectores de energía y telecomunicaciones, por lo que es interesante explorar equilibrios de mercado con distintas características con el fin de que sean más benéficos para la sociedad.

La mayoría de los artículos que estudian el oligopolio mixto lo hacen utilizando el modelo clásico de Cournot o modelos de Stackelberg, por ejemplo: Matsushima and Matsumura (2003), Cornes and Sepahvand (2003), Figuères et al. (2004). Algunos autores (por ejemplo, Figuières et al., 2004) utilizan el equilibrio de Nash, –incluso el equilibrio de Cournot como un caso particular– que es una situación en la que todos los agentes han puesto en práctica –y están conscientes de haberlo hecho– una estrategia que maximiza sus ganancias dadas las estrategias de los otros. Consecuentemente, ningún agente tiene incentivos para modificar individualmente su estrategia.

Fjell y Heywood (2001) hacen un análisis del equilibrio en un mercado de oligopolio mixto en el que la empresa líder es la pública y ésta compite con firmas privadas domésticas y extranjeras. El equilibrio de Stackelberg también es un caso especial del equilibrio de Nash. En este equilibrio existen dos o más agentes que compiten para dominar el mercado. Uno de estos agentes —denominado "líder"— tiene una posición dominante, por lo que sus estrategias determinan las de sus seguidores. El líder siempre juega primero; por tanto, los seguidores siempre saben cuál es la primera jugada. El líder sabe que los seguidores observan su acción para determinar la suya y que no tienen la opción de cambiar las reglas del juego, es decir, no pueden transformar el equilibrio de Stackelberg en algún otro tipo de equilibrio.

Bowley (1924) y Frisch (1933) introdujeron el Equilibrio de Variaciones Conjeturadas (CVE) como otra posible solución en juegos estáticos. De acuerdo con este concepto, los agentes se comportan como sigue: cada agente escoge su acción más favorable tomando en cuenta que la estrategia de cada uno de los rivales es una función conjeturada de su propia estrategia. La consistencia del equilibrio se define como la coincidencia entre la mejor respuesta conjeturada de cada agente y la función de reacción conjeturada del mismo. Una vez conocidas las conjeturas (también llamadas coeficientes de influencia), cada agente lleva a cabo un procedimiento de verificación para revisar si su coeficiente de influencia es *consistente* con el de los demás. Existe una dificultad conceptual en el caso de que estén presentes numerosos agentes. Cuando están presentes en el mercado $n$ agentes, existen $n$ funciones de mejor respuesta y $n(n-1)$ conjeturas. Por lo tanto, si $n>2$, un equilibrio es consistente sólo si todos los agentes tienen la misma conjetura sobre el agente $i$. Este enfoque es utilizado por Başar y Olsder (1982), Fershtman y Kamien (1987), Laitner (1980), Bresnahan (1981), Novshek (1985), entre otros.

Otros autores (por ejemplo, Perry (1982) en el caso de oligopolios, Cornes y Sandler (1984) y Sugden (1985) para bienes públicos) consideran una clase de juegos en los que para cada agente las contribuciones de todos los demás agentes son agregadas, es decir, es como si cada agente jugara contra otro único jugador que representa al resto de los agentes.

En los trabajos de Bulavsky y Kalashnikov (1994, 1995) e Isac, Bulavsky y Kalashnikov (2002) se introdujo otro tipo de CVE en el que las variaciones conjeturadas representadas por los coeficientes de influencia de cada agente afectan la estructura del equilibrio de Nash. No sólo consideran una competencia de Cournot clásico, sino también un modelo tipo Cournot con coeficientes de influencia diferentes de 1 –un coeficiente de influencia igual a 1 corresponde al modelo de Cournot clásico–. Además obtienen resultados sobre la existencia y la unicidad de los equilibrios.

Isac, Bulavsky y Kalashnikov (2002) extienden el modelo de oligopolio clásico para incluir conjeturas. En lugar de los supuestos de Cournot, cada uno de los productores $i = 1, 2, ..., n$, hacen variaciones conjeturales descritos por la siguiente ecuación:

$$G_i(\eta) = G + (\eta - q_i) \cdot w_i(G, q_i)$$

donde

| | |
|---|---|
| $G$ | es la cantidad total producida en el mercado; |
| $q_i$ y $\eta$ | son, respectivamente, la cantidad actual y la esperada del agente $i$; |
| $G_i(\eta)$ | es la cantidad total producida en el mercado conjeturada por el agente $i$ como respuesta a su cambio de $q_i$ a $\eta$; |
| $w_i(G, q_i)$ | es el coeficiente de influencia del agente $i$. |

Bajo supuestos generales en la teoría económica sobre las propiedades de los coeficientes de influencia $w_i = w_i(G, q_i)$, las funciones de costos $f_i(q_i)$ y la función de la demanda inversa $p = p(G)$ se obtienen resultados sobre la existencia y la unicidad de los resultados para CVE. Este modelo fue extendido por Kalashnikov et al. (2009) y Kalashnikov et al. (2010) con aplicaciones al modelo de oligopolio mixto.

Bulavsky (1997) propone una perspectiva diferente en la que supone que cada uno de los agentes hace conjeturas no sobre las funciones de respuesta óptimas de los demás agentes, sino sobre las variaciones en el precio de mercado dependiendo de sus cambios en la producción. Conociendo las conjeturas de los rivales (los coeficientes de influencia), cada agente puede realizar un procedimiento de verificación para determinar si su coeficiente de influencia es consistente con el de los otros. Si los coeficientes de influencia de todos los agentes son consistentes, se llega a un equilibrio que llama equilibrio interior.

Liu et al. (2007) obtienen de manera independiente las mismas fórmulas de verificación y establecen la existencia y unicidad de un CVE consistente en un mercado de electricidad. Sin embargo, Liu et al. (2007) sólo utilizan funciones de demanda inversa lineales y funciones de costos cuadráticas, mientras que Bulavsky (1997) permite funciones de demanda no lineales –e incluso no diferenciables– y funciones de costos convexas no necesariamente cuadráticas.

Kalashnikov et al. (2011) extienden los resultados de Bulavsky (1997) a un modelo de oligopolio mixto. Siguiendo a Bulavsky y Kalashnikov (1994, 1995) consideran un modelo de CVE para oligopolios. Sin embargo, en contraste con los modelos de Bulavsky y Kalashnikov (1994, 1995) y de Kalashnikov et al. (2009) y Kalashnikov et al. (2010), en el modelo utilizado en ese trabajo utilizan el precio de mercado $p$ y no la cantidad producida de los agentes como variable observable.

En este trabajo se extienden los resultados obtenidos por Kalashnikov et al. (2011) cambiando la función objetivo de la empresa pública. En Kalashnikov et al. (2011) la empresa pública maximiza el excedente económico o bienestar total, dado por la suma de los excedentes del consumidor y de los productores. En este trabajo la empresa pública es una cooperativa, es decir, una empresa administrada por los propios trabajadores. Su función objetivo es la utilidad por trabajador de la empresa (Ward 1958, Ohnishi 2012).

