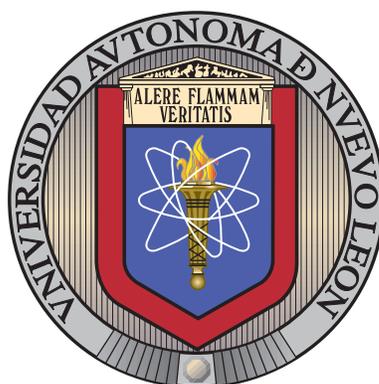


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE PROCESOS  
ESTOCÁSTICOS EN REDES DE INTERACCIÓN

POR

JESUS DAVID PEÑA AGUILAR

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

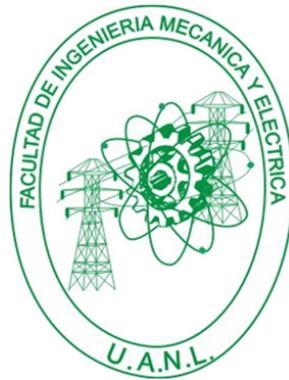
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

ENERO 2014

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE PROCESOS  
ESTOCÁSTICOS EN REDES DE INTERACCIÓN

POR

JESUS DAVID PEÑA AGUILAR

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

ENERO 2014

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**División de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Análisis y Simulación De Procesos Estocásticos En Redes De Interacción », realizada por el alumno Jesus David Peña Aguilar, con número de matrícula 1201952, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

---

Dr. J. Arturo Berrones Santos

Asesor

---

Dr. Óscar Leonel Chacón Mondragón

Revisor

---

Dr. Jesus Fabián Lopez Perez

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Enero 2014

*En dedicatoria a mis Padres*

***Raúl Peña Aranda y Martha Aguilar Hdz***

*por su comprensión y apoyo incondicional en el transcurso de mi vida.*

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>XII</b>
<b>Resumen</b>	<b>XIII</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción del Problema . . . . .	2
1.1.1. Red Conexa . . . . .	3
1.1.2. Red Dirigida . . . . .	5
1.2. Motivación . . . . .	7
1.3. Justificación . . . . .	8
1.4. Objetivo . . . . .	9
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>10</b>
2.1. Teoría de Grafos . . . . .	10
2.1.1. Definiciones . . . . .	10
2.2. Redes complejas . . . . .	13
2.2.1. Euler y los puentes de Königsberg . . . . .	13
2.2.2. Redes y Sistemas . . . . .	14

---

2.2.3.	Redes Complejas . . . . .	16
2.2.4.	Propiedades de las Redes Complejas . . . . .	17
2.3.	Procesos Estocásticos . . . . .	19
2.3.1.	Ideas preliminares . . . . .	19
2.3.2.	Cadenas de Markov . . . . .	21
2.4.	Simulación Multiagente . . . . .	22
2.4.1.	Simulación basada en agentes . . . . .	22
2.4.2.	Definición de agente . . . . .	23
2.4.3.	Propiedades y características de los agentes . . . . .	24
2.4.4.	Tipos de ambientes para los agentes . . . . .	25
<b>3.</b>	<b>Metodología</b>	<b>27</b>
3.1.	Modelo de simulación . . . . .	27
3.1.1.	Configuración de la simulación . . . . .	28
3.1.2.	Roll de Juegos y Descripción de Equipos . . . . .	30
3.1.3.	Generador de Instancias . . . . .	32
3.1.4.	Propiedades de los Nodos . . . . .	35
3.1.5.	Matriz de transición dinámica . . . . .	36
3.2.	Modelo de Optimización . . . . .	37
3.2.1.	Planteamiento del Problema . . . . .	37
3.2.2.	Modelo Matemático . . . . .	41
3.2.3.	Generador de instancias . . . . .	42

---

3.2.4. Validación del Modelo . . . . .	46
<b>4. Experimentación y Análisis de resultados</b>	<b>47</b>
4.1. Red dirigida . . . . .	47
4.2. Red Conexa . . . . .	54
4.2.1. Análisis de los Equipos . . . . .	54
4.2.2. Análisis de los Encuentros . . . . .	56
4.2.3. Análisis Estadístico . . . . .	58
<b>5. Conclusiones y Trabajo futuro</b>	<b>74</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

1.1. Descripción del problema . . . . .	2
1.2. Ejemplos de Redes Conexas . . . . .	4
1.3. Algunos ejemplos de transiciones del nodo origen al nodo destino . . . . .	7
2.1. Grafo simple . . . . .	10
2.2. El grado para cada uno de los vértices del grafo son: $d_1 = 2$ , $d_5 = 2$ , $d_3 = 3$ , $d_4 = 1$ . . . . .	11
2.3. Grafos completos de 3,4 y 5 nodos . . . . .	11
2.4. Grafo dirigido. . . . .	12
2.5. Imagen de la ciudad de Königsberg con los 7 puentes. . . . .	13
2.6. Representación abstracta echa por Euler de los 7 puentes de Königsberg. . . . .	14
2.7. Red compleja del fenómeno internet. . . . .	16
2.8. Proceso estocástico a tiempo discreto [43]. . . . .	20
2.9. Abstracción del sistema real al modelo . . . . .	23
3.1. Configuración del modelo de simulación . . . . .	28
3.2. Red compleja del modelo . . . . .	29

---

3.3. Diagrama de metodología . . . . .	40
4.1. Red dirigida de 5 nodos . . . . .	48
4.2. Red dirigida de 10 nodos . . . . .	48
4.3. Red dirigida de 15 nodos . . . . .	48
4.4. Redes dirigidas a experimentar . . . . .	48
4.5. Goles anotados para cada réplica . . . . .	57
4.6. Gráfica de los goles anotados por réplica . . . . .	57

# ÍNDICE DE TABLAS

---

1.1. Red dirigida de 5 nodos y matriz de transición correspondiente. . . . .	6
2.1. Diferentes tipos de redes complejas . . . . .	16
3.1. Tabla de Roll por juegos . . . . .	31
3.2. Tablas con probabilidades para cada nodo asociado a sus conexiones .	34
3.3. Matriz de transición del sistema y Matriz optimizada del sistema . . .	39
4.1. Promedio de transiciones para cada red dirigida, en base a su matriz de transición inicial . . . . .	50
4.2. Comparación de las matrices originales y optimizadas . . . . .	51
4.3. Tablas con 10 instancias para cada tamaño de red . . . . .	52
4.4. Tabla con 10 instancias optimizadas para cada red a experimentar . .	53
4.5. Características de cada equipo . . . . .	54
4.6. Estadísticas de cada experimento . . . . .	58
4.7. Resultados de juegos ganados para los 20 experimentos en cada en- frentamiento. . . . .	59
4.8. Prueba de diferencia de medias para cada uno de los juegos . . . . .	61

---

4.9. Prueba de Pearson para independencia de variables . . . . .	64
4.10. Gráficas de correlación cruzada por juego . . . . .	65
4.11. Pruebas de normalidad para el equipo Rojo . . . . .	68
4.12. Pruebas de normalidad para el equipo Azul . . . . .	69
4.13. Pruebas de normalidad para el equipo Blanco . . . . .	71
4.14. Pruebas de normalidad para el equipo Negro . . . . .	72

# AGRADECIMIENTOS

---

Principalmente a DIOS por haberme permitido terminar mis estudios de posgrado.

Agradecer de manera especial al Dr. Arturo Berrones por haberme permitido trabajar junto a él y bajo su tutela como asesor de este proyecto, por su apoyo y dedicación para finalizar exitosamente este trabajo de investigación.

A todos los Profesores de PISIS que han contribuido en la formación profesional de mis estudios de posgrado, especialmente al Dr. Óscar Chacón Mondragón por haber aceptado y participado como parte del comité de tesis.

Al Dr. J. Fabián López Pérez por aceptar en desarrollar un trabajo en conjunto bajo su asesoría, por formar parte del comité de tesis y contribuir con sus ideas en el desarrollo del proyecto, ya que sin su ayuda no hubiera sido posible realizar este trabajo.

A las siguientes instituciones de las cuales recibí apoyo:

- Al CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.
- Al Posgrado en Ingeniería de Sistemas PISIS por la oportunidad que me brindaron para estudiar la maestría dentro de su Programa.
- A SINTEC por el apoyo y las facilidades de sus instalaciones y equipo, así como también por la licencia del simulador Flexsim.

# RESUMEN

---

Jesus David Peña Aguilar.

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias de Ingeniería  
con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

## ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS EN REDES DE INTERACCIÓN

Número de páginas: 83.

**OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO:** El presente trabajo se enfoca en un problema aplicado a la industria, el cual se hizo en conjunto con un empresa lider en el giro de consultoría. El problema consiste en dar a conocer el comportamiento de fenómenos en los cuales las partes que componen al propio sistema, interactúan de alguna forma entre ellos. Estas interacciones que son propias del sistema son de interés estudiarlas, ya que nos proporcionan mayor información del estado actual del sistema, así como su comportamiento a futuro.

Para el estudio de este trabajo se realizó una simulación el cual representa un sistema de este tipo, donde las partes o agentes que componen al sistema, cooperan y están en competencia para lograr un fin en común.

Se plantea el problema como un proceso estocástico, bajo la teoría de procesos de Markov, donde las interacciones de los agentes del sistema, están basados en probabilidades a las cuales llamamos "probabilidad de transición".

Dada la naturaleza del problema, se realizó el estudio mediante el análisis de sistemas y redes complejas, dando lugar como objetivo a los siguientes puntos:

- Formular el modelo matemático para el caso de una red dirigida.
- Implementar el modelo matemático del caso dirigido en un software de optimización (GAMS).
- La herramienta de simulación bajo el entorno FLEXSIM para el caso de una red conexas.
- El análisis del modelo de simulación.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Dar un mayor entendimiento a este tipo de fenómenos competitivos y cooperativos, estudiando los dos tipos de casos para una red conexas y una red dirigida, así como:

- Formulación del modelo de optimización
- La herramienta del modelo de simulación

Dentro del caso de estudio para una red conexas, la principal contribución es la realización y estudio tanto de una red estática como una red dinámica la cual, durante la simulación, en cada fase de transición las probabilidades para cada nodo van variando conforme a una cierta dinámica establecida.

Firma del asesor: \_\_\_\_\_

Dr. J. Arturo Berrones Santos

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

En la actualidad existen diversos fenómenos para los cuales se desea conocer y estudiar el comportamiento de sistemas colectivos, compuestos por individuos que interactúan conforme a ciertas reglas que pueden cambiar a través del tiempo.

Estos fenómenos de sistemas colectivos, se han vuelto muy populares gracias a las nuevas tecnologías de comunicación, tal es el caso de las llamadas redes sociales como facebook, twitter, conexiones de ligas de internet (WWW) [47], por mencionar algunos.

Los sistemas sociales son muy difíciles de estudiar, dado que se hallan constituidos por un gran número de componentes, razón por la cual el estudio de estos sistemas se analizan mediante simulación. Así mismo, estos fenómenos requieren de modelos explicativos, los cuales puedan dar mayor entendimiento sobre el comportamiento del sistema [21]. Dicho análisis, se basa en el paradigma de simulación mediante agentes. Para mayor detalle véase [41].

En este trabajo se estudia un problema de fenómenos colectivos, en donde los agentes que componen al sistema, se encuentran en competencia y colaborando para lograr un objetivo en común. Se desarrolla un modelo de simulación en el cual nos permita estudiar fenómenos en competencia, para poder obtener un análisis y comportamiento del sistema.

El modelo está basado en un juego de futbol, ya que dicha representación reproduce a la perfección un sistema tanto colaborativo como competitivo. El sistema

se encuentra conformado por 2 equipos que pueden representar dos organizaciones que estén compitiendo para ganar o atraer a un cliente potencial, del mismo modo puede representar dos áreas de trabajo o 2 equipos de trabajo que se encuentren compitiendo por un proyecto a realizarse etc...

Para nuestro caso de estudio (juego de futbol) cada equipo compite entre ellos y cada agente o jugador que conforma a cada equipo se encuentran colaborando entre ellos para lograr el fin en común de ganar el partido.

## 1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El propósito de este trabajo, tiene como objetivo el entendimiento de 2 sistemas. El primero, el caso más simple para una Red dirigida, el cual tiene como objeto de estudio el optimizar la matriz de transición subyacente de la topología de una red estocástica, para el valor esperado de transiciones al que denotamos por  $\tau$ , éste puede representar movimientos, pases, pasos, etc.. El segundo, el caso difícil, se centra en conocer el comportamiento de un sistema en donde dos organizaciones estén en competencia, así como un análisis detallado del mismo. La siguiente imagen muestra lo anterior.

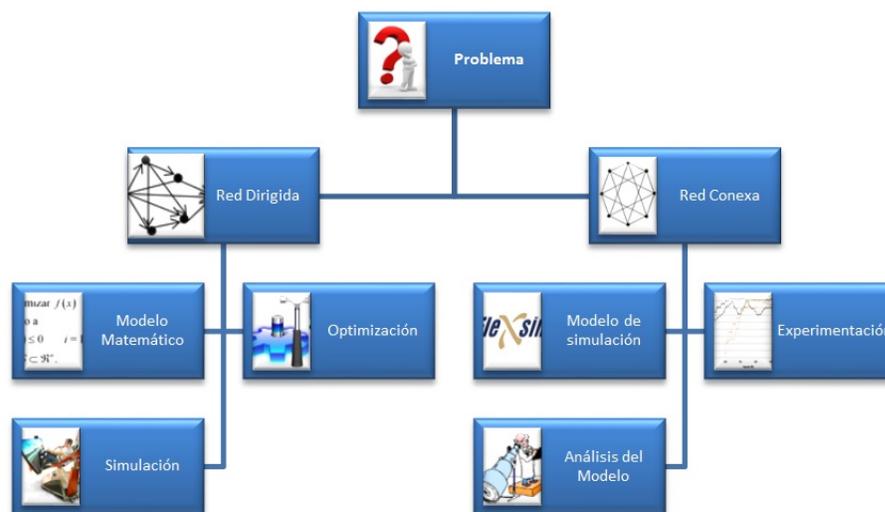


Figura 1.1: Descripción del problema

### 1.1.1 RED CONEXA

Para este caso de estudio, se analiza un sistema en la cual, las partes que componen al propio sistema, se puedan encontrar en cocompetencia y/o en colaboración entre ellos. Dicho análisis se basa en el paradigma de simulación mediante agentes, ver [15].

En la actualidad, existen situaciones con problemas complejos, en donde estan involucrados el medio físico, la producción, la tecnología, organización social, etc... Estas situaciones se caracterizan por la influencia de multiples procesos cuyas interrelaciones constituyen la estructura de un sistema que funciona como una totalidad organizada, a la cual llamamos *sistema complejo* [22].

El problema que abordaremos en esta sección, se basa en un sistema colectivo en competencia entre dos agrupaciones ya sean, grupos sociales o a un nivel de organización, en donde los agentes o individuos que componen a cada grupo u organización, trabajan en conjunto, colaborando para lograr un objetivo. En base a lo anterior, se realiza un modelo de simulación utilizando el software FLEXSIM [39] que nos permita visualizar y estudiar puntualmente al sistema; ésto es, analizando las partes que componen al sistema (agentes, individuos), para dar un mayor entendimiento del comportamiento del mismo.

El problema es modelado bajo la teoría de grafos, representando al sistema como una red conexas. Una *red conexas* es un grafo completo en donde cada par de nodos esta conectado por un arista [7], en otras palabras, todos los nodos de la red, están conectados contra todos. La Figura 1.2, muestra algunas redes de este tipo.

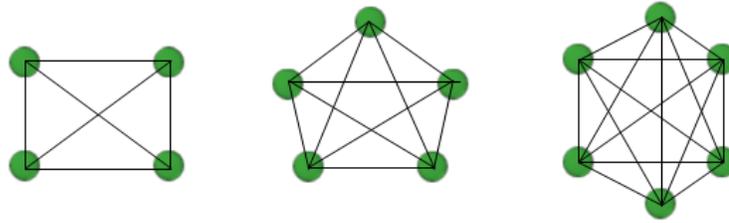


Figura 1.2: Ejemplos de Redes Conexas

El caso de estudio en el cual se plantea el análisis para el entendimiento de sistemas colectivos, está enfocado dentro del ámbito deportivo, de modo que éste figura un partido de futbol, el cual represententa a la perfección un sistema de este tipo [18]. Entonces el modelo de simulación reproduce dicho partido, en donde cada equipo compuesto por jugadores (agentes) colaboran entre sus compañeros para lograr un fin, que es, el de anotar un gol; al mismo tiempo, estos jugadores compiten como equipo para ganar el partido.

Se considera un partido de futbol como un sistema multi-agente, dado que representa un sistema en competencia en tiempo real y por ser muy atractivo dentro del entorno de la inteligencia artificial y de la investigación multi-agente [28].

El simulador muestra de forma dinámica la interacción del sistema conforme transcurre el tiempo, estas interacciones entre los jugadores, se basan en las probabilidades de “pase” o mejor dicho, por la probabilidad de transición  $q_{ij}$  de pasar el balón de un jugador a otro.

Dentro del modelo de simulación del sistema en competencia, se reproducen dos tipos de modelos: un **modelo estático** en el cual las probabilidades de transición entre los nodos (jugadores) no cambian durante la simulación y un **modelo dinámico**, que muestra el cambio de las probabilidades de transición  $q_{ij}$  en cada instante de tiempo para cada jugador. Estas son unas de las características que muestran los equipos que se harán competir, las cuales se describen en la sección 4.2.1.

### 1.1.2 RED DIRIGIDA

Este problema se desprende del estudio que se aborda en la sección anterior, para el caso del entendimiento del sistema en competencia. Surge como una mejora entre las organizaciones, grupos o equipos de trabajo, de tal manera que estén mejor organizados los individuos de cada equipo para un mayor desempeño. Dicho esto, se tiene el sistema en competencia donde cada agente interactúa con sus compañeros y éstas están basadas en las probabilidades de transición para cada uno de los agentes en el sistema, entonces el problema se enfoca en rediseñar estas interacciones  $q_{ij}$  para cada uno de los agentes, de tal manera que se mejore el promedio de transiciones entre dos pares de nodos. El objetivo del problema se reduce en encontrar las probabilidades  $q_{ij}$  óptimas para cada uno de los agentes de la red que mejoren el desempeño deseado.

Para el caso de estudio de la sección anterior del análisis de sistemas colectivos, el problema de optimizar la probabilidad de transición entre los nodos de la red, representan una mejor táctica de juego, permitiendo llegar a su cometido en un número promedio menor de operaciones. Esta estrategia en juegos deportivos de fútbol, se conoce como contragolpe o contra-ataque. Dicho estilo de juego se centra en pasar el balón de portero a delantero lo más rápido posible con el menor número de pases, esto con el fin de tener mayor posibilidad de anotar un gol.

El problema se modela utilizando el paradigma de la teoría de grafos. Los grafos se utilizan para modelar, estudiar y optimizar muchos tipos de redes y sistemas, por ejemplo, redes de ruteo de vehículos, redes eléctricas, problemas de transporte, encontrar la ruta más corta entre dos ciudades, por mencionar algunos [1]. En el siguiente capítulo se dará una explicación a detalle sobre teoría de grafos.

El movimiento del flujo (pasar el balón) que se desea mandar desde el nodo origen al nodo destino, se hace en una sola dirección (hacia adelante), restringiendo al flujo en un menor número de pasos. Esta corriente de flujo, está basada en las probabilidades de transición entre cada nodo las cuales definimos como  $q_{ij}$ . Así cada

nodo representado en el grafo tendrá sus probabilidades de transitar hacia los demás nodos siempre y cuando el nodo a transitar sea de mayor índice ( $j > i$ ). En base a estas probabilidades se forma la matriz de transición  $M$ , en ésta se definen las probabilidades de transición para cada nodo, desde el nodo inicial al nodo final.