En la segunda sección de este trabajo introducimos el modelo matemático de oligopolio mixto con una empresa que maximiza una función de utilidad por trabajador. Utilizamos la misma forma que el artículo de Ohnishi (2012). En la tercera sección definimos el concepto de equilibrio exterior, es decir, un CVE con coeficientes de influencia determinados exógenamente. Se formula el teorema de existencia y unicidad del equilibrio. La cuarta sección formula el teorema de existencia de equilibrio interior en el que se obtiene un equilibrio exterior con conjeturas consistentes a través del criterio de consistencia. En la quinta sección se aplica el experimento numérico de Liu et al. (2007) a nuestro modelo. En la sexta sección se concluye y en la séptima se presentan posibles extensiones a este trabajo. En los anexos se presentan los programas de GAMS para los experimentos numéricos.

# Capítulo 2. Especificación del Modelo

En este modelo consideramos no menos de 2 productores de un bien homogéneo con funciones de costos $f_i(q_i),\ i=0,\ldots,n;\ n\geq 1$ donde $q_i$ es la producción del agente $i$. La demanda está dada por $G(p)$, donde $p$ es el precio de mercado propuesto por los agentes productores. La demanda activa $D$ es no-negativa y no depende del precio. El equilibrio entre la oferta y la demanda a un precio determinado $p$ está dado por la siguiente igualdad de balance

$$\sum_{i=0}^{n} q_i = G(p) + D. \tag{1}$$

Introducimos los siguientes supuestos para los datos del modelo.

**A1.** La función de demanda $G(p)$ está definida para precios $p \in (0,+\infty)$ y es continuamente diferenciable, no creciente, con la derivada $G'(p) < 0$.

**A2.** Para cada agente privado $i = 1,\ldots,n$, la función de costos $f_i(q_i)$ es dos veces continuamente diferenciable, además, $f_i'(q_i) > 0, f_i''(q_i) > 0$.

Para la compañía pública $i = 0$, la función de costos está dada por

$$f_0(q_0) = \bar{f}_0(q_0) \cdot l(q_0), \tag{2}$$

donde $\bar{f}_0(q_0)$ es dos veces continuamente diferenciable y $\bar{f}_0'(q_0) > 0, \bar{f}_0''(q_0) > 0$. La función

$$l(q_0) = \bar{a}q_0 + \bar{b},\ \bar{a} > 0,\ \bar{b} > 0\,, \tag{3}$$

es una función de insumos laborales (labor input function, Ohnishi 2012).

El agente privado $i,\ i = 1,...,n$, escoge su producción $q_i \geq 0$ para maximizar su utilidad neta

$$\pi_i(p, q_i) = p \cdot q_i - f_i(q_i)\,. \tag{4}$$

Por otro lado, la compañía pública con $i = 0$, selecciona su volumen de producción $q_0 \geq 0$ para maximizar la función de utilidad por trabajador (income per worker function, Ohnishi 2012) dada por

$$S = \frac{p \cdot q_0 - f_0(q_0)}{\bar{a}q_0 + \bar{b}}\,. \tag{5}$$

Ahora postulamos que los agentes (tanto los públicos como los privados) suponen que su elección de volumen de producción podría afectar el valor del precio del mercado $p$. Este supuesto puede ser definido por una dependencia conjeturada de la variación del precio $p$ en función de su volumen de producción $q_i$. De este modo, las condiciones de optimalidad de primer orden tienen la forma:

para las firmas privadas $(i = 1,...,n)$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p + q_i \frac{\partial p}{\partial q_i} - f_i{}'(q_i) \begin{cases} = 0 \text{ si } q_i > 0; \\ \leq 0 \text{ si } q_i = 0, \end{cases} \quad \text{para } i = 1,2,...,n\,, \tag{6}$$

y para la compañía pública (con $i=0$)

$$\frac{\partial S}{\partial q_0}=\frac{\left(p+\frac{\partial p}{\partial q_0}q_0\right)\cdot\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)-\bar{a}pq_0}{\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2}-\bar{f}_0'(q_0)\begin{cases}=0 \text{ si } q_0>0;\\ \leq 0 \text{ si } q_0=0.\end{cases} \tag{7}$$

Para describir el comportamiento del agente $i$, es necesario evaluar el comportamiento de la derivada

$$\frac{\partial p}{\partial q_i}=-v_i \tag{8}$$

más que la dependencia de $p$ respecto a $q_i$. Introducimos aquí el signo negativo para utilizar solamente los valores no negativos de $v_i$. La dependencia de $p$ respecto a $q_i$ debe garantizar la concavidad (al menos local) de la utilidad conjeturada del agente $i$ como función de su producción. De otra manera, no se pueden utilizar las condiciones necesarias (6) y (7) como suficientes.

Como suponemos que las funciones de costos $f_i(q_i)$, $i=1,...,n$, son estrictamente convexas para los agentes privados, es suficiente garantizar la concavidad del producto $p\cdot q_i$. Para esto es suficiente suponer que el coeficiente $v_i$ (el ***coeficiente de influencia*** del agente *i*) es no negativo y constante. En este caso la dependencia local conjeturada de la utilidad sobre la variación en su volumen de producción $\eta_i$ tiene la forma

$$\left[p-v_i(\eta_i-q_i)\right]\eta_i-f_i(\eta_i) \tag{9}$$

mientras que las condiciones de primer orden en $\eta_i = q_i$ están dadas por las relaciones

$$\begin{cases} p = \nu_i q_i + f_i'(q_i), \text{ si } q_i > 0; \\ p \le f_i'(0), \qquad\qquad \text{si } q_i = 0 \end{cases} \tag{10}$$

De la misma manera, la compañía pública conjetura la dependencia local de la función de ingreso por trabajador respecto a la producción $\eta_0$ en la forma

$$S = \frac{\left[p - \nu_0(\eta_0 - q_0)\right]\eta_0 - f_0(\eta_0)}{\bar{a}\eta_0 + \bar{b}}, \tag{11}$$

lo cual permite escribir las condiciones de primer orden en $\eta_0 = q_0$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} p = \dfrac{\nu_0 q_0\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)}{\bar{b}} + \dfrac{\bar{f}_0'(q_0)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2}{\bar{b}}, \text{ si } q_0 > 0; \\ p \le \bar{f}_0'(0)\bar{b}, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } q_0 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Las igualdades (10) y (12) permiten definir $q_i$ como funciones de $p$ y $\nu_i$ continuamente diferenciables. Para mostrarlo introducimos las siguientes funciones a partir de las condiciones de optimalidad (10) para $i = 1,...,n$

$$\gamma_i(p, q_i, \nu_i) = p - \nu_i q_i - f_i'(q_i). \tag{13}$$

Por (10), podemos escribir

$$\gamma_i(p, q_i, \nu_i) = 0. \tag{14}$$

Como

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_i} = -\nu_i - f_i''(q_i) < 0, \tag{15}$$

por el teorema de la función implícita es posible expresar el volumen de producción

$$q_i = q_i(p, \nu_i),\ i = 1,...,n \tag{16}$$

del agente *i* como una función continuamente diferenciable respecto a sus variables.

Al sustituir esta función en (14) y derivar respecto a $p$, obtenemos

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial p} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p} = 1 - \left[\nu_i + f_i''(q_i)\right]\frac{\partial q_i}{\partial p} = 0 \tag{17}$$

De (17),

$$\frac{\partial q_i}{\partial p} = \frac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)} > 0,\ i = 1,...,n. \tag{18}$$

De la misma manera, para el agente $i = 0$,

$$\gamma_0(p, q_0, \nu_0) = p - \frac{\nu_0 q_0(\bar{a}q_0 + \bar{b})}{\bar{b}} - \frac{\bar{f}_0'(q_0)(\bar{a}q_0 + \bar{b})^2}{\bar{b}}. \tag{19}$$

Por (12), podemos escribir

$$\gamma_0(p, q_0, \nu_0) = 0. \tag{20}$$

Como

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial q_0} = -\frac{\nu_0(2\bar{a}q_0 + \bar{b})}{\bar{b}} - \frac{2\bar{a}\bar{f}_0'(q_0)(\bar{a}q_0 + \bar{b})}{\bar{b}} - \frac{\bar{f}_0''(q_0)(\bar{a}q_0 + \bar{b})^2}{\bar{b}} < 0, \tag{21}$$

por el teorema de la función implícita es posible expresar el volumen de producción de la compañía pública

$$q_0 = q_0(p, \nu_0) \tag{22}$$

como una función continuamente diferenciable respecto a sus variables. Al sustituir esta función en (20) y derivar respecto a $p$, obtenemos

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial p} + \frac{\partial \gamma_0}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial p} = 1 - \left[\frac{\nu_0\left(2\bar{a}q_0 + \bar{b}\right) + 2\bar{a}\bar{f}_0{}'(q_0)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right) + \bar{f}_0{}''(q_0)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2}{\bar{b}}\right]\frac{\partial q_0}{\partial p} = 0 \tag{23}$$

De (23),

$$\frac{\partial q_0}{\partial p} = \frac{\bar{b}}{\nu_0\left(2\bar{a}q_0 + \bar{b}\right) + 2\bar{a}\bar{f}_0{}'(q_0)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right) + \bar{f}_0{}''(q_0)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2} > 0\,. \tag{24}$$

Si supusiéramos que las conjeturas de los agentes están dadas exógenamente como lo suponen Bulavsky y Kalashnikov (1994, 1995), los valores de $\nu_i$ serían funciones de $q_i$ y $p$. Sin embargo, en este trabajo utilizamos el enfoque de Bulavsky (1996, 1997), en donde los parámetros de conjeturas de equilibrio, es decir, los coeficientes de influencia, se determinan simultáneamente con el precio $p$ y los valores de producción $q_i$ a través de un procedimiento de verificación. En este caso, los coeficientes de influencia son parámetros escalares determinados sólo para el equilibrio. A partir de aquí nos referiremos a un equilibrio tal como un equilibrio ***interior*** descrito por el conjunto de variables y parámetros

$$\left(p, q_0, q_1, \ldots, q_n, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n\right). \tag{25}$$

# Capítulo 3. Equilibrio Exterior

Antes de presentar el procedimiento de verificación, es necesaria otra noción de equilibrio llamada ***exterior*** con los parámetros $\nu_i$ determinados exógenamente.

**Definición 1.** *El vector*

$$\left(p, q_0, q_1, \ldots, q_n\right) \tag{26}$$

*se denomina* ***equilibrio exterior*** *para determinados coeficientes de influencia*

$$\left(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n\right),\ \nu_i \geq 0,\ i = 0,1,\ldots,n, \tag{27}$$

*si se cumple la condición de balance* (1) *y para todos los agentes se cumplen las condiciones de optimalidad* (10) *y* (12).

En lo siguiente, sólo consideraremos el caso en el que el conjunto de los agentes participantes en el mercado está fijo (independientemente de los coeficientes de influencia $\nu_i$). Para asegurar lo anterior establecemos el siguiente supuesto.

**A3.** Para el precio

$$p_0 = \max\left\{\max_{1 \leq i \leq n}\left\{f_i'(0)\right\}, \overline{f}_0'(0)\overline{b}\right\} \tag{28}$$

existe un único volumen de producción $q_i^0$ (por A2) tal que para $i = 1,\ldots,n$,

$$p_0 = f_i'\left(q_i^0\right), \tag{29}$$

y para $i=0$,

$$p_0 = \frac{\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2}{\bar{b}} \bar{f}_0{}'\left(q_0^0\right). \tag{30}$$

Asimismo,

$$\sum_{i=0}^{n} q_i^0 < G\left(p_0\right). \tag{31}$$

El supuesto anterior, junto con los supuestos A1 y A2, garantiza que las condiciones (1), (10) y (12) se cumplan simultáneamente si y sólo si $p > p_0$, es decir, si y sólo si los volúmenes de producción $q_i$, $i = 0,1,...,n$ son estrictamente positivos.

**Teorema 1.** *Bajo los supuestos* **A1**, **A2** y **A3**, *para cualesquiera* $D \geq 0$ y $\nu_i \geq 0,\ i = 0,1,...,n,$ *existe un único equilibrio exterior* $\left(p, q_0, q_1, ..., q_n\right)$*, que depende continuamente de los parámetros* $\left(D, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right)$. *El precio de equilibrio*

$$p = p\left(D, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right) \tag{32}$$

*es diferenciable respecto a* $D$ *y a* $\nu_i$, $i = 0,1,...,n$ *. Además,*

$$p\left(D, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right) > p_0, \tag{33}$$

*y*

$$p'\left(D\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i + f_i{}''\left(q_i\right)} + \left(q_0\left(p, \nu_0\right)\right)' - G'\left(p\right)}, \tag{34}$$

*donde* $\left(q_0\left(p,v_0\right)\right)'$ *es la derivada parcial respecto a* $p$ *de la función de solución de las condiciones de optimalidad* (12) *para el agente* $i=0$.

**Demostración**

Junto con $p_0$ introducido en A3, consideramos

$$p_1=\min\left\{\lim_{q_0\to+\infty}\left[v_0\frac{\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)q_0}{\bar{b}}+\frac{\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2}{\bar{b}}\bar{f}_0{}'\left(q_0\right)\right],\min_{1\le i\le n}\left\{\lim_{q_i\to+\infty}\left[f_i{}'\left(q_i\right)+v_iq_i\right]\right\}\right\} \qquad (35)$$

Los límites entre los cuales se busca el mínimo pueden ser iguales a $+\infty$. En este caso, $p_1=+\infty$ que se da, por ejemplo, cuando todos los coeficientes de influencia $v_i,\ i=1,...,n$, son mayores a cero. Sin embargo, $p_1$ puede ser finito en el caso en que $v_i=0$ para algún $i=1,...,n$.

De (18) y (24) se sabe que $q_i,\ i=0,1,...,n$, son continuamente diferenciables respecto a $p$ y que $\frac{\partial q_i}{\partial p},\ i=0,1,...n$, son positivas. Así,

$$Q(p)=q_0+\sum_{i=1}^{n}q_i \qquad (36)$$

es continua y es estrictamente creciente. De acuerdo con A3, para $p=p_0$ se cumple

$$Q\left(p_0\right)=\sum_{i=0}^{n}q_i^0<G\left(p_0\right) \qquad (37)$$

y cuando $p \to p_1$ por (35) la suma $Q(p)$ tiende a $+\infty$. Además, como $G(p)$ es no creciente y $G'(p) < 0$, existe un único $p = p^*$ con el que se cumple

$$Q(p^*) = G(p^*) + D \tag{38}$$

El equilibrio exterior depende continuamente de los parámetros $(D, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n)$. Sabemos que es posible expresar el volumen de producción del agente $i$ como función continuamente diferenciable respecto del precio $p$ y del coeficiente de influencia $\nu_i$, $q_i = q_i(p, \nu_i)$, $i = 0,1,...,n$. De esta manera, podemos expresar la ecuación de balance como la siguiente relación:

$$q_0(p, \nu_0) + \sum_{i=1}^{n} q_i(p, \nu_i) - G(p) - D = 0 \tag{39}$$

Introducimos la función

$$\Gamma(p, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n, D) = q_0(p, \nu_0) + \sum_{i=1}^{n} q_i(p, \nu_i) - G(p) - D \tag{40}$$

y reescribimos (39) como sigue

$$\Gamma(p, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n, D) = 0 \, . \tag{41}$$

Como

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)} + \left(q_0(p, \nu_0)\right)' - G'(p) > 0 \, , \tag{42}$$

por el teorema de la función implícita es posible expresar el precio de equilibrio como una función

$$p = p\left(v_0, v_1, \ldots, v_n, D\right) \tag{43}$$

que es diferenciable con respecto a todos sus parámetros. La derivada parcial del precio de equilibrio $p$ con respecto a $D$ se puede encontrar con la igualdad

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial \Gamma}{\partial D} = 0 \tag{44}$$

de la cual obtenemos (34). Así la demostración del teorema 1 está terminada.