Dada la naturaleza del problema se modela en base a un grafo dirigido, el cual nos permita representar las características antes mencionadas. La figura siguiente muestra una red dirigida y la matriz que define las probabilidades de transición entre cada par de nodos.

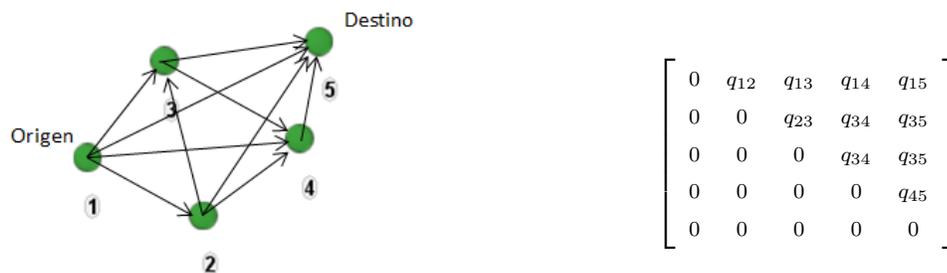


Tabla 1.1: Red dirigida de 5 nodos y matriz de transición correspondiente.

Como se modela el problema mediante grafos dirigidos, siempre existe la forma de llegar del punto de inicio al punto final; dicho de otro modo, podemos encontrar siempre un camino que conécte a estos dos puntos.

Dado que el problema se modela mediante grafos dirigidos y a que las transiciones entre los nodos están basadas por la matriz de probabilidad del grafo, el cambio de fase entre el nodo origen y el nodo destino, se pueden hacer en un número finito de operaciones. Para el ejemplo anterior, la siguiente figura muestra algunas opciones para transitar entre estos par de nodos.

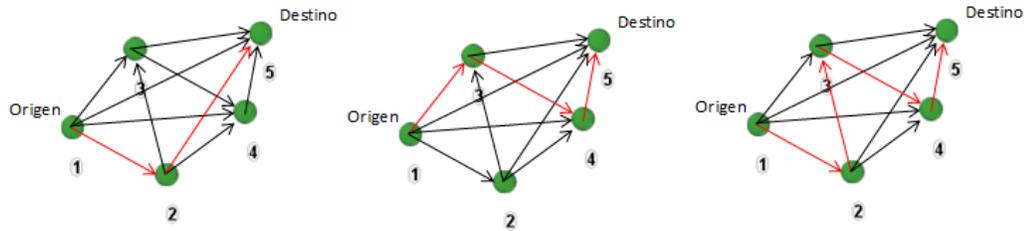


Figura 1.3: Algunos ejemplos de transiciones del nodo origen al nodo destino

Dicho lo anterior, el objetivo de este problema se centra en encontrar las probabilidades  $q_{ij}$  óptimas para cada nodo, de tal manera que se pueda llegar en promedio, del punto de origen al punto destino, en una cantidad esperada  $\tau$  de pasos.

Este problema tiene aplicaciones como el rediseño de carreteras que puedan conectar dos ciudades para un mayor flujo vehicular con el menor tiempo de viaje posible. Al resolver el modelo que se propone, la solución indicará las probabilidades de transitar entre las ciudades intermedias para tener un mayor flujo vehicular, así mismo advertirá la expansión o construcción de nuevas carreteras.

También se puede aplicar a problemas de redes de tubería, donde se mande algún flujo de bienes de un punto a otro y se tenga que mandar en promedio mediante  $\tau$  tuberías, esto con el objetivo de utilizar la menor tubería posible y minimizar costos, si se tienen costos asociados a la utilización de las tuberías, la tasa de envío de bienes sería el inverso de este valor promedio  $\tau$ .

## 1.2 MOTIVACIÓN

Gracias a los avances tecnológicos en los últimos años, en el sentido de las formas de comunicación, por englobar cualquier tipo de red social, han atraído un considerable interés y curiosidad en la comunidad de las ciencias sociales por el comportamiento de estos fenómenos en las últimas décadas [50].

Así como en los últimos años, se ha visto la necesidad día a día y con mayor frecuencia de representar comportamientos sociales complejos mediante simula-

ciones computacionales en todo tipo de líneas de investigación como en los mercados financieros, ecosistemas, sistemas de transporte, comercios electrónicos etc.. [17].

En la literatura, existen diversos trabajos relacionados con el análisis del comportamiento de estos fenómenos en un contexto de sistemas complejos, pero no se hallan trabajos relacionados con el análisis de fenómenos complejos competitivos y colaborativos, lo que nos motiva a estudiar sistemas en competencia como el que abordaremos en este trabajo.

### 1.3 JUSTIFICACIÓN

Para el caso de estudio de la red dirigida, donde se tenga que enviar algún flujo de "bienes" que deben ser transportados entre los nodos  $i$  y  $j$ , en un número esperado de pasos, transiciones u operaciones, cuya red dirigida simula una especie de corriente del flujo que se está transportando y donde el inverso de esta cantidad deseada de pasos sería la tasa de envío de "bienes" entre este par de nodos.

Entonces dada una red dirigida cuyos flujos estén definidos por una matriz de transición de Markov, se desea encontrar las probabilidades  $q_{ij}$  asociadas a la matriz de transición de la red, de tal manera que sean óptimas para poder transportar estos "bienes" en la cantidad esperada de pasos.

Para el caso de estudio de la red conexa, el conocimiento adquirido en base a la revisión literaria sobre trabajos a fines a nuestro problema de estudio, no se encuentra conocimiento de alguna investigación donde se aborde el análisis y el entendimiento de sistemas como los que se plantean en este trabajo, en los cuales dos organizaciones bien estructuradas se encuentran compitiendo y colaborando entre las partes que componen al propio sistema.

## 1.4 OBJETIVO

El objetivo principal se centra en el estudio y análisis de una red compleja basada en las probabilidades de transición entre los nodos asociados a la topología de la red, así como la propia optimización del subproblema del caso de la red dirigida para el valor esperado de transiciones.

En base a esto se enlistan los objetivos que subyacen a este problema:

1. Desarrollar el modelo de simulación para el caso de una red conexa.
2. Obtener el análisis del modelo.
3. Formular un modelo matemático para el caso de una red dirigida.
4. Optimizar el modelo matemático para el valor esperado de transiciones.

Posteriormente teniendo los objetivos del trabajo, obtener conclusiones del comportamiento del sistema, tanto para la red conexa como para la red dirigida.

## CAPÍTULO 2

# MARCO TEÓRICO

---

### 2.1 TEORÍA DE GRAFOS

En esta sección se definirán algunos conceptos de la teoría de grafos [52], [7], tales como la noción de *grafo*, *red*, *nodo vecino*, etc.. de los cuales se hablará a lo largo de esta tesis, se mostrarán algunos ejemplos y figuras de los mismos.

#### 2.1.1 DEFINICIONES

**GRAFO.** Un grafo  $G$  es un par de conjuntos  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito de puntos  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  llamados vértices o nodos del grafo y  $E$  es un conjunto finito de aristas  $(i, j)$ , cada uno de los cuales une pares ordenados de nodos. A las aristas se les puede asignar valores o pesos asociados los cuales se denota como  $w_{ij}$ , [30].

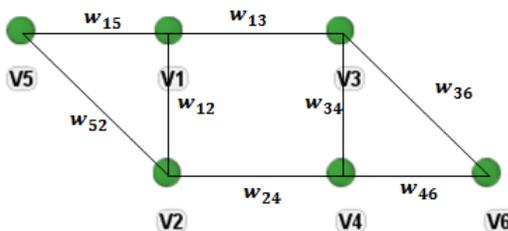


Figura 2.1: Grafo simple

**NODO VECINO.** Dos nodos  $i$  y  $j$ , son vecinos entre ellos si existe la arista  $(i, j) \in E$ .

Por ejemplo en la figura anterior, los nodos  $v_1$  y  $v_5$  son vecinos ya que tienen la arista  $(1, 5)$ . Dicho de otro modo, dos nodos son vecinos si existe un arista que los une.

**GRADO DE UN NODO.** El grado de un nodo se asocia al número de aristas que inciden a dicho nodo. Se denota por  $d_i = \sum_j w_{ij}$  y con frecuencia se considera:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } e_{ij} \text{ existe} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para el caso siguiente,  $d_i$  es el número de aristas incidentes en el vértice  $i$ .

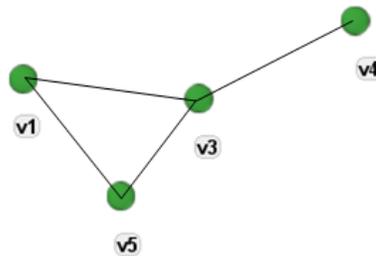


Figura 2.2: El grado para cada uno de los vértices del grafo son:  $d_1 = 2$ ,  $d_5 = 2$ ,  $d_3 = 3$ ,  $d_4 = 1$

**GRAFO COMPLETO.** Si cada par de vértices está conectado por un arista, se dice que el grafo es completo [7]. Si  $G$  es un grafo completo, el número de aristas es  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

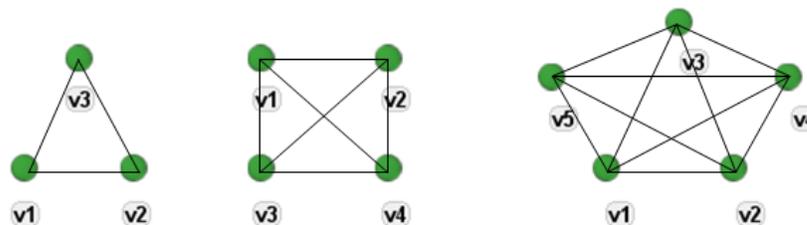


Figura 2.3: Grafos completos de 3,4 y 5 nodos

**GRAFO DIRIGIDO.** Un grafo dirigido es un grafo cuyas aristas presentan orientación. Las aristas tienen dirección del vértice  $i$  (punto inicial) al vértice  $j$  (punto final).

Distinguimos entre grado entrante (indegree por sus siglas en inglés) y grado saliente (outdegree) de un vértice como el número de aristas que tienen punto final en el vértice y como el número de aristas que tiene punto inicial en el mismo, respectivamente.

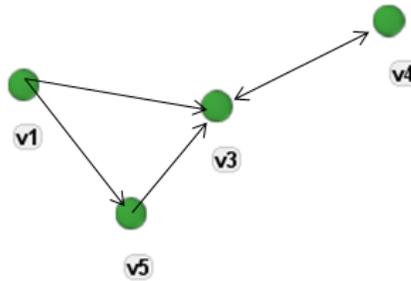


Figura 2.4: Grafo dirigido.

Para el caso del grafo anterior, los grados entrantes de cada vértice son:  $d_1 = 0$ ,  $d_3 = 3$ ,  $d_4 = 1$  y  $d_5 = 1$ , y los grados salientes del grafo dirigido son:  $d_1 = 2$ ,  $d_3 = 1$ ,  $d_4 = 1$ ,  $d_5 = 1$ .

**MATRIZ DE ADYACENCIA.** La matriz de adyacencia de un grafo  $G$  es la matriz  $A(G)$  de tamaño  $n \times n$  cuyas entradas están dadas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia correspondiente al grafo de la figura 2.1 es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.2 REDES COMPLEJAS

### 2.2.1 EULER Y LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

En un viaje realizado por Euler a la ciudad de Königsberg [36], se encontró con este problema. La ciudad se encontraba conectada por 7 puentes, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas, como se visualiza en la siguiente figura:

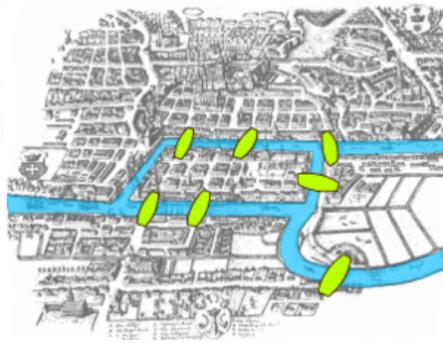


Figura 2.5: Imagen de la ciudad de Königsberg con los 7 puentes.

Los habitantes de esta ciudad solían pasear por los siete puentes, preguntándose si era posible dar un paseo en el que se termine en el lugar donde se comenzó, pasado sólo una vez por cada puente. Mientras unos negaban la posibilidad de realizar dicho paseo y otros dudando, nadie sostenía que fuera posible hacerlo realmente. De echo, es un dato histórico que un grupo de jóvenes de la ciudad, visitaron a Euler en 1735 [3] para pedirle que resolviera el problema. Euler formuló el problema de la siguiente manera:

*“En la ciudad de Königsberg, en Prusia, hay una isla A llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes a, b, c, d, e, f y g que cruzan por los dos brazos del río. La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes sólo una vez ”*

Euler recurrió a una abstracción del mapa de la ciudad, cada masa de tierra se visualiza como un nodo y cada puente como un arista. La siguiente figura muestra una representación del problema.

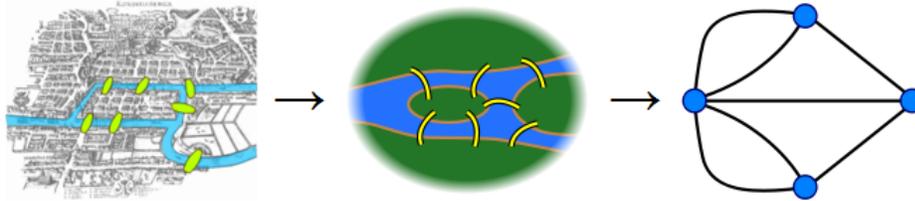


Figura 2.6: Representación abstracta echa por Euler de los 7 puentes de Königsberg.

Euler presentó un informe a la Academia rusa de la ciudad, donde presentaba la imposibilidad de efectuar tal ruta. Posteriormente, publicó un artículo titulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Euler 1736), en el que resolvía el problema en el caso general, obteniendo condiciones necesarias para la existencia de soluciones para cualquier problema del mismo tipo.

Tal artículo es considerado como el nacimiento de la teoría de Grafos. De tal manera se inicia el estudio de dicho campo, que después se extendió al estudio de las redes y redes complejas.

### 2.2.2 REDES Y SISTEMAS

Un sistema es un conjunto de elementos relacionados entre sí, con el objetivo de lograr un fin común. Estos sistemas se pueden catalogar de la manera siguiente [4].

- *Sistemas simples* los cuales tienen un número pequeño de elementos y los cuales interactúan conforme a ciertas leyes bien comprendidas.
- *Sistemas complicados* los cuales tienen un número mayor de componentes y actúan conforme a funciones bien definidas y están gobernados por reglas bien comprendidas.

- *Sistemas complejos*, estos se caracterizan por tener un gran volumen de componentes, los cuales pueden interactuar de acuerdo a reglas que pueden cambiar a través del tiempo y que pueden no ser bien comprendidas; además, la conectividad entre sus elementos pueden ser variables.

Como un ejemplo típico de sistema complejo consideremos a la célula. Evidentemente la célula está constituida de muchas partes tales como, ribosomas, tocondrias, núcleo, membranas, retículo endoplasmático, ADN, ARN, etc.. y cada una de estas partes se encargan de realizar funciones específicas dentro de la célula.

Una *red* es un conjunto de elementos los cuales se conocen como nodos. En una red, estos nodos tiene conexiones entre ellos a los cuales reciben el nombre de aristas. En gran parte de la literatura, una *red* es también conocida como grafo con pesos en las aristas.

Existen muchos sistemas que pueden ser representados mediante una red , ver tabla 2.1 , por ejemplo una red social de personas, en donde los nodos pueden representar hombres y mujeres, personas de nacionalidad distinta, edades, ingresos, etc; por otro lado, las aristas se pueden asociar a la amistad, distancia geográfica, compañerismo dentro de un área de trabajo, entre otros, [13]. También el internet es otro ejemplo de red compleja compuesta por ruteadores y computadoras, las cuales estan ligadas por varias conexiones físicas o inalámbricas [19].

En la actualidad hemos sido testigos de un movimiento substancial en el estudio de las redes, dejando a un lado el análisis de grafos simples, concentrándose en la consideración de las propiedades estadísticas de los grafos a gran escala. Este nuevo enfoque se ha desarrollado de gran manera por la disponibilidad de las computadoras y las redes de comunicación que permiten reunir y analizar datos a una escala mayor de lo previamente posible.

La investigación en la redes complejas, puede ser vista como la interacción entre la teoría de grafos y la mecánica estadística, lo cual otorga una naturaleza multidisciplinaria a esta área.

Redes Complejas	
Sexuales	Dos personas están conectadas si han tenido por lo menos una relación sexual.
Científicos	Dos científicos están conectados si han sido coautores de un mismo artículo.
Palabras	Dos palabras están conectadas si son sinónimas.
WWW	Dos páginas están conectadas si existe un hipervínculo que las ligue.
Genéticas	Dos genes están conectados si uno regula la expresión del otro.

Tabla 2.1: Diferentes tipos de redes complejas

### 2.2.3 REDES COMPLEJAS

Un conjunto de nodos junto con aristas es el tipo más simple de una red, existen muchas formas en las que una red puede ser más compleja que otras. Por ejemplo, pueden existir más de un tipo diferente de un nodo en la red y los nodos o las aristas pueden tener una gran variedad de propiedades asociadas, numéricas o de otro tipo. Cualquier sistema natural o artificial puede ser representado por una red compleja, una red compleja se entiende como un grafo con un gran número de elementos y que tiene una estructura topológica no trivial [2], como se muestra en la siguiente figura.

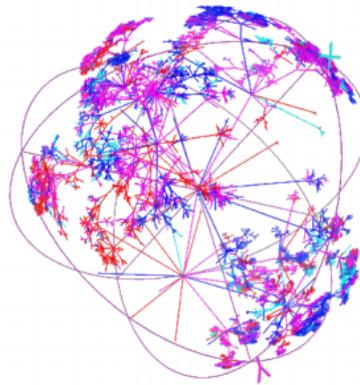


Figura 2.7: Red compleja del fenómeno internet.

Una de las razones por las cuales las redes complejas se han vuelto tan populares es por su flexibilidad y la generalización para representar cualquier estructura natural, incluso aquellas donde se presentan cambios dinámicos en su topología.

El deseo de entender tales sistemas que son representados por una red compleja, se han encontrado desafíos interesantes. Los físicos, han desarrollado un arsenal de herramientas exitosas para predecir el comportamiento de un sistema a partir de las propiedades de sus componentes.

Gracias a esto, ahora se entiende cómo surge el magnetismo del comportamiento colectivo de millones de spines o como partículas cuánticas que generan el fenómeno de condensación de Bose-Einstein [6].

En los últimos años, se han llevado a cabo muchos avances en el campo gracias al desarrollo de nuevas computadoras, las cuales han permitido investigar redes que contienen millones de nodos, explorando preguntas que antes no habían sido planteadas. Además, la colaboración interdisciplinaria, a dado a investigadores el acceso a diversas bases de datos, permitiendo relevar propiedades genéricas de las redes complejas.

#### 2.2.4 PROPIEDADES DE LAS REDES COMPLEJAS

- Efecto del mundo pequeño.

El famoso experimento de Milgram es una de las primeras demostraciones directas del efecto del mundo pequeño, el echo de que la mayor parte de los pares de nodos en la mayoría de las redes parecen estar conectados por un camino corto a través de la red. Este efecto tiene consecuencias obvias en la dinámica de los procesos que se llevan a cabo en las redes. Por ejemplo, si se considera la propagación de información, el efecto del mundo pequeño implica que esta propagación será más rápida [34], [51].

- Agrupamiento o Transitividad.

Una desviación clara del comportamiento de los grafos puede ser vista como la propiedad de transitividad de la red o agrupamiento. En muchas redes reales se tiene que si el nodo A está conectado con el nodo B y a su vez este último se encuentra conectado con el nodo C, entonces se dice que existe una probabilidad alta de que el nodo A esté conectado con el nodo C. Por ejemplo una red de amigos. Éste es cuantificado por medio del coeficiente de agrupamiento [37].