# Capítulo 4. Equilibrio interior

Una vez demostrada la fórmula (34), es posible describir el procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia $v_i$ siguiendo a Bulavsky (1996, 1997). Suponemos un equilibrio exterior dado para algunos $v_0, v_1, ..., v_n$ y $D$. Uno de los productores, el agente $k$, cambia temporalmente su comportamiento: deja de maximizar su utilidad conjeturada (o la función de ingreso por trabajador para $k = 0$) y hace pequeñas variaciones alrededor de su volumen de producción $q_k$. Esto es equivalente a restringir el modelo al subconjunto $i \neq k$ sustrayendo la producción de la demanda activa $D$. La variación del agente $k$ en su producción es equivalente a la variación en la demanda activa en la forma

$$D_k = D - q_k . \qquad (45)$$

Si consideramos variaciones infinitesimales, el agente $k$ puede obtener sus coeficientes de influencia a través de la observación de los cambios correspondientes del precio de equilibrio. Utilizando (34) y excluyendo de las sumas el término correspondiente a $i = k$, obtenemos el criterio de consistencia.

**Criterio de consistencia.** *Los coeficientes de influencia* $\nu_0, \nu_1, ..., \nu_n$ *son consistentes para un equilibrio exterior* $(p, q_0, q_1, ..., q_n)$ *si se cumplen las siguientes igualdades*:

$$\nu_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)} - G'(p)}, \tag{46}$$

*y*

$$\nu_i = \frac{1}{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_j + f_j''(q_j)} + \left(q_0(p, \nu_0)\right)' - G'(p)}, \; i = 1, ..., n \tag{47}$$

Ahora definimos el concepto de equilibrio interior.

**Definición 2.** *La colección* $(p, q_0, q_1, ..., q_n, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n)$ *donde* $\nu_k \geq 0, \; k = 0, 1, ..., n$*, se denomina* ***equilibrio interior*** *si, para los coeficientes de influencia considerados, el conjunto* $(p, q_0, q_1, ..., q_n)$ *es un equilibrio exterior y se cumple el criterio de consistencia para todo* $k$*.*

**Teorema 2.** Para el caso $n > 2$ *bajo los supuestos* **A1***,* **A2** *y* **A3***, existe un equilibrio interior. Para los casos* $n = 1$ y $n = 2$*, existe un equilibrio si además de los supuestos* **A1***,* **A2** *y* **A3** *se cumple que* $|G'(p)| \geq \varepsilon > 0$*.*

**Demostración**

En lo siguiente demostraremos que existen $\nu_i \geq 0,\ i = 0,1,...,n;\ q_i \geq 0,\ i = 0,1,...,n;$ y $p > p_0$ tales que el vector $(p, q_0, q_1, ..., q_n)$ constituye un equilibrio exterior y se cumplen las igualdades (46) y (47). Introducimos el parámetro $\alpha$ tal que

$$G'(p) = \frac{\alpha}{1+\alpha} \text{ para } \alpha \in [-1,0] \tag{48}$$

y escribimos el lado derecho de las igualdades (46) y (47) de la siguiente forma:

$$F_0(\alpha, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n) = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)} - \alpha}, \tag{49}$$

y

$$F_i(\alpha, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n) = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_i + f_j''(q_j)} + \left(q_0(p, \nu_0)\right)'\right] - \alpha},\ i = 1,...,n. \tag{50}$$

Como $\nu_i \geq 0, f_i''(q_i) > 0,\ i = 0,1,...,n$ y $\alpha \in [-1,0]$, las funciones $F_i,\ i = 0,1,...,n$, están bien definidas y son continuas con respecto a sus argumentos en los dominios correspondientes. Ahora introducimos una función auxiliar

$$\Phi : [-1,0] \times R_+^{n+1} \to [-1,0] \tag{51}$$

de la siguiente manera. Para $\alpha \in [-1,0]$ arbitraria y $(\nu_0, \nu_1, ..., \nu_n) \in R_+^{n+1}$, encontramos el vector de equilibrio exterior $(p, q_0, q_1, ..., q_n)$ (único por el Teorema 1) y calculamos la derivada $G'(p)$ en el punto $p$. Definimos el valor de la función $\Phi$ como sigue:

$$\Phi(\alpha,\nu_0,\nu_1,...,\nu_n)=\hat{\alpha}=\frac{G'(p)}{1-G'(p)}\in[-1,0]. \tag{52}$$

Como la derivada $G'(p)$ es continua en $p$ (por el supuesto A1) y el precio de equilibrio $p=p(\nu_0,\nu_1,...,\nu_n)$ es una función continua (por el Teorema 1), $\Phi$ es continua dado que es una superposición de funciones continuas. Para terminar la demostración construimos un mapeo

$$H=(\Phi,F_0,F_1,...,F_n):[-1,0]\times R_+^{n+1}\to[-1,0]\times R_+^{n+1} \tag{53}$$

y seleccionamos un conjunto compacto convexo que es mapeado a sí mismo por $H$. Definimos

$$s=\max\left\{f_i''(q_i)\middle|q_i\in[0,G(p_0)],i=0,1,...,n\right\}. \tag{54}$$

Las fórmulas (49) y (50) tienen entonces las siguientes relaciones:

si $\alpha=-1$, entonces

$$F_0(-1,\nu_0,\nu_1,...,\nu_n)=0, \tag{55}$$

$$F_i(-1,\nu_0,\nu_1,...,\nu_n)=0,\ i=1,...,n, \tag{56}$$

mientras que para $\alpha\in(-1,0]$ y $n>2$ se tiene

$$\begin{aligned}0\le F_0(\alpha,\nu_0,\nu_1,...,\nu_n)&=\frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\nu_i+f_i''(q_i)}-\alpha}\le\\ \le\frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\nu_i+f_i''(q_i)}}&=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\nu_i+f_i''(q_i)}}\le\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\nu_i+s}}\le\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\nu_i+s}}\end{aligned} \tag{57}$$

y

$$0 \le F_i\left(\alpha, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right) = \frac{1+\alpha}{\left(1+\alpha\right)\left[\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_j + f_j''\left(q_j\right)} + \left(q_0\left(p, \nu_0\right)\right)'\right] - \alpha} \le$$