- Distribución de grado.

Sabemos que el grado de un nodo en una red es igual al número de aristas que inciden a este. Se define  $p(k)$  como la fracción de nodos en la red para los cuales tienen grado igual a  $k$ . Equivalentemente,  $p(k)$  es la probabilidad de que un nodo elegido uniformemente al azar tenga grado  $k$ . La gráfica de  $p(k)$  para cualquier red, puede formarse a partir del histograma de los grados de los nodos, la cual forma la distribución de grado de la red. Por ejemplo, en un grafo aleatorio cada arista tiene la misma probabilidad de estar o no en la red, por lo que su distribución de grado es tipo binomial o Poisson para redes de tamaño grande [37].

- Resistencia de la red.

Relacionada con la distribución de una red, está la propiedad de resistencia a la eliminación de algunos de sus nodos. Existen diferentes formas en las que un nodo puede ser eliminado; por ejemplo, se podrían eliminar nodos aleatoriamente, o enfocarse en un grupo selecto de éstos como los que tengan mayor grado. Esta propiedad es de importancia para casos de epidemiología [37].

- Correlación de grado.

Esta propiedad es de importancia dado que el grado es ya una propiedad de la topología de la red, las correlaciones de éstos pueden dar lugar a efectos interesantes en su estructura y responder a preguntas del tipo ¿Los nodos de

mayor grado preferirán conectarse con otros nodos de grado alto o preferirán a los nodos de menor grado? [37].

De acuerdo a la distribución de grado, las redes complejas se clasifican en redes Aleatorias, Power-Law y Exponenciales, para mayor información ver [30].

## 2.3 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

### 2.3.1 IDEAS PRELIMINARES

Se denomina *proceso estocástico* a toda variable que evoluciona a lo largo del tiempo de forma total o parcialmente aleatoria [35].

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados en:

- **Tiempo discreto:** Cuando el valor de la variable sólo puede cambiar en una serie de momentos determinados del tiempo (por ejemplo, los sorteos de la lotería tiene lugar en determinadas fechas).
- **Tiempo continuo:** Cuando el valor de la variable puede cambiar en cualquier momento del tiempo (por ejemplo, la temperatura, bolsa de valores).

Formalmente, un proceso estocástico se define de la siguiente manera.

**Definición 2.1** *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in T\}$  parametrizada para un conjunto  $T$ , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto  $S$  llamado espacio de estados. [5]*

En casos más simples el espacio parametral se toma el conjunto discreto  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  y estos números se interpretan como tiempos. En este caso se dice que el proceso es a tiempo discreto y en general este tipo de procesos se denota por

$\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  o explícitamente

$$X_0, X_1, X_2, \dots$$

En donde cada  $n$ ,  $X_n$  es el valor del proceso o el estado del sistema al tiempo  $n$ . La siguiente figura muestra los estados de un proceso a tiempo discreto y de dimensión finita.

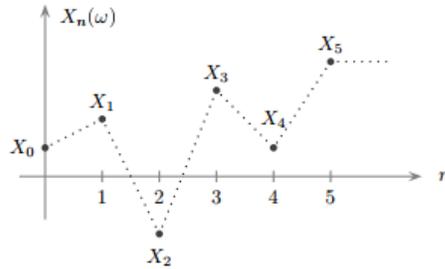


Figura 2.8: Proceso estocástico a tiempo discreto [43].

El espacio de estados puede también tomarse como el conjunto continuo  $T = [0, \infty)$ . Se dice entonces que el proceso es a tiempo continuo y se denota por [43]

$$\{X_t : t \geq 0\}$$

#### CASOS ESPECIALES DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

- Proceso estacionario: Un proceso estacionario en sentido estricto es, si la función de distribución conjunta de cualquier subconjunto de variables es constante respecto a un desplazamiento en el tiempo. Se dice que un proceso es estacionario en sentido amplio (o débilmente estacionario) cuando se verifique que:
  1. La media teórica es independiente del tiempo.
  2. Las autocovarianzas de orden  $s$  sólo vienen afectadas por el lapso de tiempo transcurrido entre los dos tiempos y no depende del tiempo.
- Proceso homogéneo: variables aleatorias independientes o idénticamente distribuidas.

- Procesos de Markov: Aquellos procesos en donde la evolución sólo depende del estado actual y no de los anteriores.
- Procesos de Gauss: Proceso continuo en el que toda la combinación lineal de variables es una variable de distribución normal.
- Procesos de Poisson: Proceso de conteo de eventos a tiempo continuo que ocurren a lo largo del tiempo.
- Procesos de Gauss-Markov: Son procesos que al mismo tiempo son de Gauss y de Markov.
- Procesos de Bernoulli: Son procesos con una distribución binomial.

Este trabajo está enfocado a procesos estocásticos de Markov, los cuales se describen en la siguiente sección.

### 2.3.2 CADENAS DE MARKOV

Una cadena de Markov es un proceso estocástico en el cual la probabilidad de que ocurra un evento futuro, depende sólo del estado actual. Las cadenas de este tipo tienen "*memoria*", es decir, recuerdan el último evento y esto condiciona a las probabilidades de los estados futuros, esta característica es llamada *Propiedad de Markov* [31]:

$$P\{X_k = i_k | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}\} = P\{X_k = i_k | X_{k-1} = i_{k-1}\}$$

La probabilidad de transición del estado actual  $i$  a un estado futuro  $j$  es  $p(i, j)$  donde:

$$p(i, j) = P\{X_k = i_k | X_{k-1} = i_{k-1}\}$$

La matriz de probabilidad de transición  $P$  para una cadena de Markov es una matriz de  $n \times n$ , para la cual las entradas  $P_{ij} = p(i, j)$ .  $P$  es una matriz estocástica, es decir,  $0 \leq P_{ij} \leq 1$  para  $1 \leq i, j \leq n$  y  $\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$  para  $i \in [1, n]$ .

En general, toda cadena de Markov independientemente de cómo sean definidas las probabilidades de transición, pueden ser representadas por medio de un grafo dirigido ponderado, donde cada estado en la cadena corresponde a un vértice y cada transición que tiene probabilidad diferente de cero corresponde a un arista del grafo y la probabilidad de transición corresponde al peso de la arista. Para un grafo no ponderado, cuando nos movemos de un vértice a otro eligiendo a un vértice vecino uniformemente al azar, la matriz de transición que resulta es la matriz de adyacencia normalizada ( $D^{-1}A$ ) del grafo  $G$ . Esto significa que la probabilidad de moverse del vértice  $i$  al  $j$  es simplemente  $1/d(i)$ .

Una cadena de Markov es *irreducible* si el espacio de estados es una clase comunicada; es decir, en una cadena de Markov irreducible es posible llegar de un estado a cualquier otro. Si la probabilidad de que nunca se regrese a un estado  $i$  (estado de inicio), es diferente de cero, se dice que el estado  $i$  es un estado *transitorio*. Si el estado  $i$  no es transitorio, entonces se dice que es *recurrente*. Un estado  $i$  es *absorbente* si la probabilidad de salir de ese estado es cero, osea,  $i$  es absorbente si y sólo si  $p(i, i) = 1$  y  $p(i, j) = 0$  para  $i \neq j$ .

## 2.4 SIMULACIÓN MULTIAGENTE

### 2.4.1 SIMULACIÓN BASADA EN AGENTES

La simulación basada en agentes ha demostrado ser una técnica tremendamente útil para modelizar sistemas complejos y muy especialmente a sistemas sociales [23].

Lo que distingue a la simulación basada en agentes en comparación con otras técnicas de modelado, es que en ésta se construye la abstracción del sistema real y en consecuencia del modelo formal. En los modelos formales construidos mediante simulación basada en agentes, los componentes básicos del sistema real están representados en dicho modelo. De esta manera, como se muestra en la siguiente figura, los componentes básicos del sistema real corresponden a los agentes que se definen

en el modelo, así como las interacciones que tienen lugar entre los componentes del sistema real y el modelo [16].

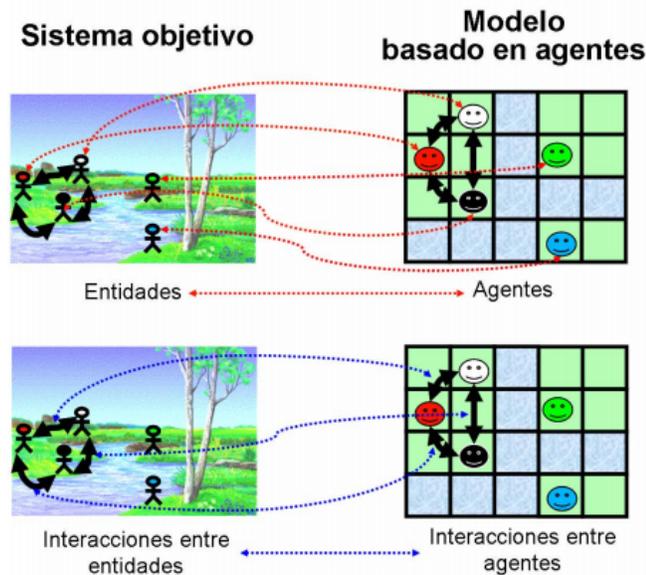


Figura 2.9: Abstracción del sistema real al modelo

La simulación basada en agentes se caracteriza por comprender varios agentes que son en mayor o menor grado autónomos, heterogéneos e independientes, que perciben cada uno sus propias metas, objetivos y que generalmente son capaces de interactuar entre sí y con su entorno. Particularmente, esta área de investigación es especialmente relevante en sistemas complejos con ciertas características propias para los agentes, los cuales se describen en la sección 2.4.3.

## 2.4.2 DEFINICIÓN DE AGENTE

Existen numerosas definiciones del concepto de *agentes*, ya que puede ser una noción de estudio de varias áreas, como por ejemplo: inteligencia artificial, sistemas distribuidos, ingeniería de software, redes y sistemas autónomos entre otros. Algunas de las definiciones se muestran a continuación:

Un agente es cualquier cosa capaz de percibir su medio ambiente con la ayuda de sensores y actuar en ese medio utilizando actuadores (Russell y Norvig, 2004)

[46].

Según, Wooldridge y Jennings (1995), un agente es un sistema situado en un determinado entorno, capaz de actuar en forma autónoma y razonada en dicho dominio [53].

Para Weiss (1999), los agentes son simplemente un sistema computacional con la capacidad de tomar acciones autónomas en un medio, para así cumplir algunos objetivos.

Según Nwana (1996), el término agente se refiere a un componente de software y/o hardware que es capaz de actuar para poder ejecutar tareas en nombre de un usuario [40].

Para Maes (1994), describe a los agentes como sistemas computacionales que habitan en algún ambiente dinámico y complejo, con la capacidad de percibir dicho entorno y actuar en consecuencia, tomando en cuenta el conjunto de objetos y motivaciones que intentan conseguir a través de sus acciones [33].

### 2.4.3 PROPIEDADES Y CARACTERÍSTICAS DE LOS AGENTES

En base a todas las definiciones antes mencionadas para el concepto de *agente*, es posible extraer algunas características en las cuales se pueden converger dichas definiciones, por ejemplo: deben ser parte de un ambiente que puedan percibir su entorno y actuar sobre él y que puedan responder según los objetivos para los cuales fueron diseñados. Por lo tanto, todos los agentes deben de poseer una serie de atributos o propiedades que los defina como tal [53].

- **Autonomía.** Capacidad de poder actuar sin la intervención directa de una persona u otro agente y poder controlar sus propias acciones.
- **Habilidad Social.** Habilidad que debe de poseer un agente para ser comunicativo y para interactuar con otros agentes o incluso con una persona para

solicitar información o para exponer los resultados obtenidos de la tareas asignadas.

- **Reactividad.** Esta propiedad se refiere al hecho de que un agente deba poder percibir el estado del ambiente dentro del cual se encuentra inmerso y en función de este actuar, respondiendo de manera adecuada a posibles cambios del mismo.
- **Proactividad.** Esto indica que los agentes son capaces de presentar comportamientos dirigidos hacia metas específicas tomando la iniciativa.
- **Movilidad.** Es la capacidad de un agente de trasladarse por las redes de computadoras, de nodo a nodo, en busca de los recursos que le permitan cumplir con su objetivo. Trasládarse indica que en un determinado instante de tiempo el agente detiene su ejecución, almacena su estado interno y se dirige a otro sitio dentro de la red, para continuar su ejecución dentro de su nueva ubicación.
- **Adaptabilidad.** Esta relacionado con el aprendizaje que un agente es capaz de realizar y si puede cambiar su comportamiento basándose en ese aprendizaje.
- **Veracidad.** Capacidad de comunicar información sobre su percepción del entorno.
- **Benevolencia.** El agente esta dispuesto a ayudar a otros agentes si esto no entra en conflicto con sus propios objetivos.

#### 2.4.4 TIPOS DE AMBIENTES PARA LOS AGENTES

El diseño de los agentes esta basado en las características del ambiente y en el control que el agente pueda tener sobre este, Russell y Norvig sugieren la siguiente clasificación [46].

- **Totalmente observable vs parcialmente observable.** Un ambiente totalmente observable es aquel en donde el agente puede obtener información

completa y precisa acerca del estado del ambiente. Ambientes moderadamente complejos son parcialmente observables debido al ruido.

- **Deterministas vs Estocásticos.** El ambiente determinista es aquel en donde cualquier acción tiene garantizado un único efecto, es decir, que si el siguiente estado del medio esta totalmente determinado por el estado actual; en caso contrario, el entorno se dice que es estocástico.
- **Episódico vs Secuencial.** En un ambiente episódico el agente se divide en episodios (percepción, acción), el próximo episodio no depende de la acción tomada en el episodio anterior. En ambientes secuenciales la decisión actual puede afectar a las decisiones futuras.
- **Estático vs Dinámico.** Si el entorno puede cambiar a lo largo del tiempo y cuando el agente esta realizando sus acciones, entonces se dice que es un ambiente dinámico, de otra forma se dice que es un ambiente estático. Los medios estáticos son fáciles de tratar ya que el agente no necesita estar pendiente del mundo mientras esta tomando una decisión sobre una acción, ni necesita preocuparse por el lapso del tiempo.
- **Discreto vs Continuo.** La distinción entre discreto y continuo se puede aplicar al estado del ambiente, a la forma en que se maneja el tiempo y a las percepciones y acciones del agente. Un ambiente es discreto, si existe en él, un número fijo y finito de acciones y percepciones, de lo contrario es un ambiente continuo.

Las clases de ambientes más complejos son el parcialmente observable, estocástico, secuencial, dinámico y continuo. Para este trabajo de investigación, se presenta ambientes tales como dinámicos y estocásticos.

## CAPÍTULO 3

# METODOLOGÍA

---

En este capítulo se expone la metodología para dar solución a los problemas abordados durante este trabajo descritos en la sección 1.1.

En general este trabajo está basado en la teoría de grafos, en particular en redes dirigidas y redes complejas donde cada par de nodo esta conectado mediante un arista; así como en procesos estocásticos mediante simulación multiagente y así mismo está basada en problemas de programación no lineal para el caso simple de la sección 1.1.1.

Además de explicar la metodología propuesta, se describe el funcionamiento del modelo de simulación realizado bajo la herramienta FLEXSIM [39] descrito como un sistema complejo basado dentro del estudio de simulación mediante agentes, se detalla el papel que juega cada agente dentro del modelo y se especifica el comportamiento de juego para cada uno de los mismo.

### 3.1 MODELO DE SIMULACIÓN

El problema de simulación se centra en un sistema tanto colaborativo como competitivo, en donde se visualice tanto las interacciones como la colaboración del sistema. Esto puede ser, organizaciones que estén compitiendo para atraer a un cliente potencial y dentro de una organización, pueden ser dos equipos de trabajo o dos áreas de trabajo que estén compitiendo para realizar un proyecto deseado, etc..

Se trabajará en una simulación bajo la herramienta FLEXSIM [38], la cual muestra la interacción en forma dinámica a través del tiempo, para un sistema complejo representado como una red totalmente conectada, desde un nodo inicial hacia un nodo destino. Estas interacciones se basan en la probabilidad de transición de un nodo hacia todos los nodos restantes del sistema.

El caso de estudio que abordaremos, está enfocado en juegos deportivos dirigido a juegos de futbol, ya que estos entornos cumplen las características de un sistema integrado e interactivo.

Como bien se sabe, un juego de futbol se basa en la competencia de 2 equipos conformados por 11 jugadores; por equipo los jugadores interactúan colaborando entre ellos y al mismo tiempo compiten para lograr el fin en común de ganar el partido anotando más goles.

### 3.1.1 CONFIGURACIÓN DE LA SIMULACIÓN

Una vez definido el caso de estudio, realizamos el modelo de simulación bajo la herramienta FLEXSIM. El modelo recrea un partido de futbol, el cual se a representado por medio de nodos que personifique a los jugadores. La figura 3.1 muestra la configuración inicial del modelo.

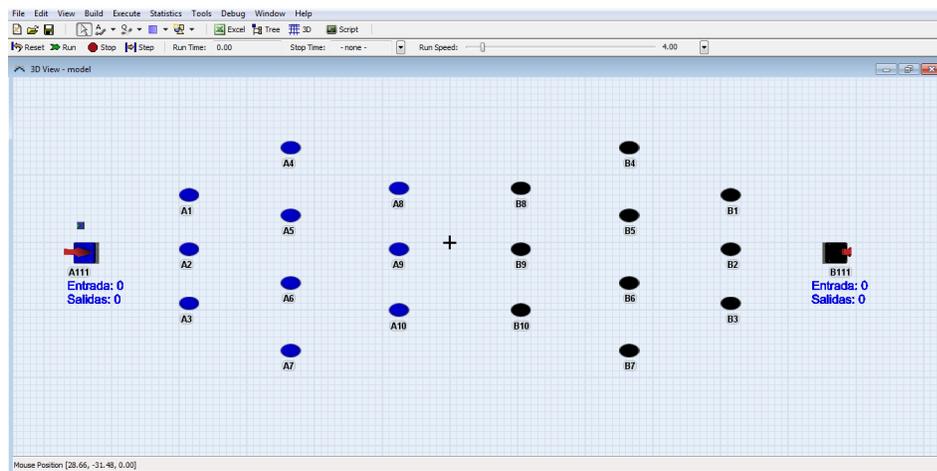


Figura 3.1: Configuración del modelo de simulación

Visto como una red compleja totalmente conectada, las interacciones entre los agentes (jugadores, nodos) se basan en la probabilidad de transición (pases) las cuales están definidas por  $q_{ij}$ , así cada nodo de la red posee una tabla de probabilidades que denotan los valores para las  $q_{ij}$  asociadas a cada conexión del propio nodo.

Se desarrolla un procedimiento sistemático para generar los valores correspondientes de las probabilidades  $q_{ij}$  de cada nodo de la red, de tal manera, que sea más probable transitar a nodos cercanos que a nodos lejanos. En base a esto, la siguiente figura muestra la red compleja que está detrás del modelo de simulación de la figura 3.1.

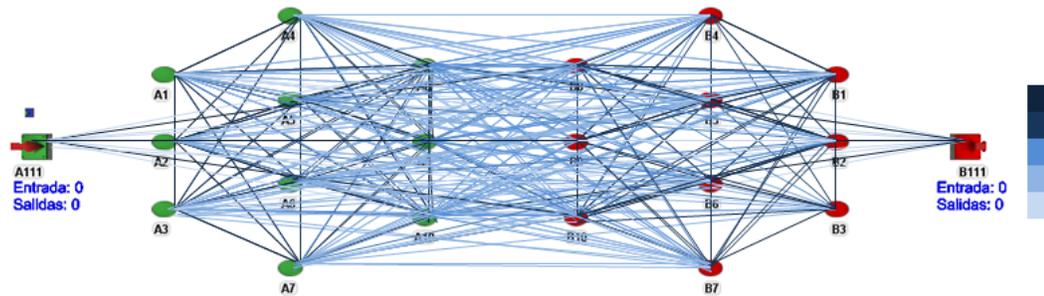


Figura 3.2: Red compleja del modelo

La figura muestra la escala de colores para las conexiones de cada uno de los nodos. Cada nodo tiene asociado una conexión para todos los nodos restantes del sistema. Esta escala detalla la metodología que se desarrolló para definir las probabilidades  $q_{ij}$  de cada nodo en la red. El color más oscuro denota una mayor probabilidad de transición entre los nodos y el color más claro denota una probabilidad débil de transición.