$$\le \frac{1+\alpha}{\left(1+\alpha\right)\left[\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_j + f_j''\left(q_j\right)} + \left(q_0\left(p, \nu_0\right)\right)'\right]} \le \frac{1}{\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_j + f_j''\left(q_j\right)} + \left(q_0\left(p, \nu_0\right)\right)'} \le \tag{58}$$

$$\le \frac{1}{\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_j + f_j''\left(q_j\right)}} \le \frac{1}{\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_j + s}}, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Las relaciones (55) – (58) implican que para cualquier $\alpha \in \left[-1, 0\right]$ si

$$0 \le \nu_j \le \frac{s}{n-2}, \; j = 0, 1, ..., n, \tag{59}$$

los valores de $F_j\left(\alpha, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right)$, $\mathrm{j} = 0, 1, ..., n$ caen en el mismo intervalo $\left[0, \frac{s}{n-2}\right]$. Por lo tanto, establecimos que $H = \left(\Phi, F_0, F_1, ..., F_n\right)$ mapea el subconjunto compacto $\left[-1, 0\right] \times \left[0, \frac{s}{n-2}\right]^{n+1}$ a sí mismo. Por el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, H tiene un punto fijo $\left(\alpha, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right)$, es decir,

$$\begin{cases} \Phi\left(\alpha, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right) = \alpha, \\ F_0\left(\alpha, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right) = \nu_0, \\ F_1\left(\alpha, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right) = \nu_1, \\ \vdots \\ F_n\left(\alpha, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_n\right) = \nu_n. \end{cases} \tag{60}$$

Para los casos $n=1$ y $n=2$ , se tiene que

$$0 \le F_0\left(\alpha, v_0, v_1, ..., v_n\right) = \frac{1+\alpha}{\left(1+\alpha\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i + f_i''\left(q_i\right)} - \alpha} \le \frac{1}{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \le \frac{1}{\varepsilon} \tag{61}$$

y

$$0 \le F_i\left(\alpha, v_0, v_1, \mathrm{K}\ , v_n\right) = \frac{1}{\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{v_j + f_j''\left(q_j\right)} + \frac{\partial \overline{q}_0\left(p, v_0\right)}{\partial p}\right] - \frac{\alpha}{1+\alpha}} \le \frac{1}{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \le \frac{1}{\varepsilon} \tag{62}$$

Si $0 \le v_j \le \frac{1}{\varepsilon},\ j = 0,1,...,n,$ entonces los valores de $F_j\left(\alpha, v_0, v_1, ..., v_n\right), j = 0,1,...,n,$ caen en el mismo intervalo cerrado $\left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right]$. Con esto, establecemos que el mapeo continuo $\mathrm{H} = \left(\Phi, F_0, F_1, ..., F_n\right)$ mapea el subconjunto continuo $\left[-1,0\right] \times \left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right]^{n+1}$ a sí mismo. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, $\mathrm{H}$ tiene un punto fijo $\left(\alpha, v_0, v_1, ..., v_n\right)$.

Habiendo determinado el equilibrio exterior único por el Teorema 1 para los coeficientes de influencia $\left(v_0, v_1, \ldots, v_n\right)$, es posible concluir de (60) y de la definición de la función $\Phi$ que $G'\left(p\right) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ y los coeficientes de influencia satisfacen las condiciones (46) y (47). Por lo tanto, de acuerdo con la Definición 2, el vector $\left(p, q_0, q_1, ..., q_n, v_0, v_1, ..., v_n\right)$ conforma el equilibrio interior y la prueba está completa.

# Capítulo 5. Experimento numérico

En esta sección ejemplificamos las diferencias entre tres tipos de equilibrios en un mercado de oligopolio mixto con una empresa que maximiza la función laboral: equilibrio con conjeturas consistentes (CVE), equilibrio con conjeturas de Cournot y equilibrio de competencia perfecta. En el primer caso los coeficientes de influencia se determinan endógenamente, mientras que en el modelo de oligopolio mixto con conjeturas Cournot se considera que el cambio en la producción de cada agente se transmite completamente al mercado, es decir, la derivada de la producción total del mercado con respecto al cambio en la producción de cada agente es igual a 1. El modelo de competencia perfecta supone que los cambios en la producción de cada agente no cambian la producción total del mercado y, por lo tanto, no afectan el precio, es decir, los coeficientes de influencia son iguales a 0.

Liu et al. (2007) toman como ejemplo el caso de prueba con 6 generadores del Instituto de Ingeniería Eléctrica y Electrónica (IEEE). En este trabajo aplicamos las fórmulas (46) y (47) al ejemplo que utilizan Liu et al. (2007) y Kalashnikov et al. (2011). Además suponemos que la firma $i = 0$ es una empresa pública que maximiza una función laboral.

La función de demanda inversa del mercado del modelo de electricidad está dada por

$$p = 50 - 0.02Q = 50 - 0.02\sum_{i=0}^{5} q_i \ .$$

Los costos de cada agente son cuadráticos y están dados por la siguientes funciones:

para $i = 0$,

$$f_0(q_0) = \overline{f}_0(q_0) \cdot l(q_0),$$

donde

$$\overline{f}_0(q_0) = \frac{1}{2} a_0 q_0^2 + b_0 q_0$$

y

$$l(q_0) = \overline{a} q_0 + \overline{b}, \ \overline{a} > 0, \ \overline{b} > 0 \ .$$

para $i = 1, \ldots, n$,

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i$$

Buscamos tres tipos de equilibrio: CVE, Cournot y competencia perfecta. Para los casos Cournot y competencia perfecta utilizamos el coeficiente de influencia de Kalashnikova et al. (2012), es decir, el cambio en la cantidad total producida en el mercado respecto a cambios en la producción de cada agente. Despejamos la función de demanda inversa para obtener la cantidad total del mercado y derivamos con respecto a la cantidad producida por el agente $i$.

$$Q = 2500 - 50p$$

$$\omega = \frac{\delta Q}{\delta q_i} = -50\frac{\delta p}{\delta q_i} = 50\nu_i$$

En un equilibrio en el sentido Cournot, este coeficiente es igual a 1, es decir, la producción total del mercado cambia proporcionalmente a cambios en la producción de los agentes, con lo que obtenemos $\nu_i = 0.02$. En el caso de competencia perfecta los coeficientes de influencia son iguales a 0 debido a que los cambios en la producción de cada agente no modifican la cantidad total del mercado ni el precio: $\nu_i = 0$. En CVE, los coeficientes de influencia son endógenos al modelo.

La tabla 1 muestra los parámetros de las funciones de costos de cada una de las firmas en el mercado para el primer caso que analizamos.

Tabla 1. Caso 1: Coeficientes de las funciones de costos

| Firma | $b_i$ | $a_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 2.0 | 0.02 |
| 1 | 1.75 | 0.0175 |
| 2 | 3.0 | 0.025 |
| 3 | 3.0 | 0.025 |
| 4 | 1.0 | 0.0625 |
| 5 | 3.25 | 0.00834 |

El primer sub-caso que analizamos es cuando los parámetros $\bar{a}$ y $\bar{b}$ de la función laboral de la firma $i=0$ son iguales a 1. En la Tabla 2 se muestran los coeficientes de influencia de cada agente para cada uno de los equilibrios, así como la cantidad producida por cada agente (en MW) y el precio de equilibrio del mercado (en $/MWh).

Tabla 2. Caso 1: Coeficientes de influencia y cantidades producidas con $\bar{a}=1$ y $\bar{b}=1$

| | CVE | Cournot | Competencia perfecta |
|---|---|---|---|
| $v_0$ | 0.004 | 0.02 | 0 |
| $v_1$ | 0.005 | 0.02 | 0 |
| $v_2$ | 0.005 | 0.02 | 0 |
| $v_3$ | 0.005 | 0.02 | 0 |
| $v_4$ | 0.004 | 0.02 | 0 |
| $v_5$ | 0.006 | 0.02 | 0 |
| $q_0$ | 1.448 | 1.849 | 1.227 |
| $q_1$ | 465.383 | 397.195 | 473.904 |
| $q_2$ | 309.425 | 303.218 | 281.732 |
| $q_3$ | 309.425 | 303.218 | 281.732 |
| $q_4$ | 167.345 | 189.634 | 144.693 |
| $q_5$ | 638.217 | 472.646 | 814.546 |

En el equilibrio de CV la firma cuyos cambios en la producción causan mayores variaciones en el precio de mercado, es decir, la firma con el mayor coeficiente de influencia es la firma 5. En los tres tipos de equilibrio esta firma es la que tiene mayor producción, constituyendo alrededor de una tercera parte del mercado. La firma pública, por su parte, tiene menos del 0.1% de la producción del mercado.

Tabla 3. Caso 1: Precio de mercado y producción total con $\bar{a}=1$ y $\bar{b}=1$

| | CVE | Cournot | Competencia perfecta |
|---|---|---|---|
| *p* | 12.175 | 16.645 | 10.043 |
| *Q* | 1,891.242 | 1,667.76 | 1,997.834 |

En la Tabla 3 se muestran los precios de equilibrio y la cantidad total producida en el mercado. La cantidad total es mucho mayor para CVE y competencia perfecta que para Cournot. Asimismo el precio para CVE se acerca más al de competencia perfecta que al de Cournot, lo cual es más benéfico para el consumidor.

Tabla 4. Caso 1: Beneficios del cada agente con $\bar{a}=1$ y $\bar{b}=1$

| Agente | CVE | Cournot | Competencia perfecta |
|---|---|---|---|
| Beneficio laboral 0 | 4.28 | 7.07 | 3.06 |
| 0 | 14.71 | 27.04 | 9.85 |
| 1 | 2,956.53 | 4,535.79 | 1,964.97 |
| 2 | 1,642.18 | 2,988.15 | 992.08 |
| 3 | 1,642.18 | 2,988.15 | 992.08 |
| 4 | 994.94 | 1,843.04 | 654.21 |
| 5 | 3,997.56 | 5,399.54 | 2,766.48 |
| Total del mercado | 11,248.10 | 17,781.70 | 7,379.66 |

Los beneficios laborales (la cantidad que maximiza la función laboral para la firma $i=0$) son mayores en el equilibrio Cournot que en CVE y competencia perfecta. En CVE son mayores que en competencia perfecta. Lo mismo sucede con el beneficio privado para todos los agentes.

En el segundo sub-caso analizamos los equilibrios cuando los parámetros de la función laboral $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son menores, lo cual equivaldría a una firma pública más productiva que utiliza menos insumos laborales por unidad producida, obtenemos un equilibrio similar en los tres modelos.

Tabla 6. Caso 1: Coeficientes de influencia y cantidades producidas con $\bar{a} = 0.005$ y $\bar{b} = 0.005$

| | CVE | Cournot | Competencia perfecta |
|---|---|---|---|
| $v_0$ | 0.004 | 0.02 | 0 |
| $v_1$ | 0.005 | 0.02 | 0 |
| $v_2$ | 0.005 | 0.02 | 0 |
| $v_3$ | 0.005 | 0.02 | 0 |
| $v_4$ | 0.004 | 0.02 | 0 |
| $v_5$ | 0.006 | 0.02 | 0 |
| $q_0$ | 26.061 | 21.97 | 27.008 |
| $q_1$ | 461.058 | 394.01 | 469.343 |
| $q_2$ | 305.989 | 300.57 | 278.54 |
| $q_3$ | 305.989 | 300.57 | 278.54 |
| $q_4$ | 165.757 | 188.19 | 143.416 |
| $q_5$ | 631.875 | 468.43 | 804.977 |

Los coeficientes de influencia permanecen iguales, aunque la participación de la empresa pública en el mercado aumenta a alrededor de 1.3% para los tres tipos de equilibrio

Tabla 7. Caso 1: Precio de mercado y producción total con $\bar{a} = 0.005$ y $\bar{b} = 0.005$

| | CVE | Cournot | Competencia perfecta |
|---|---|---|---|
| $p$ | 12.065 | 16.53 | 9.964 |
| $Q$ | 1,896.729 | 1,673.73 | 2,001.825 |

No hay cambios considerables para las firmas privadas ni para el consumidor. Los precios y las cantidades totales de producción son aproximadamente los mismos que con los parámetros anteriores.

Tabla 8. Caso 1: Beneficios del cada agente con $\bar{a} = 0.005$ y $\bar{b} = 0.005$

| Agente | CVE | Cournot | Competencia perfecta |
|---|---|---|---|
| Beneficio laboral 0 | 2,264.92 | 3,112.34 | 1,860.34 |
| 0 | 255.51 | 314.26 | 207.80 |
| 1 | 2,895.79 | 4,463.12 | 1,927.71 |
| 2 | 1,603.42 | 2,935.90 | 969.95 |
| 3 | 1,603.42 | 2,935.90 | 969.95 |
| 4 | 975.50 | 1,814.90 | 642.83 |
| 5 | 3,905.04 | 5,303.44 | 2,702.51 |
| Total del mercado | 11,238.68 | 17,767.52 | 7,420.73 |

Para la firma que maximiza la función laboral los beneficios aumentan en alrededor del 95% en los equilibrios de CVE y de competencia perfecta. En el equilibrio Cournot el aumento en ganancias debido al incremento en la eficiencia laboral es algo menor (91%).

Para el segundo caso modificamos los parámetros de las funciones de costos, haciendo que la firma pública sea más fuerte que en el caso 1. La tabla 9 muestra los parámetros de las funciones de costos de cada una de las firmas en el mercado en este segundo caso.

Tabla 9. Caso 2: Coeficientes de las funciones de costos

| Firma | $b_i$ | $a_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 3.25 | 0.00834 |
| 1 | 1.75 | 0.0175 |
| 2 | 3.0 | 0.025 |
| 3 | 3.0 | 0.025 |
| 4 | 1.0 | 0.0625 |
| 5 | 2.0 | 0.02 |

La Tabla 10 muestra los coeficientes de influencia y las cantidades producidas por cada agente cuando los parámetros $\bar{a}$ y $\bar{b}$ de la función laboral de la firma $i = 0$ son iguales a 1.

Tabla 10. Caso 2: Coeficientes de influencia y cantidades producidas con $\bar{a} = 1$ y $\bar{b} = 1$

| | CVE | Cournot | Competencia perfecta |
|---|---|---|---|
| $v_0$ | 0.005 | 0.02 | 0 |
| $v_1$ | 0.006 | 0.02 | 0 |
| $v_2$ | 0.006 | 0.02 | 0 |
| $v_3$ | 0.006 | 0.02 | 0 |
| $v_4$ | 0.005 | 0.02 | 0 |
| $v_5$ | 0.006 | 0.02 | 0 |
| $q_0$ | 1.036 | 1.301 | 0.893 |
| $q_1$ | 502.717 | 415.24 | 567.067 |
| $q_2$ | 344.005 | 318.255 | 346.947 |
| $q_3$ | 344.005 | 318.255 | 346.947 |
| $q_4$ | 185.288 | 197.836 | 170.779 |
| $q_5$ | 446.885 | 383.037 | 483.684 |

Como se observa, con estos nuevos parámetros la cantidad producida por la empresa pública es menor en los tres tipos de equilibrio. Lo mismo sucede con la firma $i = 5$, quien toma los parámetros que anteriormente tenía la pública. Con el resto de las firmas aumenta la producción.