Por la naturaleza de la simulación y propiedades de los nodos, podemos modelar matemáticamente como un proceso de Markov, con matriz de transición dinámica variante en el tiempo. Así cada nodo tiene un vector asociado con las probabilidades de transición para cada una de sus conexiones.

### 3.1.2 ROLL DE JUEGOS Y DESCRIPCIÓN DE EQUIPOS

Se simulan 4 equipos de fútbol los cuales representamos por colores (Rojos, Azules, Blancos y Negros) y los hacemos competir entre ellos, por tanto cada equipo jugará 3 partidos teniendo un total de 6 partidos simulados, ya que no se toma en cuenta la repeticiones entre ellos; es decir, si se juega un partido de Rojos vs Azules, ya no se contará el partido de Azules vs Rojos.

Cada uno de estos equipos tiene una estrategia de juego diferente, la cual se define a continuación:

#### EQUIPO ROJO

- La probabilidad de pasar el balón hacia sus compañeros (jugadores del mismo equipo) es 3 veces mayor que la probabilidad de pasar el balón hacia los jugadores del equipo contrario.
- El portero tiene 50 % de probabilidad de efectividad de parar un gol.
- Sólo los 3 delanteros pueden anotar gol al equipo contrario.
- La matriz de transición para cada nodo permanece estática a lo largo del tiempo.

#### EQUIPO AZUL

- Misma estrategia que el equipo Rojo, más
- Se impone un delantero estrella (delantero central) con mayor probabilidad de anotar un gol.

#### EQUIPO BLANCO

- Misma estrategia que el equipo Azul, más

- Tiene mejor portero siendo su probabilidad de efectividad del 70 %.

#### EQUIPO NEGRO

- Misma estrategia que el equipo Blanco, más
- La matriz de transición es dinámica; cambian sus probabilidades de transición en cada instante de tiempo.

En la siguiente sección se explicará la manera en como las matrices de transición cambian en cada instante de tiempo, para la estrategia de juego del equipo Negro.

En la lista anterior donde se detallan los equipos, éstos se describen de manera que van mejorando la estrategia de juego; dicho de otro modo, se enlistan de tal manera que estan acomodados **del peor al mejor equipo**.

La siguiente tabla muestra los enfrentamientos para cada equipo.

<b>Tabla de Rol de Juegos</b>			
Juegos simulados			
1	Rojos	vs	Azules
2	Rojos	vs	Blancos
3	Rojos	vs	Negros
4	Azules	vs	Blancos
5	Azules	vs	Negros
6	Blancos	vs	Negros

Tabla 3.1: Tabla de Roll por juegos

La tabla muestra los juegos que se simularán en el software FLEXSIM, cada equipo jugará 3 partidos siendo un total de 6 partidos a estudiar. Cada partido se analiza como un sistema colaborativo y se efectuará un análisis estadístico para cada uno de los partidos simulados.

### 3.1.3 GENERADOR DE INSTANCIAS

El sistema esta compuesto de 20 nodos (red compleja) y por dos nodos destinos (porterias) permitiendo que cada equipo tenga su nodo destino. El modelo basado en FLEXSIM, se alimenta de las matrices de transición para cada uno de los 20 nodos, estas matrices o tablas son importadas desde un archivo en Excel.

La matriz de transición asociada para cada nodo del modelo, contiene las probabilidades de transición  $q_{ij}$  para cada una de sus conexiones. Las conexiones de cada nodo, están colocadas consecutivamente, de modo que; la primera conexión del nodo 1 será hacia el nodo 2, su segunda conexión será hacia el nodo 3, su tercera conexión será hacia el nodo 4 y así sucesivamente; la primera conexión para el nodo 2 será hacia el nodo 1, su segunda conexión será hacia el nodo 3, su tercera conexión hacia el nodo 4, etc... De esta manera, están fijadas las conexiones para cada nodo de la red.

Para las probabilidades  $q_{ij}$  correspondientes a las conexiones de los nodos, éstas están basadas en un número aleatorio dividido entre la distancia euclidiana [14], basándonos en las coordenadas cartesianas de cada nodo (jugador) representando a cada nodo como un punto en el plano cartesiano.

A continuación se describe la metodología que se siguió para obtener las probabilidades de transición para cada uno de los nodos. La figura siguiente, muestra el total de nodos representados en el sistema y para cada uno de los nodos, se muestra la ubicación para éstos en el plano cartesiano dadas por coordenadas.

En base a las coordenadas de cada uno de los nodos, se calculan las distancias entre ellos con la formula:

$$d(i, j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

Después de obtener las distancias, definimos números aleatorios en dependencia del equipo de la siguiente manera:

**Mismo equipo** : aleatorio(15,20)

**Diferente equipo** : aleatorio (1,5)

Para obtener las probabilidades de transición  $q_{ij}$  utilizamos la siguiente formula:

$$P(N_i, N_j) = \frac{\text{aleatorio}}{d(i, j)}$$

Y finalmente normalizamos para obtener la suma de las probabilidades a 100.

El número aleatorio que escogemos para cada uno de los nodos, es seleccionado en dependencia del grupo en el que pertenece, con esto garantizamos que sea mayor la probabilidad de pasar el balón a un compañero de su propio equipo que a un jugador del equipo contrario. La figura 3.2 de la sección 3.1.1 muestra la escala de colores para las probabilidades fuertes y débiles de las conexiones asociadas a cada nodo.

De este modo, obtenemos las probabilidades  $q_{ij}$  para cada nodo correspondientes a las conexiones de cada uno de éstos. La razón por la que se normaliza a 100, es porque el software de simulación FLEXSIM [poner referencias de un manual] tiene por defecto que la suma de las probabilidades sea 100.

Por lo tanto, las matrices que se importan al modelo de simulación son del siguiente tipo, las cuáles mostramos en la tabla 3.2.

NODOS	X	Y
1	-40	8
2	-40	0
3	-40	-8
4	-25	15
5	-25	5
6	-25	-5
7	-25	-15
8	-9	9
9	-9	0
10	9	-9
11	9	9
12	9	0
13	9	-9
14	25	15
15	25	5
16	25	-5
17	25	-15
18	40	8
19	40	0
20	40	-8
21	-55	0
22	55	0

Nodo 1		Nodo 2		Nodo 20	
11	1	9	1		1
9	2	11	2	.. ..	1
7	3	8	3		0
20	4	15	4		1
10	5	18	5		0
7	6	9	6		1
13	7	9	7		1
9	8	10	8		0
5	9	5	9		1
1	10	0	10		2
2	11	1	11		7
1	12	0	12	.. ..	10
0	13	1	13		10
1	14	1	14		7
0	15	0	15		13
1	16	0	16		15
1	17	1	17		9
1	18	1	18		11
1	19	1	19	.. ..	10
0	20	0	20		0

Tabla 3.2: Tablas con probabilidades para cada nodo asociado a sus conexiones

La primera columna de cada una de las tablas, representa las probabilidades  $q_{ij}$  y la segunda columna representa las conexiones del nodo. Cada nodo (jugador) tiene 20 conexiones asociadas, así cada renglón de cada columna definen la probabilidad  $q_{ij}$  correspondiente a esa conexión.

De este modo, obtenemos las matrices de transición para cada uno de los equipos definidos en la sección 3.1.2. Las probabilidades asociadas a los porteros, éstas se modifican en la parte de la programación del modelo en FLEXSIM.

### 3.1.4 PROPIEDADES DE LOS NODOS

La investigación que se aborda en este trabajo, se modela como un sistema complejo basado en simulación multiagente. Dentro de este marco de referencia, los agentes que conforman al propio sistema, cumplen con ciertas reglas de juego o ciertas dinámicas las cuales definiremos a continuación.

#### Movimiento

Cada uno de los nodos cumplen ciertas reglas de juego, de tal manera que simulan un partido real de fútbol, tal es el caso del movimiento de los nodos conforme avanza el tiempo en una simulación para cada uno de ellos, dichas reglas obedecen el siguiente principio:

1. **Si se tiene la posesión del balón** : los nodos del mismo equipo se mueven en la dirección en  $X$ , el 25 % de su distancia al nodo destino (portería contraria) con una velocidad definida bajo una distribución uniforme entre 0 y 0.15  $m/s$ .
2. **Si no se tiene la posesión del balón** : siguen las reglas siguientes:
  - 80 % de las veces se mueven hacia la posición original con una velocidad uniforme entre 0 y 0.5  $m/s$  .
  - 20 % de las veces se mueven conforme al siguiente promedio:
    - **Nodo regular** <sup>1</sup>: promedio de posición actual + posición original + posición del balón.
    - **Delanteros en la coordenada en  $X$** : promedio de posición original + posición actual + posición del balón + Def1 <sup>2</sup> + Def2 <sup>3</sup> + Def3 <sup>4</sup>.

---

<sup>1</sup>Jugadores defensas y medios

<sup>2</sup>Defensa 1 del equipo contrario

<sup>3</sup>Defensa 2 del equipo contrario

<sup>4</sup>Defensa 3 del equipo contrario

- **Delanteros en la coordenada en  $Y$**  : promedio de posición actual + posición original + posición del balón.

Otra de las propiedades que siguen TODOS los nodos independientemente del equipo en el que se encuentren, es lo siguiente:

- A cada nodo se le atribuye su tabla de probabilidad para los nodos restantes del sistema.
- La velocidad del balón es fija para todos los nodos ( $2m/s$ ).
- Cada nodo tiene un tiempo de proceso el cuál está definido mediante una distribución uniforme con media ( $\mu = 5$ ) y varianza ( $\sigma^2 = 1$ ).

### 3.1.5 MATRIZ DE TRANSICIÓN DINÁMICA

Esta propiedad tiene como finalidad que la matrices de transición para cada nodo de algún equipo, sean variantes respecto al tiempo ; es decir, que las tablas 3.2 de transición para cada nodo del equipo, vayan cambiando conforme avanza la simulación y a una lógica predeterminada, la cuál se describe a continuación.

- En cada fase de transición (pase del balón) se obtienen las distancias de los nodos del quipo que posee el balón con respecto a los nodos del equipo contrario.
- Si esta distancia calculada para cada nodo es mayor a un umbral fijo (10 mts), se considera que el nodo (jugador) está desmarcado.
- Se determinan cuántos nodos están desmarcados y éstos se van guardando en un arreglo para poderlos idenfificar.

Una vez conociendo cuántos y cuáles nodos están desmarcados, se recalculan las matrices de transición para cada nodo del equipo. Las nuevas tablas de transiciones contendrán los siguientes porcentajes:

- Para los nodos que estén desmarcados:
  - 70 % de su tabla original +  $30/(\text{cant. de nodos desmarcados})$
- Para los nodos que **NO** estén desmarcados
  - 70 % de su tabla original para cada nodo

Esto se sigue para cada nodo del equipo y para las conexiones correspondientes a los nodos desmarcados. Por ejemplo, para el juego mostrado en la figura 3.1 Azul *vs* Negros, en un instante de tiempo la posesión del balón la tiene los del equipo azul, entonces se calculan cuáles y cuántos jugadores de este equipo están desmarcados. Supongamos que están desmarcados 3, el jugador 3, jugador 5 y jugador 8, entonces para todos los jugadores del equipo se recalculan sus tablas de probabilidad, con la dinámica antes mencionada. Para el jugador 1 (nodo1) se multiplica su tabla de probabilidad por el factor de 0.7 y se suma  $30/(\text{cantidad de nodos desmarcado})$  sólo para aquellas conexiones de estos nodos; es decir, se le suma esta cantidad a la conexión 3, 5 y 8, que representan la transición a los nodos desmarcados. Para el jugador 2, se multiplica su tabla por el factor 0.7 y se suma esta cantidad a las conexiones 2, 4 y 7 que representa la transiciones a los nodos desmarcados, se realiza lo mismo para los demás jugadores del equipo.

Bajo esta lógica se calculan las nuevas tablas de transición para cada nodo del equipo que posee esta propiedad.

## 3.2 MODELO DE OPTIMIZACIÓN

### 3.2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este caso de estudio surge como un subproblema de la sección anterior, en donde al sistema complejo basado como la interacción de dos equipos en competencia, es modelado y estudiado a partir de un solo equipo para obtener una mejor estrategia de juego y mejor resultado como equipo.

Tal y como se detalla el problema en la sección 1.1.1, el problema se centra en mandar algún tipo de flujo desde un nodo origen a un nodo destino. Para el caso de estudio del sistema en competencia en el ámbito deportivo, el problema se basa en pasar el balón desde el nodo inicial (portero) hacia el nodo destino (delantero) de un equipo, pasando por los jugadores intermedios, de tal manera que se logre esta transición en un número promedio esperado de pasos o pases.

Dentro del entorno deportivo, el problema tiene la estructura de un tipo de estrategia de juego comúnmente vista en los partidos reales de fútbol. Esta estrategia deportiva es llamada **contra-golpe** o contraataque.

El **contragolpe** es un estilo de juego y es parte básica y esencial del fútbol directo, el cual tiene como objetivo el de tomar desprevenido al equipo rival. Cuando el equipo contrario pierde la posesión del balón, los defensas tienden a estar descolocados, siendo este el momento oportuno para iniciar un contraataque, mediante pases largos [25].

Existen 3 factores básicos en todo contragolpe, para más detalle ver [27].

1. Impedir el repliegue defensivo del contrario. Una vez recuperado el balón los pases han de ser en profundidad y lo más rápido posible.
2. Impedir las coberturas en defensa del adversario. Mediante cruces o pantallas, debemos aislar al receptor para que su camino sea lo más claro posible.
3. Obtener superioridad numérica. Es importantísimo incorporar cuanto más jugadores al contragolpe mejor, de manera rápida y sorprendente, el trabajo en equipo y la sincronización.

De este modo, debemos mandar el balón del portero hacia los delanteros. Dado que los pases entre los jugadores se basan sólo en las probabilidades  $q_{ij}$  asociado a cada uno de sus conexiones; es decir, las probabilidades que tiene cada jugador (nodo) de pasar el balón hacia todos los jugadores del sistema.

Por esta razón nuestro problema se enfoca en encontrar las probabilidades  $q_{ij}$  óptimas para cada uno de los jugadores del equipo, de tal manera que la transición de pase entre portero - delantero, sea en promedio en un número deseado al cuál le llamaremos  $\tau$ .

Dentro de las propiedades de la estrategia del contragolpe, es de mandar el balón en una sola dirección, tal dirección es hacia adelante de portero a delantero. Dicho comportamiento se puede ver como una red dirigida dentro del contexto de teoría de grafos.

Dada la matriz de transición del sistema o del equipo, se optimiza dicha matriz para encontrar los valores correspondientes a las probabilidades asociadas a cada uno de las conexiones de los nodos.

La siguiente tabla muestra tanto la matriz de transición original del sistema, a la cual se desea obtener los valores óptimos que cumplan con el objetivo del contragolpe, en la misma se muestra la matriz a la cual se desea llegar.

$$\begin{bmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & \dots & q_{110} \\ 0 & 0 & q_{23} & q_{24} & q_{25} & \dots & q_{210} \\ 0 & 0 & 0 & q_{34} & q_{35} & \dots & q_{310} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{410} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{610} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{710} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{810} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \hat{q}_{12} & \hat{q}_{13} & \hat{q}_{14} & \hat{q}_{15} & \dots & \hat{q}_{110} \\ 0 & 0 & \hat{q}_{23} & \hat{q}_{24} & \hat{q}_{25} & \dots & \hat{q}_{210} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{q}_{34} & \hat{q}_{35} & \dots & \hat{q}_{310} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{q}_{410} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{q}_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{q}_{610} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{q}_{710} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{q}_{810} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{q}_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Tabla 3.3: Matriz de transición del sistema y Matriz optimizada del sistema

La matriz definida por  $q_{ij}$  representan las probabilidades de transición originales, pertinentes a los nodos del sistema y la matriz definida por  $\hat{q}_{ij}$  representan las nuevas probabilidades que deben de tener los jugadores para realizar un contragolpe.

Para dar solución al problema de determinar las probabilidades  $q_{ij}$  óptimas, se aplicará la metodología de **programación no lineal** y **procesos de Markov**, los cuales se describieron en el capítulo anterior.

Se plantea un modelo matemático el cual describa las propiedades de nuestro problema y se desarrollará la programación mediante el lenguaje algebraico GAMS [20]. En la sección siguiente se muestra dicho modelo.

Para mostrar la metodología que abordaremos al dar solución a nuestro problema de optimizar las probabilidades de transición para los nodos de la red, la siguiente imagen muestra los pasos a seguir para lograr dicho objetivo.

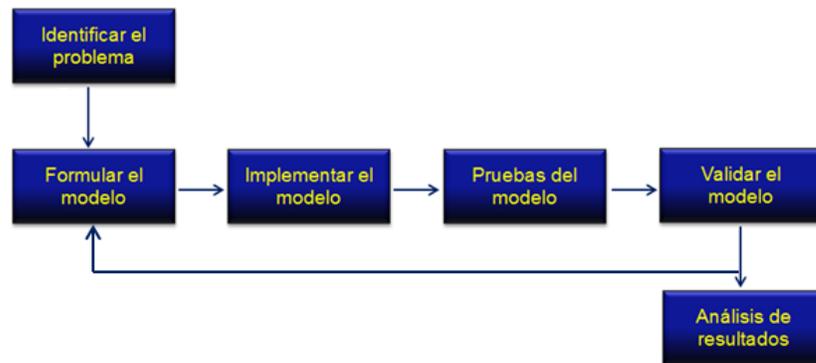


Figura 3.3: Diagrama de metodología

### 3.2.2 MODELO MATEMÁTICO

El modelo siguiente, es la formulación para nuestro problema de optimizar las probabilidades de transición de los nodos, para el valor esperado de movimientos.

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N (q_{i,j} - \hat{q}_{i,j})^2 \quad (3.1)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{N-1} q_{i,j} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

$$q_{1,N} + \sum_{a=2}^{N-1} q_{1,a} q_{a,N} + \sum_{a=2}^{N-2} \sum_{b>a}^{N-1} q_{1,a} q_{a,b} q_{b,N} + \dots + \prod_{r=1}^{N-1} q_{r,r+1} = 1 \quad (3.3)$$

$$q_{1,N} + 2 \left( \sum_{a=2}^{N-1} q_{1,a} q_{a,N} \right) + 3 \left( \sum_{a=2}^{N-2} \sum_{b>a}^{N-1} q_{1,a} q_{a,b} q_{b,N} \right) + \dots + (N-1) \left( \prod_{r=1}^{N-1} q_{r,r+1} \right) = \tau \quad (3.4)$$

$$\sum_{r>s}^N q_{r,s} = 0 \quad \forall s = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

$$0 \leq q_{i,j} \leq 1 \quad (3.6)$$

Donde:

$N$ : es el número total de nodos en la red.

$\hat{q}_{i,j}$ : son las probabilidades originales de la red.

$\tau$ : es el número esperado de transiciones.

La primera restricción 3.2 nos garantiza la propiedad Markoviana ver [26], la cual describe que la suma de todas las probabilidades partiendo de un estado  $i$  al estado absorbente sea uno; es decir, que la suma de las probabilidades partiendo de un nodo cualquiera hacia el nodo destino sea igual a uno.

La segunda restricción 3.3, establece la probabilidad total de un sistema completo ver [12], la cual expone que la unión de todos estos sucesos, sea el espacio

muestral; esto es, que la suma de todas las transiciones posibles de llegar al nodo final sumen uno.