Tabla 11. Caso 2: Precio de mercado y producción total con $\bar{a} = 1$ y $\bar{b} = 1$

| | CVE | Cournot | Competencia perfecta |
|---|---|---|---|
| *p* | 13.52 | 17.32 | 11.67 |
| *Q* | 1,823.94 | 1,633.93 | 1,916.32 |

Con estos parámetros para la función de costos de la empresa pública el precio aumenta alrededor de 10% en CVE, 4% en Cournot y 14% en competencia perfecta; la cantidad total del mercado disminuye en casi 4% en CVE y competencia perfecta y 2% en Cournot.

Tabla 12. Caso 2: Beneficios del cada agente con $\bar{a} = 1$ y $\bar{b} = 1$

| Agente | CVE | Cournot | Competencia perfecta |
|---|---|---|---|
| Beneficio laboral 0 | 3.51 | 5.56 | 2.60 |
| 0 | 10.64 | 18.30 | 7.52 |
| 1 | 3,706.14 | 4,956.99 | 2,813.88 |
| 2 | 2,140.03 | 3,291.65 | 1,504.77 |
| 3 | 2,140.03 | 3,291.65 | 1,504.77 |
| 4 | 1,247.13 | 2,005.79 | 911.47 |
| 5 | 3,151.50 | 4,401.34 | 2,339.66 |
| Total del mercado | 12,395.47 | 17,965.71 | 9,082.06 |

Con el cambio de parámetros de la función de costos, los beneficios de la firma $i = 0$ disminuyen considerablemente: casi 50% en Cournot, 38% en CVE y 31% en competencia perfecta, mientras que en el caso de la firma

$i = 5$, los decrementos son de 27% para CVE, 23% para Cournot y 18% para competencia perfecta.

Si en el caso 2 utilizamos los coeficientes de la función laboral $\bar{a} = 0.005$ y $\bar{b} = 0.005$, los resultados son muy similares que los del caso 2 con $\bar{a} = 1$ y $\bar{b} = 1$ y el análisis no cambia considerablemente, por lo que no se incluyen.

# Capítulo 6. Conclusiones

Este trabajo modela un oligopolio mixto con variaciones conjeturadas en el que participa un agente que maximiza una función de ganancia laboral, mientras que el resto de los agentes maximiza la utilidad privada. Establecemos la existencia y unicidad de un equilibrio que llamamos exterior para cualquier conjunto de conjeturas o coeficientes de influencia. Además utilizamos el criterio de consistencia desarrollado por Bulavsky (1997) para formular el criterio de consistencia y probar la existencia de un equilibrio interior. En este equilibrio interior se determinan endógenamente las conjeturas o coeficientes de influencia de los agentes.

Utilizamos un experimento numérico en el que probamos los resultados de los teoremas para un mercado de electricidad. Obtenemos que los equilibrios conjeturados se acercan más a competencia perfecta que a Cournot y que son más benéficos para el consumidor, tanto en precio como en cantidad total producida en el mercado.

# Capítulo 7. Trabajo futuro

En trabajos futuros se podrían aplicar los teoremas a mercados oligopólicos que típicamente podrían tener incentivos para maximizar una función de ganancia laboral en lugar de la utilidad privada, como el financiero, en el que existen cajas de ahorros en las que los mismos empleados son accionistas. De este modo se podrían calibrar parámetros más reales de la función laboral.

Otra línea en la que podría extenderse el presente trabajo es cambiando los participantes del mercado para que todos maximicen la ganancia laboral.

Asimismo, sería interesante una comparación teórica entre el modelo de CVE con una empresa que maximiza la ganancia laboral, Cournot clásico y competencia perfecta.

## Referencias

**Başar, T. y Olsder, J.** Dynamic noncooperative game theory. Academic Press: London/New York; 1982.

**Bowley, AL.** The mathematical groundwork of economics. Oxford University Press: Oxford; 1924.

**Bresnahan, T.** (1981), Duopoly models with consistent conjectures, American Economic Review, **71(5)**, pp. 934-945.

**Bulavsky, V.** (1996), An imagined experiment in the framework of the generalized Cournot model. Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody), **32**, pp. 128-137.

**Bulavsky, V.** (1997), Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly, Economic and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody) **33**, pp. 112–134.

**Bulavsky, V. y Kalashnikov, V.** (1994), One-parametric driving method to study equilibrium. Economic and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody) **30**, pp. 129-138.

**Bulavsky, V. y Kalashnikov, V.** (1995), Equilibria in generalized Cournot and Stackelberg models. Economic and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody) **30**, pp. 129-138.

**Cornes, R. y Sandler, T.** (1984), Easy riders, joint production, and public goods, The Economic Journal, **94**, pp. 580-598.

**Cornes, R. y Sepahvand, M.** (2003), Cournot vs Stackelberg equilibria with a public enterprise and international competition, Discussion Papers in Economics, University of Nottingham, 03/12.

**Fershtman, C. y Kamien, M.** (1987), Dynamic competition with sticky prices, Econometrica, **55(5)**, pp. 1151-1164.

**Figuières, C, Jean-Marie, A, Quérou, N y Tidball, M.** Theory of conjectural variations. World Scientific: New Jersey/London/Singapore/Shanghai/Hong Kong/Taipei/Bangalore; 2004.

**Fjell, K. y Heywood, J.** (2001), Public Stackelberg leadership in a mixed oligopoly with foreign firms, Norwegian School of Economics and Business Administration, Working paper 2001:20.

**Frisch R.** Monopole, polypole – La notion de force en économie. Nationaløkonomisk Tidsskrift 1933; 71; 241 – 259 (reprinted: Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy. International Economic Papers 1951; 1; 23 – 36.)

**Harris, H. y Wiens, E.** (1980), Government enterprise: an instrument for the internal regulation of industry, The Canadian Journal of Economics, **13(1)**, pp. 125-132.

**Isac, G., Bulavsky, V. y Kalashnikov, V.** Complementarity, Equilibrium, Efficiency and Economics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; 2002.

**Kalashnikov, V., Kemfert, C. y Kalashnikov Jr., V.** (2009), Conjectural variations equilibrium in a mixed duopoly, European Journal of Operational Research, **192**, pp. 717–729.

**Kalashnikov, V., Cordero, E. y Kalashnikov Jr., V.** (2010), Cournot and Stackelberg equilibrium in mixed duopoly models, Optimization, **59**, pp. 689–706.

**Kalashnikov, V., Bulavsky, V., Kalashnykova, N. y Castillo Pérez, F.** (2011), Mixed oligopoly with consistent conjectures, European Journal of Operational Research, **210(3)**, pp. 729-735.

**Kalashnikova, N., Kalashnikov, V., Ovando, M.** (2012), Consistent conjectures in mixed oligopoly with discontinuous demand function, Intelligent Decision Technologies, Smart Innovation, Systems and Technologies, Volume 15, pp. 427-436.