Para garantizar que la transición de pasar del nodo inicial al nodo final en un número deseado de transiciones, lo vemos en la restricción 3.4, dicha restricción asocia el valor esperado del sistema, el cual es igual a la suma de las probabilidades de cada posible suceso multiplicado por el valor de dicho suceso.

La restricción 3.5 limita el echo de que no existan probabilidades de regreso en la red, matricialmente representa que la diagonal inferior sean ceros, lo que garantiza que la transición del nodo  $i$  al nodo  $j$  con  $j > i$  sea en una sola dirección. Mantiene la representación de una red dirigida.

Por último la restricción 3.6 establece que las variables de decisión  $q_{ij}$  sean no negativas en el rango de  $[0, 1]$ .

Dicha formulación es implementada en el sistema general de modelado algebraico **GAMS** [20], el cual es un sistema de alto nivel para la programación matemática y optimización.

### 3.2.3 GENERADOR DE INSTANCIAS

Se alimentará al modelo descrito por la ecuación 3.1 de la sección anterior con instancias generadas para tamaños de redes con 5, 10 y 15 nodos, estas redes se muestran en la figura 4.4 del siguiente capítulo.

Para cada uno de los tamaños de redes a experimentar, se crean 10 diferentes instancias (matrices de transición) con la misma estructura planteada en la tabla 3.2. Estas instancias se describen a continuación.

## RED DE 5 NODOS

Para este tamaño de red, se define una matriz de 5x5 dentro de un archivo excel, la diagonal inferior es llenada con puros ceros, ya que no existe probabilidad de regreso. Ahora para el nodo inicial (nodo 1) la probabilidad de transición al nodo siguiente (nodo 2) es definido por un número aleatorio entre 1 y 100. Para la transición siguiente, del mismo nodo se genera otro número aleatorio entre 1 y el valor obtenido para la transición anterior, así sucesivamente. Aplicando este algoritmo aseguramos que sea más probable transitar a nodos cercanos que a nodos mas lejanos. Del mismo modo generamos las probabilidades para el nodo 2, 3 y 4. Para el nodo 5, las probabilidades de transición hacia los demás nodos es cero, ya que es el nodo final.

Una vez teniendo estas probabilidades de transición definidas por números aleatorios entre 1 y 100, se suman estos números generados horizontalmente para cada nodo; es decir, de la matriz se realiza la suma por renglones. Con esto normalizamos la matriz.

De la matriz generada por los números aleatorios, se crea una nueva matriz la cuál contendrá las probabilidades asociadas a cada nodo de la red. Para cada valor definido en la matriz en cada uno de los renglones, se divide éstos entre la suma total por renglones. De esta manera garantizamos la propiedad markoviana definida por la restricción 3.2 del modelo matemático 3.1.

La matriz siguiente define el modo de crear las 10 instancias para este tamaño de red.

	A	B	C	D	E
1	0	rand(1,100)	rand(1,valor(B1))	rand(1,valor(c1))	rand(1,valor(D1))
2	0	0	rand(1,100)	rand(1,valor(C1))	rand(1,valor(D1))
3	0	0	0	rand(1,100)	rand(1,valor(D1))
4	0	0	0	0	rand(1,100)
5	0	0	0	0	0

	A	B	C	D	E
1	0	$\frac{rand(1,100)}{suma(A1:E1)}$	$\frac{rand(1,valor(B1))}{suma(A1:E1)}$	$\frac{rand(1,valor(c1))}{suma(A1:E1)}$	$\frac{rand(1,valor(D1))}{suma(A1:E1)}$
2	0	0	$\frac{rand(1,100)}{suma(A2:E2)}$	$\frac{rand(1,valor(C1))}{suma(A2:E2)}$	$\frac{rand(1,valor(D1))}{suma(A2:E2)}$
3	0	0	0	$\frac{rand(1,100)}{suma(A3:E3)}$	$\frac{rand(1,valor(D1))}{suma(A3:E3)}$
4	0	0	0	0	$\frac{rand(1,100)}{suma(A4:E4)}$
5	0	0	0	0	0

### RED DE 10 NODOS

Para este tamaño de red , se sigue una estructura similar a las instancias que se determinan para el caso de 5 nodos.

De igual manera, se define una matriz de 10x10 en un archivo excel con la diagonal inferior llena de ceros. Para el nodo inicial (nodo 1) se define su primera transición hacia el nodo siguiente (nodo2), fijando un número aleatorio entre 450 y 500. Para su siguiente transición se verifica si el número generado para la transición anterior (nodo2) es menor o igual a 1, si cumple la condición se genera un número aleatorio cualesquiera, si no se genera un número aleatorio entre 1 y el valor generado para la transición anterior dividido entre 3. Para la transición siguiente hacia el nodo 4, se sigue la misma lógica, se verifica si el número generado para la transición anterior (nodo3) es menor o igual a 1 , si cumple se establece un aleatorio cualesquiera y si no cumple fijamos un aleatorio entre 1 y el valor del número generado para la fase anterior dividido entre 2. Se repite el proceso para la transición siguiente hacia el nodo 5, se verifica si el número generado para la transición anterior (nodo4) es menor o igual a 1 , si cumple se establece un aleatorio cualesquiera y si no cumple fijamos un aleatorio entre 1 y el valor del número generado para la fase anterior dividido entre 2. Del mismo modo se determinan las transiciones correspondientes a los demás nodos hasta llegar al nodo final (nodo10). Siguiendo este algoritmo obtenemos las

probabilidades de transición para el nodo 1.

Para los nodos siguientes 2, 3, 4,..10 se generan sus transiciones correspondientes con el mismo procedimiento antes mencionado para el nodo 1.

Obsérvese que sólo para la segunda conexión o para la segunda transición del nodo 1 se divide entre el número 3, para los demás transiciones se divide siempre por el número 2, esta particularidad la presentan todos los nodos al generar sus probabilidades de transición con la característica que va aumentando este número para los nodos siguientes; esto es, que para el nodo 2 en su segunda transición se divide por 4, para el nodo 3 en la misma transición se divide por 5 y así sucesivamente.

Se normaliza la matriz para cada nodo, dividiendo el número asignado para cada transición entre la suma total de transiciones, esto para garantizar la propiedad markoviana.

#### RED DE 15 NODOS

Para este caso, la dinámica cambia al momento de definir las probabilidades para los nodos. Se define la matriz de 15x15 con la diagonal inferior llena de ceros.

Para el nodo 1 en su primera transición hacia el nodo2, generamos un número aleatorio entre 4900 y 5000, ahora para sus siguientes conexiones hacia los demás nodos 3,4,5..15, lo que hacemos es lo siguiente; dividimos el número generado por la conexión anterior por un número aleatorio entre un rango de 5 números. Estos números aleatorios estratégicos van cambiando y aumentando conforme a las conexiones siguientes, de tal manera, que el resultado sea menor que el número generado para la conexión anterior.

La siguiente tabla muestra la manera conforme se obtienen estas probabilidades:

	A	B	C	D	E	F	.	0
1	0	rand(4900,5000)	$\frac{B1}{rand(45,50)}$	$\frac{C1}{rand(45,50)}$	$\frac{D1}{rand(55,60)}$	$\frac{E1}{rand(55,60)}$	...	$\frac{N1}{rand(895/900)}$
2	0	0	rand(4900,5000)	$\frac{C2}{rand(45,50)}$	$\frac{D2}{rand(45,50)}$	$\frac{E2}{rand(55,60)}$	...	$\frac{N2}{rand(895,900)}$
3	0	0	0	rand(4900,5000)	$\frac{D3}{rand(39/43)}$	$\frac{E3}{rand(43,47)}$	...	$\frac{N3}{rand(895,900)}$
4	0	0	0	0	rand(4900,5000)	$\frac{E4}{rand(39/43)}$	...	$\frac{N4}{rand(895,900)}$
⋮								⋮
15	0	0	0	0	0	0	...	0

Por último, normalizamos cada renglón de la matriz dividiendo entre la suma de todas las valores generadas para cada nodo.

### 3.2.4 VALIDACIÓN DEL MODELO

Para poder comprobar que la formulación matemática propuesta para nuestro problema descrito por la ecuación 3.1 obtenga soluciones de buena calidad, se realiza una validación del modelo.

Para esto se desarrolla una simulación programada en código Python que ejecute para una instancia dada (matriz de transición), el total de transiciones desde el nodo inicial al nodo final.

Se realiza un experimento que contenga 10,000 réplicas de esta simulación, los resultados para cada una de éstas réplicas se van guardando en un archivo .txt . Tal archivo contiene una lista de resultados los cuáles representan el total de transiciones para cada una de las réplicas realizadas.

Este archivo, se importa al software estadístico R project con la finalidad de obtener un promedio de transiciones y así como su desviación estandar.

Entonces, dada una matriz de transición, podemos simular cuántas transiciones en promedio realiza dicha instancia ejecutando el experimento antes mencionado, de esta manera verificamos que el modelo matemático 3.1, proporciona soluciones de buena calidad.

## CAPÍTULO 4

# EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

En el presente capítulo se describe paso a paso como se llevó a cabo la experimentación para los dos tipos de problemas abordados en este trabajo. Además se presentan los resultados obtenidos de los experimentos realizados.

### 4.1 RED DIRIGIDA

Para este caso, se resuelve el problema de optimizar las probabilidades  $q_{ij}$  asociadas a los nodo de la red, para satisfacer la cantidad esperada  $\tau$  de movimientos o transiciones, modelando el problema bajo la teoría de procesos estocásticos de Markov.

En base a esto y al modelo propuesto en el capítulo anterior, se realizó la experimentación con 3 redes dirigidas de tamaño 5, 10 y 15 nodos. La figura 4.4 muestra las redes dirigidas con las que se trabajó.

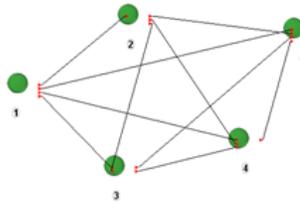


Figura 4.1: Red dirigida de 5 nodos

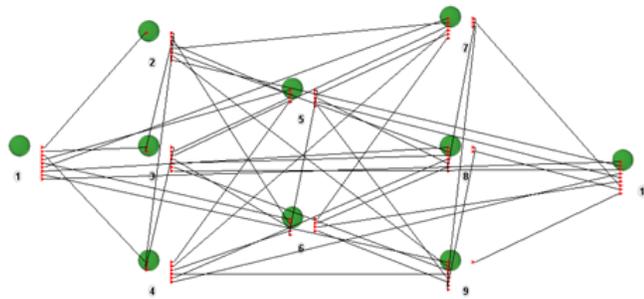


Figura 4.2: Red dirigida de 10 nodos

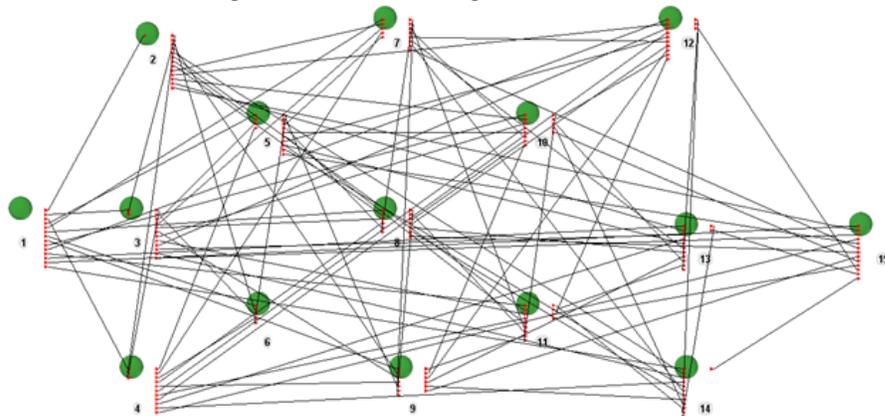


Figura 4.3: Red dirigida de 15 nodos

Figura 4.4: Redes dirigidas a experimentar

Dada una red dirigida de cualquier tamaño, obtenemos la matriz de transición que subyace a la topología de la red, con las características antes mencionadas en el capítulo anterior.

Para cada una de estas redes, se define su matriz de transición inicial, que especifican las probabilidades de transitar de un nodo a otro. Se elabora una matriz de transición para cada tamaño de red con el generador de instancias el cuál describimos

en la sección 3.2.3, las cuales mostramos a continuación.

$$M5 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M10 = \begin{bmatrix} 0 & 0.14 & 0.14 & 0.12 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.09 & 0.07 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.14 & 0.14 & 0.12 & 0.12 & 0.11 & 0.11 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0 & 0.19 & 0.17 & 0.14 & 0.13 & 0.13 & 0.13 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.21 & 0.16 & 0.15 & 0.13 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.22 & 0.2 & 0.19 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.36 & 0.25 & 0.23 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M15 = \begin{bmatrix} 0 & 0.11 & 0.11 & 0.1 & 0.1 & 0.09 & 0.08 & 0.08 & 0.07 & 0.06 & 0.05 & 0.05 & 0.04 & 0.04 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.1 & 0.08 & 0.07 & 0.07 & 0.05 & 0.05 & 0.02 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0.17 & 0.16 & 0.1 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.08 & 0.08 & 0.06 & 0.03 & 0.03 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.14 & 0.13 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.1 & 0.08 & 0.08 & 0.06 & 0.05 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0.14 & 0.13 & 0.13 & 0.12 & 0.1 & 0.09 & 0.06 & 0.05 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.28 & 0.15 & 0.13 & 0.11 & 0.1 & 0.09 & 0.08 & 0.04 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.21 & 0.18 & 0.16 & 0.15 & 0.13 & 0.08 & 0.06 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.28 & 0.21 & 0.21 & 0.11 & 0.1 & 0.08 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.25 & 0.18 & 0.15 & 0.09 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.29 & 0.17 & 0.11 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.34 & 0.31 & 0.3 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.36 & 0.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.54 & 0.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estas matrices de transición, contienen las probabilidades originales asociadas para cada nodo de las redes de 5, 10 y 15 nodos, respectivamente para las redes mostradas en la figura 4.4.

Se realizó una simulación desarrollada bajo la programación en código Python [32], en donde se simule el flujo o fases de transición entre los nodos para cada una de las redes de 5, 10 y 15 nodos, obteniendo como solución el total de pasos efectuados para llegar del nodo origen al nodo destino, los cuales están basados en su matriz de transición dada respectivamente.

Se realizó un experimento que contiene 10,000 réplicas de la simulación basada en Python y se obtuvo el promedio de los resultados generados por el experimento, dichos resultados representan el total de pasos efectuados durante cada réplica.

El promedio de transiciones que efectúa cada una de las redes con las que se experimentó, basadas en las matrices de transiciones originales mostradas anteriormente, se muestran en la siguiente tabla.



$$M15' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.103 & 0.103 & 0.103 & 0.103 & 0.103 & 0.093 & 0.073 & 0.063 & 0.063 & 0.043 & 0.043 & 0.013 & 0.094 \\ 0 & 0 & 0 & 0.17 & 0.16 & 0.1 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.08 & 0.08 & 0.06 & 0.03 & 0.03 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posteriormente se realiza la simulación desarrollada bajo la programación en código **python** [32], la cual nos permita verificar los resultados obtenidos por el modelo NLP. Se ejecuta el experimento con las 10,000 réplicas y se obtiene el promedio de los resultados generados por la simulación.

Se comparan los resultados obtenidos tanto por el modelo de optimización como el modelo de simulación contra los valores esperados deseados para cada red dirigida. La tabla siguiente muestra éstas comparaciones:

Matriz Original			Matriz Optimizada			
Nodos	Prom. Transiciones	Dstd	Nodos	Valor Esperado	Prom. Transiciones	Dstd
5	4	1.2	5	2	2.01	1.19
10	8	2.2	10	5	4.99	1.62
15	12	3.78	15	10	9.98	1.21

Tabla 4.2: Comparación de las matrices originales y optimizadas

Estas tablas muestran la comparación entre la matriz de transición original y la matriz de transición optimizada para el valor esperado de transiciones  $\tau$  y para una instancia dada para cada uno de los tamaños de redes a experimentar.

Se generan 10 instancias diferentes para cada una de las redes trabajadas y se realiza el mismo procedimiento antes mencionado; es decir, se obtiene el promedio de transiciones de las 10 instancias para cada tamaño de red y se resuelven mediante el modelo NLP para su optimización.

La tabla 4.3 muestran las 10 instancias trabajadas para cada uno de los tamaños de las redes, así como su respectivo promedio de transiciones para cada una de estas instancias.

Posteriormente se muestran las tablas de las matrices optimizadas, comparando el promedio de transiciones con el valor esperado  $\tau$ , éstas se muestran en la tabla 4.4.

Matriz Original			
Instancia	Nodos	Prom. Transiciones	Dstd
1	5	3.81	0.48
2	5	3.74	0.64
3	5	3.9	0.36
4	5	3.84	0.52
5	5	3.37	0.83
6	5	3.95	0.27
7	5	3.23	0.69
8	5	3.41	0.73
9	5	3.95	0.26
10	5	3.38	0.62

Matriz Original			
Instancia	Nodos	Prom. Transiciones	Dstd
1	10	7.79	1.16
2	10	8.08	1.14
3	10	7.5	1.16
4	10	7.91	1.15
5	10	7.02	1.38
6	10	8.23	1.1
7	10	7.5	1.16
8	10	8.19	1.18
9	10	8.2	1.01
10	10	8.07	1.09

Matriz Original			
Instancias	Nodos	Prom. Transiciones	Dstd
1	15	10.73	2.33
2	15	10.68	2.2
3	15	10.85	2.43
4	15	10.63	2.27
5	15	10.96	2.52
6	15	11.05	2.4
7	15	11.15	2.4
8	15	11.06	2.48
9	15	11.60	2.52
10	15	11.65	2.44

Tabla 4.3: Tablas con 10 instancias para cada tamaño de red

Cada una de las tablas contiene los datos para las 10 instancias mostradas de los tamaños de redes con las que se experimentó.

Todas las tablas contienen 4 columnas, la primera de ellas contiene el total de instancias trabajadas, la segunda columna muestra el tamaño de la red, la tercera de ellas muestra el promedio de las transiciones realizadas para esa instancias y la cuarta columna contienen la desviación estándar del promedio de transiciones.

Matriz Optimizada				
Inst.	Nodos	V. Esp.	Prom. Trans.	Dstd
1	5	2	1.91	1.23
2	5	2	1.98	1.25
3	5	2	2.02	1.28
4	5	2	1.99	1.26
5	5	2	1.98	1.22
6	5	2	2.07	1.32
7	5	2	1.98	1.08
8	5	2	2.05	1.26
9	5	2	2.01	1.29
10	5	2	2.01	1.26

Matriz Optimizada				
Inst.	Nodos	V. Esp.	Prom. Trans.	Dstd
1	10	5	5.03	1.35
2	10	5	5.07	1.20
3	10	5	5.04	1.11
4	10	5	5.04	1.26
5	10	5	5.02	1.20
6	10	5	4.95	1.27
7	10	5	5.03	1.20
8	10	5	5.03	1.47
9	10	5	4.92	1.47
10	10	5	5.04	1.18

Matriz Optimizada				
Inst.	Nodos	V. Esp.	Prom. Trans.	Dstd
1	15	8	8.30	1.60
2	15	8	8.00	1.50
3	15	8	8.02	1.58
4	15	8	8.03	1.55
5	15	8	8.10	1.77
6	15	8	7.93	1.75
7	15	8	8.00	1.70
8	15	8	8.09	1.81
9	15	8	8.04	1.94
10	15	8	8.00	1.95

Tabla 4.4: Tabla con 10 instancias optimizadas para cada red a experimentar

Estas otras tablas muestran también el contenido de cada una de las instancias ya optimizadas comparándolo con el valor esperado deseado para cada uno de los tamaños de redes.

Las tablas contienen 5 columnas, la primera enumera el total de instancias que se realizaron, la segunda de las columnas muestra el tamaño de la red trabajada, la tercera indica el valor esperado de transiciones para cada una de las instancias, este valor es al que se optimiza con el modelo de la ecuación 3.1, la cuarta columna señala el promedio de transiciones que realiza dicha instancia, ésta es comparada con la 3era columna ya que especifica el valor que se espera obtener y por último la 5ta columna, muestra la desviación estándar para el promedio de transiciones.

## 4.2 RED CONEXA

Para este caso utilizamos el modelo de simulación basado en la herramienta FLEXSIM, la cual emula juegos en competencia mediante la teoría de simulación mediante agentes y procesos de Markov.

### 4.2.1 ANÁLISIS DE LOS EQUIPOS

Cada una de los equipos descritos en la sección 3.1.2, presentan diferentes propiedades de juego, los cuales los hace diferenciar un equipo de otro.

La siguiente tabla muestra un resumen de las características o indicadores que presentan cada uno de los equipos implementados:

	Eq. Rojo	Eq. Azul	Eq. Blanco	Eq. Negro
Inteligencia	✓	✓	✓	✓
Jugador estrella		✓	✓	✓
Mejor portero			✓	✓
Matriz dinámica				✓

Tabla 4.5: Características de cada equipo

Estas características mostradas en la tabla anterior, se describen a continuación.

- Inteligencia : los jugadores tienen la capacidad de reconocer a sus compañeros así como a los jugadores del equipo contrario.
- Jugador estrella: que algún jugador del equipo sea un **crack**<sup>1</sup>, en nuestro caso el delantero central es quien se propone como jugador estrella.
- Mejor portero: que el portero del equipo tenga mejor habilidad para detener el balón.
- Matriz dinámica: que la matriz que define las probabilidad de transición para cada uno de los jugadores del equipo sea variante con el tiempo.

Se realiza una comparativa entre los juegos definidos en la tabla 3.1, a través del análisis de los enfrentamientos entre cada uno de ellos. En base a la tabla anterior y las propiedades y características de cada uno de los equipos, los resultados que se pretenden obtener son:

El equipo con mejor desempeño será el equipo Negro, ya que cuenta con todas las características que se implementaron y el equipo con un desempeño bajo será el equipo Rojo, porque sólo cuenta con una de las características mostradas en la tabla anterior, además será el equipo con más goles en contra. En base a esto y a las características de cada uno de los equipos se enlistan el orden de los equipos siendo el número 1 el mejor equipo y el número 5 el peor de ellos.

1. Equipo Negro
2. Equipo Blanco
3. Equipo Azul
4. Equipo Rojo

---

<sup>1</sup>Jugador de extraordinaria calidad

### 4.2.2 ANÁLISIS DE LOS ENCUENTROS

Como otra forma de analizar y comparar a cada uno de los equipos, se realizaron los encuentros entre éstos con la finalidad de poder establecer una mejor comparativa entre ellos.

Dentro del software de simulación FLEXSIM, se puede definir experimentos que contengan cientos de réplicas de cada simulación programada. Para nuestro caso, se realizaron experimentos que contengan 1000 réplicas de cada simulación, cada una de éstas representa un enfrentamiento de 2 equipos. El tiempo programado para cada simulación es de 5600 segundos que equivalen a 1 hora y media de juego.

De las 1000 réplicas realizadas, las primeras 500 uno de los equipos inicia cada juego, para las otras 500 el equipo contrario es quién inicia el partido. Al dar comienzo cada simulación, ésta se inicia en la media cancha con el delantero central de cada equipo.

Para cada uno de los encuentros definidos por la tabla 3.1 que contiene el roll de juegos, se define un experimento con 1000 réplicas. En cada réplica de los experimentos se guarda la cantidad de goles anotados por equipo en cada una de las 1000 simulaciones. De esta manera se mide el desempeño de cada equipo. El equipo ganador es aquél que anote más goles.

Una de las propiedades que tiene el software FLEXSIM, es el modo de visualización y el manejo de los datos para exportar a un archivo Excel. Para cada experimento realizado, abarca varias maneras de visualización de los resultados.

La siguiente imagen muestra una de las maneras en las que FLEXSIM presenta los resultados para un experimento.

Goles Rojos Data Table Remove Chart

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
Scenario 1	0	2	1	0	0	2	1	2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	2	2	0	2	1	0	1	1	0	0	3

Add Chart

Figura 4.5: Goles anotados para cada réplica

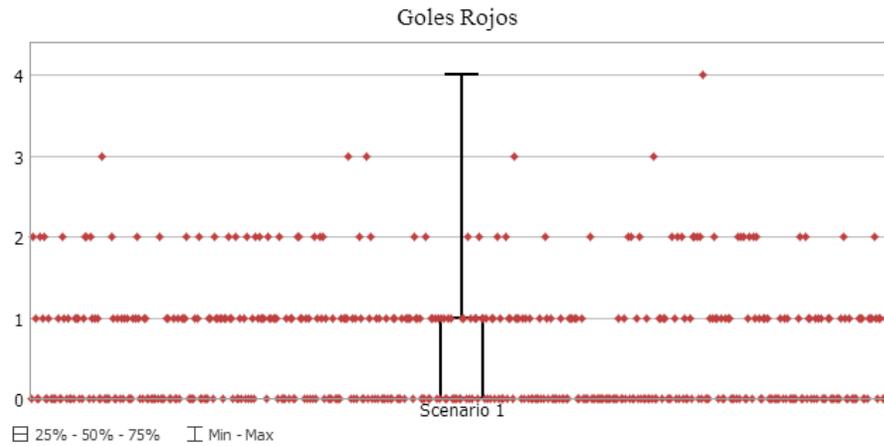


Figura 4.6: Gráfica de los goles anotados por réplica

En la figura 4.5, se muestran los goles anotados para el equipo Rojo en cada una de las réplicas realizadas. El escenario 1 corresponde a las 1000 réplicas del experimento (sólo se muestran 42 de ellas) y se exponen en orden numérico, debajo de cada réplica indica el total de goles que efectúa el equipo en dicha réplica.

La figura 4.6 denota la misma información que en la imagen de los goles anotados, sólo que se exponen los resultados para esta opción en un modo gráfico. El *eje x* representa las réplicas ejecutadas por el experimento y el *eje y* representa los goles anotados.

El formato que se utilizó para la manipulación de los datos obtenidos para cada una de las réplicas definidas por el experimento, fue mediante la configuración de los datos como los que se presenta en el figura 4.5. Este formato se exporta a un archivo Excel para su análisis. Así para cada experimento ejecutado, se obtiene los resultados con los goles obtenidos para cada uno de los equipos confrontados.

### 4.2.3 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

El objetivo de este trabajo es poder comparar dos organizaciones o equipos de trabajo, que puedan tener la misma estructura así como las cualidades de interacción definidas para los equipos descritos en el presente trabajo.

Para lograr una comparación entre los equipos y poder dar un mejor análisis de los mismos, se realizarán pruebas estadísticas tales como: **Diferencias de grupo**, **Diferencias de Medias**, **Pruebas de Hipótesis**, **Prueba de Normalidad e Independencia**, véase [10], [8], [9], [11].

Para cada enfrentamiento por equipos, se obtiene la estadística de cuántos partidos fueron ganados, cuántos de ellos fueron perdidos y cuántos empatados para las 1000 simulaciones realizadas por el experimento. Esto se hace para cada instancia del sistema, como se definió en el capítulo 3 en la sección 3.1.3 generador de instancias.

La siguiente tabla muestra la forma en como se obtiene las estadística de cada experimento.

<b>Partidos</b>	<b>PG Eq.Azul</b>	<b>PG Eq.Blanco</b>	<b>PE</b>	<b>Total</b>
Primeros 500	153	194	153	500
Segundos 500	138	212	150	500
Total	291	406	303	1000
Porcentajes	29.1 %	40.6 %	30.3 %	100 %

**PG-** Partidos Ganados ; **PE-** Partidos Empatados

Tabla 4.6: Estadísticas de cada experimento

La tabla detalla las estadísticas obtenidas del experimento para el juego entre el equipo Azul y el equipo Blanco, ésta se divide en dos partes, para las primeras 500 simulaciones se especifica cuántas de esas réplicas ganó cada equipo y cuántas simulaciones fueron empate. De igual manera, se muestra la misma estadística para las segundas 500 simulaciones y para el total de réplicas realizadas en el experimento.

Lo que se puede observar en la tabla anterior 4.6, que para el encuentro entre Azules *vs* Blancos, el 29.1% de las veces que se juega el partido lo ganará el equipo Azul, el 40.6% de las veces lo ganará el equipo Blanco y el 30.3% de los encuentros serán empate. Por tanto, podemos decir que el equipo Blanco tiene una mayor estrategia de juego que el equipo Azul.

Para poder sostener el echo de que un equipo sea mejor que otro, realizamos la prueba estadística de *Diferencia de Medias* para dos poblaciones. Las muestras para cada una de las poblaciones serán los juegos ganados por equipo de un experimento. Se realizarán 20 experimentos de 1000 réplicas cada una, variando las tablas de probabilidades de transición para los jugadores (nodos) de cada equipo en cada uno de los experimentos. Esto se ejecuta para cada uno de los enfrentamientos definidos en la tabla 3.1 rol de juegos. Así, cada enfrentamiento por equipos se efectuará 20 veces con 1000 réplicas de juegos cada uno. La siguiente tabla contiene las muestras de cada población para los juegos realizados.

R vs A		R vs B		R vs N		A vs B		A vs N		B vs N	
144	559	74	757	122	377	262	423	233	447	442	203
46	713	58	672	87	651	296	391	357	300	395	233
92	596	121	541	59	597	161	613	269	357	368	214
92	643	44	740	95	565	213	467	342	375	296	290
80	682	79	637	128	427	233	443	129	562	358	263
110	621	39	650	63	491	186	499	150	578	414	251
132	580	38	771	99	554	160	599	205	492	396	196
183	449	92	521	45	461	220	507	190	505	221	359
119	588	81	612	61	546	232	418	220	451	337	266
136	585	61	698	76	643	261	373	239	385	262	314
64	751	91	608	108	549	191	530	205	520	360	243
98	653	146	466	56	702	246	495	222	468	254	383
109	562	42	763	72	617	127	670	225	471	277	277
128	613	65	656	83	663	183	549	453	141	291	335
127	613	39	758	72	581	137	611	209	452	301	364
89	571	57	688	62	670	160	544	215	550	353	320
116	584	33	725	124	433	235	396	289	410	246	393
84	650	40	729	59	662	204	500	190	487	298	336
99	642	78	697	157	431	169	532	317	323	227	383
111	642	68	661	89	591	291	406	220	448	200	367

R- Eq. Rojo ; A- Eq. Azul ; B- Eq. Blanco ; N- Eq. Negro

Tabla 4.7: Resultados de juegos ganados para los 20 experimentos en cada enfrentamiento.

La tabla contiene los 6 juegos definidos en la sección 3.1.2 rol de juegos, en ella se observan las estadísticas de los juegos realizados por los 20 experimentos, cada uno con 1000 réplicas y tablas de probabilidades diferentes. Los datos observados en la tabla representan los juegos ganados de cada equipo para cada uno de los experimentos.

Realizando 20 experimentos para cada enfrentamiento variando los parámetros (tablas de probabilidad) de entrada al sistema, se considera un tamaño de muestra aceptable, para efectuar las pruebas estadísticas de *diferencia de medias*.

Esta prueba de *diferencia de medias* validará estadísticamente, el hecho de que un equipo sea mejor que otro o que un equipo tenga mayor desempeño en cuanto a mayor cantidad de goles se realicen, basándose en las propiedades y estrategias de juego para cada equipo.

Cada uno de los enfrentamientos se someterá a la *Prueba t-student para la diferencia de medias de dos poblaciones independientes*. Esta prueba se utiliza para decidir si las medias de dos poblaciones son iguales, ver [49]. Para esto se requiere de dos muestras independientes una de la otra. Las hipótesis que sostiene dicha prueba son:

Hipótesis nula: las dos poblaciones tienen medias iguales.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Hipótesis alternativa: las medias son diferentes para cada población.

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

Un contraste de hipótesis en estadística es el *valor p* o *p-value* por sus siglas en inglés y es la probabilidad de obtener un resultado al menos tan extremo como el que realmente se ha obtenido para el valor estadístico calculado, suponiendo que la hipótesis nula ( $H_0$ ) es cierta [24].

La interpretación de este contraste es que se rechaza la hipótesis nula, sí el valor  $p$  asociado al resultado observado, es igual o menor que el nivel de significancia  $\alpha$  establecido, típicamente  $\alpha = 0.05$ .

Las pruebas de *diferencia de medias* para cada grupo o enfrentamiento de la tabla 4.7 se muestran a continuación:

Eq.Rojo vs Eq.Azul	Eq.Rojo vs Eq.Blanco
<p>Welch Two Sample t-test</p> <p>data: Eq. Rojo and Eq. Azul</p> <p>t = -32.1283, df = 27.17, p-value &lt; 2.2e-16</p> <p>alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0</p> <p>95 percent confidence interval:</p> <p>-539.263 -474.537</p> <p>sample estimates:</p> <p>mean of x mean of y</p> <p>107.95 614.85</p>	<p>Welch Two Sample t-test</p> <p>data: Eq. Rojo and Eq. Blanco</p> <p>t = -29.5411, df = 23.566, p-value &lt; 2.2e-16</p> <p>alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0</p> <p>95 percent confidence interval:</p> <p>-632.4377 -549.7623</p> <p>sample estimates:</p> <p>mean of x mean of y</p> <p>67.3 658.4</p>
Eq.Rojo vs Eq.Negro	Eq.Azul vs Eq.Blanco
<p>Welch Two Sample t-test</p> <p>data: Eq. Rojo and Eq. Negro</p> <p>t = -21.2344, df = 22.597, p-value &lt; 2.2e-16</p> <p>alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0</p> <p>95 percent confidence interval:</p> <p>-520.991 -428.409</p> <p>sample estimates:</p> <p>mean of x mean of y</p> <p>85.85 560.55</p>	<p>Welch Two Sample t-test</p> <p>data: Eq. Azul and Eq. Blanco</p> <p>t = -13.3232, df = 30.47, p-value = 3.023e-14</p> <p>alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0</p> <p>95 percent confidence interval:</p> <p>-334.3668 -245.5332</p> <p>sample estimates:</p> <p>mean of x mean of y</p> <p>208.35 498.30</p>
Eq.Azul vs Eq.Negro	Eq.Blanco vs Eq.Negro
<p>Welch Two Sample t-test</p> <p>data: Eq. Azul and Eq. Negro</p> <p>t = -6.7243, df = 34.933, p-value = 8.776e-08</p> <p>alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0</p> <p>95 percent confidence interval:</p> <p>-250.1651 -134.1349</p> <p>sample estimates:</p> <p>mean of x mean of y</p> <p>243.95 436.10</p>	<p>Welch Two Sample t-test</p> <p>data: Eq. Blanco and Eq. Negro</p> <p>t = 0.7234, df = 37.781, p-value = 0.4739</p> <p>alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0</p> <p>95 percent confidence interval:</p> <p>-27.52405 58.12405</p> <p>sample estimates:</p> <p>mean of x mean of y</p> <p>314.8 299.5</p>

Tabla 4.8: Prueba de diferencia de medias para cada uno de los juegos

La tabla contiene las pruebas de *diferencia de medias* para cada uno de los juegos definidos. En la prueba para el juego entre el equipo Rojo *vs* equipo Azul, se observa que el contraste estadístico para el valor  $p$  es de  $2.2e^{-16}$ , lo que indica que la prueba rechaza la hipótesis nula de que las medias para estos equipos sean iguales. Dicho de otro modo, existe una diferencia de juego entre el equipos Rojo y equipo Azul, lo que se puede observar en las medias de cada población para la cantidad de goles anotados. La media para el equipo Rojo es de **107.95** goles, mientras que la media para el equipo Azul es de **614.85** goles. Por lo tanto, el equipo Azul es mejor que el Equipo Rojo.

Del mismo modo, se verifica la diferencia de grupos o equipos para los demás juegos realizados, basándonos en el valor  $p$  para las demás pruebas. Para la mayoría de los juegos se tiene un valor de contraste de hipótesis cercano al 0, por lo que se rechaza la hipótesis nula en estos casos. Sólo en el juego del equipo Blanco *vs* equipo Negro, se estima un valor  $p$  de 0.4739, valor que se encuentra por encima del nivel de significancia ( $\alpha = 0.05$ ). Para este caso entre el equipo Blanco y el equipo Negro, la prueba no rechaza la hipótesis nula, por lo que las medias entre estos dos equipos son iguales. Por lo tanto, estos equipos son estadísticamente equivalentes.

Lo que indican las pruebas mostradas en la tabla 4.8, es que todos los equipos son diferentes, ya que las medias de los juegos ganados por equipos son totalmente distintos, sólo para el caso del enfrentamiento del equipo Blanco contra el equipo Negro, las medias para éstos son estadísticamente iguales.

Uno de los supuestos que existen dentro de la prueba de *diferencia de medias*, es que las dos poblaciones son independientes, es decir, que no estén correlacionadas una de la otra. Otra de las premisas, es que las muestras presentan un comportamiento bajo una distribución normal.

Para corroborar estos supuestos, se realizaron la prueba de **Normalidad** y la prueba de **Independencia**.

## PRUEBA DE INDEPENDENCIA

Esta prueba se utiliza para demostrar de manera más formal la relación existente entre dos variables. En otras palabras si la variable  $x$  de una población es independiente de otra variable  $y$ .

Para probar este supuesto de independencia entre los equipos confrontados para cada uno de los juegos realizados, se efectuará la **prueba de Pearson** para la correlación entre dos variables. El coeficiente de correlación de *Pearson* se define como la covarianza de las dos variables, dividido por el producto de sus desviaciones estándar. Esta medida de correlación lineal entre las variables, está definido en un rango de  $-1$  a  $1$ , donde  $1$  se define como una correlación positiva entre las variables,  $0$  como no correlación y  $-1$  como una correlación negativa [29], [42].

La prueba de *Pearson* también realiza un contraste de hipótesis, siendo la hipótesis nula ( $H_0$ ) que las variables son dependientes, contra la hipótesis alternativa ( $H_1$ ) que las variables son independientes. Para mayor información sobre la prueba realizada por el software estadístico R ver [48]. Las pruebas para cada uno de los juegos, se muestran en la tabla 4.9.

Estas tablas muestran las pruebas de independencia para los equipos de cada juego. Para nuestro caso, la variable  $x$  representa la serie de datos de los partidos ganados para un equipo y la variable  $y$  representa la serie de datos para el equipo contrario.

En la tabla se observa la prueba realizada para el juego entre el equipo Rojo *vs* equipo Azul, en donde se obtuvo un coeficiente de *Pearson* del  $-0.8875$  y un valor  $p$  del  $1.388e^{-06}$ , el cuál es un valor cercano a  $0$ , por lo que se rechaza la hipótesis nula  $H_0$  de que las dos variables son dependientes. Por lo tanto, las dos muestras de goles para cada equipo para éste enfrentamiento son independientes.