**Laitner, J.** (1980), "Rational" duopoly equilibria, The Quarterly Journal of Economics, **95(4)**, pp. 641-662.

**Liu, Y., Ni, Y., Wu, F. y Cai, B.** (2007), Existence and uniqueness of consistent conjectural variation equilibrium in electricity markets, Electrical Power and Energy Systems, **29**, pp. 455-461.

**Matsushima, N. y Matsumura, T.** (2003), Mixed oligopoly and special agglomeration, *Canadian Journal of Economics*, **36**, pp. 62 – 87.

**Merril, W. y Schneider, N.** (1966), Government firms in oligopoly industries: a short-run analysis, The Quarterly Journal of Economics, **80(3)**, pp. 400-412.

**Novshek, W.** (1985), On the existence of Cournot equilibrium, The Review of Economic Studies, **52(1)**, pp. 85-98.

**Ohnishi, K.** (2012)**,** Investment Decisions in a New Labor-Managed Industry, Journal of Game Theory, **1(1)**, pp. 7-10 (2012).

**Perry, M.** (1982), Oligopoly and consistent conjectural variations, The Bell Journal of Economics, **13(1)**, pp. 197-205.

**Sugden, R.** (1985), Consistent conjectures and voluntary contributions to public goods: why the conventional theory does not work. Journal of Public Economics, **27**, pp. 117-124.

**Ward, B.** (1958), The firm in Illyria: market syndicalism, American Economic Review, **48**, pp. 566-589.

# Anexos

### Programa GAMS para CVE

```
Scalar
c / 0.005 /
d / 0.005 /
a0 / .00834 /
a1 / .0175 /
a2 / 0.025 /
a3 / 0.025 /
a4 / 0.0625 /
a5 / 0.02 /
b0 / 3.25 /
b1 / 1.75 /
b2 / 3 /
b3 / 3 /
b4 / 1 /
b5 / 2 /;

Variables
v0, v1, v2, v3, v4, v5, q0, q1, q2, q3, q4, q5, p, Q;

Equations w0, w1, w2, w3, w4, w5, aq0, aq1, aq2, aq3, aq4, aq5, mp, S;

w0.. v0 =e= 1/{50 + [1/(v1+a1)] +[1/(v2+a2)] + [1/(v3+a3)] + [1/(v4+a4)] +
[1/(v5+a5)] };

w1.. v1 =e= 1 /  {[1/(v2+a2)] + [1/(v3+a3)] + [1/(v4+a4)] + [1/(v5+a5)] + {d / {
[v0*((2*c*q0)+d)] + [[(c*q0)+d] * [(3*c*a0*q0)+(a0*d)+(2*c*b0)]]} } + 50};

w2.. v2 =e= 1 /  {[1/(v1+a1)] + [1/(v3+a3)] + [1/(v4+a4)] + [1/(v5+a5)] + {d / {
[v0*((2*c*q0)+d)] + [[(c*q0)+d] * [(3*c*a0*q0)+(a0*d)+(2*c*b0)]]} } + 50};

w3.. v3 =e= 1 /  {[1/(v1+a1)] + [1/(v2+a2)] + [1/(v4+a4)] + [1/(v5+a5)] + {d / {
[v0*((2*c*q0)+d)] + [[(c*q0)+d] * [(3*c*a0*q0)+(a0*d)+(2*c*b0)]]} } + 50};

w4.. v4 =e= 1 /  {[1/(v1+a1)] + [1/(v2+a2)] + [1/(v3+a3)] + [1/(v5+a5)] + {d / {
[v0*((2*c*q0)+d)] + [[(c*q0)+d] * [(3*c*a0*q0)+(a0*d)+(2*c*b0)]]} } + 50};

w5.. v5 =e= 1 /  {[1/(v1+a1)] + [1/(v2+a2)] + [1/(v3+a3)] + [1/(v4+a4)] + {d / {
[v0*((2*c*q0)+d)] + [[(c*q0)+d] * [(3*c*a0*q0)+(a0*d)+(2*c*b0)]]} } + 50};

aq0.. q0 =e= 2500 - 50*p - {q1+q2+q3+q4+q5};
```

```
aq1.. (v1*q1)+(a1*q1)+b1 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq2.. (v2*q2)+(a2*q2)+b2 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq3.. (v3*q3)+(a3*q3)+b3 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq4.. (v4*q4)+(a4*q4)+b4 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq5.. (v5*q5)+(a5*q5)+b5 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

mp.. p =e= {v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

S.. Q =e= q0+q1+q2+q3+q4+q5;


model oligopoly "Mixed oligopoly" / all /;

Solve oligopoly using mcp;
```

**Programa GAMS para Cournot**

```
Scalar
c / 0.005 /
d / 0.005 /
a0 / .00834 /
a1 / .0175 /
a2 / 0.025 /
a3 / 0.025 /
a4 / 0.0625 /
a5 / 0.02 /
b0 / 3.25 /
b1 / 1.75 /
b2 / 3 /
b3 / 3 /
b4 / 1 /
b5 / 2 /
v0 /.02/
v1 /.02/
v2 /.02/
v3 /.02/
v4 /.02/
```

```
v5 /.02/;

Variables
q0, q1, q2, q3, q4, q5, p, Q;

Equations  aq0, aq1, aq2, aq3, aq4, aq5, mp, S;

aq0.. q0 =e= 2500 - 50*p - {q1+q2+q3+q4+q5};

aq1.. (v1*q1)+(a1*q1)+b1 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq2.. (v2*q2)+(a2*q2)+b2 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq3.. (v3*q3)+(a3*q3)+b3 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq4.. (v4*q4)+(a4*q4)+b4 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq5.. (v5*q5)+(a5*q5)+b5 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

mp.. p =e= {v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

S.. Q =e= q0+q1+q2+q3+q4+q5;


model oligopoly "Cournot oligopoly" / all /;

Solve oligopoly using mcp;
```

**Programa GAMS para competencia perfecta**

```
Scalar
c / 0.005 /
d / 0.005 /
a0 / .00834 /
a1 / .0175 /
a2 / 0.025 /
a3 / 0.025 /
a4 / 0.0625 /
a5 / 0.02 /
b0 / 3.25 /
b1 / 1.75 /
```

```
b2 / 3 /
b3 / 3 /
b4 / 1 /
b5 / 2 /
v0 /0/
v1 /0/
v2 /0/
v3 /0/
v4 /0/
v5 /0/;

Variables
q0, q1, q2, q3, q4, q5, p, Q;

Equations  aq0, aq1, aq2, aq3, aq4, aq5, mp, S;

aq0.. q0 =e= 2500 - 50*p - {q1+q2+q3+q4+q5};

aq1.. (v1*q1)+(a1*q1)+b1 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq2.. (v2*q2)+(a2*q2)+b2 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq3.. (v3*q3)+(a3*q3)+b3 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq4.. (v4*q4)+(a4*q4)+b4 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

aq5.. (v5*q5)+(a5*q5)+b5 =e=
{v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

mp.. p =e= {v0*[(c*q0)+d]*q0/d}+{[((c*q0)+d)**2]/d}*[(a0*q0)+b0];

S.. Q =e= q0+q1+q2+q3+q4+q5;


model pc "Perfect competition" / all /;

Solve pc using mcp;
```