**Eq.Rojo vs Eq.Azul**

```

Pearson's product-moment correlation

data: Rojos and Azul
t = -7.0589, df = 18, p-value = 1.388e-06
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.9422436 -0.6679100
sample estimates:
cor
-0.8571

```

**Eq.Rojo vs Eq.Blanco**

```

Pearson's product-moment correlation

data: Rojos and Blancos
t = -8.5099, df = 18, p-value = 1.005e-07
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.9580481 -0.7490855
sample estimates:
cor
-0.89494

```

**Eq.Rojo vs Eq.Negro**

```

Pearson's product-moment correlation

data: Rojos and Negro
t = -3.3393, df = 18, p-value = 0.00365
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.8330183 -0.2422804
sample estimates:
cor
-0.61849

```

**Eq.Azul vs Eq.Blanco**

```

Pearson's product-moment correlation

data: Azul and Blanco
t = -9.6944, df = 18, p-value = 1.437e-08
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.9667234 -0.7964811
sample estimates:
cor
-0.91611

```

**Eq.Azul vs Eq.Negro**

```

Pearson's product-moment correlation

data: Azul and Negro
t = -12.1713, df = 18, p-value = 4.015e-10
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.9780906 -0.8619193
sample estimates:
cor
-0.94428

```

**Eq.Blanco vs Eq.Negro**

```

Pearson's product-moment correlation

data: Blanco and Negro
t = -7.4827, df = 18, p-value = 6.265e-07
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.9476308 -0.6948657
sample estimates:
cor
-0.8699

```

Tabla 4.9: Prueba de Pearson para independencia de variables

Del mismo modo, se verifica el valor  $p$  asociado a las pruebas de hipótesis de independencia entre las variables, para los demás juegos realizados. Analizando dichos valores correspondientes a las pruebas, se observa que en todos los casos se obtiene un valor  $p$  cercano al cero, por lo que se concluye que los datos obtenidos por los experimentos para cada uno de los equipos son independientes uno del otro.

Para corroborar estas pruebas, se determinaron los gráficos correspondientes a la correlación cruzada entre cada una de las variables, éstas se muestran a continuación.

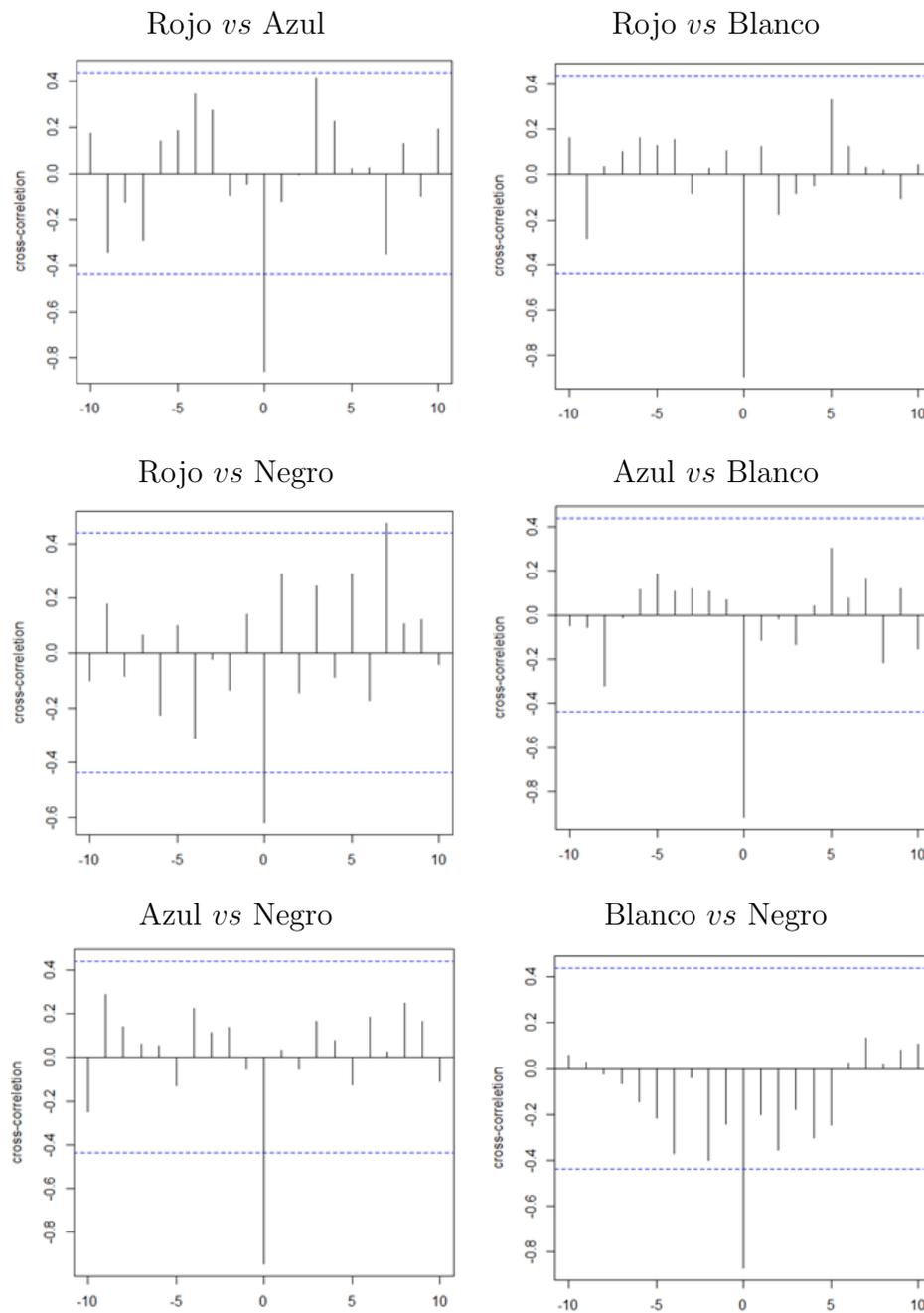


Tabla 4.10: Gráficas de correlación cruzada por juego

La tabla contiene las gráficas de correlación cruzada para cada enfrentamiento, éstas también muestran si existe correlación entre los datos de cada equipo.

Las líneas punteadas de las gráficas representan el nivel de significancia para las pruebas o indican el umbral para determinar si existe correlación o no entre los datos. Este umbral depende de la cantidad de muestra para cada población. Si las barras para cada gráfica sobrepasa este umbral, significa que existe correlación para ese paso de retraso (lag) de la función.

En las gráficas se observan que para todos los juegos, las barras no sobrepasan el nivel de significancia permitido, sólo para la barra de las gráficas en la posición 0 sobrepasa este umbral, la explicación nace de las réplicas realizadas para cada juego en cada uno de los 20 experimentos. Si recordamos los datos registrados para cada juego, se obtuvieron de realizar 20 experimentos de encuentros para cada par de equipos con 1000 réplicas cada uno, entonces cada experimento, representa 1000 simulaciones de los encuentros con los mismos parámetros, éstos van cambiando al realizar otro experimento. Ésto explica la correlación entre los juegos por pares; es decir, nos indica que sí existirá una correlación entre cada par de juegos realizados por el mismo experimento, dado que son simulaciones con los parámetros idénticos.

#### PRUEBA DE NORMALIDAD

Se efectúa la prueba para corroborar el supuesto de normalidad, la cual se puede realizar tanto como un estudio gráfico como un estudio analítico.

Se verifica este supuesto utilizando la *prueba de Shapiro-Wilk*. Esta prueba estadística realiza un contraste de normalidad para un conjunto de datos. Se considera como uno de las pruebas más potentes para cuando la muestra es pequeña ( $N < 30$ ) [45],[44]. Las hipótesis que plantea dicha prueba son:

Hipótesis nula: la muestra proviene de una población normalmente distribuida.

Hipótesis alternativa: la muestra no proviene de una población normalmente distribuida.

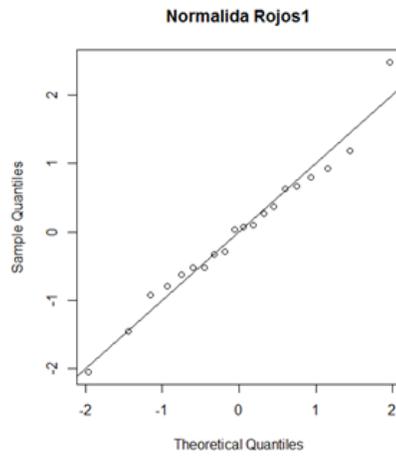
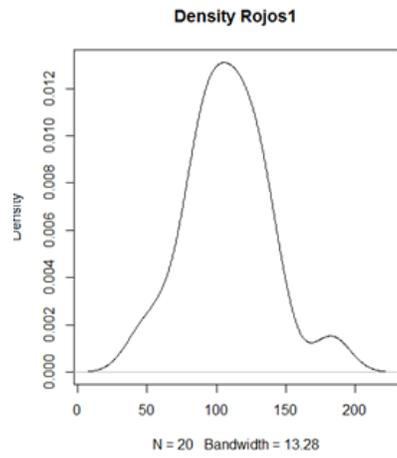
El análisis para esta prueba se determinó mediante un estudio gráfico como un estudio analítico a través del contraste de *Shapiro-Wilk*, las cuales se presentan en forma separada para cada uno de los equipos.

La tabla 4.11 presenta las pruebas de normalidad de los 3 juegos a los que se enfrentó el equipo Rojo. Éstas contiene 2 gráficas y la prueba de *Shapiro-Wilk* para cada juego. La primera, es una gráfica de densidad, la cual muestra como los datos se ajustan a una distribución gaussiana, si los datos son normales, ésta presenta una forma acampanada y simétrica. La segunda es una gráfica de probabilidad normal, donde se comparan la probabilidad acumulada observada contra la probabilidad acumulada esperada, si los datos se acomodan sobre la línea recta, se dice que los datos son normales. Por último, se expone la prueba realizada con el software estadístico R-project, en ésta se evidencia el valor estadístico  $W$  y el valor  $p$  para la prueba de hipótesis.

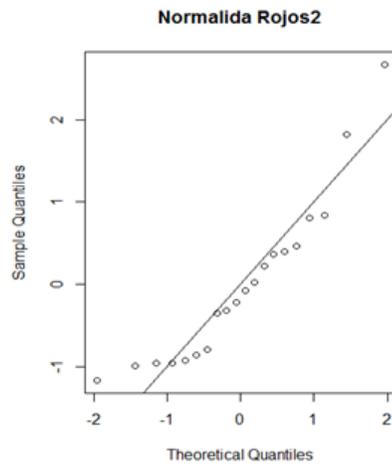
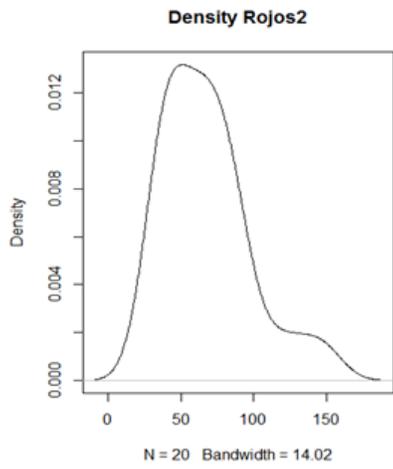
Para el primer juego del equipo Rojo, se observa que cumplen las condiciones mencionadas, los datos se ajustan a una distribución gaussiana, la gráfica de probabilidad normal se acoplan a la recta y el valor  $p$  es mayor al nivel de confianza ( $\alpha = 0.05$ ). Por lo tanto los datos obtenidos del primer juego para el equipo Rojo, cumplen los supuestos de normalidad.

Para el segundo juego, las gráficas pueden denotar que cumplen las condiciones, pero al efectuar la prueba de *Shapiro-Wilk*, observamos que el valor  $p$  es menor que el nivel de confianza permitido, por lo que se rechaza la hipótesis nula de que los datos son normales. Por lo tanto, para este juego no cumplen los supuesto de normalidad.

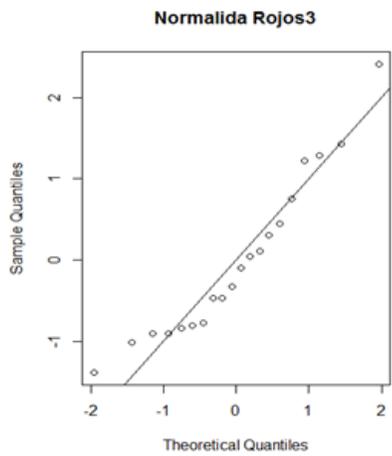
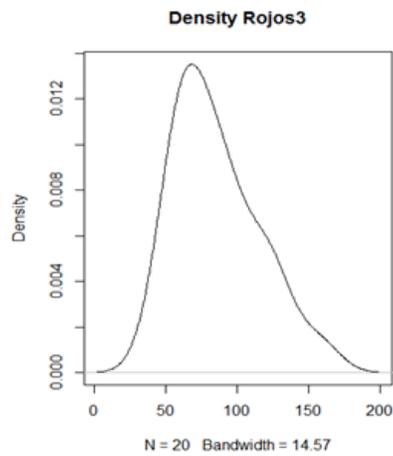
El tercer juego de este equipo, la gráfica de densidad sigue una distribución gaussiana, la gráfica de probabilidad normal se ajusta a la recta y el valor de  $p$  muestra que se acepta la hipótesis nula, por lo tanto los datos son normales.



Shapiro-Wilk normality test  
 data: Rojos1  
 W = 0.9798, p-value = 0.932



Shapiro-Wilk normality test  
 data: Rojo2  
 W = 0.8938, p-value = 0.03164



Shapiro-Wilk normality test  
 data: Rojos3  
 W = 0.9284, p-value = 0.1435

Tabla 4.11: Pruebas de normalidad para el equipo Rojo

Las gráficas y pruebas para los demás equipos se detalla a continuación.

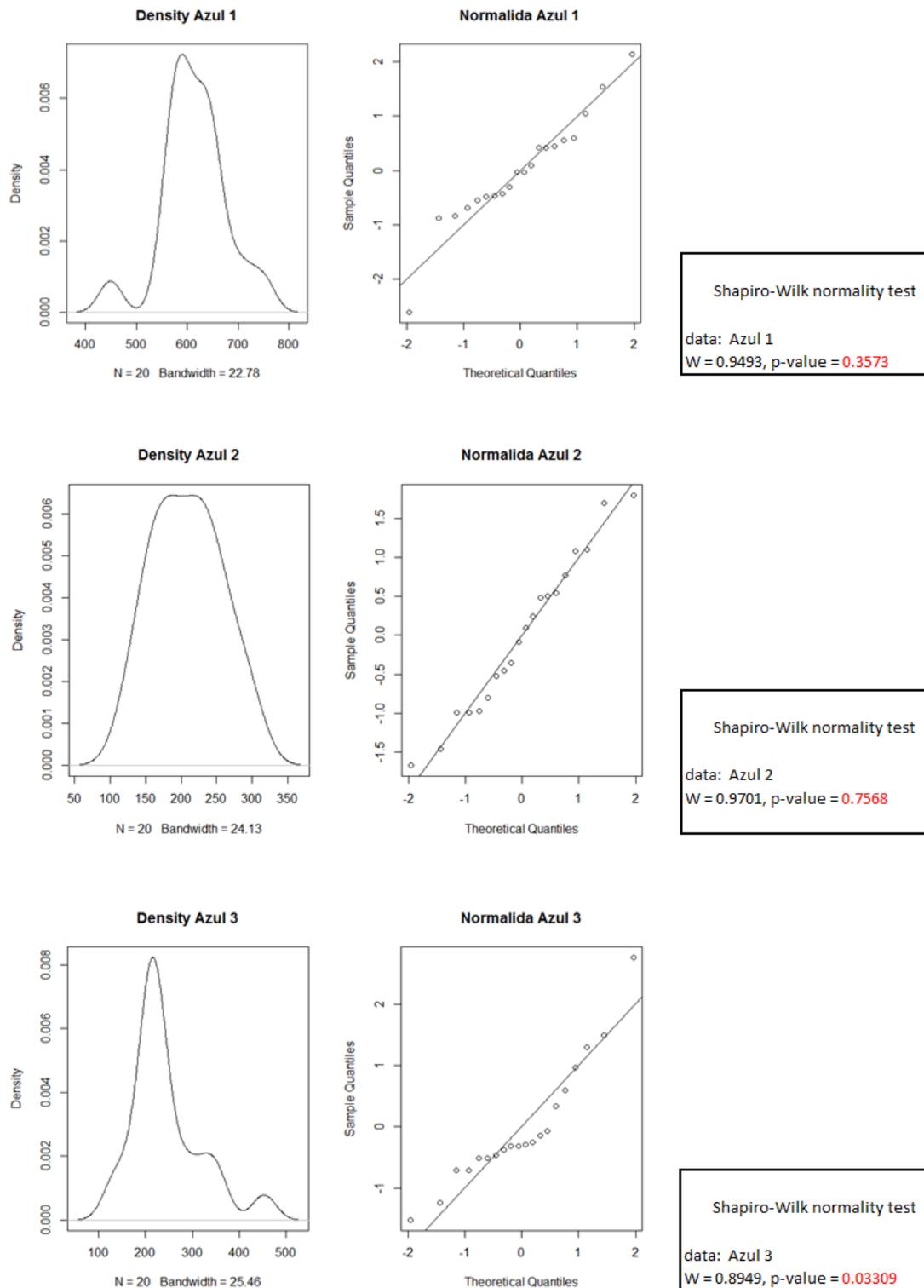


Tabla 4.12: Pruebas de normalidad para el equipo Azul

Para el equipo azul, observamos que las gráficas de densidad para el 1er juego, no se ajusta a la perfección a una distribución gaussiana, sin embargo, la gráfica de probabilidad normal se adapta a la recta y el valor de  $p$  para la prueba de *Shapiro-Wilk*, indica que se acepta la hipótesis de que los datos son normales.

En el segundo juego, tanto la gráfica de densidad como la gráfica de probabilidad normal, ajustan a una distribución gaussiana, para la prueba se concluye que se acepta la hipótesis nula, ya que el valor estimado para el estadístico es mayor al nivel de confianza. Por lo tanto, los datos para el 2do juego de este equipo son normales.

Para el tercer juego, la gráfica de densidad no sigue una distribución gaussiana, ya que no tiene forma de campana y no es simétrica, en el gráfico de la probabilidad normal, se observa que existen puntos atípicos para los cuales no se ajusta a la recta y en la prueba, el valor de  $p$  es menor que el nivel de significancia, por lo que se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, estos datos no cumplen los supuestos de normalidad.

La tabla 4.13 contiene las pruebas y gráficas de los tres juegos para los que se enfrentó el equipo Blanco.

Se observa que para el primer juego del equipo, la gráficas de densidad no es simétrica pero mantiene la forma acampanada. Para las 2das gráficas de probabilidad normal de los tres juegos, los datos se ajustan a la recta, éstas no contienen valores atípicos de los cuáles podamos desconfiar de los supuestos de normalidad.

Para las pruebas de *Sahpiro-Wilk*, el valor estadístico  $p$  sobrepasa el nivel de confianza permitido, por lo que se acepta la hipótesis nula para los 3 casos. Por lo tanto, los datos obtenidos para los 3 juegos de este equipo, provienen de una distribución normal.

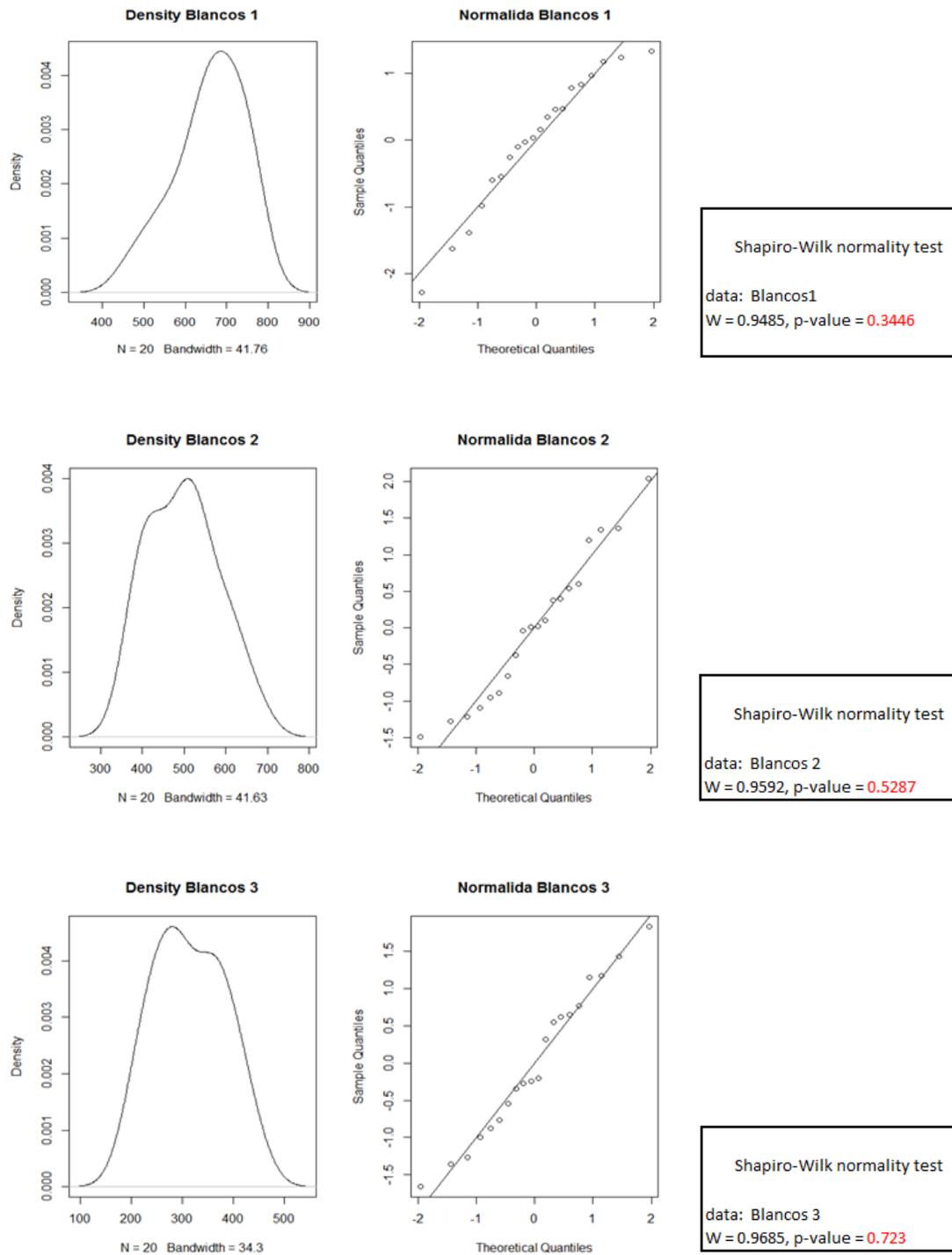


Tabla 4.13: Pruebas de normalidad para el equipo Blanco

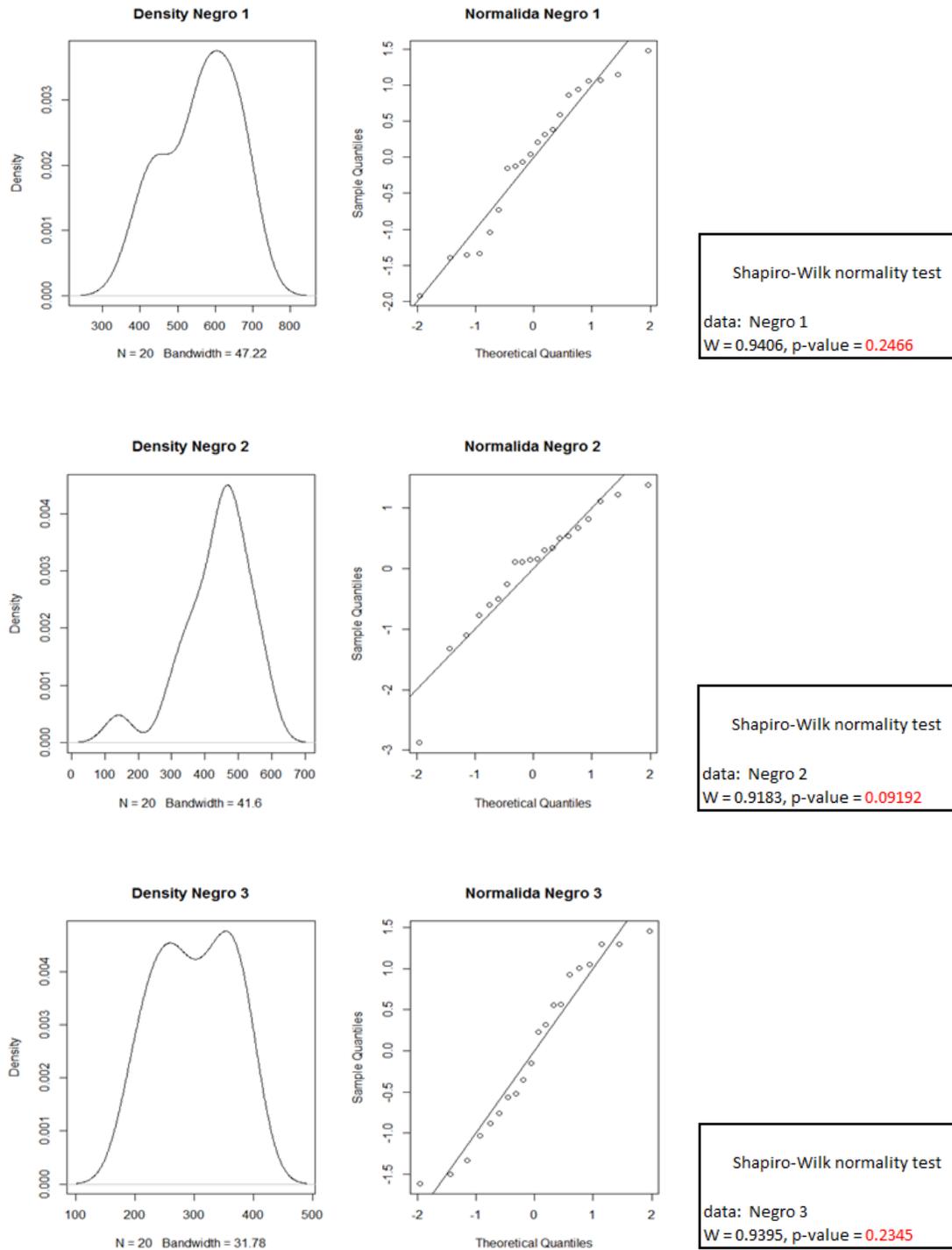


Tabla 4.14: Pruebas de normalidad para el equipo Negro

La tabla anterior incluye las gráficas y las pruebas de normalidad para el equipo Negro de cada uno de los juegos en los que participó.

De las gráficas de densidad para el equipo, se observa que no se ajustan muy bien a una distribución gaussiana para los 3 juegos realizados.

De las gráficas de probabilidad normal, se nota que en los tres juegos en los que participó el equipo Negro, los datos se acoplan muy bien a la recta sin incluir valores atípicos en ellas, además, las pruebas corroboran el supuesto de normalidad, ya que para los tres casos, se obtiene en el estadístico para el valor  $p$  un número mayor al nivel de significancia, permitiendo que las pruebas acepten la hipótesis de que los datos son normales. Por lo tanto, los datos obtenidos por los experimentos para el total de juegos efectuados, derivan de una distribución gaussiana.

## CAPÍTULO 5

# CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

Dentro de los objetivos del trabajo, se pretendía contar con una herramienta de simulación bajo el entorno FLEXSIM, este modelo emularía sistemas colectivos para los cuales se pueda conocer las características propias de cada uno de los grupos o equipos a estudiar.

El modelo que se obtuvo y el cual esta basada esta tesis, analiza el comportamiento de un grupo que se ve influenciado por la competitividad de un segundo. También se cuenta con las estadísticas pertinentes para cada simulación que se realice.

Se simularon 4 equipos de trabajo en un entorno de juegos deportivos, cada uno de éstos tienen características distintas uno del otro, éstas se basan en la probabilidad de interacción de los jugador para cada equipo. Se realizaron juegos de competencia por pares, teniendo un total de 6 sistemas colectivos a estudiar.

El estudio estadístico que se llevo a cabo para la diferencia de los grupos simulados, revela qué grupo es mejor que otro, si se llega a competir entre ellos. Los resultados alcanzados por el análisis fueron satisfactorios para la mayoría de de los equipos.

Las pruebas de *diferencia de medias* explican que equipos se consideran estadísticamente iguales o estadísticamente diferentes. Las conclusiones para esta prueba, manifiestan que sólo los equipos Blanco y Negro son estadísticamente iguales independientemente su estrategia de juego. Para los supuesto que presenta esta prueba,

se deriva de las *pruebas de independencia* para cada uno de los grupos, manifestando que los datos obtenidos por los experimentos, provienen de muestras totalmente independientes. Para el supuesto de normalidad, efectuando la *prueba de Shapiro-Wilk*, se concluye que sólo las muestras para el equipos Rojo y Azul en sus 2do y 3er juego respectivamente, no provienen de una distribución gaussiana, en tales casos, sólo podemos hacer referencia a las medias obtenidas analíticamente. Para los demás juegos de los 4 equipos, cumplen satisfactoriamente estos supuestos.

Para el caso del modelo de optimización, se comprueba que la formulación matemática propuesta bajo la metodología de teoría de Markov y como un problema de programación no lineal, se obtienen soluciones de muy buena calidad y a un tiempo de cómputo considerable, para los tamaños de redes en los que se experimentó. Se verifican los resultados obtenidos mediante la simulación programada en Python, los cuales logran un porcentaje de error bajo, siendo el promedio de transiciones para cada tamaño de red muy cercanos al valor de transiciones optimizado mediante la herramienta GAMS. En las tablas 4.3 y 4.4, se corroboran los valores obtenidos para el valor esperado de transiciones mediante la simulación para cada instancia y el valor a optimizar, se observa que estas dos cantidades son muy cercanas, cumpliendo el objetivo del modelo.

La complejidad de optimizar las probabilidades  $q_{ij}$  asociadas a la matriz de transición de un red dirigida, aumenta conforme crece el tamaño de la red, razón por la cuál, el modelo puede mejorarse implementando heurísticas, que pueden proporcionar soluciones de buena calidad para tamaños de red superior al de 15 nodos.

En general, en este trabajo de investigación se lograron los objetivos pertinentes que se deseaban obtener, tanto para el modelo de simulación en FLEXSIM, así como el problema de optimización para el caso de una red dirigida.

---

Para esta tesis se deja como trabajo futuro los siguientes puntos a seguir:

- Experimentar con el modelo de simulación utilizando datos existentes de probabilidades de transición, para equipos de futbol con los que se cuente con dicha información.
- Extender el análisis estadístico para el enfrentamientos de los equipos, utilizando pruebas no paramétricas que apoyen los resultados obtenidos.
- Implementar una heurística para la optimización de redes de tamaño grande (mayores a 15 nodos).
- Integrar el modelo de optimización al caso del modelo de simulación en FLEXSIM.

±±

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] AHUJA, R. K., T. L. MAGNANTI y J. B. ORLIN, «Network flows: theory, algorithms, and applications», , 1993.
- [2] ALBERT, R. y A.-L. BARABÁSI, «Statistical mechanics of complex networks», *Reviews of modern physics*, **74**(1), pág. 47, 2002.
- [3] ALFONSO PÉREZ, M., S. BUENO GUILLÉN, M. D. C. D. ELÍAS OLIVENZA, M. D. R. DIÁNEZ DEL VALLE, J. N. VALDÉS *et al.*, «Siete puentes, un camino: Königsberg.», *Suma. Madrid*, 2004, n. 45, febrero; p. 69-78, 2003.
- [4] AMARAL, L. A. y J. M. OTTINO, «Complex networks», *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **38**(2), págs. 147–162, 2004.
- [5] BASU, A. K., *An Introduction to Stochastic Processes*, Alpha Science Int'l Ltd., 2003.
- [6] BIANCONI, G. y A.-L. BARABÁSI, «Bose-Einstein condensation in complex networks», *Physical Review Letters*, **86**(24), pág. 5632, 2001.
- [7] BONDY, J. A. y U. S. R. MURTY, *Graph theory with applications*, tomo 290, Macmillan London, 1976.
- [8] BOX, G. E., «Non-normality and tests on variances», *Biometrika*, **40**(3/4), págs. 318–335, 1953.

- [9] BROOCK, W., J. A. SCHEINKMAN, W. D. DECHERT y B. LEBARON, «A test for independence based on the correlation dimension», *Econometric Reviews*, **15**(3), págs. 197–235, 1996.
- [10] CANAVOS, G. C. y E. G. U. MEDAL, *Probabilidad y estadística*, McGraw Hill, 1987.
- [11] CASTAÑO, E. y J. MARTÍNEZ, «Uso de la función de correlación cruzada en la identificación de modelos ARMA», *Revista Colombiana de Estadística*, **31**(2), págs. 293–310, 2008.
- [12] CINCA, A. N., *Estadística y econometría*, McGraw-Hill Interamericana de España, 1996.
- [13] COSTA, L. D. F., F. A. RODRIGUES, G. TRAVIESO y P. VILLAS BOAS, «Characterization of complex networks: A survey of measurements», *Advances in Physics*, **56**(1), págs. 167–242, 2007.
- [14] DANIELSSON, P.-E., «Euclidean distance mapping», *Computer Graphics and image processing*, **14**(3), págs. 227–248, 1980.
- [15] DEL, R., «Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes y mediante dinámica de sistemas», *EMPIRIA. Revista de Metodología de Ciencias Sociales*, (16), págs. 85–112, 2008.
- [16] EDMONDS, B., «The use of models-making MABS more informative», en *Multi-agent-based simulation*, Springer, págs. 15–32, 2001.
- [17] ESCOBAR, C. A., J. MORENO CADAVID y S. MUNERA ALVAREZ, «Modelo de simulación de una subasta de doble punta mediante el paradigma multi-agente», *Avances en Sistemas e Informática*, **6**(1), págs. 197–205, 2009.
- [18] ESTAVILLOÛ, M. E., «Fútbol y competencia en los medios de comunicación», *Por que amamos el futbol?/Why We Love Soccer?: Un enfoque de politica publica/AN approach on Public Policies*, pág. 185, 2008.

- [19] FALOUTSOS, M., P. FALOUTSOS y C. FALOUTSOS, «On power-law relationships of the internet topology», en *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, tomo 29, ACM, págs. 251–262, 1999.
- [20] GAMS HOME PAGE, «Gams Development Corporation», reucrsodisponible en: <http://http://www.gams.com/>.
- [21] GARCÍA, R., «La investigación interdisciplinaria de sistemas complejos», *México-Buenos Aires. CEA, Serie Materiales*, **1**, pág. 91, 1991.
- [22] GARCÍA, R., «Sistemas complejos», *Conceptos, método y fundamentación*, 2006.
- [23] GILBERT, N., «Agent-based social simulation: dealing with complexity», *The Complex Systems Network of Excellence*, **9**(25), págs. 1–14, 2004.
- [24] GOODMAN, S. N., «Toward evidence-based medical statistics. 1: The P value fallacy», *Annals of internal medicine*, **130**(12), págs. 995–1004, 1999.
- [25] GRANFUTBOL.COM, «TÁCTICAS DE EQUIPO - ESTILOS DE JUEGO», recurso disponible en: <http://www.granfutbol.com/estilos-de-juego.html>.
- [26] HILLIER, F. S., «Lieberman. Introduction to operation research», , 2001.
- [27] JORDI LUCAS WEBS, «Fútbol directo: el arte del contragolpe», recurso disponible en: <http://www.futbolaula.com/tactica-estrategia-futbol/futbol-directo-el-arte-del-contragolpe/>.
- [28] KITANO, H., M. ASADA, Y. KUNIYOSHI, I. NODA y E. OSAWA, «Robocup: The robot world cup initiative», en *Proceedings of the first international conference on Autonomous agents*, ACM, págs. 340–347, 1997.
- [29] KORNBROT, D., «Pearson Product Moment Correlation», *Encyclopedia of Statistics in Behavioral Science*, 2005.
- [30] LATORA, V. y M. MARCHIORI, «Efficient behavior of small-world networks», *Physical review letters*, **87**(19), pág. 198 701, 2001.

- 
- [31] LAWLER, G. F., *Introduction to stochastic processes*, CRC Press, 2006.
- [32] LUTZ, M., *Learning python*, O'Reilly Media, 2013.
- [33] MAES, P., «Modeling adaptive autonomous agents», *Artificial life*, **1**(1-2), págs. 135–162, 1993.
- [34] MILGRAM, S., «The small world problem», *Psychology today*, **2**(1), págs. 60–67, 1967.
- [35] NEFTÇI, S., *An introduction to the mathematics of financial derivatives*, Access Online via Elsevier, 2000.
- [36] NEWMAN, M., A.-L. BARABÁSI y D. J. WATTS, *The structure and dynamics of networks*, Princeton University Press, 2006.
- [37] NEWMAN, M. E., «The structure and function of complex networks», *SIAM review*, **45**(2), págs. 167–256, 2003.
- [38] NORDGREN, W. B., «Flexsim: Flexsim simulation environment», en *Proceedings of the 34th conference on Winter simulation: exploring new frontiers*, Winter Simulation Conference, págs. 250–252, 2002.
- [39] NORDGREN, W. B., «Flexsim simulation environment», en *Simulation Conference, 2003. Proceedings of the 2003 Winter*, tomo 1, IEEE, págs. 197–200, 2003.
- [40] NWANA, H. S., «Software agents: An overview», *Knowledge engineering review*, **11**(3), págs. 205–244, 1996.
- [41] PAVÓN, J., M. ARROYO, S. HASSAN y C. SANSORES, «Simulación de sistemas sociales con agentes software», *CMPI-2006. Actas del Campus Multidisciplinar en Percepción e Inteligencia*, **1**, págs. 389–400, 2006.
- [42] PLACKETT, R. L., «Karl Pearson and the chi-squared test», *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, págs. 59–72, 1983.

- 
- [43] RINCÓN, L., «Introducción a los procesos estocásticos», *Departamento de de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM*, 2008.
- [44] ROYSTON, J., «Algorithms As 181: The W test for normality», *Journal of the Royal Statistical Society. Serie C (Applied Statistics)*, **31**(2), págs. 176–180, 1982.
- [45] ROYSTON, J., «An extension of Shapiro and Wilk’s W test for normality to large sample», *Applied Statistics*, págs. 115–124, 1982.
- [46] RUSSELL, S. J. y P. NORVIG, *Inteligencia Artificial: un enfoque moderno*, 1996.
- [47] SANZ MENÉNDEZ, L. *et al.*, «Análisis de redes sociales: o cómo representar las estructuras sociales subyacentes», , 2003.
- [48] VENABLES, W. N., B. D. RIPLEY y W. VENABLES, *Modern applied statistics with S-PLUS*, tomo 250, Springer-verlag New York, 1994.
- [49] WALPOLE, R. E., R. H. MYERS, S. L. MYERS, R. CRUZ y J. A. T. MARINA, «Probabilidad y Estadística para Ingenieros», , 1999.
- [50] WASSERMAN, S., *Social network analysis: Methods and applications*, tomo 8, Cambridge university press, 1994.
- [51] WATTS, D. J. y S. H. STROGATZ, «Collective dynamics of âsmall-worldânetworks», *nature*, **393**(6684), págs. 440–442, 1998.
- [52] WEST, D. B. *et al.*, *Introduction to graph theory*, tomo 2, Prentice hall Englewood Cliffs, 2001.
- [53] WOOLDRIDGE, M., N. R. JENNINGS *et al.*, «Intelligent agents: Theory and practice», *Knowledge engineering review*, **10**(2), págs. 115–152, 1995.

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

---

Jesus David Peña Aguilar

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

## ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS EN REDES DE INTERACCIÓN

Nací el 23 de febrero del año 1986 en la ciudad de Guadalupe, Nuevo León. Desde niño sentí un gran interés por las matemáticas, gracias a esto y a las enseñanzas de las mismas por parte de mis maestros de los niveles de secundaria y preparatoria, me llevaron a tomar la decisión de realizar mis estudios de profesionista como Lic. en Matemáticas por la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Continué mis estudios de Maestría en la misma Universidad en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica en el Programa de Posgrado en Ingeniería en Sistemas (PISIS